

O'ZBEKISON RESPUBLIKASI
OLIV VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI

MATEMATIK ANALIZ VA ALGEBRA KAFEDRASI

HUSANOVA MAHFUZA BAXTIYOROVNAning
“5460100 – matematika” ta'lim yo'nalishi bo'yicha
bakalavr darajasini olish uchun

**UCH KARRALI INTEGRALLARNING
MEXANIKAGA TADBIQLARI**
mavzusida yozgan

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar:

E. Eshdavlatov

“Himoyaga tavsiya etilsin”

Fizika – matematika fakulteti

dekani: _____ prof. B. Xayriddinov

“ _____ ” _____ 2011 yil

Qarshi - 2011

MUNDARIJA

Kirish -----	6
I bob. Uch karrali integrallar va uni hisoblash.-----	12
1-§. Uch karrali integrallar va uni hisoblash.-----	12
2-§. Uch karrali integrallarda o'zgaruvchilarni almashtirish-----	22
II bob. Uch karrali integrallarning tadbiqlari.-----	34
3-§. Uch karrali integrallarning mexanikaga tadbiqlari.-----	34
4-§. Vektor analiz elementlari.-----	42
Xulosa.-----	51
Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.-----	52

KIRISH

Matematik analiz fanida integral hisob kursi eng muhim o'rinda turib, ko'pgina tabiatdagi, shuningdek mexanika va fizika fani va uning turli amaliy masalalarida uchraydi va integrallarni hisoblashga keltiriladi. Ayniqsa mexanikaning ko'p masalalari karrali integrallarga bog'liq.

Hozirgi zamon matematikasi boshqa tabiiy fanlar bilan birga yangi muammolarni hal qilmoqda. Masalan, mexanikada karrali integrallar yordamida og'irlik markazi, inersiya momentlari va boshqa kattaliklarni hisoblash osonroq bo'ladi. Shuningdek, vektor analiz elementlari yordamida mexanik qonunlarini matematik modeli tuzilib hisoblashlari matematik jarayonga keltiriladi. Shuning uchun ushbu mavzu muhim nazariy va amaliy ahamiyatga egadir. Bu yo'nalish bo'yicha kerakli natijalarni [1,2,3,4,5,6,7] adabiyotlarda topish mumkin.

Mazkur bitiruv malakaviy ishda uch karrali integral va uning mexanikada tadbirlari misollar keltirilgan holda o'rganildi.

Bitiruv malakaviy ishning mavzusini dolzarbli

Uch karrali integral va uning mexanikada tadbirlarini o'rganish dolzarb mavzu hisoblanadi. Chunki bu mavzu fizika, mexanika va matematika fanlarini uzviy bog'liqligini bildirib turadi. Integral hisobni matematik fizika va mexanika masalalarida qo'llaganimizda ko'proq vektor formadan foydalanish qulayroq bo'ladi. Shuning uchun vektor analiz tushunchalari hamda integral formulalarni vektor ko'rinishlarini o'rganish muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

Bitiruv malakaviy ishning maqsadi va vazifasi esa mexanika va fizika masalalarini uch karrali integral orqali hisoblanishini o'rganishdan iboratdir.

BMI ning ilmiyligi va ahamiyati

Mavzuga oid barcha adabiyotlar to'plandi. Shu adabiyotlardan foydalanib, uch karrali integral va uning tadbirlari chuqur o'rganildi va shu o'rganishlar asosida BMI yozildi. Ushbu BMI mavzu juda amaliy ahamiyatga egadir.

Bitiruv malakaviy ish kirish qism, ikki bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan tashkil topgan.

Kirish qismida o'rganilayotgan mavzu haqida umumiy ma'lumotlar berilgan.

I bobda uch karrali integral va uning hisoblash usullari keltirilgan. Uch karrali integralning aniqlanishi va ta'rifi keltirildi.

Biror (V) sohada $f(x, y, z)$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu sohani fazoviy to'r orqali chekli sondagi $(V_1), (V_2), \dots, (V_n)$ bo'laklarga bo'lamiz. Bu bo'laklar mos ravishda V_1, V_2, \dots, V_n hajmlarga ega bo'lsin. i – chi (V_i) bo'lakdan ixtiyoriy (ξ_i, η_i, ζ_i) nuqta olib, bu nuqtadagi funksiyaning $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ qiymatini shu bo'lakchanning hajmi V_i ga ko'paytiramiz. Barcha bo'lakchalardagi bunday ko'paytmalarni yig'ib, ushbu

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) dV_i \quad (0.1)$$

integral yig'indini tuzamiz.

Ta'rif. (V_i) bulaklarning diametri nolga intilganda integral yig'indining chekli J limiti $f(x, y, z)$ funksiyaning (V) soha bo'yicha uch karrali integrali deyiladi va

$$J = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz \quad (0.2)$$

kabi belgilanadi [1-8].

Uch karrali integralni hisoblashning ba'zi hollarini keltiramiz.

Faraz qilaylik qaralayotgan sohamiz $(T) = [a, b, c, d; e, f]$ to'g'ri burchakli parallelopipeddan iborat bo'lsin. Shu sohada $f(x, y, z)$ funksiya berilgan bo'lsin. (T) sohaning yz tekislikdagi proeksiyasi $(R) = [c, d; e, f]$ to'g'ri to'rtburchakdan iborat.

Teorema. Agar $f(x, y, z)$ funksiya uchun

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z) dV \quad (0.3)$$

uch karrali integral mavjud va $[a, b]$ oraliqdagi har bir tayinlangan x uchun

$$I(x) = \iint_{(R)} f(x, y, z) dR \quad (0.4)$$

ikki karrali integral va shuningdek

$$\int_a^b dx \iint_{(R)} f(x, y, z) dR \quad (0.5)$$

takroriy integral mavjud bo'lsa

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z) dT = \int_a^b dx \iint_{(R)} f(x, y, z) dR \quad (0.6)$$

tenglik o'rinli bo'ladi [1-8].

agar (V) sohada $\frac{\partial P}{\partial x}$ va $\frac{\partial Q}{\partial y}$ hosilalari bilan birga uzluksiz bo'lgan $P(x, y, z)$ va $Q(x, y, z)$ funksiyalar uchun

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_{(S)} P(x, y, z) dy dz \quad (0.7)$$

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_{(S)} Q(x, y, z) dx dz \quad (0.8)$$

formulalarga ega bo'lamiz.

Bu uchta (0.1), (0.2), (0.3) formulalarni qo'shib, Ostrogradskiyning umumiy formulasini hosil qilamiz:

$$\iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{(S)} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy \quad (0.9)$$

Endi uch karrali integralda o'zgaruvchilarni almashtirish qanday bo'lishini tushunturib o'tamiz.

Fazo xyz to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga, boshqa bir fazo esa $\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasiga ega bo'lsin. Bu fazolarda mos ravishda (S) va (Σ) sirtlar bilan chegaralangan ikkita (D) va (Δ) yopiq sohalarni qaraylik. Bu sohalar bir – biri bilan quyidagi formulalar

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \zeta) \\ y &= y(\xi, \eta, \zeta) \\ z &= z(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \right\} \quad (0.10)$$

bilan o'zaro bir qiymatli uzluksiz munosabat bilan bog'langan bo'lsin. Buning uchun (Σ) sirtning nuqtalariga (S) sirtning nuqtalari mos kelishi kerak va aksincha.

(0.10) funksiyalar (Δ) sohada uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsin. U holda

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \quad (0.11)$$

yakobian ham (Δ) sohada uzluksiz funksiya bo'ladi. Bu ditermenantni har doim noldan farqli va ishorasini saqlasin deb hisoblaymiz.

Agar (Δ) sohada ushbu

$$\xi = \xi(u, v), \quad \eta = \eta(u, v), \quad \zeta = \zeta(u, v) \quad (0.12)$$

bo'lakli-silliq sirtni olsak, (0.10) formula bu sirtni D sohadagi bo'lakli-silliq sirtga akslantiradi. Bu sirt esa

$$\begin{aligned} x &= x(\xi(u, v), \eta(u, v), \zeta(u, v)) = x(u, v), \quad y = y(u, v) \\ z &= z(u, v) \end{aligned} \quad (0.13)$$

tenglama bilan aniqlanadi.

xyz va $\xi\eta\zeta$ fazolardagi (D) va (Δ) sohalar orasidagi (0.12) moslik o'rnatilgan bo'lsin. (0.13) formuladagi barcha shartlar bajarilgan deb hisoblab ushbu tenglik

$$\begin{aligned} &\iiint_{(D)} f(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \iiint_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (0.14)$$

bu erda $J(\xi, \eta, \zeta) = \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$, o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. Bunda $f(x, y, z)$

funksiyani uzluksiz deb faraz qilamiz va chekli sondagi bo'lakli-silliq sirtlarda uzilishga ega bo'lsin.

II bobda uch karrali integralning mexanikaga tadbirlari o'rganilgan bo'lib, misollar yordamida tadbirlari olingan.

Tabiiyki, barcha geometrik va mexanik kattaliklar fazodagi (V) jismning massasiga bog'liqdir. Bunday holni uch karrali integral orqali ifodalaymiz.

ρ orqali (V) jismning ixtiyoriy nuqtadagi zichligini belgilaylik: u nuqtaning koordinatalarini funksiyasi bo'ladi va bu funksiyani har doim uzluksiz deb faraz qilamiz. $dm = \rho dV = \rho dx dy dz$ massa elementlarini yig'ib chiqamiz va barcha massa kattaliklar uchun

$$m = \iiint_{(V)} \rho dV = \iiint_{(V)} \rho dx dy dz \quad (0.15)$$

ega bo'lamiz.

Elementar statistik momentlar uchun ushbu

$$dM_{yz} = x dm = x \rho dV,$$

$$dM_{zx} = y dm = y \rho dV,$$

$$dM_{xy} = z dm = z \rho dV,$$

munosabatlar urinli bo'lishini topamiz. Statistik momentlarni topish formulasi

$$\begin{aligned}
M_{yz} &= \iiint_{(V)} x\rho dV = \iiint_{(V)} x\rho dx dy dz, \\
M_{zx} &= \iiint_{(V)} y\rho dV = \iiint_{(V)} y\rho dx dy dz, \\
M_{xy} &= \iiint_{(V)} z\rho dV = \iiint_{(V)} z\rho dx dy dz,
\end{aligned}
\tag{0.16}$$

iborat bo'ladi.

Og'irlik markazining koordinatalari uchun

$$\xi = \frac{\iiint_{(V)} x\rho dV}{m}, \quad \eta = \frac{\iiint_{(V)} y\rho dV}{m}, \quad \zeta = \frac{\iiint_{(V)} z\rho dV}{m}
\tag{0.17}$$

formulalar urinli bo'ladi [1-5].

Bir jinsli jism uchun $\rho = const$ bo'ladi va og'irlik markazining koordinatalari uchun

$$\xi = \frac{\iiint_{(V)} x\rho dV}{m}, \quad \eta = \frac{\iiint_{(V)} y\rho dV}{m}, \quad \zeta = \frac{\iiint_{(V)} z\rho dV}{m}
\tag{0.18}$$

munosabatlar urinli bo'ladi.

Koordinata o'qlariga nisbatan inersiya momentlari uchun

$$\begin{aligned}
I_x &= \iiint_{(V)} (y^2 + z^2)\rho dV, \quad I_y = \iiint_{(V)} (z^2 + x^2)\rho dV, \\
I_z &= \iiint_{(V)} (x^2 + y^2)\rho dV,
\end{aligned}
\tag{0.19}$$

formulalar o'rinli bo'ladi.

