ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASÍ JOQARÍ HÁM ORTA ARNAWLÍ BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI

ÁJINIYAZ ATÍNDAǴÍ NÓKIS MÁMLEKETLIK PEDAGOGIKALÍQ INSTITUTÍ

MAGISTRATURA BÓLIMI
5A110701 – Tálimde xabar texnologiyaları qanigeliginiń pitkeriwshisı 2-kurs magistrantı
Qodirov Davronbek Rajabboy úlınıń

Magistr akademiyalıq dárejesın alıw ushın jazılǵan

DISSERTACIYASI

TEMA: JILLILIQ ÓTKEZIWSHEŃLIK TEŃLEMESI USHIN QOYILǴAN SHEGARALIQ MÁSELELERDI SHESHIWDIŃ PROGRAMMALIQ TÁMIYNATIN JARATIW METODIKASI

MAK da jaqlawǵa ruxsat

Magistratura bólimi baslıǵı: p.i.k., doc. M.Allambergenova

Magistrant: D.R.Qodirov

Ilimiy basshı: f.-m.i.k., doc. M.Alaminov

Kafedra baslıǵı: f.-m.i.k., doc. M.Alaminov

Kafedra májilisiniń 2019-jıl_______________sánesindegi
№___protokolı menen qorǵawǵa ruxsat berildi

Nókis-2019

MAZMUNI

KIRISIW

Dissertaciya temasınıń aktuallılıǵı. Jılılıq ótkeziwshenlik teńlemesi ushin qoyilǵan shegaraliq máselelerdi sheshiwdiń programmaliq támiynatin jaratiw metodikasi matematikalıq hám kompyuterli modellestiriwdiń eń áhmiyetli tarawlarınan biri esaplanadı. Dissertaciya jumısında Keri jıllılıq ótkeziwshenlik teńlemesi ushın korrekt emes másele másele ekenligi korip shıǵıladı, sonday aq Jıllılıq ótkezıwshenlik teńlemesine qoyılǵan shegaralıq máseleni sheshiwge dúzilgen shekli ayırmalı sxema ushın programma jaratıw metodikası aktual másele bolıp tabıladı. Jıllılıq ótkeziwshenlik teńlemesi ushin qoyilǵan shegaraliq máselelerdi sheshiwdiń programmaliq támiynatin jaratiw metodikasin jaratıwda ornıqlılıq bahaları ullı ról oynaydı. Eger ornıqlılıq shárti orınlansa, yaǵnıy másele korrekt qoyılǵan bolsa, onda berilgen máseleni sheshiw hám onıń programmalıq támiyinleniwin jaratıw da qıyınshılıq bolmaydı. Eger ornıqlılıq shárti orınlanbasa, yaǵnıy másele korrekt emes qoyılǵan bolsa, onda onı korrekt emes máseleler teoriyasınan paydalanıp izertlew talap etiledi. Korrekt emes máseleler teoriyasına akademiklerden A.N.Tixonov, M.M.Lavrentev hám V.K.Ivanovlar tiykar salǵan. Biziń Ózbekstanımızda bul másele boyınsha kóplegen ilimpazlarımız jumıs alıp barıp atır. Olardan Q.Fayazov, A.Begmatov, A.Xaydarov hám t.b. atap ótsek boladı. Korrekt emes qoyılǵan máseleler tiykarınan differencial teńlemeler, funkcional analiz, funkciyalar teoriyası, matematikalıq analiz sıyaqlı matematika tarawında ushırasadı.

Izertlew obyektı hám predmeti. Jıllıliq ótkeziwshenlik teńlemesi ushin qoyilǵan shegaraliq máselelerdi sheshiwdiń programmaliq támiynatin jaratiw.

Izertlewdıń maqsetı hám wazıypaları.

- Keri jıllılıq ótkezıwshenlik teńlemesi ushın korrekt emes máselenı sheshıw,
- Jıllıliq ótkezıwshenlik teńlemesine qoyilǵan keri Koshi máselelasi regulyorizatsiyasi máselelerin korip shigıw,
- Jıllıliq ótkezıwshenlik teńlemesine qoyılǵan shegaralıq máseleni sheshiwge dúzilgen shekli ayırmalı sxema ushın programma jaratıw.

Izertlewdiń ilimiy jańalıǵı. Jıllıliq ótkeziwshenlik teńlemesi ushin qoyilǵan shegaraliq máselelerdi korrekt ya korrekt emeslikke izertlew, ayırmalı sxema metodı menen juwıq sheshiw hámde onı sheshiwdiń programmalıq támiyinleniwin jaratıw metodikasın úyreniw bolıp tabıladi.

Izertlewdiń tiykarǵı máseleleri hám boljawları. Joqarı oqıw orınlarında informatika hám xabar texnologiyalarında sabaq onimdarliǵın arttiriw hám joqarı natiyjege erisiw mumkin egerde:

- Jıllılıq ótkezıwshenlik teńlemesin uyrenıwshı talabalarǵa, bul temanı jánede jaqsılaw uyrenip alıwına járdem beredi;
- Jıllılıq ótkezıwshenlik teńlemesine tiyisli esaplardı jaratılǵan programma járdeminde esaplawlarına boladı;
- Sabaq barısında bul temanı uyreniwi kerek bolǵan talabalarǵa usı dissertaciyada keltirilgen maǵlıwmatlar hám esaplar arqalı túsintirilse jánede jáqsı nátiyjelerge erisiledi.

Qorǵawǵa alıp shıǵılıp atırǵan tiykarǵi jaǵdaylar:

Korrekt emes máseleler teoriyasında kóbinese máseleler abstrakt Gilbert keńisliginde izertlenip, birden-birlik hám ornıqlılıq teoremaları dálillenedi. Máseleniń sheshimi bolsa, apriori bar dep esaplanadı. Másele sheshiminiń barlıǵı máseleniń fizikalıq mazmunınan kelip shıǵadı. Bunda logarifmikalıq dóńeslik hám Karleman túrdegi bahalardan paydalanıladı.

Jıllıliq ótkeziwshenlik teńlemesi ushin qoyilǵan shegaraliq másele ushın qoyılǵan shegaralıq másele bolsa korrekt qoyılǵan bolıp tabıladı. Sonıń ushın onı juwıq sheshiw usılları, korrekt emes máseleler teoriyasi usılları, ayırmalı sxema dúziw usılı, C++ programmalıq tili imkániyatları hámde olardı sheshiwdiń programmalıq támiyinleniwin jaratıw metodikası úyreniledi.

Izertlew teması boyınsha ádebiyatlardı sholıw. Korrekt emes máseleler teoriyasına akademiklerden A.N.Tixonov, M.M.Lavrentev hám V.K.Ivanovlar tiykar salǵan. Jáne В.Г.Романов, С.П.Шишатский, Л.Я.Савельев, В.Я.Арсенин, Березин И.С. Жидков Н.П, Говорухин В.Н., Цибулин В.Г ádebiyatlarınnan paydalaıldı. Biziń Ózbekstanımızda bul másele boyınsha kóplegen ilimpazlarımız jumıs alıp barıp atır. Olardan Q.Fayazov, A.Begmatov, A.Xaydarov hám t.b. atap ótsek boladı. Jáne M.Isroilov, Sh.F.Madrahimov, S.M.G'aynazarov, A.O.Otarov, J.P.Allanazarov, K.S.Fayazov ádebiyatlarınan paydalanıldı.

Izertlewde qollanılǵan usıllardıń sıpatlaması. Izertlewde ilimiy-teoriyalıq, pedagogikalıq-psixologiyalıq, logikalıq, ilimiy-metodikalıq dereklerdi úyreniw hám salıstırmalı analiz etiw metodlarınan paydalanıldı.

Izertlew nátiyjelerınıń teoriyalıq hám ámeliy áhmiyetı. Jıllıliq ótkeziwshenlik teńlemesi ushin qoyilǵan shegaraliq máseleler kóp izertlengen. Biraq olardı korrektlikke tekseriw, ayırmali sxema metodı menen juwıq sheshiw hámde onı sheshiwdiń programmalıq támiyinleniwin jaratıw lazım (kerek, zárúr). Oqıwdı óz betinshe úyreniw, óz - ózin bahalaw hám qadaǵalaw tiykarında shólkemlestiriliwi oqıwshılardıń biliw processin órınlawǵa, bilim alıwǵa bolǵan qiziǵiwshılıǵın arttıradi; olar jumısın qollap quwatlaydı, oqıtıwdıń demokratik principlerin rawajlandıradı.

Orınlanǵan jumıstıń tiykarǵı nátiyjeleri. Dissertaciya jumısin orınlaw barısında alınǵan tiykarǵı nátiyjeler boyınsha kafedra ilimiy seminarında bir neshe ret bayanatlar jasaldı, Jıllıliq ótkeziwshenlik teńlemesin ashkar emes metod arqalı sheshiw, jıllıliq ótkezıwshenlik teńlemesi ushın qoyılǵan shegaralıq máseleni shekli ayırmali sxema dúziw usılı menen sheshiw, korrekt emes qoyılǵan máselelerge mısallar atamasındaǵı ilimiy maqalalar jazıldı hám tezis járiyalandı.

Natiyjelerdiń jaryalanıwı. Izertlew natiyjeleri bir jurnalda "Muǵállim hám Úzliksiz bilimlendiriw", (Nókis, 2018), eki respublikaliq ilimiy-ámeliy konferenciya materialları toplamlarında óz sáwleleniwin tapqan.

Jumıs dúzilisiniń sıpatlaması. Disertatsiya kirisiw, úsh bap, uliwma juwmaq, ádebiyatlar diziminen ibarat. Onıń ulıwma kolemi 72 betti quraydı. Disertatsiyaǵa 10 keste, 11 súwret kiritilgen. Paydalanılǵan ádebiyatlar diziminde 14 derek, sol qatarda, 6 internet saytları keltirilgen.

I-BAP. KERI JILLILIQ ÓTKEZIWSHENLIK TEŃLEMESI

1.1-§. Keri jıllılıq ótkezıwshenlik teńlemesi ushın korrekt emes másele

Haqıyqıy $T > 0$ sani ushın $u(x,t)$ temperaturani topish máselesi berilgen bolsin:

$$u_t - u_{xx} = f(x,t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad 0 < t < T \qquad (1.1.1)$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0 < t < T \qquad (1.1.2)$$

$$u(x,T) = y(x), \quad 0 \le x \le \pi \qquad (1.1.3)$$

bunda $g(x), \ f(x,t)$ - berilgen funkciyalar.

Bul másele keri jıllılıq ótkezıwshenlik máselesi dep ataladi.

Bizge belgili bolǵandiy aq, másele korrekt qoyilǵan bolıwı ushın tómendegi shartler orinlanǵan bolıwı kerek:

1. Masaleniń sheshimi bar;
2. Máseleniń sheshimi jeke;
3. Máseleniń sheshimi turǵın, yaǵniy máseleniń sheshimi berilgenlerge (baslanǵish yáki shegaralıq shartler hamde oń tárepke) uzluksiz baylanista bolsa.

Eger usi shartlerden birewi orınlanmasa, qoyilǵan másele korrekt emes qoyilǵan esaplanadi. Uliwma aytqanda, $(1.1.1) - (1.1.3)$ másele korrekt emes qoyilǵan. Bul másele ushın Adamar misali tomendegishe boladi:

$$u_t - u_{xx} = 2e^{n\ (t-1)} \cdot \sin nx \qquad (1.1.4)$$

$$u(x,1) = \sin nx \qquad (1.1.5)$$

Máselesining sheshimi

$$u(x,t) = e^{n^2(t-1)} \cdot \sin nx$$

boladi.

Haqiqattanda

$$u_t = e^{n^2(t-1)} \cdot \sin nx, \quad u_{xx} = -n^2 e^{n^2(t-1)} \cdot \sin nx, \quad u_t - u_{xx} = 2e^{n^2(t-1)} \cdot \sin nx$$

hám

$$u(x,1) = \sin nx$$

yaǵniy, bul funkciya $(1.1.4)$ teń

bıraq,

$$\|u(x,1)\| = Max_{[0;\pi]}$$

hám

$$\|u(x,1)\|_{C[0;\pi)} = e^{n^2(T-1)} \tag{1.1.6}$$

Demek, $T>1$ hám $n\to\infty$ da

$$\|u(x,t)\|\to\infty .$$

Bul bolsa, turǵınlik sherti buzilıwını korsetedi, yaǵniy $(1.1.4)-(1.1.5)$ másele, hámde $(1.1.1)-(1.1.3)$ másele korrekt emes qoyilǵanliǵin korsetedi.

$(1.1.1)-(1.1.3)$ máseleni regulyorlastırıw ideası tomendegilerden ibarat $(1.1.1)-(1.1.3)$ másele ornina korrekt qoyilǵan tomendegi másele alinadi:

$$u_t^\varepsilon - u_{xx}^\varepsilon - \varepsilon\cdot u_{xxxx}^\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon u^4(T-t)} f_n(t)\sin nx,\ \ 0<t<T, \tag{1.1.7}$$

$$u_t^\varepsilon(0,t) = u^\varepsilon(\pi,t) = u_{xx}^\varepsilon(0,t) = u_{xx}^\varepsilon(\pi,t) = 0,\ \ 0<t<T, \tag{1.1.8}$$

$$u^\varepsilon(x,T) = g(x),\ \ 0<t<T \tag{1.1.9}$$

Bunda ε musbat parametr hám

$$f_n(t) = \frac{2}{\pi}\left(f(x,t),\sin nx\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x,t)\sin nx\,dx,\ \ (.,.)-L^2(0,\pi)\ \text{dagi}$$

skalyar kopeytme.

Endi, biz $(1.7)-(1.9)$ másele korrekt qoyilǵanliǵin isbatlaymiz.

Usı teoremalar orinli:

Teorema 1.1.1. Meyli,

$$f(x,t)\in L^2(0,T;\ L^2(0,\pi))$$

hám

$$g(x)\in L^2(0,\pi)$$

bolsin. Onda, $(1.1.7)-(1.1.9)$ máseleniń sheshimi mavjud, yagana hám turǵın bolıp,

$$u^\varepsilon \in C([0,T];\ L^2(0,\pi))\cap L^2(0,T;\ H_0^1(0,\pi)\cap H^2(0,\pi))\ \text{hám}$$

$$u^\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{(T-t)(n^2-\varepsilon n^4)}g_n - \int_t^T e^{(s-t)(n^2-\varepsilon n^4)}\cdot e^{(s-t)(n^2-\varepsilon n^4)} f_n(s)\,ds\right)\sin x,$$

bunda

$$g_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin x\,dx \qquad (1.1.10)$$

Isbati. u^{ε} funkciyasi $(1.1.10)$ formula arqali aniqlanǵan bolsin. Onda

$$u^{\varepsilon} \in C([0,T];\ L^2(0,\pi)) \cap L^2(0,T;\ H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi))$$

ekenligin koriw qiyin emes.

Endi, u^{ε} funkciyasi $(1.1.7)$ teńlemeni qanaatlentiriwini korsetemiz:

$$u_t^{\varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty}\left((-n^2+\varepsilon n^4)\left(e^{(T-t)(n^2-\varepsilon n^4)}g_n - \int_t^T e^{(s-t)(n^2-\varepsilon n^4)}\cdot e^{-\varepsilon n^4(T-s)} f_n(s)\,ds\right)\sin nx\right) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n^4(T-t)} f_n(s)\,ds\,\sin nx,$$

$$u_{xx}^{\varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty}(-n^2)\left(e^{(T-t)(n^2-\varepsilon n^4)}g_n - \int_t^T e^{(s-t)(n^2-\varepsilon n^4)}\cdot e^{-\varepsilon n^4(T-s)} f_n(s)\,ds\right)\sin nx,$$

$$u_{xxxx}^{\varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} n^4\left(e^{(T-t)(n^2-\varepsilon n^4)}g_n - \int_t^T e^{(s-t)(n^2-\varepsilon n^4)}\cdot e^{-\varepsilon n^4(T-s)} f_n(s)\,ds\right)\sin nx.$$

Demek,

$$u_t^{\varepsilon} - u_{xx}^{\varepsilon} - \varepsilon\cdot u_{xxxx}^{\varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n^4(T-t)} f_n(t)\sin nx$$

hám

$$u^{\varepsilon}(x,T) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin nx = g(x),$$

Yaǵniy, $(1.1.7)-(1.1.9)$ shartler orinlanadi.

Endi, $(1.1.7)-(1.1.9)$ máselesiniń sheshimi yagana ekenligin isbatlaymiz. Párez eteyik, máseleniń eki sheshimi

$$u(x,t)$$

hám

$$v(x,t)$$

bar bolsin.

Biz

$$u(x,t) = v(x,t)$$

ekenligin korsetiwimiz kerek.

$$w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$$

bolsin.

Bul jaǵdayda yagana

$$w(x,t)$$

usı sistemani qanaatlentiredi:

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} - \varepsilon \cdot w_{xxxx} = 0, \ (x,t) \in (0,\pi)\times(0,T) \\ w(x,T) = 0, \ x \in (0,\pi) \\ w(0,t) = w(\pi,t) = w_{xx}(0,t) = w_{xx}(\pi,t) = 0 \end{cases} \qquad (1.1.11)$$

$k > 0$ sani ushın

$$\psi(x,t) = w(x,t)e^{k(t-T)}$$

bolsin.

Bizge belgili,

$$\psi(x,t)$$

funkciyasi usı sistemani qanaǵatlantıradı:

$$\begin{cases} \psi_t - \psi_{xx} - \varepsilon \cdot \psi_{xxxx} - k\psi = 0; \ (x,t) \in (0,\pi)\times(0,T) \\ \psi(x,T) = 0, \ x \in (0,\pi) \\ \psi(0,t) = \psi(\pi,t) = \psi_{xx}(0,t) = \psi_{xx}(\pi,t) = 0 \end{cases} \qquad (1.1.12)$$

$(1.1.12)$ daǵi teńlemeni

$$\psi(x,t)$$

kobeytirip, x boyinsha onnan π ge shekem integrallasaq, onda

$$\int_0^\pi \frac{d}{dt}\psi(x,t)\psi(x,t)dx - \int_0^\pi \psi_{xx}\psi\,dx - \int_0^\pi \psi_{xxxx}\psi\,dx - \int_0^\pi k\psi\psi\,dx = 0$$

Grin formulasina muwapıq

$$\int_0^\pi \psi_{xx}\psi\,dx = -\int_0^\pi \psi_x\psi_x\,dx = -\left\|\Delta\psi\right\|^2,$$

$$\int_0^\pi \psi_{xxxx}\psi\,dx = -\int_0^\pi \psi_{xxx}\psi_x\,dx = \int_0^\pi \psi_{xx}\psi_{xx}\,dx = \left\|\Delta\psi\right\|^2$$

Demek,

$$\frac{d}{dt}\|\psi\|^2 + \|\Delta\psi\|^2 - \varepsilon\|\Delta\psi\|^2 - k\|\psi\|^2 = 0.$$

Shvarts teńsizligi boyinsha

$$\|\Delta\psi\|^2 = -\int_0^\pi \psi_{xx}\psi\, dx = (-\Delta\psi,\psi) \le \varepsilon\|\Delta\psi\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|\Delta\psi\|^2$$

usinday etip,

$$\frac{d}{dt}\|\psi\|^2 \ge \left(k - \frac{1}{4\varepsilon}\right)\|\psi\|^2,$$

endi

$$k = \frac{1}{4\varepsilon}$$

tanlep alsaq, onda

$$\|\psi(\cdot,T)\|^2 - \|\psi(\cdot,t)\|^2 \ge \int_t^T (k - \frac{1}{4\varepsilon})\|\psi(\cdot,s)\|^2 ds = 0,$$

yaǵniy

$$w(\cdot,T) = 0.$$

Bul jerde,

$$w(\cdot,t) = 0$$

hamde

$$\psi(\cdot,t) = 0.$$

Demek,

$$u(x,t) = v(x,t)$$

ekan. Usini isbatlaw talap etilgen edi.

