А. Азамов, Б. Хайдаров, Э. Сариков,
А. Кучкаров, У. Сагдиев

# ГЕОМЕТРИЯ 7

ТАШКЕНТ
“YANGIYO‘L POLIGRAPH SERVICE”
2013

Рецензенты:

*__А. Я. Норманов__*, доктор физико-математических наук, профессор, заведущий кафедрой геометрии и прикладной математики Национального Университета Узбекистана;

*__С. Х. Саидалиева__*, кандидат педагогических наук, доцент кафедры, математика и методика её преподования;

*__Б. К. Ешматов__*, кандидат физико-математических наук, директор специализированной школы №6 города Ташкента;

*__М.М. Шаниязова,__* преподаватель математики школы №300 города Ташкента

В седьмом классе начинается последовательное изучение раздела геометрии, называемого планиметрией – науки, изучающей свойства геометрических фигур на плоскости. Здесь вы познакомитесь с простыми геометрическими фигурами и их основными свойствами, геометрическими измерениями, треугольниками, их видами и свойствами, признаками равенства треугольников, параллельными прямыми и их свойствами, соотношениями между сторонами и углами треугольников, а также с задачами на построение.

Хотя учебник “Геометрия-7” построен на аксиоматической основе, теоретический материал изложен в нем свободным, простым и ясным языком. Ко всем темам и понятиям приведены различные примеры из повседневной жизни. Вопросы, приведенные в конце каждой темы, многочисленные задачи на доказательство, вычисления и построение побуждают вас творчески мыслить, углубить усвоенные знания и помогут их закреплению.

Учебник выполнен своеобразным дизайном и наглядностью учебного материала. Представленные в нем рисунки и чертежи помогут лучшему усвоению учебного материала.

Учебник “Геометрия -7” предназначен для учащихся 7 классов общеобразовательных школ. Им могут пользоваться читатели, самостоятельно изучающие и повторяющие геометрию.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

*Реконструированное Ахмадом Фергани устройство для измерения уровня воды в Ниле.*

# ГЛАВА I

# ПЛАНИМЕТРИЯ. НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ГЕОМЕТРИИ

**Изучив материал этой главы, вы приобретете следующие знания и практические навыки:**

**Знания:**

— Основные сведения по истории геометрии;

— первоначальные геометрические понятия: точка, прямая, плоскость, отрезок, луч, угол;

— основные свойства первоначальных геометрических понятий;

— определения геометрии и планиметрии;

— окружность, круг и определение их элементов;

— различие прямых, острых и тупых углов;

— определение смежных и вертикальных углов и их свойства;

— понимать суть таких понятий как определение, аксиома, теорема и доказательство;

— доказательство теорем методом от противного.

**Навыки:**

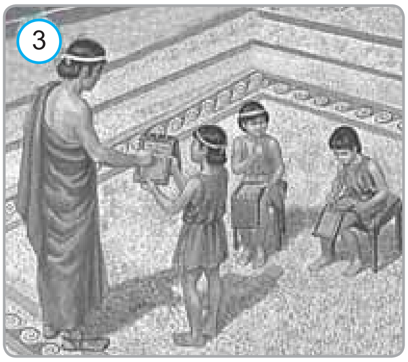
— Изображать на плоскости основные геометрические фигуры, уметь обозначать, узнавать их и читать в соответствии с обозначениями;

— изображать отрезки, сравнивать и измерять их длины;

— изображать углы, сравнивать и находить их градусные меры;

— строить геометрические фигуры и использовать при измерениях линейку, циркуль, транспортир и другие чертежные инструменты.

## 1 Геометрия наука и предмет. Задачи геометрии как науки



Первоначальные сведения по геометрии появились 4-5 тысячелетий тому назад в Древнем Египте. В этих краях ежегодные разливы Нила смывали посевы. Поэтому для того чтобы восстанавливать посевы и уточнять размеры налогов, необходимо было размечать поля и выполнять необходимые подсчеты *(рис. 1)*. Древнегреческие ученые переняли у египтян способы измерения и учета земель и назвали эти знания геометрией. **“*Геометрия*”** – слово, происходящее от греческих слов “гео” – земля, “метрео” – измерять.

Сведения, относящиеся к геометрии, появились также в Древнем Вавилоне. В частности, историки считают, что теорема Пифагора была открыта в Вавилоне. В VII–VI вв. до н. э. в Хорезме, в низовьях Амударьи, как и в Египте, выполнялись работы по учету посевных площадей.

В Древнем Египте геометрия была необходима при сооружении величественных пирамид, дворцов, при строительстве жилья. Грекам геометрия была нужна не только для строительства, но и в мореплавании *(рис. 2)*. Именно это побудило людей изучать различные фигуры и их свойства.

В Древней Греции одним из первых ученых был Фалес из Милета, который сформулировал и доказал ряд геометрических теорем.

К IV в. н.э. были накоплены многие геометрические понятия и их свойства. Греческий ученый Платон обнаружил закономерность в геометрии: логически рассуждая, можно находить новые результаты, исходя из уже изученных свойств, наличие которых было установлено.

Такие открытия, направленные на воспитание у учащихся способности мыслить, привели к тому, что геометрия превратилась в одну из основных наук, изучавшихся в школе. Платон даже велел повесить у входа в свою академию лозунг "Да не войдет сюда не знающий геометрию!" *(рис. 3)*.

Древнегреческий ученый Евклид, собрал и систематизировал известные к тому времени геометрические понятия и их свойства в книге, известной под названием *«Начала»*. На протяжении двух тысячелетий эта книга выполняла роль важнейшего учебника для школы и способствовала развитию точных наук. Изучение геометрии и сегодня во многом основано на идеях изложенных в этой книги.

Наши великие соотечественники Мухаммад ал-Хорезми, Ахмад Фергани, Абу Райхан Беруни, Абу Али ибн Сина способствовали дальнейшему прогрессу этой науки, сохраняя и развивая достижения ученых античного мира. На Востоке изучению геометрии придавалось большое значение. Эту мысль подтверждает и тот факт, что слово *muhandis* (инженер) происходит от того же корня, что и *handasa* (геометрия).

Изучаемые нами предметы имеют определенную форму. Возьмем, например, кирпич. Он имеет форму фигуры, известной вам из курса 5 класса – прямоугольного параллелепипеда (рис. 4). Он имеет 8 вершин – точек, 12 ребер – отрезков, 6 граней – прямоугольников.

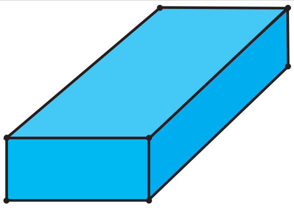
С понятиями: точка, прямая, отрезок, угол, квадрат, окружность, куб и шар вы познакомились в младших классах *(рис. 5–7)*.

*Геометрия* – это наука о геометрических фигурах и их свойствах.

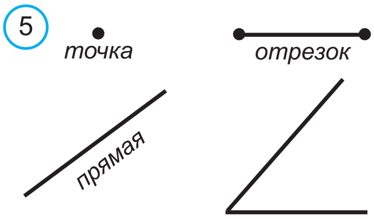
**Евклид**
**(III век до н. э.)**

*Древнегреческий ученый, внесший большой вклад в формирование геометрии как науки, известен своим сочинением "Начала".*

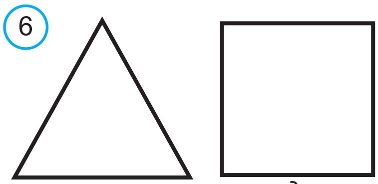
4



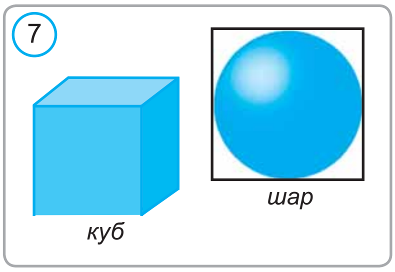
5




6



7




Фигуры, представленные на рисунке 7, – это геометрическая иллюстрация многих природных тел. Изучая тела с точки зрения геометрии, мы будем принимать во внимание только их фигуры.

Точку, отрезок, угол, треугольник и другие подобные им плоские фигуры вы будете чертить в своих тетрадях. Но пространственные фигуры такие как куб, пирамида, шар начертить в тетради не удастся. Но получить представление об их внешнем виде можно и в тетради.

8

*Планиметрия* – начальный раздел геометрии, который изучает свойства геометрических фигур на плоскости. Пространственные фигуры изучает раздел геометрии, называемый *стереометрия*.

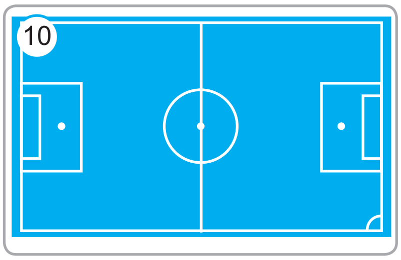
*Планиметрия* – раздел геометрии, который изучает свойства плоских геометрических фигур.

9

## Вопросы, задачи и задания

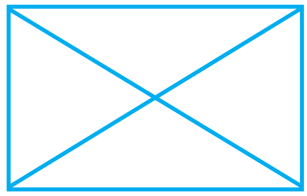
1. Где и как появились и сформировались первоначальные сведения о геометрии?
2. В чем смысл слова геометрия и почему она так была названа?
3. Кого из учёных, заложивших основы геометрии и внесших вклад в ее развитие, вы знаете?
4. Какие геометрические фигуры вы видите в изображениях исторических памятников Самарканда и сооружениях нынешнего времени на рисунках 8-9?
5. Что изучает наука геометрия?
6. Какая часть геометрии относится к планиметрии? К стереометрии?
7. Приведите примеры предметов, напоминающих геометрические фигуры, и нарисуйте их в тетрадях.

10

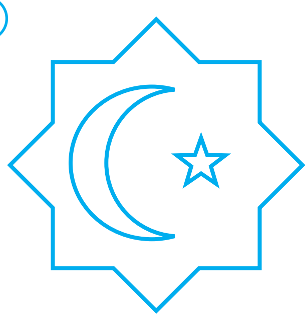


8. По каким свойствам фигуры, изображенные на рисунках 5–7, можно объединить в группы? В чем состоят эти свойства?
9. Свойства каких фигур, изображенных на рисунках 5-7, изучает планиметрия?
10. На рисунке 10 показана схема футбольного поля. Какие геометрические фигуры можно увидеть на этой схеме?
11. Сколько треугольников на рисунке 11?
12. Какие фигуры составляют символ, взятый с герба Республики Узбекистан *(рис. 12)*?

11



12

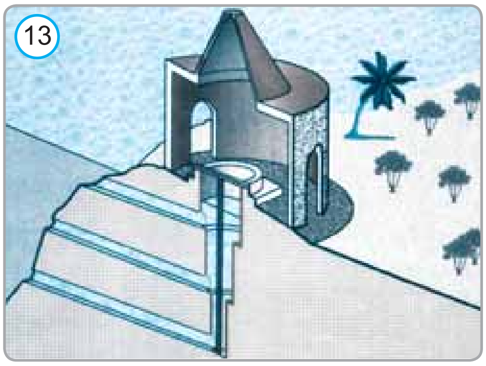


## Странички истории.

***Ферганский ученый, обуздавший Нил.***

*Согласно историческим свидетельствам, наш соотечественник Ахмад ал-Фергани установил в 861 г. на реке Нил, неподалеку от Каира, устройство под названием "Нилометр", предназначенное для измерения уровня воды в Ниле (рис. 13). По научно-техническим и архитектурным качествам это сооружение, которое считалось совершенным и воплощало в себе исключительно смелые геометрические решения, было, на протяжении долгого времени жизненно важным для крестьян, и сохранилось до наших дней. В своем "Трактате о конструировании астролябий" Фергани дал изящное доказательство важной для астрономии теоремы Птолемея. Имя Фергани носит кратер на Луне, а в Каире в его честь установлен памятник.*

13

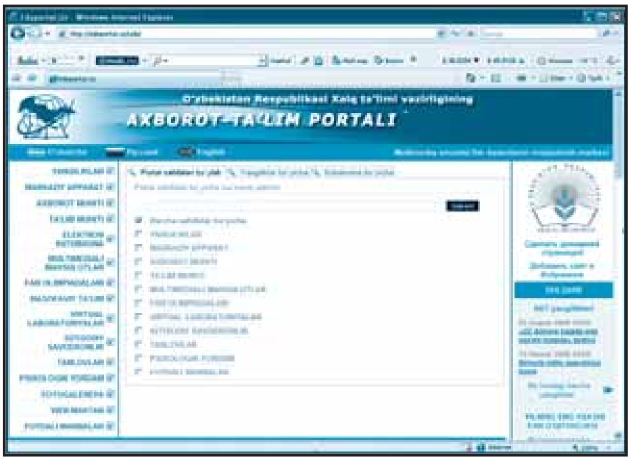


***Ахмад ал-Фергани***
*(797—875 гг.)*

*Великий астроном, математик и географ. В средние века был известен в Европе под именем Алфраганус.*

## Сокровищница математических задач

Известно, что в последнее время компьютерные информационные технологии стремительно развиваются и быстро проникают в образовательную сеть. Сегодня WWW – World-Wide-Web – всемирная «паутина», содержит так много источников информации, что воспользоваться этим богатством для каждого молодого человека крайне необходимо и полезно. Со специальных web-сайтов можно узнать на русском, узбекском, английском и других языках последние новости из мира математики, найти в компьютерных библиотеках много электронных учебников. Кроме того, с их помощью можно найти множество теоретических материалов, методических руководств, много задач, примеров с указаниями и решениями. В различных источниках даны сведения о проводимых математических конкурсах и олимпиадах, о занимательных задачах и их решении.




В частности, по адресу www.uzedu.uz, www.eduportal.uz Министерства народного образования можно разыскать интересующие вас сведения из области геометрии.

Ниже приведен список адресов источников информации:

www.uzedu.uz – информационный образовательный портал (узбекский, русский, английский);
www.pedagog.uz – сайт учреждений по повышению квалификации (узбекский, русский);
www.ixl.com/math/geometry – портал математического образования США (на английском языке);
www.school.edu.ru – общеобразовательный портал (русский);
www.allbest.ru – электронная библиотека ресурсов интернета (русский);
www.schulen-ans-netz.de – сайт немецкой «Интернет-школы»;
www.studienkreis.de – сайт немецких учебных кружков;
www.educasource.education.fr – французский образовательный сайт;
www.educmath.inrp.fr – цифровые ресурсы французского математического образованияі;
http://mat-game.narod.ru/ – математическая гимнастика, задачи и головоломки;
http://mathproblem.narod.ru/ – математические кружки, школы и олимпиады (русский);
http://mathtest.narod.ru/ – тесты по математике (русский);
http://www.sch57.msk.ru/collect/smogl.htm – материалы по истории математики (русский);
http://www.exponenta.ru – сайт математического образования (русский);
http://zadachi.mccme.ru – сайт геометрических задач (русский);
http://www.math-on-line.com – занимательные математические задачи (русский).

## 2 Простейшие геометрические фигуры: точка, прямая и плоскость

*Точка, прямая и плоскость* – основные понятия геометрии.

Если прикоснуться карандашом к бумаге, мелом к доске, оставив на ней след, или посмотреть на звездочку в небе *(рис.1)*, они покажутся нам такими маленькими, что их видимыми размерами можно будет пренебречь. *Точка* — это именно такой объект, размеры которого можно не учитывать. Евклид в своем геометрическом труде "Начала" определил точку как фигуру, не имеющую частей.

Рельсы, уложенные в степи *(рис.2)*, электрические провода, натянутые между столбами, луч лазера и подобные им объекты - это все примеры *прямых линий*. Луч света также распространяется по прямой. *Прямая линия* бесконечна. Изображая ее на бумаге или классной доске, мы чертим только ее часть. Однако, прямую линию необходимо представлять как бесконечно продолжающуюся в две стороны. (4-рисунок).

Паркетный пол, столешница, стена, потолок, тетрадный лист, поверхность воды в озере *(рис. 3)* дают представление о *плоскости*.

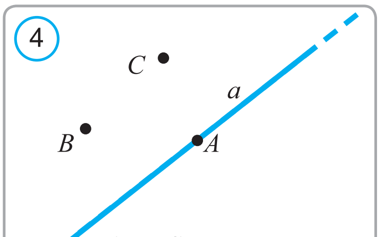
Точки обозначаются заглавными буквами латинского алфавита $A, B, C, D, \dots$ , прямые – строчными буквами $a, b, c, d, \dots$ , и запись читается *“точка $A$”*, *“прямая $a$”* *(рис. 4)*.

**A** *Какую бы прямую ни взять на плоскости, существуют точки, лежащие на прямой и точки, не лежащие на ней.*

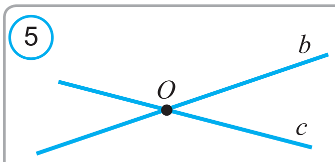
Например, на рисунке 4 точка $A$ лежит на прямой $a$, точки $B$ и $C$ не лежат на прямой $a$. Это записывают в виде

$$A \in a \text{ и } B \notin a,\ C \notin a$$

и читают “точка $A$ принадлежит прямой $a$” и “ точка $B$ не принадлежит прямой $a$”.




$A, B, C$ – точки
$a$ – прямая линия
$A \in a,\ B \notin a,\ C \notin a$



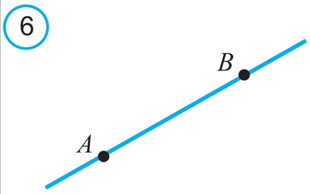

***Точка O* – точка пересечения прямых *b* и *c*.**

Если точка $O$ принадлежит и прямой $b$, и прямой $c$, то прямые $b$ и $c$ пересекаются в точке $O$ *(рис.5)*, и точка $O$ называется *точкой пересечения прямых* $b$ и $c$.

Изображенная на рисунке 6 прямая проходит через точки $A$ и $B$.

**A** *Через любые две различные точки проходит одна и только одна прямая.*

Из этого свойства следует, что если известны две различные точки прямой, то прямая будет определена однозначно. Поэтому прямую обычно обозначают с помощью лежащих на ней точек. На рисунке 6 изображена прямая $AB$.



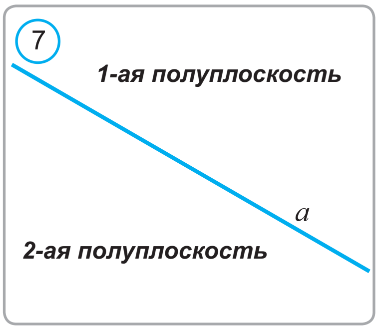

***AB* – прямая**

**A** *Каждая прямая разбивает плоскость на две части - две полуплоскости.*

Прямая считается принадлежащей обеим полуплоскостям, на которые она разбивает плоскость. На рисунке 7 изображены две полуплоскости, на которые плоскость разбивается прямой $a$.

***Примечание.*** В дальнейшем, говоря две прямые, две точки, …. , мы имеем в виду две различные прямые, точки, … .

***Задача 1.*** Прямые $a$ и $b$ пересекаются в точке $A$. Прямая $a$ проходит через точку $B$. Будет ли прямая $b$ проходить через точку $B$?




***Решение.*** Прямая $b$ проходит через точку $A$, но не может проходить через точку $B$. Иначе обе прямые $a$ и $b$ проходили бы и через точку $B$. Но это противоречит тому, что через две различные точки проходит единственная прямая. Поэтому точка $B$ не лежит на прямой $b$.

***Свойство.*** ***Две прямые пересекаются не более чем в одной точке.***

***Задача 2.*** Точка $C$ принадлежит прямой $AB$. Могут ли быть различными прямые $AB$ и $AC$?

***Решение.*** Каждая из прямых $AB$ и $AC$ проходит и через точку $A$, и через точку $C$. Известно, что через две различные точки проходит единственная прямая. Поэтому эти прямые совпадают, т. е. не будут различными.

## Вопросы, задачи и задания

**1.** Каковы основные геометрические фигуры?

**2.** Отметьте в своей тетради две точки. Проведите через них от руки, т. е. не пользуясь линейкой, прямую. Проверьте построение с помощью линейки. Повторите упражнение еще раз.

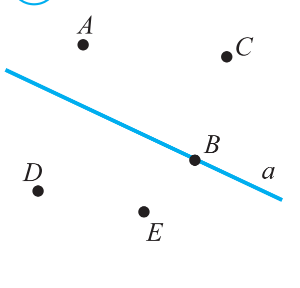
**3.** Какие геометрические фигуры обозначаются как $a$, $A$, $AB$?

**4.** Прочитайте и объясните следующие выражения: а) $A \in b$; б) $C \notin b$; в) $C \in AB$. Начертите соответствующие им чертежи.

**5.** Назовите по возможности больше свойств, характеризующих принадлежность точек, прямых, плоскостей и полуплоскостей и запишите их символически.

**6.** Точки $A$ и $B$ лежат на прямой $c$, точка $C$ не принадлежит прямой $c$. Что можно сказать о прямых $AB$ и $AC$?

8



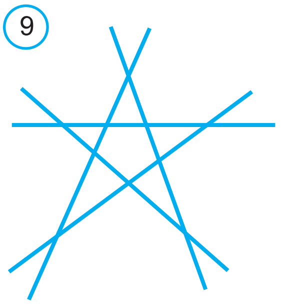

**7.** Сколько общих точек может быть у прямых $AB$ и $AK$?

**8.** Начертите на плоскости прямую $b$ и обозначьте на ней точку $A$. Начертите прямую $AB$, отличную от прямой $b$. Будет ли точка $B$ лежать на прямой $b$?

**9.** Сколько прямых можно провести через а) одну; б) две; в) три различные точки? Ответ обоснуйте.

**10.** Сколько прямых изображено на рисунке 9? Сколько точек пересечения имеет каждая пара?

9

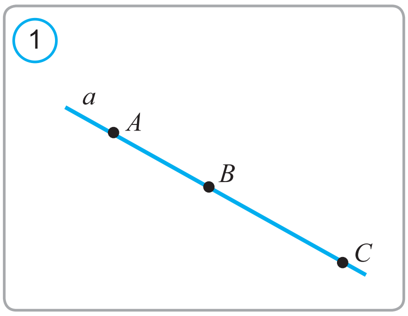


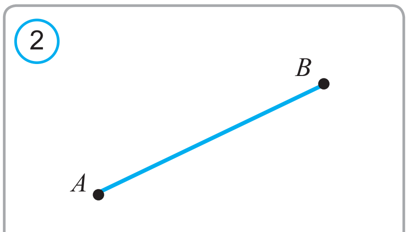
**11.** Сколько прямых можно провести через а) три точки; б) четыре точки, соединяя их попарно, если никакие три из них не лежат на одной прямой?

**12.** Обозначены точки пересечения каждых двух из четырех прямых. Каково наибольшее число этих точек? А если рассмотреть пять прямых?

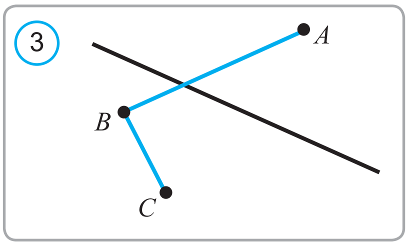
**13.** Расположите на плоскости пять точек так, чтобы число прямых, соединяющих каждую пару точек, было равно пяти.

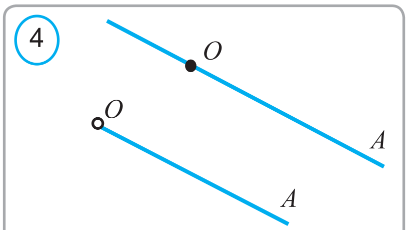
## 3 Отрезок и луч




***Отрезок AB***
***A, B – концы отрезка***




***OA – луч***
***O – начало луча***

**A** *Из трех данных точек, лежащих на одной прямой, одна и только одна лежит между двумя другими.*

Если на прямой $a$ взять три точки $A$, $B$, $C$ *(рис. 1)*, то только одна из них – точка $B$ лежит между двумя остальными, т. е. точками $A$ и $C$. Точки $A$ и $B$ лежат по одну сторону от точки $C$, точки $B$ и $C$ лежат по одну сторону от точки $A$.

✔ *Отрезком* называется часть прямой, состоящая из двух ее точек и всех точек, лежащих между ними.

На рисунке 2 изображен отрезок. Точки $A$ и $B$ – *концы отрезка* или его *граничные точки*. Точки, лежащие между ними, называются *внутренними точками* отрезка. Отрезок можно обозначать, указывая его концы: “*отрезок AB* ”, “*отрезок BA*”. Если концы отрезка лежат в одной полуплоскости относительно некоторой прямой, то отрезок не пересекает эту прямую, в противном случае пересекает ее *(рис. 3)*.

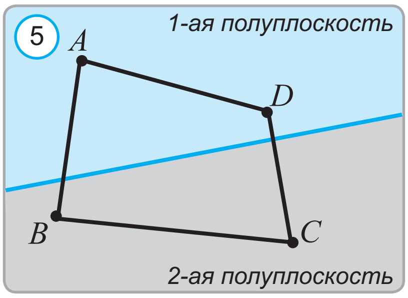
✔ *Лучом* называется часть прямой, состоящая из данной точки и точек лежащих по одну сторону от данной точки этой прямой.

Точка $O$ некоторой прямой $a$, разбивает прямую на два *(взаимно дополняющих друг друга)* луча с общим *началом* $O$. Выбирая на прямой некоторую точку $A$, луч, на котором лежит эта точка, обозначают “*луч OA*” (рис. 4). На первом месте указывают *начало* луча. Так же говорят: *“луч OA исходит из точки O”*.

Луч можно рассматривать как геометрическую модель луча света. Отсюда и происходит термин "луч".

**Задача.** Дана некоторая прямая и точки $A$, $B$, $C$, $D$, не лежащие на ней. Отрезки $AB$ и $CD$ пересекают данную прямую, отрезок $BC$ не пересекает ее. Пересекает ли прямую отрезок $AD$ *(рис. 5)*?

5




**Решение.** Известно, что прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Пусть точка $A$ принадлежит первой из них. Отрезок $AB$ пересекает прямую. Значит, точка $B$ лежит во второй полуплоскости. Отрезок $BC$ не пересекается с прямой. Значит, точка $C$ также лежит во второй полуплоскости. Отрезок $CD$ пересекает прямую. Поэтому точка $D$ лежит в первой полуплоскости, т. е. в одной полуплоскости с точкой $A$. В таком случае отрезок $AD$ не пересекает прямую.

**Ответ**: отрезок $AD$ не пересекает прямую.

## Вопросы, задачи и задания

**1.** Укажите между какими точками лежит точка $B$ на рисунке 6.*а*? Какие точки лежат по одну сторону от точки $C$?

**2.** Дайте определение отрезка и луча. Как они обозначаются?

**3.** На прямой даны точки $C$ и $D$. Совпадают ли отрезки $CD$ и $DC$? А лучи $CD$ и $DC$?

**4.** В чем различие между отрезком, лучом и прямой линией?

**5.** На сколько частей делят прямую а) одна; б) две; в) три; г) 10; д) *n* точек?

**6.** Сколько отрезков на рисунке 6.б?

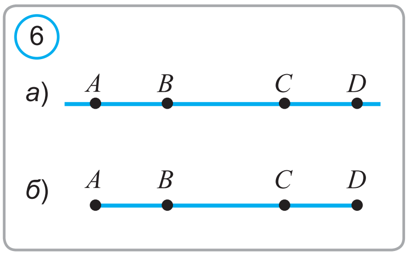
**7.** Сколько лучей на рисунке 7? Какие из них лучи, дополняющие друг друга?

**8.** Сколько лучей задают 2 точки, лежащие на одной прямой? А 3 точки?

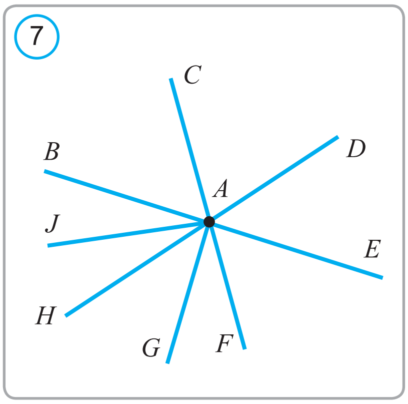
**9.** На сколько частей разбивают плоскость две прямые, принадлежащие ей?

**10.** Дана прямая и не принадлежащие ей точки $A$, $B$, $C$. Отрезок $AB$ пересекает данную прямую, а отрезок $AC$ не пересекает ее. Пересекает ли эту прямую отрезок $BC$?

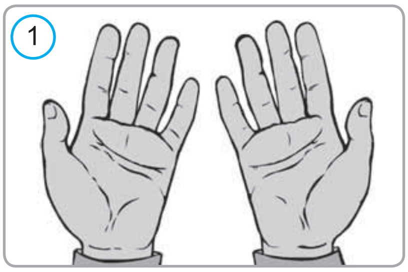
6

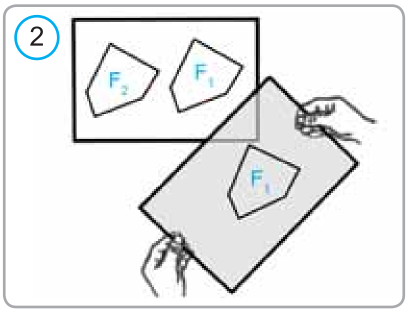


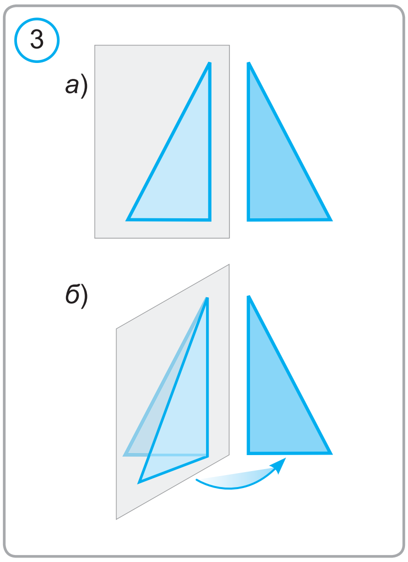

7



## 4 Сравнение отрезков






### *Активизирующее упражнение*

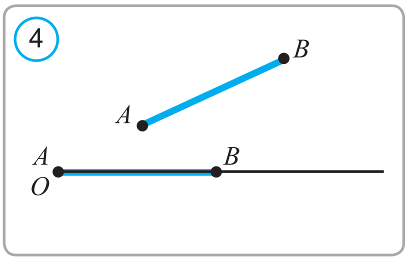
1. Приведите примеры предметов из окружающей среды, имеющих одинаковую фигуру и одинаковые размеры.
2. Как можно проверить на практике, что два тетрадных листа одинаковы?
3. На рисунке 1 изображены ладони правой и левой рук. Можно ли совместить одну из этих фигур с другой? Как это сделать? Продемонстрируйте это на своих руках.

Две фигуры называются *равными*, если их можно совместить наложением.

С понятием наложения одной фигуры на другую вы познакомились на основе активизирующих упражнений. Можно следующим образом представить себе, как это сделать на практике. Для того чтобы совместить одну фигуру с другой, скопируем вначале на прозрачную плёнку эскиз одной из фигур. Затем станем передвигать его так чтобы эскиз первой фигуры в точности совпал с эскизом второй *(рис. 2)*. Если это можно будет сделать, то эти фигуры окажутся равными.

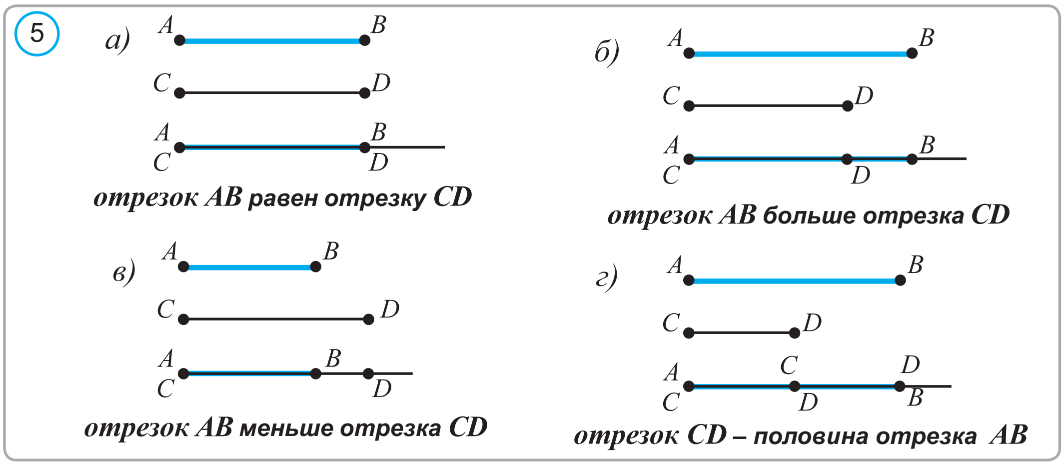
Иногда, для того чтобы совместить одну фигуру с другой, приходится предварительно перевернуть прозрачную плёнку с изображением фигуры. На рисунке 3 рассмотрен такой вариант.

Пусть даны луч с началом $O$ и произвольный отрезок $AB$. Ясно, что один из концов отрезка можно совместить с точкой $O$, а его второй конец с концом  отрезка, лежащего на луче и равного отрезку $AB$ *(рис.4)*. Такой отрезок будет единственным, и это построение называется *откладыванием данного отрезка на луче* от его начала.

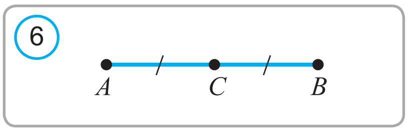



**A** *На произвольном луче, начиная от его начала, можно отложить единственный отрезок, равный данному.*

Для того чтобы сравнить два отрезка, надо отложить каждый из них на одном и том же луче от его начала и, в зависимости от того, какому из случаев, изображенных на рисунке 5, это соответствует, сделать нужное заключение *(рис. 5)*.




Середина отрезка – это точка, которая делит его на две равные части.




На рисунке 6 отмечена точка $C$ – середина отрезка $AB$. На чертеже равные отрезки отмечаются равным числом черточек.

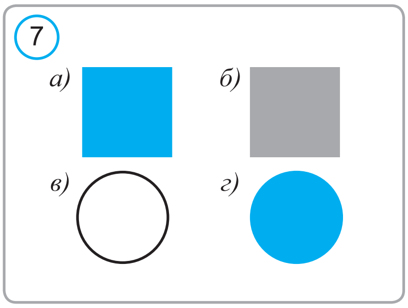
## ? *Вопросы, задачи и задания*

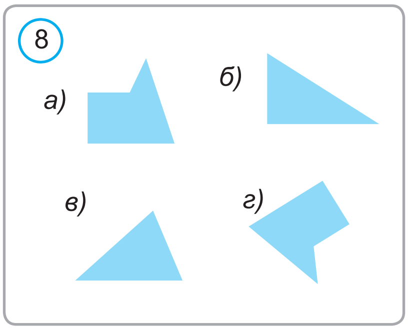
**1.** Какие фигуры называются равными?

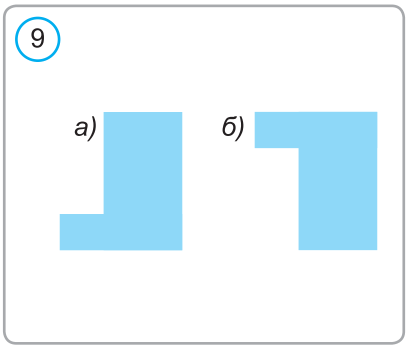
**2.** Какие из фигур на рисунке 7 равны?

**3.** Какие из буквенных обозначений равны как геометрические фигуры?

**a, b, g, d, i, y, n, o, p, u, q**

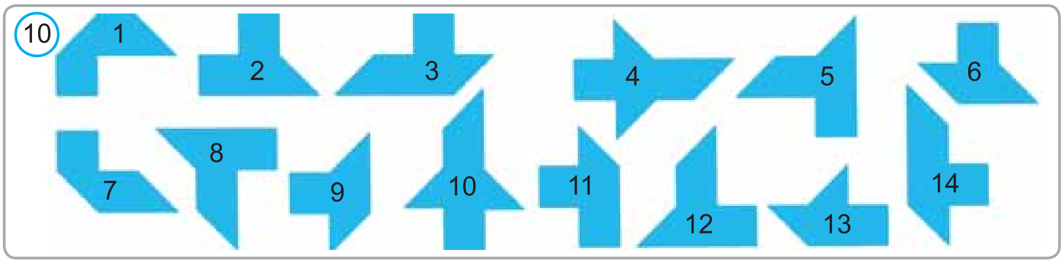




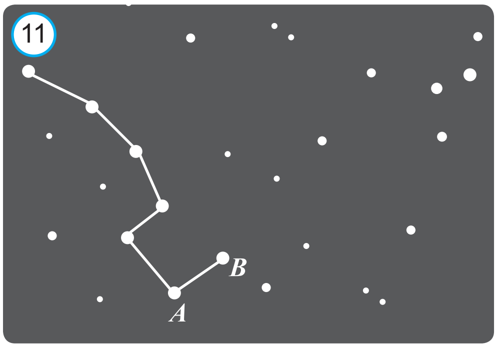

4. Какие из фигур на рисунке 8 равны?
5. Какие из изображенных ниже цифр равны как геометрические фигуры?

6. Скопируйте, без искажения размеров, фигуру, изображенную на рисунке 9.$a$, на бумагу и вырежьте. Накладывая ее на геометрическую фигуру рисунка 9.$б$, определите, будут ли они равны.
7. На рисунке 10 выберите равные между собой фигуры.
8. Какие отрезки будут равны?
9. Как сравниваются отрезки?
10. Что такое середина отрезка?
11. На прямой отмечены точки $A, B, C, D$. Сколько имеется отрезков с концами в этих точках? Выпишите их.
12. В тетради нарисуйте отрезок и отметьте на глаз его середину. Результат проверьте линейкой. Повторите упражнение.




### *Практическая работа.*

На рисунке 11 мы видим созвездие “Большая медведица”. Если соединить изображения звезд, получится фигура, похожая на “ковш”. Соединяя последние две звезды “ковша” отрезком $AB$ и откладывая его 5 раз на луче $AB$, попадем в изображение Полярной звезды. Найдите его на рисунке.



## Геометрические головоломки

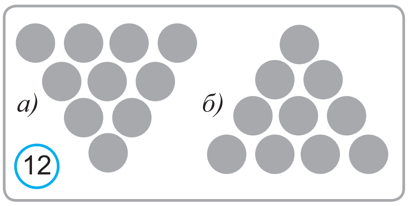
**1.** 10 одинаковых монет разложены пирамидкой как на рисунке 12.$a$. Поменяв местами только 3 монеты, расположите их так, как показано на рисунке 12.$б$.

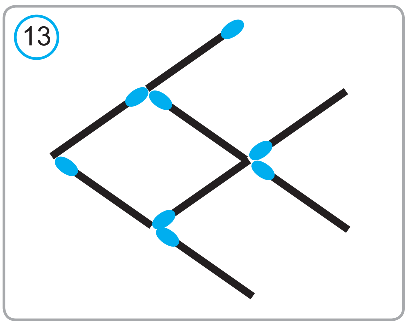
**2.** Поменяв местами 3 палочки, поверните "рыбу" на рисунке 13 в противоположную сторону.

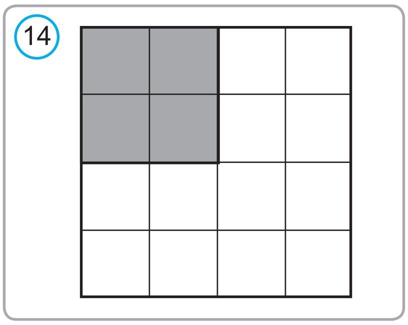
**3.** У дедушки был сад в форме квадрата. Часть сада, показанную на риунке 14, он оставил себе. Оставшуюся территорию он разбил на участки одинаковой конфигурации и подарил четырем сыновьям. Как ему удалось осуществить эту разбивку сада?

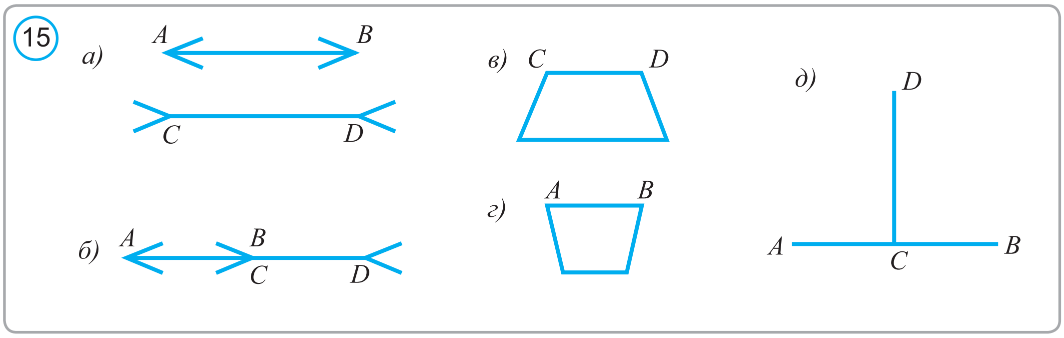
**4.** Отрезки $AB$ и $CD$, изображенные на рисунке 15, сравните "на глаз", затем проверьте с помощью кальки свои выводы.

*Вывод:* В геометрии нужна осторожность: зрение может обмануть!

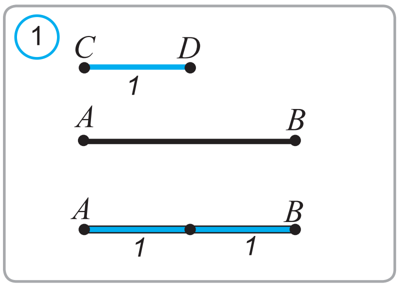


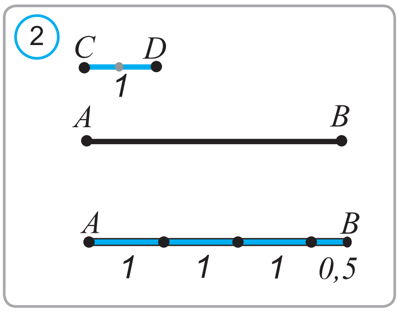



## 5 Длина отрезка и ее свойства. Измерение отрезков




Сравнивать длины отрезков, откладывая их на луче, не слишком удобно. Узнать, какой из отрезков длиннее или короче (т. е. больше или меньше) можно, сравнивая их длины.

Выберем какой-нибудь отрезок за *единичный* и примем его длину за единицу. Длины оставшихся отрезков определим по отношению к единичному отрезку. *Длина отрезка* – положительное число, которое показывает, сколько раз можно отложить на нем единичный отрезок или его части. Ясно,что если выбрать отрезок $CD$ в качестве единичного *(рис. 1)*, т. е. принять его длину за 1, то длина отрезка $AB$ будет равна 2. Действительно, отрезок $CD$ откладывается на отрезке $AB$ два раза.

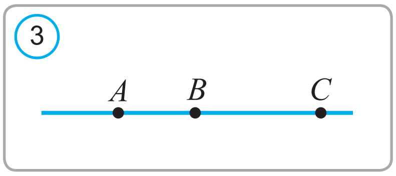



Если отрезок $CD$ на рисунке 2 принять за единичный, то длина отрезка $AB$ будет равна 3,5. На самом деле, на отрезке $AB$ отрезок $CD$ откладывается три с половиной раза.

**A** *Каждый отрезок имеет определенную длину, являющуюся положительным числом.*

### Активизирующее упражнение

Измерьте длины отрезков $AB$, $BC$ и $AC$, изображенных на рисунке 3, с помощью линейки. Можно ли установить, какая формула связывает длины этих отрезков.




На прямой отмечены точки $A$, $B$ и $C$. Если точка В лежит между точками $A$ и $C$, то длина отрезка $AC$ есть сумма длин отрезков $AB$ и $BC$, т.е. имеет место равенство $AC = AB + BC$ *(рис. 3)*. Мы примем без доказательства это утверждение, касающееся длин отрезков:

**A** *Если на прямой точка В лежит между точками $A$ и $C$, то длина отрезка $AC$ равна сумме длин отрезков $AB$ и $BC$:*

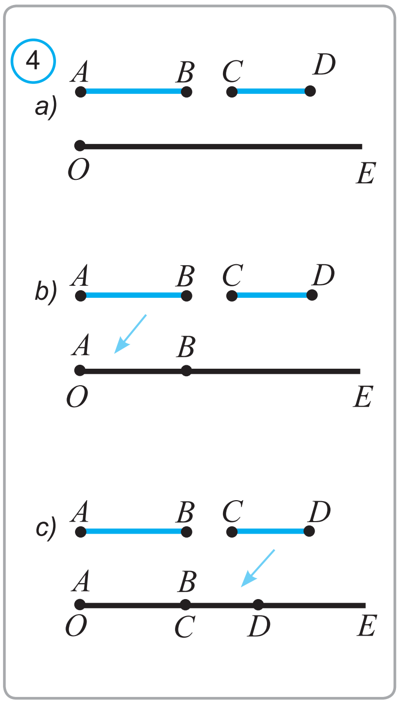
$$\boldsymbol{AC = AB + BC.}$$

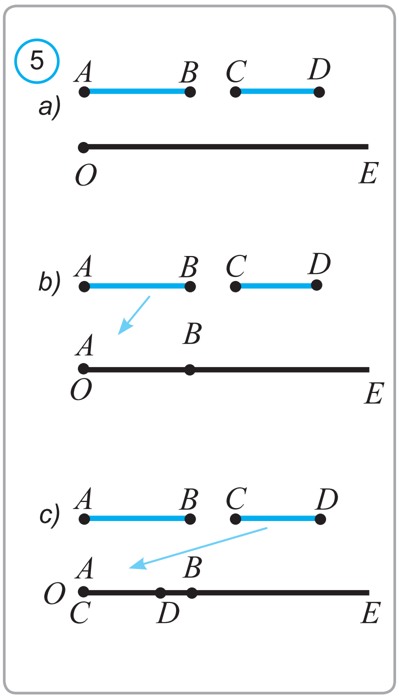
Приведенное выше утверждение позволяет решать задачи по сложению и вычитанию отрезков. Представим, что даны $OE$, отрезки $AB$ и $CD$ (рисунок 4.a). Сначала накладываем на луч $OE$ отрезок $AB$ (рисунок 4.b). Затем накладываем на луч $BD$ отрезок $CD$ (рисунок 4.c).

Получившийся в результате отрезок $AD$ называется суммой отрезков $AB$ и $CD$, для которых справедливым является равенство $AD = AB + CD$.

Точно также можно выполнить вычитание отрезков.

Представим, что даны луч $OE$, отрезки $AB$ и $CD$, где $AB > CD$ (рисунок 5.a). Сначала накладываем на луч $OE$ отрезок $AB$ (рисунок 5.b). Затем вновь накладываем на луч $OE$ отрезок $CD$ (рисунок 5.c). Получившийся отрезок DB называется разностью отрезков $AB$ и $CB$, здесь справедливо равенство $DB = AB - CD$.




Говорят также, что длина отрезка $AB$ равна *расстоянию* между точками $A$ и $B$. Очевидно, что отрезки, имеющие равные длины, равны.

С древнейших времен люди использовали для измерения различные единицы длины. Например, в ходу были такие единицы, как пядь, локоть, маховая сажень, верста. Использование различных единиц измерения создавало много трудностей. Поэтому, начиная с XVIII века, в мире получила распространение международная единица длины – метр.

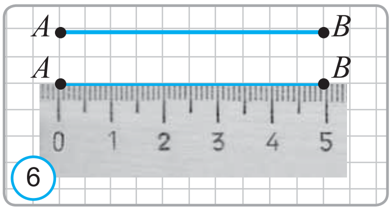
За эталон 1 метра была принята одна сорокамиллионная часть Парижского меридиана.

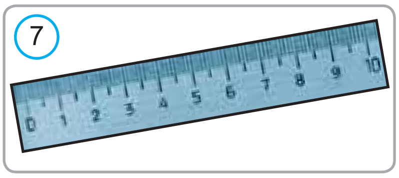
Для измерения длин больших (меньших) метра, используются следующие единицы

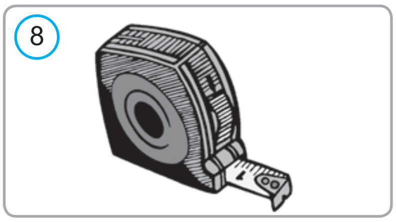
1 *км* = 1 000 *м*; 1 *см* = 0,01 *м*; 1 *мм* = 0,001 *м*

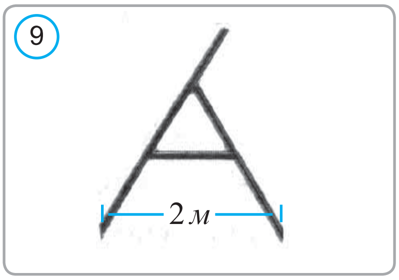
Длины отрезков измеряются с помощью различных инструментов. Самые простые из них имеют шкалу, т. е. снабжены набором делений с числами, служащими для измерения более малых длин. Например, если в качестве единицы измерения длин принят 1 *см*, то линейкой на рисунке 6, можно измерять отрезки длиной до 5 *см*. Пишут, что $AB$ = 5 *см*. Если в качестве единицы измерения выбрать 1 миллиметр, то длина $AB$ = 50 *мм*.

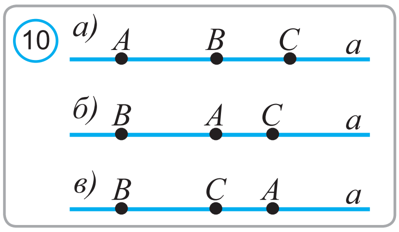
Для измерения длин отрезков в тетрадях используется линейка с миллиметровой шкалой *(рис. 7)*. Для изображения отрезков на доске используется школьная линейка с сантиметровой шкалой. Для измерения длин на поверхности земли используется рулетка *(рис. 8)* или специальные землемерные инструменты *(рис.9)*.




***Задача.*** На прямой построены отрезки с концами $A$, $B$ и $C$, для которых $AB = 8$ *см*. $BC = 11$ *см*. Найдите длину отрезка $AC$.

***Решение***: Рассмотрим следующие случаи:

1) Точки $A$, $B$, $C$ расположены на прямой $a$ как показано на рисунке 10.*а*. В соответствии со свойствами длин отрезков

$$AC = AB + BC = 11 + 8 = 19\ (см).$$

2) Пусть рассматриваемые отрезки имеют те же длины, что на рисунке 10.*а*, но их концы расположены на прямой $a$ как на рисунке 10.*б*. Тогда по свойству длин $BA+AC=BC$, или $AC=BC-BA=11-8=3$ ($см$).

3) Точка $C$ не может лежать между точками $B$ и $A$ так, как показано на рисунке 10.*в*, потому что $AB<BC$.