Koordinata tekisliklariga nisbatan inersiya momentlari

$$I_{zy} = \iiint_{(V)} x^2\rho dV, \quad I_{xz} = \iiint_{(V)} y^2\rho dV, \quad I_{xy} = \iiint_{(V)} z^2\rho dV
\tag{0.20}$$

formulalar bilan hisoblanadi.

Xulosa qismida bitiruv malakaviy ishda olingan natijalar keltirilgan.

I BOB. Uch karrali integrallar va uni hisoblash

1-§. Uch karrali integral va uni hisoblash.

Avvalo uch karrali integralga keladigan masalalarni ko'rib chiqaylik. Ulardan biri jismning massasini hisoblash haqida masala [1-5].

Massa bilan to'ldirilgan biror (V) jism berilgan bo'lsin. Uning har bir $M(x, y, z)$ nuqtasida bu jismning $\rho = \rho(M) = \rho(x, y, z)$ zichligi ma'lum bo'lsin. Shu jismning m massasini aniqlash talab etilgan bo'lsin.

Bu masalani echish uchun (V) sohani bo'laklarga ajratamiz: $(V_1), (V_2), \dots, (V_n)$ uning bo'laklari bo'lsin va har bir bo'lakdan $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ nuqtani tanlaylik. Har bir (V_i) bo'lakda zichlik o'zgarmas va $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ ga teng. U holda bo'lakning massasi m_i taqriban

$$m_i \approx \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)V_i$$

ga teng. Butun jismning massasi esa taqriban

$$m \approx \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)V_i$$

teng bo'ladi. Bo'laklarning diametrini $d(V_i)$ desak, bo'linishning diametri $d_V = \max_{1 \leq i \leq n} d(V_i)$

nolga intilsa, u holda bu taqribiy tenglik aniq bo'lib,

$$m = \lim_{d_V \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)dV \quad (1.1)$$

va masala echildi.

Bu masalani echimidan ko'rinadiki, bunday qatorlardan limit olish integral

Yig'indilardan limit olishga o'xshash bo'layapti. Bunday limitlar ko'proq mexanika va fizika masalalarida uchraydi. Bu limitning qiymati uch karrali integral deb ataladi. U holda jismning massasi

$$m = \iiint_{(V)} \rho(x, y, z) dV \quad (1.2)$$

ko'rinishda yoziladi.

Endi uch karrali integralning mavjud bo'lish shartlarini keltiramiz.

Biror (V) sohada $f(x, y, z)$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu sohani fazoviy to'r orqali chekli sondagi $(V_1), (V_2), \dots, (V_n)$ bo'laklarga bo'lamiz. Bu bo'laklar mos ravishda V_1, V_2, \dots, V_n hajmlarga ega bo'lsin. i - chi (V_i) bo'lakdan ixtiyoriy (ξ_i, η_i, ζ_i) nuqta olib, bu nuqtadagi funksiyaning $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ qiymatini shu bo'lakchanning hajmi V_i ga ko'paytiramiz. Barcha bo'lakchalardagi bunday ko'paytmalarni yig'ib, ushbu

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) dV_i$$

integral yig'indini tuzamiz [1,2].

Ta'rif. (V_i) bulaklarning diametri nolga intilganda integral yig'indining chekli J limiti $f(x, y, z)$ funksiyaning (V) soha bo'yicha uch karrali integrali deyiladi va

$$J = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz$$

kabi belgilanadi [1].

Bu chekli limit faqat chegaralangan funksiyalar uchun mavjud bo'ladi. Bunday funksiyalar uchun σ integral yig'indidan tashqari yana Darbu yig'indilarini ham tuzib olishimiz kerak:

$$s = \sum_{i=1}^n m_i V_i, \quad S = \sum_{i=1}^n M_i V_i,$$

bu erda

$$m_i = \inf_{(V_i)} \{f\}, \quad M_i = \sup_{(V_i)} \{f\}.$$

Uch karrali integralning mavjud bo'lishi uchun

$$\lim_{\lambda_v \rightarrow 0} (S - s) = 0$$

yoki

$$\lim_{\lambda_v \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i V_i = 0$$

shartni bajarilishi zarur va etarli. Bu erda $\omega_i = M_i - m_i$ $f(x, y, z)$ funksiyaning (V_i) sohadagi tebranishi deyiladi.

Bundan har qanday uzluksiz funksiyaning integrallanuvchiligi kelib chiqadi.

Integrallanuvchi funksiyalar va uch karrali integralning ba'zi muhim xossalarini keltiramiz [3,4].

1^o. Agar $(V) = (V') + (V'')$ bo'lsa,

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iiint_{(V')} f(x, y, z) dV + \iiint_{(V'')} f(x, y, z) dV.$$

Chap tomondagi integrallarning mavjudligidan o'ng tomondagi integralning ham mavjudligi kelib chiqadi va aksincha.

2^o. Agar $k = const$ bo'lsa,

$$\iiint_{(V)} kf(x, y, z) dV = k \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV.$$

Chap tomondagi integrallarning mavjudligidan o'ng tomondagi integralning ham mavjudligi kelib chiqadi va aksincha.

3^o. Agar (V) sohada $f(x, y, z)$ va $g(x, y, z)$ funksiyalar integrallanuvchi bo'lsa, $f \pm g$ funksiya ham (V) sohada integrallanuvchi va

$$\iiint_{(V)} (f(x, y, z) \pm g(x, y, z)) dV = \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV \pm \iiint_{(V)} g(x, y, z) dV$$

munosabat o'rinli.

4^o. Agar (V) sohada integrallanuvchi $f(x, y, z)$ va $g(x, y, z)$ funksiyalar uchun $f \leq g$ tengsizlik bajarilsa,

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV \leq \iiint_{(V)} g(x, y, z) dV$$

tengsizlik ham o'rinli bo'ladi.

5^o. $f(x, y, z)$ funksiya integrallanuvchi bo'lsa, $|f(x, y, z)|$ funksiya ham integrallanuvchi bo'ladi va

$$\left| \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV \right| \leq \iiint_{(V)} |f(x, y, z)| dV$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

6^o. (V) sohada integrallanuvchi $f(x, y, z)$ funksiya uchun

$$m \leq f(x, y, z) \leq M$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa,

$$mV \leq \iiint_{(V)} f(x, y, z) dV \leq MV$$

tengsizlik ham o'rinli bo'ladi.

Shu o'rinda o'rta qiymat haqida teorema uchun

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \mu V \quad (m \leq \mu \leq M)$$

tenglikdan foydalanamiz. $f(x, y, z)$ funksiya uzluksiz bo'lgan holda ushbu formulani quyidagi

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})V \quad (1.3)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin, bu erda $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ nuqta (V) sohaning biror nuqtasi.

Chegarasi o'zgaradigan soha bo'yicha uch karrali integralni kiritamiz.

(v) - chegarasi o'zgaruvchili soha bo'lsin. U holda

$$\Phi((v)) = \iiint_{(v)} f(x, y, z) dV \quad (1.4)$$

munosabat o'rinli.

Endi xuddi shunga o'xshash $\Phi((v))$ funksiya dan berilgan M nuqtada soha bo'yicha hosila tushunchasini ham kiritish mumkin, ya'ni ushbu

$$\lim_{(v) \rightarrow M} \frac{\Phi((v))}{v}$$

limit $\Phi((v))$ funksiya dan (v) soha bo'yicha hosilasini ifodalaydi.

7⁰. Agar integral ostidagi funksiya uzluksiz bo'lsa, (1.4) integraldan M nuqtada soha bo'yicha hosilasi integral ostidagi funksiyaning shu nuqtadagi qiymatiga teng.

$$f(M) = f(x, y, z).$$

Shuning uchun yuqoridagi (1.4) integral $f(x, y, z)$ funksiya uchun qaysidir ma'noda «boshlang'ich» funksiya sifatida qabul qilsa bo'ladi.

Uch karrali integralni hisoblashning ba'zi hollarini keltiramiz [3,4].

Faraz qilaylik qaralayotgan sohamiz $(T) = [a, b, c, d; e, f]$ to'g'ri burchakli parallelopipeddan iborat bo'lsin. Shu sohada $f(x, y, z)$ funksiya berilgan bo'lsin. (T) sohaning yz tekislikdagi proeksiyasi $(R) = [c, d; e, f]$ to'g'ri to'rtburchakdan iborat.

Teorema. Agar $f(x, y, z)$ funksiya uchun

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z) dV \quad (1.5)$$

uch karrali integral mavjud va $[a, b]$ oraliqdagi har bir tayinlangan x uchun

$$I(x) = \iint_{(R)} f(x, y, z) dR \quad (1.6)$$

ikki karrali integral va shuningdek

$$\int_a^b dx \iint_{(R)} f(x, y, z) dR \quad (1.7)$$

takroriy integral mavjud bo'lsa

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z) dT = \int_a^b dx \iint_{(R)} f(x, y, z) dR \quad (1.8)$$

tenglik o'rinli bo'ladi [3,4,5].

Isbot. $[a, b]$, $[c, d]$ va $[e, f]$ oraliqlarni

$$\begin{aligned} x_0 &= a < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b, \\ y_0 &= c < y_1 < \dots < y_j < \dots < y_m = d, \\ z_0 &= e < z_1 < \dots < z_k < \dots < z_l = f, \end{aligned}$$

nuqtalar yordamida bo'laklarga bo'lamiz, o'z navbatida (T) parallelopiped ham

$$\begin{aligned} (T_{i,j,k}) &= [x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}; z_k, z_{k+1}] \\ (i &= 0, 1, \dots, n-1; j = 0, 1, \dots, m-1; k = 0, 1, \dots, l-1) \end{aligned}$$

elementar parallelopipedlarga bo'linadi. Bir vaqtda (R) to'g'ri to'rtburchak ham

$(R_{j,k}) = [y_j, y_{j+1}; z_k, z_{k+1}]$ elementar to'g'ri to'rtburchakka bo'linadi. Agar

$$m_{i,j,k} = \inf_{(T_{i,j,k})} \{f\}, \quad M_{i,j,k} = \sup_{(T_{i,j,k})} \{f\},$$

deb olsak, δ^0 xossaga ko'ra $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$ uchun

$$m_{i,j,k} \Delta y_j \Delta z_k \leq \iint_{(R_{j,k})} f(x, y, z) dy dz \leq M_{i,j,k} \Delta y_j \Delta z_k$$

ega bo'lamiz. $\forall x = \xi_i$ qiymatlarni fiksirlab j va k larning barcha qiymatlari bo'yicha tengsizlikda yig'ib chiqamiz va

$$\sum_j \sum_k m_{i,j,k} \Delta y_j \Delta z_k \leq I(\xi_i) \leq \sum_j \sum_k M_{i,j,k} \Delta y_j \Delta z_k$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu erda

$$I(\xi_i) = \iint_{(R)} f(\xi_i, y, z) dy dz.$$

Bu tengsizlikni Δx_i ga ko'paytirib i ning qiymatlari bo'yicha yig'ib chiqamiz:

$$\sum_i \sum_j \sum_k m_{i,j,k} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \leq \sum_i I(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_i \sum_j \sum_k M_{i,j,k} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

Chetki hadlar (1.5) integral uchun Darbu yig'ndilari hisoblanadi. $\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k$ lar nolga intilganda (1.5) integralga teng bo'ladi. O'rta had esa $I(\xi_i)$ funksiyaning integral yig'indisi bo'lib, $\Delta x_i \rightarrow 0$ da (1.7) integralga teng bo'ladi va (1.8) tenglikning bajarilishi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi [3,4].

Agar

$$\int_e^f f(x, y, z) dz \tag{1.9}$$

integral ham fiksirlangan $\forall x \in [a, b]$ va $\forall y \in [c, d]$ lar uchun mavjud bo'lsa, (1.8) dagi ikki karrali integral takroriy integral bilan almashtirilib

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z) dT = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x, y, z) dz \tag{1.10}$$

hosil qilamiz.

