Juft va toq funkiyalar husisida

A.Tohirov
Andiijon Davlat Universiteti

Ma'lumki, funksiya tushunchasi matematik tahlilning asosiy tushunchalaridan biridir. Shunga ko'ra funksiyalarni o'rganishda (tekshirishda), ularni tasniflash (sinflarga ajratish) avvalo funksiyalarning muhim xossalari orqali amalga oshirilishini nazarda tutadigan bo'lsak, ikkinchi tomondan bu ish bizga funksiyalarni yanada chuqurroq o'rganish imkonini beradi va qolaversa ayrim hollarda funksiyani tekshirish uchun sarflanadigan vaqtni kamaytiradi. Bu holatni biz funksiyalarning muhim bir sinfini tashkil qiluvchi – juft va toq funksiyalar sinfida kuzatish mumkin. Bu sinfga kirgan funkiyalar uchun muhim shart, avvalo funksiyaning aniqlanish sohasini koordinatalar boshiga nisbatan simmetrikligi bo'lsa, ikkinchi shart funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan simmetrik nuqtalardagi qiymatlari orasidagi munosabatdir. Endi juft va toq funksiyalarning "geometrik" va "analitik" ta'riflarini eslatib o'taylik.

Juft funksiyaning geometric ta'rifi — Grafigi ordinta o'qiga nibatan simmetrik bo'lgan funksiyani juft funksiya deyiladi.

Juft funkiyaning analitik ta'rifi — Agar $f(x)$ funksiiyaning aniqlanish sohasidan olingan iihtiyoriy x uchun

$$f(-x) = f(x) \qquad (1)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiyani juft funksiya deyiladi.

Toq funksiyaning geometrik tarifi — Grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan funksiyani toq funksiya deyiladi.

Toq funksiyaning analitik ta'rifi — Agar $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan ihtiyoriy x uchun

$$f(-x) = -f(x) \qquad (2)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiyani toq fuunksiya deyiladi.

Funksiyaning juft toq sinfini ajratib oliishdan asosiy maqsad shundaki, bunday sinfga kirgan tekshirilayotganda ularni aniqlanish sohasining barcha nuqtalarida emas, balki, masalan, musbat sonlardan tashkil topgan qismida o'rganish kifoyaligidir. Qolgan nuqtalarda funksiyaning xossalarini esa juft va toq funksiylarning geometrik ta'rifi asosida o'rganilgan qismdagi xossalardan foydalanib osongina aniqlay olamiz.

Juft va toq funksiyalarning yuqorida keltirilgan geometrik va analitik ta'riflarini teng kuchliligini ko'rsataylik. Masalan, $y = f(x)$ funksiyaning analitik ta'rifiga ko'ra juft hamda $(x, f(x))$ nuqta funksiyaning grafigida yotadi deb olsak, juft funksiyaninng aniqlanish sohasi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrikligiga ko'ra $-x$ ham funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lib, natijada $(-x, f(-x)) = (-x, f(x))$ nuqta ham $y = f(x)$ funksiya grafigida yotadi.Demak, har bir $(x, f(x))$ nuqta bilan bir vaqtda grafikda $(-x, f(x))$ nuqta ham yotar ekan. Olingan $(x, f(x))$ nuqta aniqlangan $(-x, f(x))$ nuqtalar esa ordinata o'qiga nisbatan simmetrik nuqtalardir. Bu esa geometrik ta'rifga ko'ra funksiyaning juftligidir. Aksinchasini ham osongina isbot qilish mumkin.

Amalda funksiya asosan analitik usulda berilgani uchun, uni juft yoki toqligini tekshirish analitik ta'riflarda qaralgan (1) yoki (2) tenglikni tekshirishdan iboratdir. Funksiyaning juft ham, toq emasligini tekshirishda esa (1) va (2) tengliklar x ning olishi mumkin bo'lgan qiymatlarning aqalli bittasida to'g'ri sonli tenglikka aylanmasligi ko'rsatiladi, aniqrog'i x ning (1) va (2) tengliklarni noto'g'ri sonli tengliklarga aylantiradigan qiymatlari topiladi. Umuman olganda x ning aynan shunday qiymatlarini topish oson bo'lmasligi mumkin. Bugina emas, xattoki funksiyaning juft yoki toq funksiya bo'lganida ham $f(-x)$ ni hisoblasak uni $f(x)$ ga yoki $-f(x)$ tengligini *"darrov"* ko'rolmasligimiz mumkin. Bu esa $f(x)$ ning ifodasida ayniy almashtirishlar bajarish kerakligini bildiradi. Masalan,