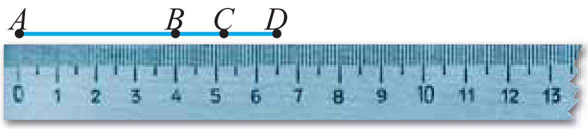
Таким образом, в зависимости от порядка точек на прямой $a$, длина отрезка $AC$ равна либо 19 $см$, либо 3 $см$. Ответ: 19 $см$, 3 $см$.

## Вопросы, задачи и задания

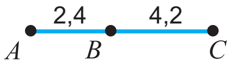
**1.** Как измеряются длины отрезков?

**2.** Назовите основные свойства длины отрезка.

**3.** По рисунку определите длины отрезков $AB, AC, AD, BC, BD, CD$.




**4.** $AC=?$




**5.** $AB=3$, $AC=2BC$, $BC=?$


**6.** $AB=24$, $BC=AC+6$, $AC=?$


**7.** Найти $BC$, если $B\in AC$, $AB=7{,}2$ $см$, $AC=2$ $дм$.

**8.** Найти $MN$, $M, N\in AB$, $AB=5$, $AM=2{,}2$ и $BN=3{,}6$.

**9.** Отложите "на глаз" на прямой отрезки длиной а) 3 $см$; б) 7 $см$; в) 10 $см$. Проверьте правильность построений с помощью линейки.

**10.** На прямой для точек $A, B, C$ имеем $AB=600$ $м$, $BC=200$ $м$. Найти $AC$.

**11.** На прямой для точек $A$, $B$, $C$ и $D$ имеем $AB=2$, $AC=CB$, $2AD=3BD$. Найти $CD$.

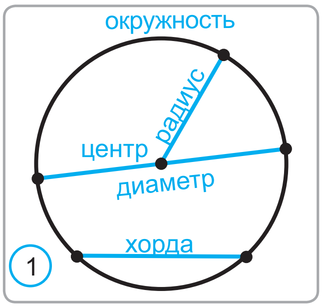
**12.** Даны луч и отрезки с длинами $AB=1{,}2$ $см$, $CD=2{,}8$ $см$. Используя эти отрезки, постройте отрезки с длинами а) 4 $см$; б) 1,6 $см$; в) 0,4 $см$; г) 2,6 $см$.

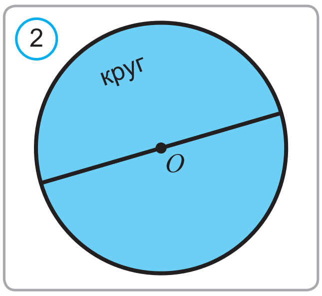
**13.** Начертите отрезок АВ длиной 9 см. Обозначьте на отрезке $AB$ такую точку $C$, чтобы а) $AC-BC=16$ $см$; б) $AC+BC=11$ $см$; в) $AC+BC=10$ $см$.

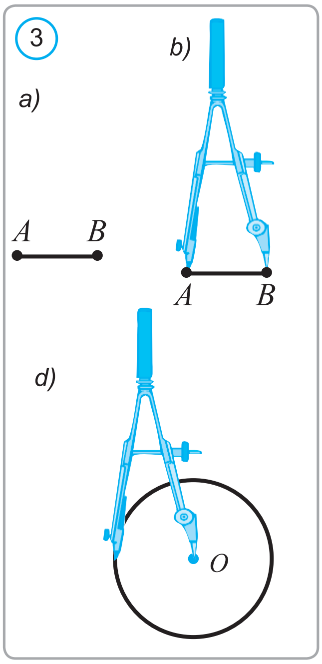
**14*.** Дан отрезок $AB$. Постройте отрезки длиной: а) $2AB$; б) $AB:2$; в) $AB:4$; г) $0{,}75AB$.

**15.** Для точек $A, B, C$: $AB=5{,}6$ $см$, $AC=8{,}9$ $см$ и $BC=3{,}3$ $см$. Какая из точек $A$, $B$ и $C$ лежит между двумя другими?

# 6 Окружность и круг




Фигура, состоящая из всех точек, для которых выполнены одно или несколько заданных свойств, называется *геометрическим местом точек*.

Примером геометрического места точек может послужить окружность или круг.

Фигура, состоящая из геометрического места точек, расположенных на заданном расстоянии от данной точки, называется *окружностью*. Заданная точка называется *центром* окружности. Расстояние от какой-либо точки окружности до ее центра называется *радиусом* окружности *(рисунок 1)*. Точно также называется отрезок, соединяющий центр окружности с произвольной точкой окружности. Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой*. Хорда, проходящая через центр окружности, называется ее *диаметром*.

*Кругом* называется геометрическое место точек плоскости, расстояние от которых до заданной точки не превышает заданного числа *(рисунок 2)*. Заданная точка называется *центром* круга, заданное число – его *радиусом*. Как построить с помощью циркуля окружность с центром в данной точке и с радиусом а показано на *рисунке 3*.

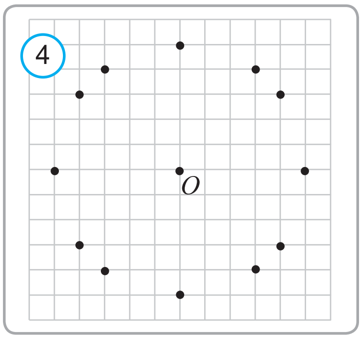
Диаметр окружности (круга) проходит через центр, поэтому он состоит из двух радиусов (рисунок 2). Следовательно, длина диаметра равна длине двух радиусов.

***Способ построения окружности на клетчатой бумаге без использования циркуля.***

1. Обозначьте на листе тетради в клетку точки, показанные на рисунке 4.
2. 12 полученных точек последовательно соедините дугами.

В результате получится примерное изображение окружности с центром в точке $O$. Запомните этот способ. Он поможет вам начертить окружность, когда под рукой нет циркуля.

3. С помощью линейки проверьте, что равны расстояния от точки $O$ до указанных 12 точек.




## Вопросы, задачи и задания

**1.** Дайте определение окружности и покажите ее на чертеже.

**2.** Что такое центр, радиус, хорда и диаметр?

**3.** Какая хорда окружности имеет наибольшую длину?

**4.** Как построить окружность без циркуля?

**5.** Почему колеса велосипеда и машины имеют форму окружности?

**6.** Почему крышки имеют форму круга, а не квадрата?

**7.** Приведите 10 примеров предметов вокруг вас, имеющих форму круга.

**8.** Дан радиус окружности а) 18 *мм*; б) 45 *см*; в) 2 *м* 11 *см*. Найдите ее диаметр.

**9.** Может ли хорда окружности быть длиннее ее диаметра? Почему?

**10.** Дан диаметр круга а) 10 *см*; б) 7 *см*; в) 1 *м* 14 *см*. Найдите его радиус.

**11.** Начертите окружность с центром на данной прямой и радиус которой равен а) 5 *см*; б) 7 *см* и в) 4,6 *см*.

**12.** Какое из этих выражений отражает точку А, принадлежащей а) окружности; b) кругу, центр которых лежит в точке $O$ и радиус равен $R$:

$$OA = R,\ OA \le R,\ AO > R.$$

**13.** Найдите диаметр окружности, длиннее его радиуса на 65 *см*.

**14.** Найдите наибольшую хорду круга, радиус которой равен 8 *м*.

# 7 Практическое занятие

## *Активизирующие практические упражнения*

> ***Измерьте и запомните длину своих пяди и шага. Это будет полезно вам в повседневной жизни.***

1. Измерьте линейкой длину, ширину и толщину вашего учебника по геометрии.
2. Как можно измерить толщину листа вашего учебника? Сможете ли вы измерить линейкой диагональ кирпича?
3. Измерьте на глаз рост учеников вашего класса. Определите, кто из них самый высокий.
4. Измерьте линейкой, сколько в вашей пяди сантиметров. Затем измерьте пядями размеры нескольких предметов (длину, ширину и высоту парты, высоту и ширину окна, длину и ширину доски) и выразите результаты в сантиметрах.
5. Измерьте длину вашего шага. Измерьте в шагах длину и ширину школьного здания, длину и ширину спортплощадки и выразите их в метрах.
6. В соответствии с масштабом карты Узбекистана, найдите расстояния между различными городами (рис. 1).


*Образец:*

**Нахождение расстояния между Ташкентом и Бухарой.**

По карте с помощью линейки найдем, что расстояние между городами 4,7 см. Затем по масштабу определим, что расстояние на местности $4{,}7 \cdot 100$ км $= 470$ км . Ответ: 470 км.

2

Во многих странах, наряду с международными единицами длины, используются также другие единицы длины.

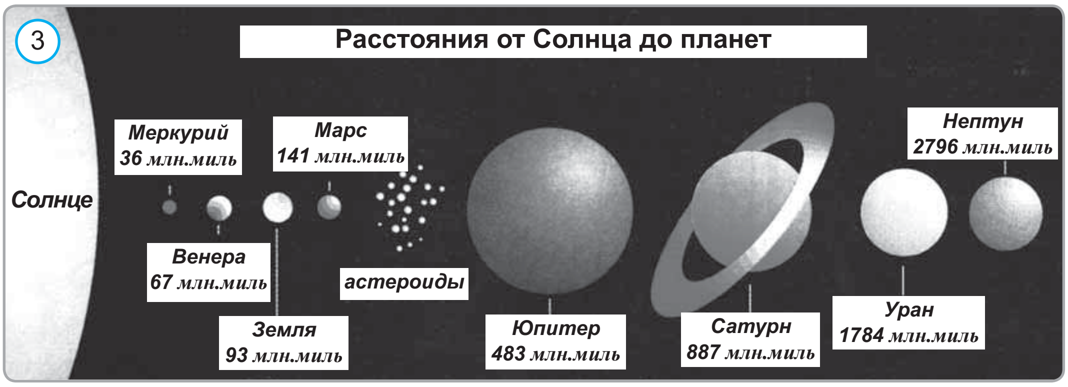
1 *дюйм* = 2,54 *см*, 1 *миля* = 1,609 *км*.

**7.** Диагонали экрана телевизора и монитора компьютера *(рис. 2)* измеряются в дюймах. Выразите в сантиметрах диагональ 15, 17 и 19-дюймового монитора.

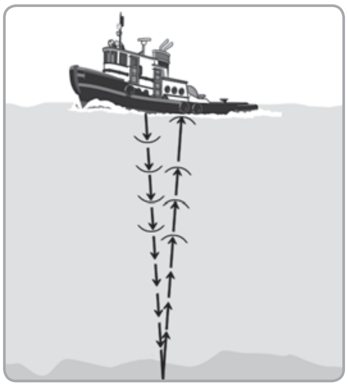
**8.** Воспользовавшись сведениями, данными на рисунке 3, найдите расстояния от Земли до Солнца и до планет и выразите их в километрах.

**9.** Выразите расстояние между Бухарой и Самаркандом в верстах, если 1 *верста* = 900 *м*.

3




## *Занимательная задача*



*Измерение расстояний эхолокацией.* Для корабля, плывущего в море, очень важно знать глубину моря. Для этого посылается звуковой сигнал ко дну и на корабле подсчитывается время, за которое сигнал возвращается, отразившись от дна. Половина этого времени умножается на скорость движения звука в воде — 1490 м/с, что дает глубину моря. Какова глубина моря, если это время равно а) 3; б) 10,5; в) 54 секундам?

## 8 Угол. Сравнение углов. Биссектриса

> *Углом* называется фигура, состоящая из точки и двух лучей, исходящих из нее.

Лучи, составляющие угол, называются *сторонами угла*, а их общее начало – *вершиной угла*. На рисунке 1 изображен угол. Точка $O$ – вершина угла, лучи $OA$ и $OB$ – его стороны. Этот угол записывается в виде “$\angle AOB$” или “$\angle BOA$” и читается “угол $AOB$” или “угол $BOA$”. В такой записи вершина угла всегда помещается в середине. Иногда этот угол обозначается в виде “$\angle O$”, что читается “угол $O$”. На чертеже, для изображения отдельно взятого угла, его стороны соединяют дужкой как на рисунке 1.

> *Развернутый угол* – это угол, стороны которого лежат на одной прямой.

На рисунке 2 изображены развернутые углы.

Пусть дан угол O, отличный от развернутого. Рассмотрим отрезок $AB$, концы которого лежат на сторонах угла *(рис. 3)*.

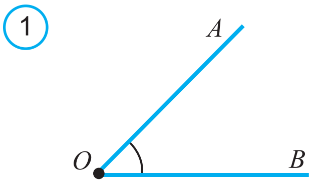
Если луч $OC$ пересекает отрезок $AB$ *(рис.3)*, то говорят, что этот луч *проходит между сторонами угла*. Угол разбивается лучом, проходящим между его сторонами, на два угла.

Если угол $O$ – развернутый, то говорят, что всякий луч, исходящий из его вершины и отличный от его сторон, проходит между его сторонами.

Ясно, что угол $O$, изображенный на рисунке 4, разбивает плоскость на две части.

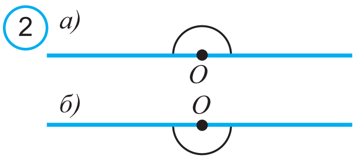
Часть плоскости, в которой лежит луч, проходящий между сторонами угла, называется *внутренней областью* угла, вторая часть – его *внешней областью*.

1



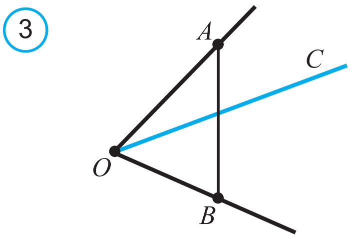

$\angle AOB$ — угол $AOB$
$O$ — вершина угла, лучи $OA$, $OB$ — стороны угла

2



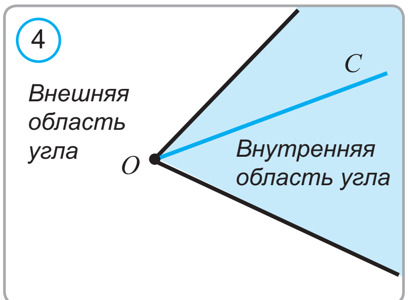

$\angle O$ — развернутый угол

3

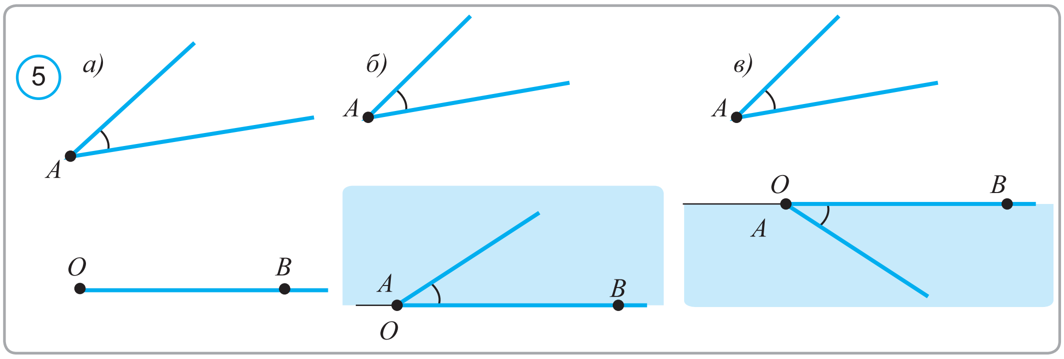



$OC$ — луч, проходящий между сторонами угла.

4

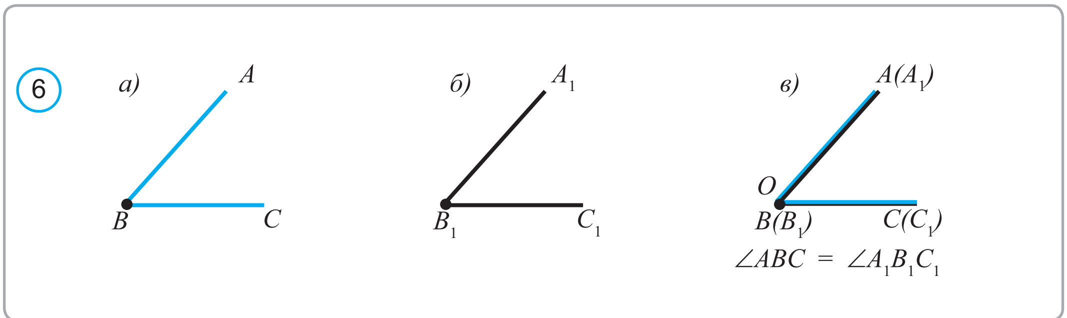


Пусть даны луч с началом $O$ и угол $A$, не являющийся развернутым *(рис. 5.а)*. Известно, что прямая разбивает плоскость на две полу-плоскости. Тогда ясно, что угол, равный углу $A$, одна сторона которого совпадает с лучом $O$, а вторая лежит в выбранной полуплоскости, определен однозначно *(рис. 5.б, 5.в)*.



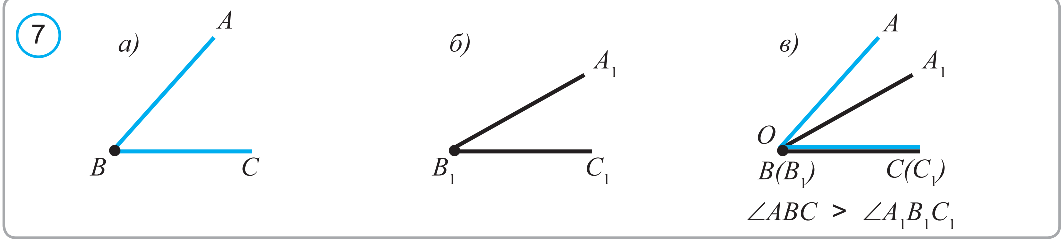

**A** *От произвольного луча в заданную полуплоскость можно отложить единственный угол, равный данному неразвернутому углу.*

Для того чтобы сравнить два угла, надо отложить их от некоторого луча в заданную полуплоскость. После этого, в зависимости от того, какой из следующих случаев имеет место, делается заключение о равенстве или неравенстве углов:




Если при откладывании $\angle ABC$ и $\angle A_1B_1C_1$ от луча $O$ (рис.6.в) *сторона* $BA$ совпадает с стороной $B_1A_1$, а сторона $BC$ с стороной $B_1C_1$,то угол $ABC$ называется *равным* углу $A_1B_1C_1$, что записывается в виде $\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$.

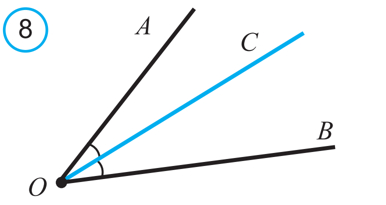
На чертеже равенство углов обозначается равным числом дужек.




В случае, изображенном на рисунке 7.*в*, говорят, что угол $ABC$ *больше*, чем угол $A_1B_1C_1$, что записывается в виде $\angle ABC > \angle A_1B_1C_1$. Точно так же, в этом случае говорят, что угол $A_1B_1C_1$ *меньше* угла $ABC$, и пишут в виде $\angle A_1B_1C_1 < \angle ABC$ .

*Биссектрисой угла* называется луч, делящий угол на два равных угла.

На рисунке 8 изображена биссектриса $OC$ угла $AOB$. Для того чтобы обозначить на чертеже равенство углов, их стороны соединяют равным числом дужек (рис. 8).

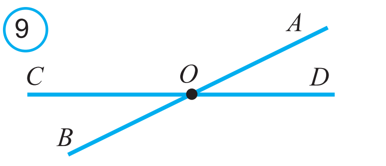


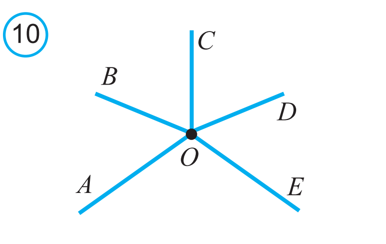

$\angle AOC = \angle COB$

$OC$ — биссектриса угла $AOB$

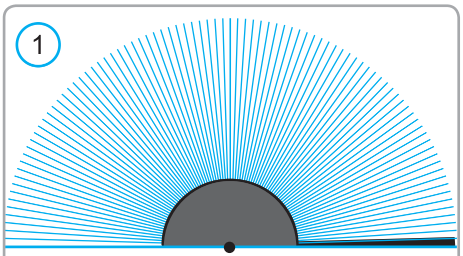
## Вопросы, задачи и задания

1. Что называется углом и как он обозначается?
2. Что такое развернутый угол?
3. На какие части разбивает плоскость угол ?
4. Определите и назовите углы, изображенные на рисунке 9.
5. Сколько имеется углов на рисунке 10? Запишите в тетрадь их названия.
6. Что вы понимаете под словами «задать от луча угол в заданную полуплоскость»?
7. Когда углы равны между собой?
8. Когда один из углов будет больше или меньше другого?
9. Дайте определение биссектрисе угла.
10. Дан $\angle AOB$. Имеют ли смысл следующие равенства: $\angle AOB = \angle BOA$; $\angle AOB = \angle ABO$; $\angle AOB = \angle OAB$?

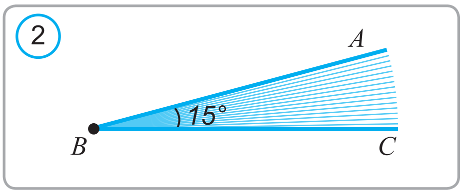


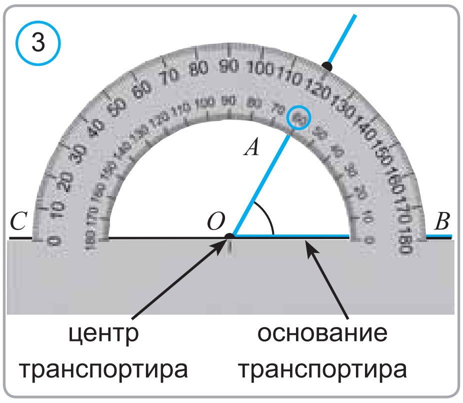



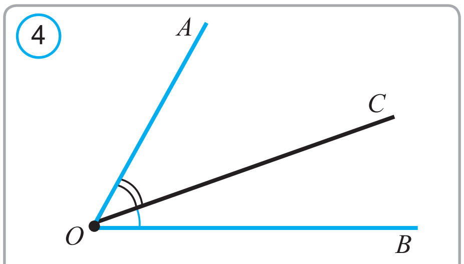
## 9 Измерение углов. Транспортир



Угол, равный 1 градусу



$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$

Пусть развернутый угол разбит лучами, проходящими между его сторонами, на 180 равных углов *(рис.1)*. Один из этих углов принимают за единицу измерения – *единичный угол*. Его угловую величину называют *градусом* и обозначают 1°. Градусную меру любого угла можно определить на основе этого выбора единицы измерения углов. *Градусная мера угла* показывает, сколько единичных углов и их частей укладывается во внутренней области угла.

На рисунке 2 угол $ABC$ равен 15°. Это значит, что в его внутренней области укладываются 15 единичных углов.

**A** *Каждый угол имеет определенную градусную меру, которая выражается положительным числом. 180° – градусная мера развернутого угла.*

Градусная мера угла определяется с помощью *транспортира.* Вы познакомились с транспортиром в младших классах. Его шкала, размещенная на дугообразной части, разделена черточками на 180 равных частей, каждая из которых соответствует одному градусу. На рисунке 3 показан процесс определения градусной меры угла с помощью транспортира. Вы видите, что угловая величина угла $AOB$ равна 60 градусам, что записывается в виде $\angle AOB = 60°$. Легко понять, что углы, имеющие одинаковую градусную меру, равны, и обратно, градусная мера равных углов одна и та же. Больший угол имеет большую градусную меру.

При измерении углов также используются доли градуса. 1/60 часть 1° называется «минута», 1/3600 часть – «секундой» и соответственно обозначаються «′» и «″». Например, угол, равный 45 градусам 38 минутам 59 секундам пишеться как 45°38′59″. Следовательно, 1° = 60′, 1′ = 60″.

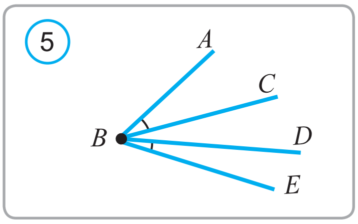
Пусть дан угол $AOB$ и луч $OC$, проходящий между его сторонами, разбивает его на углы $AOC$ и $COB$ *(рис. 4)*. В таком случае очевидно, что градусная мера угла $AOB$ равна сумме градусных мер углов $AOC$ и $COB$:

$$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB.$$

Это свойство можно сформулировать так:

**A** *Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.*

***Задача 1.*** Если на рисунке 5 $\angle ABC=\angle DBE$, докажите, что $\angle ABD=\angle CBE$.




***Решение.*** К обеим сторонам данного равенства ∠ABC=∠DBE добавляем $\angle CBD$:

$$\angle ABC + \angle CBD = \angle DBE + \angle CBD.$$

Но, $\angle ABC + \angle CBD = \angle ABD$ и $\angle DBE + \angle CBD = \angle CBE$.

Значит, $\angle ABD = \angle CBE$.

### *Как отложить от данного луча угол с заданной градусной мерой*

**1.** Чертим произвольно выбранный луч $OB$.

**2.** Основание транспортира накладываем на луч $OB$, а его центр совмещаем с точкой $O$, как показано на рисунке 6.

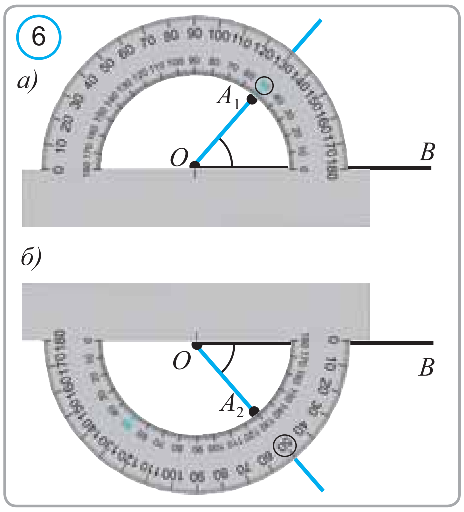
**3.** На шкале транспортира находим деление, соответствующее заданной градусной мере, и отмечаем рядом с ним точку $A_1(A_2)$.

**4.** Через точки $O$ и $A_1(A_2)$ проводим луч. Получаем угол $A_1OB$ $(A_2OB)$ с данной градусной мерой.

***Задача 2.*** От данного луча $OB$ отложить в данную полуплоскость угол 50°.

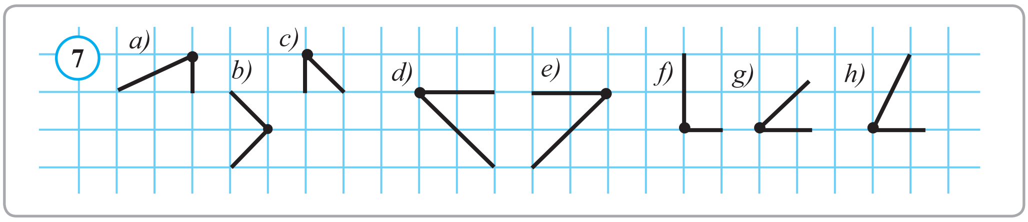
***Решение.*** Основание транспортира накладываем на луч $OB$, совмещаем его центр с точкой $O$, находим на шкале деление, соответствующее 50°, и строим угол. Однако прямая $OB$, которой принадлежит луч $OB$, разбивает, как мы знаем, плоскость на две полуплоскости. Значит, в каждую полуплоскость можно от данного луча отложить угол, равный 50°, и только один.

$\angle A_1OB = \angle A_2OB = 50°$ *(рис. 6)*.

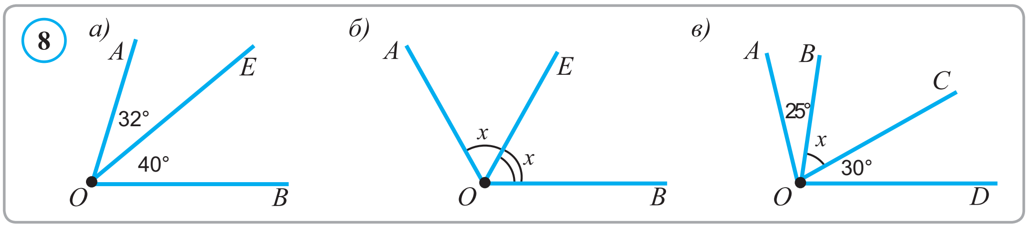



## Вопросы, задачи и задания

1. Что называется градусной мерой угла?
2. Чему равна градусная мера развернутого угла?
3. Какой угол вы имеете в виду, говоря, что угол равен 1°?
4. Будут ли равны углы, имеющие равные градусные меры?
5. Выявите равные углы среди углов, изображенных на рисунке 7.

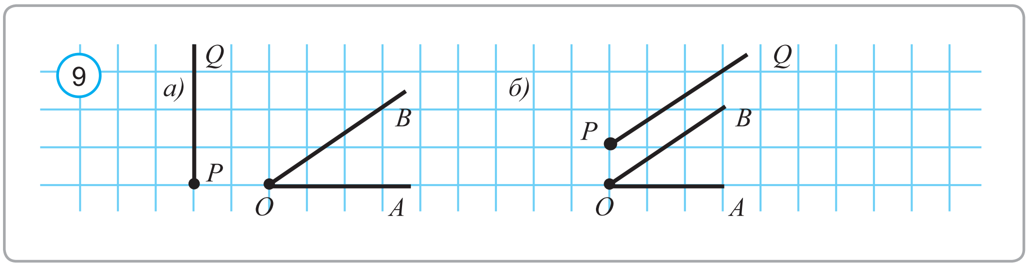



6. С помощью транспортира начертите угол в 10°, 30°, 70°, 100° и 160°.
7. а) $\angle AOB$ =? *(рис. 8.а)*; б) $\angle AOB$ = 120°, x = ? *(рис. 8.б)*;
   в) $\angle AOD$ = 105°, x = ? *(рис. 8.в)*



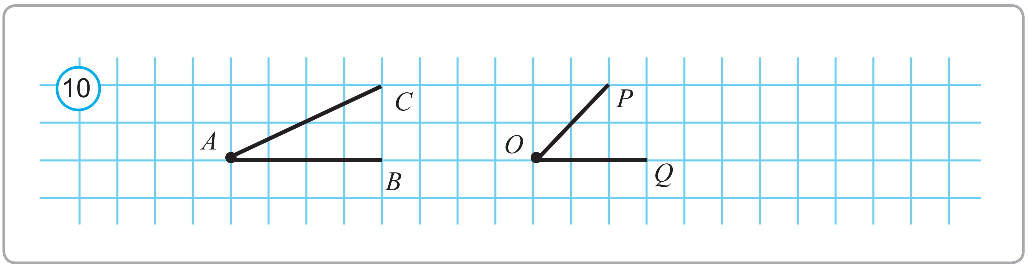
**8.** От луча $AB$ отложите $\angle OAB = 150°$ .

**9.** Задайте к лучу $PQ$ углы $AOB$ (*рисунок 9*).

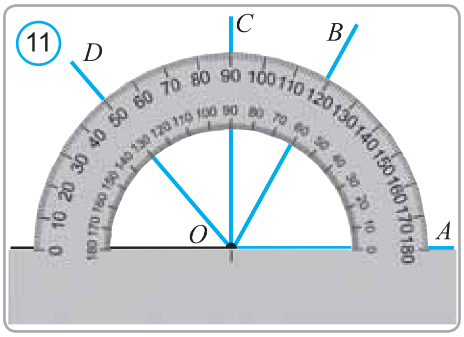



**10.** Постройте углы 60° и 120°, обладающие общей стороной. Какой получился угол?

**11.** Какой из углов, изображенных на рисунке 10, больше?




**12.** Пройдет ли луч $OE$ между сторонами $\angle AOB$, если а) $\angle AOE = 20°$, $\angle EOB = 40°$, $AOB = 60°$; б) $\angle AOE = 80°$, $EOB = 120°$; в) $\angle AOE > \angle AOB$ ?

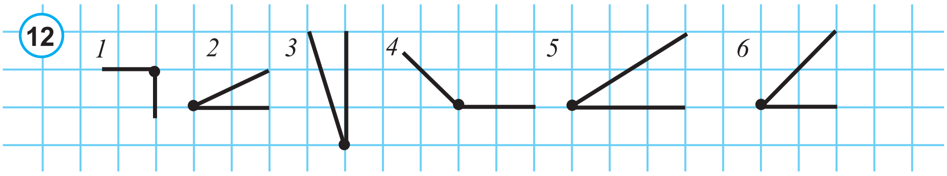



**13.** В тетради начертите луч и отложите от него "на глаз", пользуясь только линейкой, углы 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°, 120° и 150°. Затем измерьте построенные углы транспортиром и проверьте, насколько вы были точны. Повторите упражнение.

**14.** Чему равны градусные меры углов между стрелками часов а) в 3.00 ч; б) в 6.00 ч?

**15.** С помощью рисунка 11 определите градусные меры углов $AOB$, $AOC$, $AOD$, $BOC$, $BOD$ и $COD$.

**16.** Напишите номера углов на рисунке 12 в порядке возрастания их градусов.

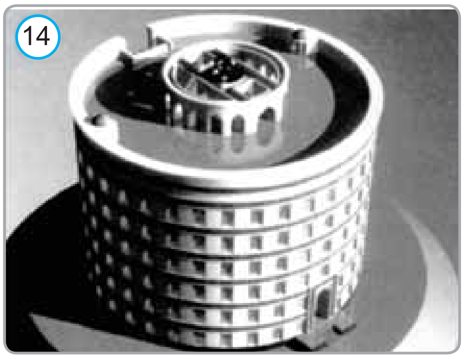



## *Странички истории*

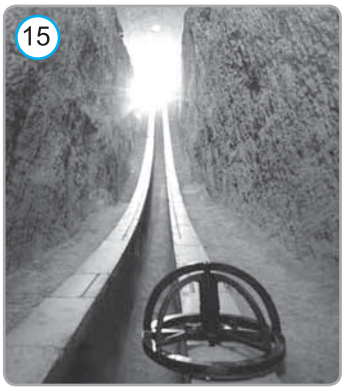
*Астролябия – астрономический инструмент для измерения углов, изобретенный древнегреческим астрономом Гиппархом во II веке до н.э. (рис. 13). С помощью этого простого инструмента можно измерить десятки углов. В Самаркандской астрономической обсерватории Улугбека производились работы по измерению углов между светилами. В этой большой обсерватории было много астрономических инструментов (рис. 14). К ним относился не имевший аналогов вертикальный квадрант для измерений углов и геометрических вычислений. Он имел радиус 42 м! С помощью этого инструмента Улугбек*

13

14

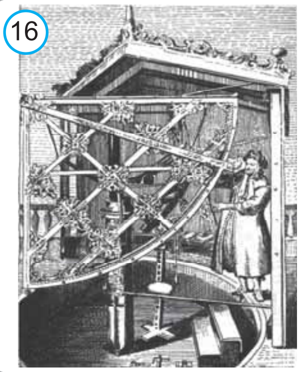


15

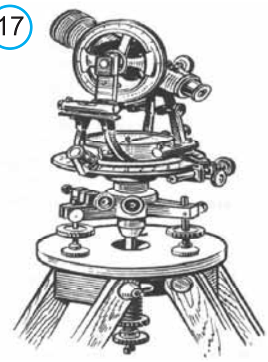


*уточнил положение 1018 звезд на небесной сфере и привел эти данные в своем труде "Гураганский зидж". На рисунке 15 показан этот квадрант. Сравните его размеры с европейским средневековым квадрантом (рис. 16). Сегодня в геодезической практике для измерения углов используется теодолит. (рис. 17).*

16



17



## 10 1-ая контрольная работа

Образец контрольной работы состоит из двух частей:

I. Теоретическая часть. Сколько геометрических фигур вы узнали до настоящего времени. Дайте их определения и выпишите их свойства.

II. Практическая часть. Решите следующие задачи (задача 4 для желающих получить "отлично"):

**1.** Для точек $A$, $B$ и $C$, лежащих на одной прямой, $AB = 9$ см, $AC = 12$ см. Найти длину отрезка $BC$.

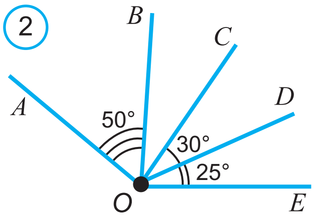
**2.** $AB = 48$, $AC = 3 \cdot BC$, $BC = ?$ (рис. 1).

**3.** Найти градусную меру угла $BOC$, если $\angle AOE = 140°$ (рис. 2).

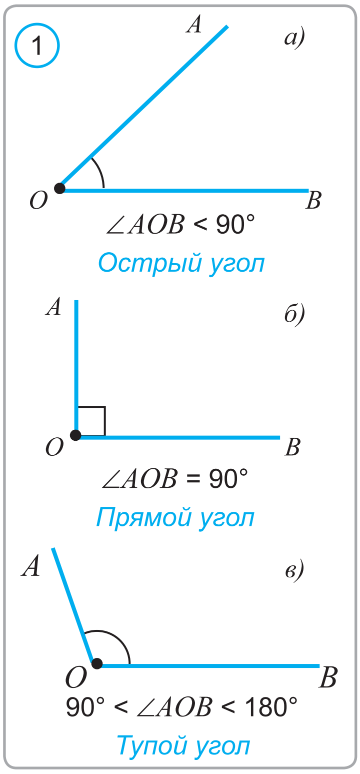
**4*.** Чему равна градусная мера угла, образованного часовыми стрелками в 5.00 часов?

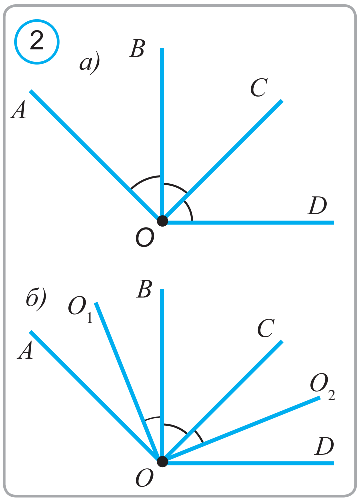
1


2



## 11 Виды углов: прямой, острый и тупой углы




Мы говорили на предыдущих занятиях, что градусная мера развернутого угла равна 180°. Короче говоря: "*Развернутый угол равен* 180°" Углы, меньшие развернутого, различаются по величине: Если градусная мера угла: меньше 90° (рис. 1.*а*), то он называется *острым углом*; равна 90° (рис.1.*б*), то это *прямой угол*; заключена между 90° и 180° (рис.1.*в*), то он называется *тупым углом*.

На чертеже прямой угол выделяют так, как показано на рисунке 1.*б*.

**Задача.** Пусть $\angle AOD = 135°$, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$ (рис. 2.*а*). Найти

а) сколько на чертеже острых, тупых и прямых углов;

б) угол между биссектрисами углов $AOB$ и $COD$.

**Решение.** а) Пусть $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \alpha$. Тогда, по основному свойству измерения углов, $\angle AOD = \alpha+\alpha+\alpha = 135°$, откуда $\alpha = 45°$. Значит, $\angle AOC = 2\alpha = 90°$, $\angle BOD = 2\alpha = 90°$. Таким образом, на чертеже три острых угла, два прямых угла и один тупой угол.

б) Пусть $OO_1$ и $OO_2$ – соответствующие биссектрисы (рис. 2.*б*). Так как $\angle AOB = \angle COD = 45°$, то, по определению биссектрисы угла,

$$\angle O_1OB = \angle O_2OC = \frac{\alpha}{2} = 22{,}5°.$$

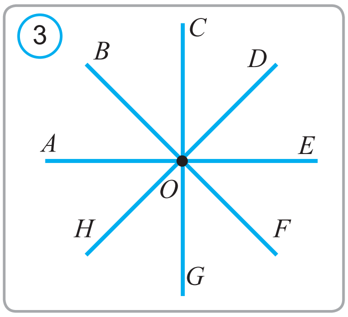
Находим искомый угол

$$\angle O_1OO_2 = \angle O_1OB + \angle BOC + \angle COO_2 =$$

$$= \frac{\alpha}{2} + \alpha + \frac{\alpha}{2} = 2\alpha = 90°.$$

т. е. $\angle O_1OO_2$ — прямой угол.

***Примечание.*** Обычно мера углов обозначаеться с греческими буквами $\alpha$ (альфа), $\beta$ (бета), $\gamma$ (гамма), ... .



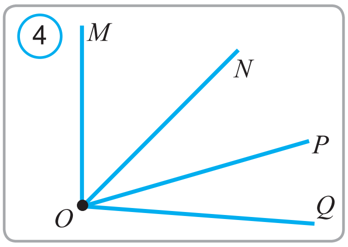

## Вопросы, задачи и задания

**1.** Какой угол называется прямым? Приведите примеры прямых углов из повседневной жизни.

**2.** В чем различие между острыми и тупыми углами?

**3.** Начертите три угла и обозначьте их $\angle AOB$, $\angle MNL$, $\angle PQR$ соответственно. Измерьте их транспортиром и определите их виды.

**4.** Начертите луч $OA$. Постройте с помощью транспортира углы $AOB$, $AOC$ и $AOD$ с угловыми величинами 25°, 72° и 146° соответственно.




**5.** Какой угол образует биссектриса прямого угла с его сторонами?

**6.** Сколько на рисунке 3: а) острых; б) тупых; в) прямых; г) развернутых углов?

**7.** Сколько на рисунке 4 имеется острых углов и сколько тупых углов?

**8.** Сможете ли вы получить прямой угол, сгибая лист бумаги?

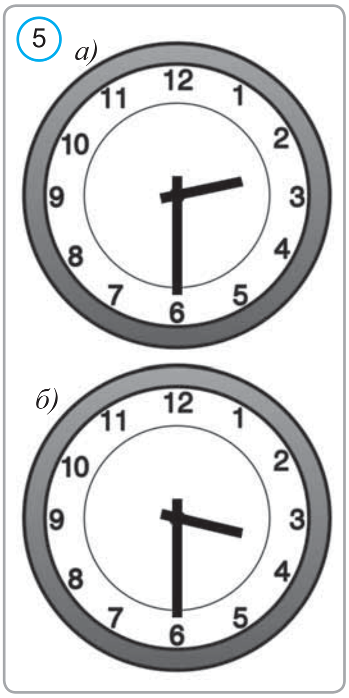
**9.** Когда часовая и минутная стрелки часов образуют прямой угол?

**10.** На сколько градусов повернется часовая стрелка за: а) 1 час; б) 6 часов; в) 2 минуты?

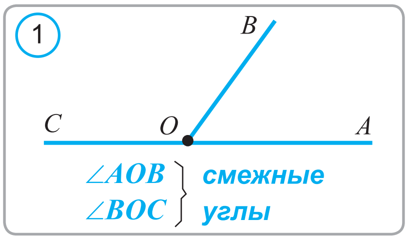
**11.** На сколько градусов повернется часовая стрелка за: а) 1 минуту; б) 5 минут; в) 0,5 часа?

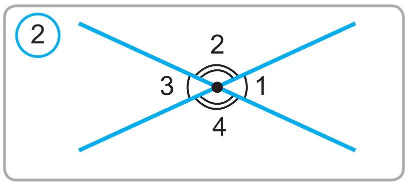
**12*.** Определите угол между часовой и минутной стрелками в: а) $14^{30}$; б) $15^{30}$ (рис. 5).

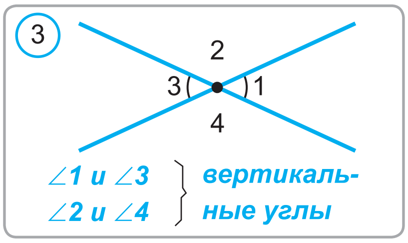
**13.** Угол $\angle AOB$ разделен на четыре равных угла лучами $OC$, $OD$ и $OE$. Биссектрисами каких углов будут эти лучи?

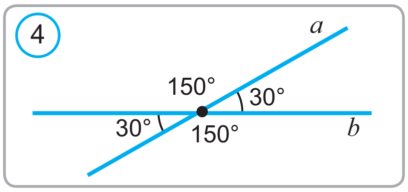


## 12 Смежные и вертикальные углы и их свойства




Два угла называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а две другие образуют прямую линию.

Углы $AOB$ и $BOC$ на рисунке 1 являются смежными. У них сторона $OB$ – общая, лучи $OC$ и $OA$ лежат в одной прямой и дополняют друг-друга.

### Активизирующее упражнение

а) Покажите, что сумма смежных углов будет развернутым углом.

б) Покажите, что если смежные углы равны, то они являются прямыми углами.

в) Какие из углов $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$, образующихся при пересечении двух прямых (рис.2), являются смежными углами?

По определению смежных углов справедливо следующее свойство.

***Свойство.*** **Сумма смежных углов равна 180°.**

Проверьте его самостоятельно.

*Вертикальными углами* называются два несмежных угла, которые образуются при пересечении двух прямых.

Углы $\angle 1$ и $\angle 3$ на рисунке 3 – вертикальные. Точно так же и углы $\angle 2$ и $\angle 4$ являются вертикальными.

Теперь докажем следующее свойство вертикальных углов.

***Свойство.*** **Вертикальные углы равны.**

Пусть $\angle 1$ и $\angle 3$ являются вертикальными углами (рис. 3). Докажем, что справедливо равенство $\angle 1 = \angle 3$.

***Доказательство***: $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, так как $\angle 1$ и $\angle 2$ – смежные углы.

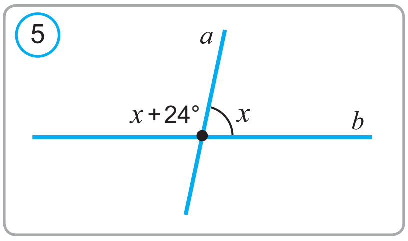
$\angle 2 + \angle 3 = 180°$, так как $\angle 2$ и $\angle 3$ также смежные углы.

Из этих равенств следует, что $\angle 1 + \cancel{\angle 2} = \cancel{\angle 2} + \angle 3$. Отсюда $\angle 1 = \angle 3$.

***Свойство доказано.***

Итак, при пересечении двух прямых образуются вертикальные и смежные углы. Каждые два смежных угла составляют в сумме один развернутый угол. Если один из них больше 90°, то второй будет меньше 90°. Тот из смежных углов, градусная мера которого меньше, принимается по определению за *угол между пересекающимися прямыми*. Например, на рисунке 4 угол между прямыми составляет 30°. Говорят также, что "прямые пересекаются под углом 30°".

***Задача.*** Один из двух углов, образующихся при пересечении двух прямых, больше второго на 24°. Найти углы между этими прямыми.



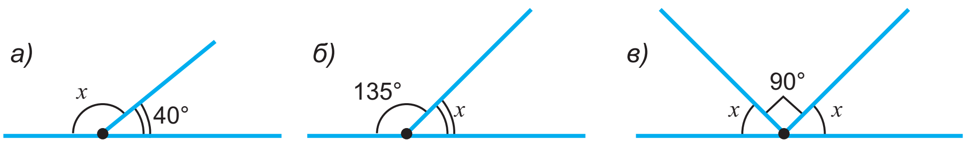

***Решение.*** Как вы знаете, при пересечении двух прямых $a$ и $b$ образуются смежные и вертикальные углы (рис. 5). Вертикальные углы равны.

Значит, в условии говорится о смежных углах. Если обозначить меньший из них через $x$, то больший угол равен $x+24°$. По свойству смежных углов $x+x+24°=180°$. Тогда $x=78°$ и $x+24°=102°$.Таким образом, при пересечении прямых $a$ и $b$ получаются углы 78°, 102°, 78° и 102°.

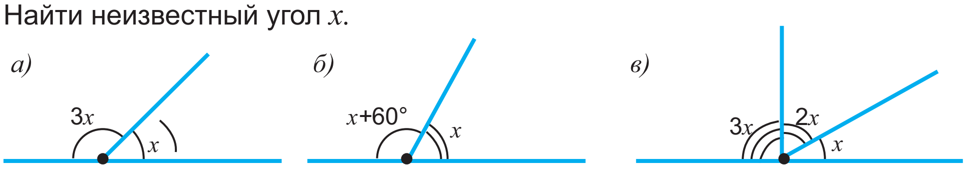
*Ответ*: 78°, 102°, 78° и 102°.

## Вопросы и упражнения

**1.** Какие углы называются смежными?
**2.** Чему равна сумма смежных углов? Обоснуйте свой ответ.
**3.** Могут ли смежные углы быть равными друг другу?
**4.** Какие углы называются вертикальными углами?
**5.** Сформулируйте основное свойство вертикальных углов.
**6.** Каким будет градус углов, смежных углам, градус которых равен а) 20°; б) 30°; в) 45°; г) 90°?
**7.** Найти смежные углы, один из которых втрое больше другого.
**8.** Могут ли оба смежных угла быть: а) острыми; б) прямыми; в) тупыми углами?
**9.** Будут ли углы, смежные равным, также равны?
**10.** Найти неизвестный угол $x$.

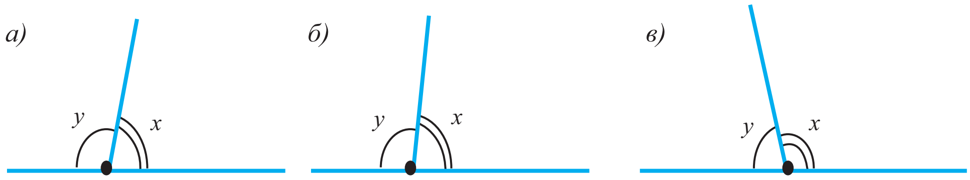


**11.** Найти неизвестный угол $x$.



**12.** Найти смежные углы, если их градусные меры относятся как а) 2:7; б) 11:25; в) 1:9.

**13.** Составить задачу в соответствии с чертежом и решить ее.

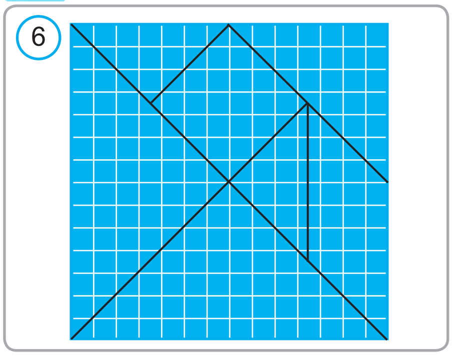


$y - x = 30°$ $\quad$ $x : y = 4 : 5$ $\quad$ $2x = 3y$

**14.** Найти все углы, образующиеся при пересечении двух прямых, если один из этих углов равен 40°.

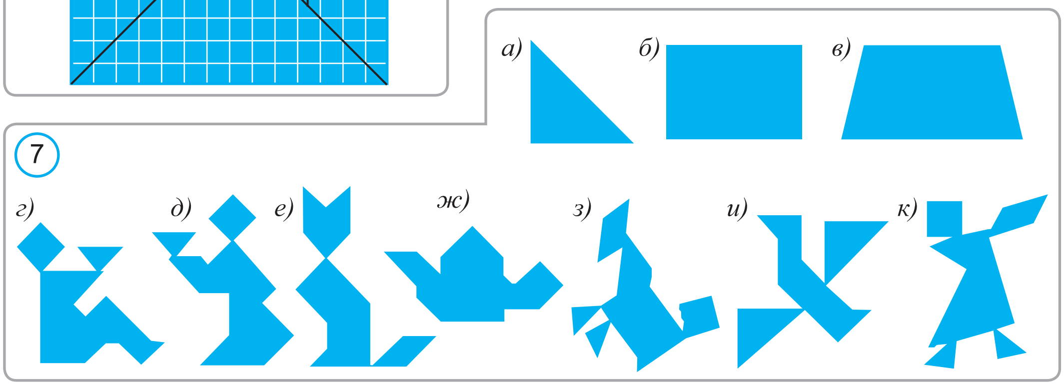
**15.** Всегда ли верно утверждение: "Если два угла равны, то они являются вертикальными углами"?