Shunday qilib, uch karrali integralni

hisoblash uchta sodda integralni ketma-ket hisoblashga keltiriladi. (1.10) da x, y, z o'zgaruvchilarni joylashishini ixtiyoriy ravishda olish mumkin.

Endi ixtiyoriy soha bo'yicha uch karrali integralni hisoblaymiz. (V) - ixtiyoriy jism berilgan bo'lsin. Agar $f(x, y, z)$ funksiya (V) sohada aniqlangan bo'lib, bu funksiya bilan birga $f^*(x, y, z)$ funksiya ham berilgan bo'lsin. Bu funksiya (V) sohani to'ldiruvchi (T) to'g'ri to'rtburchakli parallelopipedda aniqlangan, ya'ni

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & (V) \text{ da} \\ 0 & (V) \text{ ning tashqarisida.} \end{cases}$$

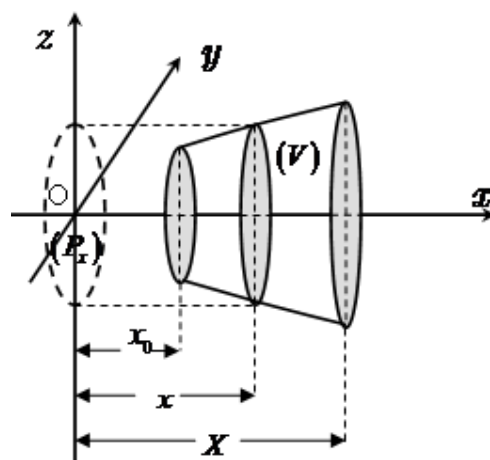
Shu yo'l orqali yuqorida keltirilgan usulga kelamiz. (V) jism $x = x_0$ va $x = X$ tekisliklar orasida joylashgan bo'lsin. (P_x) orqali bu jismning yz tekislikdagi proeksiyasini belgilaylik.

U holda ikki va uch karrali integralning mavjudligidan

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \int_{x_0}^X dx \iint_{(P_x)} f(x, y, z) dy dz \quad (1.8^*)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu (1.8) formulani analogi bo'ladi.

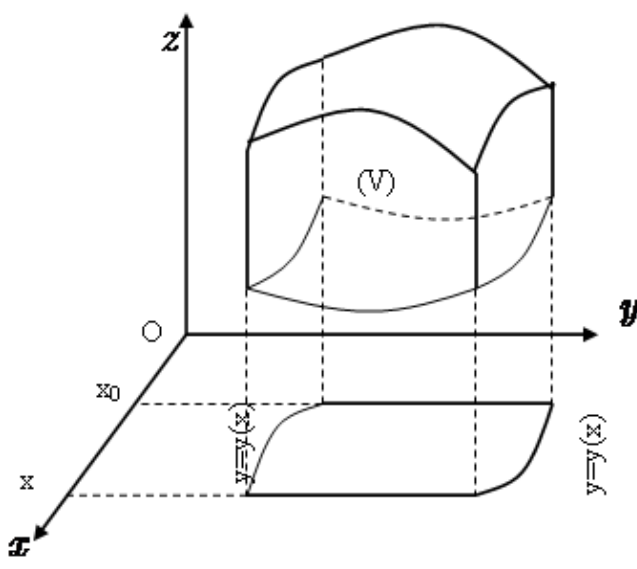
Endi (V) jism mos ravishda yuqori va quyidan $z = z(x, y)$ va $z = Z(x, y)$ sirtlar bilan chegaralangan «silindrik brus»dan bo'lsin. Bu sohaning xy tekislikdagi proeksiyasi (D) figura va (K) egri chiziq bilan chegaralangan bo'lsin. Demak, (V) jism yon tomondan z o'qiga parallel bo'lgan silindrik sirt va (K) yo'naltiruvchi egri chiziq bilan chegaralangan ekan. U holda (1.7) formulaning analogi



$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iint_{(D)} dx dy \int_{z_0(x, y)}^{Z(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (1.7^*)$$

ko'rinishda bo'ladi. Buning uchun ikki karrali va oddiy integralning mavjudligi talab etiladi.

Agar (D) soha $y = y_0(x)$ va $y = Y(x)$ ($x_0 \leq x \leq X$) chiziqlar bilan chegaralangan egri chizikli trapetsiyadan iborat bo'lsa, (V) jism yuqoridagi ikkinchi tipdagidek bo'ladi. Ikki karrali integralni (1.8*) yoki (1.7*) kabi almashtirsak,



$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \int_{x_0}^X dx \int_{y_0(x)}^{Y(x)} dy \int_{z_0(x, y)}^{Z(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (1.10^*)$$

formulani hosil qilamiz. Bu formula (1.10) formulaning umumlashgan holi hisoblanadi.

Yuqorida keltirilgan hollar uchun misollar ko'rib chiqamiz.

1-misol. Ushbu

$$K = \iiint_{(V)} z dx dy dz$$

integral hisoblansin. Bu erda $(V) - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ ellipsoidning yuqori yarim qismidan iborat soha bo'lsin.

Bu (V) jismning xy tekislikdagi proeksiyasi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ ellipsdan iboratdir. Shuning uchun x ning o'zgarish oralig'i $-a$ dan a gacha bo'ladi, tayinlangan x ning qiymatlarida y o'zgaruvchi $-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ dan $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ gacha o'zgaradi. Berilgan (V) jism pastdan xy tekislik, yuqoridan ellipsoid sirt bilan chegaralangan, tayinlangan x va y

lar uchun z o'zgaruvchi 0 dan $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ gacha o'zgaradi.

Shunday qilib, (1.10*) formulaga ko'ra

$$\begin{aligned} I &= \int_{-a}^a dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} z dz = \frac{c^2}{2} \int_{-a}^a dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \\ &= c^2 \int_{-a}^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \frac{2bc^2}{3a^3} \int_{-a}^a (a^2 - x^2)^{3/2} dx = \\ &= \frac{4bc^2}{3a^2} \int_0^a (a^2 - x^2)^{3/2} dx = \frac{\pi}{4} abc^2. \end{aligned}$$

2-misol. Ushbu

$$I = \iiint_{(A)} z dx dy dz$$

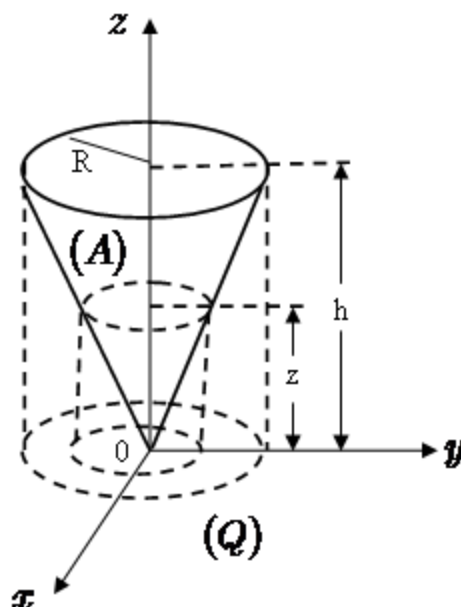
integral hisoblansin. Bu erda (A) jism

$z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ konusli sirt va $z = h$ tekislik

bilan chegaralangan soha.

(a) konusli sirtni xy tekislikdagi proeksiyasi $(Q) x^2 + y^2 \leq R^2$ doiradan iborat.

(1.7*) formuladan foydalanib



$$I = \iint_{(Q)} dx dy \int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^h z dz = \frac{1}{2} \iint_{(Q)} \left[h^2 - \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2) \right] dx dy$$

bo'ladi. Bundan qutb koordinatalariga o'tib,

$$I = \frac{h^2}{2R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi R^2 h^2}{4}.$$

(b) boshqa usulda integralning qiymatini

$$I = \int_0^h z dz \iint_{(D)} dx dy$$

ko'rinishda ham hisoblab topish mumkin [1-8]. Bu erda (D) xy tekislikdagi proeksiyasi

bilan balandlik yotgan z tekislikning kesishmasi. Bu proeksiya $\frac{Rz}{h}$ radiusli doiradan iborat.

Shuningdek ikki karrali integral doiraning yuzi $\frac{\pi R^2}{h^2} z^2$ ga teng. Bundan

$$I = \int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2} z^3 dz = \frac{\pi R^2 h^2}{4}$$

bo'lishini topamiz.

2-§. Uch karrali integralda o'zgaruvchilarni almashtirish.

Matematik analizning umumiy kursida ikki karrali integrallarni o'rganayotganimizda Grin formulasi bilan tanishganmiz. Bu formula ikki karrali integrallar bilan egri chiziqli integrallar orasidagi bog'lanishni ifodalaydi. Uning uch karrali integraldagi analogi Ostrogradskiy formulasi deb yuritilib, u uch karrali integrallarni sirt integrallari bilan bog'laydi [3-6].

Bo'lakli – silliq

$$\begin{aligned} (S_1) \quad z &= z_0(x, y) \\ (S_2) \quad z &= Z(x, y) \quad (z_0 \leq Z) \end{aligned}$$

sirt va z o'qiga parallel bo'lgan (S_3) silindrik sirtlar bilan chegaralangan (V) jismni qaraylik. Bu jismning xy tekislikdagi proeksiyasi bulakli – silliq (K) egri chiziq bilan chegaralangan bo'lsin.

Faraz qilaylik, (V) sohada $\frac{\partial R}{\partial z}$ hosilasi bilan birga uzluksiz bo'lgan (sohaning chegarasidan tashqarisida) $R(x, y, z)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. U holda

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{(S)} R(x, y, z) dx dy \quad (2.1)$$

formulaga egamiz. Bu erda (S) shu jism bilan chegaralangan sirt va o'ng tomondagi integral uning tomonlarining ichkarisi bo'yicha olingan.

Haqiqatan ham, 1§ dagi (1.10^{*}) formulaga ko'ra

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{(D)} dx dy \int_{z_0(x,y)}^{z(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\ &= \iint_{(D)} R(x, y, Z(x, y)) dx dy - \iint_{(D)} R(x, y, z_0(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Agar qaralayotgan sirtni integralga qo'llasak, (1.3) va (1.3^{*}) formulalarga ko'ra

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{(S_2)} R(x, y, z) dx dy + \iint_{(S_1)} R(x, y, z) dx dy$$

bo'ladi. Bunda o'ng tomondagi birinchi integral (S_2) sirtning yuqori tomoni bo'yicha ikkinchi integral esa (S_1) ning pastki tomoni bo'yicha olingan. Ushbu (S_3) sirtning tashqarisi bo'yicha olingan

$$\iint_{(S_2)} R(x, y, z) dx dy$$

integralni yuqoridagi tenglikning o'ng tomoniga qo'shsak tenglik o'zgarmaydi. Chunki bu integral nolga teng. Bu uchta sirlarni birlashtirsak (2.1) formulaga kelamiz. (2.1) formula Ostrogradskiy formulasining xususiy holini ifodalaydi.

Xuddi shunga o'xshash, agar (V) sohada $\frac{\partial P}{\partial x}$ va $\frac{\partial Q}{\partial y}$ hosilalari bilan birga uzluksiz

bo'lgan $P(x, y, z)$ va $Q(x, y, z)$ funksiyalar uchun

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_{(S)} P(x, y, z) dy dz \quad (2.2)$$

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_{(S)} Q(x, y, z) dx dz \quad (2.3)$$

formulalarga ega bo'lamiz [1-8].

Bu uchta (2.1), (2.2), (2.3) formulalarni qo'shib, Ostrogradskiyning umumiy formulasini hosil qilamiz:

$$\iiint_{(V)} \left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{(S)} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy \quad (2.4)$$

Tenglikning o'ng tomonidagi integral ikkinchi tur sirt integralining umumiy ko'rinishini ifodalaydi. Bu integral formula soha bo'yicha integralni shu sohani o'z ichiga olgan yopiq sirt bo'yicha integralga almashtiradi.