Nihayet, $(1.1.7)-(1.1.9)$ máselelerdiń sheshimi

$$g \in L^2(0,\pi)$$

ne uzluksiz boaylanislı ekenligin korsetemiz.

Meyli, u hám v funkciyalari $(1.1.7)-(1.1.9)$ máselelardiń más turde g hám h berilgenlerine mas sheshimleri bolsin.

Demek, $(1.1.10)$ boyinsha

$$u = \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{(T-t)(n^2-\varepsilon\cdot n^4)}g_n - \int_0^T e^{(s-t)(n^2-\varepsilon\cdot n^4)}\cdot e^{-\varepsilon\cdot n^4(T-t)}f_n(s)\,ds\right)\sin nx,$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{(T-t)(n^2-\varepsilon\cdot n^4)}h_n - \int_0^T e^{(s-t)(n^2-\varepsilon\cdot n^4)}\cdot e^{-\varepsilon\cdot n^4(T-t)}f_n(s)\,ds\right)\sin nx$$

bunda

$$g_n = \frac{2}{\pi}(g, \sin nx), \quad h_n = \frac{2}{\pi}(h, \sin nx).$$

bulardan

$$\|u(\cdot,t) = v(\cdot,t)\|_H^2 = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{2(n^2-\varepsilon n^4)(T-t)}(g_n - h_n)^2.$$

Eger

$$n^2 - \varepsilon\cdot n^4 \le \frac{1}{4\varepsilon}$$

teńlemelaerin alsaq, onda

$$\|u(\cdot,t) = v(\cdot,t)\|^2 \le \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{(T-t)/2\varepsilon}(g_n - h_n)^2. = \frac{\pi}{2}e^{(T-t)/2\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}(g_n - h_n)^2. = e^{(T-t)/2\varepsilon}\|g_n - h_n\|^2.$$

Demek,

$$\|u(\cdot,t) = v(\cdot,t)\| \le e^{(T-t)/4\varepsilon}\|g - h\|.$$

Bul bolsa, másele sheshiminiń turǵınlıǵin korsetedi. Usini isbatlaw kerek edi.

1.2-§. Regulyorizatsiya usilı, taqribiy sheshim dizimi

Tomendegi teorema orinli

Teorema 1.2.1. $f(x,t) \in L^2(0,T;\ L^2(0,\pi))$ bolsin. Onda, $(1.2.1)-(1.2.3)$ másele birden artiq emes sheshimge iye:

$$u(x,t) \in c([0,T];\ L^2(0,\pi)) \cap L^2(0,T;\ H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)).$$

Bizge belgili, $(1.2.1)-(1.2.3)$ másele korrekt emes qoyilǵan. Demek, oni regulyorlastiriw tiyis.

Teorema 1.2.2. $f \in L^2(0,T;\ L^2(0,\pi))$, $\dfrac{\partial^4 f(x,t)}{\partial x^4} \in L^2(0,T;\ L^2(0,\pi))$ hám

$u(x,t) \in C([0,T];\ L^2(0,\pi)) \cap L^2(0,T;\ H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi))$ bolsin.

Onda

$$\forall t \in [0,T]$$

ushın

$$\left\| u(\cdot,t) - u_\varepsilon(\cdot,t) \right\| \le \varepsilon (T-t) \sqrt{\frac{8}{t^4}\left\| u(\cdot,t)\right\|^2 + t^2 \left\| \frac{\partial^4 f(x,t)}{\partial x^4} \right\|^2_{L^2(0,T;\ L^2(0,\pi))}}$$

bunda $(1.1.7)-(1.1.9)$ máseleniń yagana sheshimi.

Isbati. Parez eteyik, $(1.2.1)-(1.2.3)$ máseleniń aniq sheshimi $u(x,t)$ bolsin. Onday bolsa,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-tn^2} u_n(0) + \int_0^t e^{(s-t)n^2} f_n(s)\, ds \right) \sin(nx) \qquad (1.2.1)$$

bunda

$$u_n(0) = \frac{2}{\pi} (u(x,0), \sin nx).$$

Demek,

$$g(x) = u(x,T) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-Tn^2} u_n(0) + \int_0^T e^{(s-T)n^2} f_n(s)\,ds \right)\sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin nx ,$$

yaǵniy,

$$g_n = e^{-Tn^2} u_n(0) + \int_0^T e^{(s-T)n^2} f_n(s)\,ds$$

hám

$$u_{\varepsilon n}(t) = e^{(T-t)(n^2-\varepsilon n^4)} g_n - \int_0^T e^{(s-T)(n^2-\varepsilon n^4)} \cdot e^{-\varepsilon n^4 (T-s)} f_n(s)\,ds =$$

$$= e^{(T-t)(n^2-\varepsilon n^4)}\left(e^{-Tn^2} u_n(0) + \int_0^T e^{(s-T)n^2} f_n(s)\,ds \right) - \int_0^T e^{(s-t)(n^2-\varepsilon n^4} \cdot e^{-\varepsilon n^4 (T-s)} f_n(s)\,ds =$$

$$= e^{-tn^2} \cdot e^{(T-t)-\varepsilon(T-t)n^4} u_n(0) + \int_0^t e^{(T-t)(n^2-\varepsilon n^4)} \cdot e^{(s-T)n^2} f_n(s)\,ds +$$

$$+ \int_0^T e^{(T-t)(n^2-\varepsilon n^4)} \cdot e^{(s-T)n^2} f_n(s)\,ds - \int_t^T e^{(s-T)(n^2-\varepsilon n^4)} \cdot e^{-\varepsilon n^4 (T-s)} f_n(s)\,ds .$$

Bul jerden,

$$u_{\varepsilon n}(t) = e^{-tn^2} \cdot e^{-\varepsilon (T-t)n^4} u_n(0) + \int_0^t e^{(s-T)n^2} \cdot e^{-\varepsilon(T-t)n^4} f_n(s)\,ds \qquad (1.2.2)$$

Sonday etip,

$$1 - e^{-x} \le x, \quad \forall x > 0$$

teńsizliginnen paydalanip, tomendegige iye bolamiz:

$$\left|u_n(t) - u_{\varepsilon n}(t)\right| \le e^{-tn^2} \cdot \left(1 - e^{-\varepsilon n^4 (T-t)}\right)\left|u_n(0)\right| + \left|\int_0^t e^{(s-t)n^2} \cdot \left(1 - e^{-\varepsilon n^4 (T-t)}\right) f_n(s)\,ds\right| \le$$

$$\le e^{-tn^2} \cdot \left(1 - e^{-\varepsilon n^4 (T-t)}\right)\left|u_n(0)\right| + \int_0^t e^{(s-t)n^2} \cdot \left(1 - e^{-\varepsilon n^4 (T-t)}\right)\left|f_n(s)\right| ds \le e^{-tn^2} \varepsilon n^4 (T-t)\left|u_n(0)\right| +$$

$$+ \int_0^t e^{(s-t)n^2} \cdot \varepsilon n^4 (T-t)\left|f_n(s)\right| ds = \frac{\varepsilon}{t^2} e^{-tn^2} (tn^2)^2 (T-t)\left|u_n(0)\right| + \varepsilon (T-t)\int_0^t e^{(s-t)n^2} \cdot n^4 \left|f_n(s)\right| ds \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{t^2}(T-t)\left|u_n(0)\right| + \varepsilon(T-t)\int_0^t n^4 \left|f_n(s)\right| ds . \qquad (1.2.3)$$

Eger

$$(a+b) \le 2(a^2 + b^2)$$

hám Gyolodor teńsizligin esapqa alsaq, onda

$$\left|u_n - u_{\varepsilon n}\right|^2 \le 2\left[\frac{4\varepsilon^2}{t^4}(T-t)^2\left|u_n(0)\right|^2 + \varepsilon^2(T-t)^2\left(\int_0^t n^4\left|f_n(s)\right|ds\right)^2\right] \le$$

$$\le \frac{8\varepsilon^2}{t^4}(T-t)^2\left|u_n(0)\right|^2 + \varepsilon^2(T-t)^2\cdot t^2\cdot\int_0^t n^8\left|f_n(s)\right|^2 ds.$$

Sonday etip,

$$\left\|u(\cdot,t)-u_\varepsilon(\cdot,t)\right\|^2 = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n(t)-u_{\varepsilon n}(t)\right|^2 \le \frac{\pi}{2}\cdot\frac{8\varepsilon^2}{t^4}\cdot(T-t)^2\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_x(0)\right|^2 + \frac{\pi}{2}\cdot\varepsilon^2\cdot(T-t)^2\cdot$$

$$\cdot t^2\cdot\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}n^8\left|f_n(s)\right|^2 ds = \frac{8\varepsilon^2}{t^4}\cdot(T-t)^2\cdot\left\|u(\cdot,0)\right\|^2 + \varepsilon^2\cdot(T-t)^2\cdot t^2\int_0^t\left\|\frac{\partial^4 f(x,s)}{\partial x^4}\right\|^2 ds.$$

Usini isbatlaw talap etilgen edi.

Teorema 1.2.3. Meyli, $(1.1.1)-(1.1.3)$ Máseleniń sheshimi

$$n\in L^\infty\left(0,T;\ L^2(0,\pi)\right)\cap L^2\left(0,T;\ H_0^1(0,\pi)\right)$$

hám $\forall t\in[0,T]$ ushın $\left\|\Delta^2 u(x,t)\right\|<\infty$ bolsin.

Ol jaǵdayda,

$$\left\|u(\cdot,t)-u_\varepsilon(\cdot,t)\right\|\le\varepsilon T\cdot\left\|\Delta^2 u(\cdot,t)\right\|.$$

Isbati. $(1.2.2)$ den biz tomendegige iye bolamiz:

$$u_n - u_{\varepsilon n} = e^{-tn^2}\left(1-e^{-\varepsilon n^4(T-t)}\right)u_n(0) + \int_0^t e^{(s-t)n^2}\cdot\left(1-e^{-\varepsilon n^4(T-t)}\right)f_n(s)\,ds = (1-e^{-\varepsilon n^4 T})u_n(t)$$

Demek,

$$\left\|u(\cdot,t)-u_\varepsilon(\cdot,t)\right\|^2 = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_x-u_{\varepsilon n}\right|^2 \le \frac{\pi}{2}\varepsilon^2\cdot T^2\sum_{n=1}^{\infty}n^8\cdot u_n^2(t) = \varepsilon^2\cdot T^2\cdot\left\|\Delta^2 u(\cdot,t)\right\|^2.$$

teorema isbatlandi.

Teorema 1.2.4. Meyli, $(1.2.1)-(1.2.3)$ máseleniń g ǵa mas aniq sheshimi

$$u\in C\left([0,T];\ L^2(0,\pi)\right)\cap L^2\left(0,T;\ H_0^1(0,\pi)\cap H^2(0,\pi)\right)$$

bolsin.

$$\forall t\in[0,T]$$

ushın

$$\frac{\partial^4 f(x,t)}{\partial x^4},\ \frac{\partial_n}{\partial t}\in L^2\left(0,T;\ L^2(0,\pi)\right),\ \left\|\Delta^2 U(x,t)\right\|<\infty$$

hám

$$\|g_\varepsilon - g\| \le \varepsilon$$

bolsin.

Ol jaǵdayda, usinday $u_{\beta(\varepsilon)}$ funkciyasi bar bolip,

$$\|u_{\beta(\varepsilon)}(\cdot,t) - u(\cdot,t)\| \le \frac{k}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} + \varepsilon^{1/T}, \quad \forall t \in [0,T],$$

$$\|u_{\beta(\varepsilon)}(\cdot,0) - u(\cdot,0)\| \le (1+c)\sqrt{\frac{T}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}} + c\cdot\frac{T}{4\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)},$$

bul jerde,

$$\beta(\varepsilon) = \frac{T}{4\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

hám

$$K = \frac{1}{4}T(T-t)\sqrt{\frac{8}{t^4}\|u(\cdot,0)\|^2 + t^2\left\|\frac{\partial^4 f(x,T)}{\partial x^4}\right\|^2 L^2(0,T;\ L^2(0,\pi))},$$

$$M = \max\left\{\sup_{0\le t\le T}\|u_t(x,t)\|,\ T\sup_{0\le t\le T}\|\Delta^2 U(x,T)\|\right\}.$$

Isbati. Meyli, g ǵa mas $(1.1.7)-(1.1.9)$ máseleniń sheshimi

$$v_{\beta(\varepsilon)}(\cdot,t),\quad g_\varepsilon$$

ǵa mas sheshim $w_{\beta(\varepsilon)}$ bolsin.

Usı funkciyani

$$h(t) = \frac{\ln t}{t} - \frac{\ln\varepsilon}{t}$$

alayıq,

$$\varepsilon \in (0,T).$$

Bul jerden $h(T) > 0$ hám $\lim_{t\to 0} h(t) = -\infty$ hamde $(0,T)$ degi sheshim $h(t)=0$.

t_ε oniń eń kishi sheshimi bolsin.

$$\ln t > -\frac{1}{t}$$

teńsizligi asasinda

$$t_\varepsilon < \sqrt{\frac{T}{\ln(1/\varepsilon)}}.$$

u hám u_ε funkciyalari ushın $(0,t_\varepsilon)$ intervalda Lagranj teoremasin qollasaq:

$$\|u(0)-u(t_\varepsilon)\| \le t_\varepsilon \|u'(\alpha)\| \le c\cdot t_\varepsilon, \quad \forall \alpha \in (0,t_\varepsilon)$$

Teorema 1.2.5. asasinda

$$\|v_{\beta\varepsilon}(t_\varepsilon)-u(0)\| \le \|v_{\beta\varepsilon}(t_\varepsilon)-u(t_\varepsilon)\| + \|u(0)-u(t_\varepsilon)\| \le$$

$$\le \beta(\varepsilon)(T-t_\varepsilon)\|\Delta^2 u(t_\varepsilon)\| + ct_\varepsilon \le c\cdot\left(\sqrt{\frac{T}{\ln(1/\varepsilon)}} + \frac{T}{4\ln(1/\varepsilon)}\right)$$

$$u_{\beta(\varepsilon)}(t) = \begin{cases} w_{\beta(\varepsilon)}(t), & 0<t\le T \\ w_{\beta(\varepsilon)}(t_\varepsilon), & t=0 \end{cases}$$

dep belgilew kiritsek, onda teorema 1.2.1 nen

$$\|v_{\beta(\varepsilon)}(\cdot,t)-w_{\beta(\varepsilon)}(\cdot,t)\| \le e^{\frac{T-t}{4\beta(\varepsilon)}}\|g^\varepsilon - g\| < \varepsilon^{t/T}.$$

Teorema 1.2.6. hám ushmuyeshlik teńsizliginnen

$$\|v_{\beta(\varepsilon)}(\cdot,t)-u_{\beta(\varepsilon)}(\cdot,t)\| \le \|v_{\beta(\varepsilon)}(\cdot,t)-w_{\beta(\varepsilon)}(\cdot,t)\| + \|v_{\beta(\varepsilon)}(\cdot,t)-u(\cdot,t)\| \le \frac{K}{\ln(1/\varepsilon)} + \varepsilon^{t/T}.$$

Bıraq,

$$\|u_{\beta(\varepsilon)}(\cdot,o)-u(\cdot,o)\| \le \|v_{\beta(\varepsilon)}(\cdot,t_\varepsilon)-w(\cdot,t_\varepsilon)\| - \|v_{\beta(\varepsilon)}(\cdot,t_\varepsilon)-w_{\beta(\varepsilon)}(\cdot,t_\varepsilon)\| +$$

$$+\|v_{\beta(\varepsilon)}(\cdot,t_\varepsilon)-u(\cdot,0)\| \le (1+c)\sqrt{\frac{T}{\ln(1/\varepsilon)}} + c\cdot\frac{T}{\ln(1/\varepsilon)}$$

usını isbatlaw kerek edi.

1.3-§. Jıllıliq ótkezıwshenlik teńlemelerin maple paketi járdeminda sheshiw

Jıllıliq ótkezıwshenlik teńlemelerin Maple 12 paketi járdeminda sheshiw tómendigıshe ámelge asiriladı:

- $restart;$
- $heat := diff(u(x,t),t) - k * diff(u(x,t),x,x) = 0;$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,u(x,t) - k\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,u(x,t)\right) = 0$$

Kiyinen orın almastırıw usulınnan paydalanamiz:

- $eq := subs(u(x,t) = X(x) * T(t), heat);$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(X(x)\;T(t)) - k\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,(X(x)\;T(t))\right) = 0$$

Endi, teńlemenıń eki tárepında

$X\,(x) * T\,(\mathrm{t})$

ǵa bolip jiberemiz:

- $expand(eq / X(x) / T(t));$

$$\frac{\frac{d}{dt}\,T(t)}{T(t)} - \frac{k\left(\frac{d^2}{dx^2}\,X(x)\right)}{X(x)} = 0$$

Ózgerıwshılerdi ájratamiz:

- $sep := (\%) + (k * diff(X(x),x,x) / X(x) = k * diff($[illegible]$/X(x)); x)$

$$\frac{\frac{d}{dt}\,T(t)}{T(t)} = \frac{k\left(\frac{d^2}{dx^2}\,X(x)\right)}{X(x)}$$

Bul teńliktiń oń ham shep táreplerinde har qiylı ózgerıwshilerdiń funkciyaları turǵfnlıǵın kóriwimiz múmkin, yáǵniy olar qatan' shama ésaplanadi:

- $lhs(sep) = C;$

$$\frac{\frac{d}{dt}\,T(t)}{T(t)} = C$$

Endi, biz ápıwayı differencial teńlemege iye boldıq.

