ÓZBEKISTAN RESPUBLIKASI JOQARI HÁM ORTA ARNAWLI BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI

ÁJINIYAZ ATINDAǴI NÓKIS MÁMLEKETLIK PEDAGOGIKALIQ INSTITUTI

MATEMATIKA-INFORMATIKA FAKULTETI

Informatika oqıtıw metodikası tálim baǵdarınıń
4-kurs studenti Otarbaeva Dilnuranıń

PITKERIW QÁNIGELIK JUMISI

TEMASI: Transendent teńlemelerdi kompyuterde juwıq sheshiw metodikası

Kafedra baslıǵı: f.m.i.k. dotsent A. Alaminov

Ilimiy basshı: t.i.k. dotsent M.Eshanov

NO’KIS-2018

M A Z M U N I

K I R I S I W

KIRISIW

Keyingi waqıtta ulıwma bilim beretuğın mektepler reformalanıp, kòpshilik kolledjler jabılıp, arnawlı kásipke bağdarlaytuğın kerekli oqıw orınları hám joqarğı oqıw orınlarınlarınıǹ qasında akademiyalıq liceyler qaldı. Orta buwındağı bilimlendiriw sistemasınıǹ tálim standartlarına bir qansha òzgerisler kirgizilip, informatika pániniǹ mazmunı keǹeyip, informatsiyalıq texnologiyağa keǹ jol ashıldı. Kòpshilik pánlerdiǹ ámeliy sabaqları kompyuterli texnologiya menen tığız baylanıslı boldı. Máselen fizika, ximiya, biologiya hám matematika pánleriniǹ esaplawğa baylanıslı ámeliy jumısları kompyuterde orınlanadı. Ásirese, matematika hám informatika pánlerı arasında tığız baylanıs ornatıldı.

Házirgi waqıtta orta buwındağı oqıw orınlarınıǹ bağdarlamalarında joqarı matematikanıǹ elementleri menen birge ámeliy matematikanıǹ elementleri de aytarlıqtay orın alğan. Bul oqıwshılarğa matematikanıǹ ámelde qollanılıwın hám funkciyalardıǹ geometriyalıq, ekonomikalıq hám tağı basqa táripleniwin u'yretiwge, yağnıy bir sòz benen aytqanda oqıwshılardıǹ bilimin tereǹlestiriwge mu'mkinshilik beredi. Máselen teǹlemelerdi iteratsiya usılı menen juwıq sheshiw temasında teǹlemelerdiǹ sheshimi degenimiz eki sızıqtıǹ kesilisiw tochkası ekenligin, $f(x) = 0$ teǹlemesin $x = \varphi(x)$ hám $y = h(x)$ funkciyalardıǹ grafikleriniǹ kesilisiw tochkasınıǹ abcissası ekenligine kòzi jetedi hám isenedi. Demek, oqıwshılardıǹ pikirlewi tereǹlesedi hám oy òrisi keǹeyedi.

Anıq integraldı juwıq esaplag'anda oǹ anıqlang'an funkciyanıǹ integralı iymek sızıqlı trapetsiyanıǹ maydanı bolatug'ınlığın òz kòzi menen kòredi. Hár qıylı máselelerdi sheshiw barısında taq funkciyalardıǹ integrallarınıǹ tòmengi hám joqarğı shekleri koordinata basına simmetriyalı bolsa, ol integraldıǹ mánisi O bolatuğınlığına, al jup fukciyalardıǹ integralınıǹ shegi koordinata basına simmetriyalı bolg'anda OY kòsheriniǹ shep hám oǹ jağında alınğan integrallardıǹ mánisleri bir- birine teǹ bolatuğınına kòzi jetedi.

Sızıqlı programmalastırıw máselesiniǹ elementlerin u'yrengende sızıqlı teǹsizlikler sistemasınıǹ ekonomikalıq hám geometriyalıq mag'anasın kòz aldına keltire aladı. Ásirese hár qıylı ekonomikalıq máselelerdiǹ matematikalıq modelin du'ziw temasında oqıwshılarda az g'ana bolsada ilimiy kòz qaras payda boladı hám oqıwshılardıǹ òz betinsheligin arttıradı.

Joqarıda aytılğanlarğa tiykarlana otırıp, biz tòmendegishe pikirge iye bolamız. Mekteplerde matematikanıǹ elementlerin oqıw u'lken áhmiyetke iye, oqıwshılardıǹ oy – pikirin tereǹlestiredi, bilimge degen qızığıwshılığın arttıradı.

Biz orta arnawlı oqıw orınlarınıǹ bağdarlamaların analiz etkende akademiyalıq liceylerdiǹ bağdarlamalarına kòbirek dıqqat awdaramız. Sebebi akademiyalıq liceylerdiǹ bağdarlamaları boyınsha matematikalıq hám kompyuterli modellestiriw elementleri kòbirek oqıtıladı.

Akademiyalıq liceylerde oqıw qánigelestirilgen bolıp, tiykarınan fizika – matematika, matematika – ingliz tili, ximiya – biologiya, ingliz tili, tariyx – ana tili baǵdarları boyınsha alıp barıladı. Solardıǹ ishinde fizika – matematika qánigeligine esaplaw matematikasınıǹ elementleri, al matemarika – ingliz tili qánigeligine sızıqlı algebra, sızıqlı programmalastırıw hám matematikalıq statistika elementleri oqıtıladı.

Endi usı baǵdarlamalarǵa sholıw jasasaq, dáslep sanlardı juwıqlastırıw, Evklid algoritmi, kòp aǵzalınıǹ mánisin esaplaw ushın Gorner sxeması, esaplaw processindegi qátelikler, teǹlemelerdi juwıq sheshiw ushın Dixotomi, ápiwayı integraciya usılları u'yretiledi. Usıllar menen bir qatarda informatika páni boyınsha:

modeler haqqında tu'sinik, modellerdiǹ tu'rleri (matematikalıq, fizikalıq, ximiyalıq, biologiyalıq hám ekologiyalıq modeller) , máselelerdi juwıq sheshiw usılları, qáteliktiǹ tu'rleri, isenimli sanlardı anıqlaw qádesi, bir belgisizli teǹlemelerdi juwıq sheshiw usılları u'yretiledi. Joqarıda aytılǵan temalardıǹ hámmesi 1– kurs baǵdarlamalarına sáykes keledi.

2–kurs baǵdarlamasında esaplaw matematikasınıǹ elementleri aytarlıqtay kòp oqıtılmaydi, sebebi baǵdarlama tiykarınan funkciyalar, grafikler, kòrsetkishli, logarifmlik, kòrsetkishli - logarifimlik, trigonometriyalıq teǹlemeler, teǹsizlikler hám olardıǹ sistemaları u'yretiledi. Degen menen informatika páni boyinsha funkciyanıǹ grafiklerin jasaw hám olardıǹ tochkadaǵı mánislerin juwıq esaplaw usılları, sızıqlı programmalastırıw máselesiniǹ elementleri hám sızıqlı algebra elementleri u'yretiledi. Bul jerde sızıqlı teǹlemeler sistemasın sheshiwdiǹ matricalıq hám Gauss usılları, sızıqlı teǹsizlikler sistemasınıǹ geometriyalıq maǵanası, sızıqlı programmalastırıw máselesiniǹ algebralıq forması hám geometriyalıq su'wretleniwi, onıǹ
máselelerdi sheshiwde qollanılıwı u'yretiledi.

Esaplaw matematikası hám komp'yuterli modellestiriw elementleri 3–kursta kòbirek òtiledi. Sebebi bul kursta tiykarınan tuwındı, integral, itimallıq teoriyasınıǹ elementleri hám sızıqlı algebra elementleri tereǹirek u'yretiledi. Endi bul kursta òtiletu'ǵın temalardı atap òteyik. Bular: sızıqli teǹlemeler sistemasın sheshiwdiǹ matricalıq hám Gauss usılı, n belgisizli n sızıqlı teǹlemeler sistemasın sheshiwdiǹ ulıwma algoritmi, joqarı dárejeli hám transendent teǹlemelerdi sheshiwdiǹ Dixotomi, iteraciya, xorda hám urınba usılları, Nyuton binomınıǹ juwıq esaplawda qollanılıwı, anıq integraldıǹ mánisin juwıq esaplaw (tuwrı mu'yeshlik hám trapeciya) usılları, determinantlardı esaplaw, vektorlardıǹ elementlerin tártiplestiriw, tártiplestirilgen kesteden belgili shártke baylanıslı elementlerdi izlew, sızıqlı programmalastırıw máselelerin kompyuterde sheshiw, imitaciyalıq modeller haqqında tu'sinik, graflar teoriyasınıǹ elementleri, matematikalıq statistika (arifmetikalıq orta, ortasha kvadratlıq awısıw, eǹ kishi kvadratlar usılı boyınsha matematikalıq modeldi tiklew) elementleri.

Solay etip, akademiyalıq liceylerde esaplaw matemetikasınıǹ elementleri burıngı baǵdarlamalarǵa salıstırǵanda bir qansha keǹirek u'yretiledi.

Bunıǹ bir qansha unamlı jaqları bar. Máselen, matematikalıq funkciyalardı jaqsı u'yrenedi, olardıǹ geometriyalıq maǵanasın hám koordinata kòsherleri boyınsha òzgeriw dinamikasın kòz aldına keltire aladı, ámeliy matematikaǵa bolǵan pikirlewi payda boladi, matematikalıq programmalastırıw hám matematikalıq model degen ne, onıǹ ekonomikalıq maǵanası qanday, qanday máselelerdi sheshiwde olardi qollanıwǵa boladı degen sorawlarg'a juwap bere aladı. Tuwındınıǹ qollanılıwı hám anıq integraldı juwıq esaplaǵanda bulardıǹ geometriyalıq hám fizikalıq maǵanasın jaqsı tu'sinip aladı hám elementar funkciyalardıǹ qásiyetlerine kònligip, olardı ámeliy máselelerdi sheshiwge qollanıp biledi.

Bunıǹ jáne unamlı jag'ı bar. Máselen joqarǵı oqıw orınlarına kiriw ushın du'zilgen test variyantlarında teǹlemeniǹ yamasa teǹlemeler sistemasınıǹ neshe sheshimi bar, funkciyanıǹ maksimum hám minimumların tabıǹ, sızıqlar menen shegaralang'an figuranıǹ maydanın esaplaǹ, qozg'alıwshı deneniǹ tezligin tabıǹ yamasa ju'rgen jolın esaplaǹ hám tag'ı basqa máseleler ju'dá kòp. Ámeliy matematika elementlerin u'yretiw bunday máselelerdiǹ geometriyalıq mag'anasın tu'siniwge kòp paydası tiyedi hám oqıwshı bunday máselelerdi sheshkende aljaspaytug'ın boladı.

Sonıń ushın pitkeriw qánigelik jumısında algebralıq hám transendent teǹlemelerdi kompyuterde juwıq sheshiw usılları qaraladı. Teńlemelerdi juwıq sheshiw ushın dáslep teńlemeniń koreni bar aralıqtı anıqlawımız kerek.

Sol sebepli birinshi paragrafta teńlemelerdiń korenleri bar aralıqtı anıqlaw usılları qaraladı. Bul usıllar tiykarınan grafikalıq, aralıqtı teń ekige bóliw, araliqti teńdey n bo'lekke bóliw ham t.b. usıllar. Teńlemeniń koreni bar aralıqlar shegara noqattaǵı teńlemeni dúziwshi funkciyanıń belgileri boyınsha anıqlanadı. Eger tabılǵan aralıqtaǵı shegara tochkalar bir - birinen uzaq bolsa, aralıqtı ekige bólip shegara noqatlar bir - birine jaqınlastırıladı.

Ekinshi paragrafta transendent teńlemelerdi juwıq sheshiwdiń grafikalıq hám aralıqtı teń ekige bóliw usılları qaraladı. Grafikalıq usıldıń oqıwshılardıń bilimin tereńlestiriwge hám kónlikpelerin kúsheytiwge úlken járdemi bar, al aralıqtı teń ekige bóliw usılı bolsa teńlemelerdi juwıq sheshiwdiń maǵanasin tolıq túsinip alıwǵa járdem etedi. Bul usıllardıń metodikası mısallar menen tolıqtırıladı.

Úshinshi paragrafta teńlemelerdi juwıq sheshiwdiń xordalar hám urınbalar usılları hám olardıń algoritmleri bayan etiledi. Haqıyqıy korenge tez jaqınlasıw shártleri aytıladı. Qanday jaǵdayda qaysı formulalar qollanılatuǵınlıǵı túsindiriledi. Eki usılǵa da mısallar keltiriledi. Paragraftıń aqırında sızıqlı bolmaǵan teńlemeler sistemasın juwıq sheshiw ushın urınbalar usılınıń qollanılıwı bayan etiledi.

Tórtinshi paragrafta transendent teńlemelerdi juwıq sheshiw ushın xordalar hám urınbalar usılınıń birgelikte qollanılıwı táriyplenedi, bunı aralas usıl dep atadıq. Bul usıldı qollanǵanda ózgeriwshiniń juwıq mánisi eki jaqtan, yaǵniy oń hám shep tárepten haqıyqıy korenge umtılatuǵınlıǵı túsindiriledi. Bul usıl boyınsha sanlı mısallar sheshiledi, usıldıń algoritminiń blok-sxeması, beysik hám paskal tilindegi programmaları keltiriledi.

Besinshi paragrafta sheshiliwi qıyın teńlemelerdi juwıq sheshiw ushın iteraciya usılı táriyiplenedi. Qálegen teńlemeni iteraciya usılın qollanıwǵa keltiriwge bola bermeydi. Iteraciya usılın qollanıw ushın teńlemeniń xarakterine baylanıslı jıynaqlılıqtı táminlewshi shártler orınlanıwı kerek. Bul shártlerdi qalay tańlap alıw kerek ekenligi haqqında túsinikler beriledi. Paragraftıń aqırında iteraciya usılınıń algoritmi hám anıq mısal menen paskal tilindegi programması beriledi.

