ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЬЛИМ ВАЗИРЛИГИ
ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

Қўлёзма ҳуқуқида

УДК.519.21

Нигорахон Олимовна Саидованинг

« Икки ўлчовли Романовский тақсимотининг асимптотик хусусиятлари»

мавзусидаги

МАГИСТРЛИК ДИССЕРТАЦИЯСИ

Илмий раҳбар: физика-математика фанлари номзоди, доцент А.Юсупова

Фарғона – 2012 й

Магистрлик диссертатцияси умумий математика кафедраси умумий йиғилишида муҳокамадан ўтган

Илмий раҳбар: А.Юсупова

Тақризчи : М.Мамажонов

Р Е Ж А

КИРИШ

I-БОБ. Икки ўлчовли Романовский тақсимоти хоссалари, теоремалар

1.1-§. Икки ўлчовли Романовский тақсимоти хоссалари

1.2-§. Икки ўлчовли Романовский тақсимоти ҳақидаги теоремалар

II-боб. Икки ўлчовли Романовский тақсимоти ҳақидаги теоремалар исботлари.

2.1-§. 1-теорема исботи.

2.2-§. 2-теорема исботи.

2.3-§. 3-теорема исботи.

2.4-§. 4-теорема исботи.

ХУЛОСА

Фойдаланилган адабиётлар

КИРИШ

Ақлий меҳнат билан жисмоний меҳнат ўртасидаги тафовутлар камайишининг жадаллашиб бораётганлиги, бўш вақтнинг кўпаётганлиги, мамлакатимиз бутун аҳолисининг билим ва маданият даражасининг ошаётганлиги ва шу муносабат билан кишилар маънавий талабаларининг ўсаётганлиги таълим тизимига жуда катта таъсир кўрсатаётир. Бугунги кунда мустақил фикр юрита оладиган ва мустақил харакат қила оладиган ёш авлодни тарбиялаш асосий вазифалардан ҳисобланади. Шунинг учун ҳам олимлар талабаларда ўқув фаолиятига ижодий ёндашишни ривожлантириш йўлларини қунт билан изламоқдалар. Булар жамиятни тарбиялашнинг янги тузилмасини яратишдан иборат умумий жараённинг давомидир.

Ўқув жараёнини ўқувчиларда фақат репродуктив фикрлашни эмас, балки шу қаторда ўқувчиларни ижодий фикрлашини ҳам шакллантирадиган қилиб, ташкил қилиш муҳим ҳисобланади. Шунга кўра, дидактик изланишларга муаммоли ёндашиш тушунчаси кириб келди. Таълимдаги муаммолиликни ўқувчиларнинг ўқув муаммосини англашлари ва ҳал қилишлари сифатида тушунамиз. Таълимдаги муаммолиликнинг муҳим хусусияти муаммоли вазиятни вужудга келтириш ҳисобланади. Авваламбор муаммоли вазият ҳаётий далиллар ва воқеалар асосида таркиб топтирилади, чунки бу вазият табиий шаклга қанча мос бўлса, ўқувчиларни фаоллаштириш ва муаммони ҳал қилишга жалб этиш имконияти шунча катта бўлади. Таълимдаги муаммолилик анъанавий дидактиканинг тамойиллари ва қоидаларини инкор қилмайди, балки уларга таянади. Таълимга муаммоли ёндашишни жорий этишдан мақсад ҳозирги таълим жараёнини ўқувчиларнинг ижодий фиклашини фаол ривожлантирадиган методлар ва усуллар билан тўлдиришдир.

Ўтказилган назарий ва амалий изланишлар шуни кўрсатдики, малакали мутахассислар тайёрлаш сифатини кўп жиҳатдан эҳтимоллар назариясини самарали ўқитиш белгилайди. Махсус фанларни ўқитишнинг ўзига хос хусусиятларидан бири уларнинг умумтаълим фанлари негизида ўқитилиб, ўқувчиларнинг ушбу йўналишдаги билимларини кенгайтиришида намоён бўлади. Ўқув ва ишлаб чиқариш амалиётлари эҳтимоллар назарияси билан ўзаро боғлиқ ҳолда олиб борилади. Эҳтимоллар назариясини ўқитиш методларини танлаш, ўқув мақсадларини белгилаш ўзига хосликни талаб этади. Эҳтимоллар назариясини ўқитиш методикасига доир ўтказилган изланишлар шуни кўрсатдики, ўқувчиларда касбий билим ва кўникмаларни шакллантиришда муамммоли ўқитиш технологияси яхши натижа беради. Муаммоли ўқитиш технологияси – ўқувчиларнинг билим имкониятлари, ижодий қобилиятлари ва амалий кўникмаларини ўрганиш даражаларини ривожлантиришда ижобий самара беради.

Эҳтимоллар назариси махсус фан ўқув дастурларига мувофиқ ўтиладиган маъруза, амалий машғулот ва лаборатория дарслари учун тузилган тарқатма материалларда келтирилган муаммоли топшириқлар бўйича талабалар мустақил равишда тайёрлаб келадиган саволлар уларда ижодий фикрлашни уйғотишда муҳим роль ўйнайди.

Эҳтимоллар назариясида дискрет тақсимланган тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонунларини ўрганишга кейинги вақтларда катта эътибор берилмоқда. Чунки узлуксиз тақсимланган тасодифий миқдор тақсимот қонуни, айниқса нормал тақсимот қонуни хар тарафлама ўрганилган. Бироқ дискрет тақсимот қонунлари (Пуассон ва биномиал тақсимотларни ҳисобга олмаганда) адабиётларни кам ёритилган.

Ушбу магистрлик диссертация ишида Романовский (тескари гипергеометрик) тақсимотининг баъзи асимптотик хусусиятлари ўрганилади.

Бир ўлчовли Романовский тақсимотнинг асимптотик хусусиятлари ва улар учун минимакс масалалар тўла ўрганилган ([24]-[28])

Икки ўлчовли Романовский тақсимотининг асимптотик хусусиятларини ўрганиш ҳам назарий аҳамиятга эгадир. Бу тақсимотнинг вариация бўйича турли тақсимотларга яқинлашиши ҳақидаги теоремаларни исботлаш магистрлик диссертация ишининг асосий мақсадидир.

Бу теоремаларни исботлашда тўғри асимптотик таҳлил қилиш ва тақсимотлар четлардаги қийматларни баҳолаш усулларидан фойдаланилди.

1-БОБ. ИККИ ЎЛЧОВЛИ РОМАНОВСКИЙ ТАҚСИМОТИ ХОССАЛАРИ, ТЕОРЕМАЛАР

1-§. РОМАНОВСКИЙ ТАҚСИМОТИ, ХОССАЛАРИ

В.И.Романовский [17] иккита танланманинг бир жинсли эканлигини, яъни битта бош тўпламга қарашли эканлигини кўрсатиш учун қуйидаги критерий (мезон) ни киритган.

Айтайлик,

$$x_1 \le x_2 \le .... \le x_N$$

ва

$$y_1 \le y_2 \le ..... \le y_M$$

иккита тартибланган N ва M хажмли танланмалар берилган бўлсин.

x_{n+1} билан биринчи танланманинг n+1- ҳадини белгилаймиз.(n=0,1,2,….,N-1)

μ шундай y_i лар соники, улар x_{n+1} дан кичик, яъни

$$y_\mu < x_{\mathrm{n}+1}$$

ўринли бўлсин. μ тасодифий миқдор сифатида иккинчи танламадаги x_{n+1} дан кичик бўлмаган варианталар сонини белгиласак, μ нинг $к$ га тенг қиймат қабул қилиш эҳтимоли

$$P(\mu = k) = R(k) = R(k, n, N, M) =$$

$$=\begin{cases} \dfrac{C_{n+k}^{n}C_{N+M-n-k-1}^{N-n-1}}{C_{N+M}^{N}}, агар \ \mathrm{k}=\overline{\mathrm{O,M}} \\ o, \ агар \qquad\qquad \mathrm{k}<0, \qquad \mathrm{k}>\mathrm{M} \end{cases}$$

$$N\geq 1,\ M\geq 1,\ n=0,1,2,........,N-1$$

каби топилади.Бу тақсимот тескари гипергеометрик (Романовский) тақсимотидир.

Романовскийнинг кўрсатилган мақоласида бу тасодифий микдорларнинг сонли характеристикалари, жумладан, дисперсияси, ковариацияси,корреляция коэффициенти ва бошқалар топилган [17]

$$E(\mu)=\frac{(n+1)\,M}{N+1}$$

$$D(\mu)=\frac{(n+1)(N-n)}{(N+1)(N+2)}\left(\frac{M^{2}}{N+1}+M\right)$$

В.И. Романовсикий кўрсатишича, бу тақсимот бош тўпламнинг қандай тақсимот қонунига эга эканлигига боғлиқ эмас.

В.И.Романовский тақсимоти (1) нинг асимтотик ҳусусиятлари ва бу асимптотик хусусиятлар учун минимакс масалалар [24] да келтирилган, яъни, фараз қилайлик

$$\alpha=\frac{n}{N} \quad \text{ва} \quad p=\frac{M}{N+M}$$

бўлсин, у ҳолда *R(k)* ёки *R(M-k)* лар вариация бўйича қуйидаги тақсимотларга яқинлашади:

Нормал тақсимот-

$$\Pi_1(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\ e^{-\frac{u^2}{2}},$$

$$u=\frac{kq-np}{\sigma},\ k=0,1,2,\ldots\ldots$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\alpha\,\beta\ p(N+M)}{q}}\,,\beta=1-\alpha\quad q=1-p$$

Биномиал тақсимот-

$$\Pi_2\,(k)=\begin{cases} C_M^k\ \alpha^k\ \beta^{M-k}\ ,k=\overline{O,M} \\ 0, \qquad k>M \end{cases}$$

Пуассон тақсимотлари-

$$\Pi_3\,(k)=\frac{(np)^k}{k!}\ e^{-np},$$

$$\Pi_4\,(k)=\frac{[(N-n)\,p]^k}{k!}\ \ e^{-(N-n)\,p}\ ,$$

$$k=0,1,2,\ldots\ldots$$

Тескари биномиал тақсимотлар -

$$\Pi_5(k) = \frac{(k+n)!}{k!n!} \; p^k \, q^{n+1}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots\ldots.$$

$$\Pi_6(k) = \frac{(k+N-n-1)!}{k!(N-n-1)!} \; p^k \, q^{N-n}$$

$$k = 0, 1, 2, \; \ldots\ldots\ldots.$$

Эрланг тақсимотлари -

$$\Pi_7(k) = \frac{(kq)^n \, q}{n!} e^{-kq}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots..$$

$$\Pi_8(k) = \frac{(kq)^{N-n-1} \, q}{(N-n-1)!} e^{-kq}$$

$$k = 0, 1, 2, \;\; \ldots\ldots\ldots.$$

Бета- тақсимот-

$$\Pi_9(k) = \begin{cases} \dfrac{N!}{n!(N-n-1)!} \left(\dfrac{k}{M}\right)^n \left(1 - \dfrac{k}{M}\right)^{N-n-1} \dfrac{1}{M}, & k = \overline{O, M} \\ 0, \qquad k > M. & \end{cases}$$

[24]- [28] да *R(k)* учун минимакс масала ҳал қилинган, яъни

$$\sup_{0<\alpha,p<1} \min_{i=\overline{1,9}} \rho(N,M,n,\gamma) = \lambda(\gamma)(N+M)^{-\frac{2\gamma-1}{4\gamma}} + o((N+M)^{-\frac{2\gamma-1}{4\gamma}})$$

Бу ерда

$$\rho(N,M,n,\gamma) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left|R(k) - \Pi_{\mathrm{i}}(k)\right|^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \qquad i=\overline{1,9} \quad , \quad \gamma \geq 1$$

$$\lambda(\gamma) = \frac{1}{12\sqrt{\pi}}\left(\int \left|u^3 - 3u\right|^{\gamma} e^{-\frac{\gamma u^2}{2}} du\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

R((*μ,ν*) нинг асимптотик ҳулқини ўрганиш катта қизиқиш уйғотади.

Ушбу диссертация икки ўлчовли Романовский тақсимотини, яъни ***R((****μ,ν*) ни ўрганишга бағишланган.

Айтайлик

$$x_1 \leq x_2 \leq ..... \leq x_N$$
$$y_1 \leq y_2 \leq ..... \leq y_M$$

-иккита тартиблашган танланмалар берилган бўлсин. Биринчи танламадан x_{n+1} ва x_{n+m+2} варианталарни танлаб оламиз. У холда биринчи танламада x_{n+1} дан кичик *n* та варианталар бўлади. x_{n+1} дан катта ва x_{n+m+2} дан кичик варианталар сони $m+1$ та ва x_{n+m+2} дан катта варианталар сони *N-n-m*-2 та бўлади. ξ_1 тасодифий миқдор сифатида иккинчи танламадаги x_{n+1} дан кичик бўлмаган варианталар сонини, ξ_2 тасодифий миқдор сифатида x_{n+1} дан катта, x_{n+m+2} дан кичик бўлган варианталарни сонини белгилаймиз.