Endi, teńliktiń oń tárepin ózgermes múgdarǵa teńlestiremiz:

➤ $rhs(sep) = C;$

$$\frac{k\left(\frac{d^2}{dx^2}X(x)\right)}{X(x)} = C$$

➤ $X\_sol := dsolve(\%, X(x), explicit = true);$

$$X\_sol := X(x) = \_C1 \cosh\left(\sqrt{\frac{C}{k}}\,x\right) + \_C2 \sinh\left(\sqrt{\frac{C}{k}}\,x\right)$$

➤ $map(subs, [X\_sol], T\_sol, X(x) * T(t));$

$$\left[\left(\_C1 \cosh\left(\sqrt{\frac{C}{k}}\,x\right) + \_C2 \sinh\left(\sqrt{\frac{C}{k}}\,x\right)\right) \_C1\, e^{(C\,t)}\right]$$

➤ $sol := map(simplify, \%);$

$$sol := \left[\_C1^2 e^{(C\,t)} \cosh\left(\sqrt{\frac{C}{k}}\,x\right) + \_C1\, e^{(C\,t)}\, \_C2 \sinh\left(\sqrt{\frac{C}{k}}\,x\right)\right]$$

Ápıwaylastiriw máqsetinde érkin ózgermes múgdarlardıń anıq mánislerdi tańdap álıwimiz mumkin:

➤ $subs(C = k, k = 1, \_C1 = 1, \_C2 = 1, sol);$

$$[e^t \cosh(x) + e^t \sinh(x)]$$

➤ $evalc(\%);$

$$[e^t \cosh(x) + e^t \sinh(x)]$$

Bul jerden trigonometrik kóriniske iye bolamız:

➤ $convert(\%, trig);$

$$[(\cosh(t) + \sinh(t)) \cosh(x) + (\cosh(t) + \sinh(t)) \sinh(x)]$$

Yáǵniy,

➤ $S := evalc(\%);$

$$S := [(\cosh(t) + \sinh(t)) \cosh(x) + (\cosh(t) + \sinh(t)) \sinh(x)]$$

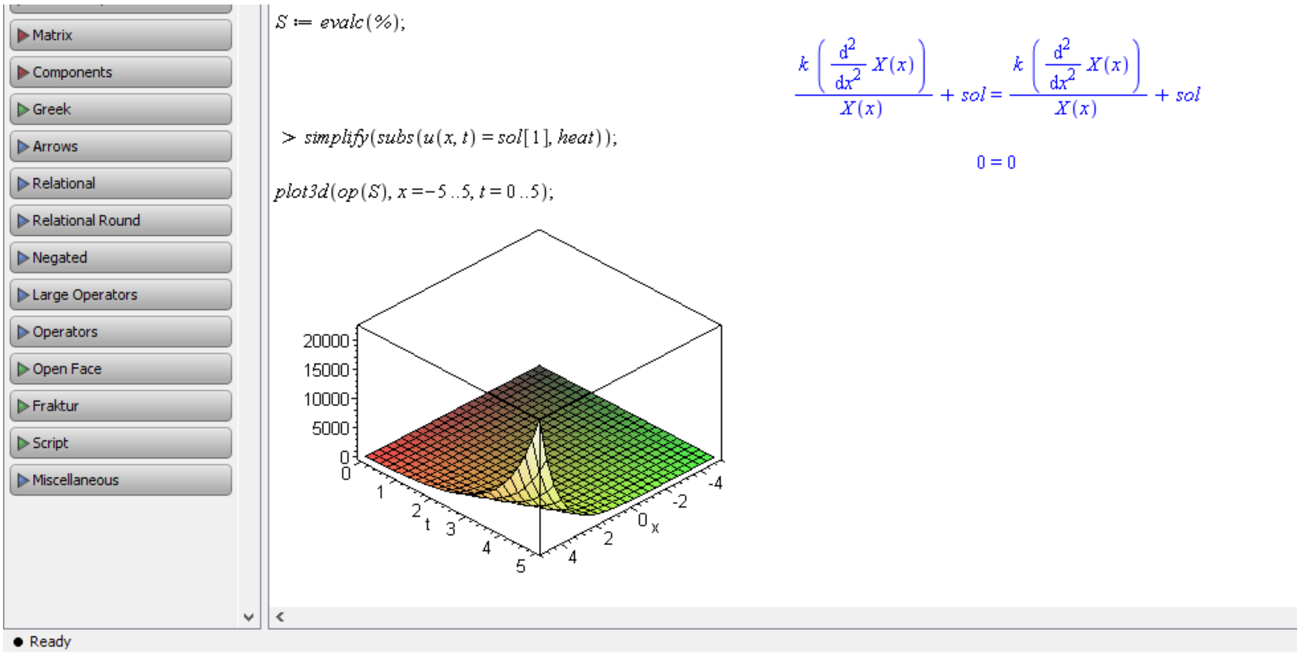
Endi, bul shéshimdiń tuwrılıǵın tekseremiz:

➤ $simplify(subs(u(x,t) = sol[1], heat));$

$0 = 0$

Sheshimdiń tuwrılıǵın grafik jasap, isénim kámil étemiz:

> $plot3d(op(S), x = -5..5, t = 0..5);$



1.3.1-súwret

II-BAP. JILLILIQ ÓTKEZIWSHENLIK TEN’LEMESINE QOYILG’AN ARALAS MASELE USHIN TORLAR USILI HAM KOSHI MASELESI

2.1-§. Jıllılıq ótkezıwshenlik teńlemesine qoyilǵan aralas másele ushın torlar usılı

Jıllılıq ótkezıwshenlik teńlemesi ushın aralas másele berilgen bolsin:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & (2.1.1) \\ u(x,0) = f(x), \quad (0 \le x \le s) & (2.1.2) \\ u(0,t) = \varphi(t), u(s,t) = \psi(t) & (2.1.3) \end{cases}$$

Joqaridaǵi $(2.1.1)-(2.1.3)$ másele, xususan, uzınliǵi s bolǵan bir jinsli sterjenda jıllıliq tarqaliwi máselesin keltiriw mumkin. $(2.1.1)$ teńlemeni $\tau = a^2 t$ almastiriw menen

$$u_t = u_{xx}$$

koriniske keltiriw mumkin. Soniń ushın bunnan kiyin $a = 1$ dep alamiz.

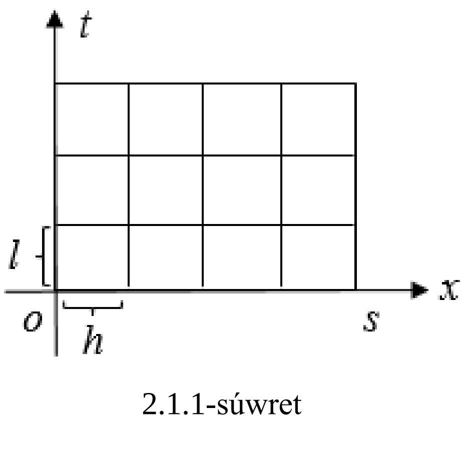
Yarim tegıslik $t \ge 0, \; 0 \le x \le s$ te eki parallel tuwri siziqlar:

$$x_i = ih, \; i = 0,1,2,... \quad t = jl, \; j = 0,1,2,...$$

shańaraqlarin quramiz.

$$x_i = ih, \; t_j = jl, \; u(x_i, t_j) = u_{ij}$$

dep belgileymiz.



2.1.1-súwret

u_{xx} hasileni hár bir ishki tugunde taqribiy ayirmali nisbet menen almastiramiz:

$$(u_{xx})_{ij} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} \tag{2.1.4}$$

u_t hasileni bolsa, tomendegi nisbetlerden biri menen almastiramiz:

$$(u_t)_{ij} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{l} \tag{2.1.5}$$

$$(u_t)_{ij} \approx \frac{u_{i,j} - u_{ij}}{l} \tag{2.1.5'}$$

Bul jaǵdayda $(3.1.1)$ teńleme ushın $a = 1$ bolǵanda tomendegi eki turdegi shekli ayirmali teńlemeni alamiz:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{l} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} \tag{2.1.6}$$

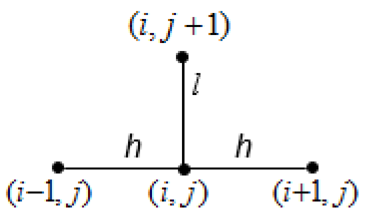
$$\frac{u_{ij} - u_{i,j-1}}{l} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} \tag{2.1.7}$$

Bul teńlemelerde $\sigma = l/h^2$ siyaqli belgilep, olardi tomendegishe jazamiz:

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\sigma)u_{ij} + \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \tag{2.1.8}$$

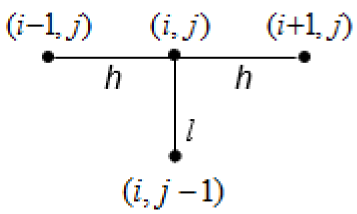
$$(1 + 2\sigma)u_{ij} - \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + u_{i,j-1} = 0 \tag{2.1.9}$$

$(2.1.6)$ teńlemeni duziwde oshkor sxemadan:



2.1.2-súwret

$(2.1.6)$ teńlemeni duziwde oshkormas sxemadan paydalanamiz:



2.1.3-súwret

$(2.1.8), (2.1.9)$ teńlemelerinde σ saniniń teńlemede eki jaǵdayin esapqa aliw kerak:

1. Differencial teńlemeni ayirmali teńlewimiz menen almastiriwdaǵi qatelik eń kishi boliwi kerek;
2. Ayirmali sxema turǵın boliwi kerek;

$(2.1.8)$ teńleme $0 < \sigma \le 1/2$ ge, $(2.1.9)$ teńleme bolsa, qálegen σ ǵa turǵın boladi.

$(2.1.8)$ teńlemeniń eń qolay korinisi

$\sigma = \frac{1}{2}$ da

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2} \qquad (2.1.10)$$

$\sigma = \frac{1}{6}$ da

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6} \cdot \left(u_{i-1,j} + 4 \cdot u_{ij} + u_{i+1,j} \right) \qquad (2.1.11)$$

$0 < x \le s,\ 0 \le t \le T$ sahadaǵi $(2.1.9), (2.1.10), (2.1.11)$ teńlemelerinnen tawilǵan sheshimlerdiń qáteliklerin baqlaw mas túrde tomendegishe:

$$\left| u - \bar{u} \right| \le T \cdot M_1 \cdot \frac{h^2}{3} \qquad (2.1.12)$$

$$\left| u - \bar{u} \right| \le T \cdot M_2 \cdot \frac{h^4}{135} \qquad (2.1.13)$$

$$\left| u - \bar{u} \right| \le T \cdot \left(\frac{l}{2} + \frac{h^2}{12} \right) \cdot M_1 \qquad (2.1.14)$$

Bul jerde $\bar{u}$ $(2.1.1) - (2.1.3)$ máseleniń aniq sheshimi, $0 \le t \le T,\ 0 \le x \le s$ de sheshimi

$$M_1 = \max \left\{ \left| f^{(4)}(x) \right|, \left| \varphi'(t) \right|, \left| \psi''(t) \right| \right\},$$

$$M_2 = \max \left\{ \left| f^{(6)}(x) \right|, \left| \varphi^{(4)}(t) \right|, \left| \psi^{(4)}(t) \right| \right\}.$$

Joqaridaǵi qáteliklerdi baqlawdan korinip turǵaninday, $(2.1.11)$ teńleme sheshimi $(2.1.10)$ niń sheshiminnen aniqraq boladi.

Torlar usılı menen, bir jinsli bolmaǵan parabolik turdegi

$$u_t = u_{xx} + F(x,t) \qquad (2.1.15)$$

teńleme ushın aralas máselenida sheshiw mumkin.

Bul jaǵdayda, tugunlerdiń askar(oshkor) jaǵdaydaǵı sxemasinnan paydalanǵan jaǵdayda mas ayirmali teńleme tomendegishe boladi:

$$u_{i,j+1} = (1-2\sigma)\cdot u_{ij} + \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + l\cdot F_{ij} \qquad (2.1.16)$$

Bunda, eger

$\sigma = \frac{1}{2}$ bolsa,

onda

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2}\cdot(u_{i+1},j + u_{i-1,j}) + l\cdot F_{ij} \qquad (2.1.16')$$

boladi.

Eger,

$\sigma = \frac{1}{6}$ bolsa,

onda

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}\cdot\left(u_{i-1,j} + 4\cdot u_{ij} + u_{i-1,j}\right) + l\cdot F_{ij} \qquad (2.1.17)$$

boladi.

Bul jerda tomendegi qátelikti baqlaw orinli:

$(2.1.16')$ teńleme ushın

$$\left|\bar{u}-u\right| \le \frac{T}{4}\cdot\left(M_2+\frac{1}{3}M_4\right)\cdot h^2$$

$(2.1.17)$ teńleme ushın

$$\left|\bar{u}-u\right| \le \frac{T}{72}\cdot\left(\frac{1}{3}M_3+\frac{1}{5}M_6\right)\cdot h^4,$$

bunda

$$M_i=\max\left|\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right|,\ M_k=\max\left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|,\ i=2,3;\ k=4,6.$$

Mısal-2.1.1. $(2.1.10)$ ayirmali teńlemeden paydalanip,

$$u_t=u_{xx} \qquad (2.1.18)$$

teńlemeniń

$$\begin{aligned} &u(x,0)=\sin \pi x,\ (0\le x\le 1)\\ &u(0,t)=u(1,t)=0\ \ (0\le t\le 0.25) \end{aligned} \qquad (2.1.19)$$

shartlerdi qanaatlentiruwshi taqribiy sheshim tabilsin.

Sheshiliwi: x argument ushın $h=0.1$ qadem tańlaymiz,

$$\sigma=\frac{1}{2}$$

bolǵanliǵinnan t argument ushın qádem

$$l=\frac{h^2}{2}=0.005$$

tomendegi jadveldi baslanǵish hám shegaraliq mánisler menen toldiramiz.

Eger, olardiń simmetriklari itibarǵa alsaq, onda jadveldi tekǵana

$$x=0;\ 0.1;\ 0.2;\ 0.3;\ 0.4;\ 0.5$$

lar ushın toldiriwimiz mumkin.

$u(x,t)$ funkciyanıń birinshi qátlemdegi mánislerin baslanǵish qatlemdegi mánislerinnen hám shegaraliq shartlerden paydalanip, $j=0$ bolǵanda $(2.1.10)$ formuladan paydalanip tabamiz:

$$u_{i1}=\frac{1}{2}\left(u_{i+1,0}+u_{i-1,0}\right)$$

Bul jaǵdayda

$$u_{11}=\frac{1}{2}\left(u_{20}+u_{00}\right)=\frac{1}{2}(0.5878+0)=0.2939$$

$$u_{21}=\frac{1}{2}\left(u_{30}+u_{10}\right)=\frac{1}{2}(0.8090+0.3090)=0.5590$$

hám taǵida basqa U_{i1} niń $i=1,2,3,4,5$ lerdada mánislerin tawip jadveldi toltiramiz:

j	x / t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0	0	0	0.3090	0.5878	0.8090	0.9511	1
1	0.005	0	0.2939	0.5590	0.7699	0.9045	0.9511
2	0.010	0	0.3795	0.5316	0.7318	0.8602	0.9045
3	0.015	0	0.2658	0.5056	0.6659	0.8182	0.8602
4	0.020	0	0.2528	0.4608	0.6619	0.7780	0.8182
5	0.025	0	0.2404	0.4574	0.6294	0.7400	0.7780
$\tilde{u}(x,t)$	0.025	0	0.2414	0.4593	0.6321	0.7431	0.7813
$\lvert\tilde{u}-u\rvert$	0.025	0	0.001	0.0019	0.0027	0.0031	0.033

Ekınshi qatlemde $j=1$ bolǵanda $(2.1.10)$ formula tiykarında

$$u_{i2}=\frac{1}{2}\left(u_{i+1,1}+u_{i-1,1}\right)$$

boladi. Soǵan uqsas u_{ij} mánislerdi $t = 0.005\ ;\ 0.010\ ;\ 0.020\ ;\ 0.025$ ler ushında ésaplaymiz. Jadveldiń aqirinda aniq sheshim $\tilde{u}(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin \pi x$ tiń mánisleri keltirilgen.

Salistiriw ushın $(2.1.12)$ formuladan paydalanip tómendegishe baqlawdi keltiremiz:

Berilgen másele ushın

$$\psi(t) = \varphi(t) = 0,\ f^{(4)}(x) = \pi^4 \cdot \sin(\pi x)$$

dan

$$M_1 = \pi^4.$$

Demek,

$$\left|\tilde{u} - u\right| \le \frac{0.025}{3}\cdot \pi^4 \cdot h^2 = \frac{0.025}{3}\cdot 97.22 \cdot 0.01 = 0.0081 .$$

2.2-§. Jıllıliq ótkezıwshenlik teńlemesine qoyilǵan keri Koshi máselelasi regulyorizatsiyasi

Tomendegi shegaraliq másele berilgan bolsin:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = -u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega = (0,\pi)\times(0,T) & (2.2.1) \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in [0,\pi] & \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \ t \in [0,T] & (2.2.2) \end{cases}$$

Birar, fiksirlengen $t \in [0,T]$ da $u(x,t)$ funkciyani tabiw talap qilinadi.

f_k menen $f(x)$ funkciyaniń Fyure koefficiyentlerin belgileymiz:

$$f_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(kx) f(x)\,dx, \quad k = 1, 2, ...$$

Eger $f(x)$ funkciyani baslanǵish máseleniń sheshimi bar bolatawin etip tańlasaq, onda

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot e^{k^2 t} \sin(kx)$$

boladi.

Endi, usi jardemshi máseleni qaraymiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_\alpha}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x^2} - \alpha \dfrac{\partial^4 v_\alpha}{\partial x^4}, \ (x,t) \in \Omega, \ \alpha > 0 & (2.2.3) \\ v_\alpha(x,0) = f(x), \quad x \in [0,\pi] \\ v_\alpha(0,t) = v_\alpha(\pi,t) = 0, \ \dfrac{\partial^2 v_\alpha(0,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v_\alpha(\pi,t)}{\partial x^2} = 0, \ t \in (0,T) & (2.2.4) \end{cases}$$

Bul jerde $(2.2.3)$ hám $(2.2.4)$ shartlerdi qanaatlentiriwshi jetkilikli silliq $v_\alpha(x,t)$ funkciyani tabiw talap qilinadi.

Ravshanki, bul máseleniń sheshimi

$$v_\alpha(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \exp\left(k^2(1-\alpha k^2)t\right)\sin(kx)$$

ekenligine (osongina)asanǵana isenim payda qiliw mumkin.

Bunnan korinediki,

$$v_\alpha(x,t) = B_\alpha f(x)$$

formula menen aniqlanǵan B_α operatorlar toparina Koshi máselesine nisbaten regulyorlastirıwshi topar sholkemlestiredi. Regulyorlastirıwshi topar-oila tashkil etedi. Regulyorlastirıwdiń effektivlik koefficiyentin tabamiz.

$$k^2(1-\alpha k^2) \le \frac{1}{4\alpha}$$

dan

$$\|B_\alpha\| = \max_k \exp\left(k^2(1-\alpha k^2)t\right) \le \exp\left(\frac{t}{4\alpha}\right)$$

ekenligi kelip shiǵadi.

Endi, usı shert astinda

$$\|u(x,T)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \exp(2k^2T) \le c^2$$

tomendegi ipadani baholaymiz:

$$\|v_\alpha(x,t) - u(x,t)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \left(\exp(k^2 t) - \exp(k^2(1-\alpha k^2)t)\right)^2$$

Sharttiń ekstremumin tabıw ushın Lagranj usulinnan paydalanamiz.

Baholanayotgan ipadaniń mánisi

$$f_k \exp(k^2 T) \le c$$

shart astinda

$$\gamma(k) = c \cdot \exp\left(-k^2(T-t)\right)\cdot\left(1-\exp(-\alpha k^4 t)\right)$$

funkciyaniń maksimuminnan aspaydi.

$\gamma(k)$ funkciyaniń ekstremumin tabıw $\gamma'(k) = 0$ trancendent teńlemege alip keledi. Bul ekstremumdiń α boyinsha tartibi ustpe-ust tusetawin bahosini tabamiz.

$$\gamma(k) \le ck^4 t\alpha \exp\left(-k^2(T-t)\right) = \beta(k)$$

boliwini aniqlaw qiyin emes.

Demek,

$$\beta'(k) = ct\alpha k^3\left(4 - 2k^2(T-t)\right)\exp\left(-k^2(T-t)\right) = 0\,.$$

Bunnan

$$k^2 = \frac{2}{T-t}.$$

Ol jaǵdayda

$$\max_k \gamma(k) \le \max_k \beta(k) = \frac{4ct}{(T-t)^2}\alpha \cdot e^{-2}$$

boladi.

Misal. Tomendegi másele berilgen bolsin:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 2e^t \sin x & (2.2.5) \\ u(x,1) = g(x) = e \cdot \sin x & (2.2.6) \end{cases}$$

Sheshiliwi. Bul máseleniń sheshimi

$$u(x,t) = e^t \sin x$$

ekenligin aniqlaw qiyin emes.