Agar qaralayotgan sirt integralni birinchi tur deb qarajak, Ostrogradskiy formulasining boshqa ko'rinishdagi integralini hosil qilamiz.

$$\iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{(S)} (P(x, y, z) \cos \lambda + Q(x, y, z) \cos \mu + R(x, y, z) \cos \gamma) dS \quad (2.5)$$

bu erda λ, μ, γ lar (S) sirtning ichki normalining koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklari.

Eslatma. Grin, Stoks va Ostrogradskiy formulalarida bitta ma'no birlashgan. Ular soha bo'yicha olingan integrallarni uning chegarasi bo'yicha integrallar orqali ifodalaydi [3]. Grin formulasi ikki o'lchovli fazo uchun, Stoks formulasi ham ikki ulchovli uchun bo'lib, bunda fazo egri chiziqli fazodir. Ostrogradskiy formulasi esa uch o'lchovli fazo uchun keltirilgan hollari hisoblanadi.

Integral hisobning asosiy formulasi

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

ni bu formulalarning bir o'lchovli fazo uchun analogi deb qabul qilish mumkin.

Endi uch karrali integralda o'zgaruvchilarni almashtirish qanday bo'lishini tushuntirib o'tamiz.

Fazo xyz to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga, boshqa bir fazo esa $\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasiga ega bo'lsin. Bu fazolarda mos ravishda (S) va (Σ) sirtlar bilan chegaralangan ikkita (D) va (Δ) yopiq sohalarni qaraylik. Bu sohalarda bir – biri bilan quyidagi formulalar

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \zeta) \\ y &= y(\xi, \eta, \zeta) \\ z &= z(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

bilan o'zaro bir qiymatli uzluksiz munosabat bilan bog'langan bo'lsin. Buning uchun (Σ) sirtning nuqtalariga (S) sirtning nuqtalari mos kelishi kerak va aksincha.

(2.6) funksiyalar (Δ) sohada uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsin. U holda

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \quad (2.7)$$

yakabian ham (Δ) sohada uzluksiz funksiya bo'ladi. Bu ditermenantni har doim noldan farqli va ishorasini saqlasin deb hisoblaymiz.

Agar (Δ) sohada ushbu

$$\xi = \xi(u, v), \quad \eta = \eta(u, v), \quad \zeta = \zeta(u, v) \quad (2.8)$$

bo'lakli-silliqli sirtni olsak, (2.6) formula bu sirtni D sohadagi bo'lakli-silliqli sirtga akslantiradi. Bu sirt esa

$$\begin{aligned} x &= x(\xi(u, v), \eta(u, v), \zeta(u, v)) = x(u, v), \quad y = y(u, v) \\ z &= z(u, v) \end{aligned} \quad (2.9)$$

tenglama bilan aniqlanadi.

Silliq sirt bo'lgan hol uchun qaraylik. Unda maxsus nuqtalar yo'q, ushbu ditermenantlar

$$\frac{D(\eta, \zeta)}{D(u, v)}, \frac{D(\xi, \zeta)}{D(u, v)}, \frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)} \quad (2.10)$$

bir vaqtda nolga teng emas. U holda ushbu munosabatlar

$$\begin{aligned} \frac{D(y, z)}{D(u, v)} &= \frac{D(y, z)}{D(\eta, \zeta)} \cdot \frac{D(\eta, \zeta)}{D(u, v)} + \frac{D(y, z)}{D(\xi, \zeta)} \cdot \frac{D(\xi, \zeta)}{D(u, v)} + \frac{D(y, z)}{D(\xi, \eta)} \cdot \frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)}, \\ \frac{D(z, x)}{D(u, v)} &= \frac{D(z, x)}{D(\eta, \zeta)} \cdot \frac{D(\eta, \zeta)}{D(u, v)} + \frac{D(z, x)}{D(\xi, \zeta)} \cdot \frac{D(\xi, \zeta)}{D(u, v)} + \frac{D(z, x)}{D(\xi, \eta)} \cdot \frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)}, \\ \frac{D(x, y)}{D(u, v)} &= \frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} \cdot \frac{D(\eta, \zeta)}{D(u, v)} + \frac{D(x, y)}{D(\xi, \zeta)} \cdot \frac{D(\xi, \zeta)}{D(u, v)} + \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \cdot \frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)} \end{aligned}$$

noldan farqli.

ξ, η, ζ sonlar xyz fazoning nuqtasining qiymatlarini aniqlaydi, yoki shu nuqtaning egri chiziqli koordinatalari deb yuritiladi. xyz tekislikning nuqtasining har bir koordinatasi o'zgarmas qiymatni saqlaydi va koordinatali sirtni tashkil etadi. Bunday koordinatali sirtlar oilasi hammasi bo'lib uchtdan iborat bo'ladi. (D) sohaning har bir nuqtasida bunday koordinatali sirtlar oilasi o'tadi. (D) va (Δ) sohalarni o'zaro bir qiymatli mosligi o'rnatiladi. Ba'zan bu moslik amaliyotda buziladi.

Ba'zi bir koordinatlar sistemasini ko'rib chiqaylik [3,4].

1) Silindrik koordinatlar sistemasi qutb koordinatasi bilan z appilikatali xy tekislik bilan bog'laydi. Koordinatali ko'rinishi ushbu

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z$$

formula ko'rinishidan iborat bo'ladi.

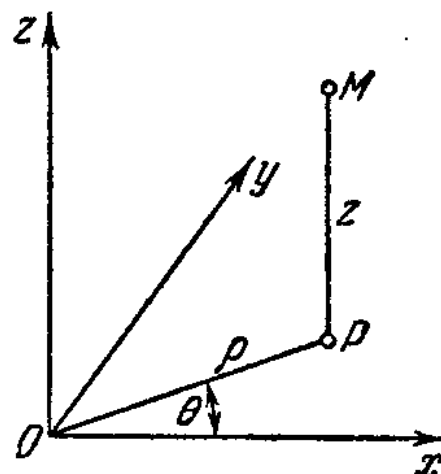
Bu formulalar yordamida

$$0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty$$

soha butun xyz fazoga akslanadi. $\rho = 0$, $z = z$ to'g'ri chiziq $(0, 0, z)$ nuqtaga akslanadi. Shu holatda o'zaro bir qiymatli moslik buziladi.

Qaralayotgan hollarda koordinatali sirtlar quyidagicha bo'ladi.

(a) $\rho = \text{const}$ – silindrik sirt oz o'qiga



parallel bo'ladi: yo'naltiruvchisi markazi koordinata boshida bo'lgan xy tekislikdagi aylanadan iboratdir.

(b) $\theta = const$ – oz o'qidan o'tuvchi yarim tekislik.

(c) $z = const$ – xy tekislikka parallel tekislik.

Yuqorida almashtirishning yakobiani

$$\begin{vmatrix} x_\rho & y_\rho & z_\rho \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_z & y_z & z_z \end{vmatrix} = J = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

$\rho = 0$ dan boshqa hollarda yakobian musbat ishorani saqlaydi.

2) Sferik koordinatalar sistemasini fazodagi qutb koordinatalarni Dekart koordinatalari bilan bog'laydi:

$$x = r \sin\varphi \cos\theta, \quad y = r \sin\varphi \sin\theta, \quad z = r \cos\varphi$$

bu erda $0 \leq r < +\infty$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$ r, φ, θ kattaliklarning geometrik ma'nosi rasmda ko'rsatilgan. r OM kesmaning radius vektori (qutb bilan M nuqtani tutashiruvchi). φ – z o'qi bilan (qutb o'qi bilan) shu vektor orasidagi burchak, θ – OM radius vektorni xy tekislikdagi proeksiya $OP = r \sin\varphi$ ni x o'qi bilan tashkil etgan burchak.

Bu holda ham biz yana o'zaro bir qiymatli moslikni buzish holiga to'g'ri kelamiz. $r\varphi\theta$ fazodagi $r = 0$ tekislik $x = y = z = 0$ koordinata boshiga akslanadi, $\varphi = 0$ (yoki π), $r = r$ to'g'ri chiziq $x = y = 0, z = r$ nuqtaga akslanadi.

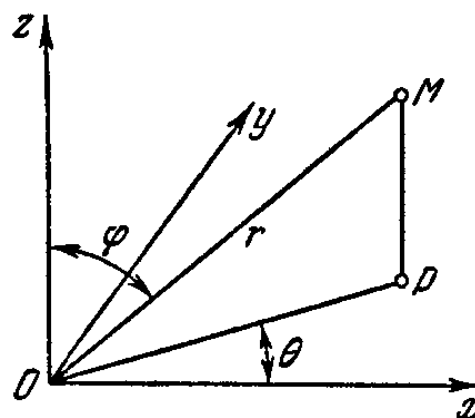
Koordinatali sirt uchta oilani tashkil etadi

(a) $r = const$, markazi koordinata boshida bo'lgan konsentrik sfera.

(b) $\varphi = const$, balandligi oz o'qli doiraviy konus.

(c) $\theta = const$, oz o'qidan o'tuvchi yarim tekislik.

Bu almashtirishning yakobiani



$$J = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi \\ r \cos \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \\ -r \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & 0 \end{pmatrix} = r^2 \sin \varphi$$

ga teng.

$r = 0$, $\varphi = 0$ (yoki π) hollardan boshqa hollarda yakobian plyus ishorani saqlaydi. Bu holda yakobian nolga teng.

3) Fazoni o'zini – o'ziga almashtirish

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad z = \frac{\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

formula orqali ifodalanadi.

4) Elliptik koordinatalar sistemasasi.

Qo'sh fokusli va qo'sh asosli ikkinchi tartibli

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - h^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - R^2} = 1 \quad (0 < h < R)$$

sirtlar oilasini qaraylik. Bu sirt $\lambda > R$ da ellipsoiddan iborat, $R > \lambda > h$ da ikki pallali giperboliddan iboratdir.

Fazoning har bir (x, y, z) nuqtasi (koordinata tekisliklarida yotmagan) dan har bir tipdagi bittadan sirt o'tadi. Haqiqatan ham, tenglamaning o'ng tomonidan

$$\lambda^2 (\lambda^2 - h^2)(\lambda^2 - R^2) - (\lambda^2 - R^2)(\lambda^2 - h^2)x^2 - \\ - \lambda^2 (\lambda^2 - R^2)y^2 - \lambda^2 (\lambda^2 - h^2)z^2 = 0$$

ega bo'lamiz. $\lambda = 0$ da manfiy ishoraga, $\lambda = h$ da musbat ishoraga, $\lambda = R$ da yana manfiy ishoraga, λ dan katta qiymatlarida yana musbat ishoralarga ega bo'lamiz. Bundan kelib chiqadiki, tenglama uchta musbat ildizga ega:

birinchisi $\lambda > R$ (ellipsoid),

ikkinchisi $\mu < R$, h dan katta (bir pallali giperboloid),

uchunchisi $\nu < h$ da (ikki pallali giperboloid).