ξ_1, ξ_2 тасодифий миқдорларнинг μ;ν га тенг бўлиш эҳтимоли:

$$P(\xi_1=\mu: \quad \xi_2=\nu)=R(\mu,\nu,n,m,N,M)=R(\mu,\nu)=$$

$$=\begin{cases} \dfrac{C_{m+\mu}^{m}C_{n+\nu}^{n}C_{N+M-n-m-\mu-\nu-2}}{C_{N+M}^{N}} \text{агар} & \mu, \quad \nu=\overline{0,\mathrm{M}}, \quad \mu+\nu=\overline{0,\mathrm{M}} \\ 0, \qquad \text{агар} & \mu,\nu>M, \quad \mu,\nu<0 \end{cases},$$

Қуйидаги белгилашларни киритайлик

$$\alpha_1=\frac{m}{N},\ \alpha_2=\frac{n}{N},\ \beta_1=\frac{N-m}{N},\ \beta_2=\frac{N-n}{N}$$

$$p=\frac{M}{N+M}, \quad q=\frac{N}{N+M}$$

$$r=-\sqrt{\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2}},\ \sigma_\mu=\sqrt{\frac{\alpha_1\beta_1 p(N+M)}{q}},\ \sigma_\nu=\sqrt{\frac{\alpha_2\beta_2 p(N+M)}{q}}$$

$$u=\frac{\mu-\frac{mp}{q}}{\sigma_\mu\sqrt{1-r^2}}, \quad V=\frac{\nu-\frac{np}{q}}{\sigma_\nu\sqrt{1-r^2}}$$

1. 2-§. Икки ўлчовли Романовский тақсимоти ҳақидаги теоремалар

1-теорема. Айтайлик $p=\frac{M}{N+M}\to 0$, $\sigma_\nu=\sqrt{npq}\to\infty,$ у холда

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|R(\mu,\nu)-\Pi_1(\mu,\nu)\right|=\lambda p+p0\left(\min(1,\frac{1}{\sqrt{\alpha_0\beta_0 M}})\right)$$

бўлади. Бу ерда

$$\Pi_1(\mu,\nu)=\frac{M!}{\mu\,!\,\nu\,!\,(M-\mu-\nu)\,!}\alpha_1{}^{\mu}\alpha_2{}^{\nu}(1-\alpha_1\ -\alpha_2\ )^{M-\mu-\nu}$$

-икки ўлчовли полиномиал тақсимот,

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|1-u^2\right|e^{-\frac{u^2}{2}}du=0{,}96788......,$$

$$\alpha_0=\min(\alpha_1,\alpha_2)\quad,\beta_0=1-\alpha_0$$

2-Теорема. Айтайлик, $N\to\infty,$ $\alpha_0\to 0$ бўлсин, у ҳолда

$$\sigma=\lambda\alpha_0+\alpha_0 0\left(\min\left[1,\frac{1}{\sqrt{(N+M)pq}}\right]\right)$$

бўлади. Бу ерда

$$\sigma=\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left|R(\mu,\upsilon)-\Pi_2\quad(\mu,\upsilon)\right|$$

$$\Pi_2(\mu,\nu)=\frac{\mathrm{N}!}{\mathrm{n}\,!\mathrm{m}!(\mathrm{N}-\mathrm{n}-\mathrm{m}-2)!}\alpha_1^n\alpha_2^m(1-\alpha_1-\alpha_2)^{N-n-m-2}$$

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|1-u^2\right|e^{-\frac{u^2}{2}}\ du=0{,}96788.....$$

$$\alpha_0=\min(\alpha_1,\alpha_2),\beta_0=1-\alpha_0$$

3-теорема: Айтайлик

$$p=\frac{M}{N+M}\to 0,\qquad \sigma_\upsilon=\sqrt{npq}\to\infty.$$

у ҳолда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|R(\mu,\nu)-\Pi(\mu)\times\Pi(\nu)\right|=$$

$$=\lambda\ p+\frac{\lambda_1}{\sigma}+O(\frac{1}{\sigma^2})+O(p^2).$$

бу ерда

$$\Pi(\mu)=\frac{(mp)^{\mu}}{\mu!}e^{-mp},$$

$$\Pi(V)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\upsilon}}e^{-\frac{\nu^2}{2}},$$

$$V=\frac{\nu-np}{\sqrt{npq}},$$

$$\sigma_{\nu}=\sqrt{npq},$$

$$\lambda_1=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\nu^3-3\nu\right|e^{-\frac{\nu^2}{2}}d\nu=0{,}396......$$

4-теорема. Айтайлик $N\to\infty,\quad M\to\infty,\quad \sigma_{\nu}\to\infty,\quad \alpha_1\to 0,\quad p\to p_0$

У ҳолда

$$\sum\sum\left|R(\mu,\nu)-\Pi_3(\nu)\,\Pi_4(\mu)\right|\ =\lambda_2\alpha_1+\frac{\lambda_1(p,\ \alpha_2\alpha_1)}{\sigma_{\nu}q}+O({\alpha^2}_1+\frac{1}{\sigma_{\nu}^2})$$

Бу ерда

$$\Pi_3(\nu)=\frac{(nq)^{\nu}}{\nu!}\ \exp\{-nq\}\quad ,k=1,2,......$$

$$\Pi_4(\mu)=\frac{1}{\sigma_{\varpi}\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{V^2}{2}\}\qquad\qquad U=\frac{\mu-mq}{\sigma_{\mu}q}$$

$$\lambda_2=\lambda_2\,(p,\,\alpha_1\ ,\alpha_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\left|V^3(1+p)(1-2\alpha_2-\alpha_1)-3V(q(1-\alpha_1)-2\alpha_2)\right|\exp\{\,-\frac{V^2}{2}\}dV$$

5-теорема. Айтайлик , $M\to\infty,\quad \sigma_{\mu}\to\infty,\quad \alpha_2\to 0,\ p\to 0$

У ҳолда

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|R(\mu,\nu)-\Pi_5\,(\mu)\,\Pi_6\,(\nu)\right|\ =\lambda_2(\alpha_2+p)+O(\alpha_2^2\ +p^2)$$

Бу ерда

$$\Pi_5(\mu)=\frac{(\frac{kq}{p})^{N-n-1}\frac{q}{p}}{(N-n-1)!}\ \exp\{\,-\frac{kq}{p}\}\ \ ,k=1,2,......$$

Эрланг тақсимоти,

$$\Pi_6(\nu)=\frac{1}{\sigma_{\nu}\sqrt{2\pi}}\exp\{\,-\ \frac{V^2}{2}\}\qquad\qquad U=\frac{\mu-nq}{\sigma_{\nu}q}$$

-нормал тақсимот.

6-теорема. Айтайлик , $M\to\infty,\quad \sigma_{\nu}\to\infty,\quad \alpha_1\to 0,\ p\to 0$

У ҳолда

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|R(\mu,\nu)-\Pi_6\,(\mu)\,\Pi_7\,(\nu)\right|\ =\lambda_2(\alpha_1+p)+O(\alpha_1^2\ +p^2)$$

Бу ерда

$$\Pi_7(v) = \frac{(n+k)!}{n!k!} \quad p^{n+1}q^k \quad ,k = 1,2,......$$

тескари-биномиаль тақсимот, $\Pi_6(\mu)$- Гаусс тақсимоти

II-боб. Икки ўлчовли Романовский тақсимоти ҳақидаги теоремалар исботлари.

1-теорема. Айтайлик $p=\frac{M}{N+M}\to 0$, $\sigma_\nu=\sqrt{npq}\to\infty,$ у холда

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|R(\mu,\nu)-\Pi_1(\mu,\nu)\right|=\lambda p+p0\left(\min(1,\frac{1}{\sqrt{\alpha_0\beta_0 M}})\right)$$

бўлади. Бу ерда

$$\Pi(\mu,\nu)=\frac{M!}{\mu!\,\nu!\,(M-\mu-\nu)!}\alpha_1^{\ \mu}\alpha_2^{\ \nu}(1-\alpha_1-\alpha_2)^{(M-\mu-\nu)!}$$

-икки ўлчовли полиномиал тақсимот,

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|1-u^2\right|e^{-\frac{u^2}{2}}du=0{,}96788......,$$

$$\alpha_0=\min(\alpha_1,\alpha_2)\quad,\beta_0=1-\alpha_0$$

Исбот. Қуйидаги белгилашлар киритайлик:

$$\chi^2=u^2+v^2$$

$$y=\mu-\frac{mp}{q}$$

ва

$$z=\nu-\frac{np}{q}$$

Айтайлик μ,ν индексли йиғиндилар $\chi^2<\sigma_0$ $\chi^2\geq\sigma_0$ $(\sigma_0=\min(\sigma_\mu,\sigma_\nu))$ шартларни қаноатлантирсин ва мос равишда уларни δ_1 ва δ_2 лар билан белгилайлик .

δ_2 ни баҳолайлик.

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\mu - \frac{mp}{q})^4 \Pi(\mu,\nu) = 3\alpha_1^2\beta_1^2 M^2 + (6\alpha_1^4 + 12\alpha_1^3 - 7\alpha_1^2 + \alpha_1)M$$

ва $\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu - \frac{np}{q})^4 \Pi(\mu,\nu) = 3\alpha_2^2\beta_2^2 M^2 + (6\alpha_2^4 + 12\alpha_2^3 - 7\alpha_2^2 + \alpha_2)M$

У ҳолда

$$\sum_{u^2+v^2\geq\sigma_0}\Pi(\mu,\nu) \leq \sum_{u^2+v^2\geq\sigma_0}\frac{(u^2+v^2)^2}{\sigma_0^2}\Pi(\mu,\nu) \leq \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\frac{y^4}{\sigma_0^2\sigma_\mu^4} + \frac{2y^2z^2}{\sigma_0^2\sigma_\mu^2\sigma_\nu^2} + \frac{z^4}{\sigma_0^2\sigma_\nu^4})\Pi(\mu,\nu) =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\frac{y^4}{\sigma_0^2\sigma_\mu^4}\Pi(\mu,\nu) + \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\frac{2y^2z^2}{\sigma_0^2\sigma_\mu^2\sigma_\nu^2}\Pi(\mu,\nu) + \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^4}{\sigma_0^2\sigma_\nu^4}\Pi(\mu,\nu)) =$$

$$= 0(\frac{1}{\sigma_0^2}) \qquad (1)$$

Худди шунингдек

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\mu - \frac{mp}{q})^4 R(\mu,\nu) = (5\alpha_1^2\beta_1^2 M^2 + (11\alpha_1^4 + 23\alpha_1^3 + 14\alpha_1^2 + 9\alpha_1)M(1 + 0(\frac{1}{N}))$$

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu - \frac{np}{q})^4 R(\mu,\nu) = 5\alpha_2^2\beta_2^2 M^2 + (11\alpha_2^4 + 23\alpha_2^3 + 14\alpha_2^2 + 9\alpha_2)M0(1 + \frac{1}{N})$$

Ва

$$\sum_{u^2+v^2\geq\sigma_0} R(\mu,\nu) \leq \sum_{u^2+v^2\geq\sigma_0} \frac{(u^2+v^2)^2}{\sigma_0^2} R(\mu,\nu) \leq \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{y^4}{\sigma_0^2\sigma_\mu^4} + \frac{2y^2z^2}{\sigma_0^2\sigma_\mu^2\sigma_\nu^2} + \frac{z^4}{\sigma_0^2\sigma_\nu^4}\right) R(\mu,\nu) =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{y^4}{\sigma_0^2\sigma_\mu^4} R(\mu,\nu) + \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{2y^2z^2}{\sigma_0^2\sigma_\mu^2\sigma_\nu^2} R(\mu,\nu) + \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^4}{\sigma_0^2\sigma_\nu^4} R(\mu,\nu)\right)\right) =$$

$$= 0\left(\frac{1}{\sigma_0^2}\right) \tag{2}$$

(1), (2) дан

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\ \sum_{\nu=0}^{\infty} \left|R(\mu,\nu) - \Pi(\mu.\nu)\right| \leq \sum_{u^2+v^2\geq\sigma_0^2} R\mu,\nu) + \sum_{u^2+v^2\geq\sigma_0^2} \Pi(\mu,\nu) = 0\left(\frac{1}{\sigma_0^2})\right) \tag{3}$$

ни ҳосил қиламиз.Энди $u^2+v^2<\delta_0$ учун

$\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|d(\mu,\nu)-1\right|\Pi(\mu,\nu)$ ифодани ўрганамиз.Бу ерда

$$d(\ \mu,\nu) = \frac{R(\mu,\nu)}{\Pi(\mu,\nu)} =$$

$$= \frac{N!(n+\nu)!(m+\mu)!(N+M-n-m-\mu-\nu-2)!}{(N+m)!n!m!(N-n-m-2)!}\alpha_1^{-\mu}\alpha_2^{\nu}(1-\alpha_1-\alpha_2)^{-(M-\mu-\nu)} \tag{4}$$

Теорема шартига кўра

$N\to\infty,\quad n=\alpha_1 N\to\infty\quad ,m=\alpha_2 N\to\infty\quad ,\quad N-n-m=N(1-\alpha_1-\alpha_2)\to\infty$.

