O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI QIShLOQ VA SUV XO’JALIGI VAZIRLIGI

SAMARQAND QIShLOQ XO’JALIK INSTITUTI

QISHLOQ XO’JALIGIDA MENEJMENT FAKULTETI

OLIY MATEMATIKA VA AXBOROT TEXNOLOGIYaLARI KAFEDRASI

REFERAT

Mavzu: Vektor tushunchasi. Vektorlar va ular ustida amallar.

Bajardi: Iqtisodiyot yo’nalishi 101 guruh talabasi Qobulova Nilufar

Tekshirdi: Kenjayev Sh.

Mavzu: Vektor tushunchasi. Vektorlar va ular ustida amallar.

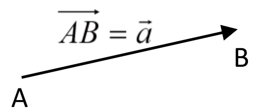
Reja:

1. Vektor haqida elementar tushunchalar
2. Vektorlar yig'indisi
3. Vektorlar ayirmasi
4. Vektorning songa (skalyarga) ko`paytmasi
5. Kollinear va komplanar vektorlar
6. Ikki vektorning skalyar ko`paytmasi
7. Tekislikda vektorning koordinatalari va ular ustida amallar

1. Vektor haqida elementar tushunchalar

Ta'rif* :** Yo'naltirilgan kesmaga ***vektor deyiladi.

Yo'nalishga ega bo'lgan AB kesmani olamiz.



A nuqtaga ***vektorning boshi***, B nuqtaga esa ***vektorning oxiri* deyiladi.**

Vektor odatda bitta yoki ikkita harf bilan quyidagicha yoziladi:

$$\vec{a},\ \vec{b},\ a,\ b,\ \overline{AB}\ .$$

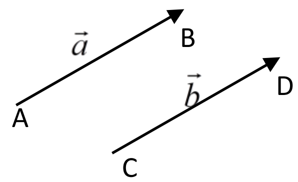
Fizika, mexanika, texnika kabilarda moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuch, harakatdagi nuqtaning tezligi, tezlanish singari tushunchalar ko`p uchraydi. Bu tushunchalar faqatgina kattalikka emas, balki ular yo'nalishga ham egadirlar. Demak, bunday kattaliklarni ta'rifga asosan ***vektor kattalik*** yoki ***vektor*** deb qarash mumkin. Ba'zida ***vektor miqdor*** ham deyiladi.

Kattalikka ega bo`lib, uning yo'nalishi talab qilinmaydigan kattaliklarga ***skalyar kattalik*** , ***skalyar miqdor*** yoki qisqacha ***skalyar*** deb ataladi. Masalan, uzunlik,yuza, hajm,massa, temperatura kabilar skalyarga misol bo`la oladi.

Agar vektorning boshi va oxiri ustma-ust tushsa, bunday vektorga ***nol vektor*** deyiladi. Nol vektorning uzunligi nolga teng bo`lib, u yo'nalishga ega emas. Bunday vektor $\overrightarrow{AA}$ yoki $\vec{0}$ kabi belgilanadi. Chizmada nol vektor bitta nuqta bilan tasvirlanadi.

Vektorning uzunligi uning ***moduli*** deb ataladi va $\left|\overrightarrow{AB}\right| = |\vec{a}| = a$ ko'rinishda yoziladi. Moduli birga teng bo'lgan vektorga ***birlik vektor*** yoki ***ort*** deyiladi va $|\vec{e}| = 1$ ko'rinishda yoziladi.

Agar ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning uzunliklari teng va yo'nalishlari bir xil bo`lsa, bunday vektorlarga ***teng vektorlar*** deyiladi va quyidagicha belgilanadi:



$$|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| \quad \text{yoki} \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|.$$

Vektorlar tengligi quyidagi xossalarga ega:

-Har qanday vektor o'ziga teng (refleksivlik sharti): $|\vec{a}| = |\vec{a}|$.