Yuqoridagi tenglamaning ildizlari xossasidan foydalanib, λ^2 ga nisbatan kubik tenglama deb qarashimiz mumkin, ya'ni:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = x^2 + y^2 + z^2 + h^2 + R^2 \\ \lambda^2 \mu^2 + \mu^2 \nu^2 + \nu^2 \lambda^2 = (h^2 + R^2)x^2 + R^2 y^2 + h^2 z^2 + h^2 R^2; \\ \lambda^2 \mu^2 \nu^2 = h^2 R^2 x^2.$$

Bundan esa

$$x = \pm \frac{\lambda\mu\nu}{hR}, \quad y = \pm \frac{\sqrt{(\lambda^2 - h^2)(\mu^2 - h^2)(h^2 - \nu^2)}}{h\sqrt{R^2 - \nu^2}}$$

$$z = \pm \frac{\sqrt{(\lambda^2 - R^2)(R^2 - \mu^2)(R^2 - \nu^2)}}{R\sqrt{R^2 - h^2}}$$

bo'lishini topamiz. λ, μ, ν sonlarni nuqtaning egri chiziqli koordinatalari deb qarash mumkin. Ya'ni elliptik koordinatalar deb ataymiz. Uchta koordinatali sirtlar sifatida yuqoridagi sirtlar deb (ellipsoid, bir pallali giperboloid, ikki pallali giperboloid) qarash mumkin.

Almashtirishning yakobiani

$$J = \frac{(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{\sqrt{(\lambda^2 - h^2)(\lambda^2 - R^2)(\mu^2 - h^2)(R^2 - \mu^2)(h^2 - \nu^2)(R^2 - \nu^2)}}$$

ko'rinishdan iborat.

xyz fazodagi (D) jismning hajmini uch karrali integral orqali ifodalagan edik. Endi bu jismning $\xi\eta\zeta$ fazodagi mos (Δ) jismning hajmini hisoblaymiz.

(D) jismning hajmi ikkinchi tur sirt integrali orqali

$$D = \iint_{(\Delta)} z dx dy$$

hisoblanadi. (D) sohaning hajmini egri chiziqli koordinatalar sistemasiga o'tib

hisoblaymiz. Buning uchun (2.5) sirtning (2.3) parametrik tenglamasidan foydalanamiz [2-4].

$$C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

deb faraz qilib, (1.8) formuladan

$$D = \iint_{(E)} z C du dv$$

egamiz. (E) soha uv tekislikda o'zgaradi.

Shuningdek, x, y o'zgaruvchi u, v ga bog'liq, ξ, η, ζ o'zgaruvchiga nisbatan

$$C = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \cdot \frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)} + \frac{D(x, y)}{D(\eta, \zeta)} \cdot \frac{D(\eta, \zeta)}{D(u, v)} + \frac{D(x, y)}{D(\zeta, \xi)} \cdot \frac{D(\zeta, \xi)}{D(u, v)}$$

munosabat o'rinli bo'ladi. C ning qiymatini yuqoridagi integralga qo'yamiz va

$$D = \iint_{(E)} z \left[\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} \cdot \frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)} + \frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)} \cdot \frac{D(\eta,\zeta)}{D(u,v)} + \frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)} \cdot \frac{D(\zeta,\xi)}{D(u,v)} \right] dudv \quad (2.11)$$

topamiz.

Bu integralni ikkinchi tur sirt integralga qo'yamiz va (Σ) sirtning tashqi tomoni bo'yicha integral:

$$\iint_{(\Sigma)} z \left[\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} d\xi d\eta + \frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)} d\eta d\zeta + \frac{D(x,y)}{D(\xi,\zeta)} d\xi d\zeta \right] \quad (2.12)$$

(2.12) integralga Ostrogradskiy formulasini qo'llaysak

$$D = \pm \iiint_{(\Delta)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[z \frac{D(x,y)}{D(\eta,\xi)} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[z \frac{D(x,y)}{D(\xi,\zeta)} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[z \frac{D(x,y)}{D(\zeta,\eta)} \right] \right\} d\xi d\eta d\zeta \quad (2.13)$$

(Δ) soha bo'yicha uch karrali integralni hosil qilamiz.

Integral ostidagi ifoda

$$\begin{aligned} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{D(x,y)}{D(\eta,\xi)} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{D(x,y)}{D(\xi,\zeta)} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \cdot \frac{D(x,y)}{D(\zeta,\eta)} + \\ & + z \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{D(x,y)}{D(\eta,\xi)} + \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{D(x,y)}{D(\xi,\zeta)} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot \frac{D(x,y)}{D(\zeta,\eta)} \right] \end{aligned}$$

teng. Yig'g'indida birinchi qo'shiluvchi yakobianga teng, ya'ni

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix}.$$

Ikkinchi qo'shiluvchilar nolga teng, ya'ni

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{D(x,y)}{D(\eta,\xi)} &= \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi}, \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)} &= \frac{\partial^2 x}{\partial \zeta \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \zeta \partial \eta}, \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} &= \frac{\partial^2 x}{\partial \zeta \partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \zeta}, \end{aligned}$$

barchasini qo'shib chiqsak chap tomoni ikkinchi qo'shiluvchiga teng, o'ng tomoni nolga teng bo'ladi.

Shunday qilib,

$$D = \pm \iiint_{(\Delta)} \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} d\xi d\eta d\zeta$$

formulaga kelimiz. \pm ishora yakobianning ishorasiga qarab tanlanadi. U holda hosil qilingan natijani ushbu ko'rinishda

$$D = \pm \iiint_{(\Delta)} \left| \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \right| d\xi d\eta d\zeta \quad (2.14)$$

yo'zish mumkin yoki yakobianni qisqacha $J(\xi, \eta, \zeta)$ orqali ifodalasak:

$$D = \pm \iiint_{(\Delta)} |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta. \quad (2.14^*)$$

Integral ostidagi ifoda

$$\left| \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \right| d\xi d\eta d\zeta = |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta$$

Egri chiziqli koordinatalardagi hajm elementi deyiladi [2-4].

Egri chiziqli koordinatalarda hajm elementi yordamida uch karrali integralda o'zgaruvchilarni almashtirishning umumiy formasini keltirish mumkin.

xyz va $\xi\eta\zeta$ fazolardagi (D) va (Δ) sohalar orasidagi (2.1) moslik o'rnatilgan bo'lsin. (2.8) formuladagi barcha shartlar bajarilgan deb hisoblab ushbu tenglik

$$\begin{aligned} \iiint_{(D)} f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (2.15)$$

bu erda $J(\xi, \eta, \zeta) = \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$, o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. Bunda $f(x, y, z)$

funksiyani uzluksiz deb faraz qilamiz va chekli sondagi bo'lakli-silliq sirtlarda uzilishga ega bo'lsin.

Isbotlash uchun (D) va (Δ) bo'lakli-silliq sirtli sohalarni (D_i) va (Δ_i) ($i=1, 2, \dots, n$) elementar bo'laklarga yoyamiz. Har bir $(D_i), (\Delta_i)$ sohaga (2.7) formulani qo'llab

$$D_i = \left| J \left(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i \right) \right| \Delta_i \quad (2.16)$$

hosil qilamiz. Bu erda $(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i)$ nuqta (Δ_i) sohadagi biror nuqta. Bunga mos $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ nuqtani (D_i) sohadan tanlaymiz va

$$\bar{x}_i = x_i(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i), \bar{y}_i = y_i(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i), \bar{z}_i = z_i(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i) \quad (2.17)$$

deb faraz qilamiz.

(2.15) integralning birinchisi uchun integral yig'ini tuzamiz.

$$\sigma = \sum_i f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) D_i.$$

Bunga $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$ larning (2.17) dagi ifodasini va D_i ni o'rniga (2.16) ifodani qo'yib

$$\sigma = \sum_i f \left(x_i(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i), y_i(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i), z_i(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i) \right) \left| J(\bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i) \right| \Delta_i$$

yig'indiga kelamiz. Bu esa (2.15) dagi ikkinchi integralga teng.

(Δ_i) sohaning deametrini nolga intiltirsak, uzluksizlikka ko'ra (D_i) ning deametri ham nolga intiladi. σ yig'ini bir vaqtda ikki integralga ham intiladi va (2.15) formula hosil bo'ladi.

Endi ba'zi misollar keltiramiz [6].

1-misol. Uchbu

$$I = \iiint_{(V)} \frac{xyz}{x^2 + y^2} dx dy dz$$

integralni hisoblang. Bu erda (V) yuqoridan $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 xy$ sirt bilan, pastdan $z = 0$ tekislik bilan chegaralangan jism.

Cferik koordinatalarga utamiz. U holda yuqoridagi sirt tenglamasi

$$r^2 = a^2 \sin \varphi \sin \theta \cos \theta,$$

kurinishga keladi. Berilgan integral esa, jism z o'qiga nisbatan cimmetrik bo'lgani uchun qo'yidagiga almashadi:

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \sin \varphi \sqrt{\sin \theta \cos \theta}} r^3 \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta dr = \\ &= \frac{a^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos^3 \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{a^4}{144}. \end{aligned}$$

2-misol. Ushbu

$$K = \iiint_{(V)} \frac{xyz dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

integral hisoblansin. Bu erda (V) - uch yoqli ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

Umumlashgan sferik koordinatalarga o'tamiz.

$$x = ar \sin \varphi, y = br \sin \varphi \sin \theta, z = cr \cos \varphi,$$

$$J = abc r^2 \sin \varphi.$$

Unda integral

$$K = a^2 b^2 c^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \frac{\sin^3 \varphi \cos \varphi \sin \theta \cos \theta dr d\varphi d\theta}{a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \varphi}$$

ko'rinishga keladi. $\sin^2 \varphi = u$, $\sin^2 \theta = v$ almashtirish bajarsak, u holda

$$K = \frac{a^2 b^2 c^2}{8(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)} \left\{ b^2 c^2 \ln \frac{c}{b} + c^2 a^2 \ln \frac{a}{c} + a^2 b^2 \ln \frac{b}{a} \right\}$$

teng bo'ladi.

II BOB. Uch karrali integrallarning tadbiqlari

3-§. Uch karrali integrallarning mexanikaga tadbiqlari.

Tabiyki, barcha geometrik va mexanik kattaliklar fazodagi (V) jismning massasiga bog'liqdir. Bunday holni uch karrali integral orqali ifodalaymiz [2,3].

ρ orqali (V) jismning ixtiyoriy nuqtadagi zichligini belgilaylik: u nuqtaning koordinatalarini funksiyasi bo'ladi va bu funksiyani har doim uzluksiz deb faraz qilamiz. $dm = \rho dV = \rho dx dy dz$ massa elementlarini yig'ib chiqamiz va barcha massa kattaliklar uchun

$$m = \iiint_{(V)} \rho dV = \iiint_{(V)} \rho dx dy dz \quad (3.1)$$

ega bo'lamiz.

Elementar statistik momentlar uchun ushbu

$$dM_{yz} = x dm = x \rho dV,$$

$$dM_{zx} = y dm = y \rho dV,$$

$$dM_{xy} = z dm = z \rho dV,$$

munosabatlar o'rinli bo'lishini topamiz. Statistik momentlarni topish formulasi

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint_{(V)} x \rho dV = \iiint_{(V)} x \rho dx dy dz, \\ M_{zx} &= \iiint_{(V)} y \rho dV = \iiint_{(V)} y \rho dx dy dz, \\ M_{xy} &= \iiint_{(V)} z \rho dV = \iiint_{(V)} z \rho dx dy dz, \end{aligned} \quad (3.2)$$

iborat bo'ladi.

Og'irlik markazining koordinatalari uchun

$$\xi = \frac{\iiint_{(V)} x \rho dV}{m}, \quad \eta = \frac{\iiint_{(V)} y \rho dV}{m}, \quad \zeta = \frac{\iiint_{(V)} z \rho dV}{m} \quad (3.3)$$

formulalar o'rinli bo'ladi.

Bir jinsli jism uchun $\rho = const$ bo'ladi va og'irlik markazining koordinatalari uchun

$$\xi = \frac{\rho \iiint_{(V)} x dV}{m}, \quad \eta = \frac{\rho \iiint_{(V)} y dV}{m}, \quad \zeta = \frac{\rho \iiint_{(V)} z dV}{m} \quad (3.4)$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Koordinata o'qlariga nisbatan inersiya momentlari uchun

$$I_x = \iiint_{(V)} (y^2 + z^2) \rho dV, \quad I_y = \iiint_{(V)} (z^2 + x^2) \rho dV,$$

$$I_z = \iiint_{(V)} (x^2 + y^2) \rho dV, \quad (3.5)$$

formular o'rinli bo'ladi.