У ҳолда $d\ (\mu,\nu)$ даги барча факториаллар учун Стирлинг формуласи

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}\left(1+\frac{1}{12n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

ни қўллай оламиз.Яъни

$$\frac{N!}{(N+M)!}=\sqrt{q}e^{M}\,\frac{N^{N}}{(N+M)^{N+M}}\times(1+\frac{q-1}{12q(N+M)}+O(\frac{1}{(N+M)^{2}})) \tag{5}$$

$$\frac{(n+\nu)!}{n!}=\frac{e^{-\nu}n^{\nu}}{\sqrt{q}\,q^{n+\nu}}(1+\frac{yp}{2\sigma_{\nu}q\beta_{2}\sqrt{1-r^{2}}}-\frac{y^{3}p^{2}\beta_{2}^{2}}{6\sigma_{\nu}q^{2}}(1-r^{2})^{\frac{3}{2}}+O(\frac{(e^{2}+y^{4})1}{\sigma_{\nu}{}^{2}}))\times$$

$$\times\exp\left\{y\sigma_{\nu}\sqrt{1-r^{2}}+\frac{y^{2}\beta_{1}p}{2q}(\sqrt{1-r^{2}})^{3}\right\} \tag{6}$$

$$\frac{(m+\mu)!}{m!}=\frac{e^{-\mu}m^{\mu}}{\sqrt{q}\,q^{m+\mu}}(1+\frac{xp}{2\sigma_{\mu}q\beta_{1}\sqrt{1-r^{2}}}-\frac{x^{3}p^{2}\beta_{1}^{2}}{6\sigma_{\mu}q^{2}}(1-r^{2})^{\frac{3}{2}}+O(\frac{(x^{2}+x^{4})}{\sigma_{\nu}{}^{2}}))\times$$

$$\times\exp\left\{x\sigma_{\mu}\sqrt{1-r^{2}}+\frac{x^{2}\beta_{2}p}{6q^{2}\sigma_{\mu}}(\sqrt{1-r^{2}})\right\} \tag{7}$$

$$\frac{(N+M-n-m-2)!}{(N-n-m-2)!}=e^{-(M-\mu-\nu)}q(N+M)^{M-\mu-\nu}(1-\alpha_{1}-\alpha_{2})^{M-\mu-\nu}\times$$

$$(1-\frac{x\alpha_{1}p}{2\sigma_{\mu}q\sqrt{1-r^{2}}}-\frac{y\alpha_{2}p}{2\sigma_{\nu}q\sqrt{1-r^{2}}}+\frac{x^{3}p^{2}\alpha_{1}^{2}}{6\sigma_{\mu}q^{2}\sqrt{1-r^{2}}}+\frac{y^{3}p^{2}\alpha_{2}^{2}}{6\sigma_{\nu}q^{2}\sqrt{1-r^{2}}}+O(\frac{1}{\sigma_{\nu}{}^{2}})+O(\frac{1}{\sigma_{\nu}{}^{2}}) \tag{8}$$

(5)-(8) дан қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$d(\mu,\nu)=1-\frac{p}{2}(1-x^{2})-\frac{p}{2}(1-y^{2})+pO(\frac{1}{\sigma_{\mu}})+pO(\frac{1}{\sigma_{\nu}})+O(\frac{1}{\sigma^{2}{}_{\mu}})+O(\frac{1}{\sigma^{2}{}_{\nu}})+O(p^{2}) \tag{9}$$

(4) ва (9) дан кўринадики

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|R(\mu,\nu)-\Pi(\mu.\nu)\right|=\left|(1-x^2)\frac{p}{2}+(1-y^2)\frac{p}{2}-+pO(\frac{1}{\sigma_0})+pO(\frac{1}{\sigma_0^2})\right|\Pi(\mu,\nu)$$

$M\to\infty$ да полиномиал тақсимот икки ўлчовли нормал тақсимотга яқинлашади.Уни ҳисобга олиб 1 - леммадан [4]

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|R(\mu,\nu)-\Pi(\mu,\nu)\right|=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|(1-x^2)\frac{p}{2}+(1-y^2)\frac{p}{2}-+pO(\frac{1}{\sigma_0})+pO(\frac{1}{\sigma_0^2})\right|\times$$
$$\times e^{-\frac{x^2}{2}(1-r^2)}e^{-\frac{y^2}{2}(1-r^2)} \qquad (10)$$

(10) дан теорема исботи келиб чиқади.

2-Теорема. Айтайлик, $N\to\infty$, $\alpha_0\to 0$ бўлсин, у ҳолда

$$\sigma=\lambda\alpha_0+\alpha_0 0\left(\min\left[1,\frac{1}{\sqrt{(N+M)pq}}\right]\right)$$

бўлади. Бу ерда

$$\Pi_2(\mu,\nu)=\frac{N!}{n!m!(N-n-m-2)!}\alpha_1^n\alpha_2^m(1-\alpha_1-\alpha_2)^{N-n-m-2}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left|1-u^2\right| e^{-\frac{u^2}{2}}\ du = 0{,}96788.....$$

$$\alpha_0 = \min(\alpha_1, \alpha_2), \beta_0 = 1-\alpha_0$$

Исбот. Айтайлик $\chi^2 = u^2 + v^2$

ва $y = \mu - \frac{mp}{q},$

$$z = \upsilon - \frac{np}{q}$$

бўлсин.*μ ва ν* индексли йиғиндилар

$$\chi^2 < \sigma_0, \quad \chi^2 \geq \sigma_0, (\sigma_0 = \min(\sigma_\mu \sigma_\upsilon))$$

шартни қаноатлантиради ва уларни мос равишда

σ_1 ва σ_2 лар билан белгилаймиз.

σ_2 ни бахолаймиз.

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}(\mu - \frac{mp}{q})^4 \Pi_2(\mu, \upsilon) =$$

$$= 3\alpha_1^2 \beta_1^2 M^2 + (6\alpha_1^4 + 12\alpha_1^3 - 7\alpha_1^2 + \alpha_1) M$$

ва

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}(\upsilon-\frac{np}{q})^4\,\Pi_2\,(\mu,\upsilon)=$$

$$=3\alpha_2^2\beta_2^2M^2+(6\alpha_2^4+12\alpha_2^3-7\alpha_2^2+\alpha_2)\,\mathrm{M}$$

бундан кўринадики

$$\sum_{u^2+v^2\geq\sigma_0}\Pi_2(\mu,\upsilon)\leq\sum_{u^2+v^2\geq\sigma}\frac{(u^2+v^2)^2}{\sigma_0^2}\Pi_2(\mu,\upsilon)=$$

$$=O(\frac{1}{\sigma_0^2})\qquad(1)$$

Худди шунингдек,

$$\frac{1}{\sigma_0^2\sigma_\mu^4}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}y^4\,R(\mu,\upsilon)=$$

$$=\left[3\alpha_1^2\beta_1^2M^2+(6\alpha_1^4+12\alpha_1^3-7\alpha_1^2+\alpha_1)M\right]\times$$

$$\times(1+O(\frac{1}{N}))=O(\frac{1}{\sigma_0^2})\qquad(2)$$

$$\frac{1}{\sigma_0^2\,\sigma_\upsilon^4}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\upsilon=0}^{\infty} z^4\,R(\mu,\upsilon)=0(\frac{1}{\sigma_0^2})\quad(3)$$

(1)-(3) дан қуйидагини оламиз.

$$\sigma_2\le\sum_{u^2+v^2\ge\sigma_0}R(\mu,\upsilon)+\sum_{u^2+v^2\ge\sigma_0}\Pi_2(\mu,\upsilon)=0(\frac{1}{\sigma_0^2})\quad(4)$$

Энди $u^2+v^2<\sigma_0$ *учун*

$$\sigma_1=\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left|d(\mu,\upsilon)-1\right|\Pi_2(\mu,\upsilon)$$

ифодадаги μ ва υ ларнинг қийматларини қараймиз. Бу ерда

$$d(\mu,\upsilon)=\frac{R(\mu,\upsilon)}{\Pi_2(\mu,\upsilon)}=\frac{N!(n+\upsilon)!(m+\mu)!}{(N+m)!\;\;n!\,m!}\times$$

$$\times\frac{(N+M-n-m-\mu-\upsilon-2)!}{(N-n-m-2)!}\alpha_1^{-\mu}\alpha_2^{\upsilon}(1-\alpha_1-\alpha_2)^{-(M-\mu-\upsilon)}\quad(5)$$

Теорема шартига кўра $N\to\infty$ ва $n=d_1N\to\infty,\ m=\alpha_2N\to\infty$

$N-m-n=N(1-\alpha_1-\alpha_2)\to\infty$ да

$\alpha(\mu,\upsilon)$ даги барча факториалллар учун.

Стирлинг формуласини қўллаймиз.

$$n!=\sqrt{2\pi n}\,n^n\,e^{-n}\,(1+\frac{1}{12n}+0(\frac{1}{n^2}))$$

$$\frac{N!}{(N+M)!}=\sqrt{q}\,e^{M}\,\frac{N^{N}}{(N+M)^{N+M}}(1+\frac{q-1}{12q(N+M)}+0(\frac{1}{(N+M)^{2}}))\qquad(6).$$

$$\frac{(n+\upsilon)!}{n!}=\frac{e^{-\upsilon}\,n^{\upsilon}}{\sqrt{q}\,q^{n+\upsilon}}(1+\frac{\upsilon p}{2\sigma_{\upsilon}q\beta_{2}\sqrt{1-r^{2}}}-\frac{v^{3}\,\beta_{2}^{2}\,p^{2}}{6\,q^{2}\,\sigma_{v}}\times$$

$$\times(1+r^{2})^{\frac{3}{2}}+0\,(\frac{v^{2}+v^{4}}{\sigma_{\upsilon}^{2}}))\times\exp\left\{\upsilon\sigma_{\mu}\sqrt{1-r^{2}}\;+\frac{\upsilon^{2}\beta_{1}p}{2q}(1-r^{2})\right\}\qquad(7)$$

$$\frac{(m+\mu)!}{m!}=\frac{e^{-\mu}m^{\mu}}{\sqrt{q}\,q^{m+\mu}}(1+\frac{Up}{2\sigma_{\mu}q\beta_{1}\sqrt{1-r^{2}}}-\frac{u^{3}p^{2}\,\beta_{1}^{2}}{6\,q^{2}\,\sigma_{\mu}}(1-r^{2})^{\frac{3}{2}}+0\,(\frac{u^{2}+u^{4}}{\sigma_{\mu}^{2}}))\times$$

$$\mathbf{exp}\left\{\upsilon\sigma_{\mu}\sqrt{1-r^{2}}\;+\frac{\upsilon^{3}\beta_{2}^{2}\,p}{2q}(1-r^{2})\right\}\qquad\mathbf{(8)}$$

$$\frac{(N+M-n-m-\mu-\upsilon-2)!}{(N-n-m-2)!}=e^{-(M-\mu-\upsilon)}\,q(N+M)^{M-\mu-\upsilon}\times$$

$$\times(1-\frac{u\;\alpha_{1}\;p}{2\sigma_{\mu}\sqrt{1-r^{2}q}}-\frac{u\;\alpha_{2}\;p}{2\sigma_{\upsilon}\sqrt{1-r^{2}q}}+\frac{u^{3}\;\alpha_{1}^{2}\;p^{2}}{6q^{2}\sigma_{\mu}\sqrt{1-r^{2}}}+$$

$$+\frac{v^{3}\alpha_{2}^{2}\,p^{2}}{6\,q^{2}\,\sigma_{v}\sqrt{1-r^{2}}}+0(\frac{1}{\sigma_{\mu}^{2}})+0(\frac{1}{\sigma_{\upsilon}^{2}}))\qquad(9)$$

(6)-(9) дан қуйидагини оламиз

$$\alpha(\mu,\upsilon)=1-\frac{p}{2}(1-u^{2})+\frac{p}{2}(1-\upsilon^{2})+$$

$$+\,pO(\frac{1}{\sigma_{\mu}})+pO(\frac{1}{\sigma_{\upsilon}})+O(\frac{1}{\sigma_{\mu}^{2}})+O(p^{2})\qquad(10)$$

(4) ва (10) дан кўринадики,

$$\sigma = \left| \frac{p}{2}(1-u^2) + \frac{p}{2}(1-v^2) + pO(\frac{1}{\sigma_0}) + O(\frac{1}{\sigma_0^2}) \right| \Pi(\mu, \upsilon)$$

$M \to \infty$ да полиномиал тақсимот икки ўлчовли нормал қонун бўйича яқинлашади.