Joqarıdaǵı aytılǵan barlıq usillar mısallar menen túsindiriledi, qaysı formula qanday jaǵdayda qollanılatuǵınlıǵı aytıladı, formulalar ápiwayı túrde jazılǵan, bazı bir ápiwayı mısallar qolda esaplanǵan, jumıs qálegen oqıwshıǵa túsinikli bolatuǵınday etip jazılǵan.

1.Teǹlemelerdiǹ korenleri bar aralıqtı ajıratıw usılları.

Sızıqlı teǹlemeler hám onıǹ sistemaların anıq sheshiw usılları bar. Biraq sızıqlı bolmaǵan teǹlemelerdı anıq sheship bolmaydı. Bizge birar $f(x)=0$ teǹleme berilgen bolsın. Bul teǹlemeniǹ haqıyqıy koreni bar bolsa, $y=f(x)$ funkciya absissa kósherin keminde bir jerde kesip òtedi. $y=f(x)$ absissa kósherin kesiwi ushın $[a,b]$ aralıqta $f(a)\cdot f(b)$ mánislerin tekseriw zárùr. Meyli

$$f(x)=0 \qquad (1)$$

teǹlemeni sheshiw talap etilgen bolsın, bul jerde $f(x)$ - algebralıq yaki transendent funkciya bolıwı mùmkin. Teǹlemelerdi juwıq sheshiw ushın qollanılatuǵın kòp usıllarda onıǹ korenleri ajıratılǵan, yaǵnıy sonday jeterli kishi ortalıqlar tabılǵan, bul ortalıqlarda teǹlemeniǹ bir ǵana koreni jaylasadı dep oylap qaraladı.

Bul aralıqtıǹ birar noqatın dáslepki jaqınlasıwı sıpatında qabıl etip, atırǵan usıllar járdeminde izlenip atırǵan sheshimdi berilgen anıqlıq penen esaplaw mùmkin. Demek, (1) teǹlemeniǹ korenlerin juwıq esaplaw eki bòlimnen ibarat: 1) korenlerdi ajıratıw hám 2) dáslepki jaqınlasıw málim bolsa, korenlerdi berilgen anıqlıq penen esaplaw.

Máseleniǹ birinshi bòlimi ekinshisine qaraǵanda oǵada quramali esaplanadi. Sebebi, ulıwma jaǵdayda korenlerdi ajıratıw ushın effektiv usıllar joq. Tiykarınan, bir neshe belgisizli

$$f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots n)$$

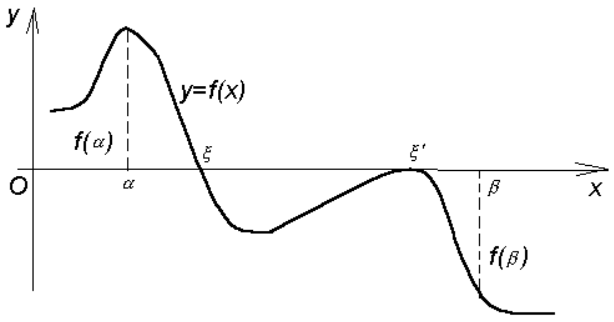
Teǹlemeler sisteması ushın korenlerdi ajıratıw máselesi ùlken qıyınshılıqlar menen baylanıslı. Matematikalıq analizden málim bolǵan tòmendegi teoremalar (1) teǹlemeniǹ korenleri jatqan aralıqlardı ajıratıwǵa járdem beredi.

1-teorema. Eger ùzliksiz $f(x)$ funkcıya birar *[a;b]* aralıqtıǹ shetki noqatlarında hár tùrli belgili mánislerdi qabıl qılsa, ol waqıtta bul aralıqta (1) teǹlemeniǹ hesh bolmaǵanda bir koreni bar. Eger sol menen birge, birinshi tártipli tuwındı $f'(x)$ bar bolıp, ol òz belgisin sol aralıqta saqlasa, ol waqıtta bul aralıqta koren jalǵız.

2-teorema. $f(x)$ funkciya *[a;b]* aralıqta analitik funkciya bolsın. Eger *[a;b]* aralıqtıǹ shetki noqatlarında $f(x)$ hár tùrli belgili mánislerin qabıl qılsa, ol waqıtta (1) teǹlemeniǹ *a* hám *b* noqatlar arasında jatatuǵın korenleriniǹ sanı taq.

Eger $f(x)$ funkciya *[a;b]* aralıqtıǹ shetki noqatlarında birdey belgili mánislerdi qabıl qılsa, ol waqıtta (1) teǹlemeniǹ korenleri yaki *[a;b]* aralıqta jatpaydı yaki olardıǹ sanı jup (eseliligin esapqa alǵan halda).

Kòbinese (1) teǹlemeniǹ haqıyqıy korenlerin ajıratıwǵa grafik usılı járdem beredi. Bunıǹ ushın $y = f(x)$ funkciyanıǹ grafiginin juwıq ráwishte sızıp, bul grafiktiǹ Ox kósherı menen kesisken noqatlarınıǹ absissalari korenleriniǹ juwıq mánisleri dep alınadı (1-sızılma).



1-sızılma.

Eger (1) teǹlemeniǹ korenleri bir- birine jaqın jaylasqan bolsa, ol waqıtta bul usıl menen onıǹ korenleri aǹsat ajıratıladı

Bazi jaǵdayda $f(a)*f(b)<0$ shárti orınlanǵan jaǵdayda da $x\in[a;b]$ aralıǵında jup koren bolıwı mùmkin. Bunday jaǵdayda $f(x)$ funkciyasiniǹ grafigi OX kòsherine urınıp òtiwi mùmkin (1- sızılma).

Eger $f(x)$ tiǹ kòrinisi quramalı bolıp, onıǹ grafigin sızıw qıyın bolsa, ol waqıtta grafik usılın basqasha tárizde qollaw kerek, yaǵnıy (1) teǹleme oǵan teǹ kúshli bolǵan teǹleme menen almastırıladı.

$$\varphi(x)=\psi(x) \qquad (2)$$

Kòrinisinde jazıp alınadı. Endi $y=\varphi(x)$ hám $y=\psi(x)$ funkciyalarınıǹ grafiklerin sızsaq, bul grafikleriniǹ kesisiw noqatlarınıǹ absissaları juwıq korenlerinen ibarat boladı.

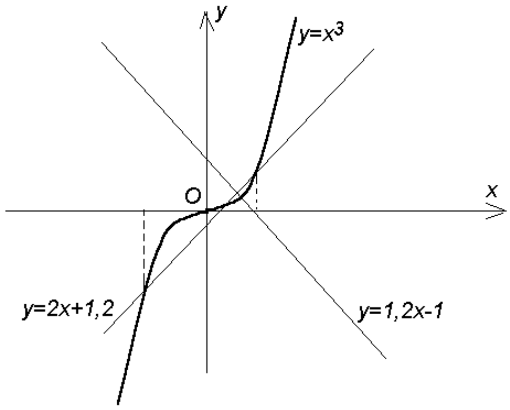
Mısal. $2^{-x}-2x+1=0$ teǹlemesiniǹ koreni bar aralıqtı grafik usılda tabayıq.

Bul teǹlemeni $2x-1=2^{-x}$

Kòrinisinde jazıp alamız, $y=2^{-x}$ *iymek sızıqtıǹ hám* $y=2x-1$tuwrı sızıqtıǹ grafiklerin sızıp, olardıǹ kesisiw noqatınıǹ absissasi $\xi\cong0.7$ boladı eken.

Eger $\varphi(x)$ *yaki* $\psi(x)$ sızıqlı funkciya, máselen $\psi(x)=ax+b$ bolsa, ol waqıtta (2) teǹlemeniǹ korenlerin ajıratıw ápiwayılasadı. Tek ǵana *a* hám *b* koefficentleri menen parıq qılınatuǵın birdey tiptegi bir neshe teǹlemelerdiǹ korenlerin ajıratıw ushın grafik usılı qolaylı esaplanadı. Sebebi bul jerde korenlerdi ajıratıw (korenlerdi juwıq tabıw) bir $y=\varphi(x)$ funkciya grafigi menen hár tùrli $y=ax+b$ tùrdegi sızıqlar kesisiw noqatlarınıǹ absissaların tabıwdan ibarat. Bul tiptegi $x^3+ax+b=0$ kòrinisindegi teǹlemeler mısal bola aladı.

Máselen, $x^3+2x-1,2=0$ ha’m $x^3-1,2x+0,1=0$ teǹlemeler korenleriniǹ juwıq mánisleri tabılsın. Bunı sheshiw ushın *y=x*^{3} kubik parabolanı sızamız. Keyin ala *y=-2x+1,2* ha’m *y=1,2x-0,* sızıqlardıǹ parabola menen kesisiw noqatlarınıǹ absissaların tabamız. 2 - sızılmadan kòrinip turıptı birinshi teǹleme tek ǵana bir $\xi \cong 0.6$ haqıyqıy korenge iye bolıp, ekinshi teǹleme ese 3 $\xi_1 \cong -1,1;\quad \xi_2 \cong 0,1;\quad \xi_3 \cong 1$ haqıyqıy korenge iye esaplanadı.

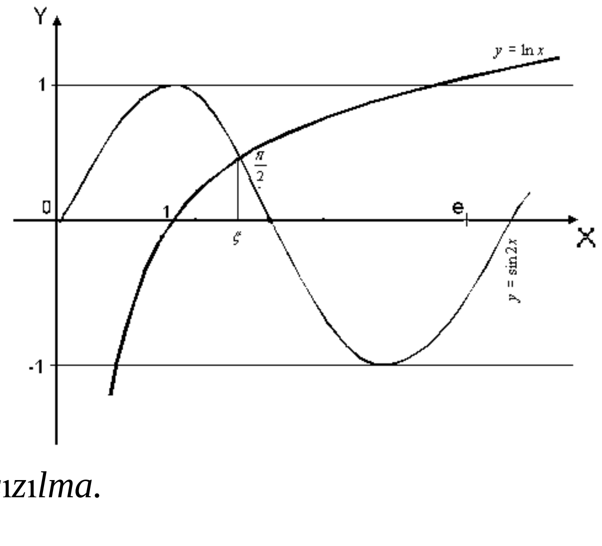


2-sızılma.

Mısal. *sin2x-lnx=0* teǹleme koreni bar aralıqtı grafik usılında ajıratıǹ.

Sheshiw. Teǹleme *sin2x* ha’m *lnx* teǹ kùshli teǹlemege ajiratamiz hám olardiǹ grafiklerin sızamız. (3-sızılma) 3-sızılmadan kòrinip turıptı koren [1; 1,5] aralıqta. Haqıyqattan *f(1)-sin2·1-ln1=0,9092; f(1,5)=-0,2643;*

*f(1)·f(1,5)<0. D*emek, [1; 1,5] aralıqta bir koren bar.



3-sızılma.

EEM da koren bar aralıqtı tabıw ushın *[a,b]* aralıqtı òzimiz taǹlap alamız hám bul aralıqtı *h* qádem menen *n* bòlekke bòlemiz.

$$h = \frac{(b-a)}{n}; \quad x_i = x_0 + ih; \quad x_0 = a; \quad x_n = b.$$

Hár bir $[x_i, x_{i=1}]$ aralıqta $f(x_i),\ f(x_{i-1}) < 0$ shártti tekserip kòremiz, bul shárt orınlansa aralıqta keminde bir koren bar.

Mısal. x^3-6x+2=0 teǹlemeniǹ korenleri bar aralıqtı anıqlaǹ. Máseleni sheshiw ushın tòmendegi sxemanı dùzemiz.

X	F(x)	X	F(x)
-∞	-	1	-
-3	-	3	+
-1	+	∞	+
0	+		

Demek (-3;-1), (0;1), (1;3) aralıqlarda teǹlemeniǹ eǹ bolmaǵanda bir koreni bar.

Bazı jaǵdayda korenleri bar aralıqtı tabıw ushın f(x) funkciyasınan tuwındı alıp, $f'(x) = 0$ teǹlemesin sheshemiz (eger analıtıkalıq usılda sheshiw mùmkin bolsa jùda qolaylı boladı). Sebebi biz

$$f'(x) = 0$$

teǹlemesiniǹ sheshimi f(x) funkciyasınıǹ kritikalıq tochkaları bolatuǵınlıǵın biz bilemiz. Sol kritikaliq tochkalardiǹ araliǵinda koreni bar boliwi mùmkin.

Misal. $f(x)$= x^4-4x-1=0 teǹlemeniǹ koreni bar araliqti tabiǹ.

$$f'(x) = 4(x^3-1) = 0$$

bunnan $f'(1)=0$ ekenligi málim, olay bolsa, $f(-\infty) > 0$; $f(1) < 0$; $f(+\infty) > 0$; demek teǹleme eki haqıyqıy korenge iye, yaǵnıy (-∞ ; 1) hám (1 ; ∞) aralıqlarında korenleri bar.

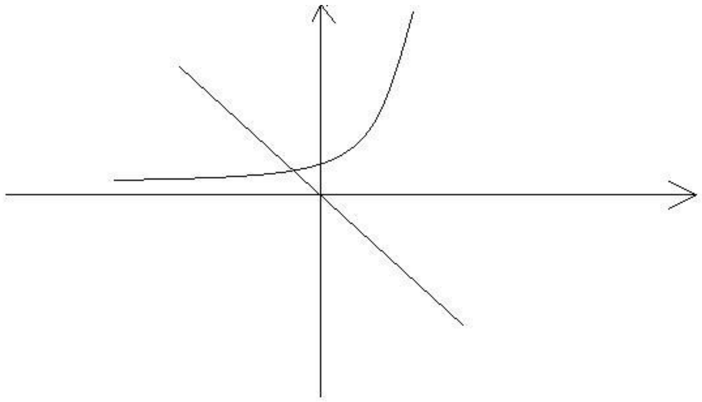
Misal. $f(x)$ = x + e^x= 0 teǹlemesiniǹ neshe haqıyqıy koreni bar ekenligi aniqlaǹ.

