

**Ózbekistan respublikası joqarı hám orta arnawlı bilimlendiriw ministrliǵı**

**Ájiniyaz atındaǵı Nókis Mámleketlik pedagogikalıq institutı**

Matematika hám informatika fakulteti

Matematika oqıtıw metodikası kafedrası

“Matematika oqıtıw metodikası” bilimlendiriw baǵdarı 4<sup>A</sup>-kurs talabası

**« Matematikani oqıtıwda qáteler ústinde islew usılları»**

temasındaǵı

## **PITKERIW QÁNIGETLIK JÍMÍSÍ**

Kafedra baslıǵı:

docent B. Prenov

Ilimiy basshı:

docent M. Asqarov

**Nókis-2019**

## **Matematikanı oqıtıwda qáteler ústinde islew usılları.**

### **Mazmunı.**

<b>Kirisiw.....</b>	<b>3</b>
<b>I-bap. Matematikanı oqıtıwdı shólkemlestiriw formaları hám oqıwshılar tárepinen jiberiletuǵın qáteler.....</b>	<b>4</b>
<b>1-§. Matematikanı oqıtıwdı shólkemlestiriw formaları.....</b>	<b>4</b>
<b>2-§. Shınıǵıw hám jazba jumısların orınlawda oqıwshılar tárepinen jiberiletuǵın qáteler.....</b>	<b>8</b>
<b>II-bap. Matematikanı oqıtıwda qáteler ústinde islew usılları.....</b>	<b>13</b>
<b>1-§. Máseleler sheshiwde jiberiletuǵın qátelerdiń aldın alıw jolları.....</b>	<b>13</b>
<b>2-§. Matematikanı oqıtıwda qáteler ústinde islew usılları.....</b>	<b>33</b>
<b>Juwmaqlaw.....</b>	<b>41</b>
<b>Paydalanılǵan ádebiyatlar.....</b>	<b>42</b>

## Kirisiw.

Házirgi zaman talabına say ósip kiyatırǵan jas áwladtı óz betinshe oylawǵa hám kadrlar básekesine shıdam bere alatuǵınday etip tárbiyalaw máselesi alǵa qoyılǵan. Mektep hám orta arnawlı oqıw orınlarında matematika pánin oqıtıwda oqıwshılardıń qáteleri ústinde islew usılları qánshelli jetilistirilgen sayın sonshelli oqıwshılardıń bilim iyelew qábileti artıp baradı.

Bul pitkeriw qánigelik jumısı mektep hám orta arnawlı oqıw orınlarında ótiletuǵın matematika sabaqlarında oqıwshılar tárepinen jiberiletuǵın qátelerdi tallaw hám olardıń aldın alıw boyınsha metodikalıq kórsetpeler islep shıǵıwǵa arnalǵan.

**Temanin aktuallıǵı:** Mektep hám orta arnawlı oqıw orınlarında oqıwshılardıń tereń hám sapalı bilim alıwı kóbinese matematika páninen hár qıylı shınıǵıwlardı orınlaǵanda kózge taslanatuǵın qátelerdi oqıtıwshınıń óz waqtında anıqlap hám tiysli sharalar kóriwine baylanıslı boladı. Bul bolsa jumıs temasınıń aktuallıǵın belgileydi.

**Pitkeriw qánigelik jumısınıń mazmunı:** Pitkeriw qániygelik jumısı tiykarǵı eki baptan, kirisiw hám juwmaqlaw bólimleri, paydalanılǵan ádebiyatlar diziminen ibarat.

Jumıstıń birinshi babı matematikanı oqıtıwdı shólkemlestiriw formaları hám oqıwshılar tárepinen jiberiletuǵın qáteler bolıp, 1-§ te matematikanı oqıtıwdı shólkemlestiriw formaları, 2-§ te shınıǵıw hám jazba jumısların orınlawda oqıwshılar tárepinen jiberiletuǵın qátelerge baylanıslı materiallar keltirilgen.

Jumıstıń ekinshi babında matematikanı oqıtıwda qáteler ústinde islew usılları bolıp, 1-§ te máseleler sheshiwde jiberiletuǵın qátelerdiń aldın alıw jolları, 2-§ te matematikanı oqıtıwda qáteler ústinde islew usılları haqqında teoriyalıq hám ámeliy materiallar berilgen.

**Pitkeriw qánigelik jumısınıń maqseti:** Bul jumısta matematika sabaqlarında oqıwshılar tárepinen jiberiletuǵın qáteler ústinde islew metodların jetilistiriw maqset etip qóyılǵan.

## **I-bap. Matematikani oqıtıwdı shólkemlestiriw formaları hám oqıwshılar tárepinenı jiberiletuğın qáteler.**

### **1-§. Matematikani oqıtıwdı shólkemlestiriw formaları.**

Tálim metodları oqıtıwdıń aldına qoyılğan maqsetlerine erisiw usılları hámde oqıw materiyalıń teoriyalıq hám ámeliy qolaylastırıw jolların ańlatadı. Oqıtıw metodları tálim principinde oqıtıwshı hám oqıwshı xızmetiniń qanday bolıwı, oqıtıw procesin qanday shólkemlestiriwi hám alıp barıw kerekligin hám de sol processe oqıwshılar qanday is-háreketdi orınlawı kerekligin belgilep beredi.

Klass sabaq sisteması tiykarın dúziwshı klass-jası hám bilimi jağınan birdey bolğan anıq oqıwshılar toparın; sabaq bolsa tikkeley oqıtıwshınıń basshılığı hámde baqlawı astında anıq oqıwshılar toparı menen alıp barılatuğın tálim procesin ańlatıwshı túsinipler. Sabaq oqıw jumıslarınıń tiykarđı shólkemlestiriw forması bolıp esapalandı.

Búgingi kúnde sabaqlardı shólkemlestiriwge tómenдеgi didaktikalıq talaplar qoyılıp atır:

1. Sabaqtıń maqseti hám wazıypalarınıń anıqlıđı hámde pedagogikalıq jaqtan durisliđı.
2. Sabaqtıń tálimiy, tárbiyalıq hám shaxstı rawajlandırıwshılıq wazıypalarınıń birligi hám úzliksizligi.
3. Oqıtıwdıń pútin sabaq hám onıń belgili bólekleriniń wazıypaları hámde mazmunına muwapıq keletuđın, oqıwshılardıń biliwge bolğan aktivligi hám óz betinshe xızmetlerin támiynlewge xızmet etiwshı metodların tańlaw.
4. Sabaqlardı túrli formalarda ótiw.
5. Oqıtıwshınıń basshılıq roli menen oqıwshılardıń aktiv biliw xızmetin birge alıp barıw.
6. Sabaqlardıń óz ara úzliksiz hám dialektikalıq qásiyetlerine iye bolıwına erisiw.
7. Oqıwshılardıń jas hám psixologiyalıq jağdayların esapqa alıw.

8. Sabaqta oqıwshılardı oqıtıw hám tárbıyalaw ushın qolay sharayatlar jaratıw.

9. Sabaqlardı demokratiyalıq principe shólkemlestiriw.

10. Sabaqta oqıwshı erkinligin támiynlewge erisiw.

Ulıwma bilim beriw mektepleri, akademiyalıq hám kolledjlerde tiykarınan klass sabaqlar sisteması, ayırım baslawısh óner tálim mekteplerinde hámde ayırım kolledjlerde ustaz-shákirt sisteması isletiliwi múmkin. Bıraq birinshi túrdegi sistemada tiykarınan ótilgenlerdi tez-tez tákirarlaw, jańa túsiniklerdi hám alınğan bilimlerde qalıplestiriw, kónlikpe hám qániygelerdi qollanıw hám qalıplestiriw didaktikalıq sistemasında paydalanıladı. Bul didaktikalıq sistemanı ámelge asırıw ushın tómendegi sabaq túrleri qollanıladı.

### **1. Jańa oqıw materialnı úyreniw sabaǵı:**

Bunday túrdegi sabaqlardıń maqseti material mamunın úyreniw hám ózlestirip alıw. Bunda oqıwshılar jańa túsiniklerdi úyreniwge, óz betinshe izleniwge, didaktikalıq wazıypalardı orınlawǵa ádeplestiriledi.

Bunday túrdegi sabaqlar orta hám joqarı klass oqıwshıları menen ótkiziledi, sebebi ol klasslardaǵı materialları jaǵınan úlken boladı. Bunday sabaqlardı lekciya, sawbetlesiwler, tájriybe hám sınavlar túrinde ótkiziw múmkin.

### **2. Bilim, kónlikpe hám uqıplılıǵın jetilistiriw: sabaqları**

Bunday sabaqlarǵa tómendegi didaktikalıq wazıypalar tiykar etip alındı:

- jańadan ózlestirilgen bilimlerde sistemalastırıw hám ulıwmalastırıw
- ózlestirilgen bilimlerde tákirarlaw hám bekkemlew
- ózlestirilgen bilimlerde ámeliyatta qollana alıw, tereńlestiriw, keńeyttiriw.
- kónlikpe hám uqıplılıqlardı qalıplestiriw.
- jańa ózlestirilgen bilim, kónlikpe hám uqıplılıqlardı qadaǵalawǵa alıw.

Bul túrdegi sabaqlar jáne bir qansha túrge bólinedi :

- ózlestirilgen bilimlerde bekkemlew
- ózlestirilgen bilim hám uqıplılıqlardı kompleks qollaw sabaqları
- kónlikpe hám uqıplılıqlardı qalıplestiriwshi sabaqlar

Joqarıda keltirilgen sabaqlardıń jáne tómendegi túrleri bar:

- Laboratoriya sabaqları,
- Ámeli shınıǵıw sabaqları,
- Ekskursiya sabaqları,
- Seminar sabaqları.

### **3. Ulıwmalastırılǵan hám sistemalastırılǵan sabaqlar**

Bul túrdegi sabaqlar tómendegi eki túrdegi didaktikalıq wazıypanı sheshiwge qaratılǵan:

1. Oqıwshılar teorıyalıq bilimlerde qay dárejede ózlestirgenligi
2. Ózlestirilgen bilimniń eń kerelik jerleri.

Bul eki jaǵday predmet boyınsha iyelegen kónlikpe hám uqıplılıqlardı, baǵdarlama talapları hámde standart tiykarında sherek, yarım jıllıq, jıllıq ózlestiriw nátiyjelerin kórsetedi.

### **4. Kombinaciyalasqan sabaqlar.**

Bunday túrdegi sabaqlar ámeliyatta keń qollanıladı. Bunday sabaqlarda joqarıda keltirilgen úsh didaktikalıq talaplardan paydalanıladı. Sonlıqtan, bunday sabaqlardı kombinaciyalasqan sabaq dep aytadı.

Bunday túrdegi sabaqlarǵa metodikalıq qatnaslar joqarıda keltirgenimizdey kóriniske iye:

- sabaqta oqıwshı xızmetin shólkemlestiriw
- tákirarlaw, oqıwshı biliminiń tereńligi hám burın ótilgen sabaqlardı qay dárejede ózlestirgenligi
- oqıwshınıń bilimler haqqındaǵı pikirleri hám ańlı ózlestirgenligi
- úyge tapsırma hám ońı durıs orınlaw boyınsha túsinik beriw
- oqıwshılardıń ózlestirgenlik dárejesin sabaq waqtında bahalap barıw.

### **5. Bilimdi qadaǵalw sabaǵı**

Bunday sabaqlardıń didaktikalıq wazıypası oqıwshılardıń oqıtılǵan oqıw materialın qay dárejede ózlestirilgenliklerin anıqlawdan ibarat.