-Agar $\vec{a}$ vektor $\vec{b}$ vektorga teng bo’lsa, u holda $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ vektorga teng bo’ladi (simmetriklik), ya’ni $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

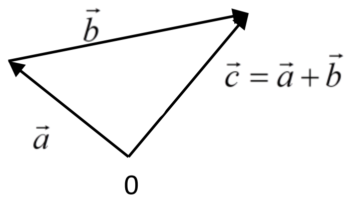
-Agar $\vec{a}$ vektor $\vec{b}$ vektorga teng va $\vec{b}$ vektor $\vec{c}$ vektorga teng bo’lsa, $\vec{a}$ vektor $\vec{c}$ vektorga teng bo’ladi (tranzitivlik),ya’ni:

$|\vec{a}| = |\vec{b}|$ bo`lsa, $|\vec{b}| = |\vec{a}|$ bo’ladi.

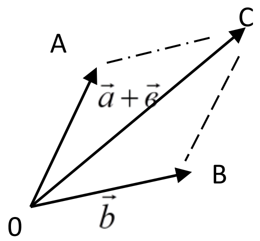
2. Vektorlar yig’indisi

Ta’rif: Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig’indisi deb $\vec{a}$ vektorning boshi bilan ($\vec{b}$) vektorning oxirini tutashtiruvchi $\vec{c}$ vektorga aytiladi:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ (1)



Vektorlarni bunday qo’shish usuliga ***uchburchak usuli*** deyiladi. Bunday atalishiga sabab, qo’shiluvchi va yig’indi vektorlar birgalikda uchburchakni hosil qiladi.



Vektorlarni qo’shishning yana bir usuli –parallelogramm usulidir. Bu usul boshi bir nuqtada yotgan hamda ular orasidagi burchak nolga teng bo’lmagan ikkita vektorni qo’shishda qo’llaniladi. Masalan, boshi ixtiyoriy 0 nuqtada bo’lgan $\overrightarrow{0A} = \vec{a}$ va $OB = \vec{b}$ vektorlarni yasaymiz. OA va OB kesmalar orqali $OACB$ parallelogramm yasaladi. Parallelogrammning O nuqtasidan o’tkazilgan diagonal $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig’indisi $\vec{c}$ vektor bo’ladi, chunki $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} = \vec{b}$ hamda $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$.

Vektorlarni qo’shish qoidasi quyidagi xossalarga ega:

1^0. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (o’rin almashtirish).

2^0. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (gruppalash).

3^0. Har qanday $\vec{a}$ va $\vec{0}$ lar uchun quyidagi o’rinli:

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}\,.$$

4^0. Qarama –qarshi $\vec{a}$ va $\vec{a}^1$ (yoki $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{BA}$) vektorlar yig’indisi nolga teng ya’ni

$$\vec{a}+\vec{a}^1=0 \quad \text{yoki} \quad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=0.$$

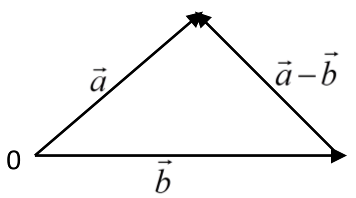
3.Vektorlar ayirmasi

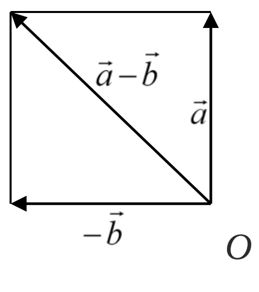
Har qanday $\overrightarrow{AB}$ vektorga qarama-qarshi vektorni $\overrightarrow{BA}$ shaklda yozish mumkin. Shuningdek, $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektor $-\vec{a}$ ko’rinishda belgilanadi.

Qarama-qarshi vektorlar bir xil uzunlikka ega bo`lib, bir-biriga teskari yo’nalgan bo’ladi.

Agar $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ deb olinsa, unga qarama-qarshi vektor $\overrightarrow{BA}=-\vec{a}$ bo’ladi. U holda ularning yig’indisi $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=0$ yoki $a+(-a)=0$ bo’ladi.

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uchun $|\vec{a}|$ $|\vec{b}|$ shart bajarilsa hamda $\vec{b}$ ga qarama-qarshi bo’lgan $-\vec{b}$ vektor mavjud bo’lsa, u holda, $\vec{a}$ bilan $-\vec{b}$ vektorlarning yig’indisi biror $\vec{c}$ vektordan iborat bo’ladi, ya’ni:





$$\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b}) \quad \text{yoki} \quad \vec{a}=\vec{a}-\vec{b}\,.$$

Demak, $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$. Bundan quyidagi xulosaga kelish mumkin: $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorni ayirish uchun $\vec{a}$ vektorga $\vec{b}$ ga qarama-qarshi bo’lgan $-\vec{b}$ vektorni qo’shish lozim.