Tuwindi alamiz : $f'(x)$ = 1+ e^x; 1+e^x = 0

Teǹlemesi sheshimge iye emes f(x) funkciyasin tek (-∞ ; ∞) araliǵiniǹ shegaralarinda tekserip kòremiz :

$f(x) = x + e^x$; $f(-\infty) = -\infty$; $f(+\infty) = \infty$.

Demek x+e^x = 0 teǹlemesi pùtkil san kòsherinde jalǵiz sheshimge iye. Buni grafikaliq usilda aǹsat kòriwge boladi. Buni e^x= -x, y = e^x hám y = - x dep jazamiz, Grafiklerin koordinata tegisligine tùsirsek, shama menen



(-1 ; 0) araliǵinda teǹlemeniǹ koreni bar ekenligi aniqlanadi.

Qanday da bir $x \in [\alpha;\ \beta]$ araliǵinda f(x)=0 teǹlemesiniǹ koreni bar bolsin. Oniǹ dál mánisin ξ,al juwiq mánisin x dep belgileyik. Bul jaǵdayda

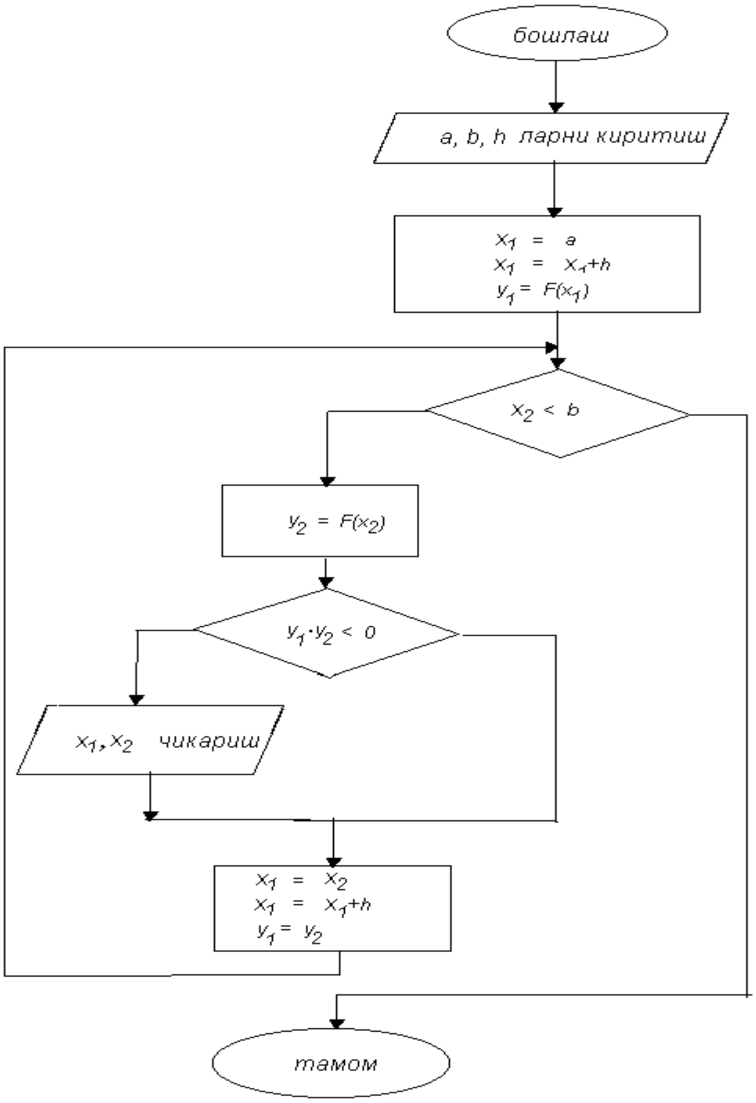
$$|\bar{x} - \xi| \leq \frac{f(\bar{\alpha})}{m}$$

shárti orinli boladi, bul jerde m $f(x)$ funkciyasiniǹ $x \in [\alpha\ ;\ \beta\ ]$araliǵindaǵI eǹ kishi mánisi. Bul formula aytarliqtay ùlken qátelikke alip keliwi mùmkin. Soniǹ ushin ámeliy máselelerdi sheshkende $\alpha \in [\alpha; \beta]$ araliǵin kishireytiwdiǹ hár qiyli usillari qollaniladi. Bul processtiǹ algoritimi 4-sizilmada keltirilgen .

Korenlerdi ajıratıw usılınıǹ programması.

```
10 REM «Korenlerdi ajiratiw usili»
20 DEF FNF(x)=sin(x)-0.1*x
30 INPUT a,b,h: k=0
40 x1=A:  x2=x1+h: y1=FNF(x1)
50 IF x2>b THEN 120
60 y2=FNF(x2)
70 IF y1*y2>0 THEN 120
80 k=k+1
90 PRINT K; «Ekinshi koren»; x1,x2
100 x1=x2:  x2=x1+h:  y1=y2
110 GOTO 50
120 END.
```

Programma ushin blok sxema.



4-sizilma.

Eger *f(z)=0* teǹlemeniǹ kompleks korenlerin tabiw kerek bolsa, *z=x+iy* dep alip bul teǹlemeni

$$f_1(x, y) + if_2(x, y) = 0$$

Kòrinisinde jazip alamiz, bul jerde $f_1(x, y)$, $f_2(x, y) = 0$ haqiyqiy x ha'm y òzgeriwshilerdiǹ haqiyqiy funkciyalari. Bul teǹlemeler tòmendegi eki $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$ teǹlemeler sistemasina teǹ kùshli esaplanadi. Endi $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$ iymek siziqlarin sizip oniǹ kesisken noqatin tabamiz. Kesisiw noqatlariniǹ abcissa hám ordinatalari *f(z)=0* teǹleme sheshimleriniǹ sáykes rawishte haqiyqiy hám jorıma bòlimlerin beredi.

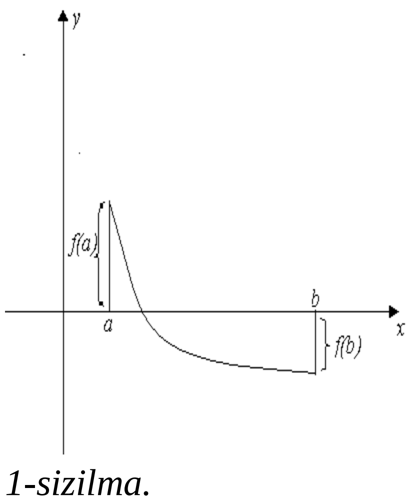
2. Teǹlemelerdi grafikalıq hám aralıqtı teǹ ekige bòliw usılları menen juwıq sheshiw.

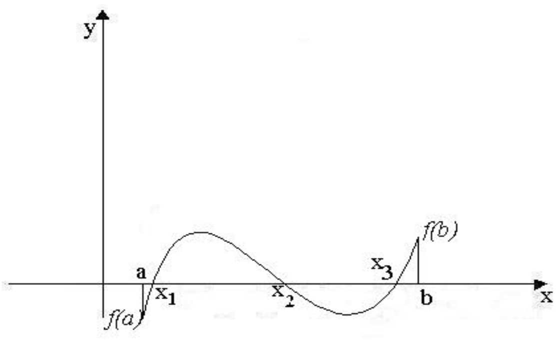
Algebralıq hám transendent teǹlemelerdi hámde bunday teǹlemeler sistemasın sheshiw analızdiǹ áhmiyetli máselelerinen biri esaplanadı. Fizika, mexanika, texnika hám ulıwma tábiyat tanıwdıń hár tùrli máseleleri algebralıq hám transendent teǹlemelerdi sheshiwge alıp keledi. Máselen, mexanikaliq Sistema terbeliwi chastatalariniǹ kvadratları matricaları xarakteristikaliq teǹlemeleriniǹ korenleri boladı, bunday teǹleme ese n- dárejeli algebraliq teǹlemeler esaplanadi. Matematikaniǹ zárúrlikleri de teǹlemelerdi sheshiwdi talap etedi. Máselen, belgisizlerdi joǵaltiw joli quramali algebraliq hám geometriyalıq mùnásebetler ekinshi yaki joqari dárejeli algebraliq teǹlemelerge keltiriledi.

Bizge belgili, dárejesi tòrten joqarı bolǵan algebralıq hámde transendent teǹlemelerdi sheshiw ushin aniq usillari joq. Soniǹ ushın da bunday teǹlemelerdiǹ juwiq sheshimleri jeterlishe aniqliq penen tabiw imkanin beretuǵin usillar kerek. Biz bul temada transendent teńlemelerdi sheshiw usillariniǹ keǹ qollanilatuǵinlarin hám tájriybede sinalǵanlarin keltiremiz.

Biz aldinǵi temada korenlerdi ajiratiwdi kòrip òtken edik. Bunda eki jaǵday boliwi mùmkin.

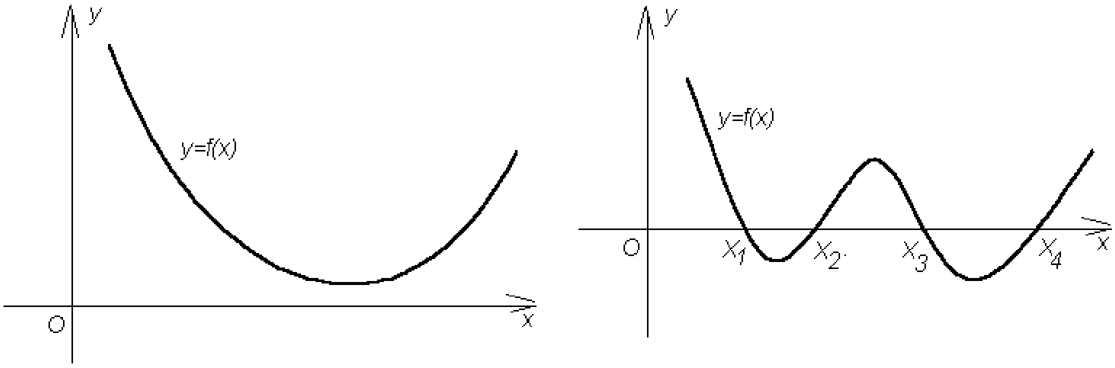
1) $f(a) \cdot f(b) < 0$ bolsa, funkciya abcissa oǵin taq márte kesip òtedi.





1-sizilma.

2). $f(a) \cdot f(b) > 0$ bolsa, teǹlemeniǹ koreni joq yaki korenler sanı jup.



2-sızılma.

Esaplaw matematikasinda barlıq korenlerin tabiw mashqalasi qoyilmaydi. Bir korendi jeterli dárejede aniqliqta sheshiw mashqalasi qoyiladi. Soniǹ ushin aldin bir koren bar araliq kòrip shiǵiladi. Bir koren bar araliq ushın *[a,b]* da $f(a)\cdot f(b)<0$ boliwi kerek. Korendi bahalaw ushin juwiq formulalardan paydalaniw mùmkin.

$f(x)=0$ teǹlemeniǹ haqiyqiy koreni $x=\xi$ bolǵani ushin $f(\xi)=0$ boladi. Sol teǹlemeniǹ juwiq koreni $x=\bar{x}$ bolsin, ol jaǵdayda $f(\bar{x})\neq 0$ boladi. Lagranj formulasina tiykarlanǵan:

$$\frac{f(\bar{x})-f(\xi)}{\bar{x}-\xi}=f'(c), \qquad f(\bar{x})=f'(c)(\bar{x}-\xi)$$

$$|f'(c)|\geq m, \quad f(\bar{x})\geq(\bar{x}-\xi)\cdot m,$$

Bul jerde: $f'(c)\geq m$

$$|\bar{x}-\xi|\leq\frac{f(\bar{x})}{m} \qquad (3)$$

Joqarıdaǵı (3) teǹlik penen aniqlanǵan formulaǵa korenniǹ absalyut qátesin esaplaw formulasi delinedi.

Juwiq sheshiw usillari jùdá kòp. Solardan ayirimlari koren bar araliqti tabiw ushin xizmet qiladi.

Grafik usil. Bizge $f(x)=0$ teǹleme berilgen.

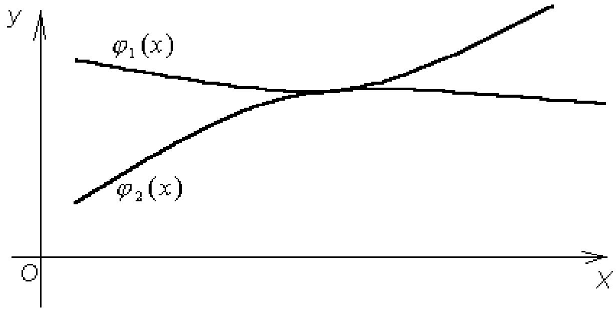
Birar [*a*,*b*] araliqta $f(a)\cdot f(b)<0$ (2) $f(x)$ ti funkciya dep qarap, oni eki $\varphi_1(x)$ ha’m $\varphi_2(x)$ funkciyalarǵa ajiratamiz.