Qadaǵalaw sabaqları tómendegi kórinisde bolıwı múmkin: awızeki soraw, jazba túrde soraw, zacet, laboratoriya sabaqları, ámeliy jumıslar, óz betinshe jazba jumıslar, imtixanlar.

Sabaq procesin shólkemlestiriwde tómendegi jaǵdaylarǵa kewil bóliw kerek:

1. Sabaqtıń maqsetin anıqlaw
2. Sabaqtan kútilgen nátiyjeni belgilew
3. Sabaqta kózde tutılǵan bilim, kónlikpe, uqıplılıq.
4. Sabaqtan kútilgen nátiyje, sabaqtı logikalıq izbe-iz bayanlaw.
5. Maqsetke eristiriwshi bayanlı tekst, sabaqlıq hám tarqatpa materiyallar tiykarında kishi toparlarda islew arqalı yamasa oqıtıwshı tárepinen túsindiriw.
6. Oqıshılardıń tálim mazmunın, maqsetlerin ózlestirgenlik dárejesi. Testler, sorawlar dúziwge úyretedi.
7. Jańa mazmundaǵı tema, túsinipler, kónlikpe hám uqıplılıqlardı ózlestirgenlik dárejesi.
8. Sabaq ótiw metodikası hám qurallardıń tańlanganlıǵı.
9. Sabaqta oqıw procesin ámelge asırıw ushın kórsetpelilik, texnika, tarqatpa materiyallar.
10. Oqıshılardıń bilimi bahalangán keyin onıń nátiyjeleri boyınsha dúzetiwler kirgiziw.

Eger maqset aldınnan jobalastırılmasa bilimniń iyelengenligine kepillik berip bolmaydı.

Sabaqtıń maqseti bul barlıq sabaqlar dawamında iyeleniwi kerek bolǵan bilim, túsinipler, kónlikpe, uqıplılıqlar.

Sabaqtıń wazıypası bul sabaqtıń etaplarındaǵı maqsetti ámelge asırıw ushın qollanılatuǵın qurallar.

Maqsetti ámelge asırıw ushın sabaq nátiyjeligin támiynlewshi ilimiy-metodikalıq, texnologiyalıq usıl tańlap alınadı.

## **2-§. Shıǵıw hám jazba jumısların orınlawda oqıwshılar tárepinen jiberiletuǵın qáteler.**

### **Qatelerdiń payda bolıw sebepleri.**

Qatelerdiń payda bolıw sebepleri tómendegiler boladı:

I. Psixologiyalıq faktorlarǵa baylanıslı bolǵan sebepler.

II. Programma hám oqıwlıqlardan kelip shıǵatuǵın sebepler.

III. Oqıw processin shólkemlestiriwdiń jetilistirilmegenine baylanisli bolǵan sebepler.

IV. Oqıwshılar tárepinnen matematiykalıq tildi talap dárejesinde meńgere almawına baylanisli bolǵanı sebepler.

Oqıwshılarda qáteniń kelip shıǵıwınıń psixologiyalıq sebeplerine tómendegilerdi ajıratıp kórsetiwge boladı:

- naduris asociyativlik baylanıslardı paydalanıw, bir túrdegi tapsirmalardı orınlaw sebepli mánisler ústindegi asociyativlik baylanıslardıń ústemligine baylanisli;
- bir kónlikpeniń qáliplesiw waqtında ekinshisiniń irkiliwi kónlikpesin súwretlewi;
- ayırım kónlikpelerdiń olardıń tásiiri shegaralanǵan yamasa uluma toqtatılǵan máseleler oblastına ótkeriw.

Bizler barlıq matematika oqıtıwshılarına tanıs bolǵan ádetegi qátelerdi ayırıp kórsetemiz. Usınday qátelerge mısallar keltiremiz hám olardıń kelip shıǵıwın táripleymiz.

1. Toliǵ emes kvadrat teńsizlikti teńlemege qarap sheshiw:  $x^2 \leq 4$  teńsizlikti  $x \leq \pm 2$  jazıwǵa alıp keledi. Sızıqlı teńsizliklerdi sheshiw processinde oqıwshılar olardıń sheshiw algoritmi sızıqlı teńlemelerdi sheshiw algoritmine uqsaslıǵına dus keledi. Bul jaǵdayda belgili teńsizler klasın sheshiw processinde sonday



teńlemenin belgili klasın sheshiw processı tek basında yaǵniy túrlendiriw basqıshında process tákirarlanadı. Sheshiwdiń juwmaqlawshı basqıshında tek teńsizliklerge xarakterli bolǵan arawlı háreketler usınıladı, onıń ustine hár qıylı klastaǵı teńsizlikler ushın sáykes fukciyalar klasınıń qásiyetlerine baylanıslı bul háreketler ózgeshe boladı.

2. Dárejeler hám korenler menen islegende orınsız qısqartıwlar, ámeller tártibin anıqlawda, “minus” belgisin paydalanǵanda aljasıwlar. Bizler tómendegi mazmundaǵı jazıwlar menen ushırastıq:  $(-4)^{-2} = 16$ ,  $2^{-3} \cdot \frac{3}{2} = 3^{-3}$ ,

$$2^{-2} = \frac{1}{2^{-2}}, \quad \sqrt[3]{-27} = 3^{-9}, \quad \sqrt[3]{a^3} = \sqrt{a}. \quad \text{Keltirilgen mısallar}$$

dáreje túsinigi oqıwshılar tárepinen kerekli dárejede ózlestirilmegenin kórsetedi.

3. Kóp aǵzalılardı alıwda, teris sanǵa kóbeytkende bir aǵzalılardıń belgisin nadurıs anıqlaw  $\left(\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b} = \frac{a+b-a-b}{a^2-b^2} = 0\right)$ , uqsas bolmaǵan qosılıwshılardı orınsız jıynaw  $(x^2 + 2x = 3x^2)$ . Tájriybe kópshilik jaǵdaylarda bul qáteler qawsırmalardı nadurıs qolanıwdan kelip shıǵadı.

4. Hár qıylı jazılıw formasına iye bolǵan sanlar menen ámellerdi orınlaǵanda ápiwayı bólsheklerdi onıń onlıq juwıqlasıwı menen almastırǵanda uqsaslıqtı nadurıs paydalanıw  $\left(0,75 + \frac{1}{3} = 0,75 + 0,33 = 1,08\right)$ , pútin sandı irracional san menen qosıw  $(4 + \sqrt{2} = 4\sqrt{2})$ . Oqıwshılarda algebrada shamalardıń juwıq mánisi emes al tek dál mánisi paydalanıladı degen anıq poziciya qalıplesken bolıw kerek.

5. Korenen “qutılıw” ǵa umtılıw:  $\sqrt{1-x} < 4$  ten  $1-x < 16$  kelip shıǵadı,  $\frac{x}{\sqrt{3}}$  ańlatpası  $\frac{x^2}{3}$  menen almastırıladı. Matematika sabaqlarında “korenen qutılamız” sózin qolanıwdı azaytıwǵa tıwra keledi.

6. Qosındınıń kvadratı hám kubın kóbeymeniń kvadratı sıyaqlı uqsaslıq boyınsha esaplaw, misalı,  $(a+b)^3 = a^3 + b^3$ .

7. Simvolları paydalanıwdığı qáteler:  $\sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{1}{2}$ ,  $\log 2$ , hám t.b.

8. Teńlemenin korenlerin joǵaltıw:  $\sqrt{5 - 4x} = 3,2$  teńlemede  $x = -1,31$  korenin esapqa almaydı yamasa  $x^2 = 36$  jazıwınan  $x = 6$  jazıwına ótiw. Birinshi jaǵdayda qopaq qáte hám onı dúzetiw quramalı boladı. Bul qátениń aldın alıw ushin sanlı hám háripli ańlatpalardı qaraǵanda háripli ańlatpalardıń mánisi oń hám teris bolıwıda múmkin ekenligin oqıwshılardıǵa aytırıp ótiw kerek boladı.

9. Bólshek, irracional hám logarifmlik ańlatpalardıń anıqlanıw oblastın tapqanda naduris shártlerdi qoyıw, misalı,  $\sqrt{x^2 + 4x}$  ańlatpası ushin  $x$  ózgeriwshiniń barlıq mánisleri oń bolıwdı talap qıladı yamasa  $\frac{1}{a-4}$  ańlatpası  $a \neq 0$  bolǵanda anıqlanǵan.

10. Aqırında “minuske minus plyus beredi” túsiniǵi payda etetuǵın oqıwshılardıń kóp qátelerin dıqqattan shette qaldırıwǵa bolmaydı:

$(-2)^{-2} = 4$ ,  $-\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ,  $\log_{-a}(-x) = \log_a x$ ,  $-x + 1 - 3x = 4x + 1$  hám t.b.

Oqıwshılardıń qátelerin dúzetiw hám aldın alıw jolların kórseteyik. Oqıwshılarda payda bolıwı múmkin bolǵan hám keleshekte bekiletuǵın qátelerdiń aldın alıw ushin tómendegiler usınıladı:

1. Jańa materiallardı úyreniwdiń tómendegi basqıshlarında oqıwshılardıń iskerligin shólkemlestiriwge arnalǵan metodikalıq usıllardıǵa oylap jantasıw hám juwapkerli qaraw kerek boladı:

- jańa materialdı kritiw;

- ámellerdi qalıplestiriw;

- mäseleni sheshiwdiń algoritmin qalıplestiriw.

2. Jumista adettegi talıqlaw anıq ajıratılǵan “qátelerge iytermelewshi tapsırmalar” jıynaǵın paydalanıwdı oylastırıw kerek boladı.

3. Tapsırmalarğa tayar sheshimlerdegi qátelerdi izlewge baylanıslı bolğan mısallardı turaqlı túrde qosıw kerek boladı;

Anaw yamasa mınaw qáteler qashıw múmkin bolmağan oqıtıwdıń shártli elementi bolıp esaplanadı. Sonlıqtan qátelerdi dúzetiw tómendegilerdi iske asırıwǵa dıqqattı talap etedi:

4. Oqıwshılardıń óz betinshe jumısların teksergenen keyn qáteler ústinde islewdi jaqsı oylastırıw hám arnawlı shólkemlestiriw. Bunday jumıs oqıtıwshı tárepinen tayarlanǵan oqıwshılardıń óz ara talıqlaw hám óz ara tekseriw, jánede óz betinshelik iskerligine baǵdarlanǵan materiallardı kiritiw kerek.

5. Ádettegi qáteler payda bolatuǵın kóbirek problemalıq tapsırmalardı kiritiw, awızsha esaplaw, matematikalıq diktant hám basqa da jumıs formaların kiritiw kerek.

Qadaǵalaw jumıslarında oqıwshılardıń tómendegi qátelerin kórsetiw boladı.

1. Ápiwayı trigonometriyalıq teńlemelerdiń korenleri ushın formulaların paydalanǵanda qátelerge jol qoyıw.

Mısalı,  $\sin x = -\frac{1}{2}$  teńlemesin sheshiwdi oqıwshılar tómendegishe orınlaydı:

a) nadurıs sheshim  $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ,  $k \in Z$ , bunda kosinuske qarata koren esaplaw formulasın qatelesip paydalanǵan;

b)  $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $n \in Z$ , durıs sheshimniń ornına, nadurıs sheshimdi

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z \text{ jazıw.}$$

2. Sinus hám kosinus trigonometriyalıq funkciyalardıń mánisleriniń kópligin bilmewge baylanisli bolǵan qáteler. Oqıwshılar  $\sin x = a$  yamasa  $\cos x = a$  trigonometriyalıq teńlemelerdiń korenleriniń furmulasın,  $a \in [-1; 1]$  shártin dıqqatqa almastan, bul teńlemeler ulıwma sheshimge iye bolmaytuǵın túrde jazadı.

