ЛОГИКА В СРЕДНЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Одна из приоритетных ценностей образования - интеллектуальное развитие ребенка, важной составляющей которого является развитие словесно-логического мышления. Посему курс логики почти напрашивается в среднем образовании. Одно время в школе преподавали такой курс логики, но он был оторван от жизни и от математики. Когда курс логики убрали из среднего образования, проблема развития логического мышления учащихся перешла к математике, чему было несколько оснований. Вот какова была позиция самых математиков. В. Феллер во введении к своему известному учебнику по теории вероятностей отмечал: « В каждой дисциплине мы должны заботиться о различении трех сторон теории: а) формального логического содержания; б) интуитивных представлений; в)приложений. Характер дисциплины в целом и ее прелесть нельзя по настоящему оценить, не рассматривая эти три аспекта в их взаимосвязи».

О важности развития логического мышления учащихся писали такие известные математики, как А.Н.Колмогоров, Я.С.Дубнов, А.Я.Хинчин, Б.В.Гнеденко, Л.А.Калужнин [2-6].

Особая роль в развитии логического мышления учащихся отводилась этими и другими учеными геометрии, в которой, как ни в одной другой школьной математической дисциплине, все содержание строится на логических рассуждениях, что несомненно способствует развитию логического мышления учащихся. Развитие логического мышления всегда почиталось как одна из основных ценностей среднего математического образования и в педагогике математики, что нашло отражение в работах педагогического характера, и в нормативных документах. В связи с возникшей тенденцией – знакомить с логикой в курсе математики, в методической и учебной литературе появились многочисленные пособия по развитию логического мышления учащихся. Более того, сегодня в средние учебные заведения возвращается сам курс логики как элективный. На путях реализации этой тенденции необходимо сделать некоторые оговорки.

Во-первых, в психологии нет термина «логическое мышление», а есть термин «словесно-логическое мышление», и он понимается гораздо шире, чем в математическом образовании. Поэтому видимо, предпочтительно говорить о логической культуре учащегося (своеобразной интеллектуальной гигиене) и о возможностях математики при ее формировании. К тому же известно, что словесно-логическое мышление - отнюдь не единственный вид мышления и в определенном смысле не самый главный. Открытия совершаются не за его счет.

Во-вторых, мнение об исключительной роли математики в становлении логической культуры ученика вряд ли бесспорно. Так, в недавнем интервью главный редактор журнала «Квант» академик Ю. Осипян посчитал самой логичной из наук физику.

В-третьих, известен опыт психологов, которые в течение года проводили следующий эксперимент. Были отобраны две группы учащихся одинакового уровня развития. Одну группу обучали евклидовой геометрии, а другую - нет (в остальном разницы не было). В конце года каждая группа получила для решения один и тот же набор задач с юридическим содержанием, решение которых требовало рассуждений. Так вот, по результатам эксперимента «геометрическая» группа никакого преимущества не показала. Видимо, нужны другие способы проверки того, как обучение математике способствует развитию логической культуры. В целом проблема носит слишком общий характер. Попытаемся ее как-то уточнить и сузить. Логику можно воспринимать в трех аспектах. Есть:

- практическая логика, используемая в повседневной жизни. В ней существенен так называемый здравый смысл, личный опыт, контекст. Даже эмоциональная окраска и интонация имеют значение - они могут изменить смысл сказанного на противоположный;

- формальная логика, в которой изучают только формы мышления, полностью отвлекаясь от содержания. Именно здесь можно рассуждать о «черном снеге», способности верблюда «пролезать через игольное ушко» и т.п;

- математическая логика - серьезная наука, традиционная –раздел математики. В ней достаточно силен аспект формализации, но нет места бессодержательным предложениям.

Эти три ипостаси логического происхождения присутствуют в системе образования на всех ее этапах в том или ином виде, довольно гибко переплетаясь.

Возникает в связи с этим вопрос, что из формальной и математической логики следует изучать в процессе обучения, чтобы практическая логика не подводила? Несмотря на декларации важности формирования логической культуры и попытки реализации их в обучении математике, заметить, что «на выходе» не получается так, как хотелось бы.

Логических ляпсусов даже в обычной речи предостаточно. Вот несколько реальных тому примеров.

Пример 1. Недавно в одном из современных российских сериалов можно было услышать обмен репликами между двумя дамами.

Первая дама: «Если мне понравится мужчина, то он обязательно негодяй.» Вторая дама: «Уж не хочешь ли ты сказать, что если мужчина тебе не нравится, то он хороший человек?» Первая дама: «Вот именно!»