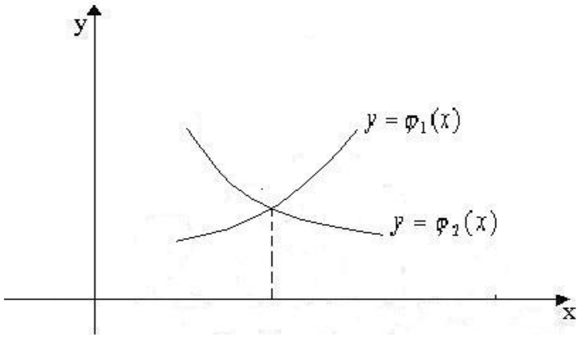
Máselen:

$f(x)=x^5-6x-1=0$

$\varphi_1(x)=x^5;\ \varphi_2(x)=6x+1$

$y=\varphi_1(x)$ ha'm $y=\varphi_2(x)$ funkciyalariniṅ grafiklerin sızamız. Olardıṅ kesisiw noqatiniṅ abcissasi teṅlemeniṅ juwiq sheshimi boladi.



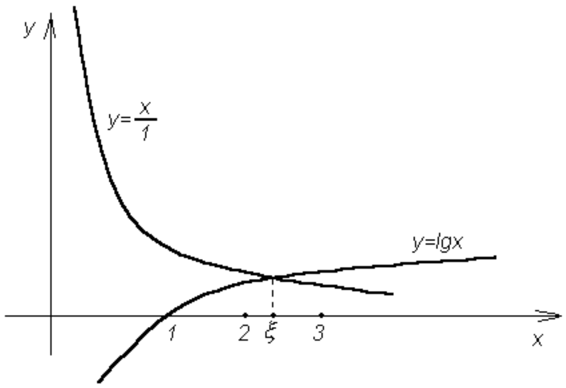


3-sızılma. 4-sızılma.

Grafik usılı qollanılıwı jaǵınan eṅ ápiwayi qolaylı usıllardan biri. Bul usıldıṅ kemshiligi aniqlıǵı tòmenliginde. Ayniqsa, $\varphi_1(x)$ ha'm $\varphi_2(x)$ ler kesisiw noqatinda òtkir mùyesh payda qilsa (4-sizilma).

Mısal. Teṅlemeniṅ grafik usilda sheshiṅ. $x \cdot lgx = 1$

Sheshiw. Bul teṅlemege teṅ kùshli bolǵan tòmendegi teṅlemeni jazip alamiz. $\lg x = \frac{1}{x}$ Bul teṅlemeniṅ sheshimi $y=lgx$ ha'm $y=\frac{1}{x}$ funkciyalariniṅ grafikleriniṅ kesisiw noqatlarinıń abcissasi boladi.(5-sizilma).



5-sizilma.

$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, funkciyalardi sonday ajiratiwimiz kerek, olardiṅ grafiklerin siziw aṅsat bolsin. Basqasha etip aytqanda olardiṅ grafiklerin biz aldinnan tanis bolǵan funkciyalarǵa ajiratamız.

Aralıqtı teṅ ekige bòliw usılı.

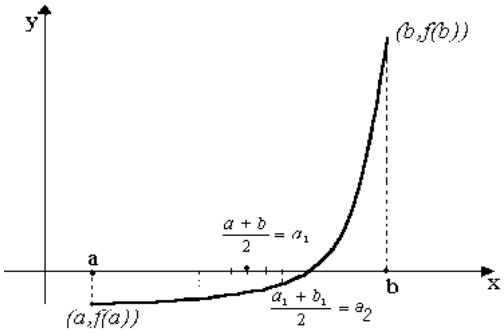
Bizge

$$f(x) = 0 \qquad (4)$$

Teṅleme berilgen. Birar *[a,b]* araliqta

$f(a)\cdot f(b)<0$ (5)

Shártti qanaatlandiradi, yaǵniy keminde bir koren bar. Berilgen *[a,b]* araliqti teǹ ekige bòlemiz. Bunda $\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ araliqlar payda boladi.



6-sızılma.

Hár eki araliqtada (5) shárti qanaatlandiriliwin tekseremiz. Koreni bar araliqti $[a_1,b_1]$ dep belgilep alamiz. $a_1=\frac{a+b}{2}, b_1=b$

Bul araliqti jáne teǹ ekige bólemiz.

$$\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right],\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$$

Jáne (5) shártti tekseremiz. Koren bar araliqti $[a_2,b_2]$ dep belgilep alamiz hám sol prosessti dawam etiremiz.

Nátiyjede, [*a*,*b*] araliqta $a_1,a_2,...,a_n$ kemeymeytin hám $b_1,b_2,...,b_n$ òspeytuǵin izbe-izlikler payda boladi. Analiz kursinan bilemiz, olar uliwma limitke iye boladi, yaǵniy

$$\xi=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$$

$$b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)$$

$n\to\infty$ da kesindiniǹ uzinliǵi nolge umtiladi. Bul usil jùdá qolayli. Eger jeterli dárejede aniqliq talap etilse, jùdá kòp esap- kitap jumislarin orinlawǵa tuwri keledi. Ádette, juwiq korendi

$$\bar{x}=\frac{a_n+b_n}{2}$$

Kòrinisinde esaplaydi.

Mısal: Yarımǵa bòliw usılı menen

$$f(x) \equiv x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$$

Teǹlemesiniǹ [0, 1] aralıqtaǵi korenin anıqlaǹ.

Sheshimi:

$$f(0) = -1; f(1) = 1;$$

$$f(0.5) = 0.06 + 0.25 - 0.5 - 1 = -1.19;$$

$$f(0.75) = 0.32 + 0.84 - 0.75 - 1 = -0.59;$$

$$f(0.85) = 0.59+1.34-0.88-1=0.05;$$

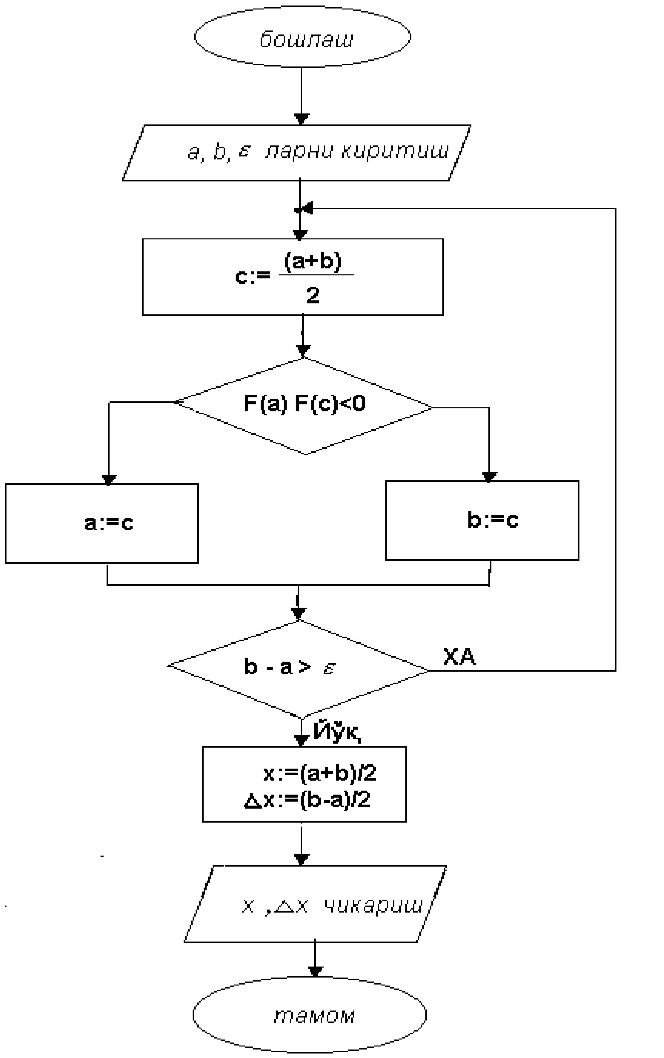
$$f(0.8125) = 0.436 + 1.072 - 0.812 - 1 = -0.304$$

$$f(0.8438) = 0.507 + 1.202 - 0.844 - 1 = -0.135$$

$$f(0.8594) = 0.546 + 1.270 - 0.859 - 1 = -0.043, \ldots.$$

$$\xi=\frac{1}{2}(0{,}859 + 0{,}875) = 0{,}867.$$

Teǹ ekige bòliw usili algoritmniǹ blok -sxemasi.



7-sızılma

Misal. $\sin 2x - \ln x = 0$ teǹlemeniǹ [1,3; 1,5] araliqtaǵi korenin EEM járdeminde teǹ ekige bòliw usili arqali 10^{-4} aniqliqta tabiǹ.

Sheshiw. 7-sizilmada berilgen algoritm járdeminde beysik programmalastiriw tilinde programma dùzemiz.

```
10 REM «Teǹlikti teǹ ekige bòliw usili»
    20 DEF FNF(x)=sin(2*x)-logx
    30 INPUT A,B,E
    40 C=(A+B)/2
    50 IF FNF(A)*FNF(C)<0 THEN 70
    60 A=C: GOTO 80
    70 B=C80 IF B-A>E THEN 40
    90 X=(A+B)/2: D=(B-A)/2
    100 PRINT «X=»; X, «D=»; D,
    110 END
```

Programmadaǵi E – berilgen aniqliq, D-qátelik. A=1,3; B=1,5; E=0,0001. Programmadan tòmendegi nátiyjelerdi alamiz.

X=1.399462890625 D=0.00048828125

Araliqti teǹ ekige bòliw usilina Paskal tilinde dùzilgen programma teksti:

```
programoraliq2; usescrt;     {Araliqti teǹ ekige bòliw usili }
var a,b,eps,x,fa,fc,c:real;
function f(x:real):real;
begin
f:=      { f(x) funkciyasininǹ kòrinisi }
end;
begin clrscr;
write('a='); read(a);
write('b='); read(b);
write('eps='); read(eps);
fa:=f(a);
while abs(b-a)>eps do
begin
c:=(a+b)/2;
fc:=f(c);
if fa*fc<=0 then b:=c else begin a:=c; fa:=fc end;
end;
writeln('x=',c:10:4);
end.
```

3. Teǹlemelerdi xordalar hám urınbalar usılları menen sheshiw.

Xordalar (proportsional kesindiler) usılı. Meyli bizge

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

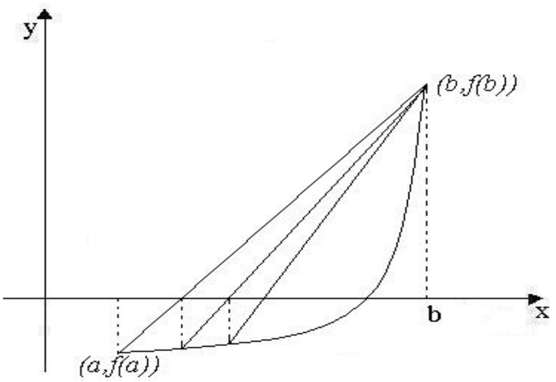
Teǹlemesi berilgen bolsın. Qandayda bir *[a,b] aralıqta*

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \qquad (2)$$

shárti orınlansin yaǵniy usı aralıqta koreni bar.
Meyli aniqliq ushin $f(a)$<0 hám $f(b)$>0 bolsin. (a,b) araliǵin teǹ ortadan bòliwdiǹ ornina oni $-f(a): f(b)$ qatnasta bòlemiz. Bul a toshkasin haqiyqiy korenge jaqinlastiradı $x_1=a+h_1$ dep jaziwimizǵa boladi. Bul jerde

$$h_1 = \frac{-f(a)}{-f(a)+f(b)} \cdot (b-a) = \frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a)$$

Buni ádebiyatlarda proporcional kesindiler yamasa xorda usili dep ataydi. Sebebi biz (a; b) kesindisin $-f(a): f(b)$ qatnasta bòldik. Buniǹ geometriyaliq maǵanasi (a; f(a)) hám (b; f(b)) toshkalarin tutastiriwshi xordaǵa jaqın. Endi biz buni xorda jùrgiziw usilinda qarayiq.
[a,b] araliqta $(a, f(a))$ ha'm $(b, f(b))$ noqatlardan xorda òtkizemiz. (*1-sizilma).*



1-sizilma

Abcissa kósheri menen kesisiw noqatin x_1 menen belgileymiz. Xordanıń teǹlemesin dùziw ushin eki noqattan òtiwshi tuwri siziq teǹlemesinen paydalanamiz

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_0}$$

$$x_0 = a \quad x_1 = b$$

$$y_0 = f(a) \quad y_1 = f(b)$$

$$\frac{x - b}{b - a} = \frac{y - f(b)}{f(b) - f(a)}$$

Xorda menen abcissa kósheriniǹ kesisiw noqatin tabiw ushin abcissa kósheriniǹ teǹlemesi *y=0 menen* (3) ti sistema qilip sheshemiz:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)\ .$$

$a = x_0$ dep belgilesek,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(b) - f(x_0)}(b - x_0)$$

boladi.

x_2 noqatti tabiw ushin jáne $(x_1, f(x_1))$ ha'm $(b, f(b))$ noqatlardan xorda òtkizemiz. Oǵiniǹ teǹlemesi menen *y*=0 den x_2 ti tapsaq,

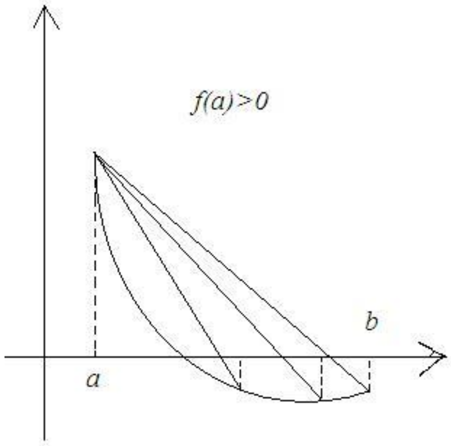
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}(b - x_1)$$

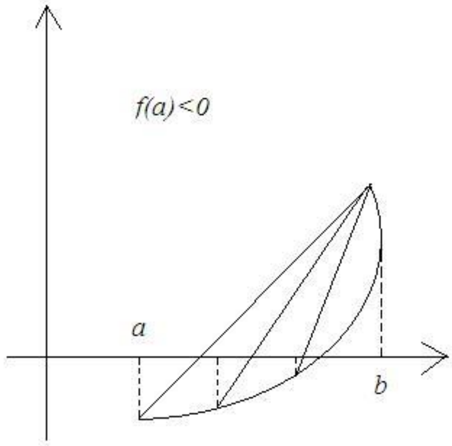
Boladi. hám taǵı basqa sol jarayandı dawam ettirip,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n) \qquad (3)$$

formulaǵa iye bolamiz. (4) formulaǵa algebraliq hám transendent teǹlemelerdi vatarlar usilinda sheshiw formulasi delinedi. $\left|x_{n+!} - x_n\right|$ shaması koreniniǹ aniqliǵI dep aytiladi. (4) process aldinnan birar berilgen ε ushin $\left|x_{n+!} - x_n\right| \le \varepsilon$ shárt orinlanǵansha dawam ettiriledi.