Буни ҳисобга олиб I-леммага асосан қуйидаги ўринли бўлади.[4]

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{p}{2}(1-u^2) + \frac{p}{2}(1-v^2) + pO(\frac{1}{\sigma_0}) + O(\frac{1}{\sigma_0^2}) + O(p^2) \right| e^{-\frac{u^2}{2}(1-r^2)} \; e^{-\frac{v^2}{2}(1-r^2)} \qquad (11)$$

(II) дан теорема исботи келиб чиқади.

3-теорема: Айтайлик

$$p = \frac{M}{N+M} \to 0, \qquad \sigma_\upsilon = \sqrt{npq} \to \infty.$$

у ҳолда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| R(\mu, \upsilon) - \Pi_1(\mu) \times \Pi_2(\nu) \right| =$$

$$= \lambda_2 p + \frac{\lambda_1}{\sigma} + O(\frac{1}{\sigma^2}) + O(p^2).$$

бу ерда

$$\Pi_1(\mu) = \frac{(mp)^\mu}{\mu!} e^{-mp} \,,$$

$$\Pi_2(\nu) \quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{-V^2}{2}\}$$

$$V = \frac{\nu - np}{\sqrt{npq}},$$

$$\sigma_\upsilon = \sqrt{npq} \ ,$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left|1 - u^2\right| e^{-\frac{u^2}{2}} \, du = 0{,}489......$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left|v^3 - 3v\right| e^{-\frac{v^2}{2}} \, dv = 0{,}396......$$

Исбот:

. Айтайлик $\chi^2 = u^2 + v^2$

ва $y = \mu - \frac{mp}{q}$,

$$z = \upsilon - \frac{np}{q}$$

бўлсин.*μ ва ν* индексли йиғиндилар

$$\chi^2 < \sigma_0, \quad \chi^2 \geq \sigma_0, (\sigma_0 = \min(\sigma_\mu \sigma_\upsilon))$$

шартни қаноатлантиради ва уларни мос равишда

σ_1 ва σ_2 лар билан белгилаймиз.

σ_2 ни бахолаймиз.

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}(\mu-\frac{mp}{q})^4\Pi_1(\mu)\Pi_2(\upsilon)=$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\Pi_2(\upsilon)\sum_{\upsilon=0}^{\infty}(\mu-\frac{mp}{q})^4\Pi_1(\mu)=$$

$$=3\alpha_1^2\beta_1^2M^2+(6\alpha_1^4+12\alpha_1^3-7\alpha_1^2+\alpha_1)M$$

Ва

$$\sum_{u^2+v^2\geq\sigma_0}\Pi_1(\mu)\mathit{\Pi}_2(\upsilon)\leq\sum_{u^2+v^2\geq\sigma}\frac{(u^2+v^2)^2}{\sigma_0^2}\Pi_1(\mu)\mathit{\Pi}_2(\upsilon)$$

$$=O(\frac{1}{\sigma_0^2})\qquad(12)$$

Худди шунингдек,

$$\frac{1}{\sigma_0^2\sigma_\mu^4}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\upsilon=0}^{\infty} y^4\, R(\mu,\upsilon) =$$

$$= \left[3\alpha_1^2\beta_1^2 M^2 + (6\alpha_1^4 + 12\alpha_1^3 - 7\alpha_1^2 + \alpha_1)M\right]\times$$

$$\times(1 + 0(\frac{1}{N})) = 0(\frac{1}{\sigma_0^2}) \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sigma_0^2\,\sigma_\upsilon^4}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\upsilon=0}^{\infty} z^4\, R(\mu,\upsilon) = 0(\frac{1}{\sigma_0^2}) \quad (14)$$

(1)-(3) ва (14) дан қуйидагини оламиз.

$$\sigma_2 \le \sum_{u^2+v^2\ge\sigma_0} R(\mu,\upsilon) + \sum_{u^2+v^2\ge\sigma_0} \Pi_2(\mu,\upsilon) = 0(\frac{1}{\sigma_0^2}) \quad (4)$$

Демак тақсимотлар четки қийматларини баҳоладик.Энди $u^2 + v^2 < \sigma_0$ *учун*

$$\sigma_1 = \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left|d(\mu,\upsilon) - 1\right|\Pi_1(\mu), \Pi_2(\nu)$$

ифодадаги μ ва υ ларнинг қийматларини қараймиз.

Икки ўлчовли Романовский тақсимотини қуйидагича ёзиб олайлик:

$$R(\mu,\upsilon) = \frac{C_{m+\mu}^{m}\, C_{n+\nu}^{n}\ C_{N+M-n-m-\nu-2}^{N-n-m-2}}{C_{N+M}^{N}} =$$

$$=\frac{(m+\mu)!}{m!\mu!}\times\frac{(n+v)!}{n!v!}\times\frac{(N+M-n-m-\mu-v-2)!}{(N-n-m-2)!(M-\mu-v)!}\times\frac{N!M!}{(N+M)!}=$$

$$=\frac{(N-n-m)(N-n-m-1)}{(N+M-n-m-\mu-v)(N+M-n-m-\mu-v-1)}\times\frac{N!M!}{(N+M)!}\times\frac{(N+M-n-m-\mu-v)!}{(N-n-m)!(M-\mu-v)!}\times$$

$$\frac{(n+v)!}{n!v!}\times\frac{(m+\mu)!}{m!}\times\frac{1}{\mu!}$$

Қуйидаги белгилашлар киритамиз.

$$J_0=\frac{(N-n-m)(N-n-m-1)}{(N+M-n-m-\mu-v)(N+M-n-m-\mu-v-1)},$$

$$J_1=\frac{N!M!}{(N+M)!},$$

$$J_3=\frac{(n+v)!}{n!\,v!}$$

$$J_4=\frac{(m+\mu)!}{m!}$$

У ҳолда

$$R(\mu,v)=J_0\,J_1\,J_2\,J_3\,J_4\,\frac{1}{\mu!}$$

$$J_0=\frac{N^2(1-\alpha_1-\alpha_2)^2\left(1-\frac{1}{N(1-\alpha_1-\alpha_2)}\right)}{N+M-n-m-\frac{np}{q}-\frac{mp}{q}-(U\sigma_\mu+V\sigma_\mu)\sqrt{1-r^2}}=$$

$$=\frac{N^2(1-\alpha_1-\alpha_2)^2\,(1-\frac{1}{N(1-\alpha_1-\alpha_2)})}{N^2(1-\alpha_1-\alpha_2)^2\,(1-\frac{(U\sigma_\mu+V\sigma_\nu)\sqrt{1-r^2}}{(N+M)(1-\alpha_1-\alpha_2)})(1-\frac{(U\sigma_\mu+V\sigma_\nu)\sqrt{1-r^2}}{(N+M)(1-\alpha_1-\alpha_2)})}=$$

$$=1+\frac{u\alpha_1\beta_1 p}{q\sigma_\mu\beta_1\beta_2\sqrt{1-r^2}}+\frac{v\alpha_2\beta_2 p}{q\sigma_\mu\beta_1\beta_2\sqrt{1-r^2}}+O(\frac{1}{\sigma_\mu^2}+\frac{1}{\sigma_\nu^2})=$$

$$1+\frac{u\alpha_1 p}{q\sigma_\mu\beta_2\sqrt{1-r^2}}+\frac{u\alpha_2 p}{q\sigma_\nu\beta_1\sqrt{1-r^2}}+O(\frac{1}{\sigma_\mu^2}+\frac{1}{\sigma_\nu^2});$$

$$J_1=\frac{N!M!}{(N+M)!}=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{N!}{N+M}}\,\frac{N^N M^M}{(N+M)^{N+M}}*$$

$$\times\frac{e^{-(N+M)}}{e^{-(N+M)}}=\sqrt{2\pi\,pq(N+M)}\,q^N\,p^M\,(1+O(\frac{p-q}{N+M}))$$

$$J_2=\frac{\left(N+M-n-m-\mu-v\right)!}{\left(N+-n-m\right)!\left(M-\mu-v\right)!}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{N+M-n-m-\mu-v}{(N-n-m)!(M-\mu-v)}\times\frac{\left(N+M-n-m-\mu-v\right)^{N+M-n-m-\mu-v}}{(N-n-m)^{N-n-m}\,(M-\mu-v)^{M-\mu-v}}};$$

$$J_2^1=\sqrt{\frac{N+M-n-m-\mu-v}{(N-n-m)(M-\mu-v)}}=\sqrt{\frac{N+M-n-\frac{np}{q}-M-\frac{mp}{q}-\frac{u\sigma_\mu}{\sigma_\mu}}{(N-n-m)(M-\frac{(n+m)p}{q}-\frac{u\sigma_\mu}{\sigma_\mu})}}=$$

$$=\sqrt{\frac{(N-n-m)(1-\frac{(u\sigma_{\mu}+v\sigma_{v})\sqrt{1-r^{2}}}{pq(N+M)(1-\alpha_{1}-\alpha_{2})})}{(N-n-m)M(1-\alpha_{1}-\alpha_{2})(1-\frac{(u\sigma_{\mu}+v\sigma_{v})\sqrt{1-r^{2}}}{M(1-\alpha_{1}-\alpha_{2})})}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{M(1-\alpha_{1}-\alpha_{2})}}(1-\frac{(u\sigma_{\mu}+v\sigma_{v})\sqrt{1-r^{2}}}{2p(N+M)(1-\alpha_{1}-\alpha_{2})}+$$

$$+\frac{(u\sigma_{\mu}+v\sigma_{v})}{2p(N+M)(1-\alpha_{1}-\alpha_{2})}+O(\frac{1}{(N+M)^{2}(1-\alpha_{1}-\alpha_{2})^{2}})=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{M(1-\alpha_{1}-\alpha_{2})}}(1+\frac{u\sigma_{\mu}\sqrt{1-r^{2}}q}{2p(N+M)(1-\alpha_{1}-\alpha_{2})}+$$

$$+\frac{V\sigma_{v}\sqrt{1-r^{2}}\,q}{2p(N+M)(1-\alpha_{1}-\alpha_{2})}+O(\frac{1}{(N+M)^{2}}))=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{M(1-\alpha_{1}-\alpha_{2})}}(1+\frac{u\sigma_{\mu}\sqrt{1-r^{2}}q\alpha_{1}\beta_{1}}{2\alpha_{1}\beta_{1}\,p(N+M)(\frac{1-\alpha_{1}-\alpha_{2}}{\beta_{1}\beta_{2}})\beta_{1}\beta_{2}}+$$

$$+\frac{V\sigma_{v}\sqrt{1-r^{2}}q\alpha_{2}\beta_{2}}{2\alpha_{2}\beta_{2}\,p(N+M)(\frac{1-\alpha_{1}-\alpha_{2}}{\beta_{1}\beta_{2}})\beta_{1}\beta_{2}}+O(\frac{1}{(N+M)^{2}}))=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{M(1-\alpha_{1}-\alpha_{2})}}(1+\frac{u\alpha_{1}}{2\sigma_{\mu}\sqrt{1-r^{2}}\beta_{2}}+\frac{v\alpha_{2}}{2\sigma_{v}\sqrt{1-r^{2}}\beta_{1}}+$$

$$+O\left(\frac{1}{(N+M)^2}\right).$$

$$J_2^2=\frac{(N+M-n-m-\mu-v)^{N+M-n-m-\mu-v}}{(N-n-m)^{N-n-m}\,(M-\mu-v)^{M-\mu-v}}=$$

$$=\frac{\left(N+M-n-m-\frac{np}{q}-\frac{mp}{q}-\left(u\sigma_\mu+v\sigma_v\right)\sqrt{1-r^2}\right)^{N+M-n-m-v}}{\left(N-n-m\right)^{N-n-m}\,(M-\frac{\left(n+m\right)p}{q}-\left(u\sigma_\mu+v\sigma_v\right)\sqrt{1-r^2})^{N+M-n-m-\mu-v}}$$