Пример 2. Встречается такое изречение: «Согласно последним научным данным, чем выше уровень интеллекта у человека, тем меньше он смотрит телевидение».

По-нашему мнению, все наоборот: чем больше смотрит человек телевидение, тем ниже уровень его интеллекта.

Пример 3. Вот что можно прочитать, скажем, у Лао Цзы : «Истинные слова неприятные: приятные слова не истинны», «Если у вас есть время, то не будет денег. Если у вас есть деньги, то не будет времени».

Мы видим, как смешиваются прямые утверждения и противоположные; обратные и им противоположные и т.п.

В литературном жанре это, видимо, приемлемо, но в практической, особенно в математической, деятельности требуется большая точность.

Еще один пример из того же источника.

«Негативные ожидания порождают негативные результаты. Позитивные ожидания порождают негативные результаты». Здесь второе предложение равносильно такому: «Позитивные результаты порождены негативными ожиданиями». Но согласно первому предложению негативные ожидания порождают негативные результаты.

Аналогичные вариации:

1) всем детям полезны витамины. Всем взрослым полезны витамины. Второе предложение равносильно следующему: Если кому-то не полезны витамины, то это не взрослый, т.е. ребенок. А всем детям, согласно первому предложению, полезны витамины. И получается, что, если кому-то полезны витамины, то они ему же и не полезны, что-то здесь не так;

2) в выпуклом четырехугольнике сумма углов равна 360°. В невыпуклом четырехугольнике сумма углов равна 360°. Отсюда, следуя той же схеме рассуждений, получаем ляпсус;

3) известному изречению «Кто не рискует, тот не пьет шампанское» равносильно такое: «Кто пьет шампанское, тот рискует».

Можно предложить учащимся разобраться в такой простенькой ситуации. Есть ли смысловая разница в предложениях: «Маша гуляет тогда, когда ей разрешила мама» и «Маша гуляет только тогда, когда ей разрешила мама». А если разница есть, то в чем она?

Если мы видим гуляющую Машу, то какие из этих предложений соответствуют ее гулянию? Можно заранее предсказать. что мнения разделятся.

В свое время расхождение между провозглашаемой важностью логической культуры и тем, что мы видим «на выходе», было замечено А.А. Столяром. Он высказал мнение о том, что традиционных средств, используемых в учебной математике, недостаточно для обеспечения должной логической культуры учащихся и необходимо внедрение в изучаемый курс математики элементов математической логики.

Курс информатики только заостряет проблему. Как без использования основ математической логики объяснить учащимся компьютерную технологию?

К этому можно добавить дополнительные соображения. Один из важных этапов познания - понимание. Понимание предложения, в том числе и математического, предполагает оценку истинности не только самого предложения, но и его отрицания, его обращения (обратного предложения) и контрапозиции (предположения, противоположного обратному).

Без осознания структуры предложения невозможно грамотно построить ни его отрицание, ни обращение, ни контрапозицию. Можно проиллюстрировать возникающие трудности на примере построения отрицания (в математике оно необходимо, в частности, при доказательстве от противного). Проблемы перед учащимися возникают даже тогда, когда требуется сформулировать отрицание в самых простых ситуациях, далеких от математики.

Когда мы с чем-то не согласны, то считаем предложение неверным. Тогда какое предложение мы считаем верным?

Его отрицание и как его сформулировать? Главный вопрос - где располагать частицу «не» и как от нее при необходимости избавится? Возьмем такие предложения:

1) Крокодилы живут в Африке;

2) Крокодилы не живут в Гренландии;

Какое будет их отрицание?

Еще сложнее, когда предложение имеет форму конъюнкции, дизъюнкции или импликации. Можно увидеть на лицах учащихся отсвет недоумения, предложив им сформулировать верное отрицание, например, таких предложений:

1. Число 6 делится на 3 и число 5 делится на 3.
2. Число 5 делится на 3 или число 7 делиться на 3.
3. Число 5 делится на 3 либо число 7 делится на 3 (строгая дизъюнкция).
4. Если число 6 делится на 3 ,то число 5 делится на 3.
5. Данная фигура -квадрат или прямоугольник.
6. Данная фигура - прямоугольник и квадрат.
7. Данная фигура - квадрат либо прямоугольник.
8. Данная фигура - не квадрат и даже не прямоугольник.
9. Данная фигура - не только квадрат или прямоугольник.
10. Данная фигура - только не квадрат или прямоугольник.

11. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.
12. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины.
13. Если функция четная или нечетная, то ее график симметричен относительно оси ординат либо начала координат.
14. Если стороны четырехугольника равны, а диагонали взаимно перпендикулярны, то он является ромбом.
15. Два равновеликих треугольника равны, если они имеют пару соответственно равных сторон.

Средняя учебная математика - школа точного мышления, ее постижение начинается в 6-7 лет и длится непрерывно более десяти лет. Для точности мышления и понимания необходима точность языка. Точность естественного языка не всегда достаточна, слова и фразы не всегда толкуются однозначно, огромную роль играет контекст. Напомним хрестоматийные пример, демонстрирующий значение контекста.

Приказ «Казнить нельзя помиловать», написанный без запятой, привел в недоумение его исполнителя. Но стоило ему учесть(подумать), и он понял бы, что запятая после первого слова неуместна, ибо не добавляет новой информации (в приказах объясняют причину). А запятая после второго слова как раз существенна, поскольку указывает, что делать дальше.

Прежде, чем говорить о толковании математических предложений напомним, что предложение с переменной превращается в предложение без переменной в результате «навешивания» на последнюю, квантора (всеобщности или существования), после чего уже можно говорить о его истинности или ложности. Приведем пример.

Известное выражение «Цель оправдывает средства», как правило, имеет негативный оттенок. Однако если на переменные «цель» и «средства» «навесить» кванторы, то в зависимости от их расстановки возможны четыре варианта толкования. И каждый имеет смысл. А выбор верного варианта - уже вне логики.

Сложилось так, что в формулировках математических предложении кванторы часто «не звучат» в явном виде. Вместо квантора «существования» употребляются такие слова как «найдется»(в круге найдется хорда, которая делит его площадь пополам) или «есть» (в остроугольном треугольнике есть такая точка, из которой все его стороны видны под равными углами).

Еще хуже обстоят дела с квантором «всеобщности», который, как уже отмечалось, опускают. Например, его нет в теореме о площади треугольника (Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту; а сколько таких оснований?) или в формуле квадрата, суммы (о каких числах в них говорится; о любых?) «Навешивание» кванторов порой необходимо для понимания условия задачи.

Вот задача на построение: «Вписать квадрат в треугольник». Как это понимать? Кванторы опущены, значит, на каждую переменную полагается квантор всеобщности. Получается чепуха, а не задача! Любой квадрат не может быть вписан в любой треугольник. Тогда о чем идет речь?

Техника работы с кванторами позволяет упростить формулирование отрицания: можно уже не напрягать умственные способности, а работать чуть ли не механически. Вспомним определение последовательности, не имеющей предела, или функции, не являющейся периодической. В работе с кванторами требуется соблюдать осторожность, квантор «всеобщности» и квантор «существования» в предложении с двумя переменными нельзя произвольно менять местами (учащиеся довольно часто допускают такую ошибку). Например, утверждать, что существует квадрат, который можно вписать в любой треугольник, - глупость. А сказать, что какой бы не был треугольник, существует квадрат, который в него можно вписать – значит фактически сформулировать задачу на построение.

Союзы «и, или, если» употребляются как в обычной, так и в математической речи. В естественном языке они придают множество смысловых оттенков отдельным словам или целым предложениям. В математике - трактуются однозначно. Отсюда - трудности в преподавании.

Так, союз «и» в обыденной речи понимается двояко. Надпись «Места для детей и инвалидов» не означает, что на данное место может претендовать только больной ребенок. А фраза: «К доске пойдут Вася и Федя» означает, что у доски окажутся два ученика.

То же касается союза «или». Фраза «Сегодня в шесть часов вечера я буду в кино или на стадионе» подразумевает только одну из двух указанных возможностей, в то время как фраза «Сегодня в шесть часов вечера я буду смотреть кино по телевизору или лежать на диване» не исключает совмещения обоих занятий.

Суть проблемы в том, что математический текст излагается учащимся на естественном языке, и требуемая точность понимания математического текста, «зависает» из-за неоднозначности толкования фраз естественного языка. Поэтому необходимы четкие договоренности. Где же их взять? Разве что позаимствовать у формальной или математической логики. В математическом тексте союз «и» между двумя предложениями трактуется как их конъюнкция, а посему предполагает совместное рассмотрение двух условий, например: «Если для параллелограмма существует описанная и вписанная соответственно около него и в него окружности, то он является квадратом».