Bul jerde eki jaǵday boladi. $f(x)$ funkciyasiniǹ grafigi dòǹes yaǵniy a$\le x \le b$ araliǵinda $f''(\alpha) < 0$ boliwi mùmkin. Bul jaǵdayda $f(x) = 0$ teǹlemesin $-f(x) = 0$ teǹlemesi menen almastirip grafikti oyis bolatuǵin jaǵdayǵa keltiremiz.





Biz joqarida *f(a)<0* jaǵdayi ushin haqiyqiy korenge izbe-iz jaqinlasiw formulasin keltirip shiǵardiq. Bul jaǵdayda b tochkasi qozǵalmaydi. *f(a)>0* bolsa, onda a tochkasi qozǵalmaydi hám eǹ birinshi juwiqlasiw ushin α 0=b boladi hám juwiqlasiw formulasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n)-f(a)}(x_n - a) \qquad (4)$$

tùrinde jaziladi.

Mısal: $f(x) \equiv x^3 - 0{,}2x^2 - 0{,}2x - 1{,}2 = 0$
teǹlemesiniǹ oǹ korenin 0,002 dállikke shekem anıqlaǹ.

Sheshiliwi: Dáslep koreni bar aralıqtı ajıratıp alamız.

$$f(1) = -0.6 < 0 \;\; ha'm \;\; f(2) = 5.6 > 0$$

Bolǵanlıqtan izlegen koren ξ (1, 2) aralıqtan tabıladı. Interval ùlken bolǵanlıqtan onı dáslep dál ortadan bòlemiz.

$$f(1{,}5) = 1.425\,, \qquad ha'm \;\; 1 < \xi < 1.5$$

bolǵanlıqtan (3) hám (4) formulalardı izbe-iz qollanıp tòmendegilerge iye bolamız.

$$x_1 = 1 + \frac{0.6}{1.425 + 0.6}(1.5 - 1) = 1 + 0.15 = 1.15;$$

$$x_2 = 1.15 + \frac{0.173}{1.425 + 0.073}(1.5 - 1.15) = 1.15 + 0.040 = 1.190;$$

$$x_3 = 1.190 + \frac{0.036}{1.425 + 0.036}(1.5 - 1.190) = 1.190 + 0.08 = 1.198;$$

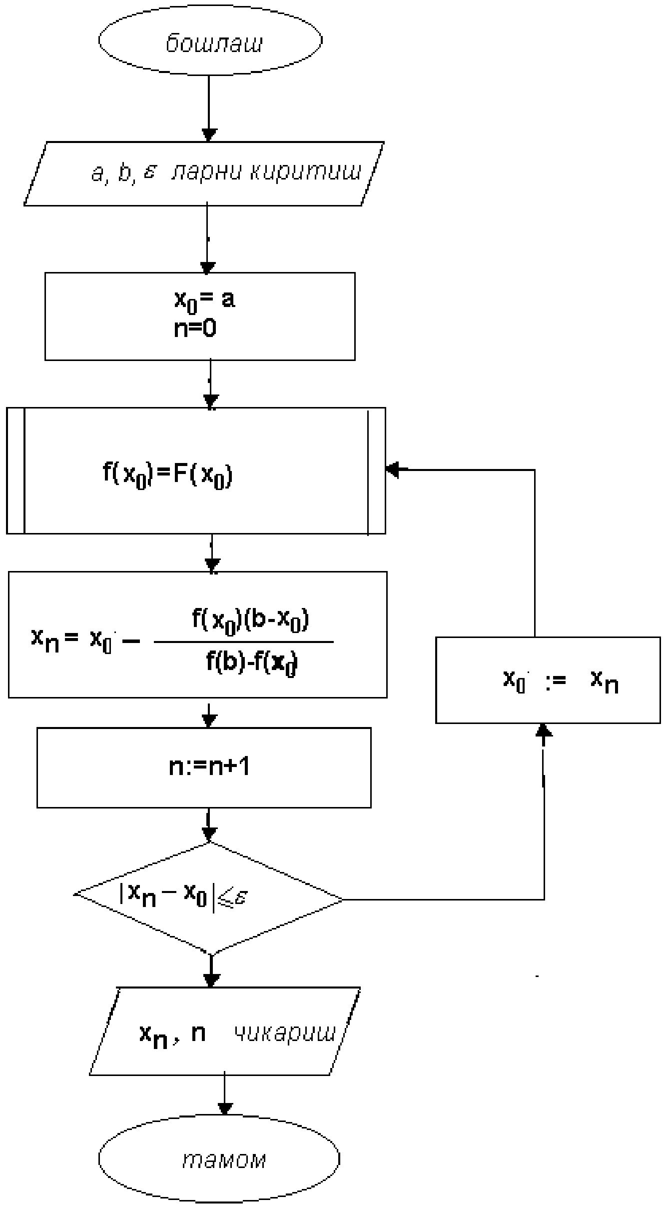
Sebebi $f'(x) = 3x^2 - 0.4x - 0.2 \quad ha'm \, x_3 < x < 1.5 \quad bolg'anda$

$f'(x) \geq 3 \cdot 1.198^2 - 0.4 \cdot 1.5 - 0.2 = 3 \cdot 1.43 - 0.8 = 3.49.$

Onda

$$0 < \xi - x_3 < \frac{0.0072}{3.49} \approx 0.002.$$

Solay etip, $\xi = 1{,}198 + 0{,}0020.$
Bul teǹlemede dál sheshim $\xi = 1{,}2.$
Bul usıl boyınsha algoritmniǹ blok sxeması tòmendegishe boladı.




```
10 REM "vatarlar usuli"
20 DEF fnf (x) = x - 1 / (x + 1) ^ 2
30 INPUT a, b, e
40 x0 = a: n=0
50 x1 = x0 - (fnf(x0) * (b - x0)) / (fnf(b) - fnf(x0))
60 n=n+1
70 IF ABS(x1 - x0) >= e THEN
x0 = x1: GOTO 50
80 PRINT "x="; x1, "n="; n
90 END
```

Misal. $tg(0{,}55x+0{,}1)-x^2=0$ teǹlemeniǹ [0,6;0,8] araliqtaǵı koreni $\varepsilon=0{,}005$ dállilkte esaplaǹ.

Sheshiw. $|x_2-x_1|=0{,}002<\varepsilon$ orinlanadi. $x_2=0{,}7517$; $x_1=0{,}7417$ bunnan $x=0{,}7517$. Vatarlar usilina Paskal tilinde dùzilgen programmaniǹ kòrinisi:

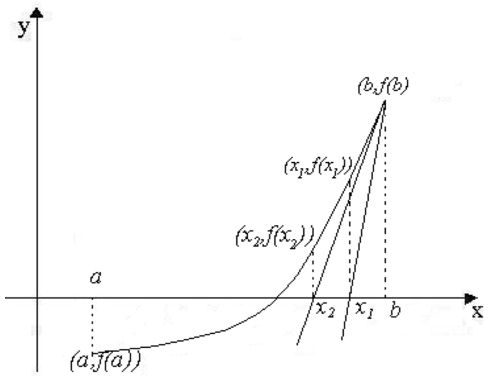
```
programvatar; usescrt;   {Vatarlar usili}
label1,2;
var a,b,eps,x:real;
        function f(x:real):real;
                begin
                        f:=     { f(x) funkciyasiniǹ kòrinisi }
                end;
begin clrscr;
        write('a='); read(a);
                write('b='); read(b);
write('eps='); read(eps);
       2: x:=b;
x:=b-f(b)*(b-a)/(f(b)-f(a));
if abs(x-b)<eps then goto 1 else begin b:=x; goto 2 end;
       1: writeln('x=',x:8:4);
end.
```

Urinbalar usili. Bizge $f(x)=0$

Teǹleme berilgen. Bunda *f(x) funkciya [a,b]* araliqta

$$f(a)\cdot f(b)<0$$

Shártti qanaatlandirsin. Funkciya grafiginiǹ $(b,f(b))$ noqatinan urinba òtkizemiz.(2-sizilma)



$(b,\ f(b))$ noqattan òtiwshi urinba teǹlemesin keltirip shiǵariw ushin funkciyasiniǹ (x_0, y_0) noqatina òtkizilgen urinba teǹlemesinen paydalanamiz.

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \qquad (5)$$

Bunda, $x_0 = b,\ \ y_0 = f(b),$ urinbani absissa oǵi menen kesisiw noqatin x_1 di tabiw ushin (5) teǹleme menen $y=0$ di sistema qilip sheshimiz. Sistemani sheship, absissa oǵi menen kesisiw noqatin tabamiz:

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

$b = x_0$ dep belgilesek, $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ boladi.

Soniǹday, $(x_1,\ f(x_1))$ noqattan urinba òtkizip, y=0 desek,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

....

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (6)$$

Formulaǵa iye bolamiz. Bul formulaǵa algebraliq hám transendent teǹlemelerdi urinbalar usilinda sheshiw formulasi delinedi. Process $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$ shártti qanaatlandirǵansha dawam ettiremiz.

Mısal.

f(x) $\equiv x^4-3x^2+75x-10000=0$ teǹlemesiniǹ teris korenin bes taǹba dállilikke shekem Niuton usılı menen esaplan`.

Sheshimi. Teǹlemeniǹ shep jaǵına x =0 , -10, -100 ,…, sanların qoysaq f (0) = -10000, f(-10) =-1050, f(-100) ≈+10^8 .Sonlıqtan izlegen koren

ξ-100 <ξ< -10 aralıǵında boladı. Tabılǵan intervaldı kishireytsek

*f(-1*1) = 3453, demek -11 <ξ< -10 boladı. Bul tabılǵan interbalda *f ‘(x)*> 0. *f*(-11) > 0 , Demek baslanǵısh juwıqlasiwdı x_0 = -11 dep alıwımızǵa boladi. Izbe-iz juwıqlasıw x_n (n = 1, 2, …) tòmendegi sxema boyınsha orınlanadı.

N	x_n	$F(x_n)$	$F'(x_n)$	$H_n = -\frac{f(xn)}{F'(xn)}$
0	-11	3453	-5183	0.7
1	-10.3	134.3	-4234	0.03
2	-10.27	37.8	-4196	0.009
3	-10.261	0.2	-	-

n=3 bolǵanda esaplawdı toqtatıp, belgilerdi tekseremiz f(x_n +0.0001) = f(-10.260). Bul jerde f(-10.260) < 0, -10.261 <ξ< -10.260 shártleri orınlanadı hám bul aralıqta qálegen san izlegen juwıqlasıwdı beredi.

Mısal. Nyuton usılı boyınsha tgx=x teǹlemesiniǹ eǹ kishi oǹ korenin 0,0001 dállilikte esaplaǹ.

Shshiliwi. y=tgx hám y=x funksiyalarınıǹ grafigin sızamız. Izlegen koren ξ $\pi < \xi < \frac{3\pi}{2}$. Aralıǵında degen juwmaqqa kelemiz.

Teǹlemeni *f(x) ≡sinx –xcosx = 0 tùrinde jazıp*

F’ (x) = xsinx; F”(x) = sinx+x cosx. Tuwındılarına iye bolamız.

f’(x) < 0 hám f”(x) <0 Bunnan $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ *bolǵanda* *f*($\frac{3\pi}{2}$) = *-1* bolǵanlıqtan baslanǵIsh juwıqlasıw $x_0 = \frac{3\pi}{2}$ dep qabıl etiwge boladı. Esaplaw processi tòmendegi sxema boyınsha ámelge asırıladı:

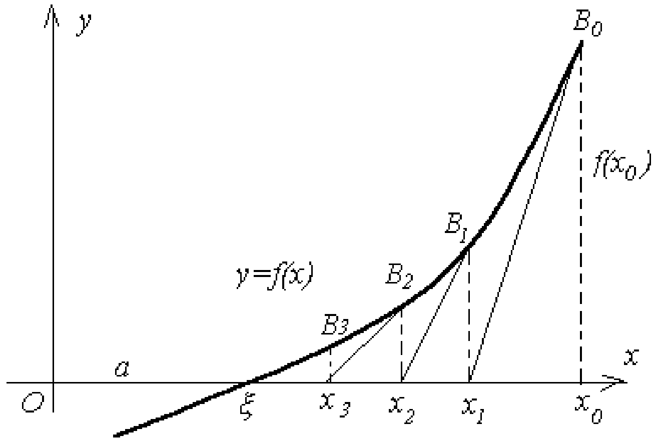
N	x_n	$F(x_n)$	$F'(x_n)$	$H_n = -\frac{f(xn)}{F'(xn)}$
0	$\frac{3\pi}{2}$= 4.71239(270°)	-1	- 4.712	- 0.212 $\approx -12°10'$
1	4.50004 (257°50′)	- 0.0291	- 4.399	- 0.0066 ($\approx -22'44''$
2	4.49343 (257°27′16″	- 0.00003	-	-

EEM lerde funkciyalariniǹ ayirim mánislerin jeterli dárejede aniqliqta esaplaw ushin jùdá kòp waqit esaplawǵa tuwri keledi.