Haqiqatındada

$$u_t = e^t \sin x, \ u_{xx} = -e^t \sin x, \ u_t - u_{xx} = 2e^t \sin x$$

teńleme hám

$$u(x,1) = e \sin x$$

shart qanaǵatlantırıladı.

Endi,

$$g_n(x) = e \sin x + \frac{1}{n}\sin(nx)$$

dep alsaq, onda

$$u_n(x,t) = e^t \sin x + \frac{1}{n} e^{n^2(1-t)} \sin(nx)$$

boladi.

Bıraq,

$$\left\| g_n - g \right\|_{L_2(0,\pi)} = \sqrt{\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{n} e^{n^2(1-t)} \sin(nx) \right)^2 dx} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\left\| u^n(\cdot,0) - u(\cdot,0) \right\|_{L_2(0,\pi)} = \sqrt{\int_0^{\pi} \frac{e^{2n^2}}{n^2} \sin^2(nx)\, dx} = \frac{e^{n^2}}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Demek,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| g_n - g \right\|_{L_2(0,\pi)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| u^n(\cdot,0) - u(\cdot,0) \right\|_{L_2(0,\pi)} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n^2}}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \infty,$$

yaǵniy $(2.2.5)-(2.2.6)$ másele, korrekt emes qoyilǵanligin ańlatadi (korrektliktiń turǵınliq sharti buziladi).

Endi, berilgen másele ornina tomendegi qosimsha máseleni qaraymiz:

$$u_t^{\varepsilon} - u_{xx}^{\varepsilon} - \varepsilon u_{xxxx}^{\varepsilon} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n^2 (T-t)} f_n(t) \sin(nx), \quad 0 \le x \le \pi, \; 0 < t < T \qquad (2.2.7)$$

$$u^{\varepsilon}(0,T) = u^{\varepsilon}(\pi,T) = u_{xx}^{\varepsilon}(0,T) = u_{xx}^{\varepsilon}(\pi,T) = 0, \; 0 \le x \le \pi, \; 0 < t < T \qquad (2.2.8)$$

$$u^{\varepsilon}(x,T) = g(x), \; 0 \le x \le \pi, \qquad (2.2.9)$$

bunda

$$f_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f \cdot \sin(nx)\, dx.$$

Bul máseleniń sheshimi

$$u^{\varepsilon}(x,t) = e^{(1-t)(1-\varepsilon)+1} \sin x - 2\left(\int e^{(s-t)(1-\varepsilon)} \cdot e^{-\varepsilon(1-s)+1} ds \right) \sin x + \frac{1}{n} e^{(1-t)(n^2 - \varepsilon n^4)} \sin(nx)$$

ekenligin tekseriw qiyin emes.

Eger,

$$u(x,1/2)=\sqrt{e}\sin x$$

bolsa, onda

$$u^{\varepsilon}(x,1/2)=\left(e^{\frac{3-\varepsilon}{2}}-2\int_{1/2}^{1}e^{2s-\frac{1-\varepsilon}{2}}ds\right)\sin x+\frac{1}{n}e^{\frac{1}{2}(n^2-\varepsilon n^4)}\sin(nx)$$

boladi.

Aniq hám regulyorlastirilǵan sheshim arasindaǵi parıq tomendegi jadvelde keltirilgen:

ε	u_{ε}	$\left\Vert u-u_{\varepsilon}\right\Vert$
$10^{-2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$1.643563444\sin x+0.8243606355\sin(200x)$	0.1462051256
$10^{-4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$1.648617955\sin x+0.164872127\sin(10^{44}x)$	$0.0206639150\ \ 6$
$10^{-10}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$1.648721271\sin x+10^{-10}\cdot\sin(10^{10}x)$	$0.0002066365\ \ 678$

Bundan korinip turǵandiyaq, $\varepsilon\to 0$ da $\left\Vert u-u_{\varepsilon}\right\Vert\to 0,$ yaǵniy $u_{\varepsilon}\to u$.

III-BAP. JILLILIQ OTKEZIWSHILIK TEŃLEMESI USHÍN QOYÍLǴAN SHEGARALÍQ MÁSELENI SHESHIWDIŃ PROGRAMMALÍQ TÁMIYINLENIWIN JARATÍW METODIKASÍ

3.1-§. C++ programmalastiriw tiliniń tiykarǵı túsinikleri

C++ programmalastırıw tili C tiline tiykarlanǵan. C bolsa óz náwbetinde B hám BCPL tillerinen kelip shıqqan. BCPL 1967 jılda Martin Richards tárepinen jaratılǵan hám operacion sistemalardı jazıw ushın arnalǵan edi. Ken Thompson óziniń B tilinde BCPL diń kóp qásiyetlerin kiritken B da UNIX operacion sistemasiniń birinshi versiyaların jazǵan. C tilin Dennis Rittshie B dan keltirip shıǵaradı hám onı 1972 jılı birinshi márte Bell Laboratoriyasında, DEC PDP-11 kompyuterinde qolladı. C ózinen aldıngı B hám BCPL tilleriniń júdá kóp áhmiyetli táreplerin óz ishine alıw menen bir qatarda ózgeriwshilerdi tiplestirdi hám bir qatar basqa jańalıqlardı kiritti. Baslanıwında C tiykarınan UNIX sistemalarında keń tarqaldı. Házirde operacion sistemalardıń tiykarǵı bólegi C/C++ da jazılmaqta. 1983 jılda, C tili keń tarqalǵanlıǵı sebepli, onı standartlastırıw háreketi baslandı. Bunıń ushın Amerika Milliy Standartlastırıw Komiteti (ANSI) qasında X3J11 texnik komitet dúzildi hám 1989 jılda usı standart qabıl qılındı. Standarttı dúnya boyınsha keń tarqatıw maqsetinde 1990 jılda ANSI hám Dúnya Standartlar Shólkemi (ISO) sherikliginde C diń ANSI/ISO 9899:1990 standartın qabıl etti. Sol sebepli C da jazılǵan programmalar az muǵdarda ózgerisler yáki ulıwma ózgerislersiz júdá kóp kompyuter platformalarında isleydi. C++ 1980 jıllar basında Bjarne Stroustrup tárepinen C ǵa tiykarlanǵan halda dúzildi. C++ júdá kóp qosımshalardı óz ishine alǵan, biraq eń tiykarǵısı ol obektler menen programmalastırıwǵa imkaniyat beredi. Onda C ǵa uqsas strukturalı yáki obektler menen programmalastırıw múmkin. C++ funkciya hám obektlerdiń júdá bay bibliotekasına iye. Yaǵnıy C++ ta programmalastırıwdı úyreniw eki bólekke bólinedi. Birinshisi bul C++ diń ózin úyreniw, ekinshisi bolsa C++ diń standart bibliotekasındaǵı tayyar obekt/funkciyalardı qollawdı úyreniw.

C++ alfavitine tómendegi simvollar kiredi:

- Úlken hám kishi latın alfaviti háripleri (A,B,..,Z,a,b,…,z)
- Cifrlar: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

- Arnawlı simvollar: “ , {} | [] () + - / % \ ; ‘ . : ? < = > _ ! & * # ~ ^
- Kórinbeytuǵın simvollar (“ulıwmalasqan boslıq simvolları”). Leksemalardı ózara ajratıw ushın isletiletuǵın simvollar (mısal ushın boslıq, tabulyaciya, taza qatarǵa ótiw belgileri).

Kommentariyalarda, qatarlarda hám konstantalarda basqa literalar, máselen rus háriplerin isletiw múmkin

Xizmetshi sózler. Tilde isletiliwshi yaǵnıy programmamist tárepinen ózgeriwshi atları sıpatında isletiliw múmkin bolmaǵan identifikatorlar xizmetshi sózler delinedi. C++ tilinde tómendegi xizmetshi sózler bar:

int	extern	else
char	register	for
float	typedef	do
double	static	while
struct	goto	switch
union	return	case
long	sizeof	default
short	break	entry
unsigned	continue	
auto	if	

Ózgeriwshiler. Ózgeriwshi mánisine atı arqalı múrajat qılıw múmkin, yad bólegine bolsa tek ǵana adresi arqalı múrajat qılınadı. Ózgeriwshi atı bul erkin kiritiletuǵın identifikator. Ózgeriwshi atı sıpatında xizmetshi sózlerdi isletiw múmkin emes.

Ózgeriwshi tipleri	Mánisi
char	bir simvol;
long char	uzın simvol;
int	pútin san;
short yáki short int	qısqa pútin san;
long yáki long int	uzın pútin san;

float	haqıyqıy san;
long float yáki double	ekilengan haqıyqıy san;
long double	uzın ekilengan haqıyqıy san;

Konstantalar. Tómendegi kestede konstantalar shegaraları hám sáykes tipleri kórsetilgen:

Maǵlıwmatlar túri	Kólem, bit	Mánisler shegarası	Tip wazıypası
Unsigned char	8	0…255	Kishi pútin sanlar hám simvollar kodlar
Char	8	-128…127	Kishi pútin sanlar hám ASII kodlar
Enum	16	-32768…32767	Pútin sanlar tártiplengen qatarı
Unsigned int	16	0…65535	Úlken pútin sanlar
Short int	16	-32768…32767	Kishi pútin sanlar, cikllardı basqarıw
Int	16	-32768…32767	Kishi pútin sanlar, cikllardı basqarıw
Unsigned long	32	0…4294967295	Astronomik aralıqlar
Long	32	-147483648… …2147483647	Úlken sanlar
Float	32	3.4E-32…3.4E+38	Ilimiy esaplar (7 cifr)
Double	64	1.7E-308…1.7E+308	Ilimiy esaplar (15 cifr)
Long double	80	3.4E-4932… 1.1E+4932	Qarjı esaplar (19 cifr)

C++ ta arifmetikalıq ámeller. Ámeller kestesi

Arifmetikalıq ámeller	Razryadlı ámeller	Qatnas ámeller	Logikalıq ámeller
+ qosıw	& hám	= = teń	&& hám
- bóliw	| yáki	!= teń emes	|| yáki
* kóbeytiw	^ biykar	> úlken	! biykar
/ bóliw	<< shepke súriw	>= úlken yáki teń	
% modul bóliw	>> ońǵa súriw	< kishi	
- unar minus	~ biykar	<= kishi yáki teń	
+ unar plyus			
++ asırıw			
-- kemeytiriw			

Imla ámeller	Mánis beriw hám shártli ámeller	Tipli ámeller	Adresli ámeller
() – dóńgelek qawıs	= - ápiwayı mánis beriw	(tip) – tipti ózgertiw	& - adresti anıqlaw
[] – khámdrat qawıs	op= - quramalı mánis beriw	sizeof- kólemin esaplaw	* - adres boyınsha mánis anıqlaw yáki jaylastırıw
, - útir	? – shártli ámel		

Tańlaw operatorları. Shártli operator eki kóriniste isletiliwi múmkin:

If (ańlatpa) 1- operator

Else 2- operator

yáki

If (ańlatpa) 1-operator

Shártli operator orınlanǵanda aldın ańlatpa esaplanadı; eger mánis rast yaǵnıy nólden parıqlı bolsa 1- operator orınlanadı. Eger mánis jalǵan yaǵnıy nól bolsa hám else isletilse 2-operator orınlanadı. Else bólegi hár dayım eń jaqın if qa sáykes qoyıladı.

```
If ( n>0)
if (a>b)        Z=a;
else            Z=b;
```

Eger else bólegin joqarı if qa sáykes qoyıw lazım bolsa, figuralı qawıslar isletiw lazım.

```
if( n>0) {
if(a>b)       z=a;}
else          z=b;
```

Cikl operatorları. While operatorı tómendegi ulıwmalıq kóriniske iye.:

```
While(ańlatpa)
Operator
```

Bul operator orınlanǵanda aldın ańlatpa esaplanadı. Eger onıń mánisi 0 den parıqlı bolsa jáne orınlanadı hám ańlatpa qayta esaplanadı. Ańlatpa mánisi 0 bolaman degenshe cikl qaytarıladı. Eger programmada while (1); qatar qoyılsa bul programma hesh qashan toqtamaydı. Mısal. Berilgen n ge shekemgi sanlar qosındısı

```
void main()
 {   long n,i=1,s=0;
cin >>n;
while (i<= n )
      s+=i++;
      cout<<”\n s=”<< s;    };
```

Do-While operatorı ulıwmalıq kórinisi tómendegishe:

```
do
Operator
While(ańlatpa)
```

Cikl operatorınıń bul kórinisinde aldın operator orınlanadı keyin ańlatpa esaplanadı. Eger onıń mánisi 0 den parıqlı bolsa jáne orınlanadı. Ańlatpa mánisi 0 bolaman degenshe cikl qaytarıladı. Mısal. Berilgen n ge shekemgi sanlar qosındısı.

```
void main()
 { long n,i=1,s=0;
 cin >>n;
  do
  s+=i++;
while (i<= n );
cout<<"\n s="<< s;    };
```

For operatorı. Máselen, bizge 0 den 100 ge deyingi barlıq pútin sanlardıń qosındısın esaplaw kerek bolsın. Bunıń ushın biz for cikl operatorın paydalanamız:

```
int sum = 0;  int i;
for (i = 1; i <= 100; i = i + 1)// cikl ataması
sum = sum + i;                   // cikl denesi
```

Cikl operatorı cikl ataması hám cikl denesinen turadı. Cikl denesi – bul berilgen parametr boyınsha qaytalawdı orınlaytuǵın operatorlar blogı. (biziń jaǵdayımızda, sum ózgeriwshisiniń mánisi i ózgeriwshiniń mánisine ósip baradı). Atama – bul for xizmechi sózi hám onnan keyingi qawıs ishindegi toshkalı útir menen ajıratıp jazılǵan úsh ańlatpa. Birinshi ańlatpa cikl baslanǵanda dáslep bir márte ǵana esaplanıladı. Ekinshisi-bul cikl shárti. Usı shárt orınlansa, cikl denesi qaytalana beredi. Úshinshi ańlatpa cikl denesiniń hár qaytalanıwında orınlanıp baradı. for operatorı programmadaǵı iteraciyanıń esaplanıwın ámelge asıradı.

Funkciyalar. C++ ta programmalastırıwdıń tiykarǵı bloklarınan biri funkciya esaplanadı Funkciyalardıń paydası, úlken másele bir neshe kishi bóleklerge bólinip, hár birine óz aldına funkciya jazılǵanda, mósele sheshiw algoritmi apiwayılasadı. Kópshilik jaǵdaylarda programmada tákiraran orınlanatuǵın ámeldi finkciya sıpatında jazıw hám kerekli jerde usı funkciyanı shaqırıw múmkin. Funkciyanı programma denesinde isletiw ushın ol shaqırıladı, yaǵnıy onıń atı jazıladı hám oǵan argumentler beriledi. () qawıslar usı funkciya shaqırılıwın ańlatadı.

Máselen: foo(); k = square(l);

Demek, eger funkciya argumentler bolsa, olar () qawıs ishinde jazıladı. Argumenciz funkciyadan keyin bolsa () qawıslardıń ózi qoyıladı.

Tómendegi matematikalıq funkciyalar bibliotekesınıń bazı bir aǵzaları berilgen. x hám y ázgeriwshileri double tipine iye.

Funkciya	Anıqlanıwı	Mısal
ceil(x)	x tı x tan úlken yáki oǵan teń	ceil(12.6) = 13.0
	eń kishi pútin sanǵa deyin dóńgelekleydi	ceil(-2.4) = -2.0
cos(x)	x tıń trigonometriyalıq kosinusi (x radianda)	cos(0.0) = 1.0
exp(x)	e niń x shı dárejesi (eskponecial funkciya)	exp(1.0) = 2.71828
fabs(x	x tıń absolyut mánisi	x>0 => abs(x) = x
floor(x)	x tı x tan kishi bolǵan eń úlken	floor(4.8) = 4.0
	pútin sanǵa deyin dóńgelekleydi	floor(-15.9) = -16.0
fmod(x,y)	x/y diń qaldıǵın bólshek san tipinde beredi	fmod(7.3,1.7) = 0.5
log(x)	x tıń natural logarifmi (e tiykarǵa kóre)	log(2.718282) = 1.0
log10(x)	x tıń 10 tiykarına kóre logarifmi	log10(1000.0) = 3.0
pow(x,y)	x tıń y shı dárejesin	pow(3,4) = 81.0

	beredi	
sin(x)	x tıń trigonometriyalıq sinusi (x radianda)	sin(0.0) = 0.0
sqrt(x)	x tıń khámdrat koreni	sqrt(625.0) = 25.0
tan(x)	x tıń trigonometriyalıq tangensi (x radianda)	tan(0.0) = 0

Massivler. Massiv bul bir tipli nomerlengen maǵlıwmatlar jıynaǵı esaplanadı. Massiv indeksli ózgeriwshi túsinigine sáykes keledi. Massiv táriplengende tipi, atı hám indeksler shegarası kórsetiledi. Mısalı ushın long int a[5]; char w[200]; double f[4][5][7]; char[7][200]. Massiv indeksleri hár dayım 0 den baslanadı. C ++ tili standartı boyınsha indekslar sanı 31 ge shekem bolıwı múmkin, biraq ámelde bir ólshewli hám eki ólshemli massivler qollanıladı. Bir ólshewli massivlerde matematikada vektor túsinigi sáykes keledi. Massivtiń int z[3] formasındaǵı táripleniwi, int tipine tiyisli z[0],z[1],z[2] elementlerden ibarat massivti anıqlaydı. Massivler táriplengende inicializaciya qılınıwı, yaǵnıy baslanǵısh mánisleri kársetiliwi múmkin.

Mısal ushın:

float C[]={1,-1,2,10,-12.5};

Bul mısalda massiv shegarası avtomatik anıqlanadı. Eger massiv inicializaciya qılınǵanda elementler shegarası kórsetilgen bolsa , dizimdegi elementler sanı bul shegaradan kem bolıwı múmkin, biraq artıq bolıwı múmkin emes. Mısal ushın int A[5]={2,-2}. Bul jaǵdayda a[0] hám a[1] mánisleri anúqlanǵan bolıp, sıykes halda 2 hám –2 ge teń.

Eki ólshemli massivler matematikada matrica yáki keste túsinigine sáykes keledi. Kestelerdiń inicializaciya qılıw qaǵıydası, eki ólshemli massivtiń elementleri massivlerden ibarat bolǵan bir ólshemli massiv anıqlamasına tiykarlanǵan. Mısal ushın eki qatar hám úsh baǵanadan ibarat bolǵan haqıyqıy tipke tiyisli d massiv baslanǵısh mánisleri tómendegishe kórsetiliwi múmkin:

float d[2][3]={(1,-2.5,10),(-5.3,2,14)};

Bul jazıw tómendegi mánis beriw operatorlarına sáykes:

d[0][0]=1;d[0][1]=-2.5;d[0][2]=10;d[1][0]=-5.3;d[1][1]=2;d[1][2]=14;

Bul mánislerdi bir dizim menen payda etiw múmkin:

float d[2][3]={1,-2.5,10,-5.3,2,14};

Inicializaciya járdeminde baslanǵısh mánisler anıqlanǵanda massivtiń barlıq elementlerine mánis beriw shárt emes. Mısal ushın:

int x[3][3]={(1,-2,3),(1,2),(-4)}.