## *Геометрическая головоломка*



Соберите китайскую игрушку Танграм. Для этого скопируйте на плотную бумагу квадрат и, разделив его на семь частей так, как показано на рисунке 6, вырежьте их.

После этого соберите фигурки, изображенные на рисунке 7, используя при этом все без исключения части игрушки.



## 13 Последовательность рассуждений и их взаимосвязь при изучении геометрии

Мы уже познакомились с целым рядом геометрических фигур и их свойствами. Например, на предыдущем занятии мы узнали, что такое вертикальные углы и показали, что они всегда равны. Вспомните, мы еще не знали, о чем идет речь, но все же доказали утверждение: “Вертикальные углы равны”, проведя необходимые рассуждения. Мы познакомились подобным образом с тем, что называется “доказательство”. Возможно, древнегреческий математик Фалес из Милета (625 –527 гг. до н.э.) был первым, кто ввел в геометрию понятие “доказательства”.

*Доказать* некоторое утверждение – это значит показать путем логических рассуждений, что оно верно. Утверждение, справедливость которого устанавливается с помощью *доказательства*, называется *теоремой*. Формулировка теоремы состоит обычно из *условия* и *заключения*. В первой части – условии теоремы, речь идет о том, что известно, в заключении о том, что требуется доказать.

*Теорема.* **Если смежные углы равны, то каждый из них является прямым углом.**

*Условие* этой теоремы: “равенство смежных углов”, *заключение*: “каждый из них является прямым углом”. *Доказать теорему* – это значит, воспользовавшись ее условием, то есть тем, что уже известно о рассматриваемом предмете, путем рассуждений убедиться в справедливости утверждения, содержащегося в заключительной части теоремы. Уточнение того, о чем говорится в условии и заключении теоремы, прояснит ее содержание и облегчит процесс доказательства. Поэтому перед доказательством полезно выделить из формулировки условие и заключение. Например, приведенную выше теорему перепишем в виде:

***Дано***: $\angle A$ и $\angle B$ – смежные углы, $\angle A = \angle B$ ⇨ ***Надо доказать***: $\angle A = \angle B = 90°$

↑ ***Условие теоремы*** ↑ ***Заключение теоремы***

В общем случае, разбив формулировку теоремы на условие и заключение, ее можно схематически представить в следующем виде:

Если **имеет место А**, то **имеет место В**.

↑ ***Условие теоремы*** ↑ ***Заключение теоремы***

***Основные понятия и аксиомы.*** Точка, прямая и плоскость считаются основными понятиями геометрии. Мы не определяем их. *Основные понятия геометрии* – это понятия, ясные сами по себе. Если сравнить геометрию со зданием, то основные понятия – это его фундамент. С помощью основных понятий даются определения новых понятий и фигур, т. е. объяснения того, что это такое. В учебнике определения выделены значком ✓, потому что они важны при изучении геометрии.

Кроме того, мы приняли в качестве очевидных те свойства, которыми обладают точка, прямая и плоскость. Такие свойства называются *аксиомами*. Если вы обратили внимание, все аксиомы в учебнике выделены в основном тексте значком **A**. Приведем примеры аксиом, с которыми вы уже познакомились (перепишите оставшиеся аксиомы, разыскав их на страницах учебника):

*1. Какова бы ни была прямая на плоскости, существуют точки, которые принадлежат этой прямой, и точки, которые ей не принадлежат.*

*2. Через любые две точки можно провести одну и только одну прямую.*

*3. Из трех точек, принадлежащих прямой, одна и только одна лежит между двумя другими.*

Геометрические понятия вводятся в определенной логической последовательности. Прежде всего вводятся основные понятия, лежащие в основе геометрии, и аксиомы, которые не доказываются. Далее с их помощью определяются новые понятия и уточняются их свойства. Часть из них принимается без доказательств, т. е. в качестве аксиом. Остальные свойства выражаются в виде теорем и аксиом, и доказываются путем логических умозаключений, опираясь на ранее доказанные свойства. В процессе рассуждений нельзя пользоваться свойствами, справедливость которых не доказана, даже если они кажутся очевидными – это противоречит логике структуры геометрии.

## ? *Вопросы, задачи и задания*

**1.** Что такое определение? Какие понятия принимаются без определений?
**2.** Что такое теорема? Из каких частей она состоит?
**3.** Как доказываются теоремы? Что вы понимаете под доказательством?
**4.** Что такое аксиома?
**5.** Если некоторое свойство фигуры очевидно из чертежа, можно ли использовать его без доказательства?
**6.** Какие из приведенных ниже утверждений приняты без доказательства:
1) через любые две точки можно провести одну и только одну прямую;

2) развернутый угол в два раза больше прямого угла;
3) сумма смежных углов равна 180°;
4) каждый угол имеет биссектрису;
5) у каждого отрезка есть только одна середина;
6) для каждого положительного числа существует отрезок, длина которого равна этому числу?

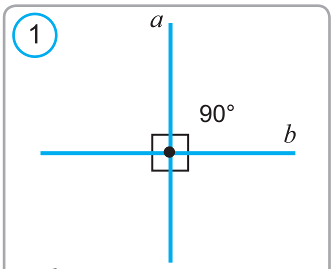
**7.** Можно ли принять без доказательства утверждение: “Если для точек $A$, $B$, $C$, $D$, лежащих на одной прямой, $AB = CD$, то совпадают середины отрезков $AD$ и $BC$"?

**8.** Найдите доказательства свойств, относящихся к пройденным темам.

## 14 Перпендикулярные прямые

### *Активизирующее упражнение*

Что можно сказать об углах, образующихся при пересечении двух прямых, если один из них прямой угол *(рис. 1)*?




$a \perp b$ – прямая $a$ перпендикулярна прямой $b$.

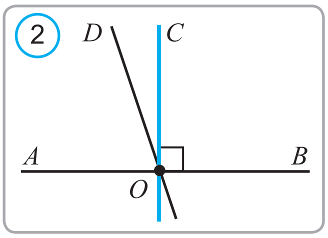
Прямые, пересекающиеся под прямым углом (т. е. углом, равным 90°), называются *перпендикулярными прямыми*.

На рисунке 1 прямая $a$ перпендикулярна другой прямой $b$. Перпендикулярность этих прямых обозначается специальным значком $a \perp b$, что читают так: “прямая $a$ перпендикулярна прямой $b$” или "прямые $a$ и $b$ взаимно перпендикулярны". При пересечении перпендикулярных прямых образуются четыре прямых угла.

Отрезки, лучи и прямые, лежащие на перпендикулярных прямых, также называются *взаимно перпендикулярными*.

***Теорема.*** **Через каждую точку прямой можно провести единственную перпендикулярную ей прямую.**

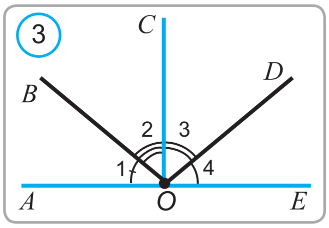
***Доказательство.*** Пусть даны прямая $AB$ и точка $O$, принадлежащая ей *(рис. 2)*. Известно, что от луча $OB$ можно в заданную полуплоскость отложить угол $COB$, равный 90°. Тогда прямая $CO$ будет перпендикулярна прямой $AB$.

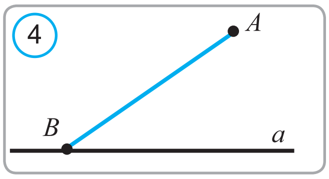


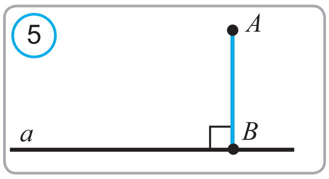
Докажем теперь единственность этой прямой. Предположим, что существует еще одна прямая $DO$, проходящая через точку $O$ и перпендикулярная данной прямой $AB$. В таком случае, каждый из углов $DOB$ и $COB$ равен 90° и отложен от данного луча $OB$ в заданную полуплоскость. Однако от луча $OB$ в заданную полуплоскость может быть отложен только один угол, равный 90°.

Следовательно, через точку $O$ проходит только одна прямая, перпендикулярная прямой $AB$. ***Теорема доказана.***

***Задача.*** На рисунке 3 имеем $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$. Показать, что $CO \perp AE$.



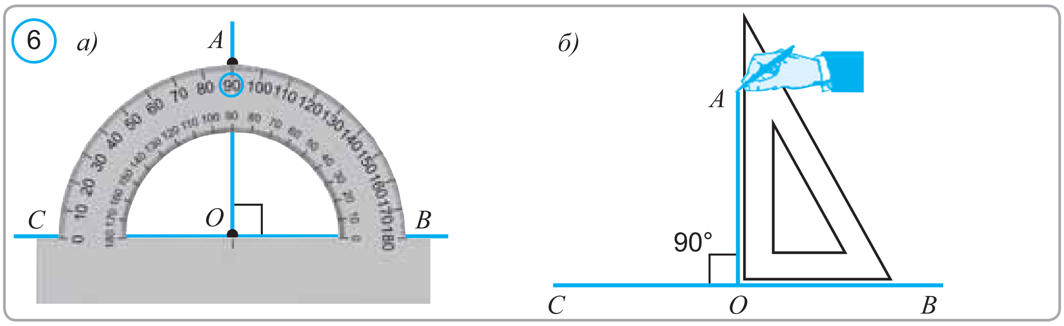

***Решение***: Пусть $\angle 1 = \angle 4 = \alpha$, $\angle 2 = \angle 3 = \beta$. По свойству измерения углов
$\angle AOE = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = \alpha + \beta + \alpha + \beta = 2\alpha + 2\beta = 180°$,
$2(\alpha + \beta) = 180°$, т. е. $\alpha + \beta = 90°$. Тогда $CO \perp AE$, т. к.
$\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = \alpha + \beta = 90°$.

Пусть даны прямая $a$ и точка $A$, не лежащая на ней. Соединим точку $A$ с некоторой точкой $B$ прямой $a$. Если прямая, на которой лежит отрезок $AB$, не перпендикулярна прямой $a$, то этот отрезок называется наклонной *(рис. 4)*. Если же отрезок $AB$ лежит на прямой, перпендикулярной прямой $a$, то этот отрезок называется *перпендикуляром, опущенным из точки $A$* на прямую $a$. На рисунке 5 отрезок $AB$ – перпендикуляр, опущенный на прямую $a$. Точка $B$ – *основание наклонной (перпендикуляра).*

***Практические способы построения перпендикуляра к прямой***

***1-ый способ.*** С помощью транспортира (рис. 6.$a$).

***2-ой способ.*** С помощью чертежного угольника (рис. 6.$б$).



## Геометрическое исследование

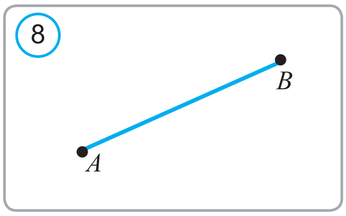
Начертите прямую. Из точки, не лежащей на ней, опустите на прямую перпендикуляр и несколько наклонных. Измерьте длины перпендикуляра и наклонных. Какой отрезок имеет наименьшую длину? Сформулируйте свой ответ в виде предположения. Можно ли принять это предположение без доказательства или его обязательно нужно доказать?

**Упражнение.** На рисунке 7 дан план фермерского хозяйства.

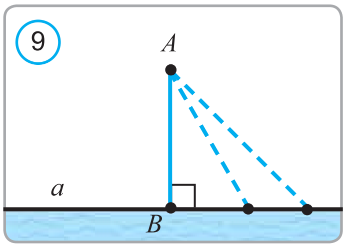
1. Фермер намеревается проложить дорогу от дома до фермы. Вы сумеете посоветовать ему, по какой прямой следует направить дорогу? Начертите этот путь на плане. Почему вы его выбрали?
2. Фермер хочет проложить кратчайшую дорогу и до канала. Какой путь вы ему посоветуете? Почему? Начертите этот путь?

7

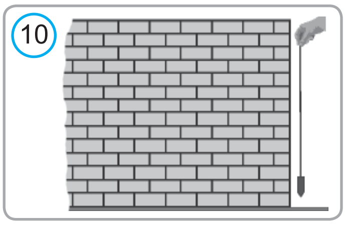

8




9



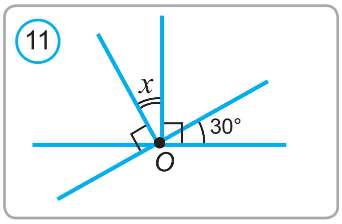

10

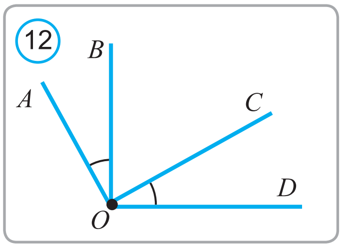


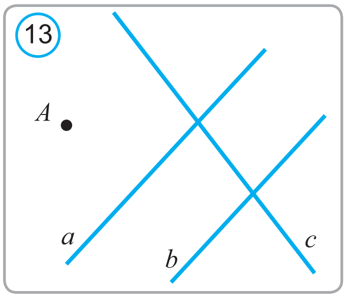
Вы знаете, что кратчайший путь, соединяющий точки $A$ и $B$ – это отрезок $AB$. Поэтому в младших классах длину отрезка $AB$ называли *расстоянием* от точки $A$ до точки $B$. Подобно этому расстоянием от точки $A$ до прямой $a$ естественно назвать длину перпендикуляра $AB$, опущенного из точки $A$ на прямую $a$. Легко понять, что этот отрезок будет короче любой наклонной, опущенной из точки $A$ на прямую $a$ *(рис. 9)*. Однако это утверждение нуждается в доказательстве, которое будет предложено позже.При строительстве дома перпендикулярность стен к полу проверяется с помощью отвеса *(рис. 10)*.

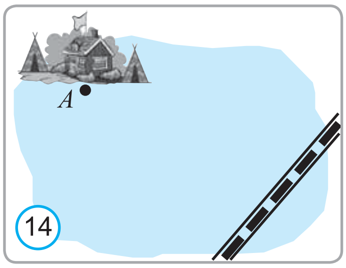
## Вопросы, задачи и задания

1. **1.** Какие прямые называются взаимно перпендикулярными? Приведите пример на чертеже.
2. **2.** Сколько перпендикуляров можно опустить из данной точки на прямую? Обоснуйте свой ответ.

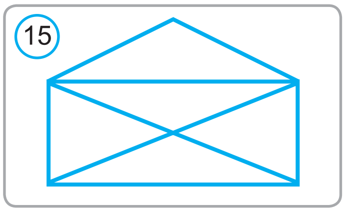



3. Что называется перпендикуляром, опущенным из данной точки на прямую?
4. Что называется наклонной, проведенной из точки к прямой?
5. Сколько наклонных можно провести из точки $A$ к прямой?
6. С помощью линейки и чертежного угольника восставить перпендикуляр к прямой из точки, лежащей на этой прямой.
7. Отметьте на прямой $a$ точки $A, B, C$ и с помощью транспортира проведите через каждую из точек перпендикуляр к прямой $a$.
8. Какова градусная мера угла, вертикального к прямому углу?
9. Прямая $a$ пересекает стороны угла $A$ в точках $B$ и $C$. Могут ли прямые $AB$ и $AC$ быть перпендикулярными к прямой $a$?
10. При пересечении двух прямых образуются четыре равных угла. Будут ли эти прямые взаимно перпендикулярными?
11. Найти неизвестный угол $x$ на рисунке 11.
12. Покажите, что если $OB \perp OD$, $OA \perp OC$, то $\angle AOB = \angle COD$ *(рис. 12)*.
13. Что называется расстоянием от точки до прямой?
14. С помощью угольника найдите расстояния от точки $A$ до прямых $a$, $b$ и $c$ *(рис.13)*.
15. С помощью транспортира и линейки найдите кратчайший путь от дома отдыха до железной дороги *(рис.14)*. Масштаб 1 : 10000.

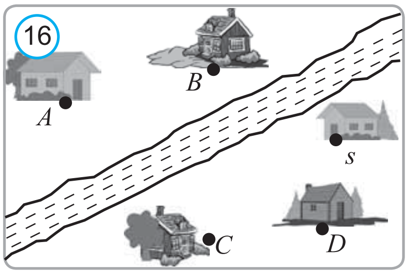



## *Геометрические головоломки*

1. Составьте 3 равных квадрата из а) 10; б) 11 одинаковых палочек.
2. Сумеете ли вы составить из 12 одинаковых палочек а) 4; б) 6 равных квадратов?

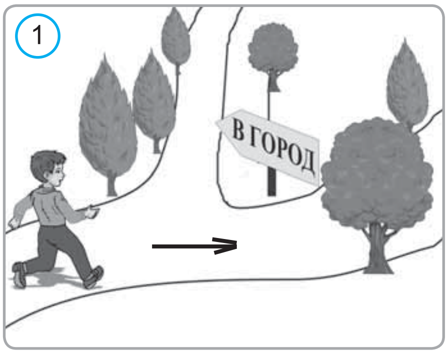
3. Обведите фигуру на рисунке 15, не отрывая карандаш от бумаги и не проходя ни по одному отрезку дважды.
4. На берегу реки расположены 5 сел, три из них на одном берегу реки, а оставшиеся два – на другом *(рис. 16)*. Каждое село непосредственно связано дорогами с оставшимися селами. Сколько дорог пересекают реку?

16




## 15 Метод доказательства от противного

1




2


Метод, который был использован при доказательстве единственности прямой в теореме урока 13, называется "методом доказательства от противного". Этот метод основан на следующей простой логической задаче. Предположим, что идя по дороге, вы пришли к развилке *(рис. 1)*. Вы знаете, что из этих дорог только одна выведет вас к нужному вам месту в городе. На указателе дорог показано, какой путь приведет вас к цели. Но вы не поверили этому указанию и отправились в путь по другой дороге. Вы шли и шли, пока не вышли к какому-то незнакомому вам селу. Какая же мысль сразу же придет вам в голову? Конечно, вы скажете: "Надпись на указателе была верной!" *(рис. 2)*.

При доказательстве от противного, вы выбираете тот же метод. Предположим, что утверждение, составляющее условие теоремы, выполнено. Тогда возможны 2 варианта:

1 вариант. Утверждение, составляющее заключение теоремы, верно.

2 вариант. Утверждение, составляющее заключение теоремы, не верно.

Выбирается утверждение, противоположное заключению теоремы. Если на этом пути, в результате логических рассуждений, приходим к выводу, который противоречит утверждению, справедливость которого была доказана или принята в качестве аксиомы, то это означает, что была выбрана неверная “дорога”. Это, в свою очередь, означает, что верна первая “дорога”, т. е. утверждение, приведенное в условии теоремы, приводит к верному утверждению, составляющему заключение теоремы. Что и доказывает теорему.

При доказательстве теорем этим методом следует: а) верно сформулировать утверждение, противоположное тому, что надо доказать; б) делать логически обоснованные выводы, следующие из принятого утверждения и прочих известных свойств; в) найти, в чем заключается противоречие с уже известными свойствами.

### Активизирующее упражнение

Сформулируйте утверждения, противоположные приведенным ниже:

а) отрезок $CD$ пересекает прямую $a$;

б) точки $A$ и $B$ лежат по одну сторону от прямой $a$;

в) длина отрезка $CD$ равна 15;

г) угол $AOB$ не является прямым;

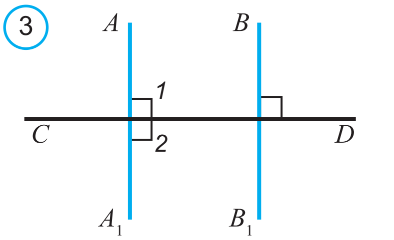
д) $\angle ABC > \angle MNL$;

е) длина наклонной $AB$ больше длины перпендикуляра $AC$.

***Теорема.*** **Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, не пересекаются.**

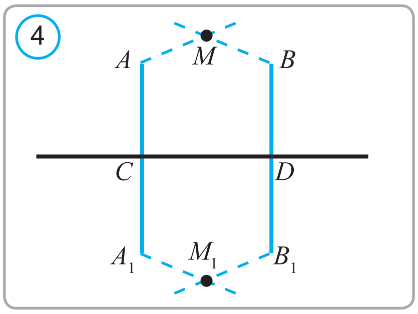
$AA_1$, $BB_1$ и $CD$ прямые, $AA_1 \perp CD$ и $BB_1 \perp CD$ *(рис. 3)* ⇒ прямые $AA_1$ и $BB_1$ не пересекаются

3




***Доказательство.*** Мысленно перегнем рисунок 3 вдоль прямой $CD$, совместив верхнюю и нижнюю полуплоскости. Так как углы 1 и 2 равны, то луч $CA$ совпадет с лучом $CA_1$. Точно так же луч $DB$ совпадет с лучом $DB_1$.

Предположим, что условия теоремы выполнены, но заменим ее заключение на противоположное: прямые $AA_1$ и $BB_1$ пересекаются и пусть точка $M$ – их точка пересечения (рис. 4). В таком случае, перегибая чертеж по прямой $CD$, мы совместим верхнюю и нижнюю полуплоскости и точка $M$ совпадет с некоторой точкой $M_1$ нижней полуплоскости, также принадлежащей прямым $AA_1$ и $BB_1$. Но через две (различные) точки проходит одна и только одна прямая (аксиома о принадлежности точек и прямых). Итак, предположив, что прямые $AA_1$ и $BB_1$ пересекаются, мы пришли к противоречию.




Значит, прямые $AA_1$ и $BB_1$ не пересекаются.

***Теорема доказана.***

***Теорема.*** Через точку, не лежащую на прямой, проходит единственная пря-мая, перпендикулярная этой прямой.

Докажите это утверждение самостоятельно.

## Вопросы, задачи и задания

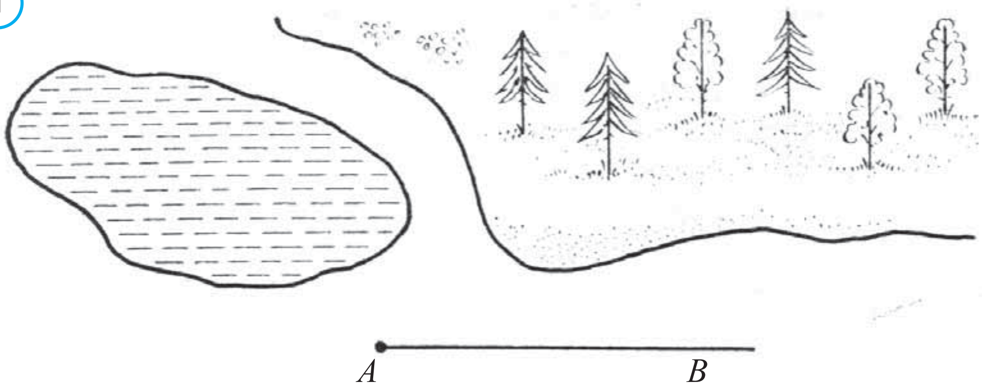
1. На каком правиле основан метод доказательства от противного?
2. Пусть точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой и: а) $AB=3{,}6$; $BC=5{,}4$; $AC=9$; б) $AB=2{,}4$; $BC=4{,}2$; $AC=1{,}8$. Докажите, что точка $C$ не может лежать между точками $A$ и $B$. Какая из этих точек лежит между двумя другими?
3. Найдите угол между биссектрисами двух смежных углов.
4. Докажите теорему о равенстве двух вертикальных углов методом доказательства от противного.
5. Какой из лучей $OA$, $OB$ и $OC$ проходит между двумя другими лучами, если $\angle AOB = 58°$, $\angle BOC = 17°$ и $\angle AOC = 41°$.
6. Сумма двух углов, образующихся при пересечении двух прямых, равна 120°. Найдите эти углы.
7. Разность двух углов, образующихся при пересечении двух прямых, равна 20°. Найдите эти углы.
8. Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.
9. На плоскости даны три точки $A$, $B$ и $C$: $AB = 2{,}6$, $AC = 8{,}3$, $BC = 6{,}7$. Докажите, что эти точки не могут лежать на одной прямой.
10. Сумма двух углов, образующихся при пересечении двух прямых, не равна 180°. Докажите, что эти углы являются вертикальными.

## 16 Практическое занятие

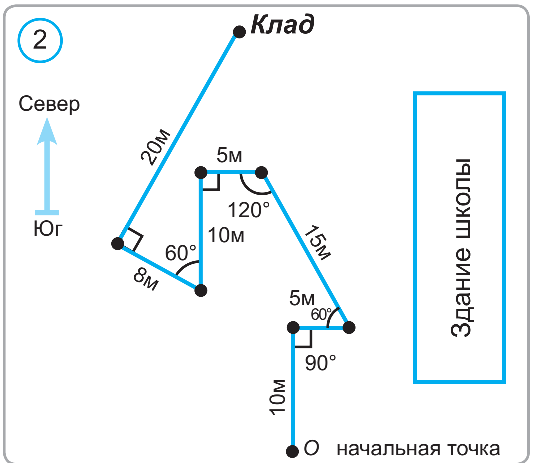
**1. Найдите клад.**

На рисунке 1 изображены карта и луч $AB$. Отложите от этого луча в полуплоскость, на которой нарисовано озеро, угол, равный 60°. От вершины построенного угла по стороне, отличной от стороны $AB$, пройдите 60 $м$ и попадете в точку $C$. От луча $CA$ в полуплоскость, где нарисовано озеро, отложите угол 120°. От вершины построенного угла по стороне, отличной от стороны $CA$, пройдите 60 $м$. Здесь под вершиной высокого карагача и закопан клад. Масштаб карты 1:2000. Скопируйте карту и укажите точку, где спрятан клад.

1




2




**2. Геометрические соревнования на чистом воздухе.**

В соревновании могут принять участие две или более групп. В каждой группе разрешается пользоваться рулеткой и большим транспортиром.

Класс разбитый на группы, трудится в разных уголках школьной площадки. "Клад" (например, шарик, письмо в конверте, ...) вначал прячут где-то на площадке. План, ведущий к кладу, готовится учителем заранее и передается группам. (Образец плана показан на рисунке 2). Группы начинают поиски клада, руководствуясь своими планами. Группа, которая первой пройдет вдоль всей ломаной, показанной на плане и найдет клад, будет объявлена победителем.

*Задание*. Составьте план пути, подобный изображенному на рисунке 2, по которому вы идете из дома в школу. Определите примерную длину пути.

## 17 Проверьте свои знания

**1. Заполните пропуски в предложениях в соответствии со смыслом:**

1. Углом называется фигура, состоящая из точки и ............., исходящих из этой точки.
2. На плоскости через две точки можно провести ................ и только одну прямую.
3. Градусная мера развернутого угла равна ............. .
4. Если две различные прямые пересекаются, то только в ......................точке.
5. Биссектрисой угла называется ........... , исходящий из вершины угла, и .............. .
6. Часть прямой, состоящая из точек, лежащих по одну сторону от некоторой ее точки, называется ........... .
7. Два угла, одна сторона которых общая, а две другие образуют прямую линию, называются ............... .
8. Прямая разбивает плоскость ...................... .
9. Биссектрисы вертикальных углов образуют ............. .
10. Серединой отрезка называется .................. на равные отрезки.
11. Если смежные углы ............. , то они являются прямыми углами.
12. У равных отрезков ....................... также равны.

**2. Если в следующих фразах имеется ошибка, найдите и исправьте ее:**

1. Углы, сумма которых равна 180°, – это смежные углы.
2. Две произвольные прямые на плоскости имеют только одну общую точку.
3. Прямая, исходящая из вершины угла и делящая угол пополам, называется биссектрисой угла.
4. Через произвольную точку можно провести только две прямые.
5. Угол, обе стороны которого лежат на лучах, называется развернутым углом.
6. Две прямые, лежащие на плоскости, делят ее на две полуплоскости.
7. Углы, получающихся при пересечении двух прямых, называются вертикальными.
8. Точка, делящая отрезок надвое, называется серединой отрезка.

9. От данного луча к заданой полуплоскости можно отложить только один прямой угол.
10. Для произвольных точек $A, B, C$ имеет место равенство $AB + BC = AC$ .
11. Сумма вертикальных углов равна 180°.

**3. Впишите в соответствующую строку правого столбца название геометрической фигуры, обладающей данным свойством:**

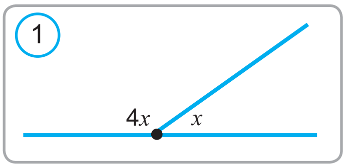
| | | |
|---|---|---|
| 1. | Сумма равна 180° | |
| 2. | Стороны являются лучами | |
| 3. | Угловая величина равна 180° | |
| 4. | Имеет определенную длину | |
| 5. | Делит отрезок пополам | |
| 6. | Истина, принимаемая без доказательства | |
| 7. | Делит угол пополам | |
| 8. | Образуется при пересечении прямых | |
| 9. | Необходимо доказать истинность | |
| 10. | Не имеет измерений | |

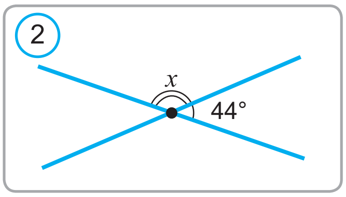
**4. Сопоставьте геометрическому понятию, данному в первом столбике, соответствующее свойство или толкование, взятое из второго столбика:**

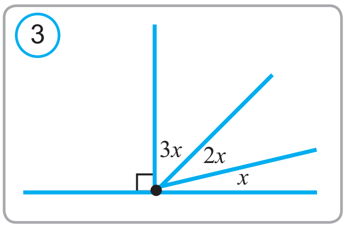
| *Геометрическое понятие* | *Толкование, свойство* |
|---|---|
| 1. Точка | A. Толкование слова “Геометрия” |
| 2. Прямая | B. Сумма равна 180° |
| 3. Измерение земли | C. Углы, равные между собой |
| 4. Отрезок | D. Точка на прямой и точки, лежащие по одну сторону от нее |
| 5. Луч | E. 180° |
| 6. Длина отрезка | F. Два луча с общим началом |
| 7. Равные фигуры | G. Невозможно измерить длину |
| 8. Полуплоскость | H. 1/90 часть прямого угла |
| 9. Планиметрия | I. Истина, принимаемая без доказательства |
| 10. Угол | J. Истина, требующая доказательство |
| 11. 1 градус | K. Две точки прямой и точки, лежащие между ними |
| 12. Градусная мера развернутого угла | L. Изучает свойства фигур на плоскости |
| 13. Вертикальные углы | M. Делит угол пополам |
| 14. Смежные углы | N. Одна из частей, на которые прямая разбивает плоскость |
| 15. Теорема | O. Не имеет частей |
| 16. Аксиома | P. Положительное число |
| 17. Биссектриса | Q. Можно совместить наложением |

### 5. Тесты (из данных ответов выберите один правильный):

1. Укажите основное геометрическое понятие, принятое без определения: а) плоскость; б) точка; в) отрезок; г) луч; д) прямая; е) полуплоскость.
   A) а; б; в  B) б; в; е  D) а; б; в; е  E) а; б; д.
2. Найдите меньший из смежных углов, если их разность равна 24 °.
   A) 72°;  B) 76°;  D) 78°;  E) 82°.
3. В какой стране геометрия сформировалась как наука?
   A) Древний Египет;  B) Вавилон;  D) Греция;  E) Китай.
4. Сумма трех углов, образующихся при пересечении двух прямых, равна 200°. Найдите меньший из углов.
   A) 20°;  B) 40°;  D) 60°;  E) 80°.
5. Даны 4 точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Через каждые две из этих точек проведены прямые. Найдите их число.
   A) 1;  B) 4;  D) 5;  E) 6.
6. Биссектриса данного угла образует с его стороной угол 60°. Найдите угол, смежный данному углу:
   A) 30°;  B) 60°;  D) 90°;  E) 120°.
7. Каково наибольшее число отрезков, на которые делится отрезок $AB$ двумя пересекающими его прямыми?
   A) 3;  B) 4;  D) 5;  E) 6.
8. Какова градусная мера угла, образованного стрелками часов в 4 часа?
   A) 60°;  B) 75°;  D) 105°;  E) 120°.
9. $AB = 6,\ C \in AB,\ AC = 3BC,\ BC = ?$
   A) 1;  B) 1,5;  D) 2;  E) 3.
10. На какой угол повернется часовая стрелка за 30 минут?
    A) 180°;  B) 15°;  D) 60°;  E) 30°.
11. $AB = 18,\ C \in AB,\ AC - BC = 4,\ BC = ?$
    A) 7;  B) 8;  D) 10;  E) 11.
12. Сумма вертикальных углов 180°. Найдите эти углы:
    A) 60° и 120°;  B) 45° и 135°;
    D) 90° и 90°;  E) 45° и 45°.
13. Каково наибольшее число частей, на которые три прямые разбивают плоскость?
    A) 4;  B) 5;  D) 6;  E) 7.
14. Найти величину угла $x$ по рисунку 1.
    A) 30°;  B) 36°;  D) 45°;  E) 60°.
15. Найти величину угла $x$ по рисунку 2.
    A) 136°;  B) 72°;  D) 56°;  E) 96°.
16. Найти величину угла $x$ по рисунку 3.
    A) 15°;  B) 30 °;  D) 45°;  E) 60°.



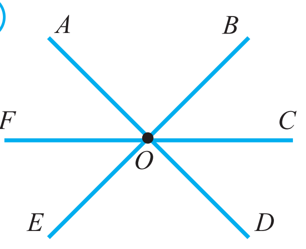
17. Найдите верное высказывание:
    A) На плоскости через данную точку можно провести только одну прямую.
    B) Часть прямой, состоящая из точек, лежащих по одну сторону от некоторой ее точки, называется лучом.
    D) Часть прямой, состоящая из точек, лежащих между двумя ее точками, называется отрезком.
    E) От каждого луча к заданной полуплоскости можно задать только один угол.
18. Найдите верное высказывание:
    A) Смежные углы – это развернутый угол.
    B) Если $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, то $AC = 11$.
    D) Если углы равны, то они являются вертикальными.
    E) Если два угла равны, то углы, смежные с ними, также равны.

## 6. Задачи

**1.** Постройте с помощью транспортира углы 10°, 20°, 40°, 60°, 90°, 130°, 170°, имеющие общую сторону.
**2.** Какие углы образует биссектриса развернутого угла с его сторонами?
**3.** Какова градусная мера угла, если его биссектриса составляет угол, равный 30° с его стороной?
**4.** Может ли биссектриса угла составлять тупой угол с его стороной?
**5.** Найти угол между биссектрисами углов $AOB$ и $BOC$, если $\angle AOB$=50°, $\angle BOC$=80°. Сколько решений имеет задача?
**6.** Сколько градусов составит наблюдаемый в лупу угол 15°, если посмотреть на него в лупу с десятикратным увеличением?
**7.** Постройте с помощью транспортира биссектрисы углов а) 90°; б) 60°; в) 50°; г) 20°.
**8.** Постройте с помощью транспортира биссектрису $OK$ угла $\angle AOB$=120°. Затем постройте биссектрисы получившихся углов $AOK$ и $KOB$ и найдите угол между ними.
**9.** Лежат ли точки $A$, $B$ и $C$ на одной прямой, если $AB = 1{,}8$ *м*, $AC = 1{,}3$ *м* и $BC = 3$ *м*?
**10.** Точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой. Найдите длину отрезка $BC$, если $AB = 2{,}7$ *м*, $AC = 3{,}2$ *м*. Сколько решений имеет задача?
**11.** На отрезке $AB$ длиной 15 *м* обозначена точка $C$. Найдите длины отрезков $AC$ и $BC$, если:
    а) отрезок $AC$ больше отрезка $BC$ на 3 *м*,
    б) точка $C$ – середина отрезка $AB$,
    в) длины отрезков $AC$ и $BC$ относятся как 2 : 3.

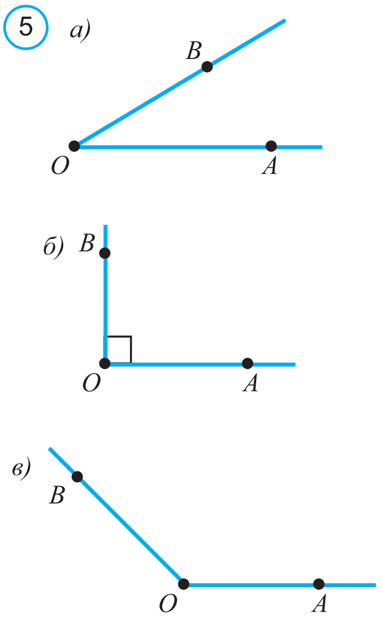
12. Точки $A, B, C, D$ лежат на одной прямой. Покажите, что $AB = BC = CD$, если точка $B$ – середина отрезка $AC$, точка $C$– середина отрезка $BD$.
13. Сколько прямых можно провести через а) 6; б) 7; в) 10 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?
14. Когда лучи $OA$ и $OB$ совместятся при наложении?
15. На луче $AB$ выбрана точка $C$, на луче $BA$ – точка $D$ так что $AC$ = 0,7 и $BD$ = 2,1. Найти $CD$, если $AB$ = 1,5.
16. Сколько пар вертикальных углов представлено на рисунке 4?
17*. Сколько времени на часах, если угол между часовой и минутной стрелками равен 45°, а минутная стрелка стоит на цифре 6?

4




18. Из точки O, не лежащей на прямой, проведены к прямой наклонная $OA$ и перпендикуляр $OB$. Найдите расстояние от точки O до прямой, если сумма их длин 13, а разность равна 1.
19. Известно, что углы $AOB$ и $BOC$ являются смежными. Найти эти углы, если:
а) угол $AOB$ больше угла $BOC$ на 40°;
б) угол $AOB$ в 4 раза меньше угла $BOC$;
в) $\angle AOB = \angle BOC + 44°$;
г) $\angle AOB = 5 \cdot \angle BOC$.
20. При пересечении двух прямых получилось 4 угла. Найдите градусную меру каждого угла, если сумма величин двух из них равна 100°.
21. Точки $A$, $B$ и $C$ расположены на плоскости так, что а) $AC + CB = AB$; б) $AB + AC = BC$. Какая точка лежит между двумя другими?
22. На рисунке 5 через точки $A$ и $B$ к сторонам угла проведите перпендикулярные прямые. Какие углы образуют эти прямые в точке пересечения?

5



## 18 2-ая контрольная работа

Контрольная работа, взятая за образец, состоит из двух частей, в первую часть входят пять тестов из приведенных на страницах 49–50. Во второй части предлагаются три задачи, подобные данным ниже (задача 4 для желающих получить оценку “отлично”):

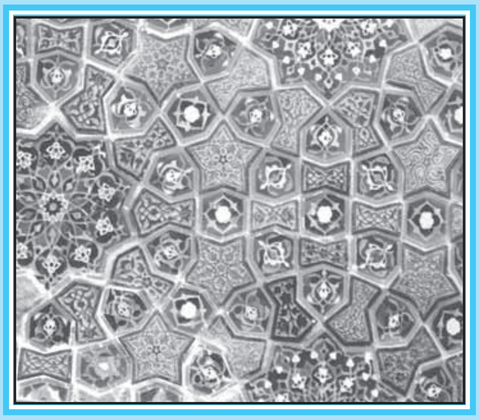
1. Сумма вертикальных углов $MOL$ и $KON$, образующихся при пересечении прямых $MN$ и $KL$ равна 148°. Найти угол $MOK$.
2. Разность смежных углов равна 60°. Найти меньший из этих углов.
3. Биссектриса угла образует с его стороной угол 66°. Найти угол, смежный с этим углом.

4*. Докажите, что биссектрисы смежных углов пересекаются под углом 90°.

**Для любознательных учеников.**

**1.** Познакомьтесь со страницами главы, соответствующей данной, в электронной версии учебника «Геометрия–7». Проверьте свои знания, выполнив данные задания и решив тесты в интерактивных анимационных приложениях к темам упомянутой главы.

**2.** Кроме того, найдите приведенные на странице 10 материалы из интернет ресурсов, относящиеся к упомянутой главе, и изучите их.



# ГЛАВА II

## ТРЕУГОЛЬНИКИ

**Изучив материал этой главы, вы приобретете следующие знания и навыки:**

**Знания:**

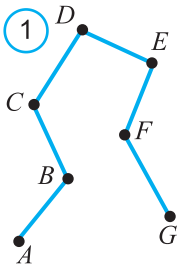
— Определение ломаной и ее виды;
— определение многоугольника;
— определение треугольника и его основные элементы, уметь различать виды треугольников в соответствии с его элементами;
— определения медианы, биссектрисы и высоты треугольника;
— признак СУС равенства треугольников;
— свойства равнобедренного треугольника;
— признак УСУ равенства треугольников;
— признак ССС равенства треугольников;
— свойства равностороннего треугольника;
— свойства серединного перпендикуляра к отрезку.

**Навыки:**

— Определять равные треугольники в соответствии признаками равенства;
— применять усвоенные знания при решении задач и выполнении практических работ;
— логически мыслить.

## 19 Ломаная. Многоугольник

1



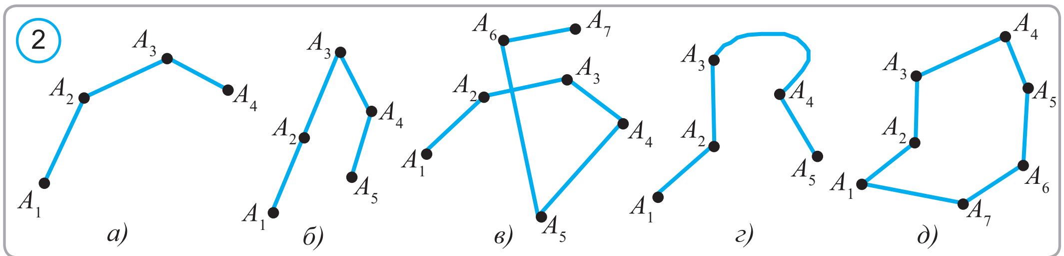

$ABCDEFG$ — ***ломаная линия или ломаная***;
$A, B, C, D, E, F, G$ — ***вершины ломаной***;
$AB, BC, CD, DE, EF, FG$ — ***звенья ломаной***.

**Ломаной** называется фигура, состоящая из отрезков $A_1A_2$, $A_2A_3$,..., $A_{n-1}A_n$ таких, что никакие два последовательных отрезка не лежат на одной прямой. Точки $A_1$, $A_2$,..., $A_n$ называются *вершинами* ломаной, отрезки $A_1A_2$, $A_2A_3$,..., $A_{n-1}A_n$ – *звеньями ломаной*.

На рисунке 1 изображена ломаная $ABCDEFG$. Если начальная и конечная вершины ломаной совпадают, она называется *замкнутой ломаной*.

***Упражнение.*** На рисунке 2 определите какая из линий является ломаной и обоснуйте свой ответ.

2

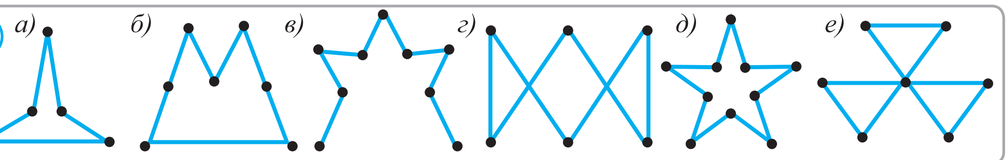



Замкнутая ломаная без самопересечений называется *многоугольником*.

### ***Активизирующее упражнение.***

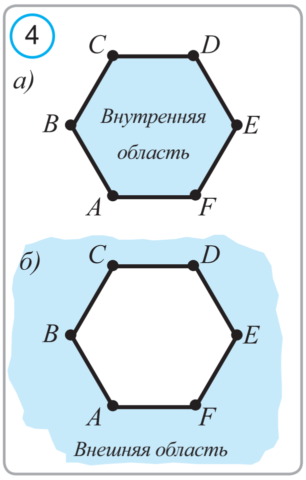
Перечислите, в соответствии с определением многоугольника, его свойства, и определите, является ли фигура, данная на рисунке 3, многоугольником.

3



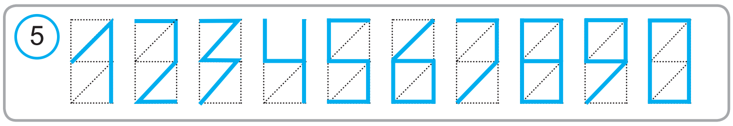
По числу вершин (сторон), многоугольник называется треугольником, четырехугольником, шестиугольником, в общем случае *n-угольником*. С примерами многоугольников вы познакомились в младших классах.

Каждый многоугольник делит плоскость на две области. Конечная часть плоскости, ограниченная многоугольником, называется его *внутренней областью*, бесконечная – *внешней областью*. На рисунке 4 показаны в цвете внутренняя (рис. *а*) и внешняя *(рис. б)* области шестиугольника $ABCDEF$.

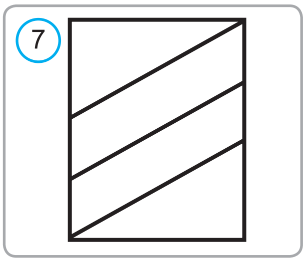


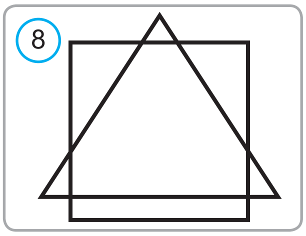

## Вопросы, задачи и упражнения

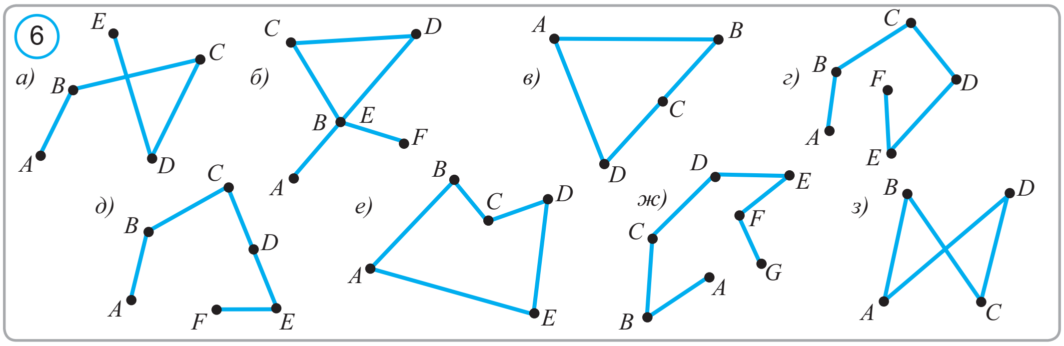
1. Что такое ломаная?
2. Начертите ломаную, обозначьте ее вершины и покажите на чертеже ее звенья.
3. Приведите примеры замкнутых ломаных.
4. В классе, школе, дома найдите предметы, напоминающие замкнутые ломаные.
5. Что такое многоугольник? Приведите примеры.
6. Какими ломаными представлены цифры *(рис. 5)*.

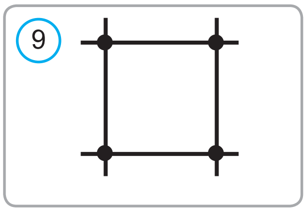


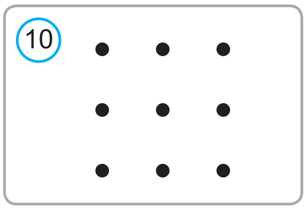

7. Какие из фигур на рисунке 6 являются а) ломаными; б) замкнутыми ломаными; в) многоугольниками.




9


10

8. Начертите 5-звенную ломаную, смежные звенья которой которой взаимно перпендикулярны. Может ли быть замкнутым такая ломаная?

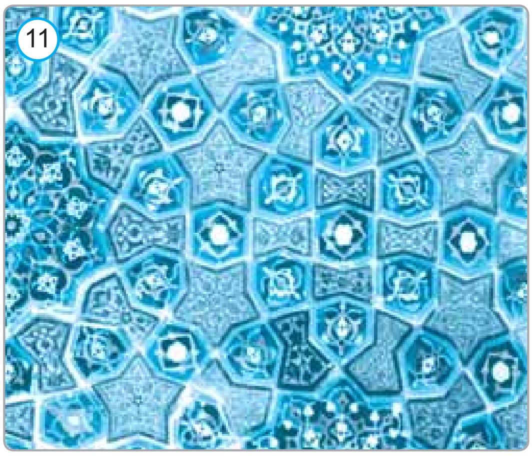
## *Геометрические головоломки*

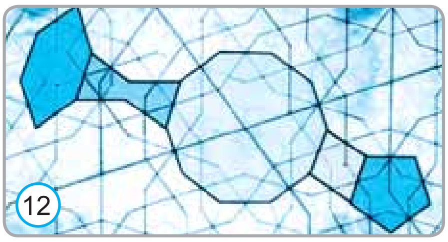
1. Сколько четырехугольников на рисунке 7?
2. Обведите фигуру на рисунке 8, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя дважды ни по одной линии.
3. Начертите треугольник, стороны которого проходят через точки на рисунке 9.
4. Сумеете ли вы начертить ломаную с 4 звеньями, проходящую через все 9 точек, показанных на рисунке 10?

## *Странички истории.*

### ***Наши архитекторы, на пять веков опередили инженерную науку своего времени.***

*Статья о средневековой архитектуре, опубликованная в США в феврале 2007 года, взбудоражила весь научный мир. Дело в том что аспирант Гарвардского университета Питер Лю был потрясен, знакомясь с узорами на куполе медресе Абдуллахана в Самарканде. Перед его мысленным взором проплывали узоры Пенроуза, сложные геометрические фигуры, с которыми наука познакомилась в 1970 г. Получалось так, что 500 лет тому назад наши архитекторы не только знали новейшие научные достижения нашего времени, но и творчески использовали их в своей работе. Да, так оно и случилось. На рисунке 11 изображены узоры средневекового памятника архитектуры. На рисунке 12 мы видим фотографию рисунка, обнаруженного в средневековой рукописи, на котором изображены многоугольники, представляющие основу упомянутого узора.*


11


12

## 20 Треугольник. Виды треугольников

Обозначим на плоскости три точки, не лежащие на одной прямой. Если соединить их между собой отрезками, то получится *треугольник* *(рис.1)*. Точки будут его *вершинами*, отрезки его сторонами. Обычно, вместо слова “треугольник” используется значок $\Delta$. Запись “$\Delta ABC$” читается “треугольник $ABC$”. Углы $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle ACB$ называются *углами* треугольника. Иногда их точнее называют *внутренними углами* треугольника *(рис.1)*.

