МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НАВОИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

УДК 372.851.4

КАРАМАТОВ БОЛАТБЕК ТЫНЧБЕКОВИЧ

ДВУМЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В ПЯТИМЕРНОМ ПСЕВДОЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание академической степени магистра

5A110101 – Методика преподавания точных и естественных наук (математика)

Научный руководитель:

проф. А. Артыкбаев

Навои – 2019 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации в XXI веке концепция непрерывного образования, подразумевающая процесс роста образовательного потенциала личности в течение всей жизни, приобретает ключевое знание. [1] Непрерывное пополнение, уточнение знаний, приобретение и осмысление новой информации, выработка новых умений и навыков становятся важнейшими предпосылками повышение интеллектуального уровня человека, уровня его жизни, насущной потребностью для любого специалиста. Идея непрерывного образования трансформировалась от потребности образования на всю жизнь в тезис – образование через всю жизнь. Система образования включает ряд ступеней, которые по своей природе дискретны, но благодаря преемственности обеспечивается ее непрерывность. Диалектическая взаимосвязь, единство непрерывности и дискретности как важные характеристики системы непрерывного образования обеспечиваются оптимальной организацией преемственности всех ее ступеней. Преемственность позволяет плавно переходить человеку от одного этапа развития к последующему, от одной к следующей, более высокой ступени образования. Проблема преемственности между различными ступенями системы непрерывного образования приобретает особое значение. Ее содержание, значение и роль существенно обогащаются, поскольку в данном случае, речь идет о взаимосвязи и взаимодополняемости последовательных подсистем непрерывного образования.

Образование человека – это не только получение им знаний со стороны, это его становление, оформление его самости и цельности. В итоге: человек образовался, то есть получился, состоялся. Демократические изменения в обществе привели к серьезным изменениям и в системе образования.

Этот процесс сопровождается существенными изменениями в педагогической теории и практике учебно-воспитательного процесса.

«Процветание Родины, прежде всего, зависит от молодого поколения, улучшения условий жизни людей» – утверждает базовый документ жизни нашего общества. Система образования в наши дни изменяется, уже существуют новые подходы к формированию поколения с новым сознанием, соответствующего целям и задачам Узбекистана XXI века. [1]

В современных условиях, когда главным показателем конкурентоспособности страны все в большей мере становятся уровень и качество жизни населения, возрастает роль образования - важнейшего фактора прогресса.

Образование является неотъемлемой частью социальной сферы жизни общества. От успехов образования во многом зависят и экономика, и правовое сознание, и нравственный облик общества. Поэтому закономерно принятие Национальной программы по подготовке кадров и Закона «Об образовании» Республики Узбекистан. Формирование самостоятельно и свободно мыслящей личности, способной сознательно-политической жизни, активно влиять на социальные процессы, ответственность за судьбу страны, семьи – это главный приоритет национальной программы по подготовке кадров. Сегодня каждый знает, что такое информатизация. Кризис системы профессионального и общего образования свидетельствует о разрыве между резко изменившимися условиями жизни и образовательной системой, ее целями, видами, содержанием и технологиями обучения. К важнейшим причинам, породившим кризис, относятся: возросший спрос на качество образования; новые требования к преподавательской деятельности; консерватизм сферы образования и недостаточная ее адаптированность к меняющимся потребностям общества; необходимость формирования профессионального мышления, активности, самодеятельности будущих специалистов и т.д. В ряду этих факторов стоит не разработанность технологий профессионального обучения. Традиционная технология обучения (от знания к умениям), основанная на логике науки, должна быть дополнена новыми технологиями, основанными на закономерностях познавательной деятельности. В Указе Президента нашей страны [3] «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 7 февраля 2017 года определены задачи по развитию социальной сферы, в частности, сферы образования и науки. В документе предусмотрены укрепление материально-технической базы образовательных учреждений, строительство новых, проведение реконструкции и капитального ремонта существующих, оснащение их современными учебным и лабораторным оборудованием, компьютерной техникой и учебно-методическими пособиями. При этом придается важное значение изучению молодежью богатого наследия наших великих предков, воспитанию молодого поколения их достойными преемниками зрелыми личностями. Сегодня в нашем образовании провозглашен принцип вариативности, который дает возможность педагогическим коллективам учебных заведений выбирать и конструировать педагогический процесс по любой модели, включая авторские. В этом направлении идет и прогресс образования: разработка различных вариантов его содержания, использование возможностей современной дидактики в повышении эффективности образовательных структур; научная разработка и практическое обоснование новых идей и технологий. При этом важна организация своего рода диалога различных педагогических систем и технологий обучения, апробирование в практике новых форм - дополнительных и альтернативных государственной системе образования. В таких условиях учителю необходимо ориентироваться в широком спектре современных инновационных технологий, идей, школ, направлений, не тратить время на открытие уже известного, а использовать весь арсенал педагогического опыта. Сегодня быть педагогически грамотным специалистом нельзя без изучения всего обширного спектра образовательных технологий. Так как в образовании Узбекистана произошли кардинальные изменения. Президент Республики Узбекистан подписал указ «О дополнительных мерах по совершенствованию системы управления народным образованием». В документе отмечается, что проведенный критический анализ состояния дел в сфере народного образования выявил ряд проблем и недостатков в организации управления системой народного образования, действенной координации деятельности государственных учреждений общего среднего образования, финансировании мероприятий по улучшению их материально-технического состояния.

Проблемой также является возложение на руководителей общеобразовательных учреждений несвойственных им задач и функций, размытое распределение полномочий между директором учреждения и его заместителями, отсутствие конкретных критериев и индикаторов оценки эффективности их деятельности.