Inicializaciya járdeminde baslanǵısh mánisler anıqlanǵanda massivtiń birinshi indeksi shegarası kórsetiliwi shárt emes, biraq qalǵan indeksler shegaraları kórsetiliwi shárt. Mısal ushın:

Double x[][2]={(1.1,1.5),(-1.6,2.5),(3,-4)}

Daǵaza faylları. Standart biblioteka ishindegi funkciyalardı isletiw ushın olardıń prototipleri jaylasqan daǵaza fayllarıń include preprosessor buyrıǵı mene programma ishine kirgiziw kerek. Tómende biz bazı bir keń qollanılatuǵın daǵaza fayllarıń keltirip ótemiz.

<assert.h> Programma islewin diagnostika qılıw ushın kerekli makrolar hám maǵlıwmatlardı daǵaza qıladı. Jańa atı <cassert>.

<ctype.h> Simvollardı test qılıwda hám háripler registorın úlkennen kishisine hám kerisinshe ózgertiriwde qollanılatuǵın funkciyalar daǵazaların óz ishine aladı. Jańa atı <cctype.h>

<float.h> Bólshekli (haqıyqıy) sanlardıń sistemaǵa baylanıslı limitleri anıqlanǵan. Jańa atı <cfloat.h>

<limic.h> Pútin sanlardıń sistemaǵa baylanıslı limitleri berilgen.
Jańa atı <climic>.

<math.h> Matematikalıq funkciyalar bibliotekasın daǵaza qıladı.
Jańa atı <cmath>.

<stdio.h> Standart kiritiw/shıǵarıw funkciyalarınıń daǵazaları berilgen.
Jańa atı <cstdio>.

<stdlib.h> Sanlardı tekstke, tekstti sanǵa aylandırıwshı funkciyalar, yad penen isleytuǵın funkciyalar, tosınarlı sanlardı generaciya qılıwshı funkciyalardı hám basqa járdemshi funkciyalar daǵazaların óz ishine aladı. Jańa atı <cstdlib>.
<string.h> C usılındaǵı qatarlar menen islesiwshi funkciyalar daǵazası berilgen. Jańa atı <cstring>.
<time.h> Waqıt hám sáne menen isleytuǵın funkciyalar daǵazaları berilgen.
Jańa atı <ctime>.
<iostream.h>Standart kiriw/shıǵarıw aǵımı menen islesiwshi funkciyalar daǵazası kiritilgen. Jańa atı <iostream>.
<iomanip.h> Aǵım manipulyatorları berilgen. Jańa atı <iomanip>.
<fstream.h> Diskte jaylasqan fayllar menen kiritiw/shıǵarıw ámellerin orınlawshı daǵazaları berilgen. Jańa atı <fstream>.

Tómendegi daǵaza fayllarınıń tek ǵana bir atı bar.
<utility> Basqa bibliotekalar tárepinen qollanılatuǵın járdemshi finkciyalar hám klaslardıń daǵazaları kiritilgen <vector>, <list>, <deque>, <queue>, <stack>, <map>, <set>, <bicet> standart biblioteka konteyner klaslarınıń daǵazaların óz ishine alǵanńar.
<functional> Standart biblioteka algoritmleri tárepinen qollanılatuǵın klass hám funkciyaların daǵaza qıladı..
<memory> Standart biblioteka konteynerleri ushın yad ajratıwda qollanılatuǵın funkciya hám klaslar daǵazaları berilgen.
<iterator> Konteynerler ishindegi maǵlıwmatlar manipulyaciyasında qollanılatuǵın iterator klasları daǵazaları berilgen.
<algorithm> Konteynerlerdegi maǵlıwmatlardı qayta islewde qollanılatuǵın funkciya hám klaslar daǵazaları berilgen.
<exception>, <stdexcept> Ayrıqsha jaǵdaylar mexanizmin orınlawshı klaslar berilgen.
<string> Standart bibliotekanıń string klası daǵaza berilgen.
<sstream> Yadtaǵı qatarlarǵa kiriw/shıǵıwdı orınlaytuúın funkciyalar prototipi berilgen.

<locale> Jergilikli sharayıtqa iykemlesken birlikler (pul, waqıt, sanlardıń túrli kórinisleri) menen isleytuǵın funkciyalar daǵazaları berilgen.
<limic> Esaplaw sistemalarında sanlı maǵlıwmat tipleriniń shegaraların belgilewde isletiletuǵın klass daǵazaları berilgen.
<typeinfo> Islew waqtında tip identefikaciyası ushın qollanılatuǵın klaslar daǵazası kiritilgen. Paydalanıwshı jazǵan daǵaza faylları .h penen tamamlansa maqsetke muwapıq boladı. Bunday fayllar qostırnaqqa alınǵan halda programmaǵa kiritiledi, yaǵnıy máselen:
include "my_file.h".

3.2-§. Jıllılıq ótkezıwshenlik teńlemesine qoyılǵan shegaralıq máseleni sheshiwge dúzilgen shekli ayırmalı sxema ushın programma jaratıw metodikası

Jıllılıq ótkezıwshenlik teńlemesine qoyılǵan shegaralıq máseleni sheshiw ushın dúzilgen ayırmalı sxemanı programmalastırıw ushın eń dáslep ayırmalı sxema usılı haqqında maǵlıwmatqa iye bolıwımız kerek.

Ápiwaylıq ushın elliptikalıq tiptegi dara tuwındılı differencial teńlemeler toparına jatatuǵın jıllılıq ótkezıwshenlik teńlemesi ushın qoyılǵan shegaralıq máseleni qarastıramız.

Jıllılıq ótkezıwshenlik teńlemesi

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (3.2.1)$$

ushın shegaralıq másele tómendegishe qoyıladı: G oblasttıń ishki noqatlarında (3.2.1) teńlemeni hám Γ -shegarasında bolsa

$$u(x,t)\Big|_{\Gamma} = \varphi(x,t) \qquad (3.2.2)$$

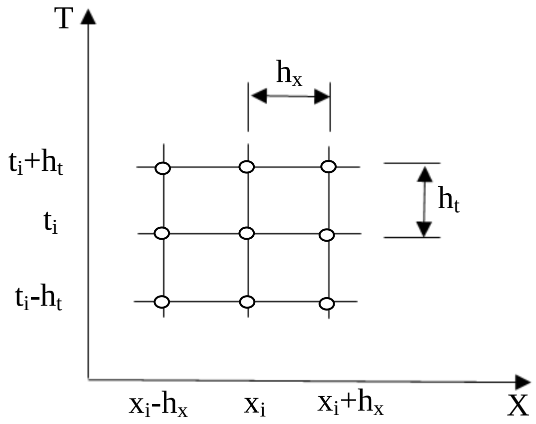
shártin qanaatlandırıwshı

$$u = u(x,t)$$

funkciya tabılsın. Bul jerde $\varphi(x,t)$ – G oblasttıń Γ – shegarasında anıqlanǵan úzliksiz funkciya. Sáykes túrde X hám T kósherlerinde h_x hám h_t adımların tańlap,

$$x_i = x_0 + ih_x, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$t_k = t_0 + kh_t, \quad k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$



3.2.1-súwret

tuwrı sızıqlar járdeminde tor jasaymız. *G* oblasttıń ishki túyinlerinde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1,k} - 2u_{i,k} + u_{i+1,k}}{h_x^2} + O\left(h_x^2\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,k-1} - u_{i,k}}{h_t} + O\left(h_t\right)$$

tuwındılarıń shekli ayırmalı qatnaslar menen almastırıp (3.2.1) teńlemege qoyamız

$$\frac{u_{i-1,k} - 2u_{i,k} + u_{i+1,k}}{h_x^2} = \frac{u_{i,k-1} - u_{i,k}}{h_t} \tag{3.2.3}$$

al (3.2.2) shegaralıq shártlerin shekli ayırma teńlemeleri menen almastırıw ushın shegaralıq shártti tikkeley kóshiriw usıllarınan paydalanamız

$$u(x_i, t_k) \approx \varphi(x_i, t_k),$$
$$(x_i, t_k) \in \Gamma_h \tag{3.2.4}$$

Usınday usıl menen kelip shıqqan (3.2.3), (3.2.4) shekli ayırma teńlemeler sisteması SATS lardıń tolıq sistemasın, yaǵnıy belgisizler sanı teńlemeler sanına teń bolǵan SATS lardı quraydı. Bul (3.2.3), (3.2.4) sistemanı dál yamasa juwıq usıllardıń birewi menen sheship qoyılǵan (3.2.1), (3.2.2) shegaralıq máseleniń torlar usılı menen tabılǵan juwıq sheshimine iye bolamız.

Dara jaǵdayda G tuwrımúyeshli oblast bolsa, $\Gamma_h \in \Gamma$ tordıń shegara túyinleri G oblasttıń Γ shegarasınıń dál ústinde jatadı. Sonlıqtan bul jaǵdayda (3.2.4) juwıq teńligi dál teńlik penen almastırıladı

$$u(x_i, t_k) = \varphi(x_i, t_k),$$

$$(x_i, t_k) \in \Gamma_h \subset \Gamma$$

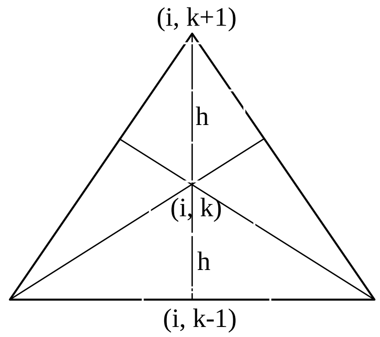
Bul sistema tuwrımúyeshli oblastta hám $h_t = h_x^2$ bolǵanda eń ápiwayı kóriniske keledi. Bul jaǵdayda (3.2.3) teńlemeler tómendegishe jazıladı:

$$u_{i-1,k} - 2u_{i,k} + u_{i+1,k} = u_{i,k-1} - u_{i,k} \qquad (3.2.5)$$

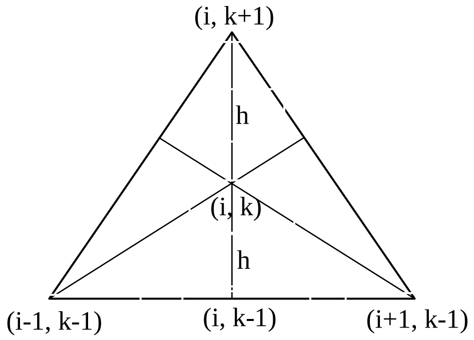
Bul jerden sáykes shekli ayırmalı teńlemelerge iye bolamız:

$$u_{i,k} = u_{i+1,k} + u_{i-1,k} - u_{i,k-1} \qquad (3.2.6)$$

(3.2.5) hám (3.2.6) teńlemelerin dúziwde 3.2.2-súwrettegi túyinler sxemasınan paydalanıladı. Bunnan bılay súwretlerde (x_i, t_k) túyinlerdi olardıń indeksleri menen, yaǵnıy (i, k) sıyaqlı



3.2.2-súwret



3.2.3-súwret

almastırıp jazamız. Bazı waqıtları 3.2.3-súwrettegi sıyaqlı túyinler sxemasınan paydalanıw qolaylı boladı. Bul jaǵdayda Laplas teńlemesi ushın shekli ayırmalı teńlemeler tómendegishe jazıladı

$$u_{i,k} = u_{i+1,k-1} + u_{i-1,k+1} - u_{i-1,k-1} \qquad (3.2.7)$$

Egerde tordıń túyinleriniń sanı kóp bolsa, onda (3.2.6) shekli ayırmalı teńlemeler sisteması teńlemeler sanıda kóp boladı, yaǵnıy úlken sistemaǵa iye bolamız. Tordıń hár bir túyinine bir teńleme sáykes keledi. Bul sistemanı sheshiw ushın dál usıldan paydalanıw múmkin bolmay qaladı.

Kóbinese bul sistemanı sheshiw ushın ápiwayı iteraciyalıq usıldan paydalansa boladı. (3.2.6) teńlemesi ushın ápiwayı iteraciyalıq usılı tómendegishe boladı:

$$u_{i,k}^{(k)} = u_{i+1,k}^{(k-1)} + u_{i-1,k}^{(k-1)} - u_{i,k-1}^{(k-1)}$$

Differencial teńlemelerdi ayırmalı teńlemeler menen almastırıw qáteligi, yaǵnıy (3.2.6) teńleme ushın qaldıq aǵza $R_{i,k}$ tómendegishe bahalanadı:

$$\left|R_{i,k}\right| \le \frac{h^2}{6} M_4,$$

bul jerde

$$M_4 = \max_G \left\{ \left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|, \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right| \right\}.$$

Ayırmalar usılı menen tabılǵan juwıq sheshim qáteligi tómendegi úsh qátelikten kelip shıǵadı:

1) Differencial teńlemelerdi shekli ayırmalı teńlemeler menen almastırıwdan;
2) Shegaralıq shártlerdi approksimaciya qılıwdan;
3) Payda bolǵan shekli ayırmalı teńlemelerdi juwıq usıllar menen sheshiwden.

Konkret shegaralıq shártler ushın C++ tilinde programmalar dúzilip, Laplas teńlemesi ushın qoyılǵan shegaralıq máseleniń juwıq sheshimleri alındı. (2-qosımsha) Berilgen teoriyanı bekkemlew maqsetinde tómendegi mısaldı qaraymız.

Mısal 3.2.1. $h = l = 0,2$ dep alıp torlar usılınan paydalanıp tóbeleri A(0,0), B(0,1), C(1,1), D(1,0) noqatlarında bolǵan ABCD kvadratında jıllılıq ótkezıwshenlik teńlemesi ushın qoyılǵan shegaralıq máseleni sheshiń.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (x,t) \in D \tag{1}$$

$$u\big|_{AB} = 45t(1-t), \qquad u\big|_{BC} = 25x,$$

$$u\big|_{CD} = 25, \qquad u\big|_{AD} = 25x\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \tag{2}$$

Sheshiliwi: Máseleniń sheshimi izlenip atırǵan ABCD kvadrat $h = l = 0{,}2$ tor jasaymız. Berilgen (2) shegaralıq shártlerinen paydalanıp izlenip atırǵan $u(x,t)$ funkciyanıń tordıń shegara túyinler mánislerin esaplaymız.

a) $u(x,y)$ funkciyasınıń kvadrattıń AB tárepiniń ústindegi shegara noqattaǵı mánislerin

$$u(x,t) = 45\,t(1-t)$$

formulası boyınsha esaplaymız.

$$u(0;0) = 45\cdot 0\cdot(1-0) = 0$$

$$u(0;0{,}2) = 45\cdot 0{,}2\cdot(1-0{,}2) = 45\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8 = 7{,}2$$

$$u(0;0{,}4) = 45\cdot 0{,}4\cdot(1-0{,}4) = 45\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6 = 10{,}8$$

$$u(0;0{,}6) = 45\cdot 0{,}6\cdot(1-0{,}6) = 45\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4 = 10{,}8$$

$$u(0;0{,}8) = 45\cdot 0{,}8\cdot(1-0{,}8) = 45\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2 = 7{,}2$$

$$u(0;1) = 45\cdot 1\cdot(1-1) = 0$$

b) $u(x,t) = 25x$ BC tárepiniń mánisleri.

$$u(0;1) = 25\cdot 0 = 0$$

$$u(0{,}2;1) = 25\cdot 0{,}2 = 5$$

$$u(0{,}4;1) = 25\cdot 0{,}4 = 10$$

$$u(0{,}6;1) = 25\cdot 0{,}6 = 15$$

$$u(0{,}8;1) = 25\cdot 0{,}8 = 20$$

$$u(1;1) = 25\cdot 1 = 25$$

v) $u(x,t) = 25$ CD tárepiniń mánisleri.

$$u(1;0{,}2) = u(1;0{,}4) = u(1;0{,}6) = u(1;0{,}8) = u(1;1) = 25$$

g) $u(x,t) = 25x\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ AD tárepiniń mánisleri.

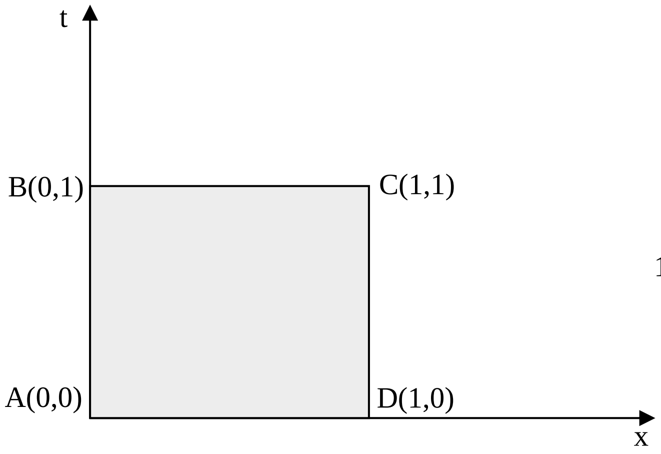
$$u(0{,}2;0) = 25\cdot 0{,}2\cdot\sin\left(\frac{0{,}2\pi}{2}\right) = 1{,}5451$$

$$u(0{,}4;0) = 25\cdot 0{,}4\cdot\sin\left(\frac{0{,}4\pi}{2}\right) = 5{,}8779$$

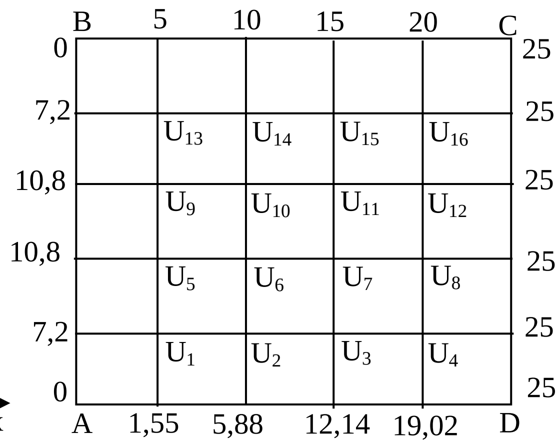
$$u(0,6;0) = 25 \cdot 0,6 \cdot \sin\left(\frac{0,6\pi}{2}\right) = 12,1353$$

$$u(0,8;0) = 25 \cdot 0,8 \cdot \sin\left(\frac{0,8\pi}{2}\right) = 19,0211$$

$$u(1,0) = 25 \cdot 1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 25$$



3.2.4-súwret



3.2.5-súwret

1. Tordıń ishki túyinlerinde $u(x,t)$ funkciyanıń juwıq mánislerin anıqlaymız. Onıń ushın tordıń hár bir ishki túyini ushın sáykes shekli ayırma teńlemesin jazamız.