Máselen: Bessel funkciyasiniǹ nolge jaqin mánislerinde (x=0). Bunday jaǵdaylarda (6) niǹ kòrinisi ornina

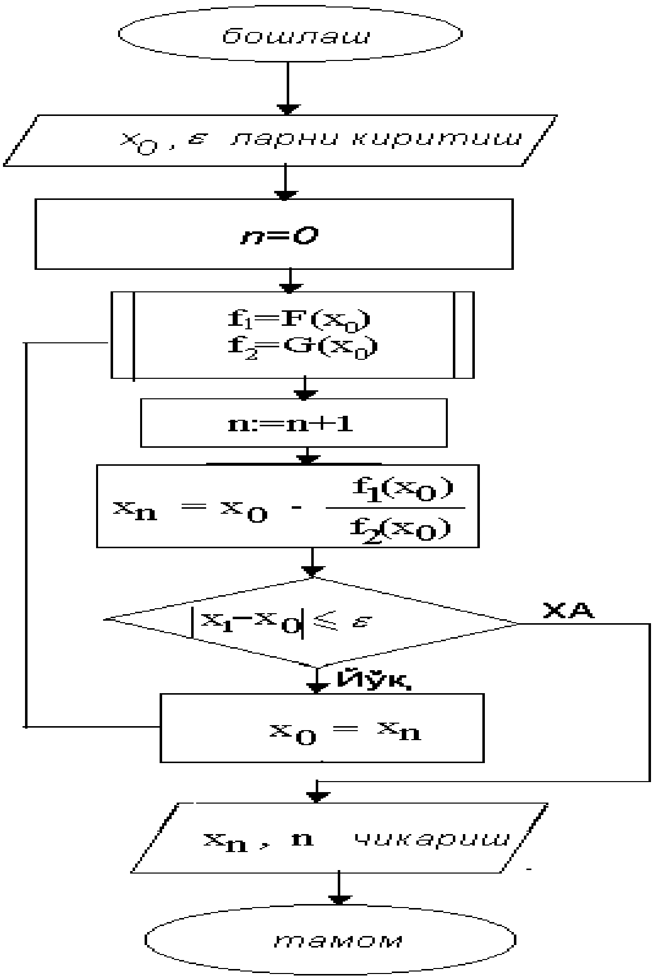
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \qquad (*)$$

Bul álbette urinbaniǹ teǹlemesi bolmaydi. Buniǹ grafigi tòmendegishe:



3-sizilma.

Urinba usilina Nyuton usili depte aytiladi. (*) hám Nyuton usiliniǹ bir kòrinisi. (6) formula menen teǹlemeni sheshiw algoritminiǹ blok sxemasi tòmendegishe boladi.



10 REM "Urinmalar usuli"
20 INPUT *b, e*
30 DEF fnf (*x*) = *x* - (*x* + 1) ^ 3
40 DEF fng (*x*) = 1-3 * (*x* + 1) ^ 2
50 *x*0 = *b*: *n* = 0
60 *xn* = *x*0 – fnf(*x*0) /fng(*x*0)
70 *n* = *n* + 1
80 IF ABS(*xn* - *x*0) >= *e* THEN
***x*0 = *xn*: GOTO 60**
90 PRINT "*x*="; *xn*, "*n*="; *n*
100 END

Misal. $tg(0,55x+0,1)-x^2=0$ teǹlemeniǹ [0,6;0,8] araliqtaǵi koreni ε=0,005 aniqliqta esaplaǹ.

Sheshiw. $|b_2-b_1|=0,002\le\varepsilon$; $x=b_2=0,7503$.

Urinbalar usilina Paskal tilinde dùzilgen programmaniǹ kòrinisi:

```
program urinma; uses crt;          {Urinbalar usili}
var x0,eps,x1,a:real;
            function f(x:real):real;
                  begin
f:=     { f(x)функциясинингкўриниши }
                  end;
            function fx(x:real):real;
                  begin
                  fx:=     { f'(x)funkciyasiniǹ kòrinisi}
                  end;
begin    clrscr;
write('x0='); read(x0);
write('eps='); read(eps);
x1:=x0;
repeat
a:=f(x1)/fx(x1);
x1:=x1-a;
until abs(a)<eps;
writeln('x=',x1:10:4);
end.
```

Teǹlemeler sistemasi ushin urinbalar usili.

Teǹlemelerdi sheshiwdiǹ joqarida kòrilgen usillari bir neshe belgisizler sistemalari ushin da islep shiǵiliwi mùmkin. Teǹlemeler sistemasi

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(7)}$$

Kòrinisinde bolsin. Oylap qarayiq, bul sistema sheshimleriniǹ baslanǵish jaqinlasiwlari x_0 ha'm y_0 belgisiz bolsin. Bul mánislerge tiyisli dúzetiw izleymiz. Dúzetiwdi sáykes ráwish te x ha'm y desek. Onda (7) sistemasiniǹ aniq sheshimi $x=x_0+h$, $y=y_0+k$ bola beredi. Sonday etip, tòmendegige iye bolamiz:

$$\begin{cases} f(x_0 + h, y_0 + k) = 0 \\ \varphi(x_0 + h, y_0 + k) = 0 \end{cases} \qquad (8).$$

f ha'm φ funkciyalardi h ha'm k niǹ dárejeleri boyinsha Teylor qatarina jazamiz.

$$\begin{cases} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h(\frac{\partial f}{\partial x})_0 + k(\frac{\partial f}{\partial y})_0 + 0_1(h,k) \\ \varphi_0(x_0 + h, y_0 + k) = \varphi(x_0, y_0) + h(\frac{\partial f}{\partial x})_0 + k(\frac{\partial f}{\partial y})_0 + 0_2(h,k) \end{cases} \qquad (9)$$

Bul jerde ( )$_0$ belgilew tuwindiniǹ ($x_0 y_0$) noqatlarda alinip atirǵan, 0_1 (h,k) ha'm 0_2 (h,k) belgilewler h ha'm k ǵa qaraǵanda joqari tártipli kishi muǵdarlar barliǵin kòrsetedi. (8) de h ha'm k ǵa qaraǵanda joqari tártipli kishi muǵdarlardi taslap jiberip, h ha'm k niǹ juwiq mánisin tabiw ushin usi (9) teǹlemeler sistemasina iye bolamiz:
Sistemani sheship, dúzetiwler ushin tòmendegilerdi tabamiz

$$h_1 = \frac{\begin{vmatrix} -f(x_0, y_0) & (\frac{\partial f}{\partial y})_0 \\ -\varphi(x_0, y_0) & (\frac{\partial \varphi}{\partial y})_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\frac{\partial f}{\partial x})_0 & (\frac{\partial f}{\partial y})_0 \\ (\frac{\partial \varphi}{\partial x})_0 & (\frac{\partial \varphi}{\partial y})_0 \end{vmatrix}} \qquad k = \frac{\begin{vmatrix} (\frac{\partial f}{\partial y})_0 & -f(x_0, y_0) \\ (\frac{\partial \varphi}{\partial y})_0 & -\varphi(x_0, y_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\frac{\partial f}{\partial x})_0 & (\frac{\partial f}{\partial y})_0 \\ (\frac{\partial \varphi}{\partial x})_0 & (\frac{\partial \varphi}{\partial y})_0 \end{vmatrix}} \qquad (11)$$

Sol sebepli x_0 ha'm y_0 ǵa qaraǵanda aniqraq $x_1 = x_0 + h_1$, $y_1 = y_0 + k_1$
mánislerin payda etemiz. x_1 hám y_1 lerdi joqaridaǵi usilinda jáne jaqinlastiriw mùmkin. Bul usil urinbalar usili delinedi.
Mısal.Tòmendegi sistemanıǹ haqıyqıy korenlerin tabıǹ.

F (x, y)$\equiv 2x^3 - y^2 - 1 = 0;$
G (x, y)$\equiv xy^3 - y - 4 = 0.$

Sheshiliwi. Grafikalıq usıl menen korenniǹ dáslepki juwıq mánisin tabamız: $x_0 = 1.2$; $y_0 = 1.7$.
Bulardı sistemaǵa qoysaq $f(1{,}2;\ 1.7) = -0.434$; $G(1.2; 1.7) = 0.1956$. mánislerine iye bolamız. Endi yakobiyandı esaplaymız:

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} 6x^2 & -2y \\ y^3 & 3xy^2 - 1 \end{vmatrix};$$

Bunnan

J = $\begin{vmatrix} 8.64 & -3.40 \\ 4.91 & 9.40 \end{vmatrix}$ =97.910.

(11)-formula boyınsha h_0– dı esaplaymız:

$$h_0 = -\frac{1}{97.910} = \begin{vmatrix} -0.434 & -3.40 \\ 0.1956 & 9.40 \end{vmatrix} = \frac{3.389}{97.910} = 0.0349;$$

Bunnan

X_1 = 1.2+0.0349 = 1.2349,

$$k_0 = -\frac{1}{97.910} = \begin{vmatrix} 6x^2 & -2y \\ y^3 & 3xy^2 - 1 \end{vmatrix} = -0.0390;$$

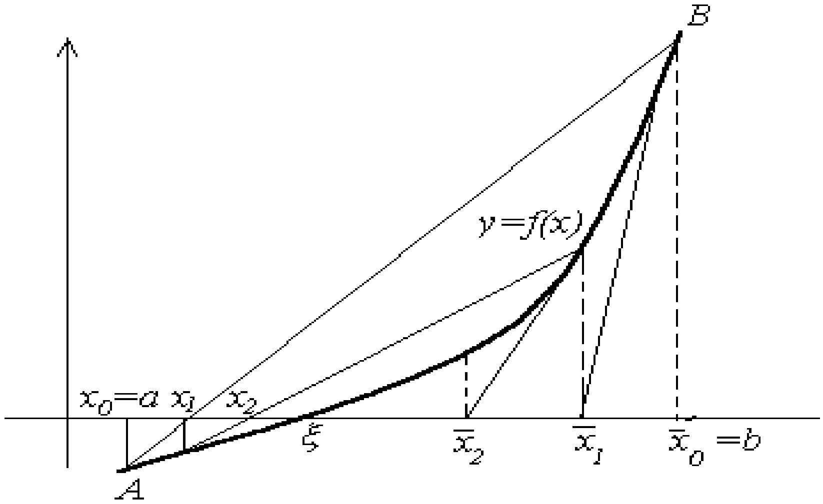
Y_1 = 1.7 – 0.0390 = 1.6610.

Alınǵan nátiyjeler menen usı prosessti qaytalap korenlerdi tabamız. X_2= 1.2343; y_2=1.6615 hám taǵı basqalar.

4. Teǹlemelerdi birlestirilgen usıl menen sheshiw.

Bizge $f(x) = 0$ (1)

Teǹleme berilgen. Bunda $f(a) \cdot f(b) < 0$ (2)



4 - sizilma

$(a, f(a))$ hám $(b, f(b))$ noqatlardan xorda òtkizemiz, xordanı absissa kósheri menen kesisiw noqatin x_1 menen belgileymiz (xorda usılı formulasınan paydalanıp). $(b, f(b))$ noqattan urınba òtkizemiz, urınbanı absissa ko'sheri menen kesisiw noqatin $\bar{x}_1$ menen belgileymiz (Urinbalar formulasinan paydalanip). $(x_1, f(x_1))$ hám $(\bar{x}_1, f(\bar{x}_1))$ xorda òtkizemiz, abscissa kosheri menen kesilisiw noqatin x_2 menen belgileymiz. $(\bar{x}_1, f(\bar{x}_1))$ noqattan urinba òtkizemiz. Oniǹ absissa menen kesisiw noqatin $\bar{x}_2$ menen belgileymiz, hám taǵi basqa sol processti dawam ettiremiz. (4-sizilma).

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f(b) - f(x_0)} \cdot (b - x_0); & x_0 = a \\ \bar{x}_1 = \bar{x}_0 - \dfrac{f(\bar{x}_0)}{f'(\bar{x}_0)}; & \bar{x}_0 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f(\overline{x}_1) - f(x_1)}(\overline{x}_1 - x_1) \\ \overline{x}_2 = \overline{x}_1 - \dfrac{f(\overline{x}_1)}{f'(\overline{x}_1)} \end{cases}$$

....

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(\overline{x}_n) - f(x_n)}(\overline{x}_n - x_n) \\ \overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n - \dfrac{f(\overline{x}_n)}{f'(\overline{x}_n)} \end{cases}$$

Bul processti $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$ yaki $|\overline{x}_{n+1} - \overline{x}_n| \le \varepsilon$ shártti orinlaǵansha dawam ettiremiz. Joqaridaǵı formula birlestirilgen usıldıǹ formulasi esaplanadı. Ámeliy jaqtan juwiq koren sipatinda $\xi = \dfrac{\overline{x}_{n+1} + x_{n+1}}{2}$ alinadi.

Mısal. Birlestirilgen usıl boyınsha

F(x) ≡ $x^5 - x - 0.2 = 0$,

teǹlemeniǹ korenin 0,0005 dálillikte esaplaǹ.

SHeshiliwi : f(1) < 0 hám f(1.1) >0 bolǵanlıqtan koren (1; 1.1) aralıqta boladı.

$$f'(x) = 5x^5 - 1 \quad ham \quad f''(x) = 20x^3.$$

$$\overline{x_0}$$

Alınǵan interbalda f'$(x) > 0$; $f''(x) > 0$, $tuwindinin'$ belgileri turaqli′

x_0 =1hám$\overline{x_0}$=1,1 bolǵanlıqtan

F(x_0) = f(1) = - 0.2; f($\overline{x_0}$)=f(1.1) = 0.3105 ; $f(\overline{x_0}) = f'(1.1) = 6.3205$,

Demek (1) hám $(1')$ formulalar boyınsha :

$$x_1 = 1 + \frac{0.1 \cdot 0.2}{0.51051} \approx 1.039; \overline{x_1} = 1.1 - \frac{0.31051}{6.3205} \approx 1.051.$$

$\overline{x_1} - x_1$=0.012, demek dállilik orınlanbaydı.