До сих пор мы рассматривали мир Минковского в плоском сечении, что позволило упростить математический аппарат и представить в наиболее наглядной форме геометрическую интерпретацию эффектов специальной теории относительности. Вспомним, что линейное пространство обладает метрическими свойствами, если в нем определена операция скалярного умножения его элементов. Метрические свойства пространства могут быть исчерпывающе характеризованы метрическими отношениями между векторами базиса. Для того чтобы метрические свойства линейного пространства были псевдоевклидовыми, в базисе пространства должны быть как векторы вещественной длины, так и векторы мнимой длины. Псевдоевклидово пространство - действительное аффинное пространство, в котором каждым двум векторам a и b поставлено в соответствие определенное число, называемое скалярным произведением (a, b).

В псевдоевклидово пространство имеются три вида сфер: сферы с положительным квадратом радиуса: $(x, x)=r^2$, сферы с отрицательным квадратом радиуса: (x, x)=- s^2 и сферы нулевого радиуса: (x, x)=0, совпадающие с изотропным конусом.

Объектом исследования являются особенности применения основные понятия теории поверхности в псевдоевклидовом пространстве .

Предмет исследования - изучение и выявление эффективных путей, методов и средств инновационных технологий в изучении геометриях.

Целью исследования построение основ теории двумерных поверхностей в пятимерном псевдоевклидовом пространстве и изучение линий на этих поверхностях.

В связи с этим необходимо решить следующие **задачи:**

-сначала изучать кривые и поверхности в простейших псевдоевклидово пространствах;

- изучение двумерных поверхностей в пятимерном пространстве;

- собрать материал из книг и журналов: «Об основаниях геометрии», «Векторное исчисление», «Многомерная геометрия», «Принцип относительности и геометрия Лобачевского», «О поверхностях евклидова пространства с вырождающимся абсолютом», «Аргументы и факты» и др.;

- геометрическая характеристика репера линии на двумерной поверхности в псевдоевклидовах пространстве;

- исключить малоэффективные вербальные способы передачи знаний;

Гипотеза исследования. В условиях новой парадигмы направленности учебного процесса на формирование прежде всего личности специалиста, а затем профессионала, ведущими технологиями становятся личностно ориентированные стратегии обучения, которые нацелены на формирование нового типа мышления преподавателей и соответственно овладение ими комплексными умениями по организации учебного процесса технологического типа.

Научная новизна диссертации состоит в следующем:

- предпринята попытка полного анализа инновационных технологий в решении задач;

- исследование геометрического строение и доказательство существование ряда классов поверхности;

- дифференциальная геометрия полуевклидовых пространств;

Литературный обзор. Александров А.Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхности. М.-Л. ОГИЗ, 1948. 388 с, Александров А.Д. Выпуклые многогранники. М.-Л. Гостехиздат, 1950. 282 с, Бакельман И.Я. Геометрические методы решения эллиптических уравнений, Ефимов Н. В. Возникновение особенностей на поверхностях отрицательной кривизны, Акивис М.А. Многомерная дифференциальная геометрия Калинин, 1977, 84 с. Артыкбаев А К проблеме Минковского в галилеевом пространстве,

Для реализации целей и задач исследования применялись следующие **методы:** теоретический анализ литературы, обобщение и систематизация отобранного фактического материала, сравнение, описание, наблюдение.

Фактическим материалом исследования явились технологии обучения.

Теоретическая значимость исследования определяется следующим: Для того, чтобы деятельность студента в ходе изучения и анализа произведения была приоритетной, необходимо использовать активные формы обучения.

Практическая значимость исследования:

Одна из основных целей дисциплина геометрии - активизация познавательного интереса студента к художественному произведению и личности автора.

Структура и объём диссертации. Работа состоит из введения, трех глав, выводов по главам, заключения, списка использованной литературы, приложений. Общий объем работы –77 страниц, из них основного текста – 73 страниц,

Во введении обосновывается актуальность исследования, характеризуется степень разработанности проблемы, формулируются цели и задачи исследования, определяются научная новизна и практическая значимость работы, а также общая структура диссертации.

В первой главе «Аналитическое определение псевдоевклидовых и полуевклидовых пространств» Псевдоевклидово пространство ${}^1R_3$ содержит плоскости трех родов: плоскости с положительно определенной (дефинитной) метрикой, плоскости с индефинитной метрикой и плоскости с вырожденной метрикой $(ds^2 = dx^2)$. Особую роль в геометрии этого пространства играет изотропный конус, т. е. конус, образованный теми точками пространства, которые удалены на нулевое расстояние от вершины. Уравнение изотропного конуса К с вершиной в начале координат имеет вид

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

Касательные к изотропному конусу плоскости имеют вырожденную метрику, т. е. сам конус является поверхностью с вырожденной метрикой. Разумеется, в псевдоевклидовом пространстве есть и другие поверхности с вырожденной метрикой.

Во второй главе «Полные поверхности в псевдоевклидовом пространстве » Наложенное пространство. Тот факт, что топология пространства с индефинитной метрикой понимается как топология многообразия-носителя, удобно описать с помощью следующего приема. Зафиксируем в псевдоримановом пространстве ${}^1R_3$ декартову систему координат x, y, z и свяжем с этой системой координат евклидово пространство R_3 с линейным элементом

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

В третьей главе «Двумерные поверхности в пятимерном псевдоевклидовом пространстве» Предположим, что A и B - две замкнутые и гладкие строго выпуклые поверхности в $^2R_5$. Это границы компактных строго выпуклых областей в $^2R_5$с непустой внутренней частью. Чтобы изучить движение A и B друг на друге, нам нужно четкое описание конфигураций контактов. Каждая контактная конфигурация этих поверхностей может быть определена путем идентификации касательной плоскости A с касательной плоскостью B что может быть сделано двумя различными способами в соответствии с различными ориентациями касательных плоскостей. В одном из этих двух типов контактных конфигураций две поверхности касаются друг друга снаружи, а в другом случае они касаются изнутри.