$$g(x) = x^3 + x$$

funksiyani olsak, uning uchun

$$g(-x) = (-x)^3 + (-x) = -(x^3 + x) = -g(x)$$

bo'lib, toq funksiyaning analitik ta'rifiga darrov keldik. Ammo

$$h(x) = ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

Funksiyani olsak, uning uchun

$$h(-x) = ln\left(-x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

Bo'lib, hattoki $h(x)$ toq funksiya bo'lishiga qaramasdan

$$h(-x) = -h(x)$$

Tenglik *"darrov"* ko'rinayotgani yo'q.Agar barcha x larda $x + \sqrt{1 + x^2} > 0$ ekanligini hisobga olsak, $h(-x)$ ning ifodasida ayniy almashtirishlar bajarsak,

$$h(-x) = ln\left(-x + \sqrt{1 + x^2}\right) = ln\frac{\left(-x + \sqrt{1 + x^2}\right)\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}{x + \sqrt{1 + x^2}} =$$

$$= ln\frac{1 + x^2 - x^2}{x + \sqrt{1 + x^2}} = ln\frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} = -ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = -h(x)$$

Ya'ni kutilayotgan natijaga kelamiz.

Juft va toq funksiyalarning ayrim muhim xossalari

Juft funksiyalar uchun:

1. Juft funksiyaning aniqlanish sohasi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.
2. Agarda $f(x)$ juft bo'lib, $f(0)$ aniqlangan bo'lsa, u holda $f(0)$ istalgan son bo'lishi mumkin.
3. $f(x)$ juft funksiya bo'lishi uchun uning aniqlanish sohasidan olingan istalgan x da $f(-x)-f(x)\equiv 0$ bo'lishi uchun zarur va yetarli.
4. agarda $f(x)$ juft funksiya bo'lsa, u holda $f'(x)$ toq funksiya bo'ladi.
5. $f(x)$ juft funksiya bo'lganida, uning aniqlanish sohasiga tegishli $[-a,a]$ kesma uchun $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ bo'ladi.

Toq funksiyalar uchun :

1. Toq funksiyaning aniqlanish sohasi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.
2. Agarda $f(x)$ toq funksiya bo'lib, $f(0)$ aniqlangan bo'lsa, u holda $f(0)=0$ bo'ladi.
3. $f(x)$ toq funksiya bo'lishi uchun uning aniqlanish sohasidan olingan istalgan x da $f(-x)+f(x)\equiv 0$ bo'lishi zarur va yetarlidir.
4. agarda $f(x)$ toq funksiya bo'lsa, u holda $f'(x)$ juft funnksiya bo'ladi.
5. $f(x)$ toq funksiya bo'lganida uning aniqlanish sohasiga tegishli $[-a,a]$ kesma uchun $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan xossalarni sanashda biz ularda qatnashayotgan hosila va integrallarni mavjud deb hisobladik. Juft va toq funksiyalar uchun o'rinli bo'lgan yuqoridagi xossalarning dastlabki uuchtasi ularning ta'riflaridann kelib chiqadi. Shu sababli to'rtinnchi va beshinchi xossalarni isbotlash kifoyadir. Isbotlashni juft uchun bajaraylik.

4-xossaning isboti: Hosilaning ta'rifiga asosan

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ bo'lib, $f(x)$ juft funksiya bo'lganida

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{-h}=$$

$$=-\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-f'(x)$$

Tenglikka kelamiz. Shunni isbotlamoqchi edik.

5-xossaning isboti : Integral xossalariga ko'ra

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{a}f(x)dx$$

Bo'lib, o'ng tomondagi birinchi integralda $x=-t$ almashtirish bajarib

$\int_{-a}^{0}f(x)dx=\int_{a}^{0}f(-t)d(-t)=-\int_{a}^{0}f(t)dt=\int_{0}^{a}f(t)dt=\int_{0}^{a}f(x)dx$ va uni tenglikka qo'yish bilan kerakli natijanni olamiz.

Bu xossalarning uchinchisidan foydalanib funksiyaning juft ham, toq ham emasligini isbotlashda $f(-x)-f(x)$ ayirmani va $f(-x)+f(x)$ yig'indini x ning barcha qiymmatlarida aynan nolga teng emasligini, ya'ni natijada x ga bo'g'liqligi ko'rsatiladi.

Misollar :

1. yuqorida qaralgan $h(x)=ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ fnnksiyaning toqligini toq funksiyaning uchinchi xossasiga ko'ra isbotlaylik.

U holda

$$h(-x)+h(x)=ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)+ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=$$

$$=ln\left(\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)=ln\left(1+x^2-x^2\right)=ln1=0$$

Ya'ni $h(-x)+h(x)$ yig'indi aynnnan nolga teng bo'lganni uchun $h(x)$ funksiya toq funksiyadir.