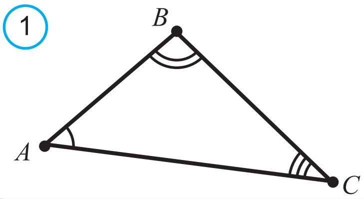
Углы треугольника можно обозначать и в виде $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Стороны и углы треугольника называются его элементами. Сумма длин всех трех сторон треугольника называется его *периметром*. Он обозначается заглавной буквой $P$. При этом используют выражения:

*Угол $BAC$ лежит между сторонами $AB$ и $AC$;*

*Стороны $AB$ и $AC$ называются сторонами, прилежащими к углу $A$;*

*Сторона $BC$ называется стороной, противолежащей углу $BAC$.*

1




*$\Delta ABC$ — треугольник $ABC$*

*точки $A$, $B$, $C$ — вершины треугольника*

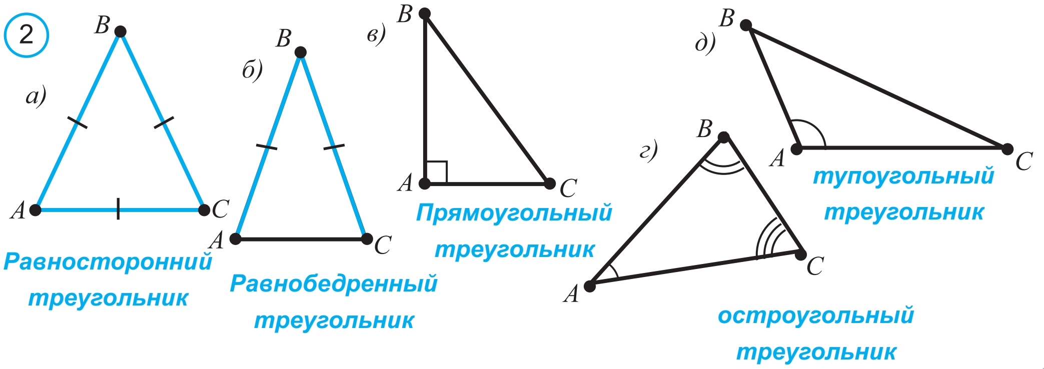
*отрезки $AB$, $BC$, $AC$ — стороны треугольника*

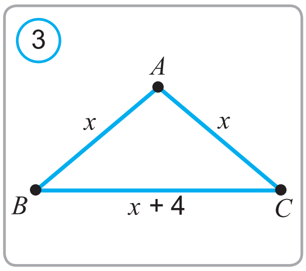
*$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — углы треугольника*

*$P = AB + BC + AC$ — периметр треугольника*

В зависимости от сторон и углов треугольники делятся на следующие виды:
если все стороны равны, то *треугольник равносторонний* *(рис. 2.а)*,
если две стороны равны, то *треугольник равнобедренный* *(рис. 2.б)*,
если один угол прямой, то *треугольник прямоугольный* *(рис. 2.в)*,
если все углы острые, то *треугольник остроугольный* *(рис. 2.г)*,
если один угол тупой, то *треугольник тупоугольный* *(рис. 2.д)*.

2






**Задача.** Основание равнобедренного треугольника с периметром 28 *см*, на 4 *см* больше боковой стороны. Найти его стороны.

**Решение**: Обозначим боковую сторону треугольника $ABC$ через $x$, тогда основание будет $x+4$ *(рис. 3)*.Так как по условию, $P = x + x + x + 4 = 3x + 4 = 28$ *см*, то $x = 8$ *см*. Значит, $AB = AC = 8$ *см*; $BC = 12$ *см*. Ответ: 8 *см*; 8 *см*; 12 *см*.

## Вопросы, задачи и задания

**1.** Какая фигура называется треугольником?

**2.** В треугольнике $PQR$

а) какая сторона противолежит $\angle P$?

б) какие углы прилежат к стороне $PQ$?

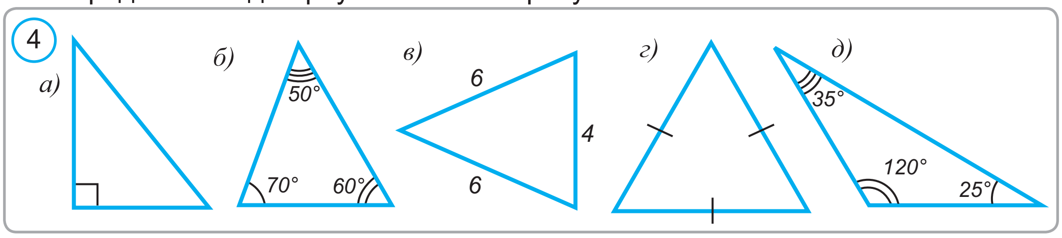
в) какой угол лежит между сторонами $PQ$ и $QR$?

г) против какого угла лежит сторона $PR$?

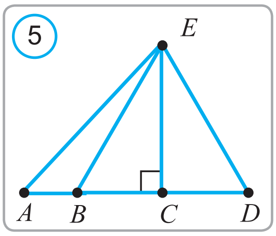
Постарайтесь ответить на эти вопросы, не глядя на фигуру.

**3.** Какие виды треугольников вы знаете? Начертите треугольник каждого вида Обозначьте их. Исходя из определения видов треугольников, определите их особенности.

**4.** Определите виды треугольников на рисунке 4.




**5.** Постройте "на глаз" треугольник с тремя равными сторонами. Затем измерьте его стороны и сравните результаты.




**6.** Начертите равносторонний треугольник, измерьте его стороны и сделайте вывод.

**7.** Сколько треугольников на рисунке 5 имеют одну вершину: а) в точке $A$; б) в точке $B$; в) в точке $C$?

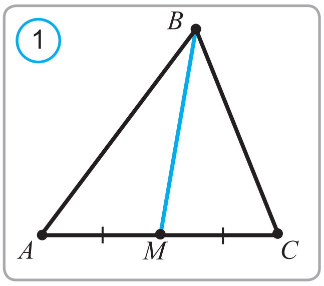
**8.** Треугольники каких видов вы видите на рисунке 5? Запишите их в тетрадь в соответствии с видами.

**9.** Начертите треугольник и обозначьте вершины буквами. Измерьте длины сторон и найдите периметр.

## 21 Основные элементы треугольника: медиана, высота и биссектриса

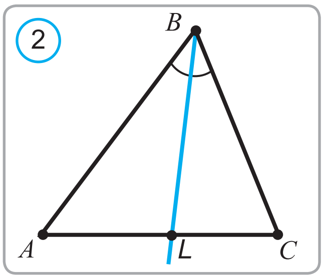
Соедините вершину $B$ треугольника $ABC$ с серединой противолежащей стороны, точкой $M$ *(рис. 1)*. Отрезок $BM$ называется *медианой* треугольника $ABC$ Говорят, что эта медиана проведена из вершины $B$ к стороне $AC$.

> Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей ей стороны, называется *медианой* треугольника.



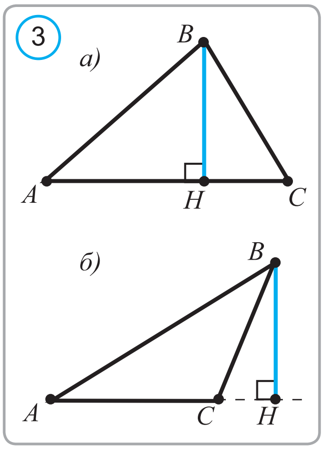

Проведем биссектрису угла $B$ треугольника $ABC$ *(рис. 2)*. Обозначим точку пересечения биссектрисы со стороной $AC$ через $L$. Полученный отрезок $BL$ называется *биссектрисой* треугольника $ABC$.

> Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противолежащей ей стороны, называется *биссектрисой* треугольника.




Опустим из вершины $B$ треугольника $ABC$ перпендикуляр на прямую, содержащую сторону $AC$ *(рис. 3)*. Обозначим основание перпендикуляра через $H$. Отрезок $BH$ называется *высотой* треугольника $ABC$.

> Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую вершине сторону, называется *высотой* треугольника.



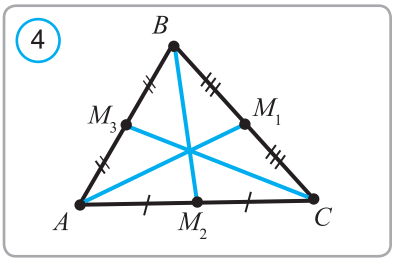

Каждый треугольник имеет три вершины, а значит, и три медианы, биссектрисы и высоты.

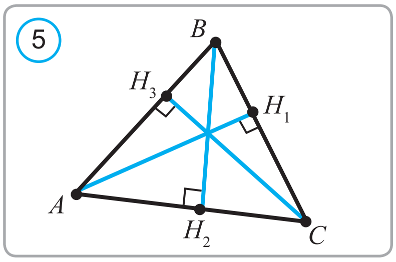
На рисунке 4 отрезки $AM_1$, $BM_2$ и $CM_3$ – медианы треугольника $ABC$.

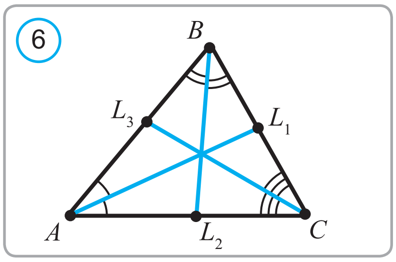
На рисунке 6 отрезки $AL_1$, $BL_2$ и $CL_3$ — биссектрисы треугольника $ABC$.

На рисунке 5 отрезки $AH_1$, $BH_2$ и $CH_3$ — высоты треугольника $ABC$.

Свойства этих важных элементов треугольника вы изучите позже.



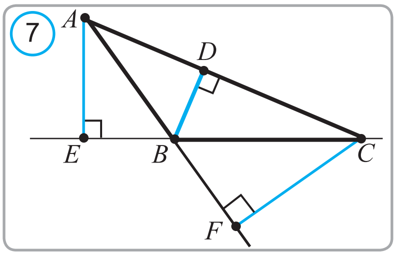




## *Геометрические исследования*

1. Начертите произвольный треугольник. Проведите все его медианы *(рис. 4)*. Что вы заметили? Повторите эксперимент еще для двух треугольников и замеченное свойство сформулируйте в виде предположения.
2. Начертите произвольный треугольник. Проведите все его высоты *(рис. 5)*. Что вы заметили? Повторите эксперимент еще для двух треугольников и замеченное свойство сформулируйте в виде предположения.
3. Начертите произвольный треугольник. Проведите все его биссектрисы *(рис. 6)*. Что вы заметили? Повторите эксперимент еще для двух треугольников и замеченное свойство сформулируйте в виде предположения.

Можно ли на основе проделанных опытов назвать установленное свойство теоремой? Почему?

***Упражнение.*** Проведите все высоты тупоугольного треугольника.




***Выполнение*:** У треугольника, в частности, тупоугольного треугольника, имеются три высоты. Рассмотрим треугольник $ABC$ *(рис. 7)*. Высота $BD$, проведенная из вершины тупого угла, проходит внутри треугольника. Для того чтобы опустить высоту из вершины $A$, надо продолжить сторону $BC$ за точку $B$ и из вершины $A$ опустить перпендикуляр на на луч $BE$. Полученный отрезок $AE$ будет высотой треугольника $ABC$, проведенной из вершины $A$. Точно также на продолжение стороны $AB$ за точку $B$ можно опустить высоту $CF$.

## Вопросы, задачи и задания

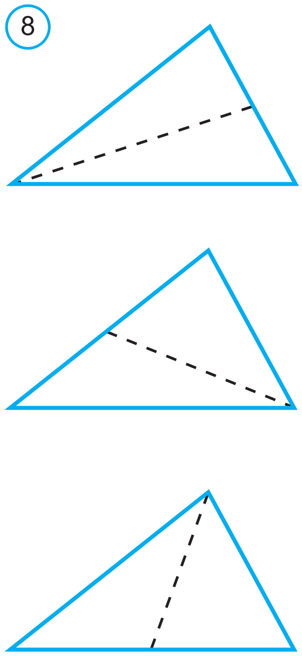
1. Что такое медиана треугольника? Сколько медиан у треугольника? Начертите и покажите на чертеже.
2. Что такое высота треугольника? Сколько высот у треугольника? Начертите и покажите на чертеже.
3. Что такое биссектриса треугольника? Сколько биссектрис у треугольника? Начертите и покажите на чертеже.
4. В чем сходство и в чем различие между биссектрисой угла и биссектрисой треугольника?
5. *(Практическое упражнение)*. Три равных треугольника разрежьте по их медианам *(рис. 8)*. Из 6 полученных треугольников составьте один треугольник.
6. Какие из рассмотренных элементов всегда проходят внутри треугольника?

**7*.** В каком треугольнике все высоты пересекаются в одной из вершин?

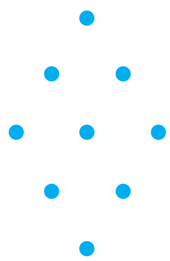
**8*.** Может ли высота треугольника быть меньше любой из его сторон?

9. Найти высоту треугольника с периметром, равным 36, если она разбивает его на два треугольника с периметрами 18 и 24.
10. Найти биссектрису треугольника с периметром, равным 36, если она разбивает его на два треугольника с периметрами 24 и 30.
11. В треугольнике $ABC$ стороны $AB$ и $BC$ равны, а медиана $BD$ равна 4 $см$. Найти периметр треугольника $ABC$, если периметр треугольника $ABD$ равен 12 $см$.

8



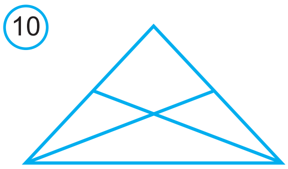
9



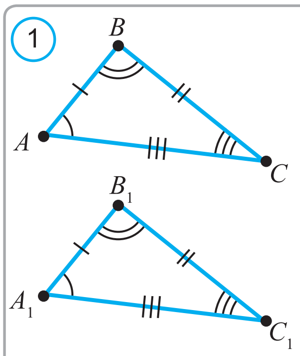
## Геометрические головоломки

1. Сложите 2 треугольника из 5 равных палочек.
2. Сложите 5 треугольников из 9 равных палочек.
3. Сколько имеется равнобедренных треугольников с вершинами в точках, данных на рисунке 9?
4. Сколько треугольников на рисунке 10?

10



## 22 Первый признак (СУС) равенства треугольников




$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

$AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$,

$AC = A_1C_1$

$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$,

$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$,

$\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$

Согласно определению равенства геометрических фигур, два треугольника будут *равны*, если их можно совместить, накладывая друг на друга. На рисунке 1 треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ равны. Выбрав любой из них, можно совместить его с другим. При этом три вершины и три стороны одного совпадут с соответствующими вершинами и сторонами второго. Очевидно, при этом углы одного треугольника совместятся с соответствующими вершинами второго.

Равенство треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$ записывается в виде

$$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1.$$

На чертеже равные углы отмечаются равным число дужек, равные стороны – равным числом черточек, как это показано на рисунке 1.

### *Активизирующий вопрос.*

Как можно проверить на практике, что два участка земли треугольной формы равны? Их ведь нельзя наложить один на другой.

Надо ли накладывать один треугольник на другой, чтобы убедиться в их равенстве? В этом нет необходимости. Эту задачу можно решить, сравнивая некоторые их элементы. Теоремы, носящие название “признаки равенства треугольников”, именно об этом.

Причина, по которой эти теоремы называются "признаками", состоит в том, что с их помощью можно заключить, равны треугольники или нет.

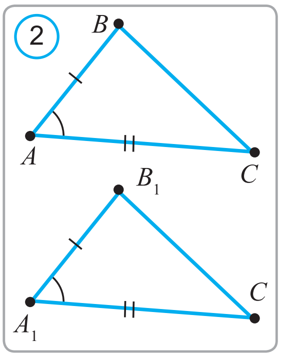
В общем, "признак" в геометрии позволяет определять некоторые свойства фигуры с помощью теоремы, описывающей вспомогательные условия для их реализации.

Пусть задан треугольник $ABC$. Равный ему треугольник можно построить с помощью следующего метода. Измерим угол $A$ и построим на плоскости равный ему угол $A_1$. На сторонах угла $A_1$ отложим отрезки $A_1B_1 = AB$ и $A_1C_1 = =AC$ соответственно. Соединим точки $B_1$ и $C_1$. В результате получим вместе с треугольником $ABC$ треугольник $A_1B_1C_1$, у которого две стороны и угол, заключенный между ними, равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, исходного треугольника. Тогда треугольник $A_1B_1C_1$ будет равен треугольнику $ABC$.

Следующая теорема устанавливает это. Ее название "Теорема о равенстве треугольников по двум сторонам и углу, заключенному между ними" или "признак “СУС” равенства треугольников". *(СУС – это “Сторона”, “Угол”, “Сторона").*

**Теорема.** ***(Признак СУС равенства треугольников)*. Если две стороны и угол, заключенный между ними одного треугольника, соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними другого треугольника, то такие треугольники равны** *(рис. 2)*.

$$\triangle ABC \text{ и } \triangle A_1B_1C_1,\quad AB = A_1B_1,\ AC = A_1C_1,\ \angle A = \angle A_1 \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$

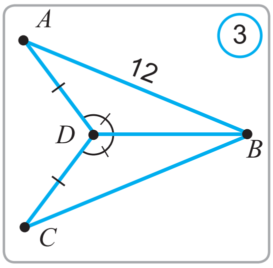



***Доказательство.*** Так как $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то треугольник $ABC$ можно наложить на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина $A$ совместилась с вершиной $A_1$, а стороны $AB$ и $AC$ наложились на лучи $A_1B_1$ и $A_1C_1$ соответственно.

Так как $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$, то сторона $AB$ совместится со стороной $A_1B_1$, сторона $AC$ – со стороной $A_1C_1$. Тогда точка $B$ совместится с точкой $B_1$, точка $C$ – с точкой $C_1$. Но в таком случае, стороны $B_1C_1$ и $BC$ также совместятся. Следовательно, совместятся все три вершины треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$.

Таким образом, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

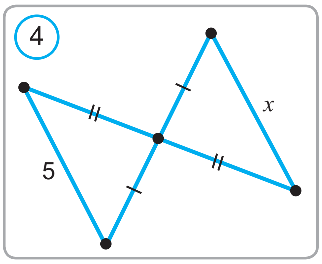
***Теорема доказана.***

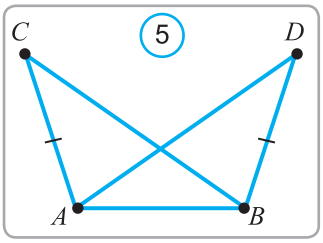


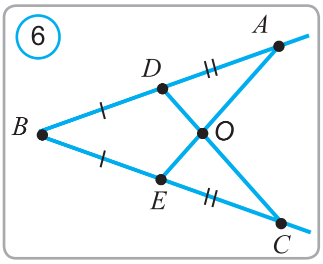

***Задача.*** Найти отрезок $BC$, используя сведения, приведенные на рисунке 3.

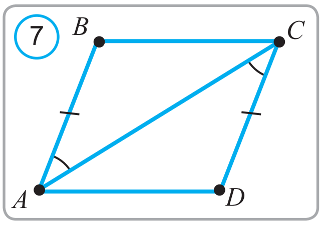
***Решение:*** Рассмотрим треугольники $ADB$ и $CDB$. У них $AD = DC$, $\angle ADB = \angle CDB$, $BD$ — их общая сторона. Значит, по признаку СУС равенства треугольников $\triangle ADB = \triangle CDB$. В частности, $CB = AB = 12$.

***Ответ:*** 12.



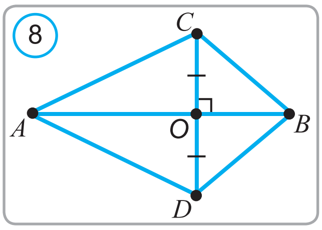



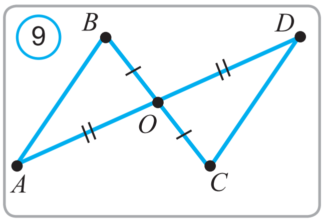



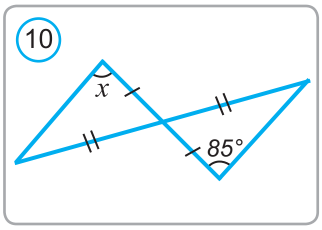




## Вопросы, задачи и задания

1. Какие треугольники называются равными?
2. Равенство каких элементов следует из равенства $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ треугольников?
3. С помощью каких элементов устанавливается по признаку СУС равенство треугольников?
4. Сформулируйте признак СУС равенства треугольников.
5. Найдите неизвестный отрезок $x$ на рисунке 4.
6. Покажите на рисунке 5, что из равенства $\angle CAB = \angle ABD$ следует, что $AD = BC$.
7. Покажите на рисунке 6, что $\angle BAO = \angle BCO$.
8. Докажите на рисунке 7, что $\Delta ABC = \Delta CDA$.
9. Докажите на рисунке 8, что $\Delta ABC = \Delta ABD$.
10. Отрезки $AD$ и $BC$ пересекаются в точке $O$ и делятся этой точкой пополам *(рис. 9)*. Докажите, что
    а) $\Delta AOB = \Delta DOC$;
    б) $BD = AC$;
    в) $\Delta ABD = \Delta DCA$.
    г) Найти углы $D$ и $C$ треугольника $DOC$, если в треугольнике $AOB$ имеем $\angle A = 35°$ и $\angle B = 62°$.
11. На рисунке 10 найдите неизвестный угол $x$.
12. Периметр одного треугольника больше периметра другого. Могут ли быть равными эти треугольники?
13. На стороне $AB$ треугольника $ABC$ взята точка $D$, на стороне $A_1B_1$ треугольника $A_1B_1C_1$ – точка $D_1$. Известно, что $\angle ADC = \angle A_1D_1C_1$ и $BD = B_1D_1$. До-кажите равенство треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$.

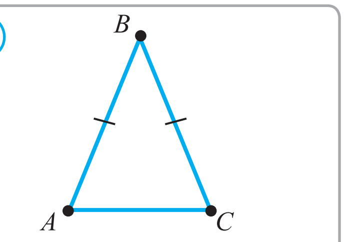


## 23 Свойства равнобедренного треугольника

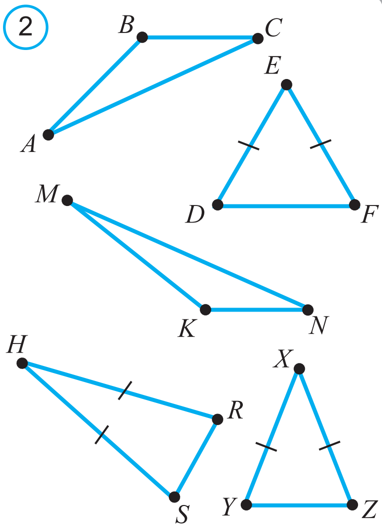
Треугольник, две стороны которого равны, называется, как было сказано, *равнобедренным треугольником.* Равные стороны равнобедренного треугольника называются его *боковыми сторонами*, а третья сторона называется *основанием.*

1



$\Delta ABC$ – ***равнобедренный,***
$AB$, $BC$ – ***боковые стороны,***
$AC$ – ***основание,*** $B$ – ***вершина***

### *Активизирующее упражнение*

Какие треугольники на рисунке 2 равно-бедренные? Назовите их основания и боковые стороны.

2



### *Геометрическое исследование*

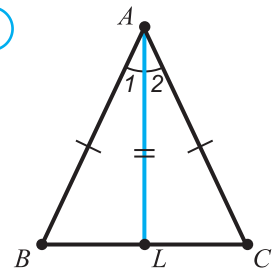
Начертите произвольный равнобедренный треугольник. Измерьте его углы, прилежащие к основанию и сравните их. Повторите опыт еще с 2–3 другими равнобедренными треугольниками и свою догадку выразите в виде утверждения. Можно ли утверждать, что это свойство, найденное в результате опыта, присуще всем равнобедренным треугольникам?

***Теорема.*** **Углы при основании равнобедренного треугольника равны.**

$\Delta ABC,\ AB = AC$ ⇒ $\angle B = \angle C$

***Доказательство.*** Пусть $AL$ — биссектриса треугольника $ABC$ *(рис. 3)*. Рассмотрим треугольники $ABL$ и $ACL$. У них сторона $AL$ – общая, $AB = AC$ по условию теоремы, т. е. $\Delta ABC$ — равнобедренный. Наконец, $\angle 1 = \angle 2$, так как $AL$ — биссектриса.

Тогда, по признаку СУС равенства треугольников, $\Delta ABL = \Delta ACL$. Значит, $\angle B = \angle C$. ***Теорема доказана.***

3


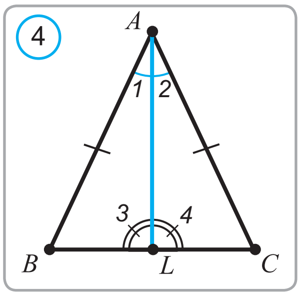
## Геометрическое исследование

Начертите равнобедренный треугольник. Проведите биссектрису его угла при вершине. Сравните длины отрезков, на которые точка пересечения биссектрисы с основанием, разбила основание. Какой вывод можно сделать? Затем измерьте углы, которые биссектриса образует с основанием. Какой вывод из этого следует? Сформулируйте выводы в виде утверждения. Можно ли утверждать, что этими свойствами обладает любой равнобедренный треугольник?

***Теорема.*** **Биссектриса, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является также его медианой и высотой** *(рис. 4)*.

$\Delta ABC$, $AB = AC$, $AL$ – биссектриса. ⇒ $AL$ – медиана и высота

***Доказательство.*** Если отрезок $AL$ биссектриса треугольника $ABC,$ то по доказанной выше теореме $\Delta ABL = \Delta ACL$. Из равенства треугольников следует, что $BL = LC$ и $\angle 3 = \angle 4$.




Значит, точка $L$ – середина стороны $BC$, $AL$ – медиана треугольника $ABC$.

Так как $\angle 3 = \angle 4$ и эти углы – смежные, то они являются прямыми углами.

Таким образом, отрезок $AL$ будет также и высотой треугольника .

***Теорема доказана.***

***Вывод.*** Биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника является также его медианой и высотой.

***Упражнение.***

**1.** Что можно сказать о биссектрисах, медианах и высотах равностороннего треугольника?

***Задача.*** К боковым сторонам равнобедренного треугольника $ABC$ проведены медианы $AD$ и $CF$. Докажите, что $\Delta ADC = \Delta CFA$ и $\Delta ADB = \Delta CFB$ (*рис.* 5).

$\Delta ABC$, $AB = BC$,
$AD$ и $CF$ — медианы ⇒ $\Delta ADC = \Delta CFA; \Delta ADB = \Delta CFB$

***Доказательство.*** Так как $AB = BC$, то отрезки, на которые эти стороны разбиваются медианами $AD$ и $CF$ равны:

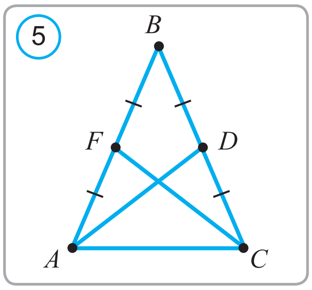
$$AF = FB = BD = CD. \qquad (1)$$

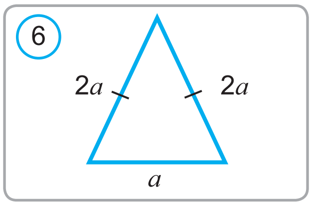
а) В треугольниках $ADC$ и $CFA$
1. $\angle ACD = \angle FAC$, так как $\Delta ABC$ – равнобедренный;
2. сторона $AC$ общая;
3. $AF = CD$ — согласно равенству (1).
Следовательно, по признаку СУС равенства треугольников $\Delta ADC = \Delta CFA$.

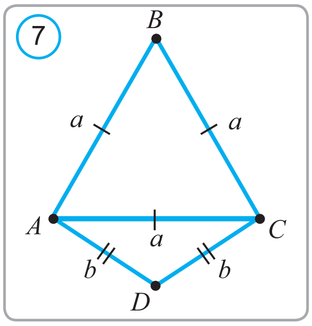
б) Докажите самостоятельно, что
$$\Delta ADB = \Delta CFB.$$

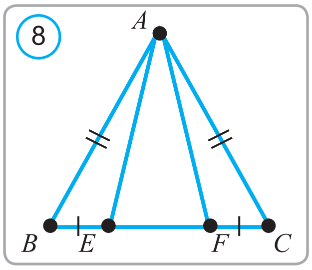
## Вопросы, задачи и задания

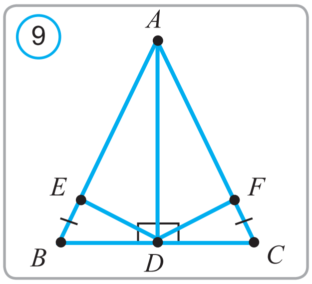
1. Какие треугольники называются равнобедренными?
2. Какие углы равнобедренного треугольника равны?
3. На рисунке 6 периметр $P = 50$ *см*. $a = ?$
4. На рисунке 7 $P_{ABC} = 36$ и $P_{ADC} = 28$. $a = ?$, $b = ?$
5. Докажите, что в равнобедренном треугольнике равны медианы, проведенные к боковым сторонам.
6. На рисунке 8 имеем $AB = AC$, $BE = FC$. Докажите, что а) $\Delta ABE = \Delta ACF$; б) $AE = AF$; в) $\Delta ABF = \Delta ACE$.
7. На рисунке 9 имеем $AB = AC$, $BE = CF$. Докажите равенства а) $\Delta AED = \Delta AFD$; б) $\Delta BED = \Delta CFD$.
8. Докажите, что в равностороннем треугольнике все углы равны.
9. Докажите, что если в двух равнобедренных треугольниках равны основания и высоты, опущенные на основания, то эти треугольники равны.
10. В равнобедренном треугольнике основание больше боковой стороны на 3 *см*, но меньше суммы боковых сторон на 5 *см*. Найти стороны треугольника.
11. Докажите, что если соединить середины сторон равнобедренного треугольника, получится равнобедренный треугольник.



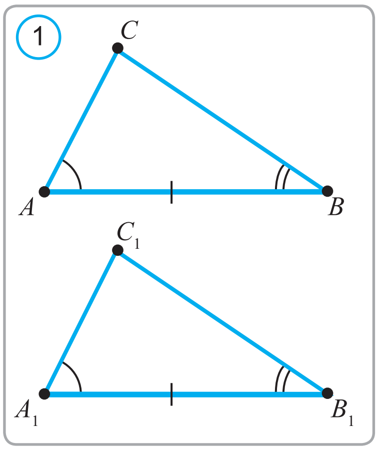



## 24 Второй признак (УСУ) равенства треугольников

Рассмотрим признак равенства треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам. В дальнейшем этот признак будем называть “признак УСУ равенство треугольников”.

***Теорема.*** ***(Признак УСУ равенства треугольников)*. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то эти треугольники равны.**

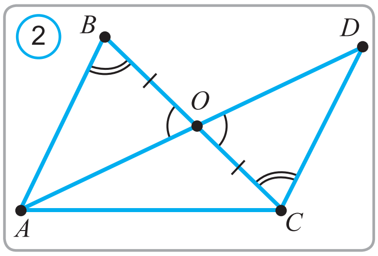
$\Delta ABC$ и $\Delta A_1B_1C_1$,
$AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ $\Rightarrow$ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$




***Доказательство.*** Наложим треугольник $ABC$ на треугольник $A_1B_1C_1$ так чтобы совместились вершины $A$ и $A_1$, стороны $AB$ и $A_1B_1$ и вершины $C$ и $C_1$ лежали по одну сторону от прямой $A_1B_1$. Тогда сторона $AC$ пойдет по лучу $A_1C_1$, так как $\angle A = \angle A_1$, сторона $BC$ – по лучу $B_1C_1$, так как $\angle B = \angle B_1$. Поэтому точка $C$, будучи общей точкой лучей $AC$ и $BC$, будет также и общей точкой лучей $A_1C_1$ и $B_1C_1$. В таком случае точка $C$ совместится с точкой $C_1$ – общей точкой лучей $A_1C_1$ и $B_1C_1$. В результате совместятся стороны $AC$ и $A_1C_1$, $BC$ и $B_1C_1$. Таким образом, треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ совпадут, что и означает их равенство.

***Теорема доказана.***

***Задача.*** Используя данные рисунка 2, докажите, что $\Delta AOB = \Delta DOC$.




***Решение.*** Углы $\angle AOB$ и $\angle DOC$ равны как вертикальные.

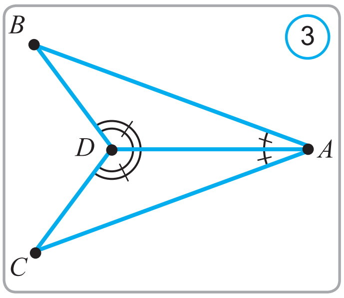
Таким образом,

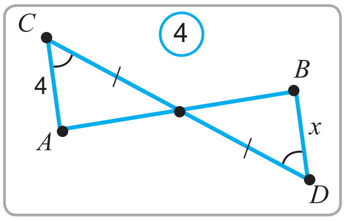
$$BO = OC,\ \angle ABO = \angle DCO,\ \angle AOB = \angle DOC$$

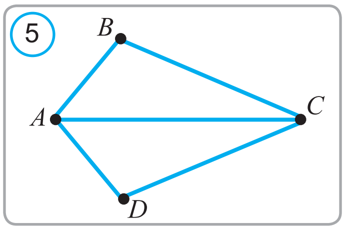
и по признаку УСУ равенства треугольников $\Delta AOB = \Delta DOC$.

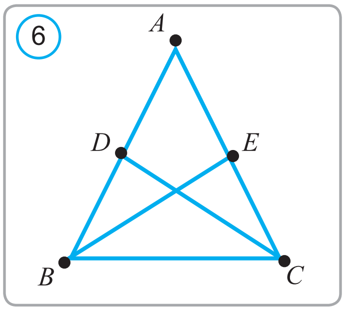
## Вопросы, задачи и задания

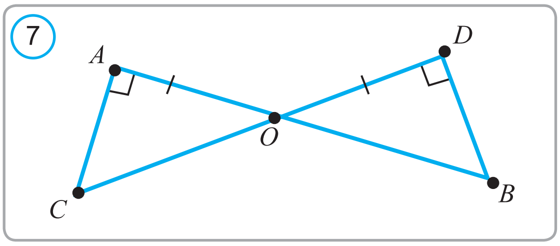
1. Сравнением каких элементов устанавливается равенство треугольников по признаку УСУ?
2. Сформулируйте признак УСУ равенства треугольников.
3. Докажите, что $\Delta ABD = \Delta ACD$ на рисунке 3.
4. Найти неизвестный отрезок $x$ на рисунке 4.
5. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta ADC$ на рисунке 5, если отрезок $AC$ лежит на биссектрисах углов $BAD$ и $BCD$.
6. В треугольниках $ABC$ и $A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $\angle B = \angle B_1$. На сторонах $AB$ и $A_1B_1$ выбраны точки $D$ и $D_1$ так, что $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$. Докажите, что $\Delta BCD = \Delta B_1C_1D_1$.
7. Отрезки $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $O$. Докажите, что треугольники $ACO$ и $DBO$ равны, если $BO = CO$ и $\angle ACO = \angle DBO$.
8. Доказать, что если $AB = AC$ в треугольнике $ABC$ и $BE$ и $CD$ – его биссектрисы, то $BE = CD$ (рис. 6).
9. Докажите, что $\Delta OAC = \Delta ODB$ (рис. 7).
10. Треугольники $ABC$ и $ADC$ равны. Точки $B$ и $D$ лежат по разные стороны от прямой $AC$. Докажите, что треугольники $ABD$ и $BCD$ равнобедренные.
11. На основе данных рисунка 8 найдите отрезки $AC$ и $BD$.

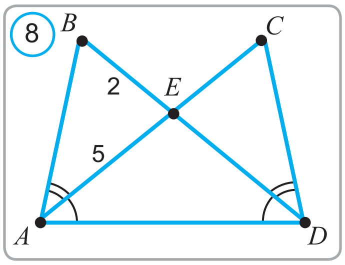


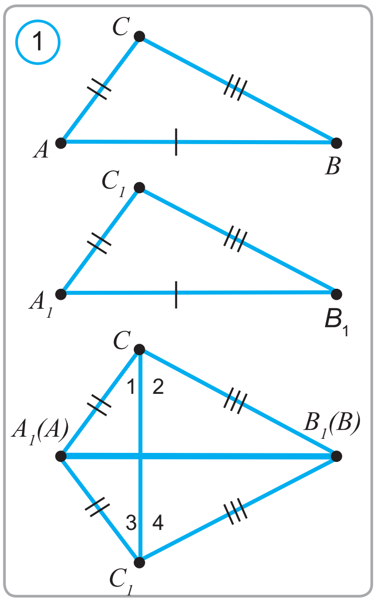



## 25 Третий признак (ССС) равенства треугольников

Познакомимся теперь с признаком равенства треугольников по трем сторонам. В дальнейшем мы будем называть его “признак ССС равенство треугольников”.

***Теорема.*** ***(Признак ССС равенства треугольников).*** **Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то эти треугольники равны.**



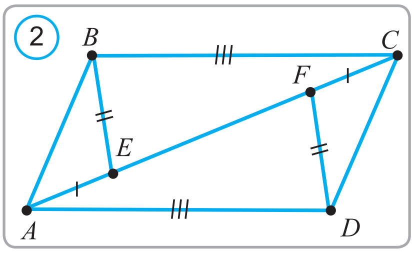

Дано : $\Delta ABC$ и $\Delta A_1B_1C_1$; $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$.

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

***Доказательство.*** Пусть $AB$ – наибольшая сторона треугольника $ABC$. Приложим треугольник $ABC$ к треугольнику $A_1B_1C_1$ так чтобы сторона $AB$ совместилась со стороной $A_1B_1$ и вершины $C$ и $C_1$ лежали по разные стороны от прямой $A_1B_1$ (рис. 1). Тогда, в силу условия $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$, треугольники $A_1C_1C$ и $B_1C_1C$ будут равнобедренными. По свойствам равнобедренных треугольников, будут выполняться равенства $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$. Поэтому $\angle A_1CB_1 = \angle A_1C_1B_1$. Итак, в треугольниках $ABC$ и $A_1B_1C_1$: $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ и $\angle A_1CB_1 = \angle A_1C_1B_1$. По признаку СУС равенства треугольников $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

***Теорема доказана.***

***Вывод.*** Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.




***Задача.*** Используя данные на рисунке 2, докажите, что а) $\Delta AFD = \Delta CEB$;
б) $\Delta AEB = \Delta CFD$.

***Доказательство***: По данным рисунка 2 имеем: $AE = FC$, $BE = FD$ и $AD = BC$.

Так как а) $AF = AE + EF$, то $EC = EF + FC = EF + AE = AF$.

Тогда в $\Delta AFD$ и $\Delta CEB$ соответствующие стороны равны и $\Delta AFD = \Delta CEB$ по признаку ССС равенства треугольников.

б) так как $\Delta AFD = \Delta CEB$, то $\angle BEF = \angle EFD$. Тогда $\angle AEB = \angle CFD$ как смежные с равными углами.

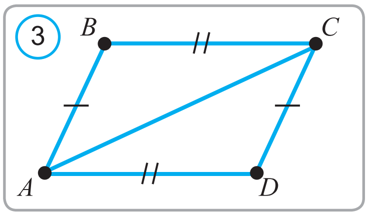
Итак, в треугольниках $AEB$ и $CFD$:

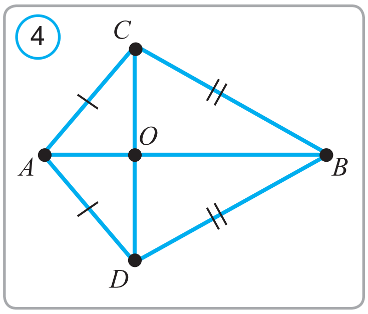
1. $AE = FC$; 2. $BE = FD$;

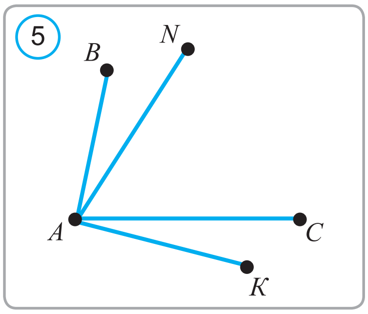
3. $\angle AEB = \angle CFD$.

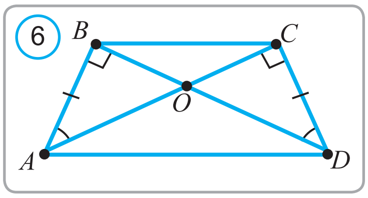
Тогда $\Delta AEB = \Delta CFD$ по признаку СУС равенства треугольников.

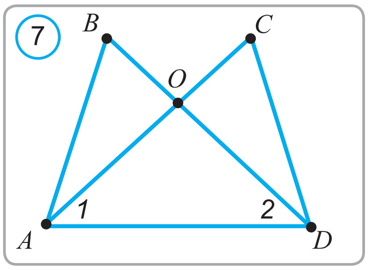
***Теорема доказана.***




## Вопросы, задачи и задания

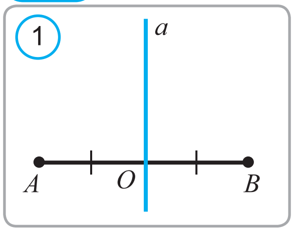
1. Какие элементы треугольников сравниваются в условии признака ССС равенства треугольников?
2. Сформулируйте признак ССС равенства треугольников.
3. По данным на рисунке 3 докажите, что $\Delta ABC = \Delta CDA$.
4. Пусть а) $\Delta ABC = \Delta ABD$; б) $\Delta BOC = \Delta BOD$; в) $\Delta AOC = \Delta AOD$. Докажите, что $AB \perp CD$ *(рис. 4)*.
5. Пусть $ABC$ и $ABD$ – равнобедренные треугольники с основанием $AB$. Докажите, что $\Delta ACD = \Delta BCD$.
6. Найти все пары равных треугольников с вершинами в точках $A$, $B$, $C$, $K$ и $N$, если $BA = AK$, $AC = AN$, $\angle BAC = \angle NAK$ *(рис. 5)*.
7. Покажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, если $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и периметры треугольников равны.

**8.*** Отрезки $AB$ и $CD$ точкой пересечения делятся пополам. Докажите, что $\Delta ACD = \Delta BDC$.

**9.** Определите, сколько пар равных треугольников имеется на рисунке 6.

**10*.** Покажите, что на рисунке 7 выполняется равенство $\Delta ABD = \Delta DCA$, если: а) $\angle 1 = \angle 2$, $AC = BD$; б) $\angle 1 = \angle 2$, $BO = OC$, $AB = CD$.

## 26 Свойства серединного перпендикуляра к отрезку

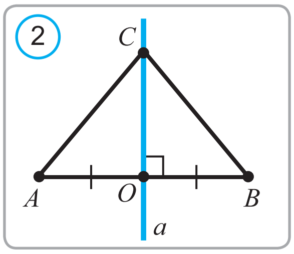



Научимся применять признаки равенства треугольников при доказательстве теорем.

Пусть дан отрезок $AB$. Через точку $O$ – середину этого отрезка проведем прямую $a$, перпендикулярную к отрезку $AB$ *(рис. 1)*. Эта прямая называется *серединным перпендикуляром* к отрезку $AB$.

***Теорема.*** **Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку находится на равных расстояниях от концов этого отрезка.**

*Отрезок* $AB$, $C$ – точка серединного перпендикуляра к отрезку $AB$ *(рис. 2)*. ⇒ $AC = BC$




***Доказательство.*** В треугольниках $ACO$ и $BCO$:

1. $OC$ — общая сторона;
2. $AO=BO$ по условию;
3. $\angle AOC=\angle BOC=90°$ по условию.

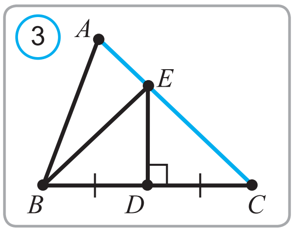
Значит, по признаку СУС равенства треугольников

$$\Delta AOC = \Delta BOC.$$

В частности, $AC=BC$.

***Теорема доказана.***

***Задача.*** Серединный перпендикуляр к стороне $BC$ треугольника $ABC$ пересекает сторону $AC$ в точке $E$. Найти отрезки $AE$ и $CE$, если $BE$ = 6 *см*, $AC$ = 8,4 *см*.




***Решение***: Пусть $DE$ – серединный перпендикуляр к стороне $BC$ треугольника $ABC$ *(рис. 3)*. По свойству серединного перпендикуляра $CE = BE$ = 6 *см*.

Так как $AE+EC=AC$, то

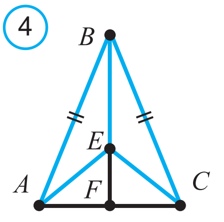
$$AE=AC-EC = 8{,}4-6 = 2{,}4 \text{ (см)}.$$

***Ответ***: $AE$ = 2,4 *см*, $CE$ = 6 *см*.

### Вопросы, задачи и задания

1. Что такое серединный перпендикуляр к отрезку?
2. Сформулируйте свойство серединного перпендикуляра.

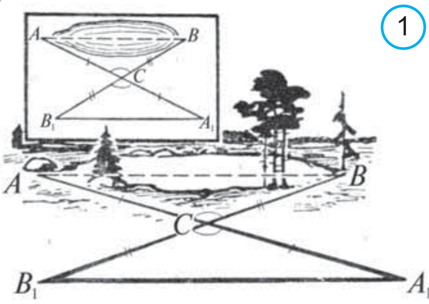
3. Начертите треугольник и проведите серединный перпендикуляр к каждой из его сторон. Что вы заметили? Сравните свой чертеж с чертежом одноклассника и замеченное свойство выразите в виде предположения.
4. В каком треугольнике серединный перпендикуляр, проведенный к стороне треугольника, совпадет с высотой, проведенной к этой стороне?
5. К стороне $BC$ треугольника $ABC$ проведен серединный перпендикуляр, который пересекает сторону $AC$ в точке $D$. Чему равна длина $AC$, если $BD$ = 7,2 *см*, $AD$ = 3,2 *см*.
6. Равнобедренные треугольники $ABC$ и $ABD$ имеют общее основание $AB$. Докажите, что прямая $CD$ – серединный перпендикуляр стороны $AB$.
7*. Серединный перпендикуляр к боковой стороне $AB$ равнобедренного треугольника $ABC$, пересекает сторону $BC$ в точке $D$. Найти основание $AC$, если периметр $\Delta ADC$ равен 24 *см* и $AB$ = 16 *см*.
8*. Докажите, что серединные перпендикуляры, проведенные к сторонам треугольника, пересекаются в одной точке.
9. На биссектрисе $BF$, проведенной к основанию равнобедренного $\Delta ABC$, взята точка $E$ *(рис. 4)*. Докажите, что $\Delta ABE = \Delta CBE$: а) по признаку ССС; б) не используя его.

4



## 27 Практическое задание

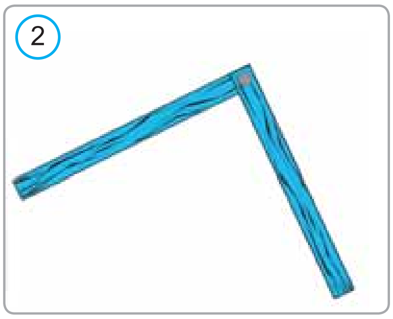
**Измерение ширины озера.**

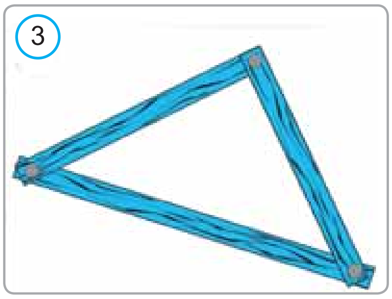
Пусть точки $A$ и $B$ находятся на самом берегу озера *(рис. 1)*. Ясно, что отрезок $AB$ нельзя измерить непосредственно. Какие действия надо предпринять на суше для того чтобы найти расстояние $AB$?

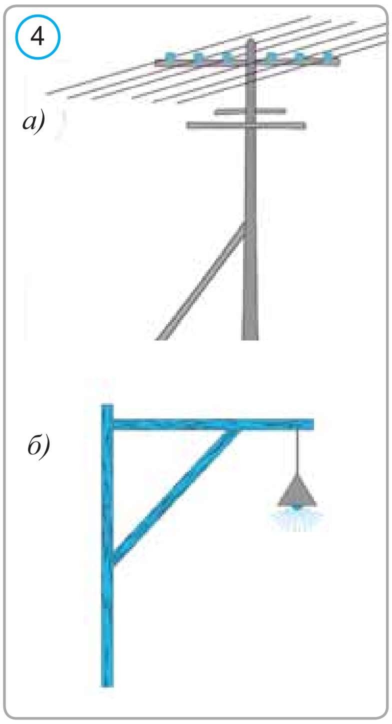
1



***Решение***: Выберем точку $C$ так чтобы отрезки $CA$ и $CB$ вели к точкам $A$ и $B$ и построим треугольник $ABC$. Продолжив стороны $AC$ и $BC$, за точку $C$, построим отрезки $A_1C = AC$ и $B_1C = BC$. Соединим точки $A_1$ и $B_1$. Тогда согласно признаку СУС имеем $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C$. В частности, $A_1B_1 = AB$.

Таким образом, измерив построенный отрезок $A_1B_1$, найдем длину отрезка $AB$, а значит, и искомое расстояние.







**Обоснование того что треугольник "жесткая фигура" с помощью признака ССС равенства треугольников.**

Соединим две рейки так, как показано на рисунке 2, например, с помощью гвоздика. Полученная фигура не будет жесткой, так как двигая свободные концы реек, мы сможем изменять углы между ними.

Но если теперь к свободным концам реек прибить третью рейку так, как показано на рисунке 3, то полученный треугольник будет жестким, потому что нам не удастся сдвинуть или раздвинуть рейки, меняя углы между ними.

1. Из какой теоремы следует справедливость данного утверждения?

2. Прокомментируйте, в соответствии с рисунком 4, примеры использования жесткости треугольника.

## *Вопросы, задачи и задания*

1. Что вы понимаете под "жесткостью" треугольника?
2. На основании какой теоремы можно утверждать, что треугольник – жесткая фигура?
3. Где используется жесткость треугольника?
4. Известно, что у треугольников $ABC$ и $A_1C_1B_1$ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$, $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$ и $\angle C_1 = 90°$. Найдите остальные углы треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$.
5. Равнобедренные треугольники $ABC$ и $DEF$ равны. В треугольнике $ABC$ стороны $AC$ и $BC$ равны и $AB = 2$ *см*. Найти периметр каждого треугольника, если $DE = 4$ *см*.