4. Vektorning songa (skalyarga) ko`paytmasi

Ta'rif: $\vec{a}$ **vektor va** $\alpha \neq 0$ **haqiqiy sonning ko`paytmasi** deb shunday $\vec{c}$ vektorga aytiladiki, bu vektorning uzunligi $|\vec{c}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ dan iborat bo`lib, $\alpha > 0$ bo'lganda $\vec{a}$ vektor bilan yo'nalishdosh, $\alpha < 0$ bo'lganda esa $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi. Vektorning songa ko`paytmasi $\vec{c} = \alpha \vec{a}$ ko'rinishda ifodalanadi.

Agar $\alpha = 0$ yoki $\vec{a} = 0$ bo'lsa, $\alpha \vec{a}$ ko`paytma noaniq yo'nalishli nol vektorga aylanadi.

$\vec{a}$ vektorni α soniga ko`paytirishning geometrik ma'nosi quyidagicha: $\vec{a}$ vektor $\alpha$ songa ko`paytirilganda $\vec{a}$ vektor α marta cho'ziladi. Cho'zilish $\alpha > 1$ bo'lganda sodir bo'ladi. Bir xil yo'nalishiga ega bo'lib, $0 < \alpha < 1$ bo'lganda esa qisqarish yuzaga keladi, ammo $\vec{a}$ vektor bilan $\vec{e}$ - birlik vektorning ko`paytrmasi vektorni songa ko`paytirish ta'rifiga asosan $\vec{a} = |a|\vec{e}$ dan iborat bo'ladi.

Bundan ,
$$\vec{e} = \frac{1}{|a|}.\vec{a}. \tag{1}$$

Demak, $\vec{a}$ vektorga yo'nalishdosh bo'lgan $\vec{e}$ birlik vektorni topish uchun berilgan vektorni $\frac{1}{|a|}$ songa ko`paytirish kerak.

Vektorni songa ko`paytirish quyidagi xossalarga ega:

1^0. Vektorni songa ko`paytirishning gruppalash qonuni: $n(m\vec{a}) = (nm)\vec{a}$

2^0. Sonlar yig'indisining vektorga ko`paytirishning taqsimot qonuni:
$$(n+m)\vec{a} = n\vec{a} + m\vec{a}.$$

3^0. Son bilan vektorlar yig'indisini ko`paytirishning taqsimot qonuni:
$$n(\vec{a} + \vec{b}) = n\vec{a} + n\vec{b}.$$

5. Kollinear va komplanar vektorlar

Ta'rif: Agar ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro parallel yoki bir to'g'ri chiziqda yoki bo'lmasa parallel to'g'ri chiziqlarda yotsalar, bunday vektorga ***kollinear ektorlar*** deyiladi.

Noldan farqli, ya’ni uzunligi nolga teng bo’lmagan ikki $\vec{a}(x_1;\, y_1)$ va $\vec{b}(x_2;\, y_2)$ vektorlar kollinear bo’lishi uchun ularning bir ismli (ya’ni x_1 va x_2 hamda y_1 va y_2) koordinatalari o’zaro proporsional bo’lishi zarur va etarlidir:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}. \qquad (1)$$

$$\frac{x_1}{x_2} = m \quad va \quad \frac{y_1}{y_2} = m \quad \text{deb olinsa,}$$

$$x_1 = mx_2 \quad va \quad y_1 = my_2\,. \qquad (2)$$

Bundan $m>0$ bo`lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bir xil yo’nalishda; $m<0$ bo’lsa bu vektorlar qarama–qarshi yo’nalgan bo’ladi.

Ta’rif: Bitta tekislikda yoki o’zaro parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlarga ***komplanar vektorlar*** deyiladi.

Agar yuqoridagi shartlar bajarilmasa, vektorlarga ***komplanar bo’lmagan vektorlar*** deyiladi:

Bir tekislikda yoki o’zaro parallel tekisliklarda yotuvchi to’g’ri chiziqlarga ***komplanar to’g’ri chiziqlar*** deb aytiladi.