$$U_1 = \frac{1}{4}(7,2 + 1,5451 + U_2 + U_5)$$

$$U_2 = \frac{1}{4}(5,8779 + U_1 + U_3 + U_6)$$

$$U_3 = \frac{1}{4}(12,1353 + U_2 + U_4 + U_7)$$

$$U_4 = \frac{1}{4}(19,0211 + 25 + U_3 + U_8)$$

$$U_5 = \frac{1}{4}(10,8 + U_1 + U_6 + U_9)$$

$$U_6 = \frac{1}{4}\left(U_2 + U_5 + U_7 + U_{10}\right)$$

$$U_7 = \frac{1}{4}\left(U_3 + U_6 + U_8 + U_{11}\right)$$

$$U_8 = \frac{1}{4}\left(25 + U_4 + U_7 + U_{12}\right)$$

$$U_9 = \frac{1}{4}\left(10,8 + U_5 + U_{10} + U_{13}\right)$$

$$U_{10} = \frac{1}{4}\left(U_6 + U_9 + U_{11} + U_{14}\right)$$

$$U_{11} = \frac{1}{4}\left(U_7 + U_{10} + U_{12} + U_{15}\right)$$

$$U_{12} = \frac{1}{4}\left(25 + U_8 + U_{11} + U_{16}\right)$$

$$U_{13} = \frac{1}{4}\left(7,2 + 5 + U_9 + U_{14}\right)$$

$$U_{14} = \frac{1}{4}\left(10 + U_{10} + U_{13} + U_{15}\right)$$

$$U_{15} = \frac{1}{4}\left(15 + U_{11} + U_{14} + U_{16}\right)$$

$$U_{16} = \frac{1}{4}\left(20 + 25 + U_{12} + U_{15}\right)$$

2. Bul qatardı tómendegishe jazamız:

$$U_1^{(k)} = \frac{1}{4}\left(7,2 + 1,5451 + U_2^{(k-1)} + U_5^{(k-1)}\right)$$

$$U_2^{(k)} = \frac{1}{4}\left(5,8779 + U_1^{(k-1)} + U_3^{(k-1)} + U_6^{(k-1)}\right)$$

$$U_3^{(k)} = \frac{1}{4}\left(12,1353 + U_2^{(k-1)} + U_4^{(k-1)} + U_7^{(k-1)}\right)$$

$$U_4^{(k)} = \frac{1}{4}\left(19,0211 + 25 + U_3^{(k-1)} + U_8^{(k-1)}\right)$$

$$U_5^{(k)} = \frac{1}{4}\left(10,8 + U_1^{(k-1)} + U_6^{(k-1)} + U_9^{(k-1)}\right)$$

$$U_6^{(k)} = \frac{1}{4}\left(U_2^{(k-1)} + U_5^{(k-1)} + U_7^{(k-1)} + U_{10}^{(k-1)}\right)$$

$$U_7^{(k)} = \frac{1}{4}\left(U_3^{(k-1)} + U_6^{(k-1)} + U_8^{(k-1)} + U_{11}^{(k-1)}\right)$$

$$U_8^{(k)} = \frac{1}{4}\left(25 + U_4^{(k-1)} + U_7^{(k-1)} + U_{12}^{(k-1)}\right)$$

$$U_9^{(k)} = \frac{1}{4}\left(10,8 + U_5^{(k-1)} + U_{10}^{(k-1)} + U_{13}^{(k-1)}\right)$$

$$U_{10}^{(k)} = \frac{1}{4}\left(U_6^{(k-1)} + U_9^{(k-1)} + U_{11}^{(k-1)} + U_{14}^{(k-1)}\right)$$

$$U_{11}^{(k)} = \frac{1}{4}\left(U_7^{(k-1)} + U_{10}^{(k-1)} + U_{12}^{(k-1)} + U_{15}^{(k-1)}\right)$$

$$U_{12}^{(k)} = \frac{1}{4}\left(25 + U_8^{(k-1)} + U_{11}^{(k-1)} + U_{16}^{(k-1)}\right)$$

$$U_{13}^{(k)} = \frac{1}{4}\left(7,2 + 5 + U_9^{(k-1)} + U_{14}^{(k-1)}\right)$$

$$U_{14}^{(k)} = \frac{1}{4}\left(10 + U_{10}^{(k-1)} + U_{13}^{(k-1)} + U_{15}^{(k-1)}\right)$$

$$U_{15}^{(k)} = \frac{1}{4}\left(15 + U_{11}^{(k-1)} + U_{14}^{(k-1)} + U_{16}^{(k-1)}\right)$$

$$U_{16}^{(k)} = \frac{1}{4}\left(20 + 25 + U_{12}^{(k-1)} + U_{15}^{(k-1)}\right) \qquad (k = 1,2,3,\dots)$$

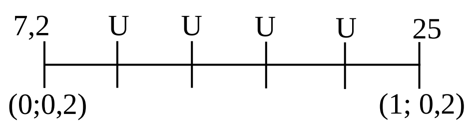
Bul formula menen esaplawdı orınlaw ushın dáslep

$$U_i^{(0)} \quad \left(i = \overline{1,16}\right)$$

baslanǵısh juwıqlasıwın qandayda bir usıl menen saylap alıw kerek.

3. Máseleniń sheshimine $U_i^{(0)}$ saylap alıw ushın $u(x,t)$ funkciya t_i $\left(i = \overline{1,4}\right)$ tuwrılar boyında teń ólshemli bólistirilgen dep uyǵaramız.

a) (0;0,2) hám (1;0.2) noqatlarda berilgen y_i kesindisin qaraymız.



$u(x, y)$ funkciyasınıń bul kesindisiniń ishki túyinindegi mánisine sáykes

$$U_1^{(0)},\ U_2^{(0)}, U_3^{(0)}, U_4^{(0)}$$

kesindi óz ara teń bes úleske bólingen. Sonlıqtan funkciyanıń mánisi ózgeriwi adımı.

a) $S_1 = \dfrac{25 - 7,2}{5} = 3,56$

$U_1^{(0)} = 7,2 + S_1 = 7,2 + 3,56 = 10,76$

$U_2^{(0)} = 10,76 + S_1 = 10,76 + 3,56 = 14,32$

$U_3^{(0)} = 14,32 + S_1 = 14,32 + 3,56 = 17,88$

$U_4^{(0)} = 17,88 + S_1 = 17,88 + 3,56 = 21,44$

b) $S_2 = \dfrac{25 - 10,8}{5} = 2,84$

$U_5^{(0)} = 10,8 + S_2 = 10,8 + 2,84 = 13,64$

$U_6^{(0)} = 13,64 + S_2 = 13,64 + 2,84 = 16,48$

$U_7^{(0)} = 16,48 + S_2 = 16,48 + 2,84 = 19,32$

$U_8^{(0)} = 19,32 + S_2 = 19,32 + 2,84 = 22,16$

v) $U_9^{(0)} = U_5^{(0)} = 13,64$; $U_{10}^{(0)} = U_6^{(0)} = 16,48$; $U_{11}^{(0)} = U_7^{(0)} = 19,32$; $U_{12}^{(0)} = U_8^{(0)} = 22,16$

$U_{13}^{(0)} = U_1^{(0)} = 10,76$; $U_{14}^{(0)} = U_2^{(0)} = 14,32$; $U_{15}^{(0)} = U_3^{(0)} = 17,88$; $U_{16}^{(0)} = U_4^{(0)} = 21,44$

4. Endi usı baslanǵısh juwıqlasıwınan paydalanıp esaplawlardı E=0,01 dálligi menen orınlaymız.

K=1 de

$$U_1^{(1)} = \frac{1}{4}\left(8,7451 + U_2^{(0)} + U_5^{(0)}\right) = \frac{1}{4}\left(8,7451 + 14,32 + 13,64\right) = 9,1763$$

$$U_2^{(1)} = \frac{1}{4}\left(5,8779 + U_1^{(0)} + U_3^{(0)} + U_6^{(0)}\right) = \frac{1}{4}\left(5,8779 + 10,76 + 17,88 + 16,48\right) = 12,7495$$

$$U_3^{(1)} = \frac{1}{4}\left(12,1353 + U_2^{(0)} + U_4^{(0)} + U_7^{(0)}\right) = \frac{1}{4}\left(12,1353 + 14,32 + 21,44 + 19,32\right) = 16,8038$$

$$U_4^{(1)} = \frac{1}{4}\left(44,0211 + U_3^{(0)} + U_8^{(0)}\right) = \frac{1}{4}\left(44,0211 + 17,88 + 22,16\right) = 21,0153$$

$$U_5^{(1)} = \frac{1}{4}\left(10,8 + U_1^{(0)} + U_6^{(0)} + U_9^{(0)}\right) = \frac{1}{4}\left(10,8 + 10,76 + 16,48 + 13,64\right) = 12,92$$

$$U_6^{(1)} = \frac{1}{4}\left(U_2^{(0)} + U_5^{(0)} + U_7^{(0)} + U_{10}^{(0)}\right) = \frac{1}{4}\left(14,32 + 13,64 + 19,32 + 16,48\right) = 15,94$$

$$U_7^{(1)} = \frac{1}{4}\left(U_3^{(0)} + U_6^{(0)} + U_8^{(0)} + U_{11}^{(0)}\right) = \frac{1}{4}\left(17,88 + 16,48 + 22,16 + 19,32\right) = 18,96$$

$$U_8^{(1)} = \frac{1}{4}\left(25 + U_4^{(0)} + U_7^{(0)} + U_{12}^{(0)}\right) = \frac{1}{4}\left(25 + 21,44 + 19,32 + 22,16\right) = 21,98$$

$$U_9^{(1)} = \frac{1}{4}\left(10,8 + U_5^{(0)} + U_{10}^{(0)} + U_{13}^{(0)}\right) = \frac{1}{4}\left(10,8 + 13,64 + 16,48 + 10,76\right) = 12,92$$

$$U_{10}^{(1)} = \frac{1}{4}\left(U_6^{(0)} + U_9^{(0)} + U_{11}^{(0)} + U_{14}^{(0)}\right) = \frac{1}{4}\left(16,48 + 13,64 + 19,32 + 14,32\right) = 15,94$$

$$U_{11}^{(1)} = \frac{1}{4}\left(U_7^{(0)} + U_{10}^{(0)} + U_{12}^{(0)} + U_{15}^{(0)}\right) = \frac{1}{4}\left(19,32 + 16,48 + 22,16 + 17,88\right) = 18,96$$

$$U_{12}^{(1)} = \frac{1}{4}\left(25 + U_8^{(0)} + U_{11}^{(0)} + U_{16}^{(0)}\right) = \frac{1}{4}\left(25 + 22,16 + 19,32 + 21,44\right) = 21,98$$

$$U_{13}^{(1)} = \frac{1}{4}\left(12,2 + U_9^{(0)} + U_{14}^{(0)}\right) = \frac{1}{4}\left(12,2 + 13,64 + 14,32\right) = 10,04$$

$$U_{14}^{(1)} = \frac{1}{4}\left(10 + U_{10}^{(0)} + U_{13}^{(0)} + U_{15}^{(0)}\right) = \frac{1}{4}\left(10 + 16,48 + 10,76 + 17,88\right) = 13,78$$

$$U_{15}^{(1)} = \frac{1}{4}\left(15 + U_{11}^{(0)} + U_{14}^{(0)} + U_{16}^{(0)}\right) = \frac{1}{4}\left(15 + 19,32 + 14,32 + 21,44\right) = 17,52$$

$$U_{16}^{(1)} = \frac{1}{4}\left(45 + U_{12}^{(0)} + U_{15}^{(0)}\right) = \frac{1}{4}\left(45 + 22,16 + 17,88\right) = 21,26$$

K=2 de

$$U_1^{(2)} = \frac{1}{4}\left(8,7451 + U_2^{(1)} + U_5^{(1)}\right) = \frac{1}{4}\left(8,7451 + 12,7495 + 12,92\right) = 8,6037$$

$$U_2^{(2)} = \frac{1}{4}\left(5,8779 + U_1^{(1)} + U_3^{(1)} + U_6^{(1)}\right) = \frac{1}{4}\left(5,8779 + 9,1763 + 16,8038 + 15,94\right) = 11,9495$$

$$U_3^{(2)} = \frac{1}{4}\left(12,1353 + U_2^{(1)} + U_4^{(1)} + U_7^{(1)}\right) = \frac{1}{4}\left(12,1353 + 12,7495 + 21,0403 + 18,96\right) = 16,2213$$

$$U_4^{(2)} = \frac{1}{4}\left(44,0211 + U_3^{(1)} + U_8^{(1)}\right) = \frac{1}{4}\left(44,0211 + 16,8038 + 21,98\right) = 20,7012$$

$$U_5^{(2)} = \frac{1}{4}\left(10,8 + U_1^{(1)} + U_6^{(1)} + U_9^{(1)}\right) = \frac{1}{4}\left(10,8 + 9,1763 + 15,94 + 12,92\right) = 12,2091$$

$$U_6^{(2)} = \frac{1}{4}\left(U_2^{(1)} + U_5^{(1)} + U_7^{(1)} + U_{10}^{(1)}\right) = \frac{1}{4}\left(12,7495 + 12,92 + 18,96 + 15,94\right) = 15,1424$$

$$U_7^{(2)} = \frac{1}{4}\left(U_3^{(1)} + U_6^{(1)} + U_8^{(1)} + U_{11}^{(1)}\right) = \frac{1}{4}\left(16,8038 + 15,94 + 21,98 + 18,96\right) = 18,4209$$

$$U_8^{(2)} = \frac{1}{4}\left(25 + U_4^{(1)} + U_7^{(1)} + U_{12}^{(1)}\right) = \frac{1}{4}\left(25 + 21,0403 + 18,96 + 21,98\right) = 21,7451$$

$$U_9^{(2)} = \frac{1}{4}\left(10,8 + U_5^{(1)} + U_{10}^{(1)} + U_{13}^{(1)}\right) = \frac{1}{4}\left(10,8 + 12,92 + 15,94 + 10,04\right) = 12,425$$

$$U_{10}^{(2)} = \frac{1}{4}\left(U_6^{(1)} + U_9^{(1)} + U_{11}^{(1)} + U_{14}^{(1)}\right) = \frac{1}{4}(15,94 + 12,92 + 18,96 + 13,78) = 15,4$$

$$U_{11}^{(2)} = \frac{1}{4}\left(U_7^{(1)} + U_{10}^{(1)} + U_{12}^{(1)} + U_{15}^{(1)}\right) = \frac{1}{4}(18,96 + 15,94 + 21,98 + 17,52) = 18,6$$

$$U_{12}^{(2)} = \frac{1}{4}\left(25 + U_8^{(1)} + U_{11}^{(1)} + U_{16}^{(1)}\right) = \frac{1}{4}(25 + 21,98 + 18,96 + 21,26) = 21,8$$

$$U_{13}^{(2)} = \frac{1}{4}\left(12,2 + U_9^{(1)} + U_{14}^{(1)}\right) = \frac{1}{4}(12,2 + 12,92 + 13,78) = 9,725$$

$$U_{14}^{(2)} = \frac{1}{4}\left(10 + U_{10}^{(1)} + U_{13}^{(1)} + U_{15}^{(1)}\right) = \frac{1}{4}(10 + 15,94 + 10,04 + 17,52) = 13,375$$

$$U_{15}^{(2)} = \frac{1}{4}\left(15 + U_{11}^{(1)} + U_{14}^{(1)} + U_{16}^{(1)}\right) = \frac{1}{4}(15 + 18,96 + 13,78 + 21,26) = 17,25$$

$$U_{16}^{(2)} = \frac{1}{4}\left(45 + U_{12}^{(1)} + U_{15}^{(1)}\right) = \frac{1}{4}(45 + 21,98 + 17,52) = 21,125$$

Esaplawlardı usı tárizde $\max\left|U_i^{(k)} - U_i^{(k-1)}\right|, \quad i = \overline{1,16}$ shárti orınlanǵansha dawam ettiremiz. Solay etip K=22 bolǵanda berilgen dállikke jetedi.

K=21 de

$U_1^{(21)} = 7,2132$	$U_2^{(21)} = 9,9031$	$U_3^{(21)} = 14,3611$	$U_4^{(21)} = 19,6516$
$U_5^{(21)} = 10,19$	$U_6^{(21)} = 12,1366$	$U_7^{(21)} = 15,7311$	$U_8^{(21)} = 20,2097$
$U_9^{(21)} = 105868$	$U_{10}^{(21)} = 12,6843$	$U_{11}^{(21)} = 16,1789$	$U_{12}^{(21)} = 20,4329$
$U_{13}^{(21)} = 8,6495$	$U_{14}^{(21)} = 11,7967$	$U_{15}^{(21)} = 15,8296$	$U_{16}^{(21)} = 20,3192$

K=22 bolǵanda

$$U_1^{(22)} = \frac{1}{4}\left(8,7451 + U_2^{(21)} + U_5^{(21)}\right) = \frac{1}{4}(8,7451 + 9,9031 + 10,19) = 7,2096$$

$$U_2^{(22)} = \frac{1}{4}\left(5,8779 + U_1^{(21)} + U_3^{(21)} + U_6^{(11)}\right) = \frac{1}{4}(5,8779 + 7,2132 + 14,3611 + 12,1366) = 9,8972$$

$$U_3^{(22)} = \frac{1}{4}\left(12,1353 + U_2^{(21)} + U_4^{(21)} + U_7^{(21)}\right) = \frac{1}{4}(12,1353 + 9,9031 + 19,6516 + 15,7311) = 14,3553$$

$$U_4^{(22)} = \frac{1}{4}\left(44,0211 + U_3^{(21)} + U_8^{(21)}\right) = \frac{1}{4}(44,0211 + 14,3611 + 20,2097) = 19,648$$

$$U_5^{(22)} = \frac{1}{4}\left(10,8 + U_1^{(21)} + U_6^{(21)} + U_9^{(21)}\right) = \frac{1}{4}(10,8 + 7,2132 + 12,1366 + 10,5868) = 10,1841$$

$$U_6^{(22)} = \frac{1}{4}\left(U_2^{(21)} + U_5^{(21)} + U_7^{(21)} + U_{10}^{(21)}\right) = \frac{1}{4}\left(9,9031 + 10,19 + 15,7311 + 12,6843\right) = 12,1271$$

$$U_7^{(22)} = \frac{1}{4}\left(U_3^{(21)} + U_6^{(21)} + U_8^{(21)} + U_{11}^{(21)}\right) = \frac{1}{4}\left(14,3611 + 12,1366 + 20,2097 + 16,1789\right) = 15,7216$$

$$U_8^{(22)} = \frac{1}{4}\left(25 + U_4^{(21)} + U_7^{(21)} + U_{12}^{(21)}\right) = \frac{1}{4}\left(25 + 19,6516 + 15,7311 + 20,4329\right) = 20,2039$$

$$U_9^{(22)} = \frac{1}{4}\left(10,8 + U_5^{(21)} + U_{10}^{(21)} + U_{13}^{(21)}\right) = \frac{1}{4}\left(10,8 + 10,19 + 12,6843 + 8,6495\right) = 10,5809$$

$$U_{10}^{(22)} = \frac{1}{4}\left(U_6^{(21)} + U_9^{(21)} + U_{11}^{(21)} + U_{14}^{(21)}\right) = \frac{1}{4}\left(12,1366 + 10,5868 + 16,1789 + 11,7967\right) = 12,6747$$

$$U_{11}^{(22)} = \frac{1}{4}\left(U_7^{(21)} + U_{10}^{(21)} + U_{12}^{(21)} + U_{15}^{(21)}\right) = \frac{1}{4}\left(15,7311 + 12,6843 + 20,4329 + 15,8296\right) = 16,1695$$

$$U_{12}^{(22)} = \frac{1}{4}\left(25 + U_8^{(21)} + U_{11}^{(21)} + U_{16}^{(21)}\right) = \frac{1}{4}\left(25 + 20,2097 + 16,1789 + 20,3192\right) = 20,427$$

$$U_{13}^{(22)} = \frac{1}{4}\left(12,2 + U_9^{(21)} + U_{14}^{(21)}\right) = \frac{1}{4}\left(12,2 + 10,5868 + 11,7967\right) = 8,6459$$

$$U_{14}^{(22)} = \frac{1}{4}\left(10 + U_{10}^{(21)} + U_{13}^{(21)} + U_{15}^{(21)}\right) = \frac{1}{4}\left(10 + 12,6843 + 8,6495 + 15,8296\right) = 11,7909$$

$$U_{15}^{(22)} = \frac{1}{4}\left(15 + U_{11}^{(21)} + U_{14}^{(21)} + U_{16}^{(21)}\right) = \frac{1}{4}\left(15 + 16,1789 + 11,7967 + 20,3192\right) = 15,8237$$

$$U_{16}^{(22)} = \frac{1}{4}\left(45 + U_{12}^{(21)} + U_{15}^{(21)}\right) = \frac{1}{4}\left(45 + 20,4329 + 15,8296\right) = 20,3156$$

Jıllılıq ótkezıwshenlik teńlemesine qoyılǵan shegaralıq máseleni shekli ayırmalı sxema usılı menen sheshiw ushın berilgen teoriyalıq maǵlıwmat hám mısaldan paydalanıp “AutoPlay Media Studio” programması ortalıǵında “Jıllılıq ótkezıwshenlik teńlemesine qoyılǵan shegaralıq máseleni shekli ayırmalı sxema metodı menen sheshiw” atamasındaǵı programmalıq ónim islep shıǵıldı.