## 28 Проверьте свои знания

**1. Заполните пропуски в соответствии со смыслом.**

1. Если у треугольника равны две стороны, то он будет ............... .
2. В равнобедренном треугольнике ............. будет также медианой и высотой.
3. Фигура, образованная замкнутой ломаной без самопересечений, называется ................ .
4. У треугольника, все стороны которого равны, все .............. будут равными.
5. У .............. равны все медианы, биссектрисы и высоты.
6. У ............. углы, прилежащие к основанию, равны.
7. Равносторонний треугольник будет также и............... треугольником.

**2. Если в следующих фразах имеется ошибка, найдите и исправьте ее.**

1. Углы равнобедренного треугольника равны между собой.
2. Если углы двух треугольников соответственно равны, то эти треугольники равны.
3. В равнобедренном треугольнике его медиана будет также биссектрисой и высотой.
4. Биссектрисой треугольника называется луч, исходящий из его вершины и делящий угол пополам.
5. Медиана – это прямая, делящая пополам сторону треугольника.

6.* Если у двух треугольников сторона и два угла соответственно равны, то эти треугольники равны.

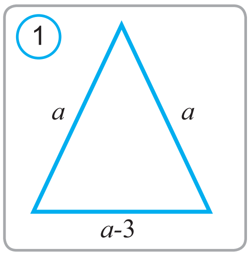
7. Если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу второго треугольника, то эти треугольники равны.

**3. Впишите в правую колонку названия геометрических фигур, обладающих данными свойствами.**

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Все медианы равны. | |
| 2. | Соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны. | |
| 3. | Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону | |
| 4. | Сумма сторон треугольника. | |
| 5. | Замкнутая ломаная линия, не пересекающая сама себя | |

**4. Найдите и правильно соотнесите к геометрическим понятиям, приведенным в первой колонке, соответствующие свойства или определение из второй колонки.**

| | Геометрические понятие | Определение или свойство |
|---|---|---|
| 1. | Ломаная линия | А. Один угол прямой |
| 2. | Многоугольник | Б. Соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны |
| 3. | Периметр треугольника | В. Две стороны равны |
| 4. | Остроугольный треугольник | Г. Замкнутая ломаная линия, не пересекающая сама себя |
| 5. | Равнобедренный треугольник | Д. Состоит из поочередных не лежащих на одной прямой отрезков A1, A2, A2,A3,…,An-1An |
| 6. | Прямоугольный треугольник | Е. Равен сумме его сторон |
| 7. | Медиана треугольника | Ж. Все углы острые |
| 8. | Биссектриса треугольника | З. Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий эту вершину с точкой на противолежащей стороне |
| 9. | Высота треугольника | И. Перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону |
| 10. | Серединный перпендикуляр отрезка | К. Прямая, перпендикулярная к данному отрезку |



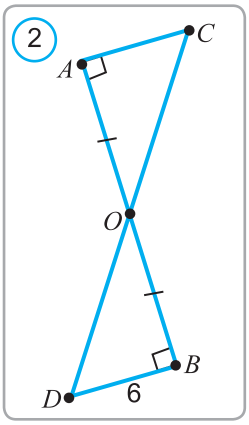

**5. Тесты.**

1. Длина двух сторон равнобедренного треугольника равна 8 и 3. Найдите его третью сторону.
   A) 5; B) 8; D) 11; E) 9.

2. $P = 36$, $a$ = ? (рис. 1)
   A) 11; B) 12; D) 13; E) 18.

3. Периметр равнобедренного треугольника равен 48, боковая сторона 18. Найти его основание.
   A) 18; B) 12; D) 16; E) 18.

4. Периметр равнобедренного треугольника равен 48. Найти его остальные стороны, если одна из сторон равна 12.
A) 12; 12 B) 16; 16
D) 18; 24 E) 18; 18.

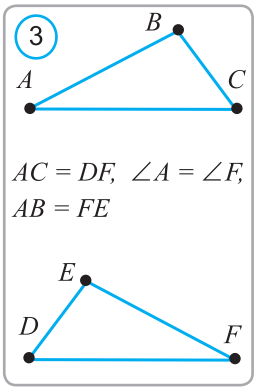



5. Периметр равнобедренного треугольника 36, одна из его сторон равна 16. Найти остальные стороны.
A) 16 и 4; B) 10 и 10;
D) 10 и 10 или 16 и 4;
E) Такой треугольник не существует.

6. $AC$=? *(рис. 2)*
A) 6; B) 8; D) 12; E) 10,5.

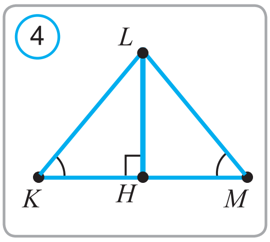
7. Сколько медиан у треугольника?
A) Одна; B) Две; D) Три; E) Шесть.

8. Биссектриса треугольника – какая это фигура?
A) Отрезок; B) Луч; D) Прямая; E) Точка.




9. Какие элементы треугольника могут лежать во внешнем его пространстве?
A) Медиана; B) Высота;
D) Биссектриса; E) Диагональ.

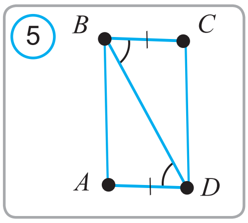
10. «Если два угла треугольника равны, то это равнобедренный треугольник» - как можно назвать это утверждение?
A) Определение; B) Свойство;
D) Признак; E) Аксиома.



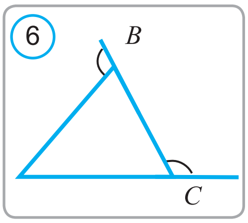

11. Равны ли приведенные в рисунке 3 треугольники $ABC$ и $DEF$?
A) Да; B) Нет.

12. Какие треугольники на рисунке 4 равны между собой?
A) $\Delta KLM = \Delta LMH$; B) $\Delta KLH = \Delta MLH$;
D) $\Delta KLM = \Delta KLH$; E) Никакой.

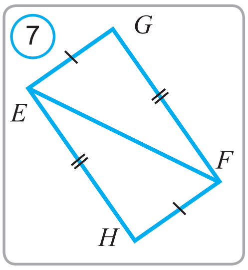
13. По какому признаку равны треугольники $ABD$ и $CDB$ на рисунке 5?
   A) По признаку СУС равенства треугольников;
   B) По признаку УСУ равенства треугольников;
   D) По признаку ССС равенства треугольников;
   E) Эти треугольники не равны.




14. Определите вид треугольника на рисунке 6.
   A) Равносторонний; B) Равнобедренный;
   D) Тупоугольный; E) Ни один из них.



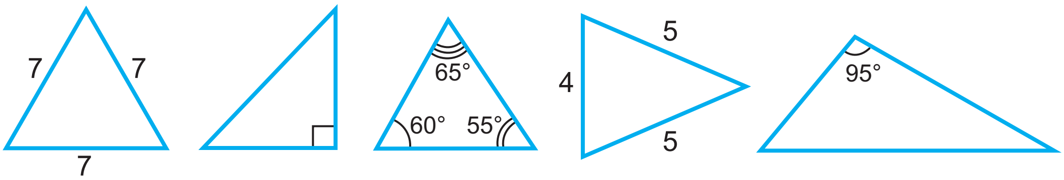

15. Исходя из данных на рисунке 7, выявите неправильные из следующих равенств.
   A) $\angle GEF = \angle HFE$; B) $\angle EGF = \angle FHE$;
   D) $\angle EHF = \angle FEG$; E) $\angle EFH = \angle GEF$;




16. Высота треугольника, периметр которого равен 12 см, разделяет его на треугольники с периметрами 7 см и 9 см. Найдите длину высота.
   A) 2 см; B) 3 см;
   D) 1 см; E) 4 см.

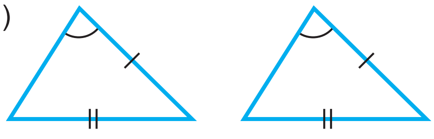
### 6. Задачи.

**1.** Определите виды треугольников по данным, приведенным на чертеже.

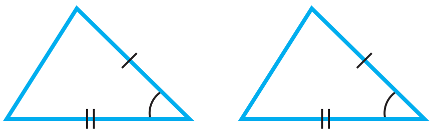



**2.** Какие из приведенных ниже пар треугольников равны? С помощью какого признака вы это установили?

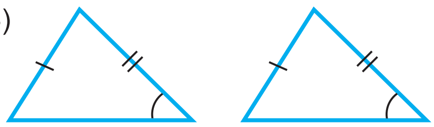
1)



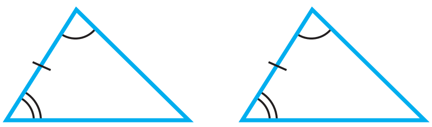
2)

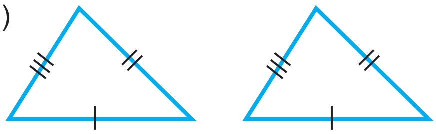


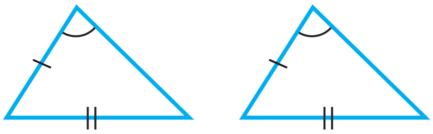
3)



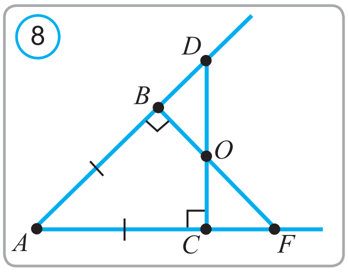
4)

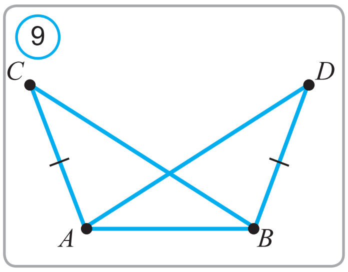


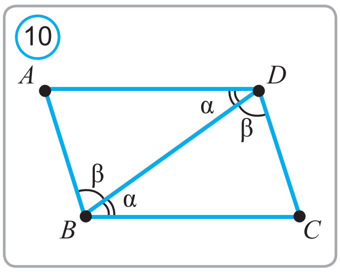
5)


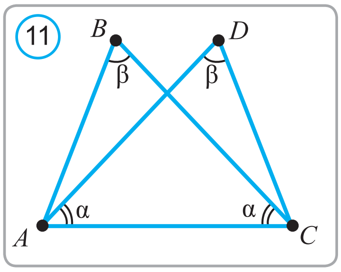
6)


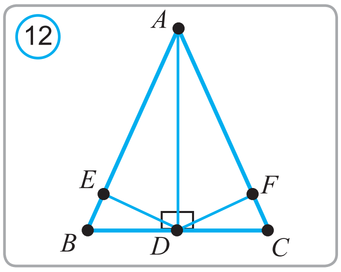
**3.** Докажите, что $\Delta ACD = \Delta ABF$ на рисунке 8.
**4.** Покажите, что $AD = BC$, если на рисунке 9 $\angle CAB = \angle ABD$.
**5.** Докажите, что $\Delta ABD = \Delta BCD$ на рисунке 10.
**6.** Докажите, что $\Delta ABC = \Delta ADC$ на рисунке 11.
**7.** Будут ли равны $\Delta ABC$ и $\Delta PQR$, если у них $AB = PQ$, $AC = PR$ и $BC = QR$?
**8.** Докажите, что если $AB = AC$, $BE = CF$ на рисунке 12, то а) $\Delta AED = \Delta AFD$; б) $\Delta BED = \Delta CFD$.
**9.** Докажите, что $\Delta ABC = \Delta EFD$ на рисунке 13.
**10.** Докажите, что $AD = CE$ на рисунке 14.
**11.** Найти $x$ по данным на рисунке 15.
**12.** Отрезки $AE$ и $BD$ пересекаются в точке $C$. Найти $\angle CED$, если $DC = DE$, $AB = BC$ и $\angle BAC = 48°$.
**13.** Внутри треугольника $ABC$ взята точка $D$. Найти $\angle ADC$, если $AC = AB$, $CD = BD$ и $\angle BDA = 120°$.

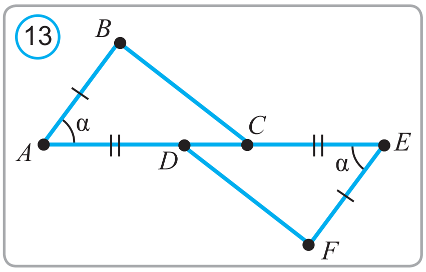


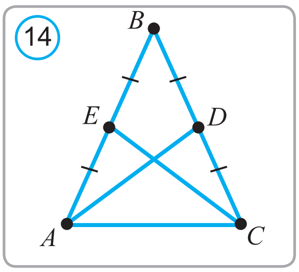



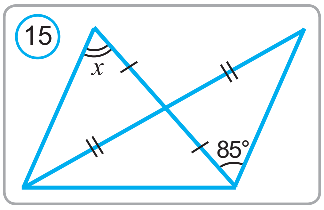



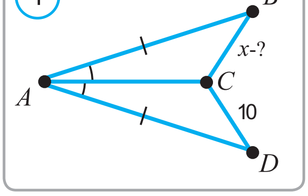



## 29 3-ья контрольная работа



1

Контрольная работа состоит из двух частей:

I. 5 тестов, подобных приведенным на странице 81-83;

II. Задачи, подобные следующим (задача 4 для желающих получить оценку "отлично").

1. Найти неизвестный отрезок по данным на рисунке 1.
2. Отрезки $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $O$. Докажите, что $\angle ACO = \angle BDO$, если $\angle CAB = \angle ABD$ и $AO = BO$.
3. Периметр равнобедренного треугольника 18,4 $м$, а основание меньше боковой стороны на 3,6 $м$. Найдите стороны этого треугольника.

4*. Докажите равенство треугольников по равенству двух сторон и медиане, опущенной на одну из них.

**Для любознательных учеников.**

**1.** Познакомьтесь со страницами главы, соответствующей данной, в электронной версии учебника «Геометрия–7». Проверьте свои знания, выполнив данные задания и решив тесты в интерактивных анимационных приложениях к темам упомянутой главы.

**2.** Кроме того, найдите приведенные на странице 10 материалы из интернет-ресурсов, относящиеся к упомянутой главе, и изучите их.

# ГЛАВА III

# ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

**Изучив материал этой главы вы приобретете следующие знания и практические навыки:**

**Знания:**

— Определение параллельных прямых и их свойства;
— виды углов, образующихся при пересечении двух прямых третьей и уметь различать их на чертеже;
— признаки параллельности двух прямых;
— сформулировать теорему, обратную данной;

**Навыки:**

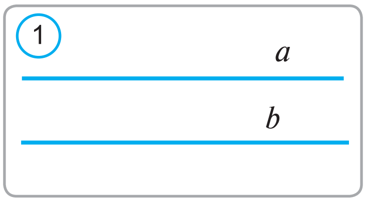
— строить с помощью угольника и простой линейки параллельные прямые;
— находить на чертеже углы, образующиеся при пересечении двух прямых третьей;

## 30 Параллельность прямых

### *Активизирующее упражнение.*

Пересекаются ли две прямые, перпендикулярные третьей? Обоснуйте свой ответ.

Две прямые на плоскости называются *параллельными прямыми, если они не пересекаются*.



На рисунке 1 изображены параллельные прямые. Параллельность прямых $a$ и $b$ записывается в виде $a||b$ и читается "*прямая $a$ параллельна прямой $b$*".

Отрезки (лучи), лежащие на параллельных прямых называются *параллельными отрезками* (*лучами*). Вы часто встречались в жизни с параллельными отрезками. Например, железнодорожные рельсы, противоположные ребра стола прямоугольной формы, горизонтальные или вертикальные линии на листе из тетради в клетку и т. д.

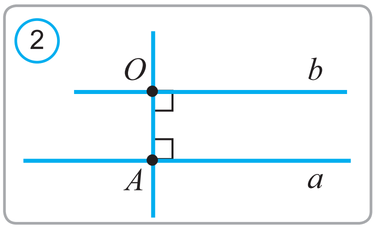
Итак, согласно определению, для того чтобы прямые были параллельны,

– они должны лежать в одной плоскости;

– не должны иметь общей точки, т. е. не пересекаться.

Теорема, доказанная в теме 15, может быть сформулирована так:

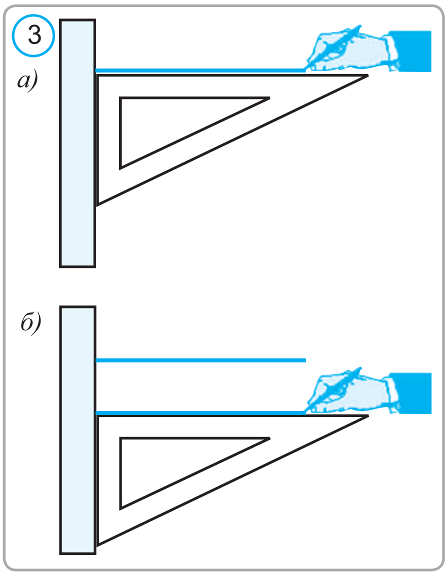
*Теорема.* **Две прямые, перпендикулярные одной прямой, параллельны.**



***Упражнение.*** Покажите, что через точку $O$, не лежащую на прямой $a$, можно провести параллельную ей прямую.

***Решение***: Проведем через точку $O$ прямую $OA$, перпендикулярную прямой $a$ *(рис. 2)*. Затем через точку $O$ проведем прямую $b$, перпендикулярную прямой $OA$. В результате, $a \perp OA$ и $OA \perp b$, т. е. имеем две прямые $a$ и $b$, перпендикулярные прямой $OA$. Тогда по теореме, приведенной выше, прямые $a$ и $b$ будут параллельны, т. е. прямая $b$ – искомая.

Параллельные прямые на практике можно начертить с помощью простой линейки и угольника как показано на рисунке 3. Обоснуйте правильность этого способа.




Сколько прямых, параллельных данной прямой, можно провести через точку, не лежащую на ней? Следующее утверждение, носящее имя *аксиомы параллельности*, отвечает на этот вопрос.

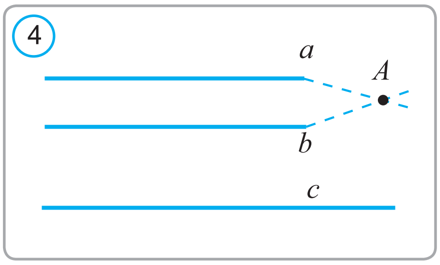
A *Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.*

Это утверждение принимается без доказательства.

***Теорема.*** ***Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.***

$a$, $b$ и $c$– прямые, $a||c$, $b||c$. ⇒ $a||b$

***Доказательство.*** Предположим, что $a||c$ и $b||c$, но $a$ и $b$ не параллельны. Тогда они пересекаются в некоторой точке $A$ *(рис. 4)* и через точку $A$ проходят две прямые $a$ и $b$, параллельные прямой $c$. Но это противоречит аксиоме параллельности, значит, наше предположение неправильно – прямые $a$ и $b$ параллельны. ***Теорема доказана.***




## Геометрическое исследование

Начертите угол $ABC$, равный 45°. На стороне $BA$ отложите от точки $B$ четыре равных отрезка и через их концы проведите параллельные прямые до пересечения со стороной $BC$. Затем сравните длины отрезков, получившихся на стороне $BC$. К какому выводу относительно этих отрезков вы пришли? Проверьте результат для угла другой угловой величины.

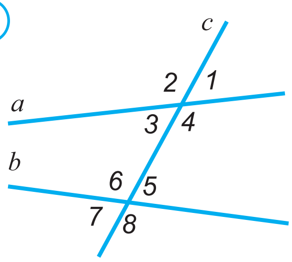
## Вопросы, задачи и задания

1. Какие прямые называются параллельными?
2. Сколько прямых, параллельных данной, можно провести через точку, не лежащую на данной прямой?
3. Какие отрезки называются параллельными?
4. Обратите внимание на классную комнату и найдите в ней параллельные отрезки.
5. Покажите, что две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.
6. Начертите прямую и отметьте на ней точки $A$, $B$ и $C$. С помощью линейки или угольника через точку $A$, точку $B$ и точку $C$ проведите прямые, параллельные между собой.
7. Можно ли назвать параллельными два непересекающихся отрезка? А два непересекающихся луча?
8. Какой отрезок будет называться параллельным лучу?
9. Покажите, что противолежащие стороны правильного четырехугольника параллельны.
10. Пусть прямая пересекает одну из двух параллельных прямых. Пересечет ли она вторую прямую? Обоснуйте ответ.
11. На листе начертили две параллельные прямые. Сколько получится частей, если разрезать лист по этим двум прямым?

## 31 Углы, образованные двумя прямыми и секущей

Если на плоскости две прямые $a$ и $b$ пересекаются с третьей прямой $c$, то при этом образуются 8 углов. Обозначим их цифрами как на рисунке 1. Следующие пары этих углов получают отдельные названия:

1




| | |
|---|---|
| $\angle 3$ и $\angle 5$<br>$\angle 4$ и $\angle 6$ | **накрест лежащие углы** |
| $\angle 4$ и $\angle 5$<br>$\angle 3$ и $\angle 6$ | **односторонние углы** |
| $\angle 1$ и $\angle 5$<br>$\angle 2$ и $\angle 6$<br>$\angle 3$ и $\angle 7$<br>$\angle 4$ и $\angle 8$ | **соответственные углы** |

Приведем следующие свойства этих углов:

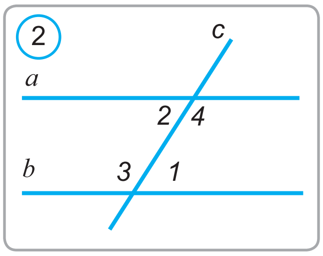
***Свойство 1.*** **Если при пересечении двух прямых секущей два накрест лежащих угла одной пары равны, то накрест лежащие углы второй пары также равны.**

прямые $a$, $b$ и прямая $c$ – секущая: $\angle 1 = \angle 2$. ⇒ $\angle 3 = \angle 4$

***Доказательство.*** Так как $\angle 2$ и $\angle 4$ – смежные *(рис. 2)*, то $\angle 2 + \angle 4 = 180°$, откуда $\angle 4 = 180° - \angle 2$.

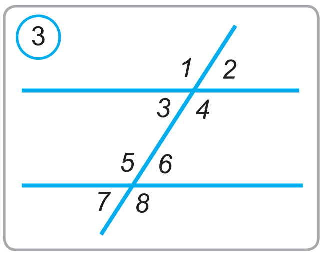
Так как $\angle 1$ и $\angle 3$ также смежные, то $\angle 1 + \angle 3 = 180°$, откуда $\angle 3 = 180° - \angle 1$.

Но по условию $\angle 1 = \angle 2$, поэтому $\angle 3 = 180° - \angle 1 = 180° - \angle 2 = \angle 4$. ***Свойство доказано.***




***Свойство 2.*** **Если соответственные углы равны, то сумма односторонних углов равна 180°.**

***Доказательство.*** Пусть равны углы одной пары соответственных углов: $\angle 2 = \angle 6$ *(рис. 3)*. Докажем, что $\angle 6 + \angle 4 = 180°$. Так как $\angle 2$ и $\angle 4$ – смежные, то $\angle 2 + \angle 4 = 180°$. Учитывая, что по условию $\angle 2 = \angle 6$, находим, что $\angle 6 + \angle 4 = 180°$. Точно так же доказывается, что сумма других односторонних углов также равна 180°. ***Свойство доказано.***




***Свойство 3.*** **Если накрест лежащие углы равны, то соответственные углы также равны.**

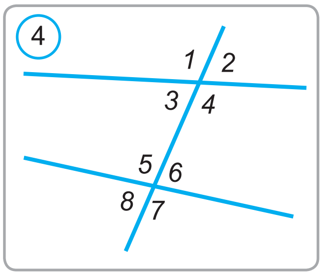
***Доказательство.*** Пусть $\angle 3 = \angle 6$ *(рис. 3)*. Так как $\angle 3$ и $\angle 2$ – вертикальные, то $\angle 3 = \angle 2$. Тогда равны соответственные углы: $\angle 6 = \angle 2$. Точно также доказывается равенство соответственных углов других пар. ***Свойство доказано.***

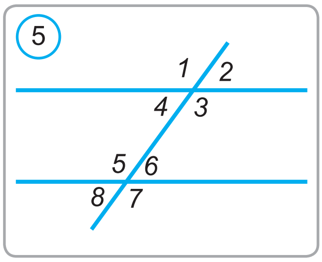
## *Вопросы, задачи и задания*

**1.** Начертите две произвольные прямые. Проведите их секущую. Укажите односторонние, накрест лежащие и соответственные углы.

**2.** Укажите на рисунке 4 вертикальные и смежные углы?

**3.** Пусть $\angle 2 = \angle 6 = 63°$ на рисунке 5, найдите остальные углы.

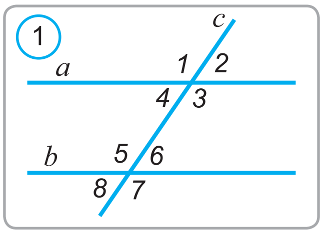



4. Пусть при пересечении двух прямых третьей один из образующихся углов равен 82°, а еще один равен 110°. Найти оставшиеся углы.
5. Если $\angle 3=\angle 5$ на рисунке. 5, то будет ли $\angle 4=\angle 6$? Если $\angle 1=\angle 7$, выполняются ли равенства $\angle 2=\angle 8$, $\angle 3=\angle 5$, $\angle 4=\angle 6$? Обоснуйте свой ответ.
6. Могут ли быть равными односторонние углы?
7.* Покажите, что если равны накрест лежащие углы, то сумма односторонних углов равна 180°. Верно ли обратное утверждение? То есть, если сумма односторонних углов равна 180°, будут ли равны накрест лежащие углы?
8.* Докажите, что если при пересечении двух прямых секущей равны углы одной пары соответственных углов, то равны также и углы другой пары соответственных углов.

## 32 Признаки параллельности двух прямых

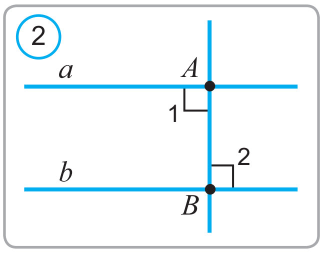
### *Активизирующее упражнение*



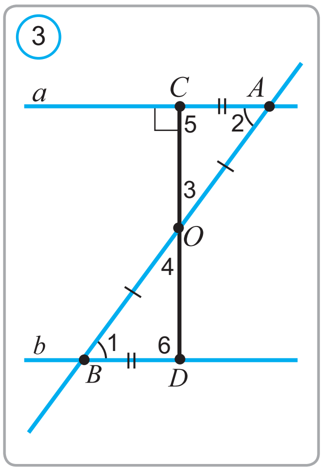

На рисунке 1 изображены параллельные прямые $a$ и $b$ и секущая $c$. Выполните следующие задания и ответьте на вопросы.

1. Выпишите все пары накрест лежащих углов и измерьте их транспортиром. Что вы можете сказать о градусной мере каждой пары этих углов?
2. Выпишите все пары односторонних углов и измерьте их транспортиром. Что вы можете сказать о градусной мере каждой пары этих углов?
3. Выпишите все пары соответственных углов и измерьте их транспортиром. Что вы можете сказать о градусной мере каждой пары этих углов?
4. Всегда ли будут иметь место сформулированные выше свойства?

**Теорема.** **Если при пересечении двух прямых секущей равны накрест лежащие углы, то эти две прямые параллельны.**




***Доказательство.*** 1) Вначале рассмотрим случай, когда $\angle 1$ и $\angle 2$ являются прямыми *(рис. 2)*: В этом случае прямая $AB$ будет перпендикулярна прямым $a$ и $b$. Тогда по теореме о двух прямых, перпендикулярных одной прямой, прямые $a$ и $b$ будут параллельны (см. с. 87).




2) Рассмотрим теперь случай, когда $\angle 1$ и $\angle 2$ не являются прямыми: через точку $O$ – середину отрезка $AB$ ($AO = BO$) опустим на прямую $a$ перпендикуляр $OC$ (рис. 3). На прямой $b$ отложим от точки $B$ отрезок $BD$, равный отрезку $AC$. Рассмотрим треугольники $AOC$ и $BOD$:

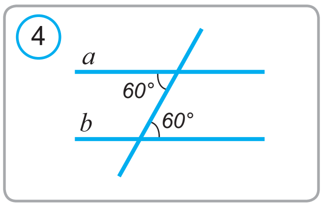
У этих треугольников

1. по построению: $AC = BD$;
2. по построению: $AO = BO$;
3. по условию: $\angle 1 = \angle 2$.

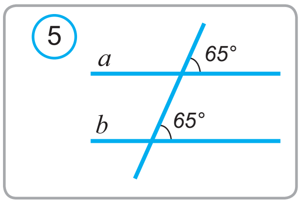
Тогда по признаку СУС равенства треугольников $\Delta AOC = \Delta BOD$. В частности, $\angle 3 = \angle 4$ и $\angle 5 = \angle 6$.

Так как $\angle 3 = \angle 4$, то точка $D$ лежит на продолжении луча $OC$, т. е. точки $C$, $O$ и $D$ лежат на одной прямой.

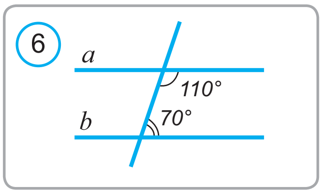
Так как $\angle 5 = \angle 6$, то $\angle 6$ также является прямым, как и $\angle 5$. Таким образом, прямые $a$ и $b$ перпендикулярны одной и той же прямой $CD$. Следовательно, они параллельны. ***Теорема доказана.***

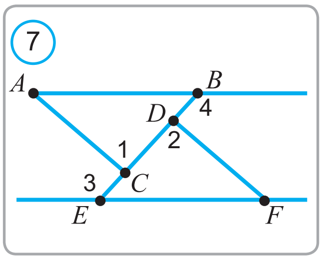



***Задача.*** Будут ли прямые $a$ и $b$ на рисунке 1 параллельны, если $\angle 2 = 55°$ и $\angle 5 = 125°$?




***Решение***: $\angle 2$ и $\angle 4$ – вертикальные, поэтому $\angle 4 = \angle 2 = 55°$. $\angle 5$ и $\angle 6$ – смежные, значит, $\angle 6 = 180° - \angle 5 = 180° - 125° = 55°$. В результате получаем, что накрест лежащие углы равны: $\angle 4 = \angle 6$. Следовательно, по доказанному выше признаку параллельности прямые $a$ и $b$ параллельны. ***Ответ***: Да.

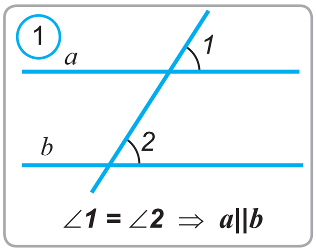


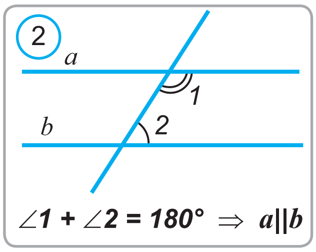




## Вопросы, задачи и задания

1. Сформулируйте признак параллельности двух прямых.
2. Покажите, что $a||b$ на рисунке 4.
3. Покажите, что $a||b$ на рисунке 5.
4. Покажите, что $a||b$ на рисунке 6.
5. Пусть на рисунке 1: а) $\angle 1=132°$, $\angle 8=48°$; б) $\angle 2=36°$, $\angle 5=144°$; в) $\angle 3=113°$, $\angle 6=77°$; г) $\angle 1+\angle 7=180°$. Будет ли $a||b$?
6. Пусть на рисунке 7: а) $\angle 3=\angle 4$, $BD=CE$, $AB=EF$; б) $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$, $BD=CE$; в) $AB=EF$, $BD=EC$, $AC=FD$. Покажите, что $\Delta ABC=\Delta EFD$.
7. Дана прямая $a$ и точка $K$, не лежащая на ней. Через точку $K$ проведены 4 прямые. Сколько прямых пересекают прямую $a$?

## 33 Признаки параллельности двух прямых (продолжение)




Свойство, непосредственно следующее из теоремы, называется *следствием*. Исходя из теоремы, доказанной на предыдущем уроке, и из свойств 2, 3, доказанных на уроке 31, делаем следующие выводы.

***Следствие 1.*** ***Если при пересечении двух прямых секущей, соответственные углы равны, то эти прямые параллельны*** *(рис. 1)*.

***Следствие 2.*** ***Если при пересечении двух прямых секущей, сумма односторонних углов равна 180°, то эти прямые параллельны*** *(рис. 2)*.

***Задача.*** Какие из прямых, изображенных на рисунке 3 параллельны?

***Решение***: Из равенства вертикальных углов следует, что $\angle 1 = 105°$, $\angle 2 = 125°$, $\angle 3 = 115°$. Прямые $a$ и $b$ не параллельны, так как $\angle 1 + 65° = 105° + 65° \neq 180°$.

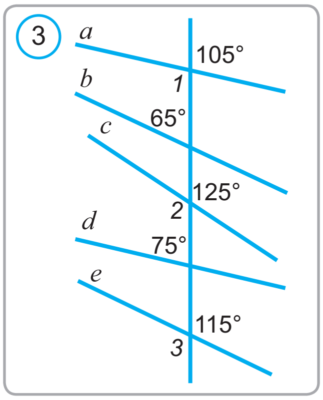
$a||d$, так как $\angle 1 + 75° = 105° + 75° = 180°$ (см. следствие 2).

Точно так же $b||e$, так как $65°+\angle 3=65°+115°= = 180°$.

Прямые $a$, $c$ и $e$ не параллельны, так как их соответственные углы не равны (см. следствие 1).

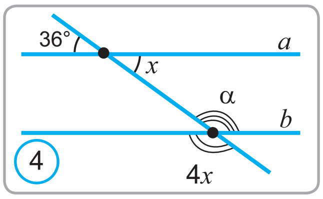
Точно так же прямые $b$ и $d$ также не параллельны, так как не равны соответственные углы: 65°≠75°.

***Ответ***: $a \parallel d$, $b \parallel e$.




***Задача.*** Верно ли, что $a \parallel b$ на рисунке 4?

***Решение***: По свойству вертикальных углов $x = 36°$. Отсюда $\alpha = 4x = 4 \cdot 36° = 144°$. Сумма односторонних углов $x + \alpha = 36° + 144° = 180°$. Значит, по следствию 2 $a \parallel b$ .




## Вопросы, задачи и задания

**1.** Назовите признаки параллельности двух прямых.

**2.** Найти угол $x$ на рисунке 5, для которого прямые $a$ и $b$ будут параллельны?

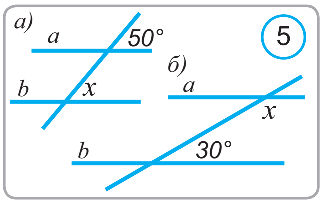
**3.** Найдите неизвестный угол на рисунке 6.

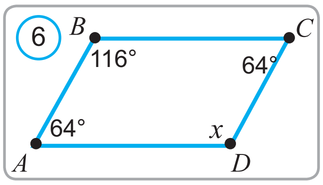
**4.** Пусть на рисунке 7: а) $\angle 1 = \angle 5 = 105°$; б) $\angle 3 = 60°$, $\angle 8 = 120°$. Найдите остальные углы.

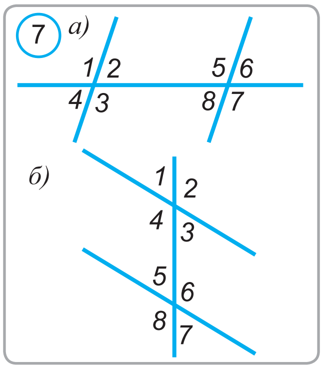
**5.** Какие стороны параллельны у четырехугольника на рисунке 8?

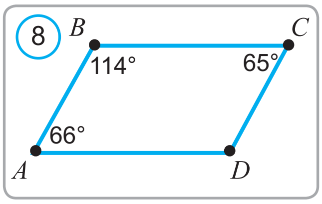
**6.** Один из углов, образующихся при пересечении двух прямых секущей, равен 32°. Будут ли параллельны эти прямые, если соответственный ему угол равен 33°?

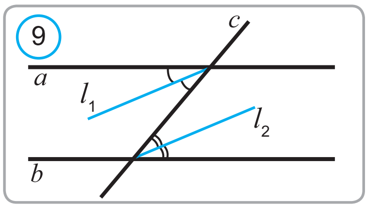
**7.** Покажите, что биссектрисы накрест лежащих углов, получающихся при пересечении двух параллельных прямых $a$ и $b$ секущей $c$, параллельны *(рис. 9)*.



## 34 Обратная теорема

Если поменять местами условие и заключение теоремы, получится новое предложение (иначе, новое утверждение). Если оно также будет правильным, то оно называется *обратной теоремой* по отношению к данной теореме.

***Прямая теорема***: **Если** **верно утверждение A,** **то** **верно утверждение B**

Коротко: $A \Rightarrow B$

***Обратная теорема:*** **Если** **верно утверждение B,** **то** **верно утверждение A**

Коротко: $B \Rightarrow A$

*Пример*: "*Если треугольник равнобедренный, то углы прилежащие к его основанию, равны*", обратная теорема: ***"Если углы, прилежащие к одной из сторон треугольника, равны, то треугольник равнобедренный"***.

***Упражнение 1.*** Обратная теорема, данная выше рассматривается как "признак равнобедренного треугольника". Докажите самостоятельно, что она верна.

Однако надо заметить, что утверждение, сформулированное как обратное к прямой теореме, не всегда будет верно.

Например, утверждение "Если углы равны, то они вертикальные", обратное к теореме "Если углы вертикальные, то они равны", является неверным.

***Упражнение 2.***

**1.** Составьте утверждение, обратное к предложению "Если идет дождь, то на небе тучи". Выясните, всегда ли верно это обратное утверждение.

**2.** Сформулируйте теоремы, обратные к приведенным ниже. Проверьте, будет ли верным утверждение, составляющее его содержание.

1) Два перпендикуляра к одной прямой не пересекаются.

2) Если два треугольника равны, то равны и их соответствующие стороны.

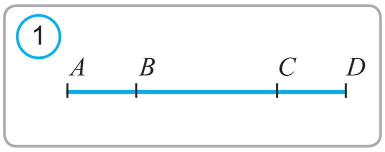
3) Если смежные углы равны, то они прямые.

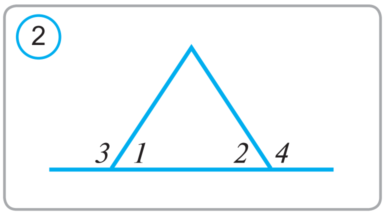
4) Две прямые параллельные порознь третьей, параллельны.

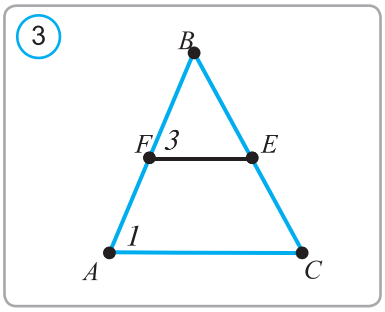
### ? Вопросы, задачи и задания

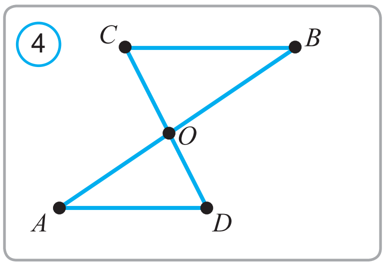
**1.** В чем разница между прямой и обратной теоремами?

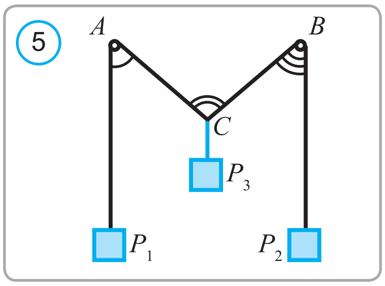
2. Будет ли всегда верна теорема, обратная к верной теореме?
3. Можно ли, доказав прямую теорему, принять обратную к ней без доказательства?
4. Как называется теорема, обратная к обратной теореме?
5. Запишите условие и заключение следующих теорем. Сформулируйте теоремы, обратные к ним и проверьте, будут ли они верны:
   1) Если $AC = BD$ на рисунке 1, то $AB = CD$.
   2) Если $\angle 1 = \angle 2$ на рисунке 2, то $\angle 3 = \angle 4$.
   3) Если $EF \parallel AC$ на рисунке 3, то $\angle 1 = \angle 3$.
   4) Если $AO = OB$ и $CO = OD$ на рисунке 4, то $\Delta AOD = \Delta BOC$.
6. Через блоки, прикрепленные в точках $A$ и $B$ перекинута нить с подвешенными на них грузами $P_1$ и $P_2$ *(рис.5)*. Груз $P_3$, подвешенный на нити в точке $C$, уравновешивает грузы $P_1$ и $P_2$. Докажите, что $\angle ACB = \angle A + \angle B$, если известно, что $AP_1 \parallel BP_2 \parallel CP_3$.
7. Сформулируйте теоремы, обратные к приведенным ниже, и проверьте их правильность:
   1) Если при пересечении двух прямых секущей, соответственные углы, образовавшиеся при этом, равны, то эти прямые параллельны.
   2) Прямые, порознь параллельные третьей прямой, параллельны.
   3) В равностороннем треугольнике все углы равны.
8. Сформулируйте теоремы, обратные к признакам равенства треугольников. Верны ли эти обратные теоремы?



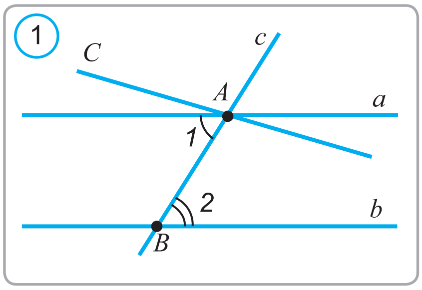



## 35 Углы, образованные двумя параллельными прямыми и секущей

Ниже мы остановимся на теоремах, обратных признакам параллельности.

***Теорема 1.*** **Накрест лежащие углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей, равны.**




$a \| b$, $c$ – секущая *(рис. 1)* ⇨ $\angle 1 = \angle 2$

***Доказательство.*** Предположим противное: пусть $\angle 1 \neq \angle 2$. Отложим от луча $AB$ угол $CAB$, равный $\angle 2$ ($\angle CAB = \angle 2$). В таком случае, при пересечении прямых $CA$ и $b$ с прямой $AB$, получим равные (по построению) накрест лежащие углы $\angle CAB$ и $\angle 2$.

Значит, прямые $CA$ и $b$ параллельны. Таким образом, через точку $A$, не лежащую на прямой $b$, проходят две прямые ($CA$ и $a$), параллельные прямой $b$.

Но это противоречит аксиоме параллельности. Значит, наше предположение неверно и $\angle 1 = \angle 2$. ***Теорема доказана.***

***Следствие. Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и ко второй прямой.***

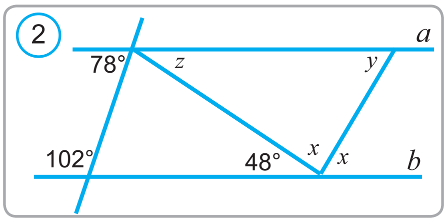
Докажите самостоятельно утверждение, приведенное в следствии.

***Теорема 2.*** **Соответственные углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей, равны.**

***Теорема 3.*** **Сумма односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, равна 180°.**

Попробуйте доказать эти теоремы самостоятельно.

***Задача.*** Найти неизвестные углы на рисунке 2.

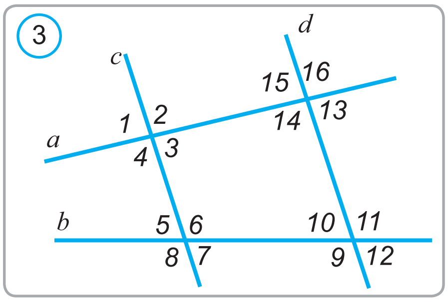



***Решение***: Так как сумма односторонних углов $78° + 102° = 180°$, то $a \| b$. Значит, по теореме 1 угол $z = 48°$ и $x = y$. Но $x + x + 48° = 180°$ (как смежные), откуда угол $x = 66°$. Тогда и угол $y = 66°$.

***Ответ***: $x = 66°$; $y = 66°$; $z = 48°$.

**Задача.** $a \nparallel b$, $c \parallel d$ на рисунке 3. Какое из следующих равенств верно?

1) $\angle 1 = \angle 15$; 2) $\angle 3 = \angle 13$; 3) $\angle 4 = \angle 16$; 4) $\angle 4 = \angle 8$; 5) $\angle 1 = \angle 12$;
6) $\angle 7 = \angle 10$ 7) $\angle 8 = \angle 16$; 8) $\angle 8 = \angle 11$; 9) $\angle 4 + \angle 13 = 180°$;
10) $\angle 6 + \angle 14 = 180°$; 11) $\angle 7 + \angle 12 = 180°$; 12) $\angle 8 + \angle 9 = 180°$




***Решение***: 3) $\angle 4 = \angle 2$ *(как вертикальные)*, Так как $\angle 2$ и $\angle 16$ – соответственные, то $\angle 2$ = $= \angle 16$. Значит, равенство $\angle 4 = \angle 16$ верно.

5) $\angle 12$ = $\angle 7$ *(по свойству соответственных углов при параллельных прямых)* и $\angle 7 = \angle 5$ *(как вертикальные)*. $\angle 5$ и $\angle 1$ – соответственные.

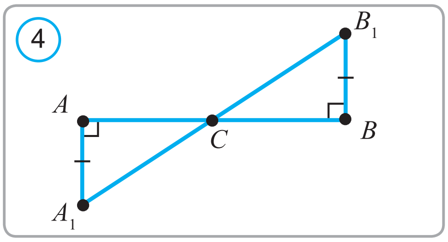
$a \nparallel b$, поэтому $\angle 1 \neq \angle 5$ = $\angle 7$ = $\angle 12$, т. е. равенство $\angle 1$ = $\angle 12$ не верно.

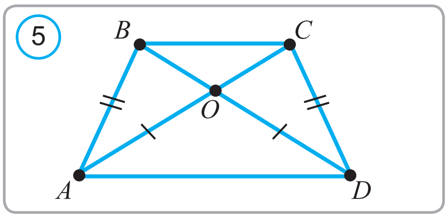
9) $\angle 4 = \angle 2$, $\angle 13 = \angle 15$ *(как вертикальные)*, $c \parallel d$, так как $\angle 2$ и $\angle 15$ – односторонние, то $\angle 2 + \angle 15 = 180°$. Значит, равенство $\angle 4 + \angle 13 = 180°$ верно.

11) Так как $c \parallel d$, то $\angle 7 = \angle 10$ *(как накрест лежащие углы при параллельных)* и $\angle 10 = \angle 12$ *(как вертикальные)*. Значит, $\angle 7 = \angle 12$.

Поэтому равенство $\angle 7 + \angle 12 = 180°$ верно только при $\angle 7 = \angle 12 = 90°$.

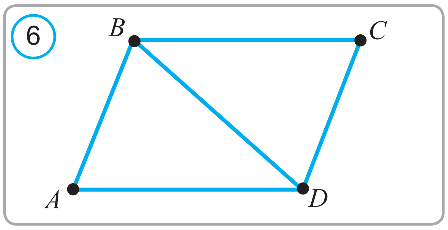
Подобным же образом самостоятельно проверьте остальные равенства.

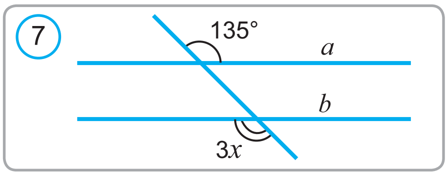



## Вопросы, задачи и задания

1. Покажите, что $AC = CB$ на рисунке 4.
2. Как можно применить задачу 1 при нахождении середины данного отрезка?
3. Известно, что $BC \parallel AD$, $AO = OD$ на рисунке 5. Докажите равенства
   а) $BO = OC$; б) $AC == BD$; в) $\Delta AOB = \Delta COD$; г) $\Delta ABD = \Delta ACD$.
4. Если $BC \parallel AD$ и $AB \parallel CD$ на рисунке 6, то $\Delta ABD = \Delta CBD$.
5. Если $a \parallel b$ на рисунке 7, то чему равен $x$?



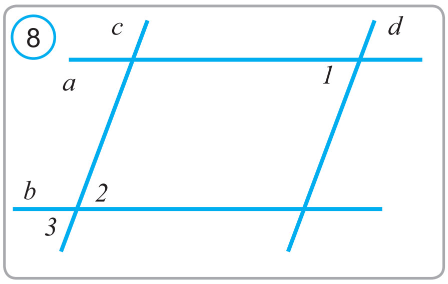



6. Даны острые углы $ABC$ и $A_1B_1C_1$. Если $AB||A_1B_1$ и $BC||B_1C_1$, то докажите $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

7*. Один из углов, соответственные стороны которых параллельны и лежат на прямых, острый, а второй – тупой. Докажите, что сумма этих углов равна 180°.

***Примечание.*** Теоремы, приведенные в задачах 6,7 – называются свойствами углов с соответственно параллельными сторонами.

8. Если на рисунке 8 a||b, c||d и 1=55°, найдите 2 и 3.



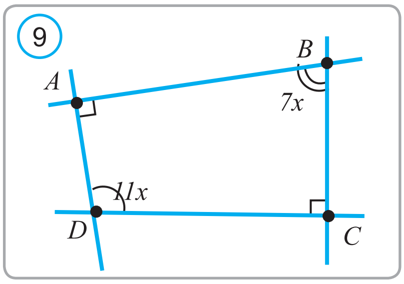

9. Разность углов, соответственные стороны которых лежат на параллельных прямых, равна 40°. Найдите эти углы.

10*. Даны острые углы $ABC$ и $A_1B_1C_1$. Если $AB\perp A_1B_1$ и $BC\perp B_1C_1$, то докажите $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

11*. Один из углов, соответственные стороны которых перпендикулярны и лежат на прямых, острый, а второй – тупой. Докажите, что сумма этих углов равна 180°.

***Примечание.*** Теоремы, приведенные в задачах 10,11 – называются свойствами углов с соответственно перпендикулярными сторонами.

12. Соответственные стороны углов $ABC$ и $ADC$ на рисунке 9 перпендикулярны. Найдите неизвестные углы.



## 36 Проверьте ваши знания

**1. Заполните пропуски в предложениях в соответствии со смыслом.**

1. Через точку, лежащую на прямой, можно провести перпендикулярную к ней .......... .
2. Если при пересечении двух прямых секущей равны ............ , то эти прямые параллельны.
3. Если на плоскости две прямые ................ , то они называются параллельными прямыми.
4. Прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, .............
5. Через точку, не лежащую на прямой, проходит .............. параллельная ей прямая.
6. Через произвольную точку прямой можно провести только одну прямую, ................ .
7. Прямые, пересекающиеся под прямым углом называются ................ .
8. Прямые, порознь ........... одной прямой, параллельны.
9. Если при пересечении двух прямых секущей односторонние углы .........., то прямые параллельны.
10. При пересечении двух параллельных прямых соответственные .......... .