Koordinata tekisliklariga nisbatan inersiya momentlari

$$I_{zy} = \iiint_{(V)} x^2 \rho dV, \quad I_{xz} = \iiint_{(V)} y^2 \rho dV, \quad I_{xy} = \iiint_{(V)} z^2 \rho dV \quad (3.6)$$

formular bilan hisoblanadi.

$A(\xi, \eta, \zeta)$ nuqtada mahkamlangan (V) jism massa bilan tuldirilgan bo'lsin. $dm = \rho dV$ massa elementi tomoni nisbatan tortishish kuchi koordinata o'qlarida proeksiyaga ega bo'ladi.

$$dF_x = \frac{x - \xi}{r^3} \rho dV, \quad dF_y = \frac{y - \eta}{r^3} \rho dV,$$

$$dF_z = \frac{z - \zeta}{r^3} \rho dV,$$

bu erda $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$ A nuqtadan (x, y, z) nuqttagacha masofa elementi. Bundan to'liq \vec{F} tortishish kuchini koordinata o'qlaridagi proeksiyasi uchun

$$F_x = \iiint_{(V)} \frac{x - \xi}{r^3} \rho dV, \quad F_y = \iiint_{(V)} \frac{y - \eta}{r^3} \rho dV,$$

$$F_z = \iiint_{(V)} \frac{z - \zeta}{r^3} \rho dV, \quad (3.7)$$

ega bo'lamiz [2,4].

Xuddi shunday (V) jismning nuqtadagi potentsiali ham

$$W = \iiint_{(V)} \frac{\rho dV}{r} \quad (3.8)$$

formula bilan hisoblanadi [3,4].

Agar A nuqta jismdan tashqarida bo'lsa, bu integrallarning barchasi xos integrallar bo'ladi. Bu holda W integralni ixtiyoriy ξ, η, ζ o'zgaruvchilar bo'yicha integral ostida differensiallash mumkin. Natijada

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = F_x, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} = F_y, \quad \frac{\partial W}{\partial \zeta} = F_z, \quad (3.9)$$

hosil qilamiz.

Agar A nuqta (V) jismga tegishli bo'lsa, bu nuqtada $r = 0$ va (3.7) va (3.8) dagi integral ostidagi funksiyalar chegaralanmagan bo'lib qoladi. Keyinroq bu integrallarni xosmas ekanligini va mavjudligini (3.9) munosabatning bajarilishini ko'rsatamiz.

Uch karrali integrallarning mexanikaga tadbirlariga doir ba'zi bir misollar ko'rib chiqaylik.

1 – misol. $\rho = 1$ bo'lganda ikki o'lchovli holda bir jinsli silindrik brusning statistik momenti uchun

$$M_{yz} = \iint_{(P)} zxdxdy, \quad M_{zx} = \iint_{(P)} zydx dy,$$

$$M_{xy} = \iint_{(P)} z^2 dx dy$$

formulaga egamiz. Bularga (3.2) formulalarni qo'llab:

$$M_{xy} = \iiint_{(V)} z dV = \iint_{(P)} dx dy \int_0^{z(x,y)} z dz;$$

bu erda

$$\int_0^{z(x,y)} z dz = \frac{1}{2} z^2 \Big|_{z=0}^{z=z(x,y)}.$$

2 – misol. $x^2 + y^2 = 2az$ paraboloid va $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ sferik sirtlar bilan chegaralangan jismning og'irlik markazini toping.

xy tekislikka nisbatan statistik momenti

$$M = \int_a^b xp(x) dx$$

formulada x ni z bilan almashtirib hisoblash mumkin. Ko'ndalang kesim $R(z)$ ning yuzi $2az\pi$ ga teng. z^2 funksiya 0 dan a va $\pi(3a^2 - z^2)$ funksiya uchun, yoki z o'zgaruvchi a dan $a\sqrt{3}$ gacha o'zgaradi. Shunday qilib,

$$M_{xy} = 2\pi a \int_0^a z^2 dz + \pi \int_a^{a\sqrt{3}} (3a^2 - z^2) dz = \frac{5}{3} \pi a^4.$$

Shuningdek jismning hajmi ma'lum: $V = \frac{\pi a^3}{3} (6\sqrt{3} - 5)$, [6] bo'lsa,

$$\frac{\iiint_{(V)} z dV}{V} = \zeta = \frac{5}{83} (6\sqrt{3} + 5)a.$$

$\xi = \eta = 0$ simmetrik jism bo'lgani uchun.

3 – misol. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$ sferaning massasini toping va og'irlik markazining o'rnini aniqlang.

Agar sferaning nuqtalari zichligi bu nuqtalar bilan koordinata boshigacha bo'lgan masofaga teskari proporsional bo'lsa,

$$\rho = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

(3.1) formulaga ko'ra massa

$$m = k \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 2az} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

teng.

Bu uch karrali integralda (2.8*) ga o'xshash almashtirish bajarib, uni ushbu

$$m = k \int_0^{2a} dz \iint_{(R_z)} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Sodda integral va ikki karrali integrallar orqali ifodalash mumkin. Bu erda (R_z)

radiusi $\sqrt{2az - z^2}$ ga teng bo'lgan aylana. Ichki integralni qutb koordinatalarga o'tib

$$\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2az-z^2}} \frac{r dr d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}} = 2\pi (\sqrt{2az} - z)$$

tengligini topamiz.

Bundan esa $m = \frac{4}{3} \pi R a^2$ bo'lishini topamiz.

Statistik momenti esa (3.2) munosabatlardan foydalanib

$$M_{xy} = R \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 2az} \frac{z dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{16}{15} \pi R a^2$$

tengligini topamiz.

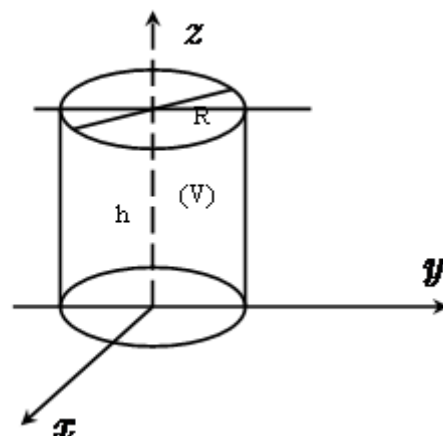
Og'irlik markazi esa, $\xi = \frac{4}{3} a$ ga teng, qolgan ikki koordinatasi 0 ga teng.

4 – misol. Ushbu silindrning asosidagi tortishish markazini toping. Rasmda ifodalanishiga ko'ra

$$F_z = \iiint_{(V)} \frac{\rho z dV}{V^3} = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} dx dy \int_0^h \frac{\rho z dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} =$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \rho \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} \right) dx dy =$$

$$= 2\pi\rho \left(R + h - \sqrt{R^2 + h^2} \right).$$



Qolgan ikkita tortishish kuchi nolga teng. Shuning uchun tortishish vertikal yuqoriga yo'nalgan.

5 – misol. Silindrning asosini markazidagi potensialni toping.

(3.8) formuladan foydalanib topamiz. Buning uchun

$$W = \int_0^h \rho dz \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} :$$

Ikki karrali integralni qutb koordinatalarga o'tib hisoblaymiz. Natijada

$$W = 2\pi\rho \int_0^h \left(\sqrt{R^2 + z^2} - z \right) dz = \rho\pi R^2 \ln \frac{h + \sqrt{R^2 + h^2}}{R} + \rho\pi h \left(\sqrt{R^2 + h^2} - h \right)$$

ega bo'lamiz.

Agar jismning inersiya momenti koordinata boshidan chiqib turli o'qlarga tarqalgan bo'lsa, har bir o'qda

$$ON = \frac{1}{\sqrt{I_n}}$$

kesmalar ajratadi.

$$X = ON \cos \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{I_n}}, \quad Y = \frac{\cos \beta}{\sqrt{I_n}}, \quad Z = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{I_n}}$$

lar bu kesmaning oxiri N nuqtaning koordinatalari bo'lsin. U holda I_n ning qiymati ma'lumligiga ko'ra N nuqtaning geometrik o'rnini aniqlaydigan

$$I_x X^2 + I_y Y^2 + I_z Z^2 - 2K_{yz} YZ - 2K_{zx} ZX - 2K_{xy} XY = 1$$

tenglamani hosil qilamiz [7,8].

Shuningdek ON kesmaning uzunligi cheksizlikka aylanmasa, bu ikkinchi tartibli sirt ellipsoid bo'ladi. U ellipsoid inersiya deyiladi. Qattiq jismlarning harakatini tekshirayotganimizda ellipsoid inersiyaning o'qlari asosiy rol uynaydi. Shuning uchun bu

o'qlar inersiyani bosh o'qlari deyiladi. Agar O nuqta og'irlik markazi bo'lsa, mos inersiya o'qlari inersiyani bosh markaziy o'qi deyiladi.

Koordinata o'qlarining inersiyani bosh o'qlari bo'lishiga markazdan qochuvchi momentga bog'liq. Masalan, x o'qi inersiya bosh o'qi bo'lishi uchun

$$K_{xy} = 0, K_{zx} = 0$$

shartning bajarilishi zarur va etarli.

Xususan, bu shartlar bajarilishi uchun massa yz tekisligiga semmitrik tarqalgan bo'lishi kerak.

Qattiq jismni o'q atrofida aylanishida markazdan qochuvchi kuch haqida to'xtalib o'tamiz.

Agar (V) jism z o'qi atrofida ω burchak tezlik bilan aylangan bo'lsa, $dm = \rho dV$ elementli jismning markazdan qochuvchi kuchi

$$dF = \omega^2 r dm = \omega^2 r \rho dV$$

kattalik bilan hisoblanadi. Bu erda r aylanish o'qidan elementgacha bo'lgan masofa. Masofadan qochuvchi kuchning koordinata o'qlaridagi proeksiyasi

$$dF_x = \omega^2 x \rho dV, dF_y = \omega^2 y \rho dV, dF_z = 0$$

ga teng. \vec{F} markazdan qochuvchi kuch ushbu integrallar orqali

$$F_x = \omega^2 \iiint_{(V)} x \rho dV = \omega^2 M_{yz}, F_y = \omega^2 M_{zx}, F_z = 0$$

hisoblanadi. Bu erda M_{yz}, M_{zx} – jismning statistik momenti. Agar ξ, η, ζ lar orqali jismning og'irlik markazining koordinatalarini ifodalasak, bu formulalar

$$F_x = \omega^2 \xi m, F_y = \omega^2 \eta m, F_z = 0$$

kurinishda yoziladi.

Markazdan qochuvchi elementar kuch orqali koordinata o'qlariga nisbatan momentlarini

$$dM_x = z dF_y = \omega^2 yz \rho dV, \\ dM_y = z dF_x = \omega^2 zx \rho dV, dM_z = 0$$

ko'rinishda ifodalash mumkin [9,10].

Natijada bu o'qlarga nisbatan momentlar

$$M_x = \omega \iiint_{(V)} yz \rho dV = \omega^2 K_{yz}, M_y = K_{zx}, M_z = 0$$

integrallar orqali topiladi.

Markazdan qochuvchi kuch uzaro teng kuchli bo'lishi uchun yoki valga tashqi ta'sir ko'rsatmasligi uchun

$$M_{yz} = 0, M_{zx} = 0, K_{yz} = 0, K_{zx} = 0$$

shartlar urinli bo'lishi zarur va etarli. Birinchi ikkitasi jismning og'irlik markazini z o'qida yotishini ifodalaydi, keyingi ikkitasi esa z o'qini inersiyasining bosh o'qi ekanligini ko'rsatadi.