$$=\frac{\left(N+M\right)^{N+M-n-m-\mu-v}\,(1-\alpha_1-\alpha_2)^{N+M-n-m-\mu-v}}{q^{N-n-m}\,(N+M)^{N-n-m}\,(1-\alpha_1-\alpha_2)^{N-n-m}}\times$$

$$\times\frac{1-\frac{u\sigma_\mu+v\sigma_v}{\left(N+M\right)(1-\alpha_1-\alpha_2)}\left(\sqrt{1-r^2}\right)^{N+M-n-m-\mu-v}}{p^{M-\mu-v}\left(N+M\right)^{M-\mu-v}(1-\alpha_1-\alpha_2)^{M-\mu-v}\,(1-\frac{\left(u\sigma_\mu+v\sigma_v\right)}{p\left(N+M\right)}\sqrt{1-r^2})}$$

$$=q^{-\left(N-n-m\right)}\;p^{-(M-\mu-v)}\exp\left\{(N+M)(1-\alpha_1-\alpha_2)\times\right.$$

$$\times(1-\frac{(u\sigma_\mu+v\sigma_v)\sqrt{1-r^2}}{p(N+M)(1-\alpha_1-\alpha_2)})\times$$

$$\left.\times\ln(1-\frac{\left(u\sigma_\mu+v\sigma_v\right)\sqrt{1-r^2}}{(N+M)(1-\alpha_1-\alpha_2)})\right\}=$$

$$=q^{-(N-n-m)}\;p^{-(M-\mu-v)}\exp\left\{(N+M)(1-\alpha_1-\alpha_2)\times\right.$$

$$\times\left(1-\frac{(u\sigma_\mu+v\sigma_v)\sqrt{1-r^2}}{2(N+M)(1-\alpha_1-\alpha_2)}\right)$$

$$\left(-\frac{(u\sigma_\mu+v\sigma_v)\sqrt{1-r^2}}{(N+M)(1-\alpha_1-\alpha_2)}-\frac{(u\sigma_\mu+v\sigma_v)^2(\sqrt{1-r^2})^2}{2(N+M)^2(1-\alpha_1-\alpha_2)^2}-\frac{(u\sigma_\mu+v\sigma_v)^3(\sqrt{1-r^2})^{3/2}}{3(N+M)^3(1-\alpha_1-\alpha_2)^3}+O(\frac{1}{(N+M)^4})\right)\Bigg\}$$

$$=p^{-(M-\mu-v)}q^{-(N-n-m)}\exp\Big\{-(u\sigma_\mu+v\sigma_v)\times$$

$$\times\sqrt{1-r^2}+\frac{(u\sigma_\mu+v\sigma_v)^2(1-r^2)}{2(N+M)(1-\alpha_1-\alpha_2)}+\frac{(u\sigma_\mu+v\sigma_v)^3(1-r^2)^{3/2}}{6(N+M)^2(1-\alpha_1-\alpha_2)^2}+$$

$$+(u\sigma_\mu+v\sigma_v)\sqrt{1-r^2}-\frac{(u\sigma_\mu+v\sigma_v)^2(1-r^2)}{2p(N+M)(1-\alpha_1-\alpha_2)}-$$

$$-\frac{(u\sigma_\mu+v\sigma_v)^3(1-r^2)^{3/2}}{6p^2(N+M)^2(1-\alpha_1-\alpha_2)^2}+O(\frac{(u\sigma_\mu+v\sigma_v)^4}{(N+M)^3})\Bigg\}=$$

$$=p^{-(M-\mu-v)}q^{-(N-n-m)}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{(u\sigma_\mu+v\sigma_v)^2(1-r^2)(1-p)}{2p(N+M)(1-\alpha_1-\alpha_2)}-\frac{(u\sigma_\mu+v\sigma_v)^3(1-r^2)^{3/2}(1-p)^2}{6p^2(N+M)^2(1-\alpha_1-\alpha_2)^2}+\right.$$

$$\left.+O(\frac{1}{(N+M)^3})\right\}=p^{-(M-\mu-v)}q^{-(N-n-m)}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{q}{2p\beta_1\beta_2}\left\{-\frac{u^2\alpha_1\beta_1 p(N+M)}{q(N+M)}-\frac{v^2\alpha_2\beta_2 p(N+M)}{q(N+M)}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{2\sqrt{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2}\,p(N+M)}{q\,p(N+M)}\,UV\right\}-$$

$$-\frac{1+p}{6}\left\{\frac{u^3\sigma_\mu^3\,\alpha_1^2\,\beta_1^2}{q\sigma_\mu^4\,\beta_1^2\,\beta_2^2\,\sqrt{1-r^2}}+\frac{v^3\sigma_v^3\,\alpha_2^2\,\beta_2^2}{q\sigma_\mu^4\,\beta_1^2\,\beta_2^2\,\sqrt{1-r^2}}+\right.$$

$$+\frac{3u^2v\sigma_\mu^2\sigma_v(1-r^2)^{3/2}}{p^2(N+M)^2(1-\alpha_1-\alpha_2)^2}+\frac{3uv^2\,\sigma_v^2\sigma_\mu q}{p^2(N+M)^2\,\beta_1^2\,\beta_2^2\sqrt{1-r^2}}+$$

$$\left.\left.+O\left(\frac{1}{(N+M)^3}\right)\right\}\right\}=p^{-(M-\mu-v)}\,q^{-(N-n-m)}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{u^2\alpha_1}{2\beta_2}-\frac{v^2\alpha_2}{2\beta_1}-\sqrt{\frac{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2}{\beta_1^2\beta_2^2}}\,uv-\right.$$

$$-\frac{u^3(1+p)\alpha_1^2}{6q\sigma_\mu\,\beta_2^2\,\sqrt{1-r^2}}-\frac{v^3(1+p)\alpha_2^2}{6q\sigma_v\,\beta_1^2\,\sqrt{1-r^2}}-$$

$$-\frac{(1+p)\,\alpha_1\,\beta_1\,\alpha_2\,\beta_2\,u^2\,v}{2q\,\beta_1^2\,\beta_2^2\,\sqrt{1-r^2}\,\sigma_v}-\frac{\alpha_1\,\beta_1\,\alpha_2\,\beta_2\,(1+p)v^2\,u}{2q\,\beta_1^2\,\beta_2^2\,\sqrt{1-r^2}\,\sigma_\mu}$$

$$+O\left(\frac{1}{\sigma_\nu^2}+\frac{1}{\sigma_\mu^2}+\frac{1}{\sigma_\nu\sigma_\mu}\right)\Bigg\}=$$

$$=p^{-(M-\mu-\nu)}\, q^{-(N-n-m)}\, \exp\left\{-\frac{u^2\alpha_1}{2\beta_2}-\right.$$

$$-\frac{v^2\,\alpha_2}{2\beta_1}+ruv-\frac{u^3\,(1+p)\,\alpha_1^2}{6q\,\sigma_\mu\,\beta_2^2\,\sqrt{1-r^2}}-$$

$$-\frac{v^3\,(1+p)\,\alpha_2^2}{6q\,\sigma_\nu\,\beta_1^2\,\sqrt{1-r^2}}-\frac{u^2\,v\,(1+p)\,r}{2q\sqrt{1-r^2}\,\sigma_\nu}-$$

$$\left.-\frac{v^2\,u\,(1+p)\,r}{2q\sqrt{1-r^2}\,\sigma_\mu}+O\left(\frac{1}{\sigma_\nu^2}+\frac{1}{\sigma_\mu^2}+\frac{1}{\sigma_\nu\sigma_\mu}\right)\right\}$$

Демак,

$$J_2=\frac{p^{-(M-\mu-\nu)}\,q^{-(N-n-m)}}{\sqrt{2\pi\,pq\,(N+M)}}\left[1+\frac{u\alpha_1}{2\sigma_\mu\,\beta_2\,\sqrt{1-r^2}}+\right.$$

$$+\frac{v\alpha_2}{2\sigma_v\,\beta_1\sqrt{1-r^2}}-\frac{u^3\,(1+p)\,\alpha_1^2}{6q\,\sigma_\mu\,\beta_2^2\sqrt{1-r^2}}-$$

$$-\frac{v^3\,(1+p)\,\alpha_2^2}{6\sigma_v\,q\,\beta_1^2\sqrt{1-r^2}}+\frac{u^2 v r}{2q\,\sigma_v\sqrt{1-r^2}}+\frac{v^2 u r}{2q\,\sigma_\mu\sqrt{1-r^2}}+$$

$$+O\left(\frac{1}{\sigma_0^2}\right)\Bigg]\exp\left\{-\frac{u^2\,\alpha_1}{2\beta_2}-\frac{v^2\,\alpha_2}{2\beta_1}+uvr\right\}$$

Бу ерда $\sigma_0=\min\,(\sigma_\mu,\sigma_v)$

$$J_3=\frac{(n+v)!}{n!\,v!}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n+v}{nv}}\,\frac{(n+v)^{n+v}}{n^n\,v^v}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n+\dfrac{np}{q}+V\sigma_v\sqrt{1-r^2}}{n\left(\dfrac{np}{q}+V\,\sigma_v\sqrt{1-r^2}\right)}}\times$$

$$\times \frac{\left[\frac{n}{q}\left(1+\frac{v\sigma_v\sqrt{1-r^2}}{n}\right)^{n+v}\right]}{n^n\left(\frac{np}{q}\right)^v\left(1+\frac{v\sigma_v\sqrt{1-r^2}q}{n\,p}\right)} =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\frac{n}{q}(1+\frac{v\sigma_v\sqrt{1-r^2}q}{n})}{n\frac{np}{q}(1+\frac{v\sigma_v\sqrt{1-r^2}q}{np})}}\,p^{-v}q^{-n}\times$$

$$\exp\left\{\frac{n}{q}(1+\frac{v\sigma_v\sqrt{1-r^2}q}{np})(\frac{qv\sigma_v\sqrt{1-r^2}q}{n}-\frac{q^2v^2\sigma^2{}_v1-r^2}{2n^2}+\frac{q^3v^3\sigma^3{}_v(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{2n^2}+O(\frac{v^4\sigma_v^4}{n^4})-\right\}$$

$$-\frac{np}{q}(1+\frac{v\sigma_v\sqrt{1-r^2}q}{np})\times(\frac{v\sigma_v\sqrt{1-r^2}q}{2np}-\frac{v^2\sigma^2{}_v(1-r^2)q}{2n^2p^2}+\frac{v^3\sigma^3{}_v(1-r^2)^{\frac{3}{2}}q}{2n^2p^2}+O(\frac{v^4\sigma_v^4}{n^4\sigma_\mu^4})))=$$

$$=\frac{p^{-\nu}q^{-n}}{\sqrt{2\pi np}}[1--$$

$$\frac{\nu\sigma_\nu\sqrt{1-r^2}}{n}+O(\frac{V^2}{\sigma_\nu n^2p^2})]\times\exp\left\{V\sigma_\nu\sqrt{1-r^2}+\right\}$$

$$+\frac{q^2V^2\sigma^2{}_\nu(1-r^2)}{n}-\frac{q^2V^3\sigma^3{}_\nu(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{6n^2}+\frac{q^3\nu^3\sigma^3{}_\nu(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{2n^2}-V\sigma_\nu\sqrt{1-r^2}-$$

$$-\frac{q\,V^2\sigma^2{}_\nu(1-r^2)}{2np}+\frac{q^2V^3\sigma^3{}_\nu(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{6n^2p^2}+O(\frac{V^4}{n^3})\;=$$

$$\frac{p^{-\nu}q^{-n}}{\sqrt{2\pi np}}\left\{1-\frac{\nu\beta_1\sqrt{1-r^2}}{2\sigma_\nu}+\frac{V^3\sigma^3{}_\nu(1-r^2)^{\frac{3}{2}}(1+p)\beta_1^2}{q\,\frac{6\alpha^2{}_1\beta_1^2p^2(N+M)^2}{q^2}}+\ldots\right\}\times$$

$$\exp\left\{-\frac{V^2q^2\alpha_2\beta_2p(N+M)(1-r^2)(1+p)\beta_1^2}{2\alpha_2\beta_2p\;(N+M)\;q^2}-\right\}=$$

$$\frac{p^{-\nu}q^{-n}}{\sqrt{2\pi np}}\left\{1-\frac{V\beta_1\sqrt{1-r^2}}{2\sigma_\nu}+\frac{V^3\sigma^3{}_\nu(1-r^2)^{\frac{3}{2}}(1+p)\beta_1^2q}{6\alpha^2{}_1\beta_1^2p^2(N+M)^2}+\ldots\right\}\times$$

$$=\exp\left\{-\frac{V^2q^2\alpha_2\beta_2p(N+M)(1-r^2)(1+p)\beta_1^2}{2\alpha_2\beta_2p\;(N+M)\;q^2}-\right\}$$