**2. Если в следующих фразах имеются ошибки, найдите и исправьте их.**

1. Только через одну точку прямой можно провести к ней перпендикуляр.
2. Только из одной точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить перпендикуляр на данную прямую.
3. Прямая, перпендикулярная к одной из параллельных прямых $AB$ и $AK$, будет перпендикулярна и к другой.
4. Накрест лежащие углы, которые образуются при пересечении двух прямых секущей, равны.
5. Если два отрезка не пересекаются, они называются параллельными.
6. Углы с соответственно параллельными сторонами равны.
7. Если $a \perp b$, $b \perp c$, то $a \perp c$.
8. Сумма углов с соответственно перпендикулярными сторонами равна 180°.
9. Если равны односторонние углы, образующиеся при пересечении двух прямых секущей, то прямые параллельны.
10. Прямые, параллельные перпендикулярным прямым, параллельны.
11. Если $a \parallel b$, $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

**3. Найти соответствующие геометрические понятия для свойств или толкований, приведенных в таблице.**

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Прямые, не имеющие общей точки | |
| 2. | Пересекаются под прямым углом | |
| 3. | Из точки на прямую можно опустить только один | |
| 4. | Из точки на прямую можно опустить сколько угодно | |
| 5. | Условие и заключение поменяли местами | |
| 6. | Углы, получающиеся при пересечении двух прямых секущей | |

**4. Сопоставьте геометрическому понятию, данному в первом столбике, соответствующее свойство или толкование из второго столбика.**

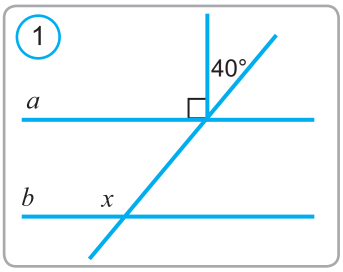
| *Геометрическое* понятие | *Свойство, толкование* |
|---|---|
| 1. Параллельные прямые | A. Верна не всегда. |
| 2. Перпендикулярные прямые | B. Не пересекаются. |
| 3. При пересечении двух прямых секущей | C. Образуют при пересечении прямой угол. |
| | D. Получаются накрест лежащие, соответственные и односторонние углы. |
| 4. Накрест лежащие углы | E. Лежат в одной полуплоскости. |
| 5. Обратная теорема | F. Если они равны, то прямые параллельны. |
| 6. Односторонние углы | |

**5. Тесты.**

1. Сколько прямых, параллельных данной прямой, можно провести через точку, не принадлежащую ей?
   A) 1; B) 2; D) 4; E) сколько угодно.
2. Какой из ответов правильный, если $a \| b$, $b \perp c$, $c \perp d$ ?
   A) $a \perp d$, $b \perp d$ B) $a \perp c$, $b \| d$
   D) $a \| c$, $a \perp d$ E) $a \perp c$, $a \perp d$, $b \perp d$.
3. Сколько перпендикуляров можно опустить на прямую, лежащую в плоскости, из точки, не принадлежащей прямой?
   A) 1; B) 2; D) 4; E) сколько угодно.

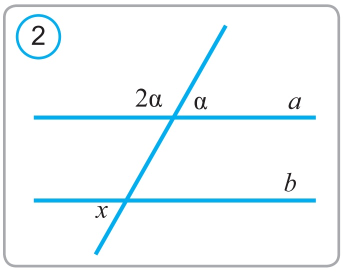
4. Найти угол $x$, если $a \| b$ на рисунке 1.

A) 100°; B) 110°; D) 130°; E) 140°.



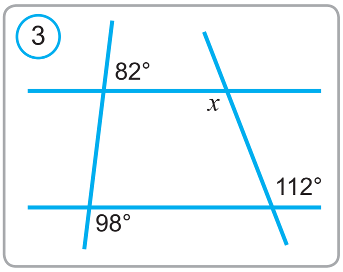

5. Найти угол $x$, если $a \| b$ на рисунке 2.

A) 30°; B) 45°; D) 60°; E) 36°.



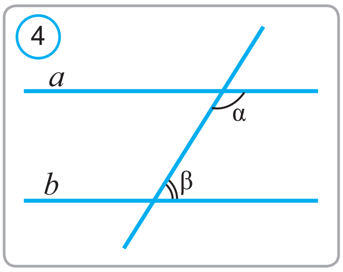

6. Найти угол $x$ на рисунке 3.

A) 96°; B) 108°; D) 112°; E) 78°.




7. Найти угол $\alpha$, если $a \| b$ и $\alpha - \beta = 70°$ на рисунке 4.

A) 30°; B) 125°; D) 75°; E) 36°.




8. Сколько может образовываться равных тупых углов при пересечении двух прямых третьей прямой?

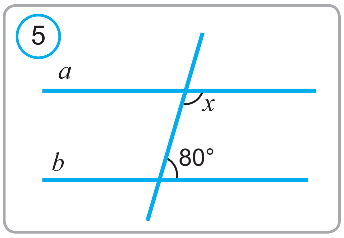
A) 3; B) 8; D) 6; E) 4.

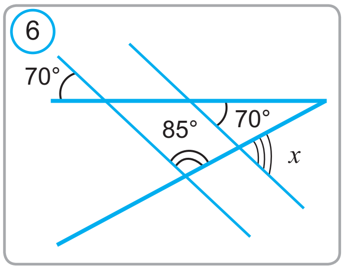
9. Один из углов, образовавшихся при пересечении двух прямых третьей прямой, равен 97°. Найдите самый малый из образованных углов.

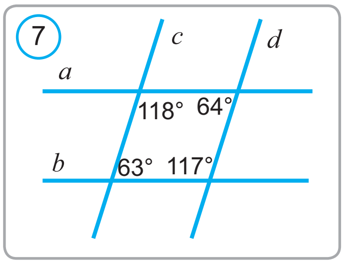
A) 97°; B) 83°; D) 77°; E) 7°.

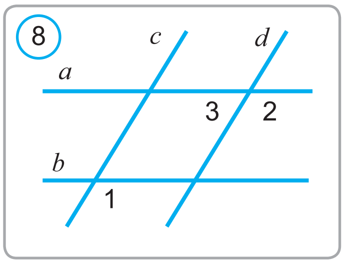
10. Каково максимально возможное количество равных острых углов при пересечении двух прямых третьей прямой?

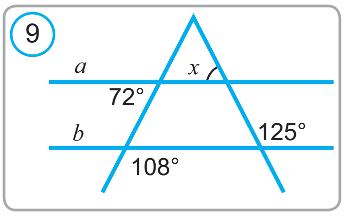
A) 3; B) 4; D) 6; E) 5.




11. Каково максимально возможное количество равных углов при пересечении двух прямых третьей прямой.

A) 2; B) 6; D) 8; E) 5.

12. Сумма трех внутренних углов, образованных при пересечении двух прямых третьей прямой, равна 290°. Найдите четвертый угол.

A) 145°; B) 110°; D) 36°; E) 70°.

13. Если на рисунке 5 $a||b$, то найдите $x$.

A) 100°; B) 80°; D) 110°; E) 90°.

14. Найдите угол $x$ на рисунке 6.

A) 105°; B) 80°; D) 110°; E) 75°.

15. Какие прямые на рисунке 7 параллельны?

A) $a||b$; B) $a||c$; D) $a||c$; E) $c||d$.

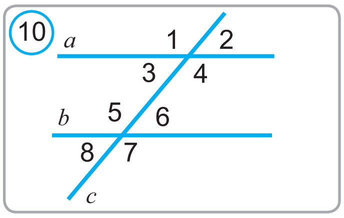
16. Если на рисунке 8 $a||b$, $c||d$ и $\angle 1=122°$, найдите $\angle 2$ и $\angle 3$.

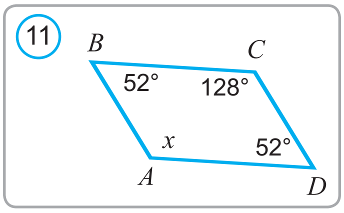
A) $\angle 2=122°$, $\angle 3=58°$; B) $\angle 2=130°$, $\angle 3=58°$;
D) $\angle 2=122°$, $\angle 3=68°$; E) $\angle 2=130°$, $\angle 3=50°$.

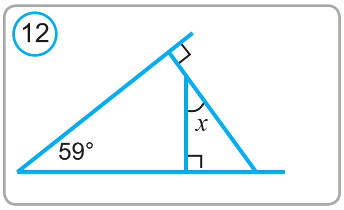
## 6. Задачи.

1. Найдите угол $x$ на рисунке 9.
2. Если на рисунке 10 $\angle 4 + \angle 5 = 180°$, верно ли, что $a||b$?
3. Если на рисунке 10 $\angle 2 = \angle 6$, верно ли, что $a||b$?
4. Если на рисунке 10 $\angle 1 = \angle 5 = 118°$, найдите остальные углы.
5. Если на рисунке 10 $\angle 2=71°$ и $\angle 7=119°$, верно ли, что $a||b$?
6. Найдите неизвестные углы на рисунке 11.

7. Один из углов, образовавшихся при пересечении двух прямых третьей прямой, равен 47°. Какой градус должен иметь соответственный ему угол, чтобы эти две прямые были параллельны?
8. Сумма накрест лежащих углов, образованных при пересечении двух прямых третьей прямой, равна 84°. Найдите остальные углы.
9. Один из углов, образовавшихся при пересечении двух прямых третьей прямой, в 8 раз больше второго угла. Найдите все образовавшиеся углы.
10. Разность односторонних углов, образовавшихся при пересечении двух прямых третьей прямой, равна 30°. Найдите эти углы.
11. Найдите неизвестный угол на рисунке 12.
12. Разность углов, лежащих на соответственно параллельных прямых, равна 36°. Найдите эти углы.



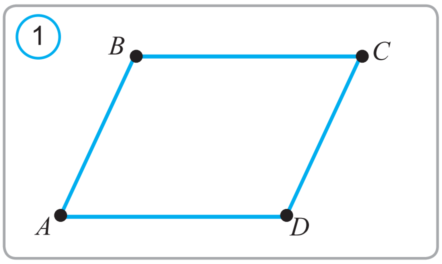

## 37 4-ая контрольная работа

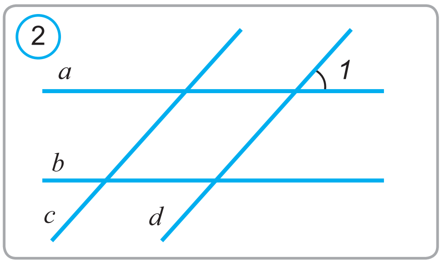
Контрольная работа, взятая за образец, состоит из двух частей:

I. 5 тестов, подобных приведенным на страницах 101–103;

II. 3 задачи, подобные данным ниже (задача 4 для желающих получить "отлично").

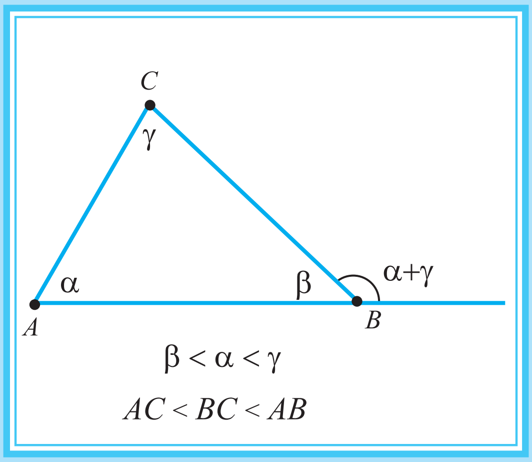
1. При пересечении двух параллельных прямых секущей, один из получившихся углов равен 34°. Найдите остальные углы.
2. Докажите, что $AB=CD$, если $BC||AD$ и $AB||CD$ на рисунке 1.
3. Пусть $a||b$, $c||d$ и $\angle 1=48°$ на рисунке 2. Найдите остальные углы.
4. В $\Delta ABC$ проведена биссектриса $AD$. Прямая, проведенная из точки $D$ пересекает сторону $AC$ в точке $E$. Докажите, что если $AE=DE$, то $DE||AB$.






8 — Геометрия, 7 кл.




# ГЛАВА IV

## ОТНОШЕНИЕ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

**Изучив материал этой главы вы приобретете следующие знания и практические навыки:**

**Знания:**

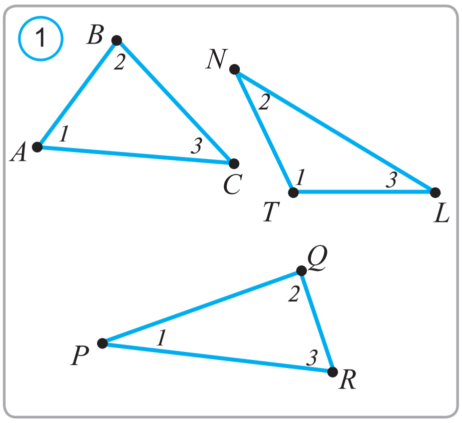
— Теорема о сумме внутренних углов треугольников и ее доказательство;
— внешний угол треугольника и его свойство;
— свойства прямоугольных треугольников;
— признаки равенства прямоугольных треугольников;
— свойство биссектрисы угла;
— неравенство треугольника.

**Навыки:**

— вычислять суммы внутренних углов треугольника практическим путем;
— применять освоенные теоретические знания, свойства в решении задач и выполнении практических работ.

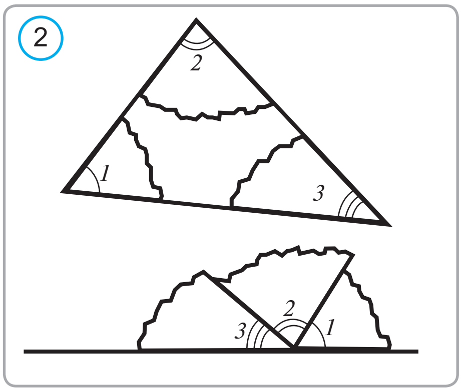
## 38 Теорема о сумме внутренних углов треугольника

### *Активизирующее упражнение.*



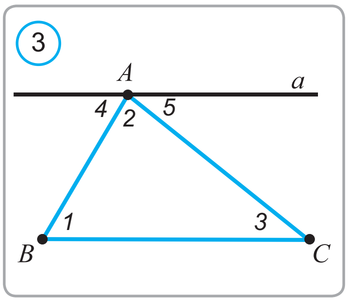

1. Измерьте транспортиром все три угла треугольника $ABC$, данного на рисунке, и найдите их сумму. Такую же работу выполните и для треугольников $MNL$ и $PQR$. Заполните таблицу по результатам вычислений. Какое свойство вы заметили? Выразите его в одном предложении.

| Треугольники | ∠**1** | ∠**2** | ∠**3** | ∠**1**+∠**2**+∠**3** |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta ABC$ | | | | |
| $\Delta MNK$ | | | | |
| $\Delta PQR$ | | | | |




2. На листе бумаги начертите треугольник $ABC$, вырежьте его и, обозначив его углы цифрами 1, 2, 3, оторвите их. Затем сложите их как показано на рисунке 2. Какой вывод можно сделать?

Теперь мы докажем одну из важнейших теорем геометрии – теорему о сумме углов треугольника.



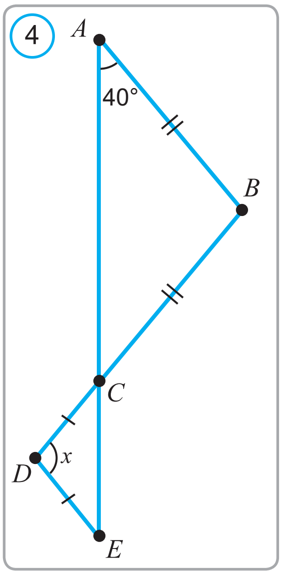

***Теорема.*** **Сумма углов треугольника равна 180°.**

$\Delta ABC$ ⇒ $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

***Доказательство.*** Через вершину $A$ проведем прямую $a$, параллельную стороне $BC$ *(рис. 3)*.

$\angle 1 = \angle 4$, так как эти углы накрест лежащие при параллельных $a$ и $BC$ и секущей $AB$.

$\angle 3 = \angle 5$, так как эти углы накрест лежащие при параллельных $a$ и $BC$ и секущей $AC$.




$\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$, так как эти углы имеют одну вершину и образуют развернутый угол. Из этого равенства следует, что,

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$, т. е. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

***Теорема доказана.***

***Задача 1.*** Используя сведения, данные на рисунке 4, найти неизвестный угол $x$.

***Решение.*** Так как $\Delta ABC$ – равнобедренный, $\angle ACB = \angle A = 40°$. По свойству вертикальных углов, $\angle DCE = \angle ACB = 40°$. По условию, $\Delta CED$ также равнобедренный. Поэтому $\angle DCE = \angle DEC = 40°$.

Значит, по теореме о сумме углов треугольника, в $\Delta CDE$: $40° + 40° + x = 180°$ или $x = 100°$.

***Ответ***: 100°.

***Задача 2.*** Найти градусную меру углов треугольника, если они относятся как 2:3:7.

***Решение***: Углы треугольника обозначим, следуя условию, $2x$, $3x$ и $7x$. Тогда по теореме о сумме углов треугольника получим уравнение $2x+3x+7x=180°$, откуда находим, что $x=15°$.

Значит, градусные меры углов треугольника 30°, 45° и 105°.

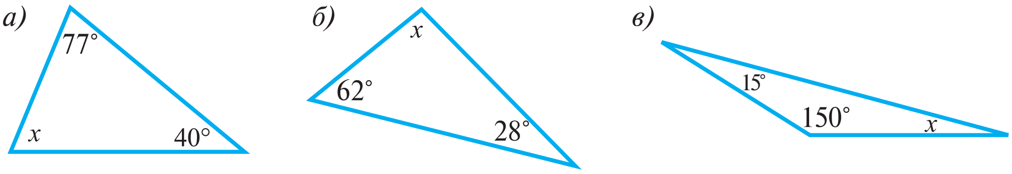
***Ответ***: 30°, 45°, 105°.

## Вопросы, задачи и задания

1. Сформулируйте теорему о сумме углов треугольника и поясните на чертеже.
2. Сколько прямых углов может быть у треугольника?
3. Сколько тупых углов может иметь треугольник?
4. Существуют ли треугольники с углами: а) 5°, 55°, 120°; б) 46°, 150°, 4°; в)100°, 20, 50°?
5. Найдите третий угол треугольника, если два угла треугольника: а) 60° и 40°; б) 70° и 85°; в) 90 и 45°; г) 105° и 30°.

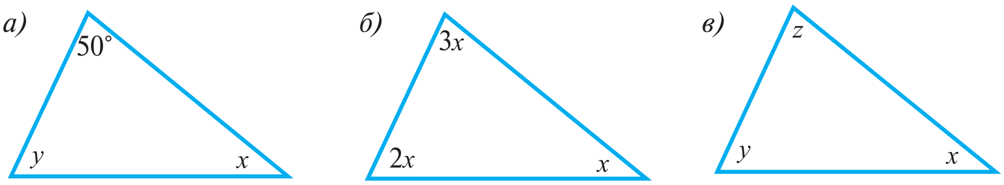
**6.** Найдите неизвестный угол.

а) б) в)




**7.** Найдите неизвестный угол.

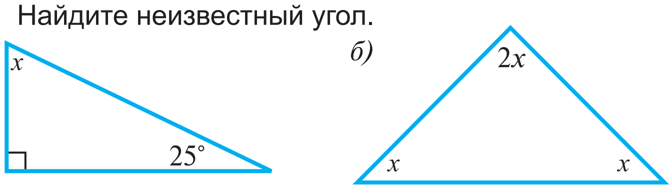
а) б) в)




$x : y = 8 : 5$ $\qquad$ $x : y : z = 5 : 6 : 7$

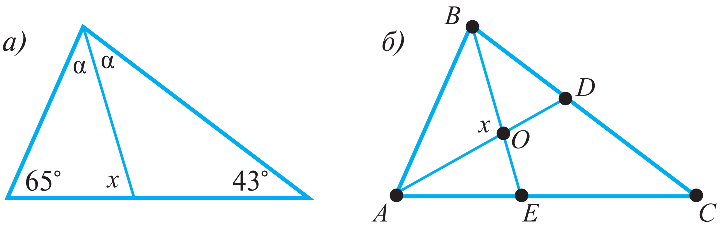
**8.** Найдите неизвестный угол.

а) б)

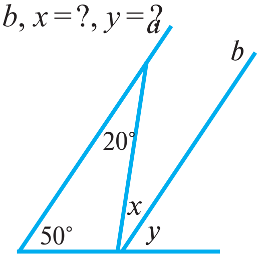



**9.** а) $x$ =?; б) $AD$ и $BE$ – биссектрисы, $\angle BAC = 64°$, $\angle ABC = 96°$, $x = ?$

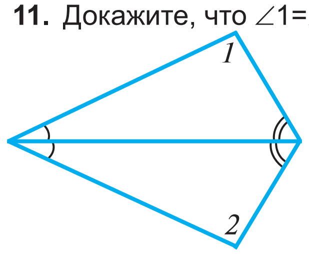
а) б)




**10.** $a \| b$, $x = ?$, $y = ?$




**11.** Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$ .




**12*.** Найти угол $\alpha$, если $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ – углы треугольника и $\alpha = (\beta + \gamma)/2$.

**13.** Найти углы равностороннего треугольника.

**14.** Найти углы равнобедренного прямоугольного треугольника.

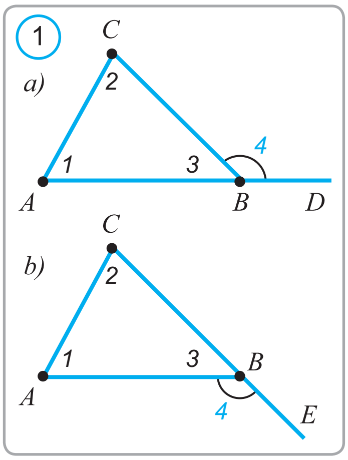
**15.** Найти углы равнобедренного треугольника, если один из них а) 50°; б) 60°; в) 105°.

## 39 Свойство внешнего угла треугольника

Угол, смежный углу треугольника, называется его *внешним углом*.

На рисунке 1 изображены внешние углы $CBD$ и $ABE$ треугольника $ABC$ при вершине $B$. Очевидно, что эти углы равны как вертикальные. Начертите и покажите на чертеже внешние углы при вершинах $A$ и $C$.

Углы треугольника, для того чтобы отличать их от внешних углов, называют также *внутренними углами*.




### *Геометрическое исследование.*

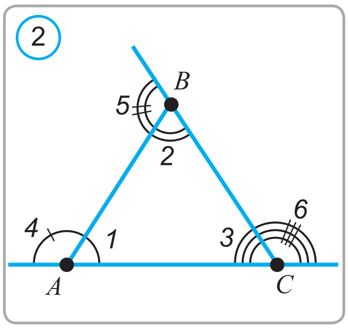
Измерьте с помощью транспортира все внутренние и внешние углы треугольника $ABC$ на рисунке 2 и сравните величины каждого внешнего угла треугольника с суммой двух внутренних углов, не смежных с ним:

а) $\angle 4$ и $\angle 2 + \angle 3$

б) $\angle 5$ и $\angle 1 + \angle 3$

в) $\angle 6$ и $\angle 1 + \angle 2$

К какому выводу вы пришли в результате сравнения? Сформулируйте его в виде предположения.




***Теорема.*** **Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.**

$\Delta ABC$, $\angle 4$ – внешний угол *(рис. 1)* ⇨ $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$

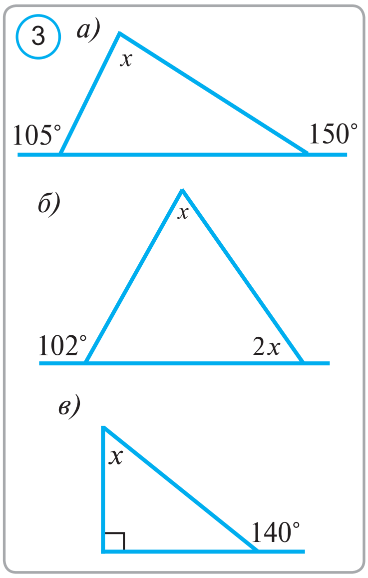
***Доказательство.*** Обратимся к рисунку 1. По свойству смежных углов $\angle 3 + \angle 4 = 180°$.

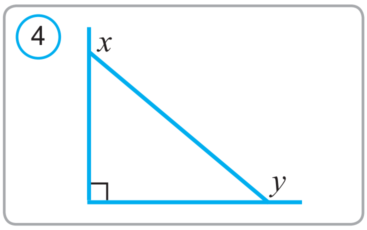
По теореме о сумме углов треугольника $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

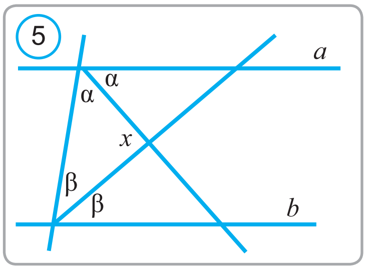
Из этих двух равенств следует

$\angle 1 + \angle 2 + \cancel{\angle 3} = \cancel{\angle 3} + \angle 4$. Таким образом, $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$.

***Теорема доказана.***




Из этой теоремы следует.

***Следствие.*** ***Внешний угол треугольника больше каждого из внутренних углов, не смежных с ним.***

Проверьте его правильность самостоятельно.

## Вопросы, задачи и задания

**1.** Что такое внешний угол треугольника?

**2.** Сформулируйте теорему о внешнем угле треугольника.

**3.** Найти внутренние углы треугольника, если два его внешних угла равны 120° и 135°.

**4.** Один из внутренних углов треугольника равен 30°, один из внешних углов равен 60°. Найти оставшиеся внутренние углы треугольника.

**5.** Найти неизвестный угол на рисунке 3.

**6.** На рисунке 4 найти $x+y$.

**7.** Чему равен угол $x$, если $a \| b$ на рисунке 5.

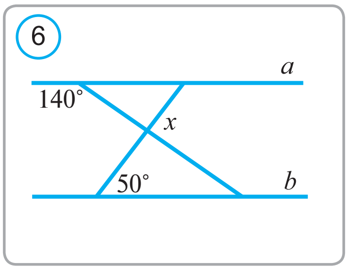
**8.** Чему равен угол $x$, если $a \| b$ на рисунке 6.

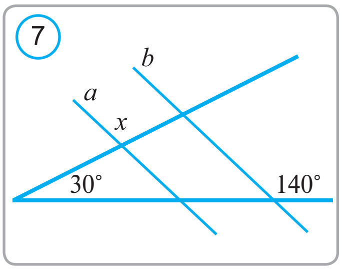
**9.** Чему равен угол $x$, если $a \| b$ на рисунке 7.

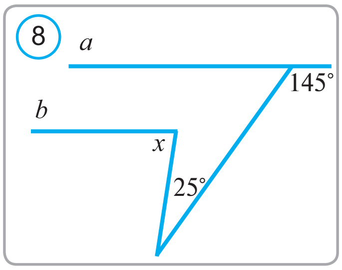
**10.** Чему равен угол $x$, если $a \| b$ на рисунке 8.

**11.** Может ли внешний угол треугольника быть острым? Если может, то сколько таких углов имеется у треугольника?

**12.*** Найти сумму внешних углов треугольника.



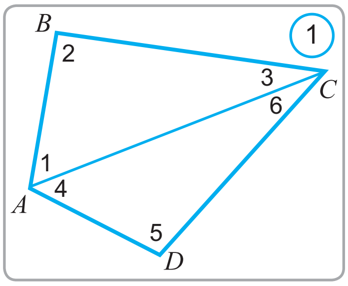
## 40 Решение задач

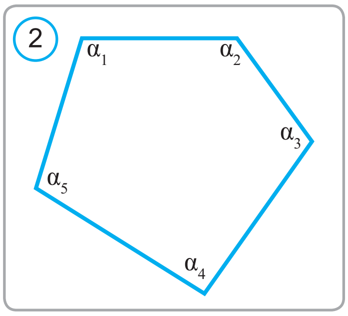
***Задача.*** Докажите, что сумма углов четырехугольника равна 360°.

***Решение:*** Начертим произвольный четырехугольник $ABCD$. Соединив вершины $A$ и $C$, разобьем его на два треугольника. Сумма внутренних углов каждого из треугольников $ABC$ и $ADC$ равна 180° *(рис. 1)*:

$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$, $\angle 4+\angle 5+\angle 6=180°$.

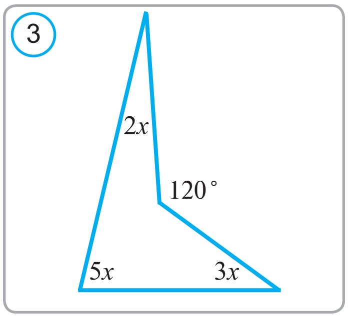
Так как $\angle A=\angle 1+\angle 4$ и $\angle C=\angle 3+\angle 6$, то $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=(\angle 1+\angle 4)+\angle 2+(\angle 3+\angle 6)+\angle 5=$ $=(\angle 1+\angle 2+\angle 3)+(\angle 4+\angle 5+\angle 6)=180°+180°=360°$.

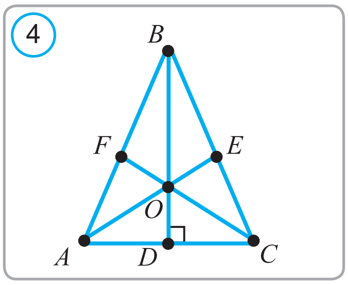


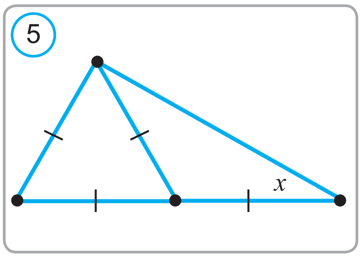



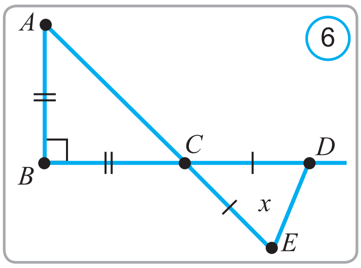

## *Вопросы, задачи и задания*

1. Градусные меры двух углов треугольника относятся как 5:9, третий угол на 10° меньше, чем меньший из них. Найти углы треугольника.
2. Внутренние углы треугольника, не смежные с его внешним углом, равным 108°, относятся как 5:4. Найти эти внутренние углы.
3. Могут ли две стороны треугольника быть перпендикулярными его третьей стороне?
4. Могут ли у треугольника быть: а) 1; б) 2; в) 3 тупых внешних угла?
5. Могут ли быть равными внутренний и внешний углы треугольника при одной его вершине?
6. Найти сумму углов пятиугольника на рисунке 2.
7. Найти неизвестные углы *(рис. 3)*.
8. Покажите, что треугольник с двумя равными углами является равнобедренным.
9. Один из углов равнобедренного треугольника равен: а) 120°; б) 70°. Найти два других угла.
10. Угол при основании равнобедренного треугольника равен а) 15°; б) 75°? Найти его остальные углы.






**11.** Докажите, что если соответствующие стороны двух треугольников параллельны, то прилежащие к ним углы равны.

**12.** Найти углы $AOB$ и $EOC$, если $AB=BC$, $\angle ABC=50°$, $AE$ и $FC$ – биссектрисы на рисунке 4.

**13.** Найти на рисунке 5 неизвестный угол $x$.

**14.** Найти на рисунке 6 неизвестный угол $x$.

**15.** Пусть соответствующие стороны двух треугольников перпендикулярны. Будут ли равны соответствующие им углы? Обоснуйте ответ.

**16.** Можно ли из какого-нибудь треугольника получить два остроугольных треугольника с острыми углами с помощью одного разреза вдоль прямой? Обоснуйте свой ответ.

## 41 Свойства прямоугольного треугольника

Напомним, что у прямоугольного треугольника один угол прямой (90°), а два других острые. В прямоугольном треугольнике сторона, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой*, а каждая из двух оставшихся сторон называется *катетом*. Рассмотрим теперь некоторые свойства прямоугольного треугольника.

***Свойство 1.*** **Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.**

На самом деле, сумма внутренних углов треугольника равна 180°. Но один из углов прямоугольного треугольника равен 90°. Поэтому сумма двух оставшихся углов также равна 90°.

***Задача 1.*** Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

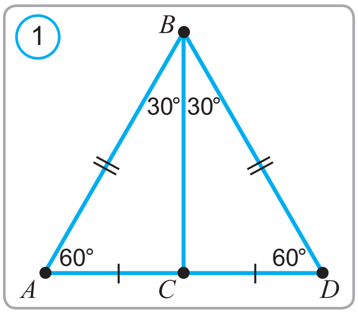
Пусть $\angle ACB=90°$ и $\angle ABC=30°$ в прямоугольном треугольнике $ABC$ на рисунке 1. В таком случае $\angle BAC=60°$. Покажем, что $AC=\dfrac{AB}{2}$.

Построим, как показано на рисунке 1, треугольник $BCD$, равный данному треугольнику. В результате получим треугольник $ABD$, все углы которого равны 60°. Очевидно, треугольник $ABD$ равносторонний. В частности, $AB = AD$. Но

$$AD = AC + CD = 2AC.$$

Следовательно, $AB = 2AC$, т. е. $AC = \frac{AB}{2}$.

***Свойство доказано.***



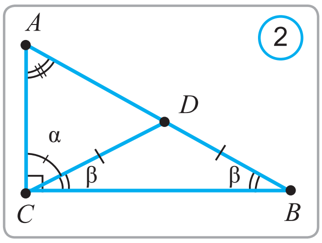

***Свойство 2.*** **Если один из катетов прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то этот катет противолежит углу 30°.**

Это свойство – обратное к задаче 1. Докажите его самостоятельно.

***Задача 2.*** В прямоугольном треугольнике $ABC$ угол $C$ – прямой, $AB=12$ и $CD=DB$. Найти $CD$ *(рис. 2)*.

***Решение***: $CDB$ – равнобедренный треугольник. так как $CD=DB$ *(рис. 2)*. Обозначим $\angle B=\beta$. Так как $\angle A+\angle B=90°$, то $\angle A+\beta=90°$. Но на чертеже $\alpha+\beta=90°$, значит, $\angle A=\alpha$. Поэтому $ADC$ – равнобедренный треугольник. Следовательно, $AD=CD=DB$, т. е. точка $D$ – середина стороны $AB$.

Тогда $CD = \frac{AB}{2} = 6$. ***Ответ***: $CD = 6$.




При решении этой задачи мы показали, что $AD=DB$ и $AD=CD$. Эти равенства выражают следующее свойство прямоугольного треугольника.

К этому важному свойству мы вернемся в 8 классе.

***Свойство 3.*** **В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.**

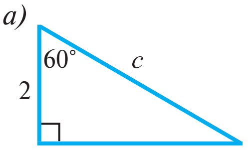
## Вопросы, задачи и задания

**1.** Как называются стороны прямоугольного треугольника?
**2.** Чему равна сумма острых углов прямоугольного треугольника?
**3.** Может ли какой-нибудь из углов прямоугольного треугольника быть тупым?
**4.** Сколько высот у прямоугольного треугольника?
**5.** Какая имеется связь между катетом, противолежащим углу 30°, и гипотенузой?

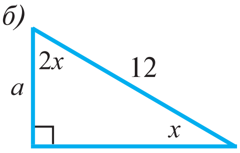
**6.** Покажите, что в равнобедренном прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, равна ее половине.

**7.** а) $c=?$ б) $a=?$ в) $x=?$

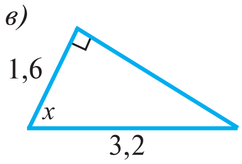
*а)*




*б)*

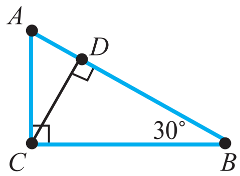



*в)*

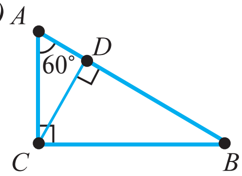



**8.** а) $AB=20$, $AD=?$ б) $AB=18$, $BD=?$ в) $BD=?$

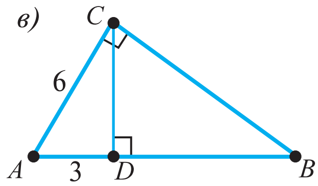
*а)*




*б)*




*в)*




**9.** Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна 8 *см*. Пусть один из углов треугольника равен 60°. Найти стороны, прилежащие к этому углу.

### Точность и краткость в геометрии

Известно, что точное математическое предложение достаточно полное и вместе с тем краткое, не должно содержать лишних слов.

**1.** Попробуйте найти лишние слова в следующих предложениях.

а) В прямоугольном треугольнике сумма двух острых углов равна 90°.

б) Если в прямоугольном треугольнике катет равен половине гипотенузы, то противолежащий ему острый угол равен 30°.

**2.** Используя подходящие термины, сократите следующие предложения.

а) Многоугольник с наименьшим числом сторон;

б) хорда, проходящая через центр окружности;

в) равнобедренный треугольник, основание которого равно боковой стороне.

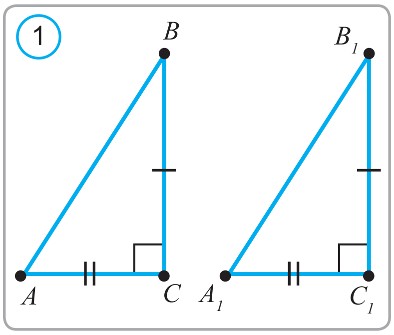
## 42 Признаки равенства прямоугольных треугольников

***Упражнение.*** Пусть даны прямоугольные треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$. Эти треугольники имеют по одному равному (прямому) углу. Поэтому для прямоугольных треугольников признаки равенства значительно упрощаются.

Приведем признаки равенства прямоугольных треугольников по двум катетам (КК признак), катету и острому углу (КУ признак), гипотенузе и острому углу (ГУ признак) и гипотенузе и катету (ГК признак):

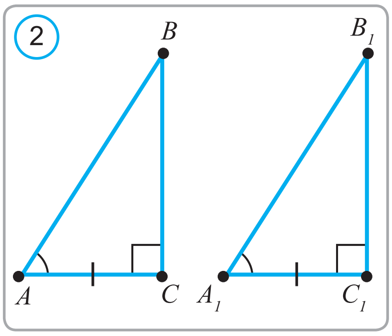
***Теорема. (КК признак).*** **Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого прямоугольного треугольника, то эти треугольники равны** *(рис. 1)***.**

Этот признак непосредственно следует из СУС признака равенства треугольников.



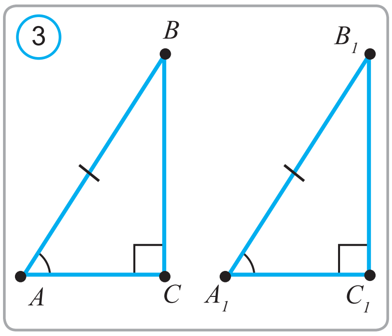

***Теорема. (КУ признак).*** **Если катет и прилежащий к нему угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу второго прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны** *(рис. 2)***.**

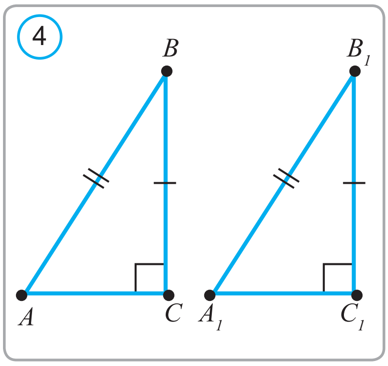
Этот признак непосредственно следует из УСУ признака равенства треугольников.




***Теорема. (ГУ признак).*** **Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу второго прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны** *(рис. 3)***.**

Этот признак непосредственно следует из УСУ признака равенства треугольников.

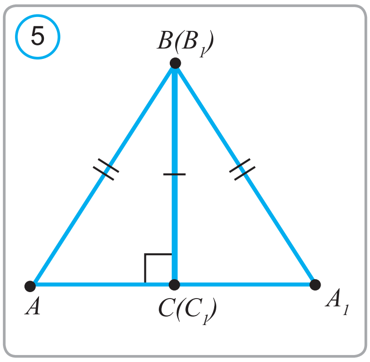





**Теорема. (ГК признак). Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету второго треугольника, то такие треугольники равны** *(рис. 4)***.**

Этот признак надо доказать. Даны треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ *(рис. 4)* и пусть у них $\angle C = 90°$, $\angle C_1 = 90°$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. Надо показать, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

***Доказательство.*** У треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$ равны две стороны: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. Если удастся показать, что углы $ABC$ и $A_1B_1C_1$ так же равны, то равенство треугольников будет следовать из СУС признака.

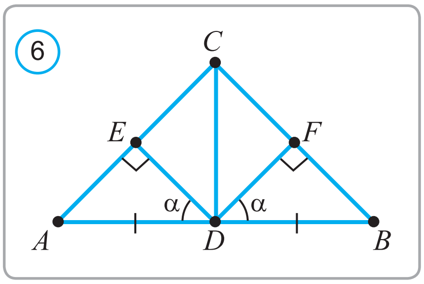



Для доказательства приложим к треугольнику $ABC$ треугольник $A_1B_1C_1$, совместив катет $BC$ с равным ему катетом $B_1C_1$ *(рис. 5)*. Тогда лучи $CA$ и $C_1A_1$ образуют развернутый угол, так как $\angle C$ и $\angle C_1$ – прямые, т. е. точки $A$, $C$, $C_1$ и $A_1$ будут лежать на одной прямой. В результате треугольник $ABA_1$ будет равнобедренным. Но высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, будет биссектрисой (согласно заключению теоремы на стр. 66).

Значит, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

***ГК признак доказан.***

***Задача.*** На основании данных рисунка 6 докажите, что треугольник $ABC$ – равнобедренный.




***Решение***: $\Delta AED = \Delta BFD$ по гипотенузе и острому углу. Треугольники $CED$ и $CFD$ – прямоугольные, а $CD$ – их общая гипотенуза. Так как $ED = FD$, тогда $\Delta CED = \Delta CFD$ по ГК признаку.

Значит, $\Delta ADC = \Delta BDC$, т.е. $AC = BC$ и $ABC$ – равнобедренный треугольник.

## Вопросы, задачи и задания

**1.** Назовите и сформулируйте признаки равенства прямоугольных треугольников.

**2.** Будут ли равны прямоугольные треугольники, если катет и угол одного треугольника соответственно равны катету и углу второго треугольника?

**3.** Будут ли равны треугольники $ACB$ и $DCE$, если на рисунке 6:
а) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$;
б) $BC = DE$, $AB = CE$;
в) $AC = CD$, $BC = CE$;
г) $AB = DE$?

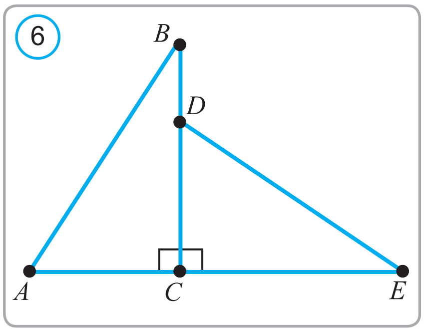
**4.** Будут ли равны треугольники $OAC$ и $ODB$, если на рисунке 7: а) $OC = OB$; б) $AC = BD$; в) $AO = OD$; г) $AC = OD$; д) $\angle OCA = \angle OBD$?

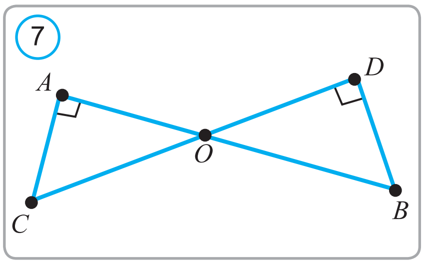
**5.** Докажите, что если в прямоугольных треугольниках $ABC$ и $A_1B_1C_1$ углы $A$ и $A_1$ прямые, $BD$ и $B_1D_1$ биссектрисы, $\angle B = \angle B_1$, $BD = B_1D_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

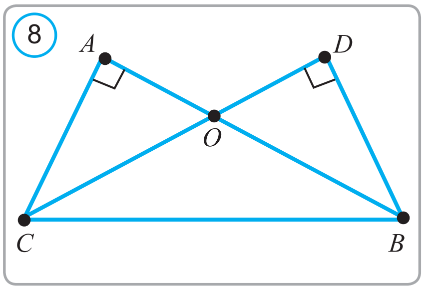
**6.** Будут ли равны треугольники $BAC$ и $CDB$, если на рисунке 8:
а) $AC = BD$;
б) $OA = OD$;
в) $\angle OCB = \angle OBC$;
г) $BC = OD$;
д) $\angle ACB = \angle DBC$?

**7.** В треугольнике $ABC$ проведена высота $BD$. Докажите, что треугольник $ABC$ равнобедренный, если $AD = DC$.

**8.** В остроугольном треугольнике с острыми углами $ABC$ равны высоты $AA_1$ и $CC_1$. Докажите, что $\angle BAC = \angle BCA$.



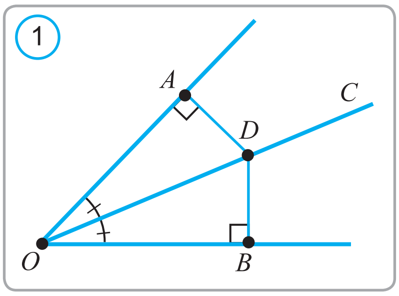



## 43 Свойство биссектрисы угла

Если вы помните, расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

***Теорема.*** **Расстояния от любой точки биссектрисы неразвернутого угла до его сторон равны.**



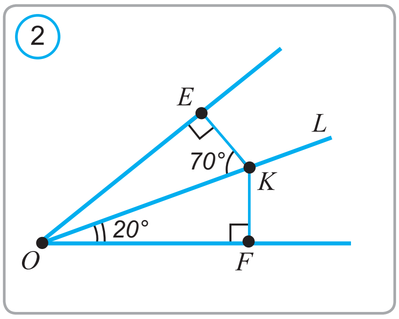

***Доказательство.*** Пусть даны угол $O$ и его биссектриса $OC$ *(рис. 1)*. Отметим на биссектрисе $OC$ произвольную точку $D$ и опустим перпендикуляры $DA$ и $DB$ на стороны угла.

В прямоугольных треугольниках $OAD$ и $OBD$:

1. $\angle AOD = \angle BOD$ — по условию;
2. $OD$ — общая гипотенуза.

По ГУ признаку равенства прямоугольных треугольников $\Delta OAD = \Delta OBD$. В частности, $DA = DB$.

***Теорема доказана.***




***Задача.*** На биссектрисе $OL$ угла $EOF$ взята точка $K$ *(рис. 2)*. Найти углы а) $EOK$ и $OKF$; б) $EOF$ и $EKF$, если $EK \perp OE$, $KF \perp OF$, $\angle OKE = 70°$ и $\angle KOF = 20°$.

***Решение***: а) Как было показано выше, $\Delta EOK = \Delta FOK$. Поэтому $\angle EOK = \angle FOK = 20°$ и $\angle OKF = \angle OKE = 70°$.

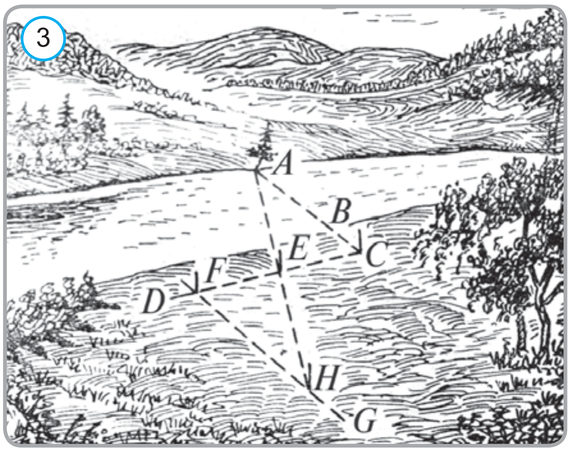
б) $\angle EOF = 2 \cdot \angle KOF = 40°$,
$\angle FKE = \angle FKO + \angle OKE = 70° + 70° = 140°$.

Ответ: а) 20° и 70°; б) 40° и 140°.

## Практическое задание

Используя признаки равенства прямоугольных треугольников, прокомментируйте метод, предложенный для измерения ширины реки, представленный на рисунке 3, и изложите способ решения этой задачи.

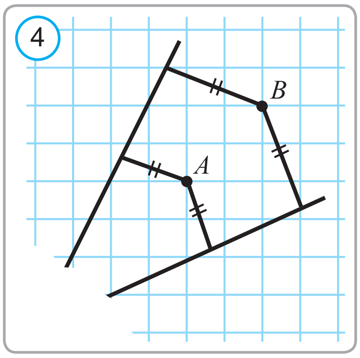
3




## Вопросы, задачи и задания

1. Докажите, что произвольная точка биссектрисы угла равноудалена от сторон угла.
2. Пусть расстояние от точки на биссектрисе угла $AOB$ до луча $OA$ равно 7 *см*. Найти расстояние от этой точки до луча $OB$.
3. Дан угол $O$ и точка $C$ на его биссектрисе. Найти расстояния от точки $C$ до сторон угла, если $\angle O = 60°$ и $OC$ = 14 *см*.
4. Во внутренней области угла $AOB$ выбрана точка $N$. Докажите, что точка $N$ лежит на биссектрисе угла $AOB$, если $AN=BN$, $OA \perp AN$ и $OB \perp BN$.
5*. На листе бумаги в клетку изображена часть угла. Кусок бумаги, на котором помещалась вершина угла, оторван. Известно, что точки $A$ и $B$ равноудалены от сторон угла. Как построить биссектрису угла *(рис. 4)*?
6*. Докажите, что точка пересечения двух биссектрис треугольника равноудалена от всех его сторон.
7. У равнобедренных треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$ равны основания $AC$ и $A_1C_1$ и высоты $BD$ и $B_1D_1$, опущенные на эти основания. Докажите, что треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ равны.

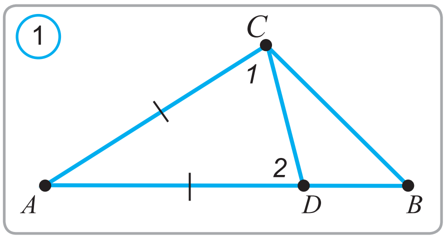
4



## 44 Соотношения между сторонами и углами треугольника

*Теорема.* **Против большей стороны треугольника лежит больший угол**

$\Delta ABC$, $AB>AC$ (рис.1) ⇒ $\angle C > \angle B$




***Доказательство.*** На луче $AB$ отложим $AD = AC$. Так как $AB > AD$, то точка $D$ принадлежит отрезку $AB$. Значит, луч $CD$ лежит во внутренней области угла $C$ и делит угол $C$ на два угла. Поэтому $\angle C > \angle 1$.