В свою очередь союз «или» между двумя предложениями трактуется как их дизъюнкция:

- нестрогая, если допускается одновременное выполнение двух условий. Употребляем «или», например: около треугольника или правильного многоугольника можно описать окружность;
- строгая, если выполняется только одно из условий. Говорим «либо», например: данные прямые параллельны либо (или)скрещиваются.

Заметим, что в математическом языке нет надобности в повторяющихся союзах естественного языка: «и – и» (и Юлдаш, и Амин -оба подойдите ко мне), а также либо - либо (кто-то один: либо Юлдаш, либо Амин). Когда такие союзы встречаются в математическом тексте, приходится уточнять их значение.

Толкование союза «если» в живом языке и в математике опять-таки различны. В обычном языке за ним может скрываться как достаточность («Родители отпустят меня на футбольный матч, если я получу за контрольную пятерку») так и равносильность («Футбольная команда выиграет матч, если забьёт больше мячей в ворота соперника»), а в математике - только достаточность.

Равносильности математике соответствует союз «если и только если», который в определениях частенько опускают, предпочитая употреблять «если». И что получается? Типичный пример: «прямая параллельна плоскости, если она не имеет с этой плоскостью общих точек». Приходится объяснять учащимся, что за этим «если» скрываются два утверждения - прямое и обратное. Другой пример. высказывание «Прямоугольник - квадрат, если у него соседние стороны равны» предполагает истинность не одного утверждения, а двух.

Итак, благодаря формальной логике можно добиться точности в употреблении союзов, правда, на практике это делается не всегда. Более того, внедрение формальной логики может внести (и вносит) некую сумятицу в молодые умы.

Приведем примеры того, как путаница в терминологии и обозначениях сказывается на решении уравнений, неравенств, систем (дальше для краткости будем говорить только об уравнениях), если трактовать их как предикаты [31,32].

Такая точка зрения очень четко выражена Л.В.Джанджтавой: «В действительности алгебраические задачи с переменными относятся к математической логике и в ней они называются предложениями с переменными. Например, уравнение можно определить как предложение, имеющее вид равенства между двумя выражениями, содержащими переменные».

При решении уравнений авторы многих пособий, в том числе и Л.В.Джанджтава, при переходе от имеющегося уравнения к следующему как выводному (неравносильному) говорят, что второе уравнение есть следствие первого, и ставят знак =>.

По существу происходит отказ от импликации предикатов, речь идет об их следовании, по сути об отношении включения между двумя множествами. Однако при решении уравнений не исключен случай отсутствия корней. Здесь ясно просматривается противоречие: из ложной посылки не бывает следствий. Однако пусть множество включено в любое множество. Так что в этом случае возвращаться к толкованию процесса решения уравнения как к импликации предикатов? Есть два выхода из положения. Первый - формальный: трактовать уравнение как предикат и ставить между уравнениями знак импликации (—>). Второй вариант - не рассматривать уравнение как предикат, считать, что оно предполагает некий императив (само по себе равенство x=x+1), можно полагать бессодержательным. Мало ли что можно написать, если не сказано, что делать дальше. Поэтому, рассматривая уравнение, говорят:«решить», «найти». При этом надо оговорить, что термин «следует» («следствие») при решении уравнений означает не то же самое, что в логике из-за возможного случая отсутствия решения исходного уравнения. Второй вариант с соответствующими поправками переносится на равносильность и использование знака <=>.

Одно замечание о записи ответа в уравнении. Ответ в уравнении естественно записывать в «том же стиле», в каком было дано само уравнение. Например, ответ в уравнении 2x = 4 предпочтительнее записать
x = 2, нежели {2} или X={2}. Запись ответа в виде множества, разумеется, возможно. Однако она менее естественна, особенно когда речь идет об ответе тригонометрического уравнения.

Тут же уместно сказать об употреблении логической символики. Это стало достаточно привычным, но увы, иногда делается неряшливо. Учащимся надо объяснить, что знаки символической логики - это не знаки стенографии и в серьезной работе как таковые недопустимы. Учащиеся, как правило, особенно любят использовать в таком качестве кванторы.

Зачастую приходится обсуждать с учащимися расхождение формального и содержательного, это возникает при встрече с задачей, условие которой противоречиво.

Георгий Злоцкий,
доктор педагогических наук, профессор СамГУ.
Шерзод Хайитмурадов,
аспирант СамГУ