В заключении полугеодезические координаты на многообразиях с индефинитной метрикой. Поскольку на этих многообразиях одновременно наблюдается как экспоненциальная неустойчивость геодезических, так и тенденция к существованию сопряженных точек. По аналогии с этим можно дать определение обобщенных псевдоевклидовых и полуевклидовых точечных пространств. С его помощью определяются псевдоевклидовы и полуевклидовы векторные пространства. Для того, чтобы показать структуру новых пространств, более подробно рассматривается псевдоевклидова плоскость (плоскость Минковского)

ГЛАВА I. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПСЕВДОЕВКЛИДОВЫХ И ПОЛУЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

1.1.Обобщенное скалярное произведение векторов. Псевдоевклидовы и полуевклидовы пространств

В евклидовом пространстве в ортонормированном базисе скалярное произведение определяется по формуле $\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$, где $\bar{a} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $\bar{b} = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$. Отсюда $|\bar{a}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$. Но уже из теории относительности в 4^x мерном пространстве времени следует , что длина отрезка вычисляется по формуле $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - t^2}$. Следовательно , встает задача обобщения скалярного произведения векторов и определения с его помощью «новых» геометрических пространств. Если же векторы заданы координатами в произвольном базисе, то их скалярное произведение определяется с помощью билинейной симметрической формы от наборов по *n* переменных. Но симметрические билинейные могут быть как различных рангов, так и различных положительных индексов инерции. Это дает возможность для обобщения скалярного произведения и определения обобщенных евклидовых пространств. [7]

Существует и аксиоматический подход к определению евклидова векторного пространства. Обобщая его, можно дать аксиоматическое определение обобщенного скалярного произведения векторов. С помощью евклидова пространства определяется евклидово точечное пространство. По аналогии с этим можно дать определение обобщенных псевдоевклидовых и полуевклидовых точечных пространств. С его помощью определяются псевдоевклидовы и полуевклидовы векторные пространства. Для того, чтобы показать структуру новых пространств, более подробно рассматривается псевдоевклидова плоскость (плоскость Минковского)

Пусть V_n –n мерное векторное пространство. $B=\{\bar e_1,\bar e_2,...,\bar e_n\}$-базис, $\bar a=\{x_1\bar e_1+x_2\bar e_2+...+x_n\bar e_n\}$, $\bar b=\{y_1\bar e_1+y_2\bar e_2+...+y_n\bar e_n\}$.Зафиксируем билинейную форму $\psi(x_1,x_2,...,x_n;y_1,y_2,...,y_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$. Преобразованием координат эту форму можно привести к нормальному виду, т.е. к виду $x_1y_1+...+x_ky_k-x_{k+1}y_{k+1}-...-x_ry_r$, где $r\le n$.Будем считать что базис B выбран уже такой, что форма ψ имеет нормальный вид.

<u>Определение 1</u>. Обобщенным скалярным произведением векторов называется билинейная форма от наборов координат этих векторов, которая имеет вид $\bar a\cdot\bar b=x_1y_1+...+x_ky_k-x_{k+1}y_{k+1}-...-x_ry_r$, где $r\le n$.

Свойства

1^0 $(\alpha\bar a)\cdot\bar b=\alpha(\bar a\cdot\bar b)$.

Доказательство.

$\alpha\bar a=\alpha x_1\bar e_1+\alpha x_2\bar e_2+...+\alpha x_n\bar e_n$, $\bar b=y_1\bar e_1+y_2\bar e_2+...+y_n\bar e_n$

$$(\alpha\bar a)\cdot\bar b=\alpha x_1y_1+...+\alpha x_ky_k-\alpha x_{k+1}y_{k+1}-...-\alpha x_ry_r=\alpha(x_1y_1+...+x_ky_k-x_{k+1}y_{k+1}-...-x_ry_r)=$$
$$=\alpha(\bar a\cdot\bar b)$$

2^0 $(\bar a+\bar b)\cdot\bar c=\bar a\cdot\bar c+\bar b\cdot\bar c$.

Доказательство. $\bar a=x_1\bar e_1+x_2\bar e_2+...+x_n\bar e_n,\bar b=y_1\bar e_1+y_2\bar e_2+...+y_n\bar e_n$,

$\bar c=z_1\bar e_1+z_2\bar e_2+...+z_n\bar e_n$ $\bar g=\bar a+\bar b=(x_1+y_1)\bar e_1+(x_2+y_2)\bar e_2+...+(x_n+y_n)\bar e_n$,тогда

$$(\bar a+\bar b)\cdot\bar c=\bar g\cdot\bar c=(x_1+y_1)z_1+...+(x_k+y_k)z_k-(x_{k+1}+y_{k+1})z_{k+1}-....-(x_r+y_r)z_r=$$
$$=(x_1z_1+...+x_ky_k-x_{k+1}z_{k+1}-...-x_rz_r)+(z_1y_1+...+z_ky_k-z_{k+1}y_{k+1}-...-z_ry_r)=\bar a\cdot\bar c+\bar b\cdot\bar c$$

<u>Определение 2</u>. Обобщенной длиной вектора $\bar a$ называется число $\sqrt{\bar a\cdot\bar a}$ (обозн.$\sqrt{\bar a^2}=|\bar a|$) $|\bar a|=\sqrt{x_1^2+...+x_k^2-x_{k+1}^2-...-x_r^2}$.

По длине ненулевые векторы разбиваются на 3 типа:

-векторы 1-го рода $\Leftrightarrow$ их длина положительное действительное число.

-векторы 2-го рода $\Leftrightarrow$ их длина чисто мнимое число.

-изотропные векторы $\Leftrightarrow$ их длина равна 0, а сам вектор не нулевой.

3^0 *Коллинеарные векторы- векторы одного и того же рода.*

Доказательство.