Mısalı, oqıwshılardıń jumısında kere trigonometriyalıq funkciyalardıń anıq bolmaǵan mánisleri ushırasadı:  $\frac{4}{3} \notin [-1; 1]$  ekenligine qaramastan  $\arcsin \frac{4}{3}$  hám t.b.

3. Ápiwayı trigonometriyalıq teńlemelerdiń sheshiminiń ulıwma túrinen dara túrine ótiwde qátelerge jol qoyadı. Mısalı,  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  teńlemeniniń sheshimin durıs jazıp  $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k$ ,  $k \in Z$ , teńliktiń oń tárepindegi ańlatpanı ápiwayılastırıwda qátege jol qoyadı: Mısalı  $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $k \in Z$ , jazadı.

4. Irracional sanlı ańlatpalar menen islew uqıbınıń jetispewshiligine baylanıslı bolǵan qáteler. Buǵan baylanıslı kópshilik oqıwshılar ushın irracional koefficiyentli kvadrat teńlemelerdi sheshiw qıyınshılıq tuwdıradı. Mısalı trigonometriyalıq teńlemelerde ózgeriwshilerin almastırıw arqalı

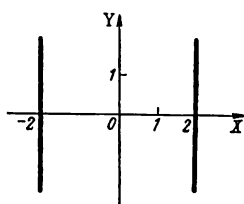
$-6t^2 + 5\sqrt{2}t + 8 = 0$  teńlemenini payda etip oqıwshılar hátteki diskriminanttı esaplawda da qıynaladı. Bazı bir oqıwshılar sonda da diskriminanttı esaplap  $D = 242$  anıqlap  $\sqrt{242} = 11\sqrt{2}$  túrlendiriwdi orınlamaǵan. Bul teńlemeniniń koreniń úlken  $t_{1,2} = \frac{-5\sqrt{2} \pm \sqrt{242}}{-12}$  jazıwǵa alıp keledi hám bul tiykarında sheshiwdi qıyınlastırıwǵa alıp keledi.

## II-bap. Matematikani oqıtıwda qáteler ústinde islew usılları.

### 1-§. Máseleler sheshiwde jiberiletuǵın qátelerdiń aldın alıw jolları.

Oqıwshılar tárepinen mısıl hám máseleler sheshiwde jiberiletuǵın qáteler hám olardıń aldın alıw ushın eń dáslep oqıwshılardıń teoriyalıq bilimlerdi tereń iyelewine erisiwimiz kerek. Sonıń menen birge sabaqlarda turaqlı túrde qáteler menen islewdi jolǵa qoyıw kerek boladı. Oqıwshılardıń jazba jumıslarında jiberilgen qátelerdi talıqlap keleshekte qátelerdi boldırmaw jollarınıń birin tómendegi mısallar sistemasında qarap ótemiz.

**1-mısıl.**  $\{0; -1; +1\}$   $xOy$  koordinatlar tegisliginde  $|x|=2$  teńleme grafigin dúziń. (juwabı: súwretke qarań)



**2- mısıl.**  $\beta$  niń qanday mánisinde  $(\beta - 1)x^2 - 2(\beta + 1)x + \beta - 2 = 0$  teńleme bir korengge iye boladı?

Nadurıs sheshimi. Kvadrat teńleme  $ax^2 + bx + c = 0$  diskrimenanti  $b^2 - 4ac = 0$  bolǵanda bir korengge iye boladı. Esaplaymız

$$D = b^2 - 4ac = 4(\beta + 1)^2 - 4(\beta - 1)(\beta - 2) = 4(5\beta - 1).$$

$$D = 0 \text{ bolǵanda, } \beta = \frac{1}{5} \text{ boladı.}$$

$$\text{Nadurıs juwap: } \left\{ \frac{1}{5} \right\}.$$

Durıs sheshimi. Berilgen teńleme  $\beta - 1 \neq 0$  bolǵanda kvadrat teńleme boladı. Ol  $\beta - 1 = 0$  bolǵanda sızıqlı teńlemege aylanadı. Demek eki jaǵday bolıwı múmkin:

1)  $\beta \neq 1$ . Diskrimenanti esaplaymız:

$$D = 4(\beta + 1)^2 - 4(\beta - 1)(\beta - 2) = 4(5\beta - 1)$$

$D = 0$  bolǵanı ushın  $\beta = \frac{1}{5}$  iye boladı;

2)  $\beta = 1$ . Berilgen teńkemege  $\beta = 1$  qoyamız hám bir korengge iye bolǵan  $-4x - 1 = 0$  teńlemege iye bolamız.

Durıs juwap:  $\left\{\frac{1}{5}; 1\right\}$ .

**3-mısal.** korengge iye bolatuǵın qálegen  $x^4 + px^2 + q = 0$  bikvadrat teńlemenin barlıq korenleriniń qosındısı nege teń? (juwabı: 0.)

**4-mısal.** Teńlemenı sheshiń  $\sqrt{x}(x^2 - 1) = 0$ .

Nadurıs sheshimi:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x}(x^2 - 1) = 0) &\Leftrightarrow (x = 0 \text{ yamasa } x^2 - 1 = 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x = 0 \text{ yamasa } x = 1 \text{ yamasa } x = -1) \end{aligned}$$

Nadurıs juwap:  $\{0; -1; +1\}$

Durıs sheshimi. I usil. Teńlemenı túrlendiremiz

$$(\sqrt{x}(x^2 - 1) = 0) \Leftrightarrow \left( \begin{cases} \sqrt{x} = 0, \\ x^2 - 1 \text{ mániske iye} \end{cases} \text{ yamasa } \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ \sqrt{x} \text{ mániske iye} \end{cases} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left( \begin{cases} x = 0, \\ -\infty < x < +\infty \end{cases} \text{ yamasa } \begin{cases} x = \pm 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ yamasa } x = 1)$$

II usil. Anıqlanıw oblastı:  $x \geq 0$  tómendegi túrlendiriwdi orınlaymız:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x}(x^2 - 1) = 0) &\Leftrightarrow \left( \begin{cases} x \geq 0, \\ \sqrt{x} = 0 \end{cases} \text{ yamasa } \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x = 0 \text{ yamasa } x = 1). \end{aligned}$$

Durıs juwap:  $\{0; 1\}$

**5-mısal.** Teńlemeni sheshiń  $\sqrt{(x+5)^2} = x+5$  juwabi:  $[-5; +\infty)$

16.  $\sqrt{f(x)} = g(x)$  túrdegi teńlemelerdi kvadratqa kótergenimizde ádette aniqlanıw oblastın a tiyisli bolǵan jat korenler payda boladı. Olardı alıńǵan nátiyjelerdi tekseriw arqalı aniqlaw múmkin: barlıq korenlerdi izbe-iz qoyamız.

$\sqrt{f(x)} = g(x)$  túrdegi teńlemelerdi kvadratqa kótergende eger qosımsha shárt qoysaq aniqlanıw oblastına tiyisli bolǵan jat korenler bolmaydı:  $g(x) \geq 0$ , yaǵnıy

$$\left(\sqrt{f(x)} = g(x)\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}\right)$$

16a Mısal. Teńlemeni sheshiń

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 1.$$

Naduris sheshimi. Aniqlanıw oblastın tabamız:

$$\left(\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x+3 \geq 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow (x \geq -1)$$

Teńlemeni túrlendiremiz:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 1) &\Leftrightarrow (\sqrt{2x+3} = 1 - \sqrt{x+1}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \geq -1 \\ 2x+3 = 1 - 2\sqrt{x+1} + x+1 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \geq -1 \\ x+1 = -2\sqrt{x+1} \end{cases}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow (x = 3 \text{ yamasa } x = -1) \end{aligned}$$

Naduris juwap:  $\{-1; 3\}$

Durıs sheshimi: I usıl. Aniqlanıw oblastı:  $x \in [-1; +\infty)$ .

Iye bolamız:  $(\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 1) \Leftrightarrow (\sqrt{2x+3} = 1 - \sqrt{x+1}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left( \left\{ \begin{array}{l} x \geq -1 \\ 2x + 3 = 1 - 2\sqrt{x+1} + x + 1 \end{array} \right. \right) \Leftrightarrow \left( \left\{ \begin{array}{l} x \geq -1 \\ x + 1 = -2\sqrt{x+1} \end{array} \right. \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \left\{ \begin{array}{l} x \geq -1 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{array} \right. \right) \Leftrightarrow (x = 3 \text{ yamasax} = -1).$$

Teńlemeni jup dárejege kótergenimiz ushın, kelip shıqqan juwaplardı tekserip kóremiz, berilgen teńlemege qoyıp,  $x = 3$  koreni teńlemeni qanaatlandırmaytuǵının túsinemiz.

II usıl. Túrlendiriwdi orınlaymız

$$(\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \left\{ \begin{array}{l} x+1 \geq 0 \\ 2x+3 \geq 0 \\ x+1 + 2x+3 + 2\sqrt{(x+1)(2x+3)} = 1 \end{array} \right. \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \left\{ \begin{array}{l} x \geq -1 \\ 2\sqrt{2x^2+5x+3} = -3x-3 \end{array} \right. \right) \Leftrightarrow \left( \left\{ \begin{array}{l} x \geq -1 \\ -3x-3 \geq 0 \\ (2\sqrt{2x^2+5x+3})^2 = (-3x-3)^2 \end{array} \right. \right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \left\{ \begin{array}{l} x \geq -1 \\ x \leq -1 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{array} \right. \right) \Leftrightarrow \left( \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ x = -1 \text{ yamasa } x = 3 \end{array} \right. \right) \Leftrightarrow (x = -1).$$

Durıs juwap:  $\{-1\}$

**6-mısal.**  $x^2 + px + q = 0$  kvadrat teńlemenin onin korenleri  $p$  hám  $q$  ge teń bolatuǵın etip koefficientlerin anıqlań. Juwabı:  $\{(0; 0), (1; -2)\}$

**7-mısal.** Teńlemeni sheshin

$$(x-3)(x+1) + 3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = 4.$$

Nadurıs sheshimi. Iye bolamız:



$$\begin{aligned}
& \left( (x-3)(x+1) + 3(x-3) \sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = 4 \right) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \left( (x-3)(x+1) + 3\sqrt{(x+1)(x-3)} = 4 \right) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \left( y^2 + 3y - 4 = 0 \quad / \quad y = \sqrt{(x+1)(x-3)} \right) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \left( y = 1 \text{ yamasa } y = -4 \quad / \quad y = \sqrt{(x+1)(x-3)} \right) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \left( \sqrt{(x+1)(x-3)} = 1 \text{ yamasa } x \in \emptyset \right) \Leftrightarrow (x = 1 \pm \sqrt{5}).
\end{aligned}$$

Tekseriw arqali  $x = 1 - \sqrt{5}$  koreni teńlemeni qanaatlandırmaytuǵının kóremız.

Nadurıs juwap:  $\{1 + \sqrt{5}\}$ .