6. Ikki vektorning skalyar ko`paytmasi

Ta’rif: Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorning *skalyar ko`paytmasi* deb, shu vektorlar uzunliklari hamda ular orasidagi burchakning kosinusi ko`paytmasiga teng bo’lgan

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \boldsymbol{cos}\,\alpha \qquad (1)$$

skalyar ko`paytmaga aytiladi. α - ikki vektor orasidagi burchak.

Agar ko`paytirilayotgan vektorlardan biri nolga teng bo’lsa, bu vektorlarning skalyar ko`paytmasi noldan iborat bo’ladi.

Ikki vektorning skalyar ko`paytmasi ta’rifini bir vektorning ikkinchi vektorga tushirilgan proeksiyasiga nisbatan ham berish mumkin.

Ta’rif: Ikkita $\vec{a}$`va $\vec{b}$ vektorning **skalyar ko`paytmasi** ulardan birining modulini ikkinchi vektorning birinchi vektordagi (va aksincha) proeksiyasiga ko`paytirilganiga teng, ya’ni:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\, pr_a \vec{b} \quad \text{yoki} \quad \vec{a}\vec{b} = |\vec{b}|\, pr_b \vec{a}\,. \qquad (2)$$

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o’zaro teng bo’lsa, ularning skalyar ko`paytmasi quyidagicha bo’ladi:

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2 \quad \text{bo`lsa,} \quad \left|\vec{a}^{\,2}\right| = a^2 \quad \text{dan iborat.}$$

Bunga $\vec{a}$ vektorning *skalyar kvadrati* deyiladi.

Ikki vektorning skalyar ko`paytmasi quyidagi xossalarga ega:

1^0. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ - kommutativlik xossasi.

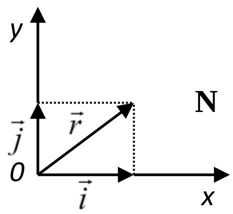
2^0. $(\alpha\,\vec{a})\vec{b} = \alpha\,(\vec{a}\vec{b})$ - skalyar ko`paytuvchiga nisbatan assotsiativlik xossasi.

3^0. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$ - distributivlik xossasi.

4^0. $\vec{a} = 0$ yoki $\vec{b} = 0$ bo'lganda, yoki bo'lmasa, $\vec{a}\perp\vec{b}$ bo'lganda va faqat shu holdagina $\vec{a}\vec{b} = 0$.

7. Tekislikda vektorning koordinatalari va ular ustida amallar

Tekislikning biror 0 nuqtasidan boshlab qo'yilgan o'zaro perpendikulyar $\vec{i}$ va $\vec{j}$ birlik vektorlar jufti berilgan bo'lsin.

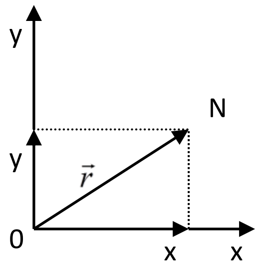


Tekislikdagi bunday vektor jufti *to'g'ri burchakli bazis* deb yuritiladi.

(i, j) to'g'ri burchakli bazis hamda 0 boshlang'ich nuqta birgalikda – to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini tashkil etadi. Bunda $\vec{i}$ va $\vec{j}$ vektorlar koordinata vektorlari, 0 nuqta – koordinatalar boshidan iborat.

0 nuqtadan *x0y* tekisligining ixtiyoriy nuqtasiga yo'naltirilgan *ON* vektor shu nuqtaning *radius vektori* deb nomlanib,

quyidagicha belgilanadi: $\overrightarrow{ON} = \vec{r}$.