Так как треугольник $ACD$ по построению является равнобедренным, то $\angle 1 = \angle 2$. Так как $\angle 2$ — внешний угол треугольника $CBD$, то $\angle 2 > \angle B$.

Из этих соотношений, $\angle C > \angle 1$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 > \angle B$, рассмотренных по отдельности, следует, что $\angle C > \angle B$.

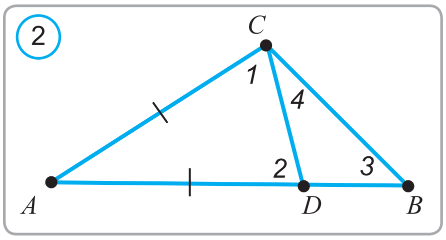
***Теорема доказана.***

Справедлива теорема, обратная этой теореме.

***Обратная теорема.*** **Против большего угла треугольника лежит большая сторона.**

Эту теорему докажите самостоятельно.

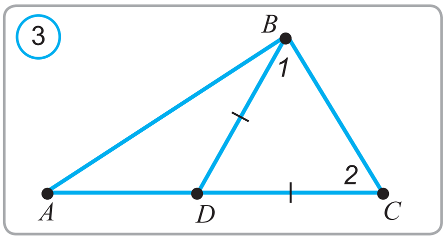
***Следствие. В равнобедренном треугольнике против равных сторон лежат равные углы.***




Эта теорема была доказана ранее.

***Задача 1.*** Пользуясь сведениями, данными на рисунке 2, докажите, что $\angle 1 > \angle 3$.

***Решение:*** $\angle 2$ – внешний угол $\Delta BDC$. Но по свойству внешнего угла $\angle 2 = \angle 3 + \angle 4$, и градусная мера $\angle 4$ положительна, поэтому $\angle 2 > \angle 3$. Т. к. $\Delta ACD$ — равнобедренный, то $\angle 1 = \angle 2$. Следовательно, $\angle 1 > \angle 3$.




***Задача 2.*** Используя данные на рисунке 3, покажите, что $AB < AC$ .

***Решение***: Треугольник $BDC$ – равнобедренный (так как $BD = DC$), значит, $\angle 1 = \angle 2$. Так как $\angle 1 < \angle ABC$, то $\angle 2 < \angle ABC$. Следовательно, $AB < AC$, так как против большего угла лежит большая сторона.

## Вопросы, задачи и задания

**1.** Докажите, что против большей стороны треугольника лежит больший угол, и обратно, против большего угла лежит большая сторона.

**2.** Какой из углов треугольника $ABC$ наибольший и какой наименьший, если $AB = 12$ *см*, $BC = 10$ *см*, $CA = 7$ *см*?

**3.** Сравните углы $\Delta ABC$, если а) $AB < BC < AC$; б) $AB = AC < BC$. Может ли угол $A$ быть тупым углом?

**4.** Какая сторона равнобедренного треугольника наибольшая, если угол при его вершине равен 62°? А если он равен 58°?

**5.** Может ли в треугольнике меньшая сторона лежать против тупого угла?

**6.** Сравните стороны $\Delta ABC$, если а) $\angle A > \angle B > \angle C$; б) $\angle A = \angle B < \angle C$.

**7.** Может ли больший угол треугольника быть меньше 60°? Может ли меньший угол треугольника быть больше 60°?

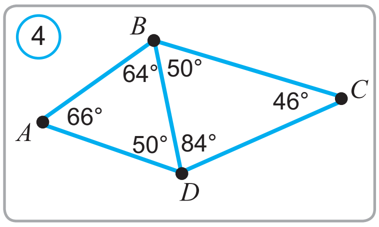
**8.** Найти угол, который образуется при пересечении двух биссектрис равностороннего треугольника.

**9*.** Пусть $AB > BC$ в треугольнике $ABC$ и $\angle A = 60°$. Какие значения может принимать угол $B$?

**10.*** Пусть для углов $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ треугольника имеют место соотношения $\alpha < \beta + \gamma$, $\beta < \alpha + \gamma$, $\gamma < \alpha + \beta$. Каким будет этот треугольник?

**11.*** На рисунке 4 укажите наибольший и наименьший отрезки. Обоснуйте свой ответ.

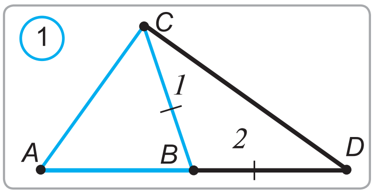
**12.** Какая сторона больше в прямоугольном треугольнике, гипотенуза или катет?



## 45 Неравенство треугольника

*Теорема.* **Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.**

$\Delta ABC$ *(рис. 1)* ⇒ $AC < AB + BC$




***Доказательство.*** Отложим на продолжении стороны $AB$ отрезок $BD$, равный отрезку $BC$, и соединим точки $C$ и $D$ *(рис. 1)*. В результате получим равнобедренный треугольник $BCD$. В нем $\angle 1 = \angle 2$, т. к. $BC = BD$. Из рисунка 1 ясно, что

$$\angle ACD > \angle 1.$$

Но $\angle 1 = \angle 2$, следовательно, $\angle ACD > \angle 2$.

Получили неравенство, связывающее углы треугольника $ACD$. Так как против большего угла лежит большая сторона, то приходим к неравенству $AC < AD$.

Тогда из равенства $AD = AB + BD$ следует, что $AC < AB + BD$. Если принять во внимание, что $BD=BC$, придем к искомому неравенству $AC < AB + BC$ .

***Теорема доказана.***

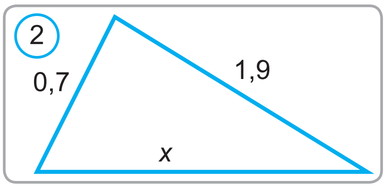
Из этой теоремы вытекает следующее утверждение.

***Следствие.*** **Для любых трех точек $A, B$ и $C$, не лежащих на одной прямой, справедливы неравенства $AC < AB + BC$, $AB < AC + BC$ и $BC < AB + AC$.**

Каждое из этих неравенств называется *неравенством треугольника*.

***Задача.*** Длины двух сторон треугольника 0,7 и 1,9. Найти длину третьей стороны, если известно, что она выражается целым числом *(рис. 2)*.

***Решение***: Известны длины двух сторон: 0,7 и 1,9. Длину третьей стороны треугольника найдем, исходя из неравенств треугольника:




$$x + 0{,}7 > 1{,}9 \text{ и } 1{,}9 + 0{,}7 > x.$$

Из этих двух неравенств получаем, что $1{,}2 < x < 2{,}6$.

Так как $x$ – целое число, то только значение $x = 2$ удовлетворяет этому двойному неравенству. Итак, длина неизвестной стороны треугольника равна 2.

**Ответ:** 2 .

## Вопросы, задачи и задания

**1.** В чем смысл неравенства треугольника?

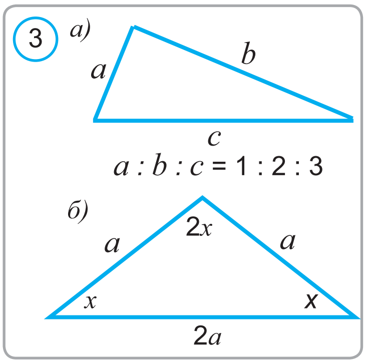
**2.** Какие задачи решаются с применением неравенства треугольника?

**3.** Можно ли построить треугольник из отрезков с длинами 1 *м*, 2 *м* и 3 *м*?

**4.** Существуют ли треугольники со сторонами
а) 2; 3; 4; б) 2; 2; 4; в) 3,6 ; 1,8; 5; г) 56; 38; 19?

**5.** Найти третью сторону равнобедренного треугольника, если длины двух других сторон:
а) 7 и 3; б) 10 и 5; в) 8 и 5.

**6.** Верно ли передано содержание задачи на рисунке 3?




**7.** Докажите, что каждая сторона треугольника больше разности двух других его сторон.

**8.** Найти стороны равнобедренного треугольника, если его периметр равен 25 *см*, одна сторона больше другой на 4 *см*, один из внешних углов острый.

**9.*** Сколько можно построить различных треугольников из отрезков с длинами 2; 3; 4; 5 и 6?

**10.** Какую геометрическую фигуру выражают отрезки $AB$, $BC$ и $AC$, если для трех точек плоскости $A$, $B$, $C$ выполняется неравенство $AB+BC \geq AC$?

**11.*** Докажите, что медиана треугольника меньше полупериметра треугольника.

**12.** Докажите, что наибольшая хорда окружности – это ее диаметр.

## 46 Проверьте свои знания

### 1. Заполните пропуски в предложениях в соответствии со смыслом.

1. Угол, ............... внутреннему углу треугольника, называется его внешним углом.
2. 180° равна ........... треугольника.
3. Треугольник, сумма двух углов которого равна 90°, будет ......... .
4. Внешний угол треугольника равен ............ не смежных с ним .
5. Если один из углов треугольника тупой, то два остальных угла ............. .
6. Углы прямоугольного треугольника не могут ............... .
7. Каждая сторона треугольника ............ суммы остальных сторон.
8. Если у двух прямоугольных треугольников равны гипотенуза и ........... , то эти треугольники равны.

9. Если у прямоугольных треугольников равны катеты, то .......... .
10. Если в прямоугольном треугольнике к гипотенузе проведена ........ , то она равна половине этой гипотенузы.
11. Если в прямоугольном треугольнике ....... , то он противолежит углу 30°.
12. Точки, равноудаленные от сторон угла, лежат ............ .

**2. Если в следующих фразах имеются ошибки, найдите и исправьте их.**

1. Если у прямоугольных треугольников равны гипотенузы и по одному острому углу, то эти треугольники равны.
2. Сумма внутренних и внешних углов треугольника равна 180°.
3. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов.
4. В треугольнике против большей стороны лежит меньший угол, против большего угла лежит меньшая сторона.
5. Каждая сторона треугольника меньше разности остальных сторон.
6. У прямоугольного треугольника есть только одна высота.
7. У прямоугольного треугольника катет равен половине гипотенузы.
8. У прямоугольного треугольника высота равна половине гипотенузы.
9. Если у прямоугольных треугольников равны гипотенузы, то эти треугольники также равны.
10. Внутренний угол треугольника всегда меньше суммы двух оставшихся углов.
11. Внешние углы треугольника всегда тупые.

**3. Найти соответствующие геометрические понятия для свойств и толкований, приведенных в таблице.**

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Сумма внутренних углов равна 180° | |
| 2. | Сумма острых углов равна 90° | |
| 3. | Стороны состоят из отрезков | |
| 4. | Соотношение между сторонами | |
| 5. | Равна половине гипотенузы | |
| 6. | Все три высоты пересекаются в одной вершине | |
| 7. | Всегда больше катетов | |
| 8. | Точки равноудалены от сторон угла | |

### 4. Тесты.

1. Найдите углы треугольника, если соотношение его углов составляет 2:3:4.

   A) 20°, 30°, 40°; B) 40°, 60°, 80°; D) 36°, 54°, 90°; E) 18°, 27°, 36°.

2. Выявите вид треугольника, если соотношение его углов составляет 3:2:1.

   A) остроугольный; B) тупоугольный;
   D) прямоугольный; E) выявить невозможно.

3. Выявите вид треугольника, если один его внешний угол острый.

   A) остроугольный; B) тупоугольный;
   D) прямоугольный; E) выявить невозможно.

4. Выявите вид треугольника, если один его угол больше суммы двух оставшихся его углов.

   A) остроугольный; B) тупоугольный;
   D) прямоугольный; E) выявить невозможно.

5. У какого треугольника высоты пересекаются в одной его вершине?

   A) Равностороннего треугольника;
   B) Равнобедренного треугольника;
   D) Прямоугольного треугольника;
   E) Такой треугольник не существует.

6. У треугольника $ABC$ внешний угол при вершине $A$ равен 120°, внутренний угол при вершине $C$ равен 80°. Найти внешний угол при вершине $B$.

   A) 120°; B) 140°; D) 160°; E) 40°.

7. Один из внешних углов треугольника равен 120°, разность двух несмежных с ним внутренних углов равна 30°. Найти больший из внутренних углов.

   A) 70°; B) 75°; D) 85°; E) 90°.

8. Величины двух внутренних углов относятся как 1:2. Третий угол на 40° больше, чем меньший из этих углов. Найдите больший угол треугольника.

   A) 105°; B) 75°; D) 80°; E) 90°.

9. Периметр равнобедренного треугольника равен 48, одна из его сторон равна равна 12. Найти остальные стороны.

   A) 18; 12 B) 16; 16
   D) 18; 24 E) 18; 18.

10. Угол между биссектрисой и высотой, исходящих из вершины прямого угла, равен 24°. Найти меньший угол треугольника.

A) 21°; B) 24°; D) 36°; E) 16°.

11. Чему равен $\angle A$ на рисунке 1?

A) 10°; B) 20°; D) 60°; E) 100°.

12. Сколько разносторонних треугольников можно построить из отрезков с длинами 3, 5, 7 и 11?

A) 2 B) 3 D) 5 E) 6.

13. Чему равна сумма углов $x + y$ на рисунке 2?

A) 90°; B) 180°;

D) 270°; E) определить невозможно.

14. Чему равен $\angle BCA$ на рисунке 3?

A) 90°; B) 96°; D) 144°; E) 84°.

15. Найти угол $x$, если $a \| b$ на рисунке 4.

A) 35°; B) 45°; D) 25°; E) 20°.

16. Найти угол $x$ на рисунке 5.

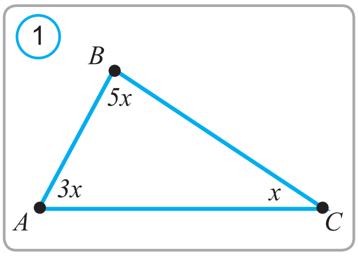
A) 60°; B) 55°; D) 65°; E) 70°.

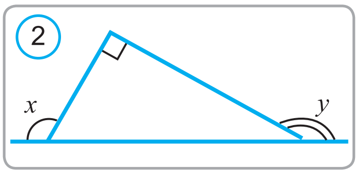
17. Найти угол $x$ на рисунке 6.

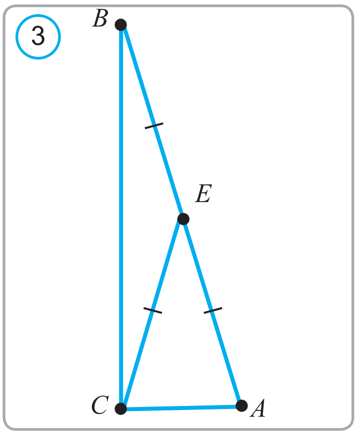
A) 30°; B) 45°; D) 60°; E) 75°.

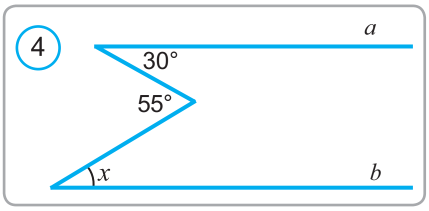
18. Сколько треугольников можно построить из отрезков длинной *2 см,* 3 *см,* 4 *см* и 5 *см?*

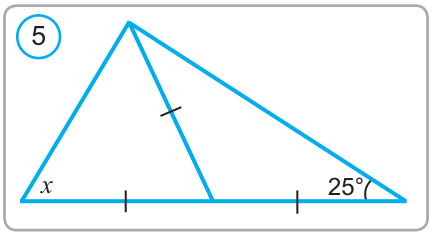
A) 1; B) 2; D) 3; E) 4.

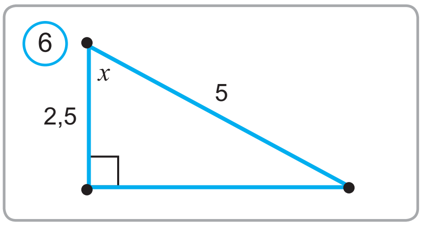


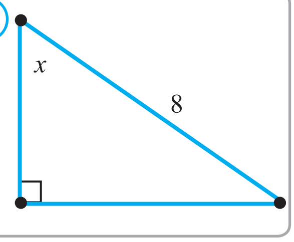



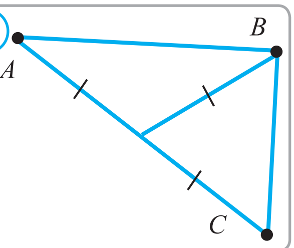



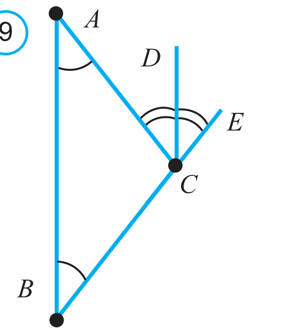



## 5. Задачи

1. Можно ли построить замкнутую ломаную, длины звеньев которой равны 1 *м*, 2 *м*, 4 *м*, 8 *м* и 16 *м*?
2. Найти стороны треугольника, длины которых выражаются целыми числами, если его периметр равен 15.
3. Всегда ли высота треугольника меньше его сторон?
4. Углы треугольника, большая сторона которого равна 36, относятся как 1:2:3. Найти меньшую сторону треугольника.
5. Высота треугольника, опущенная на его основание, образует с боковыми сторонами углы 27° и 36°. Найти углы треугольника.
6. Докажите, что прямоугольные треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ равны, если углы $A$ и $A_1$ – прямые, $BD$ и $B_1D_1$ – биссектрисы и $\angle B=\angle B_1$, $BD=B_1D_1$.
7. Найдите x на рисунке 7.
8. Найдите $\angle ABC$ на рисунке 8.
9. Докажите, что на рисунке 9 $AB \parallel CD$.
10. Один из углов равнобедренного треугольника равен 100°. Найдите остальные углы треугольника.
11. Если один из углов равнобедренного треугольника равен 60°, является ли этот треугольник равносторонним?
12. Проведена биссектриса $AD$ равнобедренного треугольника $ABC$, основание $AC$ и угол $B$ которого равны 36°. Докажите, что треугольники $CDA$ и $ADB$ являются равнобедренными.
13. Один треугольник имеет углы 60° и 85°, а второй имеет углы 38° и 82°. Могут ли эти треугольники быть равными?

7



8



9


14. Если периметр треугольника больше его сторон на 14 см, 16 см и 24 см, найдите наибольшую сторону треугольника.

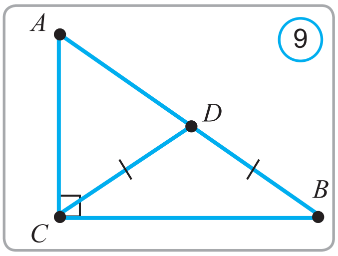
15. От вершины прямого угла прямоугольного треугольника $ABC$ проведена высота $CD$. Если 1) $A$ = 24°; 2) $A$ = 70°, найдите угол $CDB$.

16. Один внешний угол равнобедренного треугольника равен 70°. Найдите его внутренние углы.

17. Высоты, проведенные с вершин $A$ и $C$ треугольника $ABC$, пересекаются в точке $N$. Если $A$=50° и $C$=84°, найдите угол $ANC$.

18. В треугольнике $ABC$ медиана $BD$ равна половине стороны $AC$. Найдите угол $B$ треугольника.

19. Если на рисунке 9 $BD$ = $CD$ = 10, найдите $AB$.

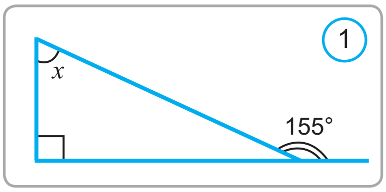


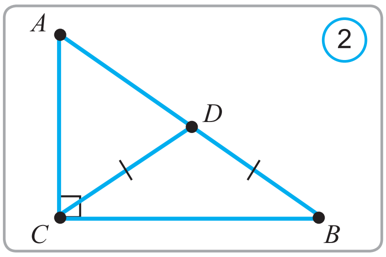

## 47 5-ая контрольная работа

Контрольная работа, взятая за образец, состоит из двух частей:

I. 5 тестов, подобных приведенным на с.125;

II. 3 задачи, подобные данным ниже (задача 4 предназначена для желающих получить оценку "отлично").

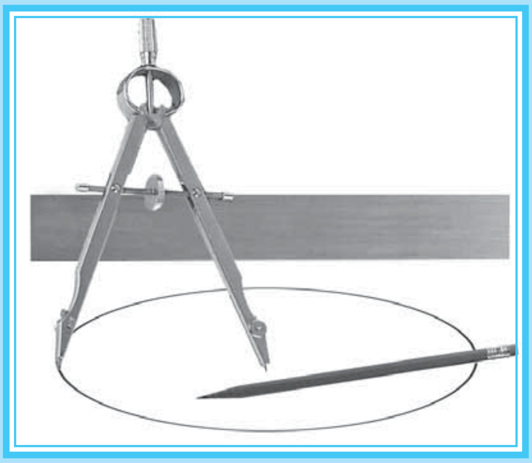



1. Найти неизвестный угол *(рис. 1)*.
2. Найти углы треугольника, если один из его внешних углов равен 120°, а несмежные с ним углы относятся как 1:2.
3. На рисунке 2 угол $ACB$=90°, $CD$=$BD$ и $AB$=24. Найти $CD$.
4. Биссектриса $BD$ в $\Delta ABC$ пересекает сторону $AC$ под углом 100°. Найти углы треугольника, если $BD$=$BC$.

**Для любознательных учеников.**

Ознакомьтесь со страницами соответствующей главы электронной версии учебника «Геометрия – 7». Испытайте свои знания, выполнив задания в интерактивных анимационных приложениях к упомянутой главе.



# ГЛАВА V

## ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

**Изучив материал этой главы, вы приобретете следующие знания и практические навыки:**

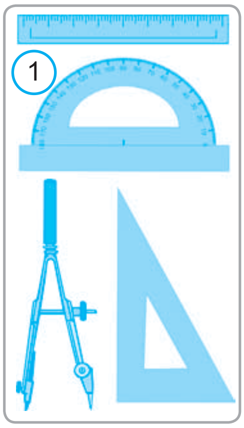
**Знания:**

— Определение окружности, центра окружности, радиуса и диаметра окружности;
— задачи, которые можно решать с помощью циркуля и линейки.

**Навыки:**

— Выполнять построения с помощью циркуля и линейки;
— строить угол, равный данному;
— строить биссектрису угла;
— строить перпендикулярные прямые;
— делить отрезок пополам;
— строить треугольник по заданным элементам.

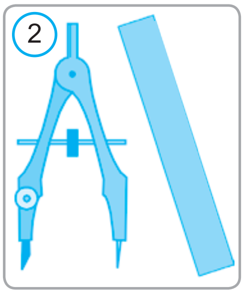
## 48 Задачи на построение с помощью циркуля и линейки




Решение задач на построение с помощью только линейки и циркуля достигло в Древней Греции уровня искусства. На практике геометрические построения можно и удобно выполнять с помощью любых инструментов. Но решение задач с помощью линейки и циркуля воспитывает способность к логической наблюдательности.

До сих пор с помощью линейки строились прямая, луч, отрезок и другие фигуры, с помощью линейки и транспортира строились различные углы. С помощью циркуля проводили окружности и дуги *(рис. 1)*.

Как установлено, многие геометрические фигуры можно строить с помощью односторонней линейки без шкалы и циркуля *(рис. 2)*. (Такую линейку мы называем *простой*.)




По этой причине, в геометрии специально выделены задачи на построение с помощью этих инструментов.

Имеются особые правила использования этих инструментов – при их помощи разрешается выполнять только следующие работы:

С помощью простой линейки разрешается:

1. Чертить любые прямые;
2. Чертить прямую, проходящую через заданную точку;
3. Чертить прямую, проходящую через две точки.

С помощью циркуля разрешается:

1. Чертить любую окружность;
2. Из данной точки как центра чертить окружность произвольного радиуса;
3. Чертить окружности данного радиуса из произвольно заданного центра;
4. Чертить окружность из данного центра с заданным отрезком как радиусом;
5. Откладывать отрезок, равный данному, на данной прямой от данной точки в каждом из двух направлений на прямой.

Любые другие построения надлежит сводить к этим действиям. Но не разрешается измерять длины отрезков с помощью шкалы, даже если она имеется на линейке, и откладывать отрезки известной длины на любой прямой.

При построении требуется не только построить фигуру, но требуется указать метод построения, обосновать, что построенная фигура удовлетворяет заданным условиям, т. е. необходимо дать доказательство этого.

По этой причине требуется при решении задач на построение найти способ и правила построения фигуры и обосновать их.

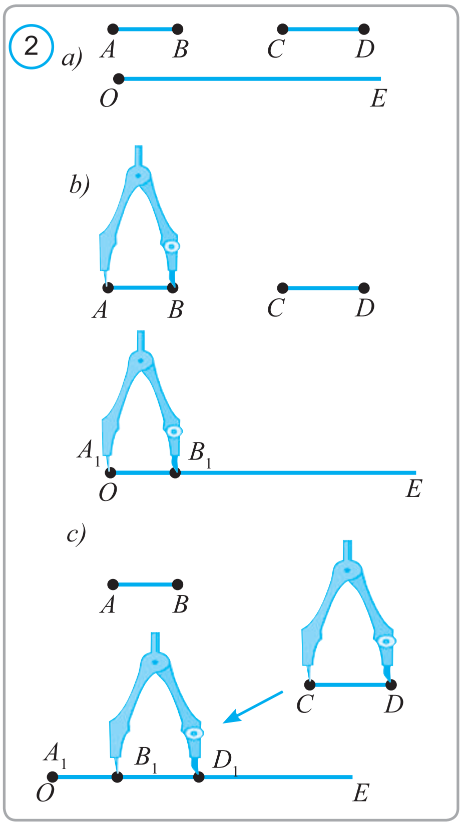
***Задача 1.*** Даны отрезки $AB$ и $CD$ и луч $OE$ *(рисунок 2.a)*. С помощью обычной линейки и циркуля задайте от луча $OE$ отрезок, равный $AB + CD$.

***Построение:***

***1-шаг.*** Накладываем с помощью циркуля на луч $OE$ отрезок $A_1B_1$, равный отрезку $AB$ *(рисунок 2.b)*.

***2-шаг.*** Накладываем с помощью циркуля на луч $OE$ отрезок $B_1D_1$, равный отрезку $CD$ *(рисунок 2.c)*.

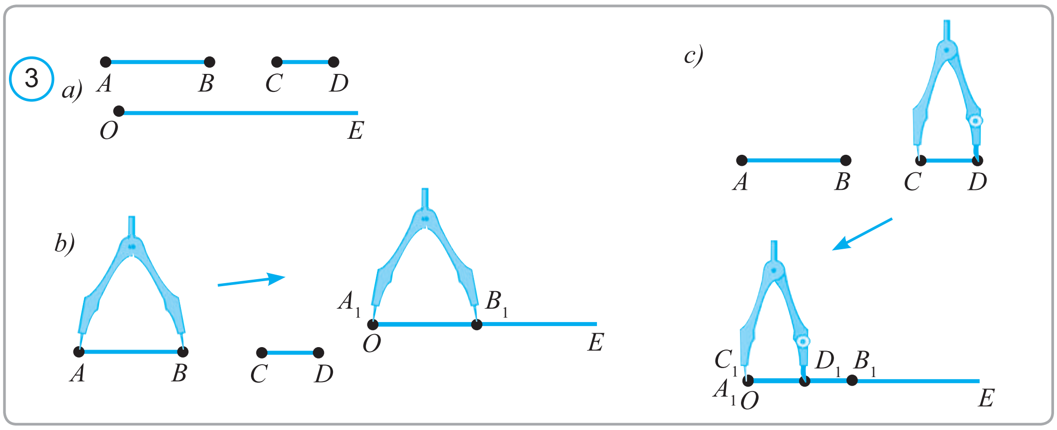
Полученный отрезок $A_1D_1$ – отрезок, длина которого равна $AB + CD$.




***Задача 2.*** Даны отрезки $AB$ и $CD$ и луч $OE$ *(рисунок 3.a)*. Если известно, что $AB > CD$, то задайте с помощью обычной линейки и циркуля от луча отрезок, равный $AB – CD$.

***Построение:***

Сначала задаем от луча $OE$ отрезок $A_1B_1$, равный отрезку $AB$ *(рисунок 3.b)*, затем отрезок $C_1D_1$, равный отрезку $CD$ *(рисунок 3.c)*. Полученный отрезок $D_1B_1$ – отрезок, длина которого равна $AB – CD$.



По этой причине требуется при решении задач на построение найти способ и правила построение фигуры и обосновать их.

## Вопросы, задачи и задания

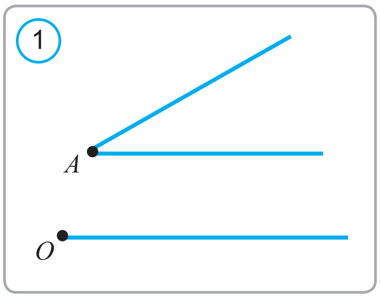
1. Какие фигуры можно начертить с помощью простой линейки?
2. Какие работы можно выполнять с помощью циркуля?
3. На прямой даны точки $A$ и $B$. На луче $BA$ от точки $B$ отложите отрезок $BC$ так чтобы $BC = 2AB$.
4. Пусть для точки, не принадлежащей окружности, наименьшее и наибольшее расстояния до окружности равны 2 см и 10 см соответственно. Найти радиус окружности.
5. Даны точки $A$ и $B$. Пользуясь только циркулем постройте такую точку $C$, для которой $AC = 3AB$.
6. Даны отрезки, длины которых равны $a$ и $b$. Постройте отрезки с длинами а) $a + b$; б) $a - b$; в) $2a + 3b$; г) $2a - b$.
7. Даны отрезки, длины которых равны 12 *см* и 5 *см*. Постройте отрезки с длинами а) 17 *см*; б) 7 *см*; в) 12 *см*; г) 22 *см*; д) 29 *см*.

## Геометрическая головоломка

Нарисовав окружность, Сардор понял, что забыл отметить карандашом ее центр. Как назло, на бумаге не осталось и следа. Но он запомнил, что длина радиуса была 12 *см*. Можно ли, зная это, найти только с помощью циркуля центр начерченной окружности?

# 49 Построение угла, равного данному

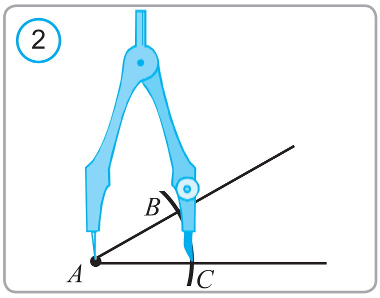
***Задача 1.*** Дан угол $A$. От луча $O$ *(рис. 1)* отложить угол, равный углу $A$.

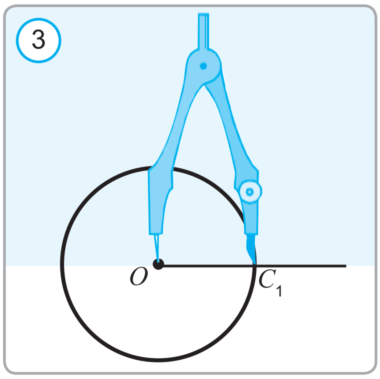


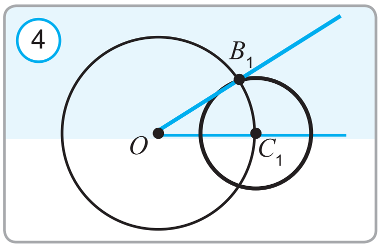

***Построение***:

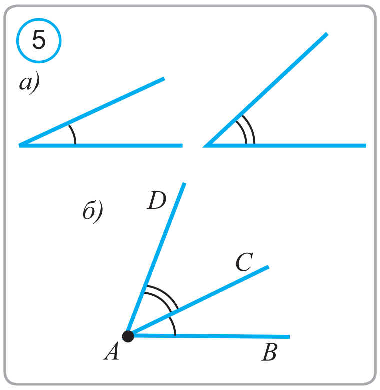
***1-ый шаг.*** Начертим окружность произвольного радиуса с центром в точке $A$. Пусть эта окружность пересечет стороны угла $A$ в точках $B$ и $C$ *(рис. 2)*.

***2- ой шаг.*** Из точки $O$ как из центра радиусом,




равным радиусу построенной окружности, начертим окружность *(рис. 3)*. Точку пересечения этой окруж-ности с лучом $O$ обозначим через $C_1$.

***3-ий шаг.*** Из точки $C_1$ как из центра радиусом $BC$ начертим третью окружность *(рис. 4)*. Одну из точек ее пересечения со второй окружностью, лежащую, например, в верхней полуплоскости обозначим $B_1$.

***4-ый шаг.*** Проведем луч $OB_1$ *(рис. 4)*. Полученный угол $B_1OC_1$ отложен от луча $O$ и равен данному углу $A$.

***Обоснование***: Из построения углов $BAC$ и $B_1OC_1$ на рисунках 2 и 4 имеем: $AB = OB_1$, $AC = OC_1$ и $BC = B_1C_1$.

По признаку ССС равенства треугольников $\Delta ABC = \Delta OB_1C_1$. В частности, $\angle B_1OC_1 = \angle A$.

*Примечание*: Эта задача имеет два решения в зависимости от того, в какой полуплоскости от прямой, содержащей луч $O$, выбрана точка $B_1$.

***Задача 2.*** Построить угол, равный сумме двух данных углов *(рис. 5. а)*.

***Построение***: **1-ый шаг.** Вначале строим угол $BAC$, равный первому углу *(рис. 5. б)*.

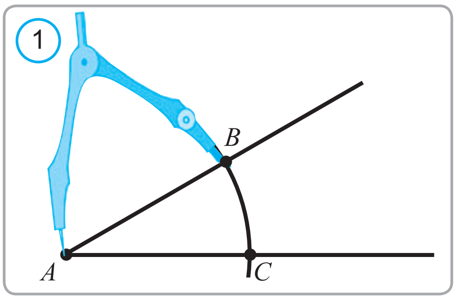
**2-ой шаг.** От луча $AC$ откладываем угол $CAD$, равный второму углу. Полученный угол $BAD$ равен сумме данных углов.

## Вопросы, задачи и задания

1. Даны углы а) 30°; б) 60°; в) 15°; г)120°; д) 45°. Постройте равные им углы, пользуясь простой линейкой и циркулем.
2. Даны углы $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$ $(\alpha > \beta)$. Постройте углы, равные: а) $2\alpha$; б) $\alpha - \beta$; в) $2\alpha + \beta$.
3. Даны углы 45° и 30°. Постройте углы, равные а) 15°; б) 75°; в) 105°; г) 120°.

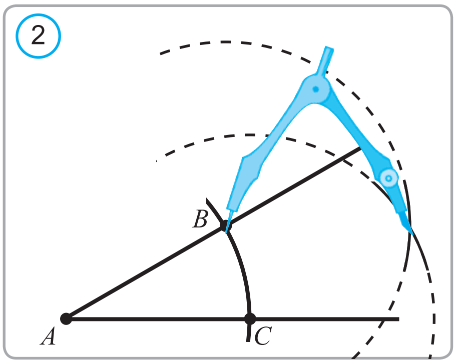
## 50 Построение биссектрисы угла

Пусть дан угол $A$, изображенный на рисунке 1. Для того чтобы разделить этот угол пополам, предлагается следующий способ:




***Построение***:

**1-ый шаг.** Чертим окружность произвольного радиуса с центром в точке $A$ и точки пересечения окружности со сторонами угла обозначаем через $B$ и $C$;



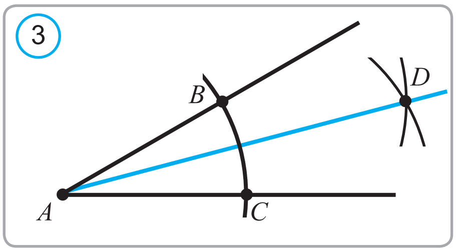

**2-ой шаг.** Строим, не меняя радиуса, две окружности с центрами в точках $B$ и $C$. Точка пересечения этих окружностей обозначим через $D$.

**3-ий шаг**. Через точки $A$ и $D$ проводим луч $AD$.

Луч $AD$ – биссектриса данного угла.

***Обоснование.*** В треугольниках $ABD$ и $ACD$

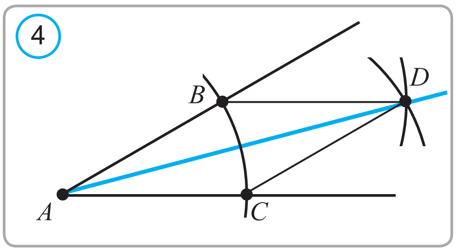
1) $AB = AC$ по построению;
2) $BD = CD$ по построению;
3) $AD$ – общая сторона.



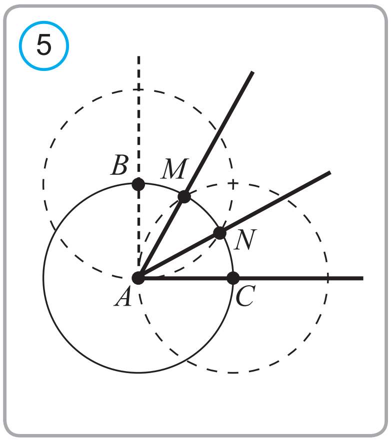

По признаку ССС равенства треуголь-ников, $\Delta ABD=\Delta ACD$.

В частности, $\angle BAD = \angle CAD$.

***Задача.*** Разделить данный прямой угол на три равные части.




***Решение***: Пусть дан прямой угол $A$. Начертим окружность произвольного радиуса с центром в его вершине. Пусть окружность пересекает стороны прямого угла в точках $B$ и $C$. Не меняя радиуса, начертим две окружности с центрами в точках $B$ и $C$. Точки пере-




сечения этих окружностей с первой окружностью, лежащие во внутренней области прямого угла, обозначим через $M$ и $N$. Проведем лучи $AM$ и $AN$. Эти лучи разделят данный прямой угол на три равных угла. Самостоятельно обоснуйте это построение.

***Примечание.*** *Задача деления данного угла на три равных угла (трисекции угла) с помощью простой линейки и циркуля была одной из знаменитых задач древности, над решением которой ломали головы многие ученые. Только в XIX веке было доказано, что произвольно выбранный угол нельзя разделить на три равных угла. Таков, например, угол 60°. Для точного решения задачи трисекции угла нужно применить другие инструменты.*

## Вопросы, задачи и задания

**1.** С помощью простой линейки и циркуля разделите пополам углы: а) 90°; б) 60°; в)30°.

**2.** Начертите угол и разделите его на четыре равных угла.

**3.** Угол 45° разделите на три равных угла.

**4.** Постройте прямоугольный треугольник по данной гипотенузе и острому углу.

**5.** Дан угол 36°. Постройте с помощью простой линейки и циркуля угол 99°.

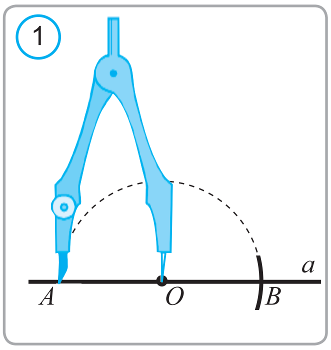
**6*.** Дан угол 54°. Разделите с помощью простой линейки и циркуля этот угол на три равных угла.

## 51 Построение прямой, перпендикулярной к данной прямой. Деление отрезка пополам

***Задача 1.*** Построить перпендикуляр к данной прямой $a$, проходящий через ее точку $O$.

***Построение***:

***1-ый шаг.*** Построим окружность произвольного радиуса с центром в точке $O$. Пусть она пересекает данную прямую в точках $A$ и $B$ *(рис. 1)*.

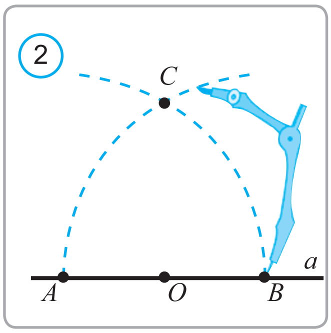



***2-ой шаг.*** Из точек $A$ и $B$ как из центров проведем окружности с радиусом $AB$ *(рис. 2)*. Одну из точек пересечения этих окружностей обозначим через $C$.

***3-ий шаг.*** Построим прямую $OC$ *(рис. 3)*. Прямая $OC$ будет прямой, перпендикулярной прямой $a$ и проходящей через ее точку $O$.

***Обоснование.*** Рассмотрим треугольники $AOC$ и $BOC$. Для них, по построению:

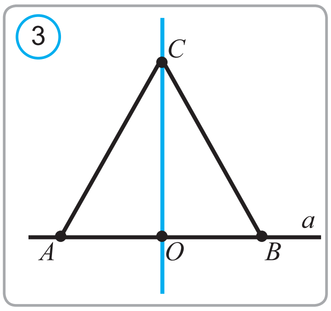
1. $AO = BO$;
2. $AC = BC$;
3. $CO$ – общая сторона.




Значит, по признаку ССС равенства треугольников $\Delta AOC = \Delta BOC$. В этом случае, $\angle AOC = \angle BOC$. Но $\angle AOC + \angle BOC = 180°$. Отсюда следует, что $\angle AOC = \angle BOC = 90°$.

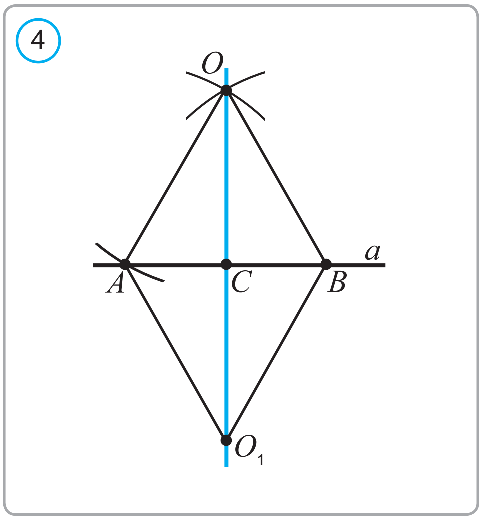
Итак, действительно, $OC \perp a$.

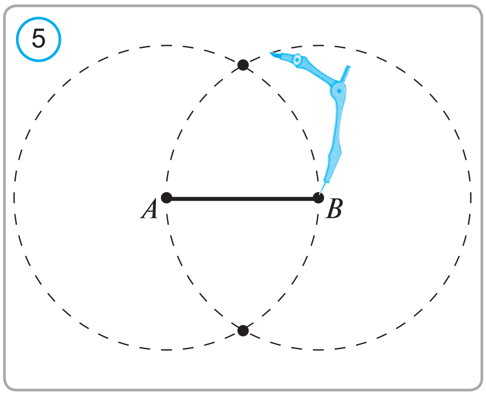
***Задача 2.*** Построить прямую, перпендикулярную данной прямой $a$ и проходящую через точку $O$, не лежащую на прямой $a$ .

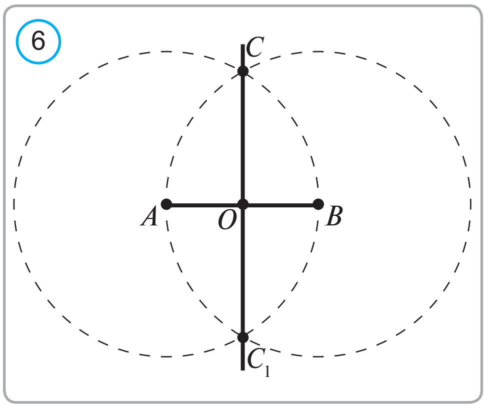



***Построение***:

***1-ый шаг.*** Построим окружность произвольного радиуса с центром в точке $O$. Пусть она пересечет данную прямую в точках $A$ и $B$ *(рис. 4)*.




***2-ой шаг.*** Из точек $A$ и $B$ как из центров построим две окружности с радиусами, равными радиусу первой окружности. Обозначим одну из точек пересечения этих двух окружностей через $O$, вторую через $O_1$ *(рис. 4)*.

***3-ий шаг.*** Построим прямую, про-хо-дящую через точки $O$ и $O_1$. Прямая $OO_1$ перпендикулярна данной прямой $a$ и проходит через точку $O$, не лежащую на данной прямой.

Обоснование проведите самостоятельно.

Из решения этой задачи следует, что через точку, не лежащую на данной прямой $a$, можно провести прямую, перпендикулярную к прямой $a$. Отсюда и из теоремы урока 14 вытекает справедливость следующей теоремы.

***Теорема.*** **Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной.**

***Задача 3.*** Разделить данный отрезок на два равных отрезка.

***Построение***:

Пусть дан отрезок $AB$. Для нахождения середины этого отрезка проводим следующее построение:

***1-ый шаг.*** Начертим две окружности с центрами в точках $A$ и $B$ и радиусом $AB$ *(рис. 5)*;

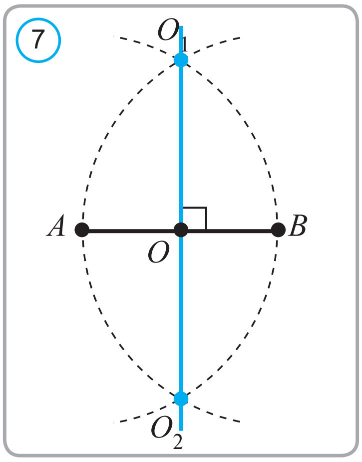
***2-ой шаг.*** Соединим точки пересечения окружностей $C$ и $C_1$ *(рис. 6)*. Точка пересечения прямой $CC_1$ и отрезка $AB$ будет серединой данного отрезка.

***Упражнение.*** Обоснуйте, что точка пересечения $O$ действительно является серединой отрезка $AB$.

***Задача 4.*** Построить перпендикуляр, проходящий через середину данного отрезка.

***Решение***: Пусть дан отрезок $AB$. Построим окружности с центрами в точках $A$ и $B$ и радиуса $AB$ (рис. 7). Эти окружности пересекаются в точках $O_1$ и $O_2$: $AO_1 = AO_2 = BO_1 = BO_2$. Проведем прямую $O_1O_2$. Эта прямая является серединным перпендикуляром отрезка $AB$. Действительно, так как точки $O_1$ и $O_2$ расположены на равных расстояниях от концов отрезка $AB$, эти точки лежат на серединном перпендикуляре к отрезку $AB$.

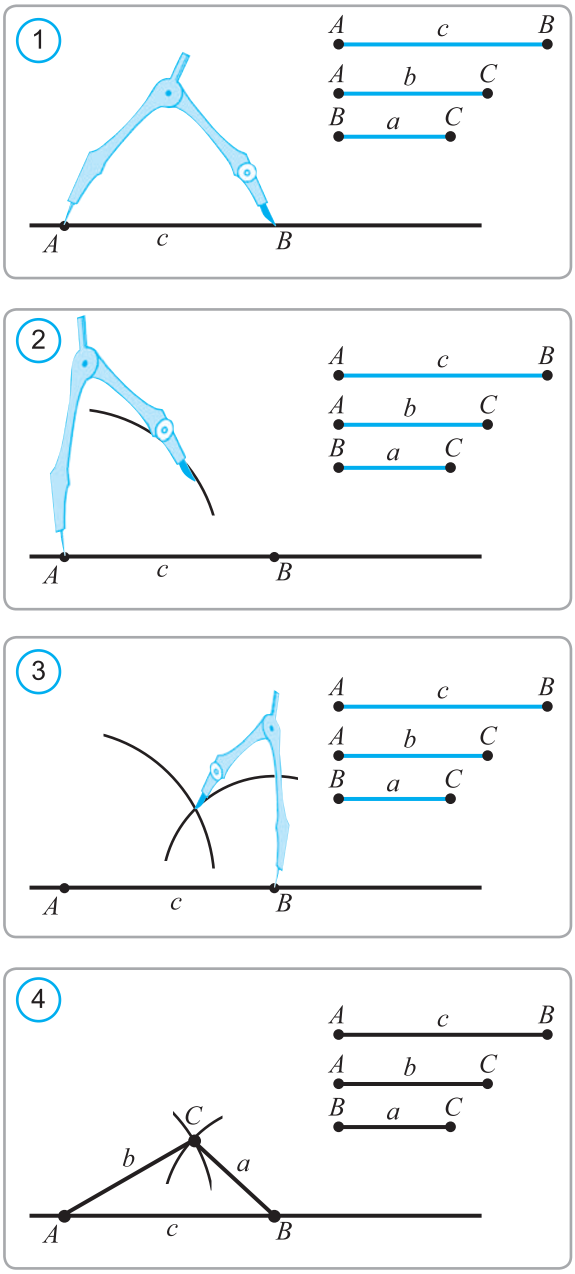
7




## Вопросы, задачи и задания

**1.** Какой способ деления отрезка пополам вы знаете? Начертите отрезок и разделите его на два равных отрезка.
**2.** Как можно построить прямой угол?
**3.** Разделите отрезок пополам, выполняя построение только в одной полу-плоскости.
**4.** Разделите данный отрезок пополам, пользуясь только угольником.
**5.** Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник по гипотенузе.
**6.** Постройте равнобедренный треугольник по основанию и опущенной на него высоте.
**7.** Можно ли построить серединный перпендикуляр к отрезку $AB$, не имея возможности найти середину отрезка.
8. Разделите данный отрезок на четыре равных отрезка.
**9.** Начертите треугольник. Постройте его высоты.
**10.** Постройте медианы данного треугольника.
**11*.** Найдите точку, равноудаленную от точек $A$ и $B$ и лежащую на прямой $a$.
**12.** Пользуясь только линейкой, проведите через точку *M*, не лежащую на прямой $a$, прямую $b$, параллельную прямой $a$.

## 52 Построение треугольника по данным трех сторон




Пусть даны три отрезка с длинами, соответственно равными $a$, $b$ и $c$ *(рис. 1)* и пусть $c$ наибольшая. Для того чтобы построить треугольник $ABC$ со сторонами $AB = c$, $BC = a$ и $AC = b$, выберем следующий путь:

***1-ый шаг.*** Чертим произвольную прямую. На прямой циркулем откладывается отрезок $AB$, длина которого равна $c$;

***2-ой шаг.*** Так как длина отрезка $AC = b$, строим окружность с центром в точке $A$ и радиусом $b$;

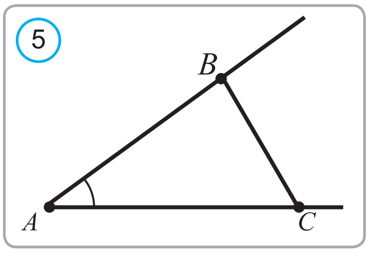
***3-ий шаг.*** Так как длина отрезка $BC = a$, строим окружность с центром в точке $B$ и радиусом $a$;

***4-ый шаг.*** Точку $C$ пересечения окружностей соединяем с точками $A$ и $B$. Стороны построенного треугольника $ABC$ равны $a$, $b$ и $c$.