Durıs sheshimi. Anıqlanıw oblastın tabamız:

$$\begin{aligned}
& \left( \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \text{ yamasa } \begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (x > 3 \text{ yamasa } x \leq -1) \Leftrightarrow (x \in (-\infty; -1] \cup (3; +\infty))
\end{aligned}$$

Teńlemeni túrlendiremiz:

$$\begin{aligned}
& \left( (x-3)(x+1) + 3(x-3) \sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = 4 \right) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \left( \begin{cases} x-3 > 0 \\ (x-3)(x+1) + 3\sqrt{(x-3)^2} \sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = 4 \end{cases} \text{ yamasa } \right. \\
& \left. \begin{cases} x-3 < 0 \\ (x-3)(x+1) - 3\sqrt{(x-3)^2} \sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = 4 \end{cases} \right) \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left( \begin{cases} x > 3 \\ y^2 + 3y - 4 = 0 \end{cases} / y = \sqrt{(x-3)(x+1)} \text{ yamasa} \right.$$

$$\left. \begin{cases} x < 3 \\ y^2 - 3y - 4 = 0 \end{cases} / y = \sqrt{(x-3)(x+1)} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \begin{cases} x > 3 \\ y = 1 \text{ yamasa } y = -4 \end{cases} / y = \sqrt{(x-3)(x+1)} \text{ yamasa} \right.$$

$$\left. \begin{cases} x < 3 \\ y = -1 \text{ yamasa } y = 4 \end{cases} / y = \sqrt{(x-3)(x+1)} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \left\{ \frac{x > 3}{\sqrt{(x-3)(x+1)} = 1} \text{ yamasa} \left\{ \frac{x < 3}{\sqrt{(x-3)(x+1)} = 4} \right\} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 1 + \sqrt{5} \text{ yamasa } x = 1 - 2\sqrt{5})$$

Durıs juwap:  $\{x = 1 + \sqrt{5}; x = 1 - 2\sqrt{5}\}$ .

**8-mısal.** Qatelikti anıqlaw:  $-4\sqrt{5} = \sqrt{(4)^2}\sqrt{5} = \sqrt{80}$ . (juwabı:

$$-4\sqrt{5} = -\sqrt{4^2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{80} \text{ yamasa } -4\sqrt{5} = -\sqrt{-(-4)^2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{80})$$

**9-mısal:** Teńlemenı sheshiń:  $\sqrt[5]{x-1} + \sqrt{x+2} = 3$

Durıs sheshimi. Berilgen teńlemenıń sol tárepi  $x$  boyınsha monoton ósetuǵının ańlaymız. Demek teńleme birden artıq korengge iye bolıwı múmkin emes. Tańlaw arqalı  $x = 2$  ni tabamız. Demek basqa korenleri bolıwı múmkin emes.

Durıs juwabı:  $\{2\}$ .

**10-mısal:** Teńlemenı sheshiń  $\sqrt{12-x} = x$ . (juwabı:  $\{2\}$ ).

**11-mısal:** Teńlemenı sheshiń:  $\left| \left| |x-1| + 2 \right| - 1 \right| + 1 = 2$

Durıs sheshimi. Eń sırtqısınan baslap izbeizlik penen modullerden qutılamız. Bunda qálegen ańlatpanıń moduli teris sanǵa teń bolıwı múmkin emes ekenligin esapqa alamız.

Teńlemenı túrlendiremiz :

$$\begin{aligned} & \left( \left| \left| |x - 1| + 2| - 1 \right| + 1 \right| = 2 \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left( \left( \left| |x - 1| + 2| - 1 \right| + 1 \right. \right. \\ & \left. \left. = 2 \right) \text{ yamasa } \left( \left| |x - 1| + 2| - 1 \right| + 1 = -2 \right) \right) \\ & \Leftrightarrow \left( (|x - 1| + 2| - 1 = 1) \text{ yamasa } (|x - 1| + 2| - 1 = -3) \right) \\ & \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left( (|x - 1| + 2 = 2) \text{ yamasa } (|x - 1| + 2 = 0) \right) \\ & \Leftrightarrow (|x - 1| = 0 \text{ yamasa } |x - 1| = -4 \text{ yamasa } |x - 1| = -2) \\ & \Leftrightarrow (x = 1) \end{aligned}$$

Durıs juwap: {1}

**12-mısal:** Teńlemenı sheshiń  $x \sqrt{\frac{x-1}{x}} = a$ .

$$\text{(juwap: } \left\{ -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a^2} \ / \ a > 0, \ -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + a^2} \ / \ a \leq 0 \right\})$$

**13-mısal:**  $f(x)$  sızıqlı funkciyası berilgen.  $\varphi(x) = f(f(x))$  da sızıqlı ekenligin dálileń.

Durıs sheshimi.

$f(x)$ - sızıqlı funkciya bolǵanı ushın:

$$\begin{aligned} f(x) &= kx + b, \quad \varphi(x) = f(f(x)) = k(kx + b) + b = k^2 + (kx + b) \\ &= k_1 + b_1 \end{aligned}$$

$k_1 = k^2$  hám  $b_1 = kx + b$  ni dálilewimiz kerek edi.

**14-mısal:**  $a$  nıń qanday manislerinde

$(a^2 - 3a + 2)x^2 - (a^2 - 5a + 4)x + a - a^2 = 0$  teńlemenin korenleri ekiden kóp boladı.

**15-mısal:** Teńsizlikti sheshin  $\sqrt{x+2} > -2$

Nadurıs sheshim. Anıqlanıw oblastı:  $x \geq -2$ .

Bunnan iye bolamız:

$$(\sqrt{x+2} > -2) \Leftrightarrow ((x+2) > (-2)^2) \Leftrightarrow (x > 2)$$

Nadurıs juwap:  $(2; +\infty)$

Durıs sheshim. Anıqlanıw oblastı:  $x \geq -2$ . Qálegen on sanı barlıq waqıtta teris sannan  $(-2)$  úlken bolǵanlıqtan, berilgen teńsizlik anıqlanıw oblastında jatıwshı barlıq  $x$  lar ushin durıs boladı.

Durıs juwap:  $[-2; +\infty)$ .

**16-mısal:** Teńsizlikti sheshin  $\sqrt{x+1} > -2x$ .

(juwap:  $((1 - \sqrt{17})/(8; +\infty))$ ).

**17-mısal:** Teńsizlikti sheshin  $\sqrt{1-x^2} > x$

Nadurıs sheshimi. Anıqlanıw oblastı:  $x \in [-1; 1]$ .

Berilgen teńsizlikti kvadratqa kóteremiz:

$$(\sqrt{1-x^2} > x) \Leftrightarrow (1-x^2 > x^2) \Leftrightarrow (x^2 < 1/2) \Leftrightarrow (-\sqrt{2}/2 < x < \sqrt{2}/2)$$

Nadurıs juwap:  $(-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2)$ .

Durıs sheshimi. Anıqlanıw oblastı:  $x \in [-1; 1]$ .

Teńsizlikti túrlendiremiz:

$$(\sqrt{1-x^2} > x) \Leftrightarrow \left( \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ 1-x^2 > x^2 \end{array} \right\} \text{ yamasa } \left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \\ x < 0 \end{array} \right\} \right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left( \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 < 1/2 \end{cases} \text{ yamasa } -1 \leq x < 0 \right) \\ &\Leftrightarrow (0 \leq x < \sqrt{2}/2 \text{ yamasa } -1 \leq x < 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-1 \leq x < \sqrt{2}/2) \end{aligned}$$

Duris juwap:  $[-1; \sqrt{2}/2)$

**18-mısal.** Teńsizlikti sheshiń  $\sqrt{x^2 - 4x} - x > -3$ .

(juwap:  $(-\infty; 0] \cup (4, 5; +\infty)$ ).

**19-mısal.** Funkciyaniń anıqlanıw oblastın tabıń

$$y = \sqrt{\frac{6}{x-4} + 1}$$

Naduris sheshimi.

$$\begin{aligned} &\left( \frac{6}{x-4} + 1 \geq 0 \right) \Leftrightarrow \left( \frac{x+2}{x-4} \geq 0 \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left( \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-4 > 0 \end{cases} \text{ yamasa } \begin{cases} x+2 < 0 \\ x-4 < 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow (x > 4 \text{ yamasa } x < -2) \end{aligned}$$

Naduris juwap:  $(-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$

Duris sheshimi.

$$\begin{aligned} &\left( \frac{6}{x-4} + 1 \geq 0 \right) \Leftrightarrow \left( \frac{x+2}{x-4} \geq 0 \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left( \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-4 > 0 \end{cases} \text{ yamasa } \begin{cases} x+2 \leq 0 \\ x-4 < 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x > 4 \text{ yamasa } x \leq -2) \end{aligned}$$

Duris juwap:  $(-\infty; -2] \cup (4; +\infty)$

**20-mısal.** Teńsizliktisheshiń

$$\frac{\sqrt{17 - 15x - 2x^2}}{x + 3} > 0$$

(Juwap(-3; 1))

**21-mısal.** Teńlemeni sheshiń  $27x^{\log_{27} x} = x^{10/3}$ .

Juwap: {3; 27<sup>3</sup>}

**22-mısal:** Teńlemeni sheshiń

$$3^{\log^2_3 x} + x^{\log_3 3} = 162$$

Nadurıs sheshimi. Túrlendiriwdi isleyviz:

$$(3^{\log^2_3 x} + x^{\log_3 3} = 162) \Leftrightarrow (x^2 + x^{\log_3 x} = 162)$$

Durıs sheshimi. Anıqlanıw oblastı:  $x > 0$ .

Bunnan kelip shıǵadı:

$$\begin{aligned} (3^{\log^2_3 x} + x^{\log_3 x} = 162) &\Leftrightarrow ((3^{\log_3 x})^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162) \\ &\Leftrightarrow (x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162) \Leftrightarrow (x^{\log_3 x} = 81) \\ &\Leftrightarrow (\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 81) \Leftrightarrow (\log_3 x \cdot \log_3 x = \log_3 3^4) \\ &\Leftrightarrow (\log_3^2 x = 4) \Leftrightarrow (\log_3 x = \pm 2) \end{aligned}$$

( $x = 3^2$  yamasa  $x = 3^{-2}$ ).

Durıs juwap: {9; 1/9}.

**23-mısal.** Ápiwayılastırıń

$$49^{1/\log_8 7} - \log_2 \log_2 \sqrt[4]{\sqrt{2}} \quad (\text{juwap: } 67)$$

**24-mısal.** Teńlemeni sheshiń:

$$\sqrt{\log_{0,04} x + 1} + \sqrt{\log_{0,2} x + 3} = 1.$$

Durıs sheshimi: Anıqlanıw oblastın tabıń:

$$\left( \begin{cases} \log_{0,04} x + 1 \geq 0 \\ \log_{0,2} x + 3 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{cases} x \leq 25 \\ x \leq 125 \\ x > 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow (0 < x \leq 25).$$

Túrlendiriwdi orınlaymız:

$$\begin{aligned} (\sqrt{\log_{0,04} x + 1} + \sqrt{\log_{0,2} x + 3} = 1) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\log_{0,04} x + 1 = \log_{0,2} x + 3 - 2\sqrt{\log_{0,2} x + 3} + 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (6 + \log_{0,2} x = 4\sqrt{\log_{0,2} x + 3}) \\ &\Leftrightarrow (\log^2_{0,2} x - 4 \log_{0,2} x - 12 = 0) \\ &\Leftrightarrow (\log_{0,2} x = 6 \text{ yamasa } \log_{0,2} x = -2) \\ &\Leftrightarrow (x = (1/5)^6 \text{ yamasa } x = 25) \end{aligned}$$

Durıs juwap: {25}.