Radius- vektorning koordinata o'qlariga tushirilgan proeksiyalari

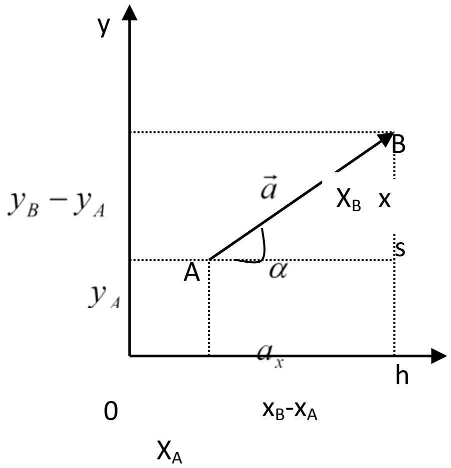
$pr_x\vec{r} = x$ va $pr_y\vec{r} = y$ (1)

lar vektorning koordinatalari deyiladi va bunday yoziladi:

$\overrightarrow{ON} = \vec{r} = (x; y)$ (2)

Agar $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektorning boshi 0 nuqtada yotmasa, uning koordinatalar o'qidagi proeksiyalari

$x=x_B-x_A$ *va* $y=y_B-y_A$ (3)



dan iborat bo'ladi. Bundan,

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x; y) = (x_B - x_A; y_B - y_A)$. (4)

$\vec{a}$ vektorning OX o'qdagi proeksiyasini a_x bilan belgilaymiz. U holda, vektorning proeksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$pr_x\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha \quad yoki \quad a_x = |\vec{a}|\cdot\cos\alpha. \qquad (5)$$

Bunda, $|\vec{a}|-$ vektorning moduli, $\cos\alpha$ - absissa o'qi bilan $\vec{a}$ vektor orasidagi burchakning kosinusi.

Vektorlar yig'indisining biror o'qidagi proeksiyasi har bir vektorning shu o'qdagi proeksiyalari yig'indisiga teng bo'ladi va quyidagicha yoziladi:

$$pr(\vec{a}+\vec{b}) = pr\vec{a} + pr\vec{b}. \qquad (6)$$

Agar $\vec{a}$ vektor tekislikda koordinatalari bilan berilgan bo'lsa, uning $(\vec{i},\vec{j})$ bazisda yoyilmasi bunday bo'ladi:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}\ . \qquad (7)$$

$\vec{i}$ - absissa o'qidagi, $\vec{j}$ - ordinata o'qidagi birlik vektorlar; x va y sonlar $\vec{a}$ vektorning $(\vec{i},\vec{j})$ bazisdagi koordinatalari ; $x\vec{i}$ va $y\vec{j}$ vektorlar $\vec{a}$ vektorning koordinata o'qlari bo'yicha *tashkil etuvchilari* (ya'ni *komponentlari*)dir.

Agar $\vec{a}$ vektorning boshi $A(x_A;\ y_A)$, oxiri $B(x_B;\ y_B)$ nuqtada bo'lsa, $\vec{a}$ vektorning joylashuvi quyidagicha yoziladi:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} \qquad (8)$$

$\vec{a} = (x_1; y_1)$ va $\vec{b} = (x_2; y_2)$ vektorlar $(\vec{i},\vec{j})$ bazisda berilgan bo'lsin. U holda, ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yig'indisining koordinatalari shu vektorlarning mos koordinatalari yig'indisiga teng bo'ladi, ya'ni:

$$\vec{a}+\vec{b} = (x_1 + x_2;\quad y_1 + y_2)\ . \qquad (9)$$

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar ayirmasining koordinatalari berilgan vektorlarning mos koordinatalari ayirmasiga teng, ya'ni:

$$\vec{a}-\vec{b} = (x_1 - x_2;\quad y_1 - y_2)\,. \qquad (10)$$

Koordinatalari bilan berilgan $\vec{a}$ vektorning ixtiyoriy songa ko`paytmasi vektor koordinatalarining shu songa ko`paytmasiga teng, ya'ni:

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x;\ \lambda y) \qquad (11)$$

Vektorni songa bo'lishda uning har bir koordinatasi shu songa bo'linadi:

$$\frac{\vec{a}}{\lambda} = \left(\frac{x}{\lambda};\ \frac{y}{\lambda}\right).$$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Abdalimov V. Oliy matematika. – Toshkent: O'qituvchi, 1994.

2. Abdalimov V., Solixov Sh. Oliy matematika qisqa kursi.- Toshkent: O'qituvchi, 1983.

3. Abdalimov V. Oliy matematikadan misol va masalalar to'plami. - Toshkent: Milliy ensiklopediya, 2003

4. Sultonov J.S. Fazoda vektorlar: Nazariy va amaliy mashg'ulotlar bo'yicha uslubiy qo'llanma. -Samarqand, 2006.