2. Ushbu $f(x)=x^2-x+1$ funksiyaning juft yoki toqligini tekshiring.

Bu funksiya toq emas, chunki $f(0)=1\neq 0$ (toq funksiyaning ikkinchi xossasi bajarilmaydi) va $f(-x)-f(x)=\left(x^2+x+1\right)-\left(x^2-x+1\right)=2x\neq 0$ ya'ni

$f(-x)-f(x)$ ayirma aynan nolga teng bo'lmagani uchun uchinchi xossaga ko'ra $f(x)$ funksiya ham juft emas.

3. Ushbu $f(x)=\dfrac{x+2}{3-x}$, $h(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x+4}$ funksiyalarning juft ham emasligini ko'rsating.

Bu funksiyalarni aniqlanish sohalari koordintalar boshiga nisbtan simmetrik emasligi sababli juft va toq funksiyalarning birinchi xossasi bajarilmaydi va demak juft ham, toq ham emas.

4. Ushbu $f(x)=\dfrac{3}{x^3}+\sqrt[3]{x}$, $g(x)=|x|+x^3$, $h(x)=\sqrt[3]{x-1}$ funksiyalarning juft yoki toqligini anniqlang.

Hisoblsak, $f(-x)=-\dfrac{3}{x^3}-\sqrt[3]{x}$, $g(-x)=|x|-x^3$, $h(-x)=-\sqrt[3]{x-1}$

bo'ladi. U holda $f(-x)+f(x)=-\dfrac{3}{x^3}-\sqrt[3]{x}+\left(\dfrac{3}{x^3}+\sqrt[3]{x}\right)\equiv 0$ bo'lgani uchun $f(x)$ toq funksiyadir.

So'ngra $g(-x)-g(x)=-2x^3\neq 0$, $g(-x)+g(x)=2|x|\neq 0$ bo'lgani uchun $g(x)$ funksiya juft ham, toq ham emas.

Nihoyat $h(0)=-1\neq 0$, $h(-x)-h(x)=-\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\neq 0$ bo'lgani uchun $h(x)$ funksiya toq ham emas, juft hhamm emas.

5. Agarda $\dfrac{1}{\sqrt{2\text{л}\text{б}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\text{б}^2}}dx=1$ bo'lsa, u holda $\dfrac{1}{\sqrt{2\text{л}\text{б}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\text{б}^2}}dx$ integralni hisoblang.

Hisoblasak,

$$\frac{1}{\sqrt{2\text{лб}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\text{б}^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\text{лб}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(a+(x-a)\right)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\text{б}^2}}dx=$$

$$=a\frac{1}{\sqrt{2\text{лб}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\text{б}^2}}dx+\frac{1}{\sqrt{2\text{лб}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\text{б}^2}}dx=$$

$$=a+\frac{1}{\sqrt{2\text{лб}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\text{б}^2}}dx$$

Bo’lib ohirgi integralda $x-a=t$ almashtirishni bajarsak

$$\frac{1}{\sqrt{2\text{лб}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\text{б}^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\text{лб}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}te^{-\frac{t^2}{2\text{б}^2}}dt$$

Bo’ladi. Ammo $f(t)=te^{-\frac{t^2}{2\text{б}^2}}$ funksiya toqligi sababli toq funnksiyaning beshinchi xossasiga ko’ra ohirgi integral nolga teng. Demak $\frac{1}{\sqrt{2\text{лб}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\text{б}^2}}dx=a$ To’rtinchi va beshinchi xossalar funksiyalarni mos sinflarga kirishishining zaruriy sharti bo’lib, aslo yetarli shartlar emas.

6. Ushbu $f(x)=\frac{1}{x}+1$ funksiyani qarasak, uning uchun $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ bo’lib $f'(x)$ juft funksiya , ammo $f(x)$ esa $f(-x)+f(x)=-\frac{1}{x}+1+\frac{1}{x}+1=2\neq 0$ bo’lgani uchun toq funksiya emas.

7. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{10}{9}x, & -3\le x<0\\ \frac{5}{9}x^2, & 0\le x\le 3\end{cases}$$

funksiya juft emasligini, ammo

$\int\limits_{-3}^{3}f(x)dx=2\int\limits_{0}^{3}f(x)dx$ tenglik turg’unligini ko’rsating.

Haqiqatan bu funksiyaning juft emasligi grafigining $[-3,0)$ dagi qismi to'g'ri chiziq kesmadan va $[0,3]$ dagi qismi esa parabola bo'lagidan kelib chiqadi. So'ngra $\int_{-3}^{3} f(x)dx = \int_{-3}^{0}\left(-\frac{10}{9}x\right)dx + \int_{0}^{3}\frac{5}{9}x^2dx = 10$

$2\int_{0}^{3} f(x)dx = 2\int_{0}^{3}\frac{5}{9}x^2dx = 10$ bo'lgani uchun masalaning ikkinchi qismi ham ko'rsatiladi.