**25-mısal.** Teńlemi sheshiń:  $\log_{3/x} x - \log_x(3/x) = 8/3$

(juwap:  $\{3^{-1/2}; 3^{3/4}\}$ ).

**26-mısal.**  $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$  bolǵan da  $a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1$  bolatuǵının dálileń.

Durıs sheshim. İye bolamız:

$$\begin{aligned} (a^{\log_c b} = b^{\log_c a}) &\Leftrightarrow (\log_c a^{\log_c b} = \log_c b^{\log_c a}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\log_c b \cdot \log_c a = \log_c a \cdot \log_c b) \Leftrightarrow (0 = 0). \end{aligned}$$

**27-mısal.** Teńlemeni sheshiń  $25^{\lg x} = 5 + 4x^{\lg 5}$ . (juwap: {10}).

**28-mısal.** Teńlemeni sheshiń  $x^{\lg 2} \cdot 2^{-\lg x} = 1$ .

Naduris sheshimi. Anıqlanıw oblastı:  $x > 0$ .

Teńlemini túrlendiremiz:

$$\begin{aligned}(x^{\lg 2} \cdot 2^{-\lg x} = 1) &\Leftrightarrow (\lg(x^{\lg 2} \cdot 2^{-\lg x}) = \lg 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\lg 2 \cdot \lg x - \lg x \cdot \lg 2 = 0) \Leftrightarrow (0 = 0)\end{aligned}$$

Naduris juwap:  $\emptyset$ .

Duris sheshimi. Anıqlanıw oblastı:  $x > 0$ .

Iye bolamiz:

$$\begin{aligned}(x^{\lg 2} \cdot 2^{-\lg x} = 1) &\Leftrightarrow (\lg(x^{\lg 2} \cdot 2^{-\lg x}) = \lg 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\lg 2 \cdot \lg x - \lg x \cdot \lg 2 = 0) \Leftrightarrow (0 = 0)\end{aligned}$$

Duris juwap:  $(0; +\infty)$ .

**29-mısal.** Teńlemini sheshiń  $x^{\log_{x^2}(x^2-1)} = 5$ .

(juwap:  $\{+\sqrt{26}\}$ ).

**30-mısal.** Teńlemini sheshiń  $\log_2(2^x - 1) \cdot \log_2 \frac{1}{2^{x+1}-2} = -2$ .

Duris sheshimi. Anıqlanıw oblastın anıqlaymız:

$$\left( \begin{cases} 2^x - 1 \\ 2^{x+1} - 2 \end{cases} \right) \Leftrightarrow (2^x > 1) \Leftrightarrow (x > 0).$$

Iye bolamız:  $(\log_2(2^x - 1) \cdot \log_2 \frac{1}{2^{x+1}-2} = -2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\log_2(2^x - 1) \cdot \log_2(2(2^x - 1))^{-1} = -2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_2^2(2^x - 1) + \log_2(2^x - 1) - 2 = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_2(2^x - 1) = -2 \text{ yamasa } \log_2(2^x - 1) = 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 1 = 1/4 \text{ yamasa } 2^x - 1 = 2) \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow (2^x = 5/4 \text{ yamasa } 2^x = 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 2^x = \log_2(5/4) \text{ yamasa } \log_2 2^x = \log_2 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = \log_2(5/4) \text{ yamasa } x = \log_2 3).$$

Durıs juwap:  $\{\log_2(5/4); \log_2 3\}$ .

**31-mısal.**  $y = \log_2 \log_6(2^{\sqrt{x+1}} + 4)$  fukciyasiniń grafiginde ordinatası 1 ge teń bolatuǵın tochkaniń abscissasın tabıń. (juwapı:  $\{16\}$ ).

77.  $a_1u + a_2v = 0$  yamasa  $a_1u^2 + a_2uv + a_3v^2 = 0$  túrdegi teńlemelerge sáykes túrde  $u$  hám  $v$  larǵa salıstırǵanda birinshi yamasa ekinshi dárejeli bir tekli teńlemeler dep ataladı. Bunday teńlemeler olardıń eki tárepin  $v$  yamasa  $v^2$  qa bóliw arqalı  $t = \frac{u}{v}$  ge salıstırǵanda tómendegi teńlemelerge keltiriledi;

$$a_1t + a_2 = 0 \text{ yamasa } a_1t^2 + a_2t + a_3 = 0.$$

Usınday túrlenderiwdi joqarı dárejeli bir tekli teńlemelerdi sheshiw ushın da qollanıwǵa boladı.

**32-mısal.** Teńlemeni sheshiń  $2^{2x+2} - 6^x - 2 \cdot 3^{2x+2} = 0$

Durıs sheshimi. Iye bolamız:

$$(2^{2x+2} - 6^x - 2 \cdot 3^{2x+2} = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4 \cdot 2^{2x} - 3^x \cdot 2^x - 18 \cdot 3^{2x} = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4 \cdot (2/3)^{2x} - (2/3)^x - 18 = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((2/3)^x = -2 \text{ yamasa } (2/3)^x = 9/4 = (2/3)^{-2}) \Leftrightarrow (x = -2).$$

Durıs juwap:  $\{-2\}$ .

**33-mısal.** Teńlemeni sheshiń  $\log_{\sqrt{2}}(5^x - 1) \cdot \log_{\sqrt{2}} \frac{2\sqrt{2}}{5^x - 1} = 2$ .

(juwap:  $\{\log_5 3; \log_5(\sqrt{2} + 1)\}$ ).

**34-mısal.** Teńlemedi sheshiń  $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$

Nadurıs sheshimi. Anıqlanıw oblastı:  $x \geq -1$ .

Iye bolamız:

$$\begin{aligned} (4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}) &\Leftrightarrow (4^{(x+1)^{1/2}} = 64 \cdot 2^{(x+1)^{1/2}}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (4^{x+1} = 64^2 \cdot 2^{x+1}) \Leftrightarrow (2^{x+1} = (2^6)^2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2^{x+1} = 2^{12}) \Leftrightarrow (x = 11). \end{aligned}$$

Nadurıs juwap: {11}.

Durıs sheshimi. I jolı: anıqlanıw oblastı:  $x \geq -1$ .

$$\begin{aligned} (4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}) &\Leftrightarrow ((2^2)^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2^{2\sqrt{x+1}} - 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}} = 0) \Leftrightarrow ((2^{\sqrt{x+1}})^2 - 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}} = 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2^{\sqrt{x+1}} = 0 \text{ yamasa } 2^{\sqrt{x+1}} = 64 = 2^6) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x+1} = 6) \Leftrightarrow (x = 35). \end{aligned}$$

II jolı. Anıqlanıw oblastı:  $x \geq -1$ .

$$\begin{aligned} (4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}) &\Leftrightarrow (\log_2 4^{\sqrt{x+1}} = \log_2(64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}})) \Leftrightarrow \\ (2 \cdot \sqrt{x+1} = 6 + \sqrt{x+1}) &\Leftrightarrow (x = 35). \end{aligned}$$

Durıs juwap: {35}.

**35-mısal.** Teńlemedi sheshiń  $12 \cdot 3^{1/(2x)} - 3^{1/x} = 27$

(juwap: {1/4 ; 2/3}.)

**36-mısal.** Teńlemei sheshiń  $x + \log_2(9 - 2^x) = 3$ .

Durıs sheshimi. Anıqlanıw oblastı teńsizlik penen belgilenedi:  $2^x < 9$ .

Túrlendiremiz:  $(x + \log_2(9 - 2^x) = 3) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\log_2(9 - 2^x) = 3 - x) \Leftrightarrow \left( \begin{cases} 9 - 2^x = 2^{3-x} \\ 9 - 2^x > 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{cases} 9 - 2^x = 8 \cdot \frac{1}{2^x} \\ 2^x < 9 \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \begin{cases} 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0 \\ 2^x < 9 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{cases} 2^x = 8 \\ 2^x < 9 \end{cases} \text{ yamasa } \begin{cases} 2^x = 1 \\ 2^x < 9 \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 3 \text{ yamasa } x = 0).$$

Durıs juwap:  $\{0; 3\}$ .

**37-mısal.** Teńlemeni sheshiń  $\log_2^2(4x) - 4 \log_4 x = 15$ .

(juwap :  $\{2^{-2\sqrt{3}-1}; 2^{2\sqrt{3}-1}\}$ .)

**38-mısal.** Teńlemeni sheshiń  $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$ .

Durıs sheshim. Anıqlanıw oblastı:  $x > 0$ .

$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ ,  $c \neq 1$ ) formulasınan paydalanamız,

$$(5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}) \Leftrightarrow (5^{\lg x} = 50 - 5^{\lg x}) \Leftrightarrow (5^{\lg x} = 5^2) \Leftrightarrow (\lg x = 2) \Leftrightarrow (x = 100).$$

Durıs juwap:  $\{100\}$ .

**39-mısal.** Teńlemeni sheshiń  $4^{x+1,5} + 9^x = 6^{x+1}$ . (juwap:  $\left\{ \frac{1}{\log_2 3-1}; \frac{2}{\log_2 3-1} \right\}$ .)

81. Teńleme  $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$  ( $a > 0$ ) hám  $f(x) = \varphi(x)$  eger  $a \neq 1$  bolğanda.

**40-mısal.** Teńlemeni sheshiń  $(x + 5)^{x^2+x-2} = 1$ .

Nadurıs sheshimi. Iye bolamız:

$$((x+5)^{x^2+x-2} = 1) \Leftrightarrow ((x+5)^{x^2+x-2} = (x+5)^0) \Leftrightarrow (x^2+x-2=0) \Leftrightarrow (x=1 \text{ yamasa } x=-2).$$

Naduris juwap:  $\{-2; 1\}$ .

Duris sheshimi. Kerekli jaǵdaylardı qaraymız:

$$\begin{aligned} & ((x+5)^{x^2+x-2} = 1) \Leftrightarrow ((x+5)^{x^2+x-2} = (x+5)^0) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left( \left\{ \begin{array}{l} x+5 > 0 \\ x^2+x-2=0 \end{array} \right. \text{ yamasa } x+5=1 \text{ yamasa } \left\{ \begin{array}{l} x+5=-1 \\ x^2+x-2 \text{ -- juwp, natural} \end{array} \right. \right) \\ & \Leftrightarrow \left( \left\{ \begin{array}{l} x > -5 \\ x=1 \text{ yamasa } x=-2 \end{array} \right. \text{ yamasa } x=-4, \text{ yamasa } \left\{ \begin{array}{l} x=-6 \\ x^2+x-2=28 \end{array} \right. \right) \\ & \Leftrightarrow (x \in \{1; -2; -4; -6\}). \quad \text{Duris juwap: } \{-6; -4; -2; 1\}. \end{aligned}$$

**41-mısal.** Teńlemeni sheshiń  $(3^{\sqrt{0,5x}} + 19)^2 = 10000$ . (juwap:  $\{32\}$ ).

82. Logarifmlik hám kórsetkishli teńsizliklerdi sheshiw kópshilik jaǵdaylarda tómenдеgi teńsizliklerdi sheshiwge alıp keliniwi múmkin:

$$\begin{aligned} & (\log_a f(x) < \log_a \varphi(x)) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left( \left( \left\{ \begin{array}{l} f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \\ a > 1 \end{array} \right. \right. \text{ yamasa } \left. \left\{ \begin{array}{l} f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \\ 0 < a < 1 \end{array} \right. \right) \right) \Leftrightarrow \left( \left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ a^{f(x)} < a^{\varphi(x)} \end{array} \right. \right) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left( \left\{ \begin{array}{l} a > 1 \\ a^{f(x)} < a^{\varphi(x)} \end{array} \right. \text{ yamasa } \left\{ \begin{array}{l} 0 < a < 1 \\ f(x) > \varphi(x) \end{array} \right. \right). \end{aligned}$$

$(a^{f(x)} \leq a^{\varphi(x)})$  túrдеgi teńsizliklerdi sheshkende qosımsha  $a = 1$  jaǵdayı qaraladı.)