Keyingi juwıqlasıwdı esaplaymız.

$$x_2 = 1.039 + \frac{0.012 \cdot 0.0282}{0.0595} \approx 1.04469; \overline{x_2} = 1.051 - \frac{0.0313}{5.1005} \approx 1.04487.$$

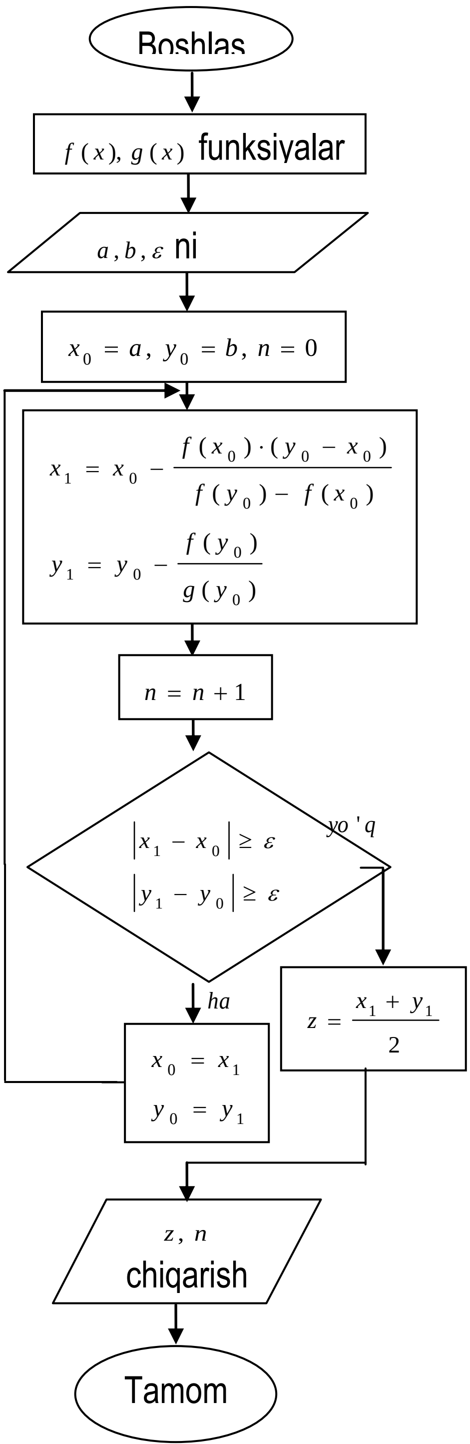
Bul jerde $\overline{x_2} - x_2 = 0.00018$, demek dálcxlilik orınlandı

$$\text{X} = \frac{1}{2}(1{,}04469 + 1{,}04487) = 1{,}04478 \approx 1{,}045$$

Absalyut qa'telik:

$$\frac{1}{2} \cdot 0{,}00018 + 0{,}00022 = 0{,}00031 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$$

Birlestirilgen usıldıǹ Beysik tilindegi programması hám algoritminiǹ blok-sxeması.




```
10 REM "Birlestirilgen usil"
20 DEF fnf (x) = x ^ 2 - 5 * x + 6
30 DEF fng (x) = 2 * x - 5
40 INPUT a, b, e
50 x0 = a: y0 = b: n=0
60 x1 = x0-fnf(x0)*(y0-x0)/(fnf(y0)-fnf(x0))
70 y1 = y0 - fnf(y0) / fng(y0)
80 n=n+1
90 IF ABS(x1-x0)>= e or ABS(y1 - y0) >= e
THEN x0 = x1: y0 = y1: GOTO 60
100 Z = (X1 + Y1) / 2
110 PRINT "Sheshim"; Z, "Iterasiya sani"; n
120 END
```

5. Teǹlemelerdi iteratsiya usılı menen sheshiw.

Ápiwayi iterasiya usılı. Biz bul temada ápiwayi iterasiya (yaki izbe-iz jaqınlasıw) usılı menen bir sanlı teǹleme mısalında tanısamız. Iterasiya usılın qollaw ushın *f(x)=0* teǹleme oǵan teǹ kùshli bolǵan tòmendegi

$$x = \varphi(x) \qquad (1)$$

Kanonik formaǵa kòriniske keltirilgen hám korenleri ajıratılǵan bolıwı kerek. Mısalı:

$$x + x\sin x + x^2 = 0$$

$$x = -\sin x \cdot x - x^2 = \varphi(x)$$

$$x = \sqrt{-(x + x\sin x)} = \varphi(x)$$

$$x = -\frac{x^2 - x}{\sin x} = \varphi(x)$$

(1) teǹlemeniǹ korenleri jatqan atiraptiǹ birar x_0 noqatiniǹ izlenip atirǵan korenniǹ nolinshi koreni dep alamiz. Náwbettegi jaqinlasiwdi tabiw ushin(1) teǹlemeniǹ oǹ tárepin x_0 ti qoyamiz hám payda bolǵan $\varphi(x_0)$ mánisin x_1 menen belgileymiz, yaǵniy

$$x_1 = \varphi(x_0) \qquad (2)$$

Tabilǵan x_1 sanin (1) teǹlemeniǹ oǹ tárepine qoyip, yaǵniy san $x_2 = \varphi(x_1)$ ti payda qilamiz. Bul jarayandi dawam ettirip, *n– jaqinlasiwi* $x_n$ti (*n-1*) jaqinlasiw járdeminde x_{n-1} ti tabamiz:

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \qquad (3)$$

Bul formula járdeminde tabilǵan sanlar izbe-izliginiǹ limiti, yaǵniy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \qquad (4)$$

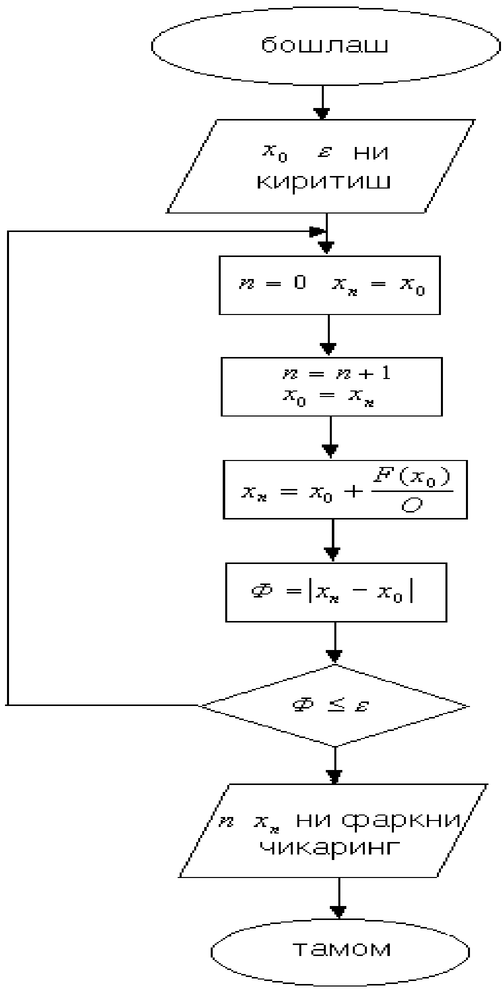
Hám $\varphi(x)$ funkciya ùzliksiz bolsa, (3) teǹliktiǹ hár eki tárepinde limitke òtip,

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = \varphi(\xi),$$

Yaǵniy

$$\xi = \varphi(\xi)$$

ge iye bolamiz. Bul teǹlikten kòrinedi, ξ berilgen teǹlemeniǹ kòreni eken. Demek, bul kòrendi (3) formula járdeminde qálegen aniqliq penen esaplaw mùmkin. (4) limit bar bolǵan halda iterasiya procesi jaqinlasiwshi delinedi. Biraq $\lim_{n\to\infty} x_n$ bar bolmasliǵi da mùmkin, bunday jaǵdayda ápiwayi iterasiya usili maqsetke muwapiq bolmaydi. Iterasiya usili menen sheshiminiǹ algoritm blok sxemasi tòmendegishe

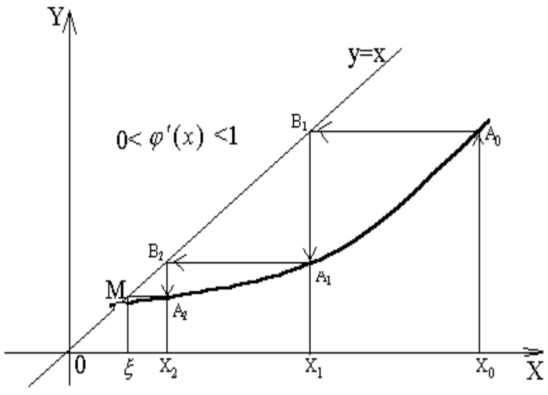


1-sızılma.

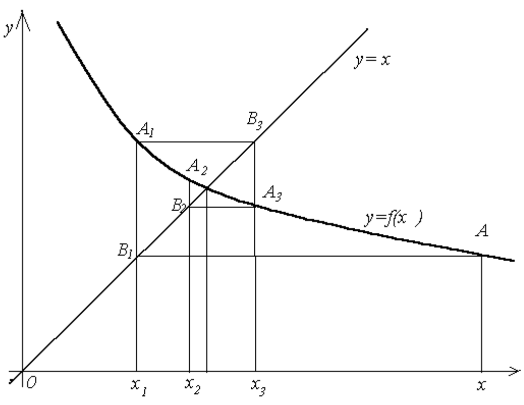
```
10 REM "Itaratsiya usuli"
20 DEF fnf (x) = 1 / (x + 1) ^ 2
30 INPUT a, e
40 x0 = a: n=0
50 x1 = fnf(x0)
60 n=n+1
70 IF ABS(x1 - x0) >= e THEN x0 = x1: GOTO 50
80 PRINT "x="; x1,  "n="; n
90 END
```

Iterasiya usılı ápiwayi geometriyaliq mániske iye. Buni tùsiniw ushin $y=\varphi(x)$ ha'm $y=x$ funkciyalariniǹ grafiklerin sizamiz. Bul grafikleriniǹ kesisken M noqatiniǹ absissasi (1) teǹlemeniǹ $x=\xi$ *korenleri*.

Oylap qarasaq, x_0 nolinshi jaqinlasiw bolsin, ol waqitta $A_0(x_0,\varphi(x_0))$ noqat $y=\varphi(x)$ iymek siziqta jatadi (6-sizilma). Bul noqattan gorizantal (Ox oǵina parallel) siziq òtkizemiz. Bul siziq $y=x$ *bissektrisasin* $B_1(\varphi(x_0), \varphi(x_0))$ noqatta kesedi. $\varphi(x_0)$ *ti* x_1 menen belgilep alsaq, B_1 noqattiǹ koordinatalari (x_1,x_1) kòriniske iye boladi. B_1 noqat arqali Oy oǵina parallel tuwri siziq òtkizsek, ol $y=\varphi(x)$ iymek siziqti $A_1(x_1,\varphi(x_1))$ noqatta kesedi. Bul jarayandi dawam ettirip, $y=x$ bissektrissada jatqan $B_2(x_2,x_2)$ bul jerde $x_2=\varphi(x_1)$,soǹ $y=\varphi(x)$ iymek siziq ùstinde $A_2(x_2,\varphi(x_2))$ *noqatqa iye bolamiz h.t.b. Eger iteraciya jarayani jaqinlassa, ol waqitta* $A_0,A_1,....,A_n,....$Noqatlar izlenip atirǵan $x_0, x_1, x_2,...$ absissalar ξ ǵa, yaǵniy (1) teǹlemeniǹ korenine jaqinlasadi. Sonday etip, iteraciya metodiniǹ geometriyaliq mánisi tòmendegiden ibarat: $y=\varphi(x)$ iymek siziq penen koordinatalar mùyeshi bissektrissasiniǹ kesisiw noqatina siniq siziq boylap háreket qilamiz, siniq siziqtiǹ ushlari náwbet penen iymek siziq hám bissektrisa ùstinde jatadi.Tárepleri ese náwbet penen gorizantal hám vertical jònelgen boladi. Eger iymek siziq hám bissektrisa 2- sizilmadaǵiday jaylasqan bolsa, ol waqitta siniq siziq teksheni esletedi. Eger iymek siziq hám bissektrisa 3-sizilmadaǵiday bolsa, onda siniq siziq cpiraldi esletedi.



2-sizilma.



3-sizilma.

Iteraciya jarayani uzaqlasiwi mùmkin. Buniǹ geometriyaliq mánisi sonnan ibarat, teksheniń biyiklikleri (yaki speraldiǹ buwinlari) barǵan sayin ùlkenlesedi. Soniǹ ushinda $A_0,A_1,....,A_n,....$ Noqatlar M noqatqa jaqinlaspaydi, bálkim uzaqlasadi. (2-3sizilmalar)

Sonday eken, iteraciya jarayani hár dayim jaqinlasa bermeydi eken, demek, bul jarayan jaqinlasiwi ushin qanday shártler orinlaniwi kerekligin aniqlaw ùlken áhmiyetke iye. Bul shártler usi teoremada kòrsetiledi.