Пусть $\bar{a}=\{x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+...+x_n\bar{e}_n\}$ вектор 1 рода , а вектор $\bar{b}=\{y_1\bar{e}_1+y_2\bar{e}_2+...+y_n\bar{e}_n\}$ коллинеарен ему. Тогда по условию коллинеарности $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=...=\frac{y_n}{x_n}=k$ или $y_1=kx_1, y_2=kx_2,..., y_n=kx_n$. Длина вектора $|\bar{a}|=\sqrt{x_1^2+...+x_k^2-x_{k+1}^2-...-x_r^2}$ >0,т.к. $\bar{a}$ -рода, длина $|\bar{b}|=\sqrt{y_1^2+...+y_k^2-y_{k+1}^2-...-y_r^2}=$

$=\sqrt{k^2x_1^2+...+k^2x_k^2-k^2x_{k+1}^2-...-k^2x_r^2}=\sqrt{k^2(x_1^2+...+x_k^2-x_{k+1}^2-...-x_r^2)}=$

$=|k|\sqrt{x_1^2+...+x_k^2-x_{k+1}^2-...-x_r^2}>0 \Rightarrow \bar{b}$ -вектор 1 рода. Аналогично доказывается для 2 и 3 рода.

Прямая называется прямой 1-го рода, если её направляющий вектор 1-го рода.

Прямая называется прямой 2-го рода, если её направляющий вектор 2-го рода.

Прямая называется изотропной, если её направляющий вектор изотропный.

<u>Определение 3.</u> Векторное пространство V_n называют псевдоевклидовым векторным пространством (полуевклидовым векторным пространством), если на нем определено обобщенное скалярное произведение и *r=n (r<n).*Число *к* называется положительным индексом инерции. Псевдоевклидово пространство индекса *к* обозначают V_n^k.Если *r* ранг билинейной формы, а *d=n-r* её дефект, то полуевклидово векторное пространство индекса *к* и дефекта *d* обозначают ${}^dV_n^k$. [7]

Пусть E_n-множество точек, V_n^k (${}^dV_n^k$) псевдоевклидово (полуевклидово) векторное пространство.

<u>Определение 4.</u> Множество точек E_n называют псевдоевклидовым (полуевклидовым) точечным пространством, если определено отображение $\sigma:(E_n \times E_n) \to V_n^k$ (или ${}^dV_n^k$) $(\forall (A,B)\in E_n, \exists \bar{a} \in V_n^k : (A,B) \overset{\sigma}{\to} \bar{a}$, принято обозначать $\bar{a} = AB$) и выполняются аксиомы

В1. $E_n \neq 0$.

В2. V_n^k ($или\, {}^dV_n^k$) -n мерное векторное псевдоевклидово(полуевклидово) пространство индекса κ (и дефекта d).

В3. σ - сюрьективное отображение.

В4. $(\forall A \in E_n)(\forall \bar{a} \in V_n^k\, (или\, {}^dV_n^k))\exists! B : \overline{AB} = \bar{a}$.

В5. $(\forall A,B,C \in E_n)\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Псевдоевклидово точечное пространство обозначается

E_n^k,полуевклидово ${}^dE_n^k$.

Так как V_n^k (${}^dV_n^k$) есть векторное пространство, то E_n^k и ${}^dE_n^k$ являются аффинными пространствами, т.е. все аффинные свойства пространства $E_n^k({}^dE_n^k)$.сохраняются, в частности $\underset{A,\bar{a}}{l} = \{MI\,\overline{AM} = \alpha\bar{a}, \alpha \in R\}$.

До сих пор мы рассматривали мир Минковского в плоском сечении, что позволило упростить математический аппарат и представить в наиболее наглядной форме геометрическую интерпретацию эффектов специальной теории относительности. Вспомним, что линейное пространство обладает метрическими свойствами, если в нем определена операция скалярного умножения его элементов. Метрические свойства пространства могут быть исчерпывающе характеризованы метрическими отношениями между векторами базиса. Для того чтобы метрические свойства линейного пространства были псевдоевклидовыми, в базисе пространства должны быть как векторы вещественной длины, так и векторы мнимой длины. *Псевдоевклидово пространство* - действительное аффинное пространство, в котором каждым двум векторам a и b поставлено в соответствие определенное число, называемое скалярным произведением (a, b). Действительное аффинное пространство, в котором каждым двум векторам a и b поставлено в соответствие определенное число, называемое скалярным произведением (a, b).

1) Скалярное произведение коммутативно: (a, b) =(b, a).

2) скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов: (a(b + c)) = (a, b) +(a, c).

3) числовой множитель можно вынести за знак скалярного произведения:

(k a, b) = k(a, b).

В псевдоевклидово пространство имеются три вида прямых: евклидовы, направляющий вектор которых имеет положительный скалярный квадрат ((a, a)>0), псевдоевклидовы (a, a)<0) и изотропные ((a, a)=0). Совокупность всех изотропных прямых, проходящих через некоторую точку, изотропным конусом.

В псевдоевклидово пространство имеется несколько видов плоскостей: евклидовы плоскости E_2, псевдоевклидовы плоскости E(1;1) и плоскости, содержащие изотропные векторы,- т. н. полуевклидовы плоскости сигнатуры (0,1) и (1,0) и дефекта 1 и изотропные плоскости, все векторы которых изотропны.

В псевдоевклидово пространство имеются три вида сфер: сферы с положительным квадратом радиуса: (x, x)=r^2, сферы с отрицательным квадратом радиуса: (x, x)=- s^2 и сферы нулевого радиуса: (x, x)=0, совпадающие с изотропным конусом.