**42-mısal.** Teńsizlikti sheshiń  $\log_a x > \log_a 5$ .

Naduris sheshimi. Anıqlanıw oblastı:  $x > 0$ .

Iye bolamız:  $(\log_a x > \log_a 5) \Leftrightarrow (x > 0)$ .

Nadurıs juwap  $(5; +\infty)$  eger  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

Durıs sheshimi. Anıqlanıw oblastı:  $x > 0$ .

Túrlendiriwdi jasaymız:

$$(\log_a x > \log_a 5) \Leftrightarrow \left( \begin{cases} a > 1 \\ x > 5 \end{cases} \text{ yamasa } \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < x < 5 \end{cases} \right).$$

Durıs juwap:  $(5; +\infty)$  eger  $a > 1$ ,  $(0; 5)$  eger  $0 < a < 1$ .

**43-mısal.** Teńlemeni sheshiń  $2 \cos^3 x + 3 \sin^2 x - 2 \cos x - 3 = 0$

Nadurıs sheshimi. Tiykargı trigonometriyalıq birdeylikti paydalansaq:

$$\begin{aligned} (2 \cos^3 x + 3 \sin^2 x - 2 \cos x - 3 = 0) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2 \cos^3 x + 3 \sin^2 x - 2 \cos x - 3(\cos^2 x + \sin^2 x) = 0) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x - 2 \cos x = 0) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left( \cos x = -\frac{1}{2} \text{ yamasa } \cos x = 2 \right) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left( x = \pm \frac{2}{3} \pi + \pi k \quad / \quad k \in Z \right). \end{aligned}$$

Nadurıs juwap:  $\left\{ \pm \frac{2}{3} \pi + 2\pi k \quad / \quad k \in Z \right\}$ .

Durıs sheshimi. Iye bolamız.

$$\begin{aligned} (2 \cos^3 x + 3 \sin^2 x - 2 \cos x - 3 = 0) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2 \cos^3 x + 3 \sin^2 x - 2 \cos x - 3(\cos^2 x + \sin^2 x) = 0) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x - 2 \cos x = 0) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\cos x = 0 \text{ yamasa } 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0) &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left( x = \frac{\pi}{2} + \pi n \ / \ n \in \mathbb{Z} \text{ yamasa } \left( \cos x = -\frac{1}{2} \text{ yamasa } \cos x = 2 \right) \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( x = \frac{\pi}{2} + \pi n \ / \ n \in \mathbb{Z} \text{ yamasa } x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n \ / \ n \in \mathbb{Z} \text{ yamasa } x \in \emptyset \right).$$

Duris juwap:  $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \ / \ n \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**44-misal.** Teńlemeni sheshiń  $6 \sin^2 x + 2 \sin^2 2x = 5$ .

(juwap;  $\{ \pm \pi/4 + \pi n \ / \ n \in \mathbb{Z} \}$ ).

**45msal.** Teńlemeni sheshiń  $\cos 4x = -2 \cos^2 x$ .

Naduris juwap. Teńlemeni túrlendiremiz.:

$$\begin{aligned} (\cos 4x = -2 \cos^2 x) &\Leftrightarrow (\cos^2 2x - \sin^2 2x = -2 \cos^2 x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2 \cos^2 2x - \sin^2 2x = -(1 + \cos 2x)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2 \cos^2 2x - 1 + \cos^2 2x + 1 + \cos 2x = 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2 \cos^2 2x + \cos 2x = 0) \Leftrightarrow (2 \cos 2x + 1 = 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\cos 2x = -1/2) \Leftrightarrow (x \pm \pi/3 + \pi n \ / \ n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Naduris juwap:  $\{x \pm \pi/3 + \pi n \ / \ n \in \mathbb{Z}\}$ .

Duris sheshimi. Teńlemeni túrlendiremiz:

$$\begin{aligned} (\cos 4x = -2 \cos^2 x) &\Leftrightarrow (\cos^2 2x - \sin^2 2x = -2 \cos^2 x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2 \cos^2 2x - \sin^2 2x = -(1 + \cos 2x)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\cos^2 2x - 1 + \cos^2 2x + 1 + \cos 2x = 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\cos 2x = 0 \text{ yamasa } 2 \cos 2x + 1 = 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left( 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n \ / \ n \in \mathbb{Z} \text{ yamasa } 2x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n \ / \ n \in \mathbb{Z} \right). \end{aligned}$$

Durıs juwap:  $\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n; \pm \frac{\pi}{3} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**46-mısal.**  $a$  nıń qanday mánislerinde

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \log_2 a$$

teńleme sheshimge iye boladı?

(juwap:  $\{ \pi/4 \pm \arccos(\log_2 a) + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \}$  eger  $a \in [1/2; 2]$ ).

**47-mısal.** Teńlemenı sheshiń  $3 \cos^2 x = \sin^2 x + \sin 2x$ .

Durıs sheshimi.

$$(3 \cos^2 x = \sin^2 x + \sin 2x) \Leftrightarrow \left( 3 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2 \cos x \sin x}{\cos^2 x} \right)$$

$$\Leftrightarrow (tg^2 x + 2tg - 3 = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (tgx = 1 \text{ yamasa } tgx = -3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = \pi/4 + \pi n / n \in \mathbb{Z} \text{ yamasa } x = \arctg(-3) + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}).$$

Durıs juwap:  $\{ \pi/4 + \pi n; \arctg(-3) + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \}$ .

**48-mısal.**  $[1; 6]$  aralıqta,  $f(x) = x/8 - 2/x^2$  fukciyanıń eń kishi hám eń úlken mánislerin tabıń.

Nadurıs sheshimi. Anıqlanıw oblastı:  $x \neq 0$ .

$f'(x) = 1/8 - 2/x^2$  anıqlaymız. Teńlemenıń kritikalıq tochkasın tabamız

$$f'(x) = 0:$$

$$(1/8 - 2/x^2 = 0) \Leftrightarrow (x^2 - 16 = 0) \Leftrightarrow (x = \pm 4).$$

Eger  $x = +4$  bolsa  $f(x) = 1$  boladı, eger  $x = -4$  bolsa  $f(x) = -1$  boladı.

Nadurıs juwap:  $-1$  eń kishi,  $+1$  eń úlken mánisi.

Durıs sheshimi. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabamız:  $x \neq 0$ .

$f'(x) = 1/8 - 2/x^2$  esaplaymız. Teńlemeniń kritikalıq tochkasın tabamız  
 $f'(x) = 0$ :

$$(1/8 - 2/x^2 = 0) \Leftrightarrow (x^2 - 16 = 0) \Leftrightarrow (x = 4 \text{ yamasa } x = -4).$$

Eger  $x = 4$  bolsa  $f(x) = 1$  boladı.  $x = -4$  tochkası  $[1; 6]$  aralıǵına tiysli emes.  
 Onıń ushlarında funkciyanıń mánislerin esaplaymız. Eger  $x = 1$  bolsa  $f(x) = 2\frac{1}{8}$   
 teń boladı, al eger  $x = 6$  bolsa  $f(x) = \frac{13}{12}$  ge teń boladı.

Durıs juwap:  $2\frac{1}{8}$  eń úlken mánisi, 1 eń kishi mánisi.

**49-mısal.**  $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3$  funkciyanıń ekstremum tochkaların tabıń.

(juwap:  $x = 2$  – minimum tochkası;  $x = 0$  – maksimum tochkası)

**50-mısal.** Sistema teńlemesin sheshiń

$$\begin{cases} x^4 - 1330x - 23 = 0 \\ x^4 - 1319x - 144 = 0 \end{cases}$$

Nadurıs sheshimi. Sistemaniń birinshi teńlemesinen ekinshi teńlemani alsaq kelip shıǵadı  $-11x + 121 = 0$ , bunda  $x = 11$ .

Nadurıs juwap:  $\{11\}$ .

Durıs sheshimi. Ekvivalent túrlendiriwdi jasaymız:

$$\begin{aligned} \left( \begin{cases} x^4 - 1330x - 23 = 0 \\ x^4 - 1319x - 144 = 0 \end{cases} \right) &\Leftrightarrow \left( \begin{cases} x^4 - 1330x - 23 = 0 \\ -11x + 121 = 0 \end{cases} \right) \\ &\Leftrightarrow \left( \begin{cases} x^4 - 1330x - 23 = 0 \\ x = 11 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left( \begin{cases} 11^4 - 1330 \cdot 11 - 23 = 0 \\ x = 11 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left( \begin{cases} 12 = 0 \\ x = 11 \end{cases} \right) \Leftrightarrow (x \in \emptyset). \end{aligned}$$

Durıs juwap:  $\emptyset$ .

**51-mısal.** Sistema teńlemesin sheshiń:  $\begin{cases} 5^x - 36y = 0 \\ 6^x - 25y = 0 \end{cases}$  (juwap:  $\{(-2; 1/900)\}$ ).



## 2-§. Matematikani oqıtıwda qáteler ústinde islew usılları.

I. Qateler ústinde islew oqıwshılardıń bilim hám uqıplarındaǵı kemshiliklerdi basıp ótiwdin tiykarǵı formalarınń biri bolıp esaplanadı. Eger ol epiodlıq qubılıs bolmay turaqlı túrde oqıwshınıń dıqqat orayında bolsa bul jumıs úlken payda keltiredi. XIX ásirdeń ekinshi yarımında qátelerge jol qoymaw haqqında qáte teoriya tarqalǵan edi. Bunda klasta qátelerge dıqqat awdarıw úyrenilip atırǵan materialǵa jaman tásir etedi dep esaplangan. Bul teoriya bilimlerdi ańsız mexanikalıq dogmatikalıq úyreniw koncepciyasına tiykarlangan edi. Oqıwshılar ózleri jibergen qátelerdiń mazmunın tallap bul qatelerdiń dáregin anıqlaw bilimlerdi ańlı ózlestiriwge múmkinshilik beredi. Qálegen qate hár bir qaǵıwdanıń hár bir túsiniktiń hár bir teoriyanıń ishine elede kirip barıw ushın paydalanıw gerek boladı. Qatelerdi talıqlaw oqıwshınıń qáte menen tanısıwı hám onı puqta analizlep kiyin bunday qate jibermewge qandayda qatelerde qamsızlandırıwǵa paydası tiyedi. Bunnan basqa qateler ustinde islewanıqlama, teorema dáliline erisiw ushın jaqsı qıral bolıp xızmet qılıwı múmkin. Qatelerdi tallaw arqalı oqıwshılar oziniń juwabındaǵı hár bir sózin duzetip tolıqtırıwdı uyrenedi.

Har bir sabaqta oqıtıwdıń barlıq basqıshlarında oqıtıwshı duzetiw gerek bolǵan qatelerge dus keledi. Oqıwshılardıń qatesin ózi duzetiwge asıqpay buǵan oqıtıwshılardı tartatın oqıtıwshı durıs is tutadı. Oqıwshıǵa onıń qatesi nege alıp keliwi mumkin ekenligin tusiniwine imkan beredi.