***Анализ.*** Из построения видно, что если окружности, построенные на 2-ом и 3-ем шагах, пересекутся, то решение существует. Для этого нужно, чтобы $a + b > c$.

Докажите самостоятельно, что длины сторон полученного треугольника $ABC$ действительно равны $a$, $b$ и $c$.

**1-ая задача.** Постройте угол, равный данному углу *(рис. 5)*.




***Решение***: Эту задачу можно решить, построив треугольник, равный данному. Для этого вершину данного угла обозначим через $A$ и отметим на сторонах угла любые точки $B$ и $C$. Если теперь построить треугольник, равный треугольнику $ABC$, то мы построим и угол, равный углу $A$.

## Вопросы, задачи и задания

**1.** Можно ли построить треугольник с помощью отрезков произвольной длины?

**2.** Постройте треугольник со сторонами $a$ = 3 $см$, $b$ = 8 $см$ и $c$ = 9 $см$.

**3.** а) Можно ли построить треугольник со сторонами $a$ = 3 $см$, $b$ = 4 $см$ и $c$ = 7 $см$?

б) Какому условию должны удовлетворять длины отрезков $a$, $b$ и $c$ для того чтобы быть длинами сторон треугольника?

**4.** Постройте прямоугольный треугольник по двум катетам.

**5.** Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

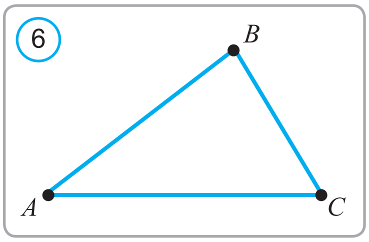
**6.** Дана прямая $a$. Постройте треугольник, равный треугольнику $ABC$, изображенному на рисунке 6, так чтобы одна его сторона лежала на прямой $a$.

**7*.** Даны отрезки с длинами $a+b$, $b+c$ и $a+c$. Постройте треугольник со сторонами $a$, $b$, $c$.

**8.** Постройте треугольник по двум сторонам и углу между ними.

**9.** Постройте квадрат по заданной стороне.

**10.** Постройте треугольник по стороне и прилежащим к ней углам.




**Для любознательных учеников.**

**1.** Познакомьтесь со страницами главы, соответствующей данной, в электронной версии учебника «Геометрия–7». Проверьте свои знания, выполнив данные задания и решив тесты в интерактивных анимационных приложениях к темам упомянутой главы.

**2.** Кроме того, найдите приведенные на странице 10 материалы из интернет-ресурсов, относящиеся к упомянутой главе и изучите их.

## 53 Проверьте свои знания

### 1. Тесты.

1. Для каких значений длин отрезков $a$, $b$ и $c$, приведенных ниже, нельзя построить треугольник, имеющий эти отрезки своими сторонами?
   A) $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$; D) $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$;
   B) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$; E) $a = 6$, $b = 4$, $c = 3$.
2. Какими инструментами можно пользоваться при решении задач на построение?
   A) Транспортир; B) Транспортир, линейка;
   D) Циркуль, линейка; E) Циркуль, транспортир.
3. Какие задачи можно решать с помощью линейки при выполнении геометрических построений. A) Измерять отрезки; B) Чертить отрезки, прямые линии; D) Приближенно строить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную данной прямой;
   E) Находить середину отрезка измерением его длины.

### 2. Задачи.

1. Постройте некоторый угол. Постройте угол, равный данному.
2. Постройте некоторый угол. Постройте его биссектрису.
3. Начертите прямую и отметьте точку, не лежащую на ней. Постройте прямую, проходящую через эту точку и перпендикулярную этой прямой.
4. Начертите прямую и обозначьте точку, не лежащую на ней. Постройте прямую, проходящую через эту точку и параллельную этой прямой.
5. Начертите некоторый отрезок и разделите его пополам.
6. Постройте три отрезка. Постройте треугольник со сторонами, равными этим отрезкам.
7. Начертите некоторый треугольник. Постройте одну а) медиану; б) биссектрису, в) высоту.

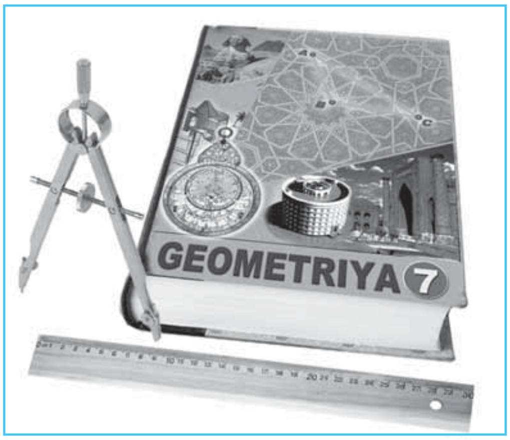
## 54 6-ая контрольная работа

Образцовая контрольная работа состоит из двух частей:

I. 5 теоретических тестов.

II. 3 задачи, подобные приведенным ниже (задача 4 для желающих получить оценку "отлично").

1. Постройте угол, равный данному углу в 120°, с помощью циркуля и линейки.
2. Постройте треугольник со сторонами $a = 5$ *см*, $b = 12$ *см* и $c = 15$ *см*.
3. В треугольнике, построенном в задаче 2, проведите медиану к стороне $a$.
4. Постройте треугольник по основанию, одной стороне и высоте, опущенной на основание.




# ГЛАВА VI

## ПОВТОРЕНИЕ

**Изучив материал этой главы, вы приобретете следующие знания и практические навыки:**

**Знания:**
— Ступени решения геометрической задачи;
— различать виды геометрических задач;
— о некоторых ошибках, встречающихся при решении задач.

**Навыки:**
— Разделять задачи на виды и организовывать работу в соответствии со ступенями решения задачи;
— предотвращать ошибки, встречающиеся при решении задач;
— быть готовым к завершающей годовой контрольной работе по планиметрии.

## 55 Этапы решение геометрических задач

При решении геометрических задач следует обратить внимание на следующее:
1. Хорошо знать и помнить основные понятия геометрии и их свойства;
2. Владеть методами доказательства теорем о свойствах различных геометрических фигур;
3. Понимать смысл данной геометрической задачи;

Обычно процесс решения геометрической задачи складывается из следующих ступеней:

**1-ая ступень. *Понять задачу.*** На этой ступени разделяют содержание задачи на условие и заключение. Что дано, что надо найти, доказать или построить. Строится чертеж, соответствующий задаче. Целесообразно построение большого и точного чертежа. Все данные наносятся на чертеж.

**2-ая ступень*. Планирование.*** На этой ступени выбирается метод решения задачи. Определяется, какие дополнительные сведения необходимы для его применения. Выполняются вспомогательные построения.

**3-ья ступень. *Решение.*** На этой ступени задача непосредственно решается на основе данного плана.

**4-ая ступень. *Проверка.*** На этой ступени проверяется найденное решение задачи. Критически анализируется процесс решения задачи. Если обнаруживается ошибка, то она исправляется. Если нет возможности исправления, возвращаются к начальной ступени решения задачи и вся работа выполняется заново.

**Для того чтобы научиться решать задачи,<br>надо побольше их решать.**

**Начертить правильный чертеж к задаче –<br>это значит наполовину решить задачу.**

В зависимости от постановки и содержания, геометрические задачи можно разделить на три категории:
1. Вычислительные задачи;
2. Задачи на доказательство;
3. Задачи на построение.

Конечно, решение геометрической задачи состоит не только в применении какого-либо свойства геометрической фигуры. Оно требует серьезных и логически обоснованных размышлений, и принятия на их основе правильных и разумных решений, формирует навыки и умения делать правильные выводы. Такие навыки и умения необходимы не только для математики, но и для преодоления проблем повседневной жизни. Разумеется, решение задач – это не только нахождение правильного ответа. При решении задач необходимо использовать известные свойства, теоремы и их следствия, знать как использовать различные методы решения.

Продемонстрируем как это делается на примере.

***Задача.*** Доказать, что треугольник с вершинами в серединах сторон равностороннего треугольника также является равносторонним.

**1.** *Ступень* ***понимания задачи.***

$\Delta ABC$ – равносторонний, $K$, $N$, $L$ – середины сторон $AB$, $BC$, $AC$ соответственно. ⇒ $\Delta KNL$ – равносторонний

В соответствии с данными задачи построим чертеж *(рис. 1)*.

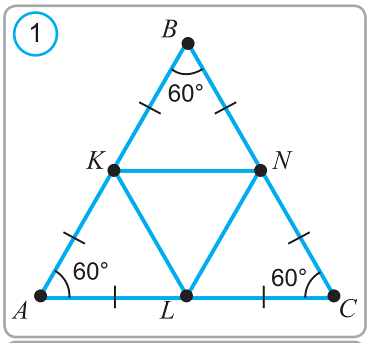
**2.** *Ступень* ***планирования решения.*** Будем использовать свойства равностороннего треугольника и признак СУС равенства треугольников.

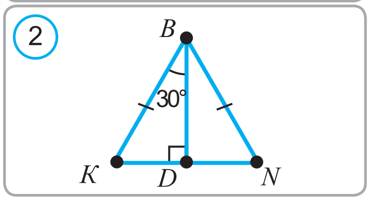
**3.** Ступень ***решения.*** По условию,

$LA = AK = KB = BN = NC = CL$ и $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$. Тогда стороны $AL$, $AK$ и угол $A$ треугольника $LAK$ равны сторонам $BK$, $BN$ и углу $B$ треугольника $KBN$, а также сторонам $CN$, $CL$ и углу $C$ треугольника $NCL$ соответственно.

Значит, $\Delta LAK = \Delta KBN = \Delta NCL$ и третьи стороны этих треугольников также равны: $KL = KN = NL$. Итак, $\Delta KNL$ — равносторонний.

**4.** *Ступень* ***проверки.***




Просмотрев процесс решения еще раз, проверьте логическую строгость каждого рассуждения.

Эту задачу можно решить и другим способом. Воспользуемся при этом тем, что каждый угол равностороннего треугольника равен 60°.

Опустим высоту $BD$ равностороннего треугольника $KBN$ *(рис. 2)*. Так как высота $BD$ является также биссектрисой, то $\angle KBD = 60°/2 = 30°$ и $\angle BKD = \angle BND = 90° - 30° = 60°$. Итак, $\Delta KBN$ – равносторонний.

Тем же путем устанавливается, что $\Delta KAL$ и $\Delta NCL$ так же равносторонние и $BK = KN = = NL = LN$. А отсюда вытекает, что $\Delta KNL$ – равносторонний, а также, что $\Delta KNL = \Delta KBN = \Delta NCL = \Delta KAL$.



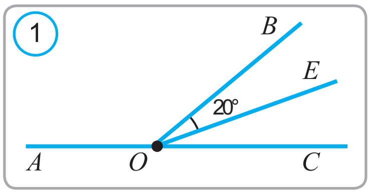
10 — Геометрия, 7 кл.

## 56 Задачи на вычисление

Задачи на вычисления похожи на задачи из арифметики и алгебры. С помощью различных геометрических формул над заданными числовыми величинами выполняют вычислительные работы и находят искомую.

В этих задачах правильный чертеж и нужные обозначения значительно облегчают работу.

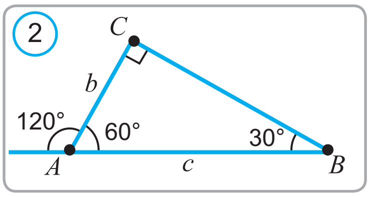
***Задача 1.*** Биссектриса одного из двух смежных углов образует угол 20° с одной из сторон второго угла. Найти этот угол.




***Решение.*** Построим чертеж, соответствующий условию задачи *(рис. 1)*. Очевидно, что биссектриса $OE$ является биссектрисой острого угла. Значит, $\angle BOC = 2 \cdot 20° = 40°$, $\angle AOB = 180° - 40° = 140°$.

***Ответ***: 40°, 140°.

***Задача 2.*** В прямоугольном треугольнике $ABC$ угол $C$ – прямой, внешний угол при вершине $A$ равен 120°. Найти гипотенузу треугольника, если $AC + AB = 18$ см.




***Решение.*** Построим чертеж в соответствии с условием задачи *(рис. 2)*. По определению внешнего угла треугольника, находим $\angle A = 180° — 120° = 60°$, $\angle B = 90° - \angle A = 30°$. Пусть $AC = b$, $AB = c$. Тогда $b + c = 18$. Так как по свойству прямоугольного треугольника с острым углом 30°, катет, противолежащий этому углу, равен половине гипотенузы, находим, что $c = 2b$. Откуда $b + c = 3b = 18$, т. е. $b = 6$. Тогда $c = 12$.

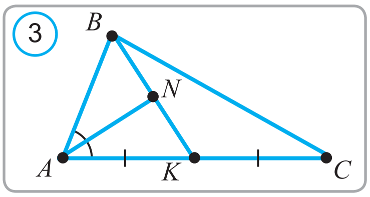
***Ответ***: 12.

***Задача 3.*** В треугольнике $ABC$ сторона $AB = 1$, биссектриса угла $A$ перпендикулярна медиане, проведенной из вершины $B$. Найти периметр треугольника, если длина стороны $BC$ выражается целым числом.

***Решение.*** Отобразим условие задачи на чертеже *(рис. 3)*: $AK = KC$, $AN \perp BK$. Имеет место равенство $\Delta ANB = \Delta ANK$, так как катет $AN$ – общий и прилежащие к катету углы равны (признак КУ). Откуда $AB = AK = KC = 1$, т. е. $AC = 1 + 1 = 2$.

$BC = x$ – целое число и по неравенству треугольника $2 + 1 > x$ и $x + 1 > 2$, т. е. $1 < x < 3$. Между числами 1 и 3 заключено единственное целое число: 2. Значит, $BC = 2$ и $P_{ABC} = 1 + 2 + 2 = 5$.

3

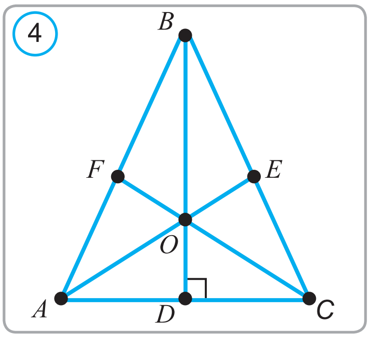



***Ответ***: 5.

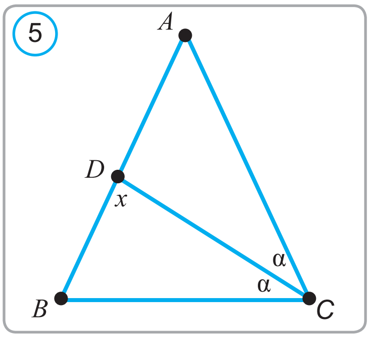
## Вопросы, задачи и задания

1. Отрезок $AB$ разбит на части отрезками, длины которых относятся $1 : 2 : 3 : 4$ и которые следуют в том же порядке. Найти длину отрезка $AB$, если расстояние между серединами крайних отрезков равно 15 *см*.
2. Из вершины угла $ABC = 160°$ проведены лучи $BO$ и $BE$. Найти угол $OBE$, если луч $BO$ делит данный угол пополам, а луч $BE$ делит его в отношении $3 : 5$.
3. Угол $AOB$ разбит лучом $OC$ на два угла, один из которых больше второго на 30°. Найти угол между биссектрисой данного угла и лучом $OC$.
4. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 30°. Найти угол между высотами, опущенными на боковые стороны этого треугольника.
5. Один из внешних углов треугольника равен 100°, а несмежные с ним углы относятся как 2:3. Найти углы треугольника.
6. Точки $A$, $B$, $C$, $D$ лежат в указанном порядке на прямой и $AB = BC = 1$, $CD = 2$. Точка $K$ расположена на луче $BC$ и делит отрезки $BC$ и $AD$ в одном и том же отношении: $BK : KC = AK : KD$. Найти это отношение.
7. Угол, полученный при пересечении двух биссектрис треугольника, равен 128°. Найти третий угол треугольника.

4

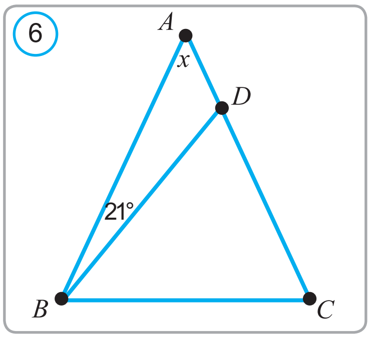



5



**8.** Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 96°. Найти острый угол, под которым пересекаются биссектрисы углов при основании треугольника.

**9.** В прямоугольном треугольнике биссектриса и высота, исходящие из вершины прямого угла образуют угол, равный 24°. Найти остальные углы треугольника.




**10.** Пусть $AB = BC$, $\angle ABC = 50°$, $AE$ и $FC$ – биссектрисы на рисунке 4. Найти $\angle AOB$ и $\angle EOC$.

**11.** Найти угол $x$, если $AB=AC$, $AD=DC$ на рисунке 5.

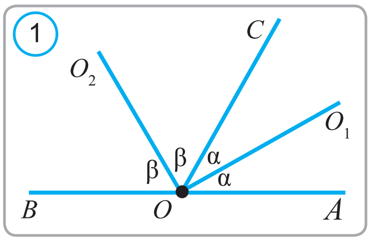
**12.** Найти угол $x$, если $AB=AC$, $BD=BC$ на рисунке 6.

## 57 Задачи на доказательство

Задачи на доказательство сами по себе являются небольшими теоремами. Рассмотрим в качестве примера следующую задачу.

***Задача 1.*** Докажите, что биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.

$\angle AOC$ и $\angle BOC$ — смежные углы, $OO_1$ и $OO_2$ – биссектрисы *(рис. 1)*. ⇒ $OO_1 \perp OO_2$.



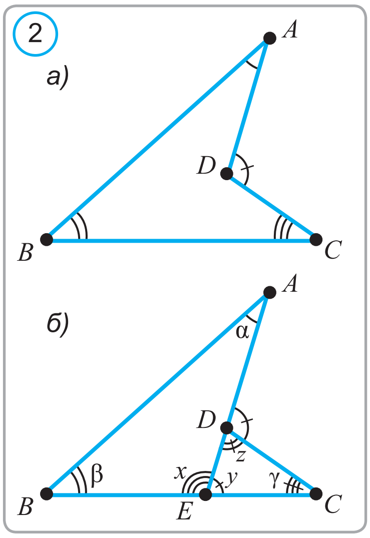

***Доказательство.*** Обозначим углы, на которые биссектрисы $OO_1$ и $OO_2$ делят углы через $\alpha$ и $\beta$ *(рис.1)*. Тогда $2\alpha + 2\beta = 180°$, или $\alpha + \beta = 90°$, $\angle O_1OO_2 = \alpha + \beta = 90°$. Значит, $OO_1 \perp OO_2$. Что и требовалось доказать.

***Задача 2.*** Докажите, что в четырехугольнике $ABCD$, изображенном на рисунке 2.*а*, $\angle D = \angle A + \angle B + \angle C$.

*Доказательство.* Продолжим сторону $AD$ и обозначим точку пересечения прямой $AD$ со стороной $BC$ через $E$. Обозначим углы *(рис. 2.б)*. Известно, что $\alpha+\beta+x=180°$ и $y+z+\gamma=180°$. Сложив эти равенства, приходим к равенству $\alpha+\beta+\gamma+x+y+z=360°$. По свойству смежных углов, $x+y=180°$, поэтому $\alpha+\beta+\gamma+180°+z=360°$, или $\alpha+\beta+\gamma=180°-z=\angle D$, следовательно,

$$\angle D=\alpha+\beta+\gamma=\angle A+\angle B+\angle C.$$

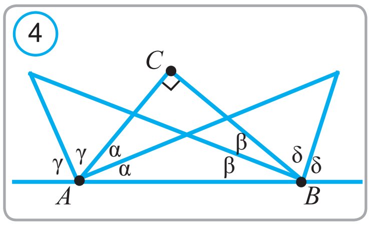
*Равенство доказано.*

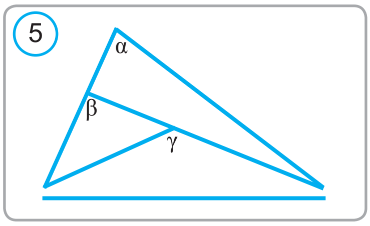



Две задачи мы решили на основе готовых чертежей, в задаче 2 потребовались дополнительные построения и обозначения, что облегчило решение задачи.

## Вопросы, задачи и задания

1. Один из углов треугольника равен разности двух несмежных с ним внешних углов. Докажите, что этот треугольник – прямоугольный.
2. Докажите, что высоты, проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника с углом 150° при вершине, равны.
3. Докажите, что медианы равностороннего треугольника делятся их точкой пересечения в отношении 2 : 1, считая от вершины.
4. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию.
5. Сформулируйте теорему, обратную теореме задачи 4, и докажите ее.
6. Докажите, что любые две медианы равностороннего треугольника пересекаются под углом 60°.
7. Докажите признак равенства треугольников по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.
8. В треугольниках $ABC$ и $A_1B_1C_1$ проведены медианы $BM$ и $B_1M_1$. Докажите, что $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$, если $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ и $BM=B_1M_1$.
9. В треугольниках $ABC$ и $A_1B_1C_1$ проведены биссектрисы $AD$, $A_1D_1$. Докажите, что $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$, если $AB=A_1B_1$, $BD=B_1D_1$ и $AD=A_1D_1$.




**10.** В треугольниках $ABC$ и $A_1B_1C_1$ проведены высоты $BH$ и $B_1H_1$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ и $BH = B_1H_1$.

**11.** Докажите, что треугольник, две высоты которого равны, является равнобедренным.

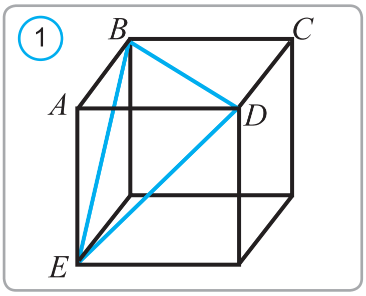
**12.** Докажите, что $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 90°$ на рисунке 4.

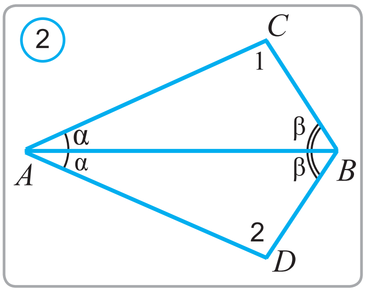
**13.** Докажите, что $\alpha < \beta < \gamma$ на рисунке 5.

## 58-59 Задачи на повторение

1. Докажите, что биссектрисы накрест лежащих углов, образующихся при пересечении параллельных прямых секущей, параллельны.
2. Докажите, что каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон.
3. Для какого треугольника имеют место неравенства $\alpha < \beta + \gamma$, $\beta < \alpha + \gamma$, $\gamma < \alpha + \beta$, где $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ – углы треугольника?
4. Постройте окружность, проходящую через две данные точки. Сколько решений имеет задача?
5. Биссектрисы $AA_1$ и $BB_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $O$. Найти угол $ACB$, если а) $\angle AOB = 136°$; б) $\angle AOB = 111°$.
6. В кубе, изображенном на рисунке 1, отрезок $BD = 6$. Найти $BE$, $DE$, $AC$, $\angle BED$.
7. Медиана треугольника $ABC$, периметр которого равен 42 *см*, разбивает его на два треугольника с периметрами 33 *см* и 35 *см*. Найти длину медианы.
8. Под каким углом пересекаются биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника?
9. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$ на рисунке 2.
10. Какую фигуру представляет собой общая часть лучей $MN$ и $NM$?
11. Точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой. Будет ли точка $B$ принадлежать отрезку $AC$, если $AB = 2$ *см*, $BC = 3$ *см* и $AC = 5$ *см*. Обоснуйте свой ответ.
12. Точка $A$ лежит между точками $B$ и $C$ прямой $BC$. Найти длину отрезка $AB$, если $BC = 15$ *см*, а отрезок $AC$ на 3 *см* меньше отрезка $AB$.
13. Постройте углы 60° и 30°.

14. Постройте взаимно перпендикулярные диаметры окружности.
15. Найти больший из смежных углов, если один из них в 4 раза меньше другого.
16. Отношение величин углов, получившихся при пересечении двух прямых, равно 7 : 3. Найти меньший из этих углов.
17. Точки $A$, $B$ и $C$ лежат на одной прямой. Длина отрезка $BC$ в 3 раза больше длины отрезка $AC$, длина отрезка $AB$ меньше длины отрезка $BC$ на 3,6 *см*. Найти длину отрезка $AC$.
18. Пусть при пересечении двух прямых третьей сумма внешних односторонних углов 180°. Докажите, что эти прямые параллельны.
19. При пересечении двух параллельных прямых третьей, один из получившихся при этом углов равен 55°. Найти остальные углы.




## 60-61 Проверьте свои знания

**1. Заполните пропуски в соответствии со смыслом предложений:**

1. На плоскости через ............. можно провести одну прямую.
2. ............ угла делит угол на два равных угла.
3. Середина отрезка делит его на два ............ .
4. На плоскости существуют ............ , принадлежащие прямой и ............ , не принадлежащие ей.
5. Если треугольник равнобедренный, то углы ............ равны.
6. У двух равных треугольников равны соответствующие ............ и соответствующие ............ .
7. У равностороннего треугольника каждый угол равен ............ .
8. ............ острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.
9. Биссектриса развернутого угла делит его на ............ .
10. Две прямые, порознь параллельные третьей, ............ .
11. Две прямые, перпендикулярные одной прямой, ............ .

12. При пересечении двух параллельных прямых третьей получившиеся внутренние односторонние углы ............ .
13. Равноудаленные от концов отрезка ........... лежат на серединном перпендикуляре к отрезку.
14. Точки окружности ........... на равном расстоянии от ее центра.

**2. Если в приведенных ниже предложениях имеются ошибки, найдите и исправьте их:**

1. На плоскости через две точки можно провести две прямые.
2. Прямой угол равен 180°.
3. Смежные углы равны.
4. Сумма вертикальных углов равна 180°.
5. Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны, называется биссектрисой треугольника.
6. Периметром треугольника называется сумма его углов.
7. Сумма сторон треугольника равна 180°.
8. Прямые, пересекающиеся под углом 90°, называются параллельными прямыми.
9. Параллельные прямые пересекаются в одной точке.
10. Диаметр окружности равен радиусу.
11. Если катеты прямоугольного треугольника равны, то один из его углов равен 30°.
12. Каждый угол равнобедренного треугольника равен 60°.
13. Точки, лежащие на биссектрисе угла, равноудалены от его вершин

**3. Запишите название геометрической фигуры, имеющей данное свойство, в соответствующую строку справа:**

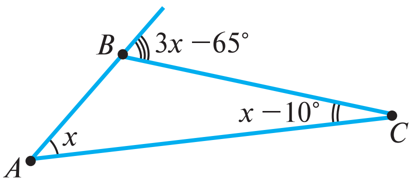
| | | |
|---|---|---|
| 1. | Длина 5 см. | |
| 2. | Точка и два луча, исходящих из этой точки. | |
| 3. | Не пересекающиеся прямые. | |
| 4. | Высота, исходящая из вершины, будет также медианой и биссектрисой. | |
| 5. | Треугольник, все стороны которого равны. | |
| 6. | Треугольник с двумя равными сторонами. | |
| 7. | Делит угол на два равных угла. | |
| 8. | Имеет два катета. | |
| 9. | Треугольник, у которого сумма двух углов больше 90°. | |

**4. Сопоставьте геометрическое понятие, данное в первом столбике, соответствующему свойству или толкованию из второго столбика:**

| *Геометрическое понятие* | *Толкование, свойство* |
|---|---|
| 1. Перпендикулярные прямые | A. Имеет определенную длину |
| 2. Равносторонний треугольник | B. Два угла равны |
| 3. Окружность | C. Равен половине гипотенузы |
| 4. Точка на биссектрисе угла | D. Соединяет вершину с серединой противолежащей стороны |
| 5. Высота треугольника | E. Смежный с одним из внутренних углов и равный сумме двух остальных углов |
| 6. Катет против угла в 30° | F. Не пересекается |
| 7. Медиана | G. Пересекаются под углом 90° |
| 8. Внешний угол треугольника | H. Стороны равны |
| 9. Равнобедренный треугольник | I. Точки равноудалены от центра |
| 10. Отрезок | J. Лежит на равных расстояниях от его сторон |
| 11. Параллельные прямые | K. Исходит из вершины и перпендикулярен к одной стороне |

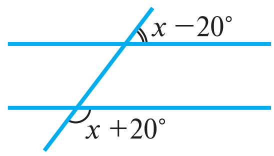
**5. Тесты (определите правильный среди данных ответов):**

1. Сколько прямых, параллельных данной прямой, можно провести через данную точку?
   A) 1 B) 2 D) 3 E) 4
2. Сколько градусов составляет величина развернутого угла?
   A) 90°; B) больше 90°; D) меньше 90°; E) 180°.
3. Найти угол $\angle BCA$ по чертежу.




   A) 25° B) 35°
   D) 45° E) 55°

4. Найти угол $x$ по чертежу.



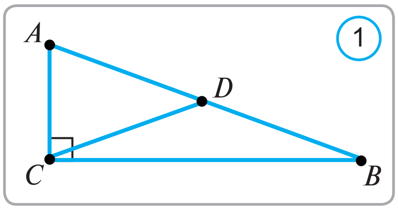

   A) 80° B) 90°
   D) 100° E) 70°

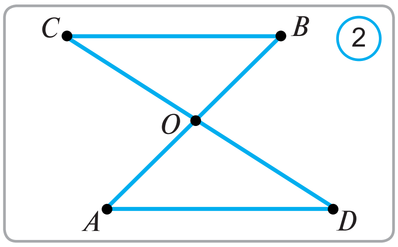
5. Найти гипотенузу $AB$, если в треугольнике $ABC$ угол $B$ = 30°, угол $C$ = 90° и $AC$ = 10 *см*.
   A) 10 *см* B) 12 *см* D) 15 *см* E) 20 *см*

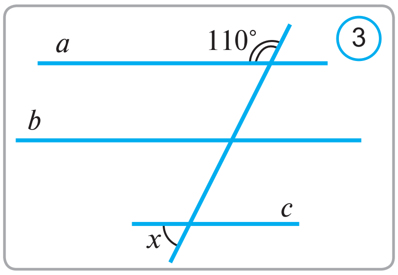
6. $AB = BC$, $AB = AC + 7$ (*см*) в треугольнике $ABC$. Найти меньшую сторону треугольника, если периметр $\Delta ABC$ равен 23 *см*.
A) 3 *см* B) 5 *см* D) 7 *см* E) 9 *см*

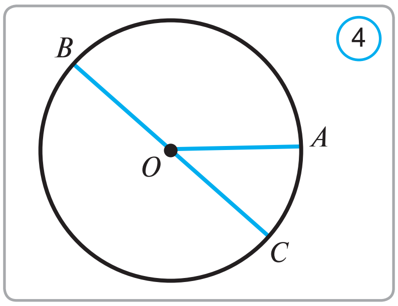
7. Один из смежных углов больше второго в 3 раза. Найти разность этих углов.
A) 45° B) 60° D) 75° E) 90°

8. Радиус окружности 3,2 *см*. Найти ее диаметр.
A) 3,2 B) 5,2 D) 6,4 E) 1,6




9. $ABC$ – прямоугольный треугольник *(рис. 1)*, $\angle C = 90°$, $CD$ – медиана. Найти $\angle A$, если $\angle BDC = 130°$.
A) 45° B) 65°
D) 75° E) 85°

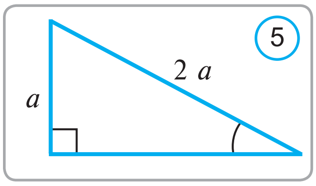
10. Угол при вершине $B$ равнобедренного треугольника $ABC$ равен 80°. Найти внешний угол при вершине $A$.
A) 130° B) 120°
D) 110° E) 100°

11. Какой из ответов верен, если $a \perp b,\ b \perp c,$ $c \perp d$?
A) $a \| c$ B) $b \perp d$
D) $a \| d$ E) $b \| c$

12. Найти периметр треугольника $AOD$, если $AO = OB,\ OC = OD,\ BC = 5$ *см* и $AO + OC =$ $= 7$ *см* на рисунке 2.
A) 5 *см* B) 7 *см*
D) 12 *см* E) 17 *см*

13. Найти угол $x$, если $a \| b$ и $b \| c$ на рисунке 3.
A) 60° B) 70°
D) 80° E) 90°

14. Определить большую сторону треугольника $ABC$, если $\angle A = 50°$ и $\angle B = 70°$.
A) $AB$ B) $BC$
D) $AC$ E) определить невозможно.



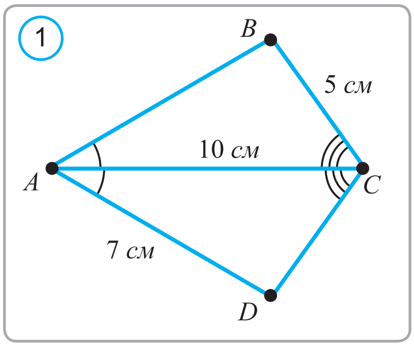

15. Найти длину отрезка $BC$, если точка $O$ – центр окружности, $AO$ = 4 *см* на рисунке 4.
A) 4 *см* B) 5 *см*
D) 2 *см* E) 8 *см*
16. Найти меньший угол треугольника, изображенного на рисунке 5.
A) 30° B) 45° D) 60° E) 90°
17. Одна из высот треугольника разбивает его на треугольники с периметрами 25 *см* и 29 *см*. Найти эту высоту, если периметр треугольника 40 *см*.
A) 10 *см* B) 7 *см* D) 5 *см* E) 9 *см*
18. Найти сумму углов, смежных с углом 120°.
A) 30° B) 45° D) 180° E) 120°
19. Найти угол между биссектрисами углов $A$ и $B$ треугольника $ABC$, если угол $C$ равен 70°.
A) 55° B) 60° D) 65° E) 75°
20. Биссектрисы углов $A$ и $D$ прямоугольника $ABCD$ разбивают сторону $BC$ на 3 равные части. Найти периметр прямоугольника, если длины его сторон – целые числа и $AB$ = 5.
A) 20 B) 30 D) 40 E) 80

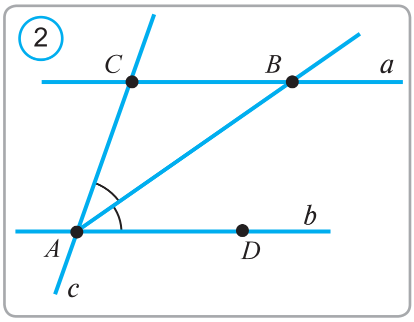
### 6. Задачи

1. Биссектриса равнобедренного треугольника $ABC$, проведенная к основанию $AB$, разбивает его на два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны.
2. Одна сторона треугольника с периметром 30 *см* больше второй стороны на 2 *см*, но меньше третьей стороны на 2 *см*. Найти большую сторону.
3. Медиана, проведенная к основанию треугольника, разбивает его на два треугольника с периметрами 18 *см* и 24 *см*. Меньшая из боковых сторон данного треугольника равна 6 *см*. Найти большую боковую сторону.
4. Высота треугольника, равная 5, разбивает его на два треугольника с периметрами 18 и 26. Найти периметр данного треугольника.
5. Периметр равнобедренного треугольника равен 7,6 *см*, основание равно 2 *см*. Найти боковую сторону.
6. Прямые $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $O$. Сумма углов $BOC$ и $AOD$ равна 194°. Найти угол $AOC$.
7. В треугольнике $ABC$ угол $A$ равен углу $C$, высота $AD$ делит сторону $BC$ пополам. Найти $AC$, если $BD$ = 7,8 *см*.

8. Угол между высотами, опущенными на боковые стороны равнобедренного треугольника, равен 20°. Найти угол при основании треугольника.
9. Из точки $D$, лежащей на биссектрисе угла $B$, на стороны угла опущены перпендикуляры $DA$ и $DC$. Докажите, что $DA = DC$.
10. Найти длину отрезка $AB$, если для точек $A$, $B$ и $C$, лежащих на прямой $AB$, $AC = 7$ *м* и $BC = 9$ *м*.

## 62-63 Итоговая контрольная работа




Итоговая контрольная работа состоит из двух частей. В первой части предлагается по образцу уроков 58–61 решить 5 задач и 10 тестов. Во второй части контрольной работы предлагаются 5 задач, подобных данным ниже.

**Образец итоговой письменной работы.**

1. Один из смежных углов меньше второго на 17°.Найдите эти углы.
2. На основе данных на рисунке 1 докажите, что а) $\Delta ABC = \Delta ADC$; найдите б) периметр треугольника $ACD$.
3. Найти длину отрезка $BC$, если $a||b$, $AC = 7$ *см* и $AB$ – биссектриса $\angle CAD$ *(рис. 2)*.
4. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная из вершины прямого угла, является также и биссектрисой. Постройте углы треугольника.
5. Постройте угол, равный данному углу, и его биссектрису.

**2.** **7.** 1. **9.** а) сколько угодно; б) 1; в) 1 или ни одной. **10.** 5; 10. **11.** а) 3; б) 6. **12.** 6; 10.

**3.** **1.** A и C; A и D; A и B. **3.** Да; нет. **5.** а) 2; б) 3; в) 11; г) (n + 1). **6.** 6. **8.** 4,6. **9.** 4. **10.** Да.

**4.** **4.** a и d. **5.** 2 с 5; 6 с 9. **7.** 3 и 14; 4 и 10; 6 и 9; 5 и 12. **11.** 6: $AB; BC; CD; AC; AD; BD$.

**5.** **3.** 4 *см*; 5 *см*; 6,5 *см*; 1 *см;* 2,5 *см*; 1,5 *см*; **4.** 6,6. **5.** 1. **6.** 9. **7.** 12,8 см. **8.** 0,8. **10.** Может быть 2 положения. Если точка $B$ отрезке $AC$, то $AC$=800 *м*. Если точка С в отрезке $AB$, то $AB$=400 *м*. **11.** 5. **15.** Точка $B$ лежит между точками $A$ и $C$.

**6.** **8.** а) 36 *мм*; б) 90 *см*; в) 4 *м* 22 *см*. **10.** а) 5 *см*; б) 3,5 *см*; в) 57 *см*. **13.** 130 *см*; **14.** 16 *м*

**8.** **4.** $\angle AOD$, $\angle COB$, $\angle DOB$, $\angle AOC$. **5.** 10, это: $\angle AOE$, $\angle EOD$, $\angle DOC$, $\angle COB$, $\angle BOA$, $\angle EOB$, $\angle EOC$, $\angle AOC$, $\angle AOD$, $\angle BOD$. **10.** Да; нет; нет.

**9.** **4.** Да. **7.** а) 72°; б) 60°; в) 50°. **12.** а) Да; б) Нет; в) Нет. **14.** а) 90°; б) 180°. **15.** $\angle AOB = 60°$, $\angle AOC = 90°$, $\angle AOD = 130°$, $\angle BOC = 30°$, $\angle BOD = 70°$; $\angle COD = 40°$.

**10.** **Контрольная работа №1** **1.** 3 *см* или 21 *см*. **2.** $BC = 12$ *см*. **3.** $\angle BOC = 35°$. **4.** 150°.

**11.** **5.** 45°. **6.** а) 8; б) 8; в) 8; г) 8. **7.** 5 острых, 1 тупой. **10.** а) 30°; б) 180°; в) 1°. **11.** а) 0,5°; б) 2,5°; в) 15°. **12.** а) 105°; б) 75°. **13.** Луч OC является биссектрисой угла $AOD$; луч $OD$ – $COE$, луч $OE$ – $DOB$; луч $OD$ – биссектрисой $AOB$.

**12.** **2.** 180°. **6.** а) 160°; б) 150°; в) 135°; г) 90°. **7.** 45°; 135°. **8.** а) Нет; б) Да; в) Нет. **9.** Да. **10.** а) 140°; б) 45°; в) 45°. **11.** а) 45°; б) 60°; в) 30°. **12.** а) 40°; 140°; б) 55°; 125°; в) 18°; 162°. **14.** 140°, 40°, 140°. **15.** Нет.

**13.** **6.** 1), 2), 3), 6). **7.** Нет, середина отрезков может не лежать накрест.

**14.** **2.** 1. **5.** Сколько угодно. **8.** 90°. **9.** Нет. **10.** Да

**15.** **3.** 90°. **5.** $OC$. **6.** 60°; 60°.

**17.** **5 Тесты: 1.** E; **2.** D; **3.** D; **4.** A; **5.** E; **6.** B; **7.** A; **8.** E; **9.** B; **10.** B; **11.** A; **12.** D; **13.** E; **14.** B; **15.** A; **16.** A; **17.** B; **18.** E. **6 Задачи: 2.** 90°. **3.** 60°. **4.** Нет. **5.** Задача имеет два решения: 1) 15°; 2) 65°. **9.** Нет. **10.** Задача имеет два решения: 1) 0,5 *м;* 2) 5,9 *м*. **11.** a) $AC = 9$ *м*, $BC = 6$ *м*; b) $AC = 7{,}5$ *м*, $BC = 7{,}5$ *м*; c) $AC = 6$ *м*, $BC = 9$ *м*. **13.** а) 15; б) 21; в) 45. **15.** 1,3. **16.** 6. **17.** 4.30 или 7.30. **18.** 6. **19.** $\angle AOB = 110°$, $\angle BOC = 70°$;

б) $\angle AOB$ =36°, $\angle BOC$ =144°; в) $\angle AOB$ =112°, $\angle BOC$ =68°; г) $\angle AOB$ = 150°, $\angle BOC$ =30°. **20.** 50°, 130°, 50°, 130°. **21.** а) $C \in AB$; б) $A \in BC$.

**18.** **Контрольная работа №2.** **1.** 106°. **2.** 60°. **3.** 48°.

**19.** **7.** а) a, b, d, e, g; б) c, f, h; в) c, f.

**20.** **2** а) $\angle QR$; б) $\angle RPQ$ и $\angle RQP$; в) $\angle Q$ или $\angle PQR$; г) $\angle PQR$. **4.** а) прямоугольный; б) остроугольный; в) равнобедренный; г) равносторонний; д) тупоугольный. **7.** а) 3; б) 3; в) 3.

**21.** **7.** В прямоугольном треугольнике. **8.** Да. **9.** 3. **10.** 9 **11.** 16

**22.** **10.** г) $\angle D = 35°$, $\angle C = 62°$. **11.** 85°. **12.** Нет

**23.** **2.** При основании. **3.** 10. **4.** $a = 12$, $b = 8$. **10.** 8,8; 11.

**24.** **4.** 4. **11.** $AC = BD = 7$.

**25** **6.** $\Delta BAC = \Delta KAN$, $\Delta BAN = \Delta KAC$. **9.** 3

**26.** **4.** В равностороннем треугольнике. **5.** 10,4 *см*. **7.** 8 *см*.

**27.** **4.** $\angle C_1 = 90°$, $\angle A_1 = 30°$, $\angle B_1 = 60°$. **5.** 10 *см*, 10 *см*.

**28.** **5 Тесты:** **1.** B; **2.** D; **3.** B; **4.** E; **5.** D. **6.** A. **7.** D; **8.** A; **9.** B; **10.** D; **11.** A; **12.** B; **13.** A; **14.** B; **15.** D; **16.** A. 6 **Задачи:** **7.** Да. **11.** 85°. **12.** 48°. **13.** 120°.

**29.** **Контрольная работа №3.** **1.** 10. **3.** $3\frac{11}{15}$, $7\frac{1}{3}$, $7\frac{1}{3}$.

**30.** **7.** Нет, нет. 10. Да.

**31.** **3.** ∠1 = ∠3 = ∠5 = ∠7 = 117°, ∠4 = ∠8 = 63°. **4.** 98°, 82°, 98°; 70°, 110°, 70°.

**32.** **5** а) Да; б) Да; в) Да; г) Нет. **7.** Одна из них может не пересекать или все пересекают.

**33.** **4.** ∠3 = ∠7 = 105°; ∠2 = ∠4 = ∠6 = ∠8 = 75°. **6.** Нет.

**34.** **7.** 1) правильно; 2) правильно; 3) правильно.

**35.** **5.** 45°. **8.** ∠2 = ∠3 = 53°. **9.** 70°, 110°. **12.** 70°, 110°.

**36.** **5 Тесты.** **1.** A; **2.** B; **3.** A; **4.** Д; **5.** Д; **6.** D; **7.** B; **8.** E; **9.** B; **10.** B; **11.** D; **12.** E; **13.** A; **14.** B; **15.** E; **16.** A. **6 Задачи:** **1.** 55°. **2.** Да. **3.** Да. **4.** ∠3 = ∠7 = 118°; ∠2 = ∠4 = ∠6 = ∠8 = 62°. **6.** 128°. **11.** 59°

**37.** **Контрольная работа №4.** **1.** 34°, 146°, 146°. **3.** 48°, 132°.

**38.** **2.** 1. **3.** 1. **4.** а) существует; б) не существует; в) не существует. **5.** а) 80°; б) 25°; в) 45°; г) 45°. **6.** а) 63°; б) 90°; в) 15°. **7.** а) 80°, 50°; б) 30°; 60°; 90°; в) 50°, 60°, 70°. **8.** а) 65°; б) 45°; 90°; 45°. **9.** а) 79°; б) 100°. **10.** $x$ =20°, $y$ =50°. **12.** 60°. **13.** 60°, 60°, 60°. **14.** 45°, 90°, 45°. **15.** а) 50°, 80° или 65°, 65°; б) 60° va 60°; в) 37,5°; 37,5°.

**39.** **3.** 60°, 45°, 75°. **4.** 30°, 120°. **5.** 75°. **6.** 270°. **7.** 90°. **8.** 90°. **9.** 110°. **10.** 60°. **11.** Может, только один. **12.** 360°.

**40.** **1.** 50°; 90°; 40°. **2.** 60°; 48°. **5.** Возможно. **6.** 540°. **7.** 24°, 36°, 60°. **9.** а) 30°,30°; б) 70°, 40° или 55°, 55°. **10.** а) 15°, 150°; б) 75°, 30°. **12.** 15°; 65°. **13.** 30°. **14.** 67,5°.

**41.** **7.** а) 4; б) 6; в) 60°. **8.** а) 5; б) 13,5; в) 9. **9.** 8 и 16.

**42.** **3.** а) Нет; б) нет; в) можно; г) нет. **4.** а) может; б) можно; в) можно; г) нет; д) нет. **6.** а) можно; б) можно; в) можно; г) нет; д) можно.

**43.** **2.** 7 *см*. **3.** 7 *см*, 7 *см*.

**44.** **2.** Самый большой $\angle ACB$, самый малый $\angle ABC$. **3.** а) невозможно $\angle ABC > \angle BAC > \angle ACB$; б) возможно $\angle ACB = \angle ABC < \angle BAC$. **4.** Основание, бок. **5.** Нет. **6.** а) $BC > AC > AB$; б) $BC = AC < AB$. **7.** Нет, нет. **8.** 60°; 60°; 120°; 120°. **9.** $0 < \angle B < 60°$. **10.** Остроугольный. **12.** Гипотенуза.

**45.** **3.** Нет. **4.** а) существует; б) нет; в) существует; г) существует **5.** а) 7; б) 10; в) 8 или 5. **8.** 7;7;11. **9.** 6. **10.** Треугольник или отрезок.

**46.** **4 Тесты: 1.** B; **2.** D; **3.** B; **4.** B; **5.** D; **6.** B; **7.** B; **8.** B; **9.** E; **10.** A; **11.** D; **12.** A; **13.** D; **14.** A; **15.** D; **16.** D; **17.** D; **18.** D.

**47.** **Контрольная работа №5.** **1.** 65°. **2.** 40°,60°,80°. **3.** 12 *см* **4.** 40°,60°,80°.

**53.** **1 Тесты: 1.** A; 2. Д; 3. B.

**56.** **1.** 20 *см*. **2.** 20°. **3.** 15°. **4.** 30°. **5.** 40°; 60°; 80°. **6.** 1 : 2. **7.** 76°. **8.** 42°. **9.** 21°, 69°. **10.** $\angle AOB$ =122,5°. **11.** 72°. **12.** 46°.

**58-59.** **3.** Остроугольный. **5.** а) 92°; б) 42°. **6.** 6; 6; 6; 60°. **8.** 45°. **10.** Отрезок. **11.** Да. **12.** 9 *см*. **15.** 144°. **16.** 54°. **17.** 3,6 *см*. **19.** четыре 55°-ных и четыре 125°-ных.

**60-61.** **5 Тесты: 1.** A; **2.** E; **3.** D; **4.** B; **5.** E; **6.** A; **7.** E; **8.** D. **9.** B. **10.** A. **11.** A; **12.** D; **13.** B; **14.** D; **15.** E; **16.** A; **17.** B; **18.** E; **19.** A; **20.** D. **6 Задачи: 2.** 12 *см*. **3.** 12 *см*. **4.** 34. **5.** 2,8 *см*. **6.** 83°. **7.** 15,6 *см*. **8.** 55°. **10.** 2 *м* или 16 *м*.

**60-61.** **Итоговая контрольная работа: 1.** 81°, 99°. **2.** b) 22 *см*. 3. 7 *см*.

**А. Азамов, Б. Хайдаров, Э. Сариков, А. Кучкаров, У.Сагдиев**

# "ГЕОМЕТРИЯ"

Учебник для 7-го класса общеобразовательных школ

Ташкент — "Yangiyul poligraph service" — 2013
Переводчик — *Р. Юсупов*
Корректор — *Г.Юльчиева*
Редактор — *С.Джуманиязова*
Технический редактор — *М.Риксиев*
Верстка — *О.Мамадалиев*

Оригинал-макет подписан к печати __.__. 2013. Формат 70x90 1/16. Гарнитура «Arial». Офсетная печать. Усл. п. л.14,0. Учет. изд. л.13,0. Тираж __________. Заказ N ______.

Договор N ___.

**Отпечатано в типографии "Yangiyul poligraph service" MCHJ.**
**Г. Янгиюль, Самаркандская , 44.**

## Таблица состояния учебника, выданного в аренду

| № | Имя и фамилия учащегося | Учебный год | Первоначальное состояние учебника | Подпись классного руководителя | Состояние учебника при сдаче | Подпись классного руководителя |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

## В конце учебного года учителем на основе следующих критериев оценивается состояние учебника, выданного в аренду:

| | |
|---|---|
| Новый | Сохранено первоначальное состояние учебника. |
| Хороший | Обложка целая, не отделена от основной части учебника. В наличии все страницы, целые, по порядку, без надписей и рисунков на страницах. |
| Удовлетворительный | Обложка мятая, частично исписанная, края листов загнуты, удовлетворительно подреставрирован учеником. Вырваные страницы вклеены, на некоторых имеются надписи. |
| Не удовлетворительный | Обложка исписанная, порваная, частично или полностью отделена от основной части, неудовлетворительно подреставртрована. Страницы порваны или отсутствуют, исчерчены, разрисованы. Учебник реставрировать невозможно. |