1.2.Псевдоевклидова плоскость. (Плоскость Минковского) Движение плоскости Минковского

Рассмотрим частный случай псевдоевклидова точечного пространства при *n*=2 (т.е. плоскость). Возможны случаи:

1) $\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 y_1 + x_2 y_2$ (евклидов случай)

2) $\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 y_1 - x_2 y$ (псевдоевклидов случай)

3) $\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 y_1$ (полуевклидов случай)

4) $\bar{a}\cdot\bar{b} = -x_1y_1 - x_2y$ (изоморфно евклидову случаю)

5) $\bar{a}\cdot\bar{b} = -x_1y_1$ (изоморфно полуевклидову случаю)

Зафиксируем на аффинной плоскости систему координат и будем изображать на ней новую плоскость. Для длин вектора возможно три случая

1) $|\bar{a}| > 0 \Leftrightarrow x_1^2 - y_1^2 > 0 \Leftrightarrow |x_1| > |y_1|$

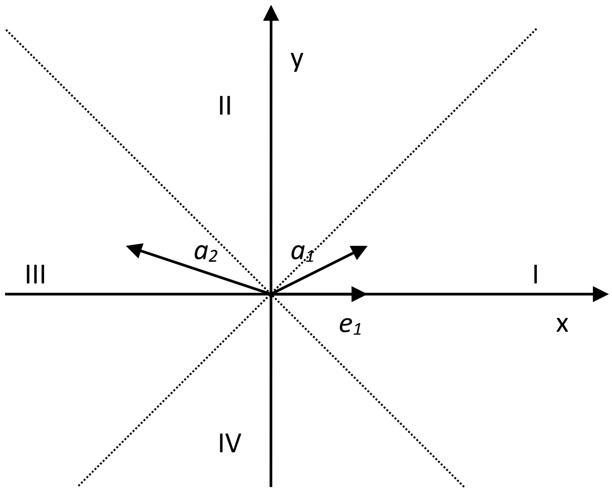


Рисунок 1.2.1

Если такие векторы откладывать от начала координат, то они отложатся внутри I и III углов, образованных “биссектрисами” координатных углов .

2) $|\bar{a}| = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - y_1^2 = 0 \Leftrightarrow |x_1| = |y_1|$.Такие векторы параллельны биссектрисам координатных углов.

3) $|\bar{a}| = \alpha i, \alpha \in R^+ \Leftrightarrow x_1^2 - y_1^2 < 0 \Leftrightarrow |x_1| < |y_1|$. Эти векторы откладываются от начала координат во II и IV углах.

Так как все коллинеарные векторы есть векторы одного и того же рода , то все прямые можно разбить тоже на три типа:

-Прямая называется прямой 1-го рода, если её направляющий вектор 1-го рода.

-Прямая называется прямой 2-го рода, если её направляющий вектор 2-го рода.

-Прямая называется прямой изотропной, если её направляющий вектор изотропный.

<u>Определение 5</u>. Расстоянием между точками A и B назовем обобщенную длину вектора $\overline{AB} : |AB| = |\overline{AB}|$. Если $A(x_1, y_2)$ $B(x_2, y_2)$ то $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$. Расстояние может быть действительным числом, нулем , и чисто мнимым числом.

Свойства расстояний:

1^0 $|AB| = |BA|$ для $\forall$ A,B.

2^0 если $|AB|,|AC|,|BC|$ расстояния одного и того же рода, то выполняется неравенство

$$|AC| \le |AC| + |CB|.$$

Введем вспомогательную систему координат, повернув данную с.к. на 45^0. Формулы преобразования координат будут:

$$\begin{cases} x = X\cos 45 - Y\sin 45, \\ y = X\sin 45 + Y\cos 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X - Y), \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \end{cases}$$

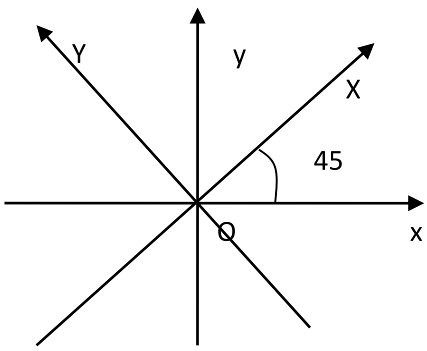


Рисунок 1.2.2

Тогда

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}(X_2 - Y_2 - X_1 + Y_2)^2 + \frac{1}{2}(X_2 + Y_2 - X_1 - Y_2)^2} =$$

$$= \sqrt{2(X_2 - X_1)(Y_1 - Y_2)}$$

<u>Определение 6</u>. Окружностью называется множество точек плоскости Минковского, равноудаленных от данной точки. Эта точка называется центром окружности. Расстояние, на которое удалены все точки окружности от центра, называется радиусом окружности. Пусть $C(X_0, Y_0)$- центр, r радиус окружности, тогда точка $M(X,Y)$ $\in окр(C,r) \Leftrightarrow |MC| = r$, т.е. $\sqrt{2(X - X_0)(Y_0 - Y)} = r$ или $2(X - X_0)(Y_0 - Y) = r^2$ - уравнение во вспомогательной с.к. (в основных координатах $(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = r^2$).

Если $r>0$, то окружность называется окружностью 1 рода.

Если r чисто мнимое число, то окружность называется окружностью 2 рода.

Если $r=0$, то окружность называется изотропной.

Из уравнения окружности следует, что она изображается гиперболой с центром в $C(x_0,y_0)$. Оси этой гиперболы параллельны осям O_x, O_y, а асимптоты параллельны биссектрисам координатных углов, т.е. параллельны осям O_X, O_Y.

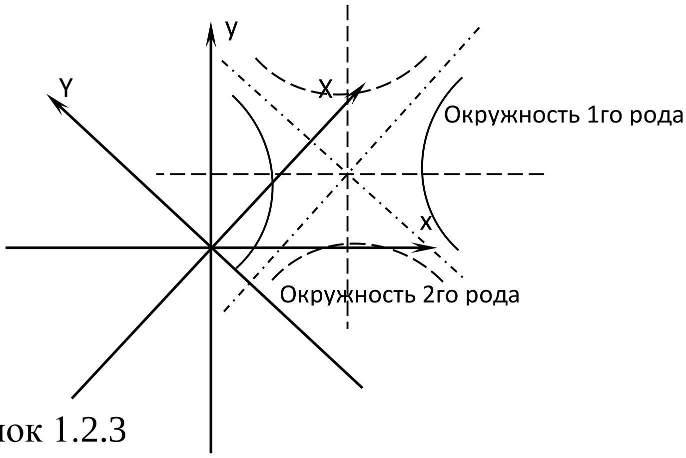


Рисунок 1.2.3

Определение 7. Движением плоскости E_2^1 называют такое аффинное преобразование, которое сохраняет обобщенное расстояние между точками. Выведем формулы движения. Так как движение аффинное преобразование, то его формулы во вспомогательных координатах