J_4 га ҳам юқоридаги каби Стирлинг формуласини қўллаб, қуйидагилара эга бўламиз:

$$J_4=\frac{(n+m)!}{m!}=\frac{e^{-\mu}m^{\mu}}{\sqrt{q}\,q^{m}}\times(1+\frac{up}{2\sigma_{\mu}q\beta_1\sqrt{1-r^2}}-\frac{u^3p\sqrt{(1-r^2)^3}}{2\sigma_{\mu}q\beta_1}+O(\frac{u^2+u^4}{\sigma^2{}_{\mu}}))\times$$

$$\times\exp\left\{u\sigma_{\mu}\sqrt{1-r^2}-\frac{u^3\beta^2p}{6\sigma_{\mu}q^2}(1-r^2)\right\}$$

Натижада

$$R(\mu,\nu)=(1+\frac{u\alpha_1p}{\sigma_{\mu}q\beta_1\sqrt{1-r^2}}+\frac{V\alpha_2p}{\sigma_{\nu}q\beta_2\sqrt{1-r^2}}+O(\frac{1}{\sigma^2{}_{\mu}+\sigma^2{}_{\nu}})\times$$

$$\times\sqrt{2\pi pq(N+M)}q^Np^M[1+O(\frac{p-q}{N+M})]\frac{q^{-(N-n-m)}p^{-(M--\mu-\nu)}}{\sqrt{2\pi pq(N+M)}}[1+\frac{u\alpha_1p}{\sigma_{\mu}q\beta_1\sqrt{1-r^2}}+\frac{V\alpha_2p}{\sigma_{\nu}q\beta_2\sqrt{1-r^2}}-$$

$$-\frac{u^3(1+p)\alpha^2{}_1}{6\sigma_{\mu}q\beta^2{}_1\sqrt{1-r^2}}-\frac{V^3(1+p)\alpha^2{}_2}{6\sigma_{\mu}q\beta^2{}_2\sqrt{1-r^2}}+\frac{u^2Vr^4}{2\sigma_{\nu}q\sqrt{1-r^2}}+\frac{u\,V^2r}{2\sigma_{\nu}q\sqrt{1-r^2}}+O(\frac{1}{\sigma_0^2})))\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{u^2\alpha_1}{2\beta_2}-\frac{V^2\alpha_2}{2\beta_1}+uVr\right\}\times$$

$$\times\frac{p^{-v}q^{-n}}{\sqrt{2\pi mp}}[1-\frac{V\beta_2\sqrt{1-r^2}}{2\sigma_v}+\frac{V^3\beta_2\sqrt{(1-r^2)^3}\,(1+p)^2}{6\sigma_v q}+...]\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{V\beta_2\,(1-r^2)}{2}+...-\right\}\times\frac{e^{-\mu}m^{\mu}}{\sqrt{q}q^{m}}(1+\frac{up}{2\sigma_\mu q\beta_1\sqrt{1-r^2}}-$$

$$-\frac{u^3p}{6\sigma_\mu q^2}\sqrt{(1-r^2)^3}+O\frac{u^2+u^4}{\sigma^2{}_\mu})\times\exp\left\{u\sigma_\mu\sqrt{1-r^2}-\frac{u^3\beta_2{}^2p}{6\sigma_\mu q^2}(1-r^2)\right\}$$

$$\times\frac{1}{\mu!}=[\frac{(mp)^\mu}{\mu!}\exp(-mp)\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v}e^{-\frac{V^2}{2}}]\times[1+\frac{u\alpha_1p}{\sigma_\mu q\beta_1\sqrt{1-r^2}}+\frac{V\alpha_2p}{\sigma_v q\beta_2\sqrt{1-r^2}}+O(\frac{1}{\sigma^2{}_\mu+\sigma^2{}_v})]\times$$

$$\times[1+O(\frac{p-q}{N+M})]\times[1+\frac{u\alpha_1}{2\sigma_\mu\beta_2\sqrt{1-r^2}}+\frac{V\alpha_2}{2\sigma_v\beta_1\sqrt{1-r^2}}-$$

$$-\frac{u^3(1+p)\alpha^2{}_1}{6\sigma_\mu q\beta^2{}_1\sqrt{1-r^2}}-\frac{V^3(1+p)\alpha^2{}_2}{6\sigma_\mu q\beta^2{}_2\sqrt{1-r^2}}+\frac{u^2Vr}{2\sigma_v q\sqrt{1-r^2}}+\frac{u\,V^2r}{2\sigma_v q\sqrt{1-r^2}}+O(\frac{1}{\sigma_0^2}))]$$

$$\times\exp\left\{-\frac{u^2\alpha_1}{2\beta_2}-\frac{V^2\alpha_2}{2\beta_1}+uVr\right\}\times[1-\frac{V\beta_2\sqrt{1-r^2}}{2\sigma_v}+\frac{V^3\beta_2\sqrt{(1-r^2)^3}\,(1+p)^2}{6\sigma_v q}+...]\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{V\beta_2\,(1-r^2)}{2}+...-\right\}]\times[1+\frac{u\alpha_1p}{\sigma_\mu q\beta_1\sqrt{1-r^2}}+\frac{V\alpha_2p}{\sigma_v q\beta_2\sqrt{1-r^2}}+O(\frac{u^2+u^4}{\sigma^2{}_\mu})]\times$$

$$\times\exp\left\{u\sigma_\mu\sqrt{1-r^2}-\frac{u^3p\beta_2(1-r^2)(1+p)^2}{6\sigma_v q^2}+...\right\}$$

Охирги тенгликдан теорема исботи келиб чиқади.

4-теорема. Айтайлик $N\to\infty,\quad M\to\infty,\quad \sigma_v\to\infty,\quad \alpha_1\to 0,\quad p\to p_0$

У ҳолда

$$\sum\sum\left|R(\mu,\nu)-\Pi_3(\mu)\Pi_4(\nu)\right| \;=\lambda_2\alpha_1+\frac{\lambda_1(p,\;\alpha_2\alpha_1)}{\sigma_\nu q}+O(\alpha^2{}_1+\frac{1}{\sigma_\theta^2})$$

Бу ерда

$$\Pi_3(\mu)=\frac{(nq)^\mu}{\mu!}\;\exp\{-nq\}\quad ,k=1,2,......$$

$$\Pi_4(\nu)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{V^2}{2}\}\qquad\qquad V=\frac{\nu-nq}{\sigma q}$$

$$\lambda_2=\lambda_2(p,\alpha_1\;,\alpha_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\left|V^3(1+p)(1-2\alpha_2-\alpha_1)-3V(q(1-\alpha_1)-2\alpha_2)\right|\exp\{\;-\frac{V^2}{2}\}dV$$

Исбот. . Айтайлик $\chi^2=u^2+v^2$

ва $y=\mu-\dfrac{mp}{q},$

$$z=\upsilon-\frac{np}{q}$$

бўлсин.*μ ва ν* индексли йиғиндилар

$$\chi^2<\sigma_0,\quad \chi^2\geq\sigma_0,(\sigma_0=\min(\sigma_\mu\sigma_\upsilon))$$

шартни қаноатлантиради ва уларни мос равишда

σ_1 ва σ_2 лар билан белгилаймиз.

σ_2 ни бахолаймиз.

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}(\mu-\frac{mp}{q})^4\,\Pi_3(\mu)\Pi_4(\nu)=$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\Pi_4(\nu)\sum_{\mu=0}^{\infty}(\mu-\frac{mp}{q})^4\,\Pi_3(\mu)=$$

$$=3\alpha_2^2\,\beta_2^2\,pM^2+(6\alpha_2^4\beta_1+12\alpha_2^3\beta_2-7\alpha_1^2\beta^2+$$
$$+\alpha_1\beta^3)M$$

бундан кўринадики

$$\sum_{u^2+v^2\geq\sigma_0}\Pi_3(\mu)\mathit{\Pi}_4(\nu)\leq\sum_{u^2+v^2\geq\sigma}\frac{(u^2+v^2)^2}{\sigma_0^2}\Pi_3(\mu)\mathit{\Pi}_4(\nu)=$$

$$=\mathbf{O}\left(\frac{1}{\sigma_0^2}\right)\qquad(15)$$

Худди шунингдек,

(1)-(3) дан қуйидагини оламиз.

$$\sigma_2 \le \sum_{u^2+v^2\ge\sigma_0} R(\mu,\upsilon) + \sum_{u^2+v^2\ge\sigma_0} \Pi_3(\mu)\Pi_4(\upsilon) = 0(\frac{1}{\sigma_0^2}) \qquad (16)$$

Энди $u^2 + v^2 < \sigma_0$ *учун*

$$\sigma_1 = \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\upsilon=0}^{\infty} \left| d(\mu,\upsilon) - 1 \right| \Pi_3(\mu)\Pi_4(\upsilon)$$

ифодадаги μ ва υ ларнинг қийматларини қараймиз.

$$R(\mu,\nu) = \frac{(N+M-n-m-\mu-\nu)!}{(N-n-m)!\,(M-\mu-\nu)!} \times \frac{N!M!}{(N+M)!} \times \frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!} \times \frac{(m+\mu)!}{m!} \times$$

$$\times \frac{(N-n-m)}{(N+M-n-m-\mu-\nu)(N+M-n-m-\mu-\nu-1)} =$$

$$= \frac{1}{\mu!} \times I_0 \times I_1 \times I_2 \times I_3 \times I_4$$

I_0 , I_1 , I_2 , I_3 ларни соддалаштирамиз.Бунинг учун қуйидаги белгилашлардан фойдаланамиз.

$$\mu = \frac{mp}{q}\,(1 + \frac{u(1-\alpha_1-\alpha_2)}{\sigma_\mu\sqrt{1-r^2}\,\beta_1});$$

$$M - \mu - \nu = M(1-\alpha_1-\alpha_2) \times (1 - \frac{u\alpha_1}{q\sigma_\mu\sqrt{1-r^2}\,\beta_1} - \frac{V\alpha_2}{q\sigma_\nu\sqrt{1-r^2}\,\beta_2})$$

$$v = \frac{np}{q}\left(1 + \frac{V(1-\alpha_1-\alpha_2)}{\sigma_v\sqrt{1-r^2}\beta_2}\right); \qquad N-n-m = N(1-\alpha_1-\alpha_2)$$

Бу ердаги r корреляция коэффиценти бўлиб у

$$r = r_{\mu\nu} = -\frac{(m+1)(n+1)}{\sqrt{(m+1)(N-m)(n+1)(N-n)}} = \sqrt{\frac{(m+1)(n+1)}{(N-m)(N-n)}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{\frac{(m+1)(n+1)}{N^2}}{\frac{(N-m)(N-n)}{N^2}}} \approx -\sqrt{\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2}}$$

$$\sqrt{1-r^2} = \sqrt{1-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2}} = \sqrt{\frac{\beta_1\beta_2-\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2}} = \sqrt{\frac{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)-\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\alpha_1-\alpha_2)}{\beta_1\beta_2}}$$

Теорема шартига кўра $N \to \infty$, $M \to \infty$, $n \to \infty$, $m \to \infty$

ва u , v ларнинг чегараланган эканлигидан I_1 ,I_2 , I_3 лар учун Стирлинг формуласини қўллаш мумкин эканлиги келиб чиқади.