3.3-§. Eyler usulınıń ısshı algaritmı islep shıǵıw

Bizgetomendegi birinshi tartipli differencial teńleme (Koshi maselesi)n

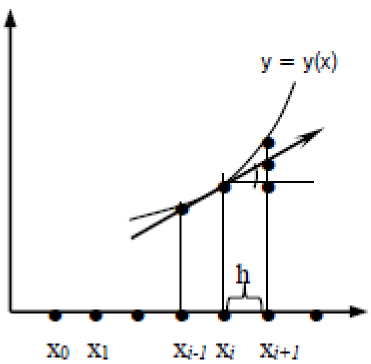
$$y' = f(x,y) \qquad (3.3.1)$$

[a,b] aralıqtaǵı $y_0=y(x_0)$, $x_0=a$ baslanǵısh shártti qanaǵatlantırıwshı sheshimin tabıw kerel bolsın.

Koshi maselesin Eyler usulı járdeminde sheshiw ushın, dastlep differencial teńlemeniń sheshimi qidirilatawın [a,b] aralıq $x_1,x_2,...x_n$ tuyin nuqtalar menen boleklerge bolemiz. Tuyin noqtalardıń koordinatalari $x_{i+1}=a+(i+1)h$ $(i=0..n-1)$ formula menen anıqlanadı. Har bir tuyinde $y(x_i)$ sheshimdiń mánislerin shekli ayirmalar járdeminde taqribiy y_i mánisler menen almastiriladı.

(2) differencial teńlemeni x_i noqat ushın jázıp $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$ alıp, shekli ayirmali formuladan paydalanamız hám natijede tomendegı Eyler formulasına iye bolamız:

$$\begin{cases} y(x_{i+1}) = y(x_i) + h * f(x_i, y(x_i)) \\ x_{i+1} = x_i + h, i = 0,1,2,3.......n \end{cases}$$



Bizge belgi bolǵanday aq, y=f(x) funkciyaniń $x=x_0$ noqat atrapindaǵı Teylor qatarına jáyılması tómendegi turde jazıw mumkin:

Usı sheksiz qatardıń basindaǵı eki qadam menen shegaralanıp, birinsi tartiptegi tuwındı qatnasqan hadin anıqlaw natiyjesinde tómendegi shekli ayirmalı formulanı hasil etemiz:

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} \qquad (3)$$

Usı almastırıwdıń geometrik mánisi tómendegi turde boladı:

Tuwındıning geometrik mánisine qaray

$$y'(x_i) = tg\,\beta = \frac{ED}{AD} = \frac{ED}{h}$$

(3) dan $y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1}}{h} + \frac{y_i}{h} = \frac{BD}{h} = \frac{ED}{h} + \frac{BE}{h} = y'(x_i) + \frac{BE}{h}$.

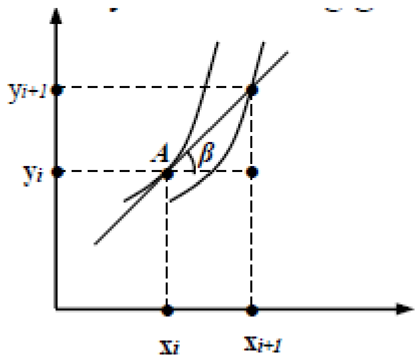
Demek, shekli ayirmalar formulası tuwındınıń asıl qiymetinen BE / h ge parıq etedi, yaǵniy BE qansha kishi bolsa, shekli ayirma y' tuwındıda sonsha jaqın boladi. Suwretten h → 0 de BE → 0 ekenin

$$y'_{i+1} \approx y_{i+1} + h * f(x_i, y_i) \qquad (4)$$

koriwimız mumkin. (2) va (3) den $y'_{i+1} = f(x_i, y_i)$ ekenin esapqa alıp, tomendegini payda etemiz:

Payda bolınǵan (4) formula Eyler usılınıń tiykarǵı formulası bolıp, onıń járdeminde tuyin noqtalarǵa mas bolǵan differencial teńlameniń y_i jeke sheshimlerin tabıw mumkin. Joqarıdaǵı formuladan korinip turǵaninday, y_i+1 sheshimdi tabıw ushın y_i tek usı sheshimdi biliw jetkilikli. Demek, Eyler usulı bir qademli usıllar jumlesine kiredi.

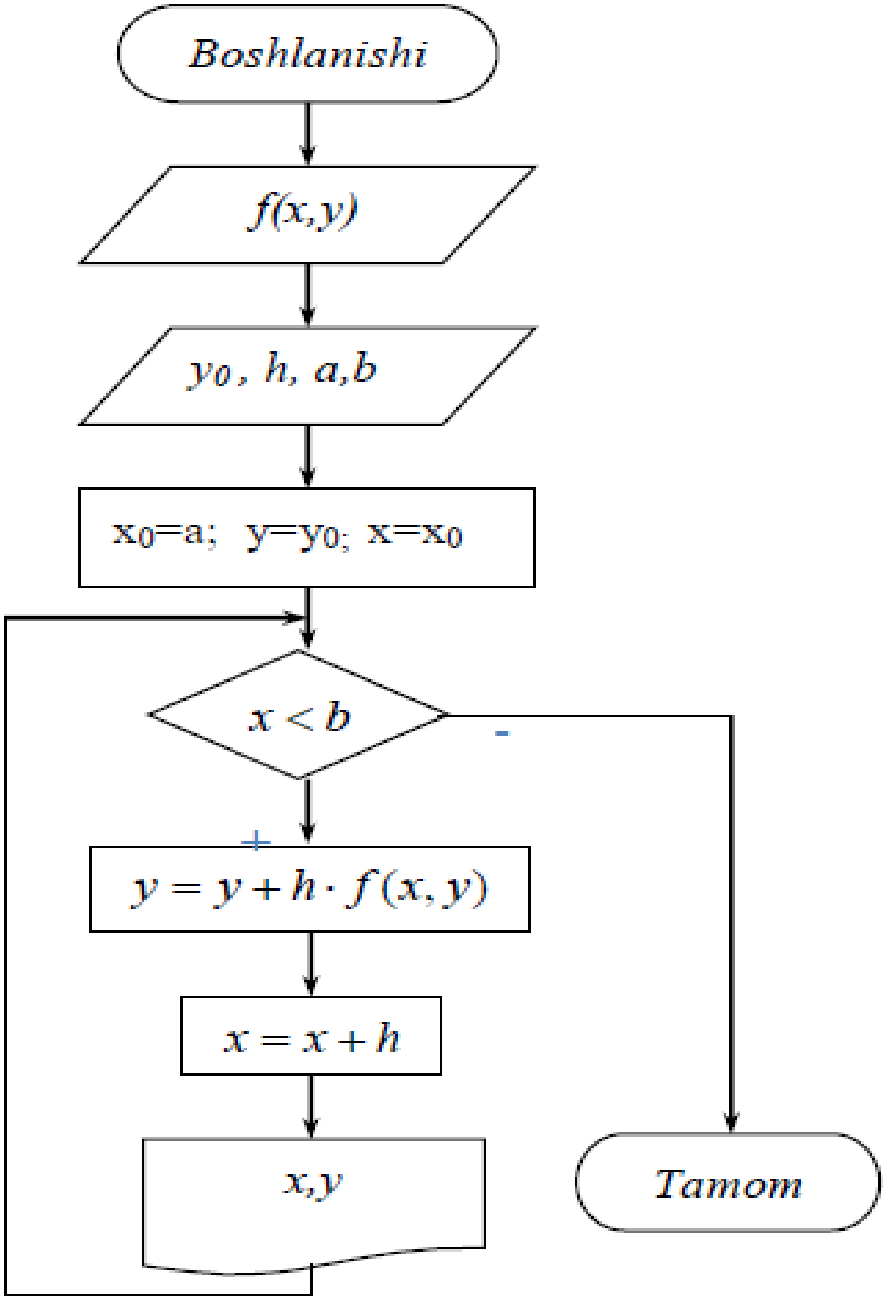
Eyler usulinıń *geometrik mánisi* qtomendegishe:



A noqat $x=x_i$ noqatqa mas keletawın sheshim bolsın. Bu noqatdan integral sızıqqa otkerilgen urınma $x_i=1$ noqattada basqa integral sızıqda y_{i+1} shechimdi aniqlaydı.

Urınmanıń aǵmalı $\beta * y'_i$ = (x_i, y_i) tuwındı menen anıqlanadı. Demek, Eyler usılındaǵı jol qoyılǵan tiykarǵı qátelik sheshimdi bir integral sıziǵinnan basqasına otkerip jiberiwı menen xarakterlenedi.

Eyler usulining blok-sxemasi



Bir qademli ashkar usullardıń basqa bir neshe tiplerida bar bolıp, olardiń ishinde amelde eń kop isletiletawinı Runge-Kutta usılı esaplanadı. Usıl shartine kore shar bir jáńa x_{i+1} tuyin noqatdaǵı y_{i+1} sheshimdi tabıw ushın f(x,y) funkciyanı 4 marte hár qiylı argumentler ushın esaplaw kerek. Bul tárepten Runge-Kutta usulın esaplaw ushın qáraǵanda kop waqıt talap etiledi. Bıraq Eyler usulına kore aniqlıǵı joqarı bolǵanlıǵı ushın, onnan amelde keń paydalanıladı.

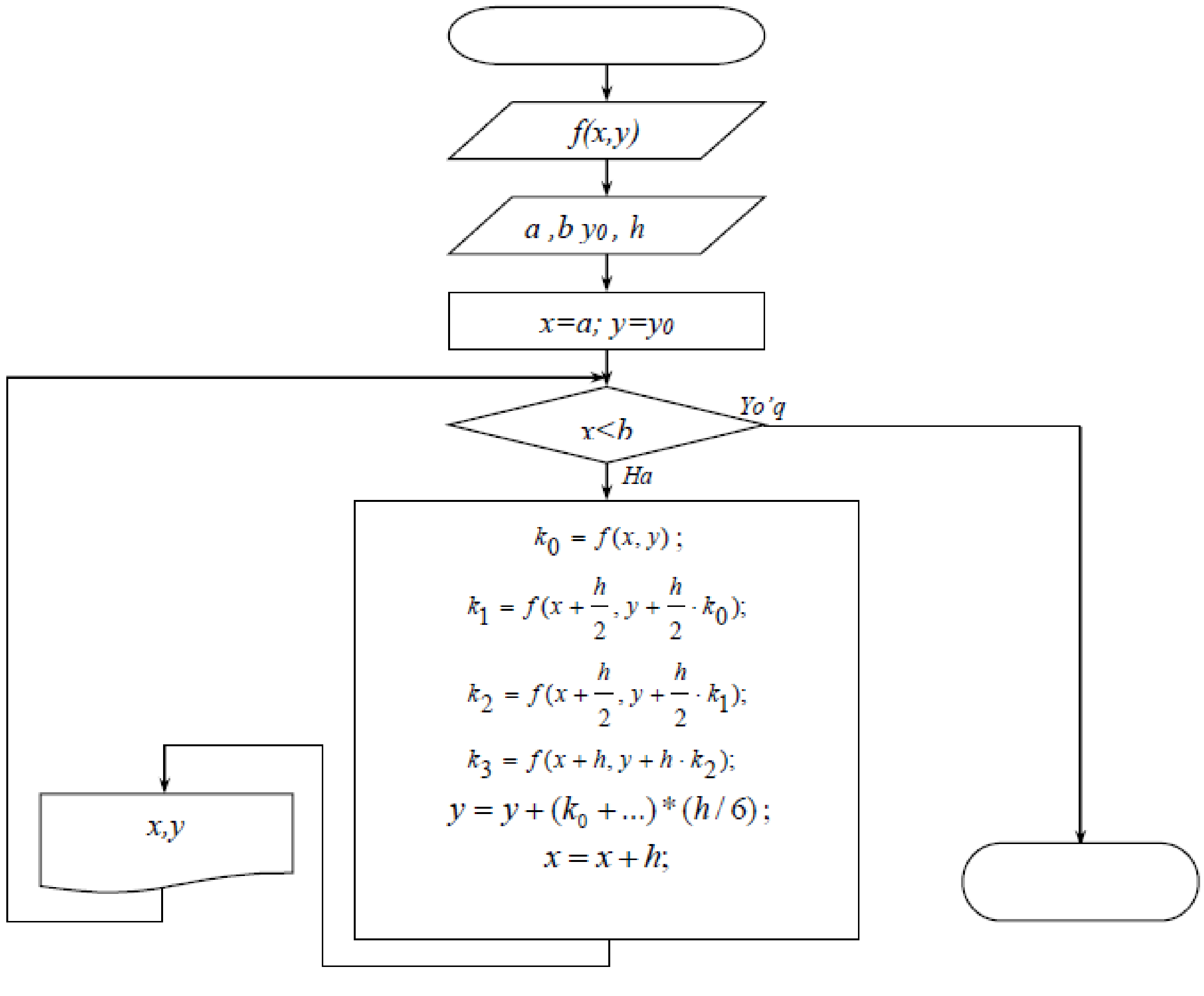
Usuldıń isshı formulası tomendegishe jazıladi:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_0 + 2K_1 + 2K_2 + K_3) \qquad i=0,1\ldots\ldots.n,$$

bul jerde $K_0 = f(x_i, y_i);$

Demek, formulalardan korinip turǵaninday, Eyler usılı birinshı tartipli Runge-Kutta usulına mas keledi.

Runge-Kutta usulınıń blok-sxeması



Endi biz joqarida keltirilgen algoritmlar tiykarinda duzilgen dasturlerdiń tuwrılıǵın hám usıllarınıń anıqlıq darejesin tekseriw ushın bir qálegen teńleme alamız.

Maselen, $y' = x + \cos\frac{y}{\pi}$ teńlemeni [1.7 ;2.7] aralıqta h=0.1 qadem menen $y(0) = 5.3$ baslanǵısh shartın qanaǵatlantırıwshı sheshimdi tabıw kerek.

Joqarıdaǵı differencial teńleme ushın Koshi maselesin sheshiwdi Eyler usılınan paydalanǵan jaǵdayda C++ programmalastırıw tilinde tomendegi dastur kodlardı kiritıwdı taklif etemiz:

```
#include<iostream>
#include<math.h>
#include<conio.h>
#include<iomanip>
using namespace std;
main()
{
float x[100],f[100][3],y[100],n;
float h,a,b;
int i,j;

cout<<"a=";cin>>a;
cout<<"b=";cin>>b;
cout<<"h=";cin>>h;
cout<<"x(0)=";cin>>x[0];cout<<"y(0)=";cin>>y[0];

n=(b-a)/h;

for(i=0;i<=n;i++)x[i]=a+i*h;
for(i=0;i<=n;i++)
```

```
{f[i][0]=x[i]+cos((y([i]))/3,14);
 f[i][1]=h*f[i][0];
 y[i+1]=y[i]+f[i][1];
}

cout<<"              EYLER USILI MENEN    \n";
cout<<"            KOSHIY MASELESIN SHESHIW    \n";
cout<<"ÉÍÍÍËÍÍÍÍÍËÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍËÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍËÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍ»"<<endl;
cout<<"º i º xi  º      yi    º  f[i][0]   º  h*f[i][0] º"<<endl;
cout<<"ÌÍÍÍÎÍÍÍÍÍÎÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÎÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍ¹ÎÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍ¹"<<endl;
for(i=0;i<=n;i++)
{cout<<"º "<<i<<" º ";
cout<<setprecision(2)<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<x[i]<<"º
";
cout<<setprecision(8)<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<y[i]<<"
º ";
for(j=0;j<=1;j++)
cout<<setprecision(8)<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint)<<f[i][j]<<"
º" ;
cout<<endl;
}
cout<<"ÈÍÍÍÊÍÍÍÍÍÊÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÊÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÊÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍ¼"<<endl;
getch();
return 0;
}
```

hám tomendegi natiyjge iye bolamiz:

```
a=1.7
b=2.7
h=0.1
x(0)=1.7
y(0)=5.3
           EYLER USULI BILAN
         KOSHIY MASALASINI YECHISH
```

i	xi	yi	f[i][0]	h*f[i][0]
0	1.70	5.30000019	1.58316565	0.15831657
1	1.80	5.45831680	1.63326132	0.16332613
2	1.90	5.62164307	1.68222344	0.16822235
3	2.00	5.78986549	1.73027265	0.17302726
4	2.10	5.96289253	1.77764726	0.17776473
5	2.20	6.14065742	1.82460117	0.18246011
6	2.30	6.32311773	1.87140644	0.18714064
7	2.40	6.51025820	1.91835201	0.19183521
8	2.50	6.70209360	1.96574318	0.19657432
9	2.60	6.89866781	2.01390457	0.20139046
10	2.70	7.10005808	2.06317854	0.20631786

Berilgen differencial teńleme ushın qoyilǵan Koshi masalasini Runge-Kutta usılı jardeminda C++ programmalastırıw tilinde sheshemiz hám tomendegi kodlardı kiritemiz:

```
#include<iostream>
#include<math.h>
#include<iomanip>
#include<conio.h>
float funksiya(float,float);
using namespace std;
int main()
{
   int i,n=10;
   float x[100],y[100],dy[100],h=0.1,k1,k2,k3,k4;
   x[0]=1.7; y[0]=5.3;
   cout<<"\n\n       ***  I- TARTIBLI  O.D.T LAR UCHUN QO'YILGAN' ***\n";
   cout<<"  ***  KOSHI  MASELESIN  RUNGE-KUTTA  USILI  MENEN SHESHIW ***\n\n";
   cout<<"  ÉÍÍËÍÍÍÍÍËÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍËÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍËÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍËÍÍÍÍÍÍÍÍÍ»\n";
```

```
cout<<" º iº xi  º    yi    º k=h*fi  º    ^yi  º    Q    º\n";
cout<<" ÌÍÍÎÍÍÍÍÍÍÍÎÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÎÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÎÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÎÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍ¹\n";
for(i=0;i<=n;i++)
{
  if(i!=n)
  {
    cout<<"  º"; if(i<10)  cout<<" ";
    cout<<i<<setprecision(2)<<setiosflags(ios::fixed|ios::showpoint);
    cout<<"º "<<x[i];   k1=h*(funksiya(x[i],y[i]));
    cout<<" º  "<<setprecision(6)<<y[i]; if(y[i]<10) cout<<" ";
    cout<<"º "; cout<<k1;            if(k1>0)    cout<<" ";
    cout<<"º "<<"         º          º\n  º  º ";
    k2=h*(funksiya(x[i]+h/2,y[i]+k1/2));
    cout<<setprecision(2)<<x[i]+h/2<<setprecision(6)<<" º  ";
    cout<<y[i]+k1/2;      if(y[i]+k1/2<10) cout<<" ";cout<<"º "<<k2;
    if(k2>0) cout<<" ";    cout<<"º         º          º\n  º  º ";
    k3=h*(funksiya(x[i]+h/2,y[i]+k2/2));
    cout<<setprecision(2)<<x[i]+h/2<<setprecision(6)<<" º  ";
    cout<<y[i]+k2/2;     if(y[i]+k2/2<10) cout<<" "; cout<<"º "<<k3;
    if(k3>0) cout<<" "; cout<<"º         º          º\n  º  º ";
    k4=h*(funksiya(x[i]+h,y[i]+k3));
dy[i]=(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
      cout<<setprecision(2)<<x[i]+h<<"                                  º
     "<<setprecision(6)<<y[i]+k3;
    if(y[i]+k3<10) cout<<" ";  cout<<"º "<<k4;
    if(k4>0) cout<<" ";  cout<<"º "<<dy[i]; if(dy[i]>0) cout<<" ";
    cout<<"º "<<fabs((k2-k3)/(k1-k2))<<" º\n  ";
    y[i+1]=y[i]+dy[i]; x[i+1]=x[i]+h;
    cout<<"ÌÍÍÎÍÍÍÍÍÍÍÎÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÎÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÎÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÎÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍ¹\n";
  }
```

```
        else
        {
            cout<<"  º";   if(i<10) cout<<" ";
            cout<<i<<"º "<<setprecision(2)<<x[i]<<" º ";
            cout<<setprecision(6)<<y[i];
            cout<<" º          º          º          º\n  ";
        }
    }
    cout<<"ÈÍÍÊÍÍÍÍÍÍÊÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÊÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÊÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÊÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍÍ¼\n";
    getch();
    return 0;
}
float funksiya(float x1,float y1)
{
        float y2;
         //y2=sin(x1)+1;
        y2=(x1)+(cos(y1/3.14));
        return y2;
}
```