(1) $\begin{cases} X' = m_1 X + m_2 Y + a, \\ Y' = n_1 X + n_2 Y + b, \end{cases}$ $\begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Найдем коэффициенты m_i и n_i так, чтобы сохранялось расстояние между точками. Пусть

$A(X_1, Y_1) \to A'(X'_1, Y'_1);$
$B(X_2, Y_2) \to B'(X'_2, Y'_2).$ Тогда $|A'B'| =$

$$= \sqrt{2(X'_2 - X'_1)(Y'_1 - Y'_2)} = \sqrt{2}\sqrt{(m_1X_2 + m_2Y_2 + a - m_1X_1 - m_2Y_1 - a)\cdot}$$

$$\cdot\sqrt{(n_1X_1 + n_2Y_1 + b - n_1X_2 + n_1Y_2 - b)} = \sqrt{2}\sqrt{[m_1(X_2 - X_1) + m_2(Y_2 - Y_1)]\cdot}$$

Так как $|AB| = |A'B'|$, то $[m_1(X_2 - X_1) + m_2(Y_2 - Y_1)]\cdot[n_1(X_1 - X_2) + n_2(Y_1 - Y_2)] =$

$= (X_2 - X_1)(Y_1 - Y_2)$. В левой и правой части стоят многочлены от $(X_2 - X_1), (Y_1 - Y_2)$. Они равны при всех значениях переменных. Это верно тогда и только тогда, когда равны соответствующие коэффициенты:

$$\begin{cases} -m_1n_1 = 0, \\ -m_2n_2 = 0, \\ m_1n_2 + n_1m_2 = 1 \end{cases}$$

Решим полученную систему. Возможны случаи:

1) $m_1=0$. Так как $\Delta \neq 0$, то $n_1 \neq 0$ и $m_2 \neq 0$, следовательно, $n_2=0$, из 3го уравнения $n_1m_2=1$. Если обозначить $m_2=v$, то $n_1=1/v$ и v-любое, отличное от 0 действительное число. На a и b никаких ограничений нет. Подставим в (1), получим

$$\begin{cases} X' = vY + a, \\ Y' = \dfrac{1}{v}X + b \end{cases} \quad (2).$$

2) $n_1=0$ так как $\Delta \neq 0$, то $m_1 \neq 0$ и $m_2=0$, следовательно $n_2 \neq 0$, из 3го уравнения $n_2m_1=1$. Если обозначить $m_2=v$, то $n_1=1/v$ и v-любое, отличное от 0

действительное число. На a и b никаких ограничений нет. Подставим в (1), получим:

$$\begin{cases} X' = vX + a, \\ Y' = \frac{1}{v}Y + b \end{cases} \quad (3)$$

Итак, всякое движение псевдоевклидовой плоскости во вспомогательной с.к. можно задать формулами (2) или (3). Обратно, если преобразование задано формулами (2) или (3), то оно сохраняет обобщенное расстояние, т.е. является движением Минковского.

Движение, задаваемое формулами (3), называется движением 1-го рода.

Движение, задаваемое формулами (2), называется движением 2-го рода.

Свойства движения.

1^0 Тождественное преобразование есть движение.

2^0 Преобразование, обратное движению, есть движение.

3^0 Произведение 2-х движений есть движение.

Следствие. Множество движений плоскости Минковского есть группа.

4^0 Движение сохраняет обобщенное скалярное произведение.

Доказательство.

Движение сохраняет расстояние между точками $\Rightarrow$ оно сохраняет скалярный квадрат вектора. Пусть a и b –любые вектора.

$$(\bar{a}'+\bar{b}')^2 = (\bar{a}+\bar{b})^2 \Leftrightarrow \bar{a}'^2 + \bar{b}'^2 + 2\bar{a}'\cdot\bar{b}' = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 + 2\bar{a}\cdot\bar{b} \Rightarrow \bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{a}'\cdot\bar{b}'$$

Рассмотрим частные случаи движений 1-го и 2-го рода

Движения I рода (собственные).

1) $v=1$; a,b – любые действительные числа. Формулы (3) перепишутся $\begin{cases} X' = X + a, \\ Y' = Y + b \end{cases}$.Они задают параллельный перенос.

2) $a=b=0$ $\begin{cases} X' = vX, \\ Y' = \frac{1}{v}Y \end{cases} \Rightarrow X'Y' = XY \Rightarrow$ любая точка *M(X,У)* и её образ *M'(X',У')* лежат на одной гиперболе *XУ=с*, т.е. на одной окружности Минковского.

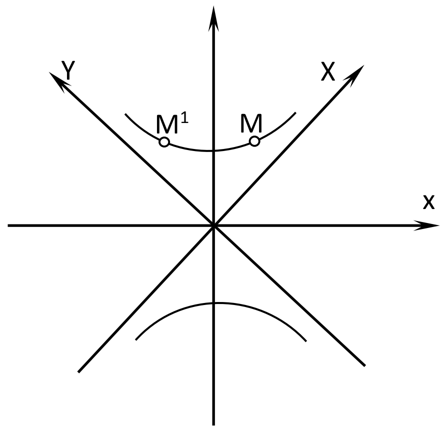


Рисунок 1.2.4

По аналогии с евклидовой плоскостью это движение называют гиперболическим поворотом с центром в т. O и коэффициент v.