Teorema1. Oylap qarayiq, $\varphi(x)$ funkciya hám dáslepki jaqinlasiw x_0 tòmendegi shártlerdi qanaatlandirsin:

1) $\varphi(x)$ funkciya

$$|x - x_0| \le \delta \qquad (5)$$

Araliqta aniqlanǵan bolip, bul araliq tanalinǵan iqtiyariy eki x ha'm y noqatlar ushin $\varphi(x)$ Липшиц shártin qanaatlandirsin:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le q|x - y|, \qquad (0 < q < 1) \qquad (6)$$

2) Tòmendegi teǹsizlikler orinlansin:

$$|x_0 - \varphi(x_0)| \le \eta, \quad \frac{\eta}{1-q} \le \delta \qquad (7)$$

Ol jaǵdayda (1) teǹleme (5) araliqta jalǵiz ξ korenge iye bolip, $\{x_n\}$ izbe-izlik bul sheshimge umtiladi hám umtiliw tezligin

$$|x_n - \xi| \le \frac{\eta}{1-q} \cdot q^n \qquad (8)$$

Teǹsizlik penen aniqlanadi.

Dállilleniwi: Aldin induksiya usilin qollap, iqtiyariy n ushin x_n ti qosiw mùmkinligin, x_n tiǹ (5) araliqta jatiwi hám

$$|x_{n+1} - x_n| \le \eta q^n \qquad (9)$$

Teǹsizliktiǹ orinlaniwin kòrsetemiz.

Eger n=0 bolsa, $x_1 = \varphi(x_0)$ bolǵani ushin (9) teǹsizlik (7) teǹsizlikten kelip shiǵadi.

Bunnan tisqari, $\eta < \frac{\eta}{1-q} \leq \delta$ bolǵani ushin $|x_1 - x_0| < \delta$ teṅsizlik orinlanip, x_1 (5) araliqta jatadi. Endi oylap qarayiq $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ler qoyilǵan bolip, olar (5) araliqta jatsin hám

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \eta q^k \quad (k = 0,1,\ldots, n-1)$$

Teṅsizlikler orinlansin. Indukciya shártine kòre x_n (5) de jatadi. $\varphi(x)$ (5) de aniqlanǵan, soniṅ ushin da $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ ti kòriw mùmkin. Teoremaniṅ 1 –shártten zárùr

$$|x_{n+1} - x_n| = |\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})| \leq q|x_n - x_{n-1}|$$

kelip shiǵadi. Biraq x_{n-1} ha'm x_n ushin indukciya shártine kòre $|x_n - x_{n-1}| \leq \eta q^{n-1}$ orinli, demek, $|x_{n+1} - x_n| \leq \eta \cdot q^n$. Bul bolsa x_{n+1} ha'm x_n ushin (9) teṅsizliktiṅ orinlaniwi kòrsetiledi. Nátiyjede,

$$|x_{n+1} - x_0| \leq |x_{n+1} - x_n| + |x_n - x_{n-1}| + \ldots + |x_1 - x_0| \leq \eta q^n + \eta q^{n-1} + \ldots + \eta = \eta \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} < \frac{\eta}{1-q} \leq \delta$$

Mùnasibetler x_{n+1} tiṅ (5) araliqta jatiwin kòrsetedi. Sonıń menen dálillew talap etilgen pikir tastıyqlandı.

Misal1. x-sinx=0.25 teṅlemesiniṅ kòrenin ùsh xanaǵa shekemgi dállikte iteratsiya usılı menen tabıṅ.

Sheshimi. Berilgen teṅlemeni x= sinx +0.25 tùrinde jazamiz. Grafikalıq usıl menen teṅlemeniṅ koreni (1.1 ; 1.3) aralıqta ekenligin tabamız , ol shama menen x_0 =1,2 ge teṅ. Keltirilgen teoremaǵa sùyenip , $\alpha = 1{,}1 \;\; ha'm \; \beta = 1{,}3$ dep alamız

a= $\alpha - (\beta - \alpha) = 0{,}9 \approx arc52°$
b=$\beta + (\beta - \alpha) = 1{,}5 \approx arc86°$
$$\varphi(x) = sinx + 0.25$$
$$\varphi'(x) = cosx,$$
$$|\varphi'(x)| < cos52° \approx 0.62 = q$$

Eger biz x_0 ushın (1,1;1,3) aralıqtı taṅlap alsaq onda teoremadaǵı barlıq shártler orınlanadı. Olay bolsa izbe-iz juwıqlasıwdı

$x_n = \sin x_{n-1} + 0.25$, (n=1, 2 , …) dep alıwımızǵa boladı.

1) Koren (0,9 ; 1.5) intervalda jatadı ,

2) $n \to \infty$ da $x_n \to \xi$ dı.

x_0=1.2 dep tańlap alamız hám máseleniń shártine baylanislı absaliut juwıqlasıwdı $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$,

dep qabil etip, x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ ushin izbe-iz juwıqlasıwdı shòlkemlestiremiz. Iteratsiyalıq prosess x_{n-1} hám x_n bir - birine berilgen dállikte jaqın bolmaǵansha dawam etedi.

$$\frac{1-q}{q}\varepsilon = 0.51 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \approx 0.0025.$$

x_1=sin1.2+0.25=0.932+0.25=1.182;

X_2=sin1.182+0.25=0.925+0.25=1.175

X_3=sin1.175+0.25=0.923+0.25=1.173

X_4=sin1.173+0.25=0.922+0.25=1.172

X_5=sin1.172+0.25=0.922+0.25=1.172.

Tòrtinshi hám besinshi juwıqlasiw bir birine berilgen dállikte jaqın, yaǵniy

$$|x_5 - \xi| \le \frac{0.62 \cdot 0.001}{1 - 0.62} = 0.0016$$

Bolǵanlıqtan besinshi iteraciyadaǵı koren máseleniń shártin qanaatlandıradı

E=0,0016+0,002<$\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$,

demek:

$$\xi = 1{,}17 \pm 0{,}005,$$

sheshimin qabıl etiwge boladı.

$$f(x) = 0 \qquad 18$$

teńlemesin

$$x = \varphi(x) \qquad 18'$$

Tùrinde hár qıylı formada jazıwǵa boladı. Ol $\varphi(x)$ funkciyasın tańlap alıwǵa baylanıslı. *18′* tı tańlap alǵanda $\varphi(x)$ funkciyası haqıyqıy korenge jaqın aralıqta bolsa process tez jıynaqlanadı, al uzaq aralıqta bolsa iteraciyalar sanı kòbeyedi. Sonıń ushın(*18′)* tı

$$|\varphi'(x)| \le q < 1. \qquad (19)$$

Shártine baylanıslı taǹlap alǵan maqul boladı. Qala berse q qansha kishi bolsa iteraciya sonsha tez juwmaqlanadı.
(18) shi teǹlemeni *18′* teǹlemesine keltiriwdiǹ jetkilikli dárejede ulıwma bolǵan bir usılın kòrseteyik. Onıǹ ushın (19) shı teǹsizliktiǹ orınlı bolıwın támiyinleydi.
Meyli izlenip atırǵan koren ξ [a, b] aralıǵında bolsın   hám
$0 < m_1 \le f'(x) \le M_1$ *(20)*
Teǹsizligi $a \le x \le b$ bolǵanda orinlansın,   dara jaǵdayda m_1 ushın $f'(x)$tıǹ [a, b] daǵı eǹ kishi mánisin, al M_1- ushın eǹ ùlken   mánisin alıwǵa boladı. Bular ekewide oǹ bolıwı kerek . (18) shi teǹlemeni oǵan ekvivalent bolǵan

$$x = x - \lambda f(x), \qquad (\lambda > 0)$$

Teǹlemesi menen almastıramız. Bunı
$\varphi(x) = x - \lambda f(x).$
Tùrinde jazıwǵa boladı   korenniǹ [a, b]   dògereginde
$0 \le \varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x) \le q < 1$ 21
teǹsizligi   orınlanatuǵın bolıwı kerek.   Bunnan (20)ǵa tiykarlanıp

$$0 \le 1 - \lambda M_1 \le 1 - \lambda m_1 \le q$$

teǹsizligine   iye bolamız. Demek

$$\lambda = \frac{1}{M_1}$$

dep saylap alıwımızǵa boladı
$q=1-\frac{m_1}{M_1} < 1.$

Solay etip (21)   teǹsizlik   orınlandı.

Mısal 2. $X^3 + X = 1000$ (22)   teǹlemesiniǹ eǹ ùlken oǹ korenin 10^{-4} dállilikte   tabıǹ.
Sheshimi. Korenniǹ baslanǵısh mánisi ushın x_0=10 dep alamız. $\xi < x_0$
Ekenligi málim (22) teǹlemeni tòmendegishe jazamız.

$X=1000-x^3$ (22′) Yamasa
$x=\frac{1000}{x^2} - \frac{1}{x},$ (22")
yamasa $x=\sqrt[3]{1000 - x}.$ (22‴)

Bul jerde eǹ qolaylı variyant (22‴), sebebi   (9,10) dı tiykarǵı interval etip alsaq hám $\varphi = \sqrt[3]{1000 - x}$ dep jazıp izbe iz juwıqlasıwshı x_n hám y_n ler ushın tòmendegilerge iye bolamız.

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1000 - x)^2}}$$

N	x_n	Y_n
0	10	990
1	9.96655	990.03345
2	9.96666	990.03334
3	9.96667	

$$|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{990^2}} \approx \frac{1}{300} = q$$

x_n ushın izbe iz juwıqlasıwdı tòmendegi formula boyınsha esaplaymız.

$Y_n=1000-x_n$;

$X_{n+1}=\sqrt[3]{y_n}$ (n=0, 1, 2,…).

Tabılǵan mánisler joqarıdaǵı tablicada berilgen.

$1 - q \approx 1$ bolǵanlıqtan $\xi = 9{,}9667$ sanı 10^{-4} dállilikti beredi.

JUWMAQLAW

Pitkeriw qánigelik jumısında alınǵan nátiyjeler boyınsha tómendegishe juwmaq shıǵarıwǵa boladı.

1.Pitkeriw qánigelik jumısı transendent teńlemelerdi juwıq sheshiw usıllarına arnalǵan. Sebebi bul usıllar orta arnawlı oqıw orinlarında da, joqarı oqıw orınlarında da úyretiledi.

2.Jumısta transendent teńlemelerdi grafikalıq sheshiw usılları úyretiledi, sebebi bul usıllar teńlemelerdiń geometriyalıq maǵanasın túsindiredi hám oqıwshılardıń pikirlewin keńeytedi.

3.Transendent teńlemelerdi sheshiwdiń, eń ápiwayı, araliqtı teń ekige bóliw usılı túsindiriledi, bul usıl teńlemelerdiń kóreni bar aralıǵın ajıratıw ushın da qollanıladı. Shegara noqatlarda teńlemeni dúziwshi funkciyanıń mánisleri hár qıylı belgige iye bolatuǵınlıǵı túsindiriledi.

4. Jumısta transendent teńlemelerdi sheshiwdiń xordalar usılı eki noqattan ótiwshi tuwrınıń teńlemesi menen berilgen teńlemeniń eki noqatta kesilisiwi, olardıń abscissa kósheri menen kesilisiw noqatlarınıń bir birine jaqınlasıwınıń geometriyalıq maǵanası súwretlenedi.

5. Transendent teńlemelerdi sheshiwdiń urınbalar usılı da xordalar usılına uqsas túsindiriledi, biraq oqıwshılar bul jagdayda iymeklikke júrgizilgen urınbalar ham olardıń haqıyqıy korenge qanday shárt boyınsha jaqınlasıwı haqqında tereń túsinik aladı.

6. Teńlemelerdi juwıq sheshiwdiń urınbalar ham xordalar usıllarınıń birgelikte qollanılıwı, bul jaǵdayda iteraciya processiniń (korenlerdiń bir birine) tez jaqinlasıwı oqıwshılar ushın júdá qızıqlı bolıp, joqarıda táriplengen usıllardı jáne bir márte tereńlestiredi.

7. Urinbalar usılınıń sızıqlı bolmagan teńlemeler sistemasın juwıq sheshiw ushın qollanılıwı oqıwshılar ushin kútilmegen jańalıq bolıp esaplanadı. Bul usıldı túsingen oqıwshı óziniń bilimin ádewir tereńlestirgen boladı.

8. Transendent teńlemelerdi sheshiw ushın iteraciya usılınıń qollanılıwı, teńlemelerdi hár qıylı formaǵa túrlendiriw usılları, juwıq korenniń haqıyqıy korenge jaqınlasıw shártleri oqıwshılardıń bilimin jáne de tereńlestiriwge imkan jaratadı.

9. Pitkeriw qánigelik jumısınıń materiyalların orta arnawlı oqiw orınlarında da, joqarı oqıw orınlarında da paydalanıwǵa boladı.

PAYDALANǴAN ÁDEBIYATLAR

1. А.А.Абдуқадиров вабошқалар Ҳисоблаш математикаси ва дастурлаш, Т. Уқитувчи 1996.

2. М.И. Исрайлов. Ҳисоблаш методлари. Т. Узбекистон нашрийоти 2003.

3. OtarovA. O., AllanazarovJ. Esaplaw usılları (sabaqlıq). No’kis: 2001j.

4. OtarovA. O., AllanazarovJ. Esaplawusılları, IIbo’lim (sabaqlıq). No’kis: Bilim. 2006j.

5.Г.И.Марчук. Методы вычислительной математики. М.Наука, 1977.

6.Бахвалов Н.С. Численные методы.М. Наука. 1973.

7. Сборник задач по методам вычислений. Под редакцей Монастирного П.И. 1983.

8. А.Абдухамидов. С.Худойназаров, Ҳисоблаш усулларидан машқлар ва лаборатория ишлари, Тошкент, Узбекистон, 1995 й.

9. Проблемы вычеслительной математики(под редакцией А.Н.Тиханова), Издательство МГУ, 1980.

10.Камилов М.М. Эргашев А.К.Математик моделлаштириш. ТАТУ, Тошкент 2007-176 б.