Dastur iske tusirilse tomendegi natiyjege iye bolamız:

```
   ***  I- TARTIBLI  O.D.T LAR UCHUN QO'YILGAN'  ***
*** KOSHI MASALASINI RUNGE-KUTTA USULI BILAN YECHISH ***
```

i	xi	yi	k=h*fi	^yi	Q
0	1.70	5.300000	0.158317		
	1.75	5.379158	0.160817		
	1.75	5.380409	0.160777		
	1.80	5.460778	0.163249	0.160792	0.015758
1	1.80	5.460793	0.163248		
	1.85	5.542417	0.165692		
	1.85	5.543638	0.165653		
	1.90	5.626446	0.168073	0.165669	0.015632
2	1.90	5.626461	0.168073		
	1.95	5.710497	0.170470		
	1.95	5.711696	0.170433		
	2.00	5.796894	0.172812	0.170448	0.015436
3	2.00	5.796909	0.172811		
	2.05	5.883315	0.175174		
	2.05	5.884496	0.175138		
	2.10	5.972047	0.177489	0.175154	0.015201
4	2.10	5.972063	0.177488		
	2.15	6.060807	0.179829		
	2.15	6.061977	0.179794		
	2.20	6.151857	0.182130	0.179811	0.014904
5	2.20	6.151874	0.182129		
	2.25	6.242938	0.184461		
	2.25	6.244104	0.184427		
	2.30	6.336301	0.186762	0.184445	0.014555
6	2.30	6.336318	0.186761		
	2.35	6.429699	0.189099		
	2.35	6.430868	0.189066		
	2.40	6.525384	0.191414	0.189084	0.014143
7	2.40	6.525403	0.191413		
	2.45	6.621109	0.193772		
	2.45	6.622289	0.193740		
	2.50	6.719142	0.196116	0.193759	0.013682
8	2.50	6.719162	0.196116		
	2.55	6.817219	0.198512		
	2.55	6.818417	0.198480		
	2.60	6.917642	0.200902	0.198500	0.013135
9	2.60	6.917662	0.200901		
	2.65	7.018112	0.203351		
	2.65	7.019337	0.203321		
	2.70	7.120982	0.205805	0.203342	0.012535
10	2.70	7.121004			

Eyler va Runge-Kutta usılların qiyasiy taqqaslaw metodikası.

y'= *cosx* defferencial teńlemesi ushın qoyilǵan Koshi máselesi [0,1] aralıqta *h=0.1* qadem menen *y(0)=1* baslanǵısh shartti qanaǵatlantırıwshı sheshimdı tabıw kerek.

Joqarıdaǵı dasturlerge kerekli qiymetlerni kiritemiz. $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; *f(x)=cosx;*

a=0; b=1; h=0,1

Ol jaǵdayda

$y' = cosx$

$y' = \frac{dy}{dx} = cosx$

dy=cosdx

$\int dy = \int cosxdx$

y=sinx+C

Berilgenlerge kore

[0;1] ; y(0)=1; a=0; b=1; $x_0 = 0$; $y_0 = 1$

$y_0 = \sin x_0 + C$

1= sin 0+C

C=1

Yaǵniy

y=sinx+1

$y' = cosx$ ushın anıq sheshim sipatinda *y=sinx+C* dı alamız. Baslanǵısh shartlerdi qoysaq, 1=sin0+C=1 demek, y=sinx+1.

Berilgenlerge kore y=sinx+1 funkciyasınıń qiymetlerin anıqlaymız:

1-qatar:

i=0; a=0; b=1; $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; *h=0,1.*

$y_0 = sin(0)+1$

$y_1 = 1.$

2-qatar:

i=1; a=0; b=1; x1 =0,1;

$y_1=sin(0,1)+1$

$y_1=1,0998334166;$

3-qatar:

$i=2; a=0; b=1; x1 =0,2;$

$y_2=sin(0,2)+1$

$y_2=1,1986693308;$

4-qatar:

$i=3; a=0; b=1; x1 =0,3;$

$y_3=sin(0,3)+1$

$y_3=1,2955202067;$

5-qatar:

$i=4; a=0; b=1; x1 =0,4;$

$y_4=sin(0,4)+1$

$y_4=1,38941834223;$

6-qatar:

$i=5; a=0; b=1; x1 =0,5;$

$y_5=sin(0,5)+1$

$y_5=1,4794255386;$

7-qatar:

$i=6; a=0; b=1; x1 =0,6;$

$y_6=sin(0,6)+1$

$y_6=1,564424734;$

8-qatar:

$i=7; a=0; b=1; x1 =0,7;$

$y_7=sin(0,7)+1$

$y_7=1,6442176872;$

9-qatar:

$i=8; a=0; b=1; x1 =0,8;$

$y_8=sin(0,8)+1$

$y_8=1,7173560909;$

10-qatar:

i=9; a=0; b=1; x1 =0,9;

y_9*=sin(0,9)+1*

y_9*=1,7833269096;*

11-qatar:

i=10; a=0; b=1; x1 =1;

y_{10}*=sin(1)+1*

y_{10}*=1,8414709848;*

Joqarida berilgen differencial tenglama uchun Koshi maselesin Eyler usılı járdeminde sheshiliwin korip otemiz. Yaǵniy, $y' = cosx$ teńlemeni [0,1] aralıqta h=0.1 qadem menen y(0)=1 baslanǵısh shartti qanǵatlantirıwshı sheshimdi tabıw kerek.

1- qatar

i=0, x_0 = 0, y_0 = 1;

f(x_0 ; y_0) = cos(x_0) = 1

Δy_i = hf(x_0 ; y_0) = 0.1 *1= 0,1

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, i=0; $y_{0+1} = y_0 + \Delta y_0$ = 1+0.1=1.1;

2- qatar

i=1, x_1 = 0 + 0,1, y_1 = 1.1;

f(x_1 ; y_1) = cos(x_1) = cos(0.1)= 0,9950041653

Δy_1 = hf(x_1 ; y_1) = 0.1 *0.9950041653= 0.09950041653

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, i=1; $y_2 = y_1 + \Delta y_1$ = 1.1+0.09950041653= 1.10000002;

3- qatar

i=2, x_2 = 0 .1+ 0.1, y_2 = 1.10000002;

f(x_2 , y_2) = cos(x_2) = cos(0.2)= 0.9800665778

Δy_2 = hf(x_2 , y_2) = 0.1 *0.9800665778= 0.0980066577811

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, i=2; $y_3 = y_2 + \Delta y_2$ = 1.0995004153+0.09800665778= 1.19950044;

4- qatar

i=3, x_3 = 0.2+ 0.1, y_3 = 1.19950044;

f(x_3 ; y_3) = cos(x_3) = cos(0.3)= 0.9553364891

Δy_2 = hf(x_2 ; y_2) = 0.1 *0.9553364891= 0.09553364891

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, i=3; $y_4 = y_3 + \Delta y_3$ = 1.197507073+0.09553364891=1.29750705;

5- qatar

i=4, x_4 = 0.3+ 0.1, y_4 = 1.29750705;

f(x_4 ; y_4) = cos(x_4) = cos(0.4)= 0.921060994

Δy_4 = hf(x_4 ; y_4) = 0.1 *0.921060994= 0.0921060994

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, i=4; $y_5 = y_5 + \Delta y_5$ = 1.2930407219+ 0.0921060994= 1.39304066;

6- qatar

i=5, x_5 = 0.4+ 0.1, y_5 = 1.39304066;

f(x_5 ; y_5) = cos(x_5) = cos(0.5)= 0.8775825619

Δy_5 = hf(x_5 , y_5) = 0.1 *0.8775825619= 0.08775825619

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, i=5; $y_6 = y_5 + \Delta y_5$ = 1.3851468213+0.08775825619=1.48514676;

7- qatar

i=6, x_6 = 0.5+ 0.1, y_6 = 1.48514676;

f(x_6 ; y_6) = cos(x_6) = cos(0.6)= 0.8253356149

Δy_6 = hf(x_6 ; y_6) = 0.1 *0.8253356149= 0.08253356149

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, i=6; $y_7 = y_6 + \Delta y_6$ = 1.4729050774+0.08253356149=1.57290506;

8- qatar

i=7, x_7 = 0.6+ 0.1, y_7 = 1.57290506;

f(x_7 ; y_7) = cos(x_7) = cos(0.7)= 0.76484421873

Δy_7 = hf(x_7 ; y_7) = 0.1 *0.76484421873= 0.076484421873

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, i=7; $y_8 = y_7 + \Delta y_7$ = 1.5554386388+0.76484421873=1.65543866;

9- qatar

i=8, x_8 = 0.7+ 0.1, y_8 = 1.65543866;

f(x_8 , y_8) = cos(x_8) = cos(0.8)= 0.6967067093

Δy_8 = hf(x_8 , y_8) = 0.1 *0.6967067093=0.06967067093

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, i=8; $y_9 = y_8 + \Delta y_8$ = 1.6319230606+0.06967067093= 1.73192286;

10-qatar

i=9, x_9 = 0.8+ 0.1, y_9 = 1.73192286;

f(x_9 , y_9) = cos(x_9) = cos(0.9)= 0.6216099683

Δy_9 = hf(x_9 , y_9) = 0.1 * 0.6216099683= 0.062160996830

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, i=8; 10 = $y_9 + \Delta y_9$ = 1.7015937315+ 0.06216099683= 1.80159354;

11-qatar

i=10, x_{10} = 0.9+ 0.1, y_{10} = 1.80159354;

f(x_{10} , y_{10}) = cos(x_{10}) = cos(1.0)= 0.5403023059

Δy_9 = hf(x_9 , y_9) = 0.1 * 0.5403023059= 0.05403023059

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, i=8; 10 = $y_9 + \Delta y_9$ = 1.7637547283+ 0.05403023059= 11.86375451.

Endi, differencial teńleme ushın Koshi maselesin Runge-Kutta usılı járdeminde sheshiliwin korip ótemiz.

1-qatar

f(x ,y)=cosx; $x_0 = 0$; $y = 1$;

h = 0.1; a=0; b=1; $h=\frac{b-a}{n}$=0.1; n=10;

i= 0; x_0 = 0; y_0 = 1;

$K_1^{(0)} = hf\left(x_{0\,,}\, y_{0\,,}\right) = 0.1 * cos(x_0)$=0.1;

$K_2^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1^{(0)}}{2}\right)$=0,1*f(0.05;1.05) =0.09999 ;

$K_3^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2^{(0)}}{2}\right)$=0,1*f(0.05;1.49999) = 0.09999;

$K_4^{(0)} = hf\left(x_0 + h, y_0 + K_3^{(0)}\right)$ = 0,1 * f(0.1;0.09999) =0.09999 ;

$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[K_1^{(0)} + 2K_2^{(0)} + K_4^{(0)}]$=1.099833;

2-qatar

i=1; x_1 = 0.1 ; y_1 = 1.099833;

$K_1^{(0)} = hf\left(x_{1\,,}\, y_1\right) = 0.1 * cos(x_0)$=0.99500;

$K_2^{(0)} = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{K_1^{(0)}}{2}\right)$=0,1*f(0.15;1.59733) =0.09887 ;

$K_3^{(0)} = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{K_2^{(0)}}{2}\right)$=0,1*f(0.15;1.59421) =0.09887 ;

$K_4^{(0)} = hf\left(x_1 + h, y_1 + K_3^{(0)}\right)$ = 0,1 * f(0.2;2.69405) = 0.09800;

$y_2 = y_1 + \frac{1}{6}[K_1^{(0)} + 2K_2^{(0)} + K_4^{(0)}]$=1.198669;

3-qatar

i=2; x_2 = 0.2 ; y_2 = 1.198669;

$K_1^{(0)} = hf\left(x_{2\,,}\, y_2\right) = 0.1 * cos(x_0)$=0.980066;

$K_2^{(0)} = hf\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{K_1^{(0)}}{2}\right)$=0,1*f(0.25;1.688702) =0.0968912 ;

$K_3^{(0)} = hf\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{K_2^{(0)}}{2}\right)$=0,1*f(0.25;1.2471114) =0.0968912;;

$K_4^{(0)} = hf\left(x_2 + h, y_2 + K_3^{(0)}\right)$ = 0,1 * f(0.3;1.2955602) = 0.095533;

$y_3 = y_2 + \frac{1}{6}[K_1^{(0)} + 2K_2^{(0)} + K_4^{(0)}]$=1.295220

Usı tártipte y_{10} –qiymet esaplanǵanǵa diyin dawam ettiriledi.

Joqaridaǵılardan kelip shıqqan jáǵdayda tomendegi qiyasiy taqqaslaw tablicasın duzemiz:

№	x	Eyler usılı	Runge-Kutta usılı	Anıq sheshim
0	0	1.00000000	1.00000000	1.00000000
1	0.1	1.10000002	1.09983333	1.09983341
2	0.2	1.19950044	1.19866933	1.19866933
3	0.3	1.29750705	1.29552002	1.29552020
4	0.4	1.39304066	1.38941834	1.38941834
5	0.5	1.48514676	1.47982553	1.47942553
6	0.6	1.57290506	1.56442473	1.56442473
7	0.7	1.65543866	1.64421768	1.64421768
8	0.8	1.73192286	1.71735609	1.71735609
9	0.9	1.80159354	1.78332768	1,78332690
10	1.0	1.86375451	1.84147108	1,84147098

Demek, tablicadan korinip turǵanınday Runge-Kutta usılınnan alınǵan natiyjeler Eyler usılınan alińgan natiyjelerge kore anıq sheshimge jaqınlaw eken.

JUWMAQLAW

Jıllıliq ótkeziwsheńlik teńlemesi ushin qoyilǵan shegaraliq máselelerdi sheshiwdiń programmaliq támiynatin jaratiw metodikasinda ornıqlılıq bahaları ullı ról oynaydi. Eger ornıqlılıq shárti orınlansa. Yaǵniy másele korrekt qoyılǵan bolsa onda berilgen máseleni sheshiw hám onıń programmalıq támiyinleniwin jaratıw da qıyınshıliq bolmaydı. Eger ornıqlılıq shárti orınlanbasa, yaǵnıy másele korrekt emes qoyilǵan bolsaó onda onı korrekt emes máseleler teoriyasınan paydalanıp izertlew talap etiledi.

Dissertaciyanıń birinshi babında Keri jıllıliq ótkezıwshenlik teńlemesi ushın korrekt emes máselesi, Regulyorizatsiya usilı, taqribiy sheshim dizimi, jıllılıq ótkezıwshenlik teńlemelerin maple paketi járdeminda sheshiw haqında maǵlıwmatlar keltiriledi.

Jumıstıń ekinshi babı C++ programmalastiriw tiliniń tiykarǵı túsinikleri, Jıllıliq ótkezıwshenlik teńlemesine qoyılǵan shegaralıq máseleni sheshiwge dúzilgen shekli ayırmalı sxema ushın programma jaratıw metodikası túsinikleri keltirilgen.

Úshinshi bap programmaliq támiynleniwin jaratiw metodikasi dep atalip, onda C++ programmalastiriw tili haqqinda qisqasha maǵliwmat beriledi hámde berlgen funkciyaniń logarifmikaliq oyis funkciya ekenligin aniqlawshi programmaliq támiyinleniwi C++ programmalastiriw ortaliǵinda islep shiǵilǵan. soniń menen birge jıllıliq ótkeziwsheńlik teńlemesi ushin qoyilǵan shegaraliq máselelerdi sheshiwdiń programmaliq támiynatin jaratiw metodikasi ushın arnalǵan programmalıq ónim jaratıw metodikası islep shiǵılǵan.

PÁYDALANILǴAN ÁDEBIYATLAR

I. Tiykarǵı ádebiyatlar

1. M.Isroilov – Hisoblash metodlari, II-qism. Toshkent: Iqtisod – Moliya, 2008.
2. М.М.Лаврентьев – Условно-корректные задачи для дифференциальных управненийю Новосибирск: НГУ, 1973.
3. М.М.Лаврентьев, В.Г.Романов, С.П.Шишатский – Некорректные задачи математической физики и анализа. М.:Наука, 1980.
4. М.М.Лаврентеьв, Л.Я.Савельев – Линейные операторы и некорректные задачи. М.:Наука, 1991.
5. Sh.F.Madrahimov, S.M.G'aynazarov – C++ tilida programmalash asoslari. Toshkent 2009.
6. A.O.Otarov, J.P.Allanazarov – Esaplaw usılları, II-bolim. Nókis: Bilim, 2006.
7. А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин - Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1979.
8. K.S.Fayazov – Hisoblash matematikasi, matematik fizika va analizining nokorrekt masalalarini yechish usullari. Toshkent: 2001.
9. Березин И.С. Жидков Н.П. Методы вычислений, том II. – М.: Физматгиз, 1962.
10. Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. Введение в Maple V. Математический пакет для всех. М.: Мир, 1997.

II. Ilimiy jurnallardaǵı hám toplamlardaǵı maqalalar

1. О единственности и устойчивости решения задачи Коши для вырождающегося дифференсиального неравенства четного порядка. //Узбекский математический журнал, 2000 г., № 2, с.3-13.
2. М.Х.Аламинов - Задача Коши для операторно - дифференциального уравения высокого порядка. //Вестник ККО АН Руз., 2002 г., Ш-2, с.54-57.

3. М.Х.Аламинов, Д.Р.Қодиров – Жыллылық өткезиўшенлик теңлемеси ушын қойылған шегаралық мәселеге шекли айырмалы схема дүзиў, Nukus: Ilim hám jámiyet. 2018.
4. M.X.Alaminov, D.R.Qodirov – Issiqlik o’tkazuvchanlik tenglamalarini Maple paketi yordamida yechish

III. Internet saytları

1. https://www.vunivere.ru
2. https://www.natural-sciences.ru
3. http://de.ifmo.ru
4. http://alexandr4784.narod.ru
5. http://www.exponenta.ru
6. http://www.maplesoft.com