Bunı VI klass geometriya materialında kórsetemiz. Oqıtıwshınıń sorawına: He sebeb berilgen eki úshmuyeshlik kongurent?- oqıwshı juwap beredi: Eger bir úshmuyeshliktiń tárepi hám eki muyeshi ekinshi úshmuyeshliktiń sáykes tárepi hám eki myeshine kongurent bolsa, onda bunday úshmuyeshlikler kongurent boladı.

Juwap beriwshi oqıwshı hám qateni abaylamaǵan oqıwshılar juwaptıń nadurıslıǵın tusiniw usın oqıtıwshı  $\triangle ABC$  ( $\sphericalangle C$  – doǵal) úshmuyeshligin

jasawdı usındı hám keyin  $\Delta A^1B^1C^1$  úshmuyeshigin bilay jasaw:  $|A^1B^1| = |AB|$ ,  $\sphericalangle B^1A^1C^1 \cong \sphericalangle BAC$   
 $\sphericalangle A^1B^1C^1 \cong \sphericalangle ABC$ .  $ABC$  hám  $A^1B^1C^1$  úshmuyeshliktiń oqıwshı tárepinen berilgen juwaptı qanatlandıradı, biraq olar kongurent emes. Qáteniń mazmunı anıqlanǵannan keyin oqıwshı durıs juwap berdi. Qatelerdi bunday usılda dúzetiw oqıwshılardıń biliminiń artıwına, olardıń oylawın jedellestiriwge hám oqıtıwdıń rawajlanıwshılıq maqsetine xızmet etedi.

II. Qateler ústinde maqsetke baǵdarlanǵan jumıs matematikanı oqıtıw processinde payda bolatın qatelerdi sistemalastırıwdı talap etedi. Bunda qatelerdiń ayırım mısalları emes, al olardıń payda bolıw sebepleriniń ulıwmalıǵın, olar ústinde islew metodikasın ulıwmalıǵı menen biriktirilgen qateler toparı sheshiwshi rol oynaw kerek. Qatelerdi bunday sistemalastırıw olardı dúziwdiń jolların hám eń baslı keleshekte qatelerdiń aldın alıwǵa múmkinshilik beredi.

Oqıwshılardıń jańa baǵdarlama menen jumıs islegenler jol qoyatın eń kóp xarakterli qatelerdi keltiremiz:

1. Oqıwshılardıń kóplikler teoriyası túsiniǵiniń qáliplesiwine dıqqatsızlıǵın baylanıslı qáteler hám shalalıqlar.

- Kóplik túsiniǵlerin, kópliktiń elementleri, tiyisli bolıw qatnası, kópliklerdiń teńligi, kópliklerdiń teńligi , úlesi túsiniǵlerin dál anıq iyelenbegenine baylanıslı boladı.
- Kópliklerdiń birigiwi hám kesisiwi ámellerin jetkilikli dárejede anıq iyelemegenine baylanıslı bolǵan qate.
- Túsiniǵlerdi klassifikaciyalawdı durıs túsinebegenine baylanıslı bolǵan qateler.

2. Oqıwshılardıń logikalıq tayarlıǵınıń jetkisizligine baylanıslı bolǵan qateler.

- Logikalıq kelip shıǵıw túsiniǵin ańlawdıń jetkiliksiz ekenine baylanıslı qate.
- Teoremanıń dúzilisin túsinebegenine baylanıslı qateler
- Aytımlardıń dizyunkciyası hám konyukciyasın túsiniǵine baylanıslı qateler

- Tuwrı hám keri teorema arasıdağı hám ulıwma teoremlar túrleri arasıdağı baylanıs túsinbewshilik baylanıslı bolǵan qateler
  - Kerekli, jetkilikli, kerekli hám jetkilikli terminlerin qollanıw hám tusiniwdegi qateler
  - Qarsıdan dálillew metodın tusinbewde qateler
  - Matematikalıq indukciya metodı tolıq tusinbewdegi qateler h.t.b
3. Oqıwshılardıń ulıwmalastırıw hám konkretlestiriw waqtında jiberiletin qateler
- Túsiniktiń kólemi hám mazmunın túsinbewine baylanıslı qateler
  - Túsiniklerdiń qásietlerin úyrenge ulıwmalastırıw hám konkretlestiriwge jol qoyatın qateler
  - Nızamlıqlardı ulıwmalastırıwǵa baylanıslı qateler
  - Nadurıs analogiyanı qollanıw natiyjesinde payda bolǵan qateler
  - Oqıwshılardıǵa ózin qadaǵalawdıń joqlıǵı hám tiyanaqsızlıǵı nátiyjesinde kelip shıǵatuǵın qateler

Qaralǵan qateler hám shalalıqlar oqıtıwdıń barlıq basqışında jol qoyıladı.

III. Qateler ústinde islewdiń bazi bir metodların qaraymız:

1. Ulıwma jumıs metodları
2. Oqıwshılardıń ózin qadaǵalǵaw kónlikpesiniń qalıplesiwi
3. Keri baylanıstıń anıq dál iske asırılıwı
4. Qatelerdi bayqaw hám jol qoyılǵan qtenıń mazmunın anıq túsindirip beriw uqıbına oqıtıw.
5. Qatelerdi tuwrılaw ushın kontrmısallar hám kontrobrazlar dı paydalanıw
6. Jańa materialdı úyreniw processinde qatelerdiń aldın alıw hám tuwrılaw
7. Tosınnan payda bolǵann qateler ústide islew

Olardı kórip shıǵamız

1. Qatelerdiń aldın alıw hám dúzetiw boyınsha maqsetke baǵdarlangan is ilajlardı iske asırıw urın oqıwshıǵa oqıwshılardıń qatelerin sistemalı úyreniw, olardıń arasıda eń kóp turaqlı hám ádetke aylanǵan qatelerdi anıqlaw, oqıwshılarda jeke hám tarqalǵan qatelerin esapqa alıw kerek boladı. Oqıtıwshınıń

oqıwshılardıń ádetke aylanǵan qatelerin, olardıń kelip shıǵıwların hám payda bolıw formaların bilıw , oǵan qatelerdin paydalanıwınıń eskertiw hám aldinnan kóriwge múmkinshilik beredi. Bul bir tárepleme juwmaq shıǵarıw hám nadurıs ulıwmalastırıwdıń payda bolıwına irkinish jasaytın shınıǵıwlardı tańlap alıw jolı menen iske asırıladı.

Oqıtıwshı tárepinen dizimge hám esapqa alınǵan oqıwshılardıń tıyanaqlı hám ádettegi qateleri oǵan oqıwshılar neni túsinbeydi hám neni jaman ózlestirgenin ornatiwǵa járdem beredi, bul oqıtıwshıǵa oqıwshılardıǵ bilimindegi kemshiliklerdi óz waqtında saplastırıwǵa hám usı sıyaqlı qatelerdiń keleshekte takirarlanıwınıń aldın alıwǵa maqsetinde oqıtıwda sáykes dúzetiwler kiritiwine múmkinshilik tuwdıradı.

Oqıwshılar tárepinen jiberilgen qatelerdiń mánisin anıqlaw ushın bunday qate sheshimge alıp keliwshi talıqlaw jolın baqlaw, qateler tuwılatın basqıstı anıqlaw kerek boladı, sebebi kópshilik jaǵdaylarda hár bir qate sheshim –bul oqıwshılar oylawınıń qandayda bir jolınıń natiyjesi. Ayırım jaǵdaylarda hátte bir mısaldı sheshiwdiń ózine oqıwshı bir neshe ret qátelesiwı múmkin. Tájiriye kórsetkenindey kóbinese oqıwshılardıǵa barlıq material emes al tek onıń qandayda bir bólegi túsiniksiz boladı. Oqıwshınıń dál neni túsinbegenin anıqlap oqıtıwshı bul materialǵa barlıq material emes al tek onıń qandayda bir bólegi túsiniksiz boladı. Oqıwshınıń dál neni túsinbegenin anıqlap oqıtıwshı bul materialǵa barlıq dıqqatın aydarıp úyrenilgen momentlerine kóp shalǵımaydı.

Oqıwshılar tárepinen jiberilgen qateler tek olardıń bilimleriniń kemshiligi haqqında ǵana emes al, olardıń múmkinshilikleri haqqında da guwalıq beredi jánede bul qateler oqıwshılar aldına qoyılatın problemanıń kórsetkishi bolıp xızmet etedi, al ayırım jaǵdaylarda berilgen momentte háreketti rawajlandırıw ushın kerek bolǵan problemlıq jaǵdaydıń dúziliwine tikkeley alıp keledi.

Matematikanı oqıtıwdıń tájiriyesine kóbinese oqıtıwdıń eki qarama qarsı metodu paydalanıladı: birinshi usıl, oqıtıwshı tayar tapsırmanı beredi, al oqıwshı olardı túsiniw hám este saqlaw kerek boladı, hám ekinshide oqıwshı qoyılǵan problemanıń sheshimin izleydi hám onı tabatın, al oqıtıwshı oqıwshınıń

hareketlerin baǵdarlap turatın evristikalıq metod. Bul metodlarǵa sáykes oqıtıwshınıń roli hár jaǵdayda hár qıylı bolatının atap ótiw kerek boladı. Birinshi metod paydalanǵanda oqıtıwshı maǵlıwmat deregi rolin atqaradı, ol bilimlerde tez hám esaplı jetkeredi, biraq onıń sabaqların kóp emes oqıwshılar ózlestiredi hám tez este saqlay almaydı. Ekinshi usılda paydalanǵanda oqıtıwshı anaw ya mınaw problemanı sheshiwde izlewde tájiriye belı baslawshı, ol oqıwshılarda oylardı oyata hám olardıń oyların shınıqtıradı. Izley processinde jibergen qatesi ushın oqıwshınıń bahasın tómenletiwge bolmaydı. Olardı jiberilgen qorqpawǵa úyretiw júdá áhmiyetli boladı. Oqıwshılar jibergen qatelerdi tiykarlangan, bul jumısqa oqıwshılardıń ózlerin tartıw arqalı taktikalıq túrde dúzetiw kerek boladı.

Qate jiberiwden qorqıw oqıwshınıń iniciativasını aqsatadı. Qateden qorqıp ol qoyılǵan problemanı ózi sheshpeydi al oqıtıwshınıń járdemin kútedi. Ol tek jeńil problemalardı ǵana sheshedi. Biraq izbe iz ósiwshi quramalıqtı máselelerdi óz betinshe sheshpesten intelektual óziw bolıwı múmkin emes ol sharasız toqtatıladı. Kópshilik jaǵdayda usınday sebepli oqıwshılar sońǵılıǵında úlgermewshilikke alıp keletin sistemalıq olaqlıq hám intelektual háreketsizlikke jol qoyadı. Kóbinese oqıtıwshınıń oqıwshıǵa túsiniksiz materialdı túsindirip, oǵan ózinshe sheshiwge bermeydi, al tez durıs sheshimniń úlgisin kórsetkenin baqlaymız. Bul jaǵdayda oqıwshı qatelerden úyreniw kerek degen usılǵa ámel qılmaydı.

Basqa jaǵdayda oqıtıwshı oqıwshınıń nadurıs sheshimin biykarlamaydı, al oqıwshınıń talıqlaw jolın baqlaw arqalı onda eń nazik jayın tawıp alınǵan nátiyjeniń jaramsız ekenin aytıp berilgen hám alınǵan nátiyjelerdi salıstıradı. Oqıtıwshı solay etip oqıwshını óziniń sheshiminen qaytıwǵa iytermeleydi. Nadurıs sheshimdi tan alıw jetkilikli uzaq jol boladı, sebebi bilimlerde qayta qurıw bolıp ótedi. Biraq bul jol qateniń mańızın tereń seziniwge múmkinshilik beredi.