Яъни

$$I_1 = \frac{N!M!}{(N+M)!} = \sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{NM}{(N+M)}} - \frac{N^N M^M}{(N+M)^{N+M}} \times \frac{\exp\{-N\}\exp\{-M\}}{\exp\{-(M+N)\}} =$$

$$= \sqrt{2\pi pq(N+M)}\ p^N q^M (1+O(\frac{p-q}{N+M})); \qquad (11)$$

$$I_2 = \frac{(N+M-n-m-\mu-\nu)!}{(N-n-m)!(M-\mu-\nu)!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{(N+M-n-m-\mu-\nu)}{(N-n-m)(M-\mu-\nu)}} - \times$$

$$\times \frac{(N+M-n-m-\mu-\nu)^{N+M-n-m-\mu-\nu)}}{(N-n-m)^{(N-n-m)}(M-\mu-\nu)^{(M-\mu-\nu)}(N+M)^{N+M}} \times$$

$$\times \frac{\exp\{-(N+M-n-m-\mu-\nu)\}}{\exp\{-(M-\mu-\nu)(N-n-m)\}} \times (1+\frac{1}{12(N-n-m)} + O(\frac{1}{(N-n-m)^2})) \times$$

$$\times (1+\frac{1}{12(M-\mu-\nu)} + O(\frac{1}{((M-\mu-\nu)^2})) \times$$

$$\times (1+\frac{1}{12(M-\mu-\nu)} + O(\frac{1}{((M-\mu-\nu)^2})) = \frac{p^{-(M-\mu-\nu)} q^{-(N-n-m)}}{\sqrt{2\pi pq(N+M)(1-\alpha_1-\alpha_2)}} \times$$

$$\times(1-\frac{(u\sigma_\mu+v\sigma_v)\sqrt{1-r^2}}{p(N+M)(1-\alpha_1-\alpha_2)})\times$$

$$\times\ln(1-\frac{(u\sigma_\mu+v\sigma_v)\sqrt{1-r^2}}{(N+M)(1-\alpha_1-\alpha_2)})\}=$$

$$\times\left(1-\frac{(u\sigma_\mu+v\sigma_v)\sqrt{1-r^2}}{2(N+M)(1-\alpha_1-\alpha_2)}\right)$$

$$\left(-\frac{(u\sigma_\mu+v\sigma_v)\sqrt{1-r^2}}{(N+M)(1-\alpha_1-\alpha_2)}-\frac{(u\sigma_\mu+v\sigma_v)^2(\sqrt{1-r^2})^2}{2(N+M)^2(1-\alpha_1-\alpha_2)^2}-\frac{(u\sigma_\mu+v\sigma_v)^3(\sqrt{1-r^2})^{3/2}}{3(N+M)^3(1-\alpha_1-\alpha_2)^3}+O(\frac{1}{(N+M)^4})\right)\Bigg\}$$

$$=p^{-(M-\mu-v)}q^{-(N-n-m)}\exp\Big\{-(u\sigma_\mu+v\sigma_v)\times$$

$$\times\sqrt{1-r^2}+\frac{(u\sigma_\mu+v\sigma_v)^2(1-r^2)}{2(N+M)(1-\alpha_1-\alpha_2)}+\frac{(u\sigma_\mu+v\sigma_v)^3(1-r^2)^{3/2}}{6(N+M)^2(1-\alpha_1-\alpha_2)^2}+$$

$$-\frac{(u\sigma_\mu+v\sigma_v)^3(1-r^2)^{3/2}}{6p^2(N+M)^2(1-\alpha_1-\alpha_2)^2}+O(\frac{(u\sigma_\mu+v\sigma_v)^4}{(N+M)^3})\Bigg\}=$$

$$= p^{-(M-\mu-v)} q^{-(N-n-m)} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(u\sigma_\mu + v\sigma_v)^2 (1-r^2)(1-p)}{2p(N+M)(1-\alpha_1-\alpha_2)} - \frac{(u\sigma_\mu + v\sigma_v)^3 (1-r^2)^{3/2}(1-p)^2}{6p^2(N+M)^2(1-\alpha_1-\alpha_2)^2} + \right.$$

$$+ (u\sigma_\mu + v\sigma_v)\sqrt{1-r^2} - \frac{(u\sigma_\mu + v\sigma_v)^2(1-r^2)}{2p(N+M)(1-\alpha_1-\alpha_2)} -$$

$$= p^{-(M-\mu-v)} q^{-(N-n-m)} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(u\sigma_\mu + v\sigma_v)^2 (1-r^2)(1-p)}{2p(N+M)(1-\alpha_1-\alpha_2)} - \frac{(u\sigma_\mu + v\sigma_v)^3 (1-r^2)^{3/2}(1-p)^2}{6p^2(N+M)^2(1-\alpha_1-\alpha_2)^2} + \right.$$

$$\left. + O\left(\frac{1}{(N+M)^3}\right) \right\} =$$

$$J_2 = \frac{p^{-(M-\mu-v)} q^{-(N-n-m)}}{\sqrt{2\pi pq(N+M)}}\left[1 + \frac{u\alpha_1}{2\sigma_\mu \beta_2 \sqrt{1-r^2}} + \right.$$

$$+ \frac{v\alpha_2}{2\sigma_v \beta_1 \sqrt{1-r^2}} - \frac{u^3(1+p)\alpha_1^2}{6q\sigma_\mu \beta_2^2 \sqrt{1-r^2}} -$$

$$- \frac{v^3(1+p)\alpha_2^2}{6\sigma_v q\beta_1^2 \sqrt{1-r^2}} + \frac{u^2 v r}{2q\sigma_v \sqrt{1-r^2}} + \frac{v^2 u r}{2q\sigma_\mu \sqrt{1-r^2}} +$$

$$
+O\left(\frac{1}{\sigma_0^2}\right)\Bigg]\exp\left\{-\frac{u^2\alpha_1}{2\beta_2}-\frac{v^2\alpha_2}{2\beta_1}+uvr\right\} \quad (12)
$$

$$
J_3=\frac{(n+v)!}{n!\,v!}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n+v}{nv}}\,\frac{(n+v)^{n+v}}{n^n\,v^v}=
$$

$$
=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n+\dfrac{np}{q}+V\sigma_v\sqrt{1-r^2}}{n\left(\dfrac{np}{q}+V\sigma_v\sqrt{1-r^2}\right)}}\times
$$

$$
\times\frac{\left[\dfrac{n}{q}\left(1+\dfrac{v\sigma_v\sqrt{1-r^2}}{n}\right)^{n+v}\right]}{n^n\left(\dfrac{np}{q}\right)^v\left(1+\dfrac{v\sigma_v\sqrt{1-r^2}\,q}{n\,p}\right)}=
$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\frac{n}{q}\left(1+\frac{\nu\sigma_\nu\sqrt{1-r^2}q}{n}\right)}{n\frac{np}{q}\left(1+\frac{\nu\sigma_\nu\sqrt{1-r^2}q}{np}\right)}}\, p^{-\nu} q^{-n} \times$$

$$\exp\left\{\frac{n}{q}\left(1+\frac{\nu\sigma_\nu\sqrt{1-r^2}q}{np}\right)\left(\frac{q\nu\sigma_\nu\sqrt{1-r^2}q}{n} - \frac{q^2\nu^2\sigma^2{}_\nu 1-r^2}{2n^2} + \frac{q^3\nu^3\sigma^3{}_\nu(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{2n^2} + O\left(\frac{\nu^4\sigma_\nu^4}{n^4}\right) - \right\}\right.$$

$$-\frac{np}{q}\left(1+\frac{\nu\sigma_\nu\sqrt{1-r^2}q}{np}\right)\times\left(\frac{\nu\sigma_\nu\sqrt{1-r^2}q}{2np} - \frac{\nu^2\sigma^2{}_\nu(1-r^2)q}{2n^2p^2} + \frac{\nu^3\sigma^3{}_\nu(1-r^2)^{\frac{3}{2}}q}{2n^2p^2} + O\left(\frac{\nu^4\sigma_\nu^4}{n^4\sigma_\mu^4}\right)\right)\Bigg)\Bigg) =$$

$$= \frac{p^{-\nu}q^{-n}}{\sqrt{2\pi np}}[1--$$

$$\frac{v\sigma_v\sqrt{1-r^2}}{n}+O(\frac{V^2}{\sigma_v n^2 p^2})]\times\exp\left\{V\sigma_v\sqrt{1-r^2}+\right\}$$

$$+\frac{q^2V^2\sigma^2{}_v(1-r^2)}{n}-\frac{q^2V^3\sigma^3{}_v(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{6n^2}+\frac{q^3v^3\sigma^3{}_v(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{2n^2}-V\sigma_v\sqrt{1-r^2}-$$

$$-\frac{q\,V^2\sigma^2{}_v(1-r^2)}{2np}+\frac{q^2V^3\sigma^3{}_v(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{6n^2p^2}+O(\frac{V^4}{n^3})\ =$$

$$\frac{p^{-v}q^{-n}}{\sqrt{2\pi np}}\left\{1-\frac{v\beta_1\sqrt{1-r^2}}{2\sigma_v}+\frac{V^3\sigma^3{}_v(1-r^2)^{\frac{3}{2}}(1+p)\beta_1^2}{q\,\frac{6\alpha^2{}_1\beta_1^2p^2(N+M)^2}{q^2}}+\ldots\right\}\times$$

$$\exp\left\{-\frac{V^2q^2\,\alpha_2\beta_2p(N+M)(1-r^2)(1+p)\beta_1^2}{2\alpha\;{}_2\beta_2\,p\;\;(N+M)\;q^2}-\right\}=$$

$$\frac{p^{-v}q^{-n}}{\sqrt{2\pi np}}\left\{1-\frac{V\beta_1\sqrt{1-r^2}}{2\sigma_v}+\frac{V^3\sigma^3{}_v(1-r^2)^{\frac{3}{2}}(1+p)\beta_1^2q}{6\alpha^2{}_1\beta_1^2p^2(N+M)^2}+\ldots\right\}\times$$

$$\exp\left\{-\frac{V^2q^2\,\alpha_2\beta_2p(N+M)(1-r^2)(1+p)\beta_1^2}{2\alpha\;{}_2\beta_2\,p\;\;(N+M)\;q^2}\right\} \qquad (13)$$

$$J_4 = \frac{(m+\mu)!}{m!} = \sqrt{\frac{m+\mu}{m}}\,\frac{(m+\mu)^{m+\mu}}{m^m} =$$

$$= \sqrt{\frac{m + \frac{mp}{q}\left(1 + \frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{\sigma_\mu\sqrt{1-r^2}\,\beta_1}\right)}{m}} \times$$

$$\times \frac{\left(m + \frac{mp}{q}\left(1 + \frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{\sigma_\mu\sqrt{1-r^2}\,\beta_1}\right)\right)^{m+\mu}}{m^m} =$$

$$= \sqrt{\left(1+\frac{p}{q}\right)\left(1+\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{\sigma_\mu\sqrt{1-r^2}\,\beta_1}\right)} \times$$

$$\exp\left\{ \frac{m}{q}\left(1+\frac{\nu\sigma_\nu\sqrt{1-r^2}\,q}{np}\right)\left(\frac{q\nu\sigma_\nu\sqrt{1-r^2}\,q}{n} - \frac{q^2\nu^2\sigma^2{}_\nu 1-r^2}{2n^2} + \frac{q^3\nu^3\sigma^3{}_\nu(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{2n^2} + O\left(\frac{\nu^4\sigma_\nu^4}{n^4}\right) - \right\}\right.$$

$$- \frac{np}{q}\left(1+\frac{\nu\sigma_\nu\sqrt{1-r^2}\,q}{np}\right)\times\left(\frac{\nu\sigma_\nu\sqrt{1-r^2}\,q}{2np} - \frac{\nu^2\sigma^2{}_\nu(1-r^2)q}{2n^2p^2} + \frac{\nu^3\sigma^3{}_\nu(1-r^2)^{\frac{3}{2}}q}{2n^2p^2} + O\left(\frac{\nu^4\sigma_\nu^4}{n^4\sigma_\mu^4}\right)\right)\Big) =$$

$$\frac{v\sigma_\nu\sqrt{1-r^2}}{n}+O(\frac{V^2}{\sigma_\nu n^2 p^2})]\times\exp\left\{V\sigma_\nu\sqrt{1-r^2}+\right\}$$

$$+\frac{q^2V^2\sigma^2{}_\nu(1-r^2)}{n}-\frac{q^2V^3\sigma^3{}_\nu(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{6n^2}+\frac{q^3\nu^3\sigma^3{}_\nu(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{2n^2}-V\sigma_\nu\sqrt{1-r^2}-$$

$$-\frac{q\,V^2\sigma^2{}_\nu(1-r^2)}{2np}+\frac{q^2V^3\sigma^3{}_\nu(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{6n^2p^2}+O(\frac{V^4}{n^3})\;=$$

$$\left\{1-\frac{\nu\beta_1\sqrt{1-r^2}}{2\sigma_\nu}+\frac{V^3\sigma^3{}_\nu(1-r^2)^{\frac{3}{2}}(1+p)\beta_1^2}{q\,\frac{6\alpha^2{}_1\beta_1^2p^2(N+M)^2}{q^2}}+\ldots\right\}\times$$

$$\exp\left\{-\frac{V^2q^2\,\alpha_2\beta_2p(N+M)(1-r^2)(1+p)\beta_1^2}{2\alpha\;{}_2\beta_2p\;\;(N+M)\;q^2}-\right\}=$$

$$\left\{1-\frac{V\beta_1\sqrt{1-r^2}}{2\sigma_\nu}+\frac{V^3\sigma^3{}_\nu(1-r^2)^{\frac{3}{2}}(1+p)\beta_1^2q}{6\alpha^2{}_1\beta_1^2p^2(N+M)^2}+\ldots\right\}\times$$

$$\exp\left\{-\frac{V^2q^2\,\alpha_2\beta_2p(N+M)(1-r^2)(1+p)\beta_1^2}{2\alpha\;{}_2\beta_2p\;\;(N+M)\;q^2}\right\} \qquad (14)$$

(11)-(14) дан қуйидагини оламиз

$$\alpha(\mu,\upsilon)=1-\frac{p}{2}(1-u^2)+\frac{p}{2}(1-\upsilon^2)+$$

$$+pO(\frac{1}{\sigma_\mu})+pO(\frac{1}{\sigma_\upsilon})+O(\frac{1}{\sigma_\mu^2})+O(p^2) \qquad (17)$$

(4) ва (10) дан кўринадики,

$$\sigma=\left|\frac{p}{2}(1-u^2)+\frac{p}{2}(1-v^2)+pO(\frac{1}{\sigma_0})+O(\frac{1}{\sigma_0^2})\right|\Pi(\mu,\upsilon)$$

$\mu\to\infty$ да Пуассон тақсимоти нормал қонунга яқинлашади.