3)a,b- любые действительные числа, v отличное от 0. Преобразование, задаваемое формулами (3), можно представить как произведение двух преобразований. Пусть $f:\begin{cases}X'=vX+a,\\ Y'=\frac{1}{v}Y+b.\end{cases}$. Введем $\varphi:\begin{cases}X''=vX,\\ Y''=\frac{1}{v}Y\end{cases}$ и $\psi:\begin{cases}X'=X''+a\\ Y'=Y''+b\end{cases}$.

Согласно последнему φ – гиперболический поворот, ψ - параллельный перенос и $f=\psi\cdot\varphi$.

<u>Вывод.</u> Всякое собственное движение плоскости Минковского есть либо параллельный перенос, либо гиперболический поворот с центром в начале координат, либо произведение гиперболического поворота и параллельного переноса.

Пусть $f:\begin{cases}X'=vX+a,\\ Y'=\frac{1}{v}Y+b.\end{cases}$ Найдем двойные точки. Для этого $X'=X$ и $Y'=Y$ подставим в (3) и получим $\begin{cases}(1-v)X=a,\\ \frac{v-1}{v}=b\end{cases}$. Если $v\neq 1$, т.е. f- не параллельный перенос, то из последней системы $X_0=\frac{a}{1-v}, Y_0=\frac{bv}{v-1}$. Точка $C(\frac{a}{1-v},\frac{bv}{v-1})$-двойная. Формулы (3) можно переписать

$f:\begin{cases}\{X'=v(X-\dfrac{a}{1-v})+a+\dfrac{av}{1-v}, \\ Y'=\dfrac{1}{v}(Y-\dfrac{bv}{v-1})+b+\dfrac{b}{v-1}.\end{cases}$. Но тогда f есть произведение гиперболического поворота с центром в т. C и параллельного переноса на вектор $\bar{s}=\{a+\dfrac{av}{1-v}, b+\dfrac{b}{v-1}\}$.

Движение 2-го рода (несобственное).

$f:\begin{cases}X'=vY+a, \\ Y'=\dfrac{1}{v}X+b\end{cases}$ (2).

1) $v=1, a=b=0$ получим $f:\begin{cases}X'=Y, \\ Y'=X\end{cases}$. А это есть формулы осевой симметрии относительно биссектрисы 1-го координатного угла в системе *ХОУ*, т.е относительно оси O_Y в основной системе координат.

2) При общих формулах (2) $f=\psi\cdot s_{oy}$, где ψ - собственное движение. Действительно, пусть $s_{oy}:\begin{cases}X''=X, \\ Y''=Y\end{cases}$, $\psi:\begin{cases}X'=vX''+a, \\ Y''=\dfrac{1}{v}Y''+b\end{cases}$. Тогда $f=\psi\cdot s_{oy}$.

Вывод. Любое несобственное движение есть либо симметрия относительно основной оси Оу, либо может быть представлено в виде произведения этой симметрии и собственного движения.

1.3 Угол между векторами и прямыми. Треугольник плоскости Минковского

<u>Определение 8</u>. Углом между неизотропными векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется, такое число ψ (действительное или комплексное), которое определяется формулой:

$$\cos\psi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} \quad (4).$$

<u>Определение 9</u>.Углом между прямыми (неизотропными) называется угол между их направляющими векторами.

Свойства углов.

1^0Для $\forall\lambda > 0: \dfrac{(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}}{|\lambda\bar{a}||\bar{b}|} = \dfrac{\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})}{\lambda|\bar{a}||\bar{b}|} = \dfrac{(\bar{a}\cdot\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}$, т.е. углы между сонаправленными векторами равны. Согласно этому $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = (\widehat{\bar{a}_0,\bar{b}_0})$, где $\bar{a}_0$ и $\bar{b}_0$ сонаправленны с $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и имеют длину 1 или *i*.

2^0 Если $\lambda \neq 0$, то $\dfrac{(\lambda a)\cdot b}{|\lambda a|\cdot|b|} = \pm\dfrac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}$, т.е. $\left|\cos(\widehat{a,b})\right| = \left|\cos(\widehat{\lambda a, b})\right|$.

3^0 Так как все направляющие векторы прямых коллинеарны, то с помощью *опр. 9* мы получаем два угла между прямыми.

4^0 Движение сохраняет угол между векторами (а поэтому и между прямыми). Это следует из того, что при движении сохраняется обобщенное скалярное произведение и обобщенная длина.

Рассмотрим угол между векторами одного и того же рода. Пусть это будут векторы 1-го рода (для векторов 2-го рода аналогично). Отложим $\bar{a}_0$ и $\bar{b}_0$ от начала координат. Тогда их концы лежат на единичной окружности с центром в начале координат.

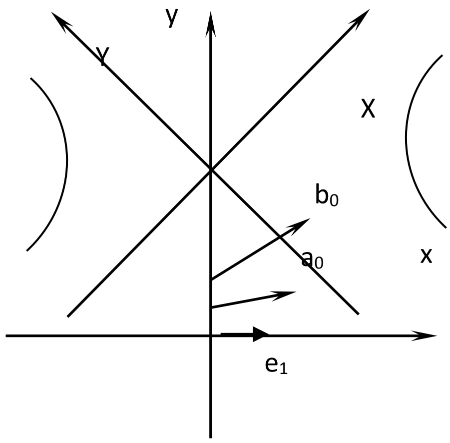
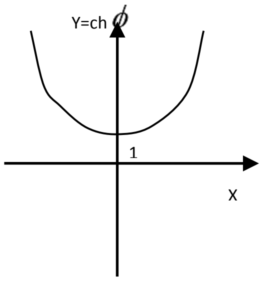


Рисунок 1.3.1

Совершим гиперболический поворот так, чтобы вектор $\bar{a}_0$ повернулся в вектор $\bar{e}_1$. При этом $\bar{b}_0$ повернется в $\bar{b}_0'$Тогда $\begin{pmatrix} \bar{e}_1 = \{1,0\} \\ \bar{b}_0' = \{x, y\} \end{pmatrix}$

$\cos(\bar{a}\hat{,}\bar{b}) = \cos(\bar{a}_0\hat{,}\bar{b}_0) = \cos(\bar{e}_1\hat{,}\bar{b}_0) = \dfrac{(\bar{e}_1 \cdot \bar{b})}{|\bar{e}_1||\bar{b}|} = \dfrac{x}{1} = x$. Так как вектор $\bar{b}_0$ – первого рода, то $\bar{b}_0$ ' тоже первого рода и он будет откладываться в I и III углах, т.е. $|x| \geq 1$. Следовательно $\cos(\bar{a}\hat{,}\bar{b}) \geq 1$(для векторов одного рода). Отсюда следует, что $\psi = (\bar{a}\hat{,}\bar{b})$- чисто мнимое число, т.е. $\psi = i\varphi$, $\varphi \in R$. Число φ называют действительным углом между векторами одного рода.