“Qatelerdi tabıwǵa arnalǵan maseleler” oqıwshılar tárepinen júdá tirsheń qabil etiledi. Sóz tek ǵana sofizmler haqqında emes, al oqıwshılardıń ózleri jol qoyatuǵın qateleri haqqında da orınlı boladı. Oqıwshınıń hár bir qate tastıyqlawın dúzetiwge asıqpaw kerek. Dáslep bul tastıyqlawdı barlıq klastır talıqlawına salıw

hám qatelerdi ańlı túrde dúzetiwge erisiw jaqsı boladı. Eger oqıwshılar qateler jibermeytuǵın bolsa, onda bazi bir arasında olardıń ádettegi qatelerge qanday dárejede bekkem ekenligin tekseiw maqsetke muwapıq boladı.

2. Kóp qateliklerden aldın alıw hám dúzetiw ushın oqıwshılarda ózin qadaǵalar kónlikpesin qalıplestiriw áhmiyetli boladı. Bul kónlikpeler eki bólimnen turadı:

a) qateni ańlaw uqıwbı; b) onı túsindiriw hám dúzetiw uqıwbı.

Oqıw processinde oqıwshılardıń jibergen qatelerin ańlaw hám olardı óz waqtında dúzetiwge iytermeleytuǵın ózin qadaǵalawdıń birneshe usılları qollanıladı. Olarǵa mınalar kiredi: esaplawlar dı tekseriw hám birdeylikli túrlendiriwlerdi kerı ámeller orınlaw jolı menen yamasa túrlendiriw; máseleniń sheshiliwiniń durıslıǵın berilgenge kerı máseleler dúziw hám shehsiw arqalı tekseriw; analikalıq sheshiwdi grafikalıq usıl menen, talıqlawlardıń durıslıǵın Eyler dóńgelekleri járdeminde tekseriw h.t.b. Ózin qadaǵalaw kónlikpesine siniǵıwda kútilgen nátiyjeni juwıq bahalaw usılıda járdem beredi. Kútilgen juwaptıń múmkinlik shegaraların ornatiw jazıwdaǵı cifrlardıń qalıp qoyǵan shalalarınıń aldın aladı.

3. Oqıtıw processinde ulıwma, al ásirese qateler ústinde islegende kerı baylanıs áhmiyetli boladı. Oqıtıwshı turaqlı túrdegi iske asırılattın kerı baylanıssız oqıwshıneni túsınbeydi hám ne sebep túsınbeydi, onıń qate túsindiriwiniń sebebi nede ekenin anıqlaw múmkin emes boladı.

4. Matematikanı oqıtıw processinde oqıwshılardıń qateleriniń aldın alıwda qatelerdi ańlawǵa arnalǵan shınıǵıwlar kúshli tásir etedi.

Mektep praktikasında derlik barlıq waqıtta oqıwshılardıǵa qateler bolmaytın tapsırmalar beriledi. Bul oqıwshılarda barlıq bilgiriwlerge, kórsetpelerge, tapsırmalarǵa, hátteki oqıwlıq hám máseleler keltirilgen mısal hám máselelerdiń barlıq juwaplarında jıynaǵında shektena tıs iseniwdi keltirip shıǵaradı.

Turmıs tájireybesinde sızılmalar, sxemalar, esaplawlar hám t.b. qateler bolıwı múmkin. Eger olardıń berilgenlerge kritikalıq kóz qarasta bolıwdı úyretpesek, onda jumısta úlkenqateler, jaramsızlıq bolıwı múmkin. Bunnan qutılıw ushın

oqıwshılarda berilgenlerdi analizlew uqııbı, ushırasatın qatelerdi hám qatelik jaǵdaydı ańlaw uqıblıǵın qaliplestiriw kerek boladı.

Oqıwshılardıń oylaw iskerligin aktivlestiriw ushin matematikalıq qateler ústinde islew úlken mániske iye ekenin atap ótip polshalıq matematik G. Shteyngaws jazadı: “Eger oqıwshılardı oǵan usınılǵan dálillewde qate bar ekenin isendirsek, onda arnawlı tekseriwlersizaq material tolıq hám júda puxta ózlestirilgenine iseniwge boladı. Sonlıqtan matematikalıq qatelerdiń dizimin dúziw hám onı oqıw maqsetinde paydalanıw oqıtıwdıń ónimdarlıǵın arttırıwdıń haqıyqıy faktorlarınıń biri bolıp esaplanadı.

Oqıw processinde qatelerdi anıqlawǵa baylanıslı tómendegi túrdegi tapsırmalar usınıladı:

- a) Teoremanıń h.t.b qatelerdiń jazılıwındaǵı qateni tabıń (tolıq emeslikti)
- b) Keltirilgen matematikalıq tekste qarama qarsılıqtı anıqlań
- c) Tapsırmanıń mazmunı aldın úyrenilgen materialǵa sáykes kelmeytuǵın ańlaw
- d) Máseleniń shártindegi artıqsha berilgenlerdi ańlaw
- e) Maseleniń shártindegi tolıq emeslikti anıqlaw

Qatelerdi anıqlawda eń bahalı máseleler, oqıwshılar tárepinen jol qoyılǵan qatelerdi esapqa alıp oqıtıwshı dúzgen maseleler bolıp tabıladı. Bul azmunda oqıwshılardıń qadaǵalaw jumısı hám awızsha juwaplarındaǵı qateler ushırasatın maseleler ayrıqsha qızıǵıwshılıq oyatadı. Bundaytúrdegi maseleler ushin cofizm, faragoksler qızıqlı material boladı. Bunday maseleler izleniwshilik jaǵdaydı dúzedi yaǵniy oqıwshı qateni izlew hám dúzetiw kerek boladı. Oqıwshılardıń qatelerdi túsindiriwı júdá áhmiyetli boladı.

Qatelerdi tabıw hám dúzetiw uqııbına oqıwshılardı turaqı túrde oqıtıw kerek boladı.

5. Qatelerdi dúzetiwde hám anıqlama, teoremalardıń jazılıwındaǵı dalsizliklerdi kontrobroz hám kontrmısallar járdeminde aytıp beriwge kerekli dıqqat bolıwı kerk boladı.

6. Qatelerdiń aldın alıwda jańa materialdı oqıtıwda oylanılǵan shólkemlestiriw áhmiyetli rol oynaydı, jańa materialdı úyretiwdi oqıwshı bul processtıń activ qatnasıwshısı bolatuǵınday etip ótkeriw gerek. Ege materialdıń birinshi bayanlawında olar qatelerge jol qoysa, tiykarlanbaǵan juwmaqlardı keltirse bunnan qorıqpaw gerek.

Jańa materialdı úyreniwge bunday qatnas problemalıq jaǵdaydıń dúziliwine hám onı oqıwshılardıń oqıtıwshınıń basshılıǵında sheshiwine múmkinshilik jaratadı.

Bulardıń barlıǵı oqıwshılardıń materiallıq pikir júrgiziwin rawajlandırıwǵa imkaniyat beredi.

7. Oqıtıwshı tárepinen tosınarlı xarakterdegi qatelerge ayrıqsha qatnastı talap etedi.

Bul qateler ústinde islew ushın dáslep bárinen burın bul qate tosınnanba yamasa úyrenilgen materialdı túsinbegenliktiń nátiyjesime sonı anıqlaw gerek boladı. Bul qateniń ózi tosınarlı sebepte yamasa materialdı túsinbegenlik sebepli bolıwı múmkin. Mısalı,  $a^m a^n = a^{mn}$  bulqate joqarıdaǵı eki sebeptende bolıwı múmkin.



## **Juwmaqlaw.**

Bul pitkeriw qániygelik jumısında házirgi waqıtta mekteplerde hám orta arnawlı oqıw orınlarında matematika pánin oqıtıwda oqıwshılar tárepinen jeberiletuǵın qáteler tallanıp hám sistemalı túrde ádetke aylanǵan qáteler ústinde islewdi shólkemlestiriwge baylanıslı bir qatar usınıslar ıslengen.

Mektep hám orta arnawlı oqıw orınlarında matematika sabaǵında oqıwshılardıń jol qoyatuǵın qáteleri oqıtıwdıń dáslepki basqışınan baslanıp keyingi basqışına deyin turaqlı dawam etedi.

Bul jumısta matematika sabaqlarında oqıwshılar tárepinen jiberiletuǵın qátelerdi anıqlaw hám olardıń aldın alıwǵa baylanıslı jumıslardı shólkemlestiriwdıń túrleri hám hár qıylı usıllarına baylanıslı teoriyalıq hám ámeliy materiallar kiritilgen.

Oqıtıwshınıń sabaq processinde qáteler ústinde islew jumısların jobalastırıw usılları kórsetilip, qátelerdi anıqlaw hám olardıń aldın alıw jumıslarında paydalanılatuǵın shınıǵıwlar hám tapsırmalar sisteması islep shıǵılıp tiyisli usınıslar berilgen.

Pitkeriw qániygelik jumısın mektep hám orta arnawlı oqıw orınları oqıtıwshıları ushın sabaq processinde qáteler menen islewde paydalanıwı múmkin bolǵan metodikalıq qollanba retinde qarawǵa boladı.

## Paydalanilgan ádebiyatlar.

1. Abdulxamidov A. I. hám basqalar. Algebra hám matematikalıq analiz tiykarları. Akademiyalıq liceyler ushın sabaqlıq. T. 2003.
2. Algebra hám matamatikalıq analiz tiykarları. I bólim. Mektep sabaqlıqları ushın. M.A.Mırzaahamedov, Sh.N.Ismailov, A.Q.Amanov Toshkent 2018.
3. Algebra va analiz asoslari: órta maktablarning 10-11 sinflari uchun darslik (Sh.O.Alimov, Yu.M.Kolyagin, Yu.V.Sidorov, M.I.Shabunin) T., «Óqituvchi», 1996 yil.
4. A. U. Abduhamidov, H. A. Nasimov, U. Nosirov, J. H. Husanov Algebra va matematik analiz asoslari, I. II qism *Akademik litseylar uchun darslik* 7- nashri T.-2008
5. Abduxamedov A.U. hám t.b. Algebra hám matematikalıq analiz tiykarları. Nókis: «Bilim», 2005.
6. Alixonov S. « Matematika óqitish metodikasi » Qayta ishlangan II nashri. T., «Óqituvchi» 1997 yil.
7. Далингер В.А. Начала математического анализа. Типичные ошибки, их причины и пути предупреждения: учебное пособие. – Омск: Изд-во ООО «Издатель-Полиграфист», 2002. – 158 с.
8. Далингер В.А. Совершенствование процесса обучения математике на основе целенаправленной реализации внутрипредметных связей: монография. – Омск: Изд-во ОИПКРО, 1993 г. – 323 с.
9. Далингер В.А., Тарасова О.А. Причины типичных ошибок
- 10.Kolyagin Yu.N. va boshqalar Metodika prepodavaniya matematiki v sredney shkole. Obhaya metodika., M., «Prosveshenie», 1988.
11. Matematika. 6-klass .Toshkent-2017.
12. Иброҳимов Р. «Математикадан масалалар тўплами». Т. Ўқитувчи, 1995.
13. [www. ziyanet. uz](http://www.ziyanet.uz)
14. [www. edu. uz](http://www. edu. uz)