Буни ҳисобга олиб I-леммага асосан қуйидаги ўринли бўлади.[4]

$$\sum\sum\left|R(\mu,\nu)-\Pi_3(\mu)\Pi_4(\nu)\right| \;=\lambda_2\alpha_1+\frac{\lambda_1(p,\;\alpha_2\alpha_1)}{\sigma_\nu q}+O(\alpha^2{}_1+\frac{1}{\sigma_\theta^2})$$

теорема исботи келиб чиқди.

6-теорема. Айтайлик , $M\to\infty,\quad \sigma_\mu\to\infty,\quad \alpha_2\to 0,\ p\to 0$

У ҳолда

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|R(\mu,\nu)-\Pi_5(\mu)\Pi_6(\nu)\right| \;=\lambda_2(\alpha_2+p)+O(\alpha_2^2+p^2)$$

Бу ерда

$$\Pi_5(\mu)=\frac{(\frac{kq}{p})^{N-n-1}\frac{q}{p}}{(N-n-1)!}\ \exp\{-\frac{kq}{p}\}\quad ,k=1,2,......$$

бэта-тақсимот,

$$\Pi_6(\nu)=\frac{1}{\sigma_\nu\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{V^2}{2}\} \qquad U=\frac{\mu-nq}{\sigma_\nu q}$$

-нормал тақсимот.

Исбот.Юқоридаги теоремалар исботидаги каби *μ ва ν* индексли йиғиндилар

$$\chi^2<\sigma_0, \quad \chi^2\geq\sigma_0, (\sigma_0=\min(\sigma_\mu\sigma_\upsilon))$$

шартни қаноатлантиради ва уларни мос равишда

σ_1 ва σ_2 лар билан белгилаймиз.

σ_2 ни бахолаймиз.

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}(\mu-\frac{mp}{q})^4\,\Pi_5(\mu)\Pi_6(\nu)=$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\Pi_6(\nu)\sum_{\mu=0}^{\infty}(\mu-\frac{mp}{q})^4\,\Pi_5(\mu)=$$

$$=3\alpha_2^2\,\beta_2^2 q\,M^2+(16\alpha_2^4\beta_1+21\alpha_2^3\beta_2-19\alpha_1^2\beta^2+$$
$$+\alpha_1\beta^3)\,M$$

бундан кўринадики

$$\sum_{u^2+v^2\geq\sigma_0}\Pi_5(\mu)\Pi_6(\nu)\leq\sum_{u^2+v^2\geq\sigma}\frac{(u^2+v^2)^2}{\sigma_0^2}\Pi_5(\mu)\Pi_6(\nu)=$$

$$=0\left(\frac{1}{\sigma_0^2}\right)\qquad(19)$$

Худди шунингдек,(1)-(3) дан қуйидагини оламиз.

$$\sigma_2\leq\sum_{u^2+v^2\geq\sigma_0}R(\mu,\upsilon)+\sum_{u^2+v^2\geq\sigma_0}\Pi_5(\mu)\Pi_6(\upsilon)=0\left(\frac{1}{\sigma_0^2}\right)\qquad(20)$$

Энди $u^2+v^2<\sigma_0$ *учун*

$$\sigma_1=\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left|d(\mu,\upsilon)-1\right|\Pi_5(\mu)\Pi_6(\nu)$$

ифодадаги μ ва υ ларнинг қийматларини қараймиз.

$$R(\mu,\nu)=\frac{(N+M-n-m-\mu-\nu)!}{(M-\mu-\nu)!}\times\frac{N!M!}{(N+M)!}\times\frac{(n+\nu)!}{n!\,\nu!}\times\frac{(m+\mu)!}{m!}\times$$

$$\times\frac{(N-n-m)}{(N+M-n-m-\mu-\nu)(N+M-n-m-\mu-\nu-1)}=$$

$$=\frac{1}{(N-n-m)!}\times I_0\times I_1\times I_2\times I_3\times I_4$$

I_0, I_1, I_2, I_3 ларни соддалаштирамиз.Бунинг учун қуйидаги белгилашлардан фойдаланамиз.

$$\mu = \frac{mp}{q}\left(1 + \frac{u(1-\alpha_1-\alpha_2)}{\sigma_\mu\sqrt{1-r^2}\,\beta_1}\right);$$

$$M-\mu-\nu = M(1-\alpha_1-\alpha_2)\times\left(1-\frac{u\alpha_1}{q\sigma_\mu\sqrt{1-r^2}\,\beta_1}-\frac{V\alpha_2}{q\sigma_\nu\sqrt{1-r^2}\,\beta_2}\right)$$

$$\nu = \frac{np}{q}\left(1+\frac{V(1-\alpha_1-\alpha_2)}{\sigma_\nu\sqrt{1-r^2}\,\beta_2}\right); \qquad N-n-m = N(1-\alpha_1-\alpha_2)$$

Теорема шартига кўра $N \to \infty$, $M \to \infty$, $n \to \infty$, $m \to \infty$

ва u , v ларнинг чегараланган эканлигидан I_1, I_2, I_3 лар учун Стирлинг формуласини қўллаш мумкин эканлиги келиб чиқади.

Яъни (11) (12) (13) дан ва юқоридаги каби теоремалардаги каби аналогик хисоблашлардан сўнг

$$\sigma_1 = \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left|d(\mu,\upsilon)-1\right|\Pi_5(\mu)\Pi_6(\nu) =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left|\frac{R(\mu,\nu)}{\Pi_5(\mu)\Pi_6(\nu)}-1\right|\Pi_5(\mu)\Pi_6(\nu) =$$

$$= \lambda_2(\alpha+p)+O(\alpha^2+p^2)+O\left(\frac{1}{\sigma_\nu}\right)$$

ни ҳосил қиламиз.

ХУЛОСА

Икки ўлчовли Романовкий тақсимоти бўйича тақсимланган тасодифий миқдор корреляция коэффиценти

$$r = -\frac{(m+1)\,(n+1)}{\sqrt{(m+1)\;(N-m)\,(n+1)(N-n\,)}}$$

0 га интилганда бу μ ν тасодифий миқдорлар ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар сифатида уларнинг ҳар бири турли тақсимотларга вариация бўйича яқинлашиши мумкин экан.

Агар корреляция коэффиценти 0 га интилмаса, у ҳолда бу тақсимот икки ўлчовли нормал тақсимотга, икки ўлчовли полиномиал тақсимотга интилиши мумкин.

Исботланган теоремаларда тўғри асимптотик таҳлилидан фойдаланилган.Бу теоремалардан икки ўлчовли Романовский (тескари гипергеометрик) тақсимотни статистик назорат масалаларида, оммавий хизмат кўрсатиш масалаларида қўллаш қийинчилик туғдирганда, яъни N, M, n, m параметрлар етарлича катта бўлганда икки ўлчовли Романовский тақсимотини унинг аппроксимациялари билан алмаштириш мақсадга мувофиқ бўлади.

Адабиётлар

1. Каримов И.А. “Юксак билимли ва интеллектуал ривожланган авлодни тарбиялаш- мамлакатни барқарор тараққий эттириш ва модернизация қилишнинг энг мухим шарти” маърузаси. Халқ сўзи рўйномаси.2012 й. 18 феврал сони.

2. Ўзбекистон Республикасининг Конституцияси. -Тошкент: Ўзбекистон, 1992. 45 б.

3. Ўзбекистон Республикаси Кадрлар тайёрлаш миллий дастури. Баркамол авлод - Ўзбекистон тараққиётининг пойдевори. -Тошкент: Шарљ 1997. - 65 б.

4. Каримов И. А. Ўзбекистон миллий истиқлол, иқтисод, сиёсат, мафкура. -Тошкент: Ўзбекистон, 1996. -364 б.

5. Каримов И. А. Ўзбекистон келажаги буюк давлат. - Тошкент: Ўзбекистон, 1992 - 62 б.

6.Каримов И. А. Ўзбекистон - XXI аср бњсағасида: хафсизликка таҳдид, барқарорлик шартлари ва тараққиёт кафолатлари - Тошкент: Ўзбекистон, 1997. - 315 б.

7.Каримов И. А.. Ўзбекистон буюк келажаги сари. - Тошкент: Ўзбекистон, 1999. - 686 б.

8. Каримов И. А. Ўзбекистон XXI асрга интилмоқда. Тошкент: Ўзбекистон, 1999. - 48 б.

9.Баркамол авлод орзуси // Ш.Қурбонов, Х.Саидов, Р.Ахлидинов. Тўлдирилган 2-нашри. /Ўзбекистон миллий энциклопедияси. -Тошкент: Давлат илмий нашриёти, 2000. - 248 б.

10.Азларов Т.А. Гурвич Т.Л. Уточнение теоремы Ю.В.Прохорова об асимптотическом поведении биномиального распределения.Сб: Вероятностные распределения и математическая статистика.Ташкент.Фан.1986.с.4-19.

11. Азларов Т.А., Умаров С.Е.Аналог одной теоремы Ю.В.Прохорова для гипергеометрического распределения. Доклады АН .Т.275.№1 (1984), с.11-13

12.Азларов Т.А., Умаров С.Е. К асимптотическому поведению гипергеометрического распределения. Доклады АН Уз. № 10 (1981), с.10-11.
13.Аренбаев Н.К. Асимптотическое поведение полиномиального распределения.Теория вероятностей и её применение. Т.ХХ1, № 4 (1976),с.826-831.
14.Аренбаев Н.К. Асимптотическое поведение отрицательно-биномального распределения.Деп. в ВИНИТИ, № 2445-81.
15. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. Москва : Наука, 1977.
16.Колчин В.Ф., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Случайные размещения. Москва : Наука, 1976.
17. Колчин В.Ф. Скорость приближения к предельным рапределениям в классической задаче о дробинках. Теория вероятностей и её применение. Т.Х1, № 1 (1966),с.144-156
18.Прохоров Ю.В. Асимптотическое поведение биномиального распределения. Успехи математических наук, т.У111, № 3 (1953), с.135-142.
19. Романовский В.И. Об упорядоченных выборках из одной итой же непрерывной совокупности.Труды института атематики и механики.Ташкент, 1949,с.5-19.
20.Умаров С.Е. Асимптотическое поведение вероятности гипергеометрического распределения.Доклады АН Уз., № 12 (1980), с. 5-7.
21. Умаров С.Е. Асимптотическое сравнение локальных вероятностей многомерного гипергеометрического и полиномиального распределений. Доклады АН Уз. № 6 (1981), с. 9-12.
22.Умаров С.Е. Изучение асимптотического поведения гипергеометрического распределения.Деп. в ВИНИТИ, № 3290-87.с.37.
23.Умаров С.Е. Асимптотическое изучение поведения гипергеометрического распределения. Диссертация. Ташкент.1985.
24.Азларов Т.А., Юсупова А.К. Асимптотическое поведение одного распределения В.И.Романовского.Доклады АН Уз № 8 (1987), с.7-8.

25 Азларов Т.А., Юсупова А.К. Минимаксная задача предельного поведения распределения В.И.Романовского.Доклады АН Уз № 8 (1990), с.4-5.

26. Юсупова А.К. Асимптотическое изучение поведение распределения В.И.Романовского.Деп. в ВИНИТИ.В-№7547.

27.Юсупова А.К. Предельные теоремы для одного распеделения Романовского и их уточнения.Сб: Асимптотические задачи теория вероятностей и математическая статистикаТашкент.Фан. 1990, с.157-162.

28. Юсупова А.К. Минимаксная задача для распределения Романовского в метрике L_j. Доклады АН Уз. № 4 (1992)с.21-23.

29. Юсупова А.К., Н.Саидова.Икки ўлчовли Романовский тақсимотининг асимптотик хусусиятлари.Фарғона политехника институти илмий-техника журнали.20011 й. № 4. 3-9-бетлар

30. Н.Мирзарахимова, Н.Саидова Эҳтимоллар назарияси мавзуларини ўтишда маънавий тарбия. Фарғона давлат университети илмий хабарлари.