Uch karrali integralning mexanikada tadbirlarini ba'zi bir aniq misollar yordamida ko'rib chiqamiz [9,10].

6 – misol. Bir jinsli ($\rho = 1$) ellipsoidning

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad (a > b > c)$$

potensialini toping.

Sferik koordinatalarni kiritamiz, bu holda x o'q sifatida qutb o'qini olamiz:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \cos \theta, \quad z = r \sin \varphi \sin \theta.$$

U holda

$$W = \iiint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\cos \varphi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin \varphi \cos \theta}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sin \varphi \sin \theta}{c}\right)^2}}} r dr =$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{B \cos^2 \theta + C \sin^2 \theta}.$$

bu erda $B = \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}$, $C = \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{c^2}$.

Ichki intagral $\frac{\pi}{2\sqrt{BC}}$ ga teng. Keyin $\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} \cos \varphi = t$ deb, birinchi tur elliptik

integralni hosil qilamiz:

$$W = \frac{2pabc}{\sqrt{a^2 - c^2}} \int_0^{\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}} \frac{dt}{\sqrt{\left(1 - t^2\right) \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} t^2\right)}}.$$

$t = \sin \lambda$ urniga qo'yish orqali Lejandr formasiga kelamiz:

$$W = \frac{2\pi abc}{\sqrt{a^2 - c^2}} \int_0^{\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}} \frac{dt}{\sqrt{1 - k_0^2 \sin^2 \lambda}} = \frac{2\pi abc}{\sqrt{a^2 - c^2}} F(\lambda_0, k_0),$$

bu erda $\lambda_0 = \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}$, $k_0 = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}$.

4-§. Vektor analiz elementlari.

Integral hisobni matematik fizika va mexanika masalalarida qo'llaganimizda ko'proq vektor formuladan foydalanish qulayroq bo'ladi. Shuning uchun vektor analiz tushunchalari hamda integral formulalarni vektor ko'rinishlarini o'rganish muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

Bizga ma'lumki, skalyar va vektor kattaliklarni matematika, fizika va mexanikada ko'plab uchraydi. Skolyar kattalik o'zining sonli qiymati bilan aniqlanadi. Masalan, hajm, massa, zichlik, temperaturalar.

Vektor kattaliklar esa o'zining yo'nalishi bilan aniqlanadi. Vektorlarni ustiga strelkali harflar bilan belgilaymiz. Masalan, $\vec{A}, \vec{r}, \vec{v}, \dots$. Strelkasiz harflar ularning uzunligini ifodalaydi.

$$A=|\vec{A}|, \quad r=|\vec{r}|, \quad v=|\vec{v}|, \dots$$

A_x, A_y, A_z, \dots lar $\vec{A}, \vec{r}, \vec{v}, \dots$ vektorlarning mos ravishda x, y, z, \dots o'qlardagi proeksiyalaridir. A_x, A_y, A_z proeksiyalar \vec{A} vektorning koordinata o'qlardagi proeksiyasini ifodalaydi.

\vec{A} va \vec{B} vektorlar berilgan bo'lsin. Bu vektorlarning skolyar ko'paymasi

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\vec{A}, \vec{B})$$

son qiymatga teng. \vec{A} va \vec{B} vektorlarning vektor ko'paytmasi uzunligi $|\vec{A}| |\vec{B}| \sin(\vec{A}, \vec{B})$

qiymatga teng bo'lgan vektorga aytiladi va $\vec{A} \times \vec{B}$ kabi belgilanadi. Vektor ko'paytmaning o'qlardagi proeksiyasi

$$A_y B_z - A_z B_y, \quad A_z B_x - A_x B_z, \quad A_x B_y - A_y B_x$$

teng.

Vektor analizning ba'zi bir muhim tushunchalarini kiritamiz.

1. Skolyar va vektor maydon. Agar M nuqta skolyar yoki vektor kattalik bilan bog'liq bo'lgan biror fazoviy sohada aniqlangan bo'lsin. Bu kattalik bilan berilgan maydon mos ravishda skolyar yoki vektor maydon deyiladi [3,4].

Skolyar maydonga misol sifatida temperaturalar maydoni yoki elektrostatik maydonlar misol bo'ladi. Agar M nuqtaning holati uning koordinatalari $oxyz$ sistemaning koordinatalari bilan aniqlansa, U skolyar kattalikning maydoni $U(x, y, z)$ sonli funksiyaning berilishi bilan teng kuchli. Biz har doim bu funksiyaning uzluksiz, uzluksiz xususiy hosilaga ega deb qaraymiz. Agar bu hosilalar bir vaqtda nolga teng bo'lmasa,

$$U(x, y, z) = C, C - const$$

tenglama biror sirtni aniqlaydi. Bunday sirt sirtli uram deb ataladi. Har qanday qaralayotgan soha shunday sirtga ega. Har bir nuqtadan bitta va faqat bitta shunday sirt o'tadi.

Vektor maydoniga misol sifatida kuch maydoni yoki tezlik maydonini qarashimiz mumkin. Agar $oxyz$ koordinatalar sistemasida vektor maydon berilgan bo'lsa \vec{A} vektor kattalik o'qlardagi proeksiyalari orqali aniqlanadi:

$$A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z).$$

Bu funksiyalar uzluksiz hosilalarga ega. Vektor maydonni o'rganishda vektor chiziqlarni o'rganish muhim ahamiyatga ega.

Vektor chiziq deb har bir M nuqtasidagi yo'nalish \vec{A} vektorning yo'nalishi bilan bir xil bo'lgan egri chiziqqa aytiladi.

Biz bilamizki, egri chiziqqa urinmaning yo'naltiruvchi kosinuslari dx, dy, dz differensiallarga proporsional. U holda vektor chiziq

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

\vec{A} vektor nolga teng bo'lmasin. Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi nazariyasidagi «mavjudlik teoremasi» ni isbotlash mumkin. Qaralayotgan soha vektor chiziqlar bilan to'ldiriladi. Sohaning har bir nuqtasidan bitta va faqat bitta vektor chiziq o'tadi. Vektor chiziqlar bir-biri bilan kesishmaydi. Ko'p hollarda qaralayotgan sirt vektor chiziqlardan iborat, bu sirt vektor sirt deyiladi. Vektor sirtning har bir nuqtasi M ga tekislikda yotuvchi $\vec{A}(M)$ vektor mos keladi. Bu tekislik M nuqtada sirtga urinma tekislik bo'ladi.

2. Gradient. Skolyar maydonda $U(M) = U(x, y, z)$ funksiya berilgan bo'lsin.

Ta'rif 4.1. Koordinata o'qlaridagi proeksiyasi

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$$

bo'lgan \vec{g} vektorga mos nuqtadagi U kattalikning gradienti deyiladi va

$$\vec{g} = gradU$$

kabi belgilanadi [3-6].

Funksiyaning ℓ yo'nalish bo'yicha hosilasini $U(x, y, z)$ funksiya uchun keltiramiz:

$\frac{\partial U}{\partial \ell}$. Bu esa ℓ yo'nalish bo'yicha tezlikning o'sishini ifodalaydi. Biz ushbu

$$\frac{\partial U}{\partial \ell} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu erda $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ lar ℓ yo'nalishning yo'naltiruvchi kosinuslari. Agar $\vec{\lambda}$ orqali birlik vektorni belgilasak, u holda yuqoridagi formulani

$$\frac{\partial U}{\partial \ell} = \text{grad}U \cdot \vec{\lambda} = \text{grad}_{\ell}U \quad (4.2)$$

ko'rinishda ifodalaymiz [1-4].

Bu hosila o'zining eng katta qiymatida ℓ ning yo'nalishi gradient yo'nalishi bilan bir xil bo'lgan holdagina erishadi. Bu eng katta qiymat

$$|\text{grad}U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \quad (4.3)$$

tengdir. Bu bilan biz quyidagi ta'rifga kelamiz.

Ta'rif 4.2. U skolyar kattalikning berilgan nuqtadagi gradienti deb shunday vektorga aytiladiki, bu vektor son qiymati va yo'nalishi bo'yicha U kattalikning tezlikning o'sishi eng katta bo'ladi [3].

Gradientining yo'nalishi shu nuqtadan o'tuvchi $U(x, y, z) = C$ sirtning normalining yo'nalishi bilan bir xil bo'ladi.

$U(M)$ skolyar maydonning $\text{grad}U$ vektor maydonni aniqlaydi.

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$$

koordinalar ∇ orqali belgilanadi. Bular Gomilton (W. R. Homilton) simvollarini deyiladi. Bu belgilashga ko'ra,

$$\text{grad}U = \nabla U \quad (4.4)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

Misollar. 1. \vec{r} orqali \overline{OM} radius vektorni belgilaylik. O va M fazoviy nuqtalarni tutashtiruvchi vektor radius vektor deyildi. r uning uzunligi, $U(M) = \varphi(r)$, deb faraz qilamiz, bunda φ – musbat skolyar r argumentning skolyar funksiyasi va hosilasi o'zgarmas sondan iborat. Sirt uramasi markazi O nuqtada radiusi r ga teng bo'lgan sferadan

iborat. Gradientining yo'nalaishi $\varphi'(r) > 0$ va $\varphi'(r) < 0$ shartga ko'ra ustma-ust tushadi yoki qarama-qarshi holatda bo'ladi. U holda

$$\text{grad}\varphi(r) = \varphi'(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

bo'lishini ko'rish qiyin emas.

Xususiyl holda

$$\text{grad}\frac{c}{r} = -\frac{c}{r^3} \vec{r} \quad (c - \text{const}).$$

Agar O nuqtada m massa joylashtirilgan bo'lsa va Nyuton maydoniga qarasak, M nuqtada uning \vec{F} kuchlanishi

$$\vec{F} = -\frac{m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{m}{r^3} \vec{r}$$

ga teng. Shuning uchun

$$\vec{F} = \text{grad}\frac{m}{r}.$$

Qaralayotgan vektor maydonni biror skolyar kattalikning gradientini maydoni deb qarash muhim ahamiyatga ega.

3. Sirdan o'tuvchi vektorlar oqimi. $\vec{A}(M)$ vektor maydon berilgan bo'lsin. (4.3)

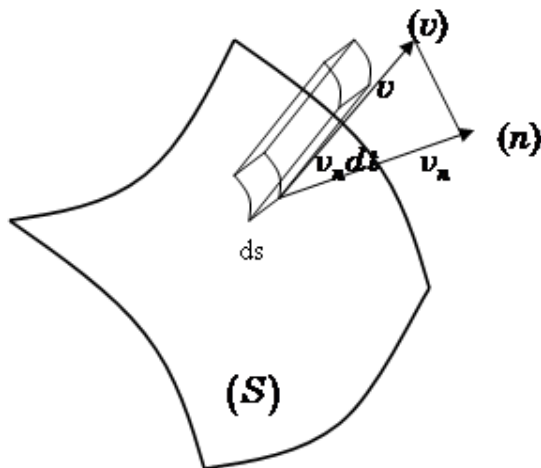
funksiyalar berilgan bo'lsin. Tomonlari ma'lum bo'lgan (S) sirtni olaylik.

$\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$ lar mos ravishda yo'naltiruvchi n normalning yo'naltiruvchi kosinuslari. U holda

$$\iint_{(S)} (A_x \cos \lambda + A_y \cos \mu + A_z \cos \nu) ds,$$

sirt integralni qisqacha qilib

$$\iint_{(S)} A_n ds$$



ko'rinishda yozish mumkin. Bu integralga \vec{A} vektorning (S) sirtni ko'rsatilgan tomonlari orqali o'tuvchi oqimi deyiladi [2-4].

Misollar yordamida tadbirlarini qaraylik.

Gidromexanika masalalariga bog'liq bo'lgan oqimga doir misol qaraylik. Fazoda suyuqlik oqimini qaraylik: suyuqlik oqimi \vec{v} faqatgina M nuqtaning joylashishiga bog'liq bo'libgina qolmay t vaqtga ham bog'liq. Cheksiz kichik dt vaqt oralig'ida (S) sirtning berilgan tomonlaridan oqib o'tuvchi suyuqlik miqdorini hisoblash masalasini qaraymiz. Sirtning (ds) elementi orqali o'tuvchi suyuqlik miqdori asosi ds va balandligi $v_n dt$ ga teng bo'lgan silindrni to'ldiradi. Agar ρ deb suyuqlik zichligini belgilasak, bu ham nuqtaning o'rni va t vaqtga bog'liq bo'ladi. ds orqali o'tuvchi suyuqlik massasi $\rho ds v_n dt$ teng.

Butun (S) sirt uchun

$$dt \iint_{(S)} \rho v_n ds$$

ga teng bo'ladi.

Suyuqlik oqimi Q

$$Q = \iint_{(S)} \rho v_n dS \quad (4.5)$$

integral orqali hisoblanadi.

4. Ostrogradskiy formulasi. Divergenziya. \vec{A} vektor maydon berilgan bo'lsin. (S) sirt bilan chegaralangan (V) jismni qaraylik. n orqali sirtga tashqi normalni belgilaylik. U holda Ostrogradskiy formulasiga ko'ra; agar $P = A_x, Q = A_y, R = A_z$ deb olsak, (S) sirt orqali \vec{A} vector oqimini uch karrali integral orqali ifodalash mumkin:

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} A_n ds &= \iint_{(S)} (A_x \cos \lambda + A_y \cos \mu + A_z \cos \nu) ds = \\ &= \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV. \end{aligned}$$

Uch karrali integral ostida turgan ifoda \vec{A} vektorning divergenziyasi (yoki tarqalishi) deyiladi va

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (4.6)$$

simvol bilan belgilanadi [3.4].

Shuning uchun Ostrogradskiy formulasi

$$\iint_{(S)} A_n dS = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{A} dV \quad (4.7)$$

ko'rinishda yoziladi.

Divergensiya skolyar kattalikka ega, uning aniqlanishiga ko'ra u koordinata sistemasiga bog'liq. Bu yetishmovchilikdan quyidagicha qutilish mumkin. M nuqtasi biror (S) sirtli (V) jism bilan o'raymiz va (4.7) formulani quyidagicha yozamiz:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{(V) \rightarrow M} \frac{\iint_{(S)} A_n dS}{V}. \quad (4.8)$$

Bu formula koordinata sistemasiga bog'liq emas.

Bu holda \vec{A} vektor maydonning $\operatorname{div} \vec{A}$ divergensiya skolyar maydonni hosil qiladi. (4.6) ta'rifdagi formulani Gomiton simvoli orqali quyidagich ham yozish mumkin:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}.$$

Bu erda ko'paytma sifatida skolyar ko'paytma olingan.

5. Vektor sirkulyatsiyasi. Stoks formulasi. Vixr. Biror $\vec{A}(M)$ vektor maydon berilgan bo'lsin.

Ta'rif 4.3. Ushbu qaralayotgan sohadagi ℓ chiziq bo'yicha

$$\int_{(\ell)} A_x dx + A_y dy + A_z dz = \int_{(\ell)} A_\ell d\ell$$

integral \vec{A} vektordan ℓ yo'nalish bo'yicha egri chizikli integral deyiladi. Yopiq chiziq bo'yicha olingan integral \vec{A} vektorning ℓ yo'nalish bo'yicha sirkulyatsiyasi deyiladi [7,8].

Agar \vec{A} maydon kuch maydoni bo'lsa, chizikli integral nuqta joylashtirilgan ℓ chiziq bo'yicha ish kuchini maydonini ifodalaydi.

Biror (ℓ) yopiq kontur bilan chegaralangan (S) sirtini qaraylik. U holda Stoks formulasiga ko'ra bu kontur bo'yicha \vec{A} vektorning sirkulyatsiyasi sirt integrali orqali ifodalanadi:

$$\int_{(\ell)} A_\ell d\ell = \iint_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos \lambda + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos \mu + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos \nu \right\} dS.$$

\vec{A} vektorning koordinata o'qlaridagi proeksiyasi bilan berilgan

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (4.9)$$

vektor \vec{A} vektorning vixri yoki rotori deyiladi va $rot\vec{A}$ simvoli bilan belgilanadi. Rotor so'zi inglizcha *rotation* so'zidan olingan bo'lib, aylanish degan ma'noni anglatadi.

Shunday qilib Stoks formulasi vektor formasida

$$\int_{(\ell)} A_\ell d\ell = \iint_{(S)} rot_n \vec{A} dS \quad (4.10)$$

ko'rinishda yoziladi.

Yuqoridagi vixr tushunchasini aniqlanishida oddiy kamchilik bor. U ham koordinata sistemasiga bog'liq. M nuqtadan chiquvchi ixtiyoriy n yo'nalishni olamiz.

M nuqtani n vektorga perpendikulyar (λ) konturli (σ) silliq sirt bilan u o'raymiz. U holda Stoks formulasiga ko'ra

$$\int_{(\lambda)} A_\lambda d\lambda = \iint_{(\sigma)} rot_n \vec{A} d\sigma.$$

Ikkala tomonini σ yuzaga bo'lamiz va limitga o'tamiz:

$$rot_n \vec{A} = \lim_{(\sigma) \rightarrow M} \frac{\int_{(\lambda)} A_\lambda d\lambda}{\sigma}.$$

\vec{A} vektor maydonning vixri $rot\vec{A}$ yana vektor maydonni tashkil etadi. Gomilton vektori orqali vixrni aniqlash mumkin va

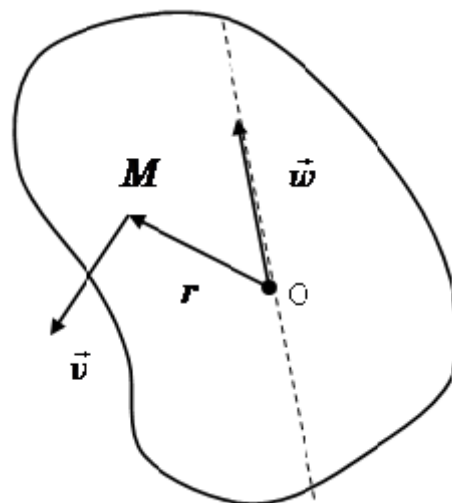
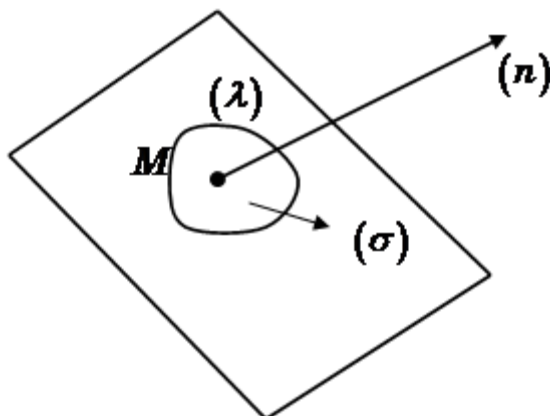
$$rot\vec{A} = \nabla \times \vec{A}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu erda ko'paytma vektor ko'paytmadir.

Misol. Biror qattiq jismning ixtiyoriy harakatini qaraylik. Agar O nuqtani fiksirlasak, kinematikada isbotlangani kabi ixtiyoriy vaqt momenti uchun jismning nuqtasini \vec{v} tezlik maydoni

$$\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

formula bilan aniqlanadi. Bu erda \vec{v}_O – O nuqtadagi tezligi, $\vec{\omega}$ – burchak tezligi, \vec{r} – O nuqta bilan ixtiyoriy M nuqtani tutashtiruvchi radius – vektor. Bu vektorning $Oxyz$ sistemaning o'qlaridagi proeksiyasi



$$v_x^0 + w_x z - w_z y, \quad v_y^0 + w_y z - w_x y, \quad v_z^0 + w_x z - w_y y$$

Agar (4.9) ifodadan foydalansak, vixrning bu maydondagi proeksiyasi bo'lsa, $2w_x, 2w_y, 2w_z$ ga egamiz. Shuningdek,

$$\vec{w} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}.$$

Shunday qilib, \vec{v} tezlik maydonining rotori burchak tezligini beradi.

XULOSA

Ushbu bitiruv malakaviy ishni o'rganish jarayonida quyidagi xulosalarga kelindi.

1. Uch karrali integrallarning hisoblash sohaga bog'liqligi va ularni hisoblash takroriy integrallarga keltirilishi o'rganildi.
2. Matematik analizning umumiy kursida ikki karrali integrallarni o'rganayotganimizda Grin formulasi bilan tanishganmiz. Bu formula ikki karrali integrallar bilan egri chiziqli integrallar orasidagi bog'lanishni ifodaladi.
3. Uning uch karrali integraldagi analogi Ostrogradskiy formulasi deb yuritilib, u uch karrali integrallarni sirt integrallari bilan bog'laydi. Ushbu bog'lanish o'rganildi.
4. Uch o'lchovli fazodagi koordinatalar sistemalari, ya'ni silindirik, sferik elliptik va boshqa sistemalar orasidagi bog'lanishlar o'rganildi.
5. Ushbu sistemalarda uch karrali integrallar hisoblandi. Ya'ni o'zgaruvchilarni almashtirish yordamida karrali integrallar misollar yordamida o'rganildi.
6. Uch karrali integralning mexanikada tadbiqlari o'rganildi hamda aniq misollar yordamida tekshirildi.
7. Integral hisobni matematik fizika va mexanika masalalarida qo'llaganimizda ko'proq vektor formadan foydalanish qulayroq bo'ladi. Shuning uchun vektor analiz tushunchalari hamda integral formulalarni vektor ko'rinishlarini o'rganildi.
8. Skolyar va vektor kattaliklarni uch o'zgaruvchili funksiyalar orqali ifodalab va bu funksiyalarning gradient tushunchasi, biror sirtidan o'tuvchi vektorlar oqimini karrali integrallar orqali ifodalanishi o'rganildi.
9. Vektor kattaliklar divergensiyasi o'rganildi hamda Ostrogradskiy formulasini vektor ko'rinishi o'rganildi.
10. Vektorlar serkulyatsiyasi hamda maydon rotori (vixr) o'rganildi. Ularni uch karrali integral orqali hisoblash formulasi misollar yordamida o'rganildi. Shuningdek Stoks formulasini vektor ko'rinishi olindi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. М. 367 с. 1987.
2. Курант К., Роббинс Г. Что такое математике? М., МЦРМО. 568 с. 2001.
3. Фехтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М. 662 с. 1974.
4. Азларов Т., Мансуров Х. Математик анализ асослари. Т. 1, 2-кисмлар. 1980.
5. Xudoyberganov G., Vorisov A.K., Mansurov X.T., Shoimqulov B.A. Matematik analizdan ma'ruzalar. T. 1,2-qismlar. 2010.
6. Демидович Б. П. Сборник и задач по математическому анализу. М. 624 с. 1997.
7. Рудин У. Основы математического анализа. М. Мир, 321 с. 1976.
8. Зорич В. А. Математический анализ: ч.II. — М. Наука, 640 с. 1984.
9. <http://www.roman.by/>, <http://www.vargen.mephi.ru/>
10. <http://www.lib.mexmat.ru/>, <http://www.ziyonet.uz/> saytlari.