Тогда $\cos\psi = \cos i\varphi = ch\varphi = \dfrac{(\bar{a} \cdot \bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}$ для векторов одного рода. Если использовать график функции $y = ch\varphi$, то получим:



1) $ch(-\varphi) = ch\varphi$

2) Если $ch\varphi$ возрастает от 1 до ∞, то $|\varphi|$ возрастает от 0 до ∞

Следовательно, между двумя векторами одного рода

Рисунок 1.3.2

угол (с точностью до знака) определяется однозначно (в отличие от евклидовой плоскости. Там углы $\phi + 2\pi$ это углы между одной и той же парой векторов).

Если вектора разных родов, то ψ является смешенным комплексным числом вида $\alpha + \beta i, (\alpha \neq 0, \beta \neq 0)$.

<u>Определение 10</u> Два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются ортогональными, если $\bar{a} \cdot \bar{b}$ =0.(или $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \neq 0, \bar{b} \neq 0, \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$)

Свойства.

1^0 Изотропный вектор ортогонален сам себе.($\bar{a}^2 = 0, т.е. \bar{a} \cdot \bar{a} = 0)$).

2^0 Если $\bar{a} \perp \bar{b}$, то $\lambda\ \bar{a} \perp \bar{b}$ для $\forall \lambda \in \mathrm{R}, \lambda \neq 0$

$3^0\ \bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 - y_1 y_2 = 0$, а это есть условие сопряженности направлений $\bar{a} = \{x_1, y_1\}, \bar{b} = \{x_2, y_2\}$ относительно гиперболы $x^2 - y^2 = 1$

Следовательно, перпендикулярные направления плоскости Минковского на модели изображаются направлениями, сопряженными относительно гиперболы $x^2 - y^2 = 1$

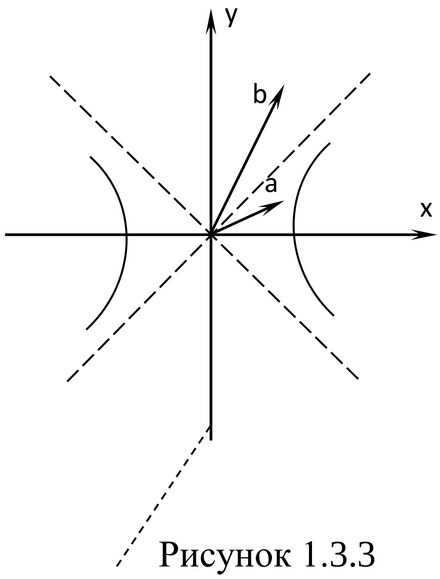


Рисунок 1.3.3

Две прямые называться ортогональными, если ортогональны их направляющие векторы. Если прямая изотропна, то любой её направляющий вектор ортогонален сам себе и всем параллельным ему векторам. Поэтому для изотропных прямых параллельность и перпендикулярность совпадают.

Пример Дана прямая l и точка A. Построить прямую s: $s \in A, s \perp$ l .

A) l неизотропная прямая;

Задача сводиться к нахождению направления, сопряженного l относительно некоторой окружности Минковского.

Построение

1)Строим окружность Минковского (лучше с центром в т.O)

2) Хорда $BD \parallel l$

3)C- середина AB

4) OC- прямая, сопряженная l

5) $s \in A$ $s \parallel OC$

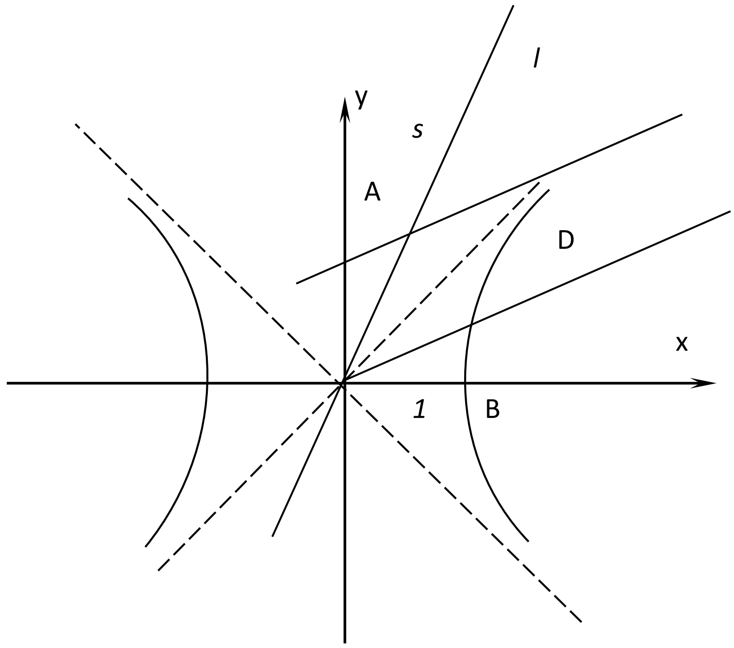


Рисунок 1.3.4

Ответ: s-искомая прямая

В) Если l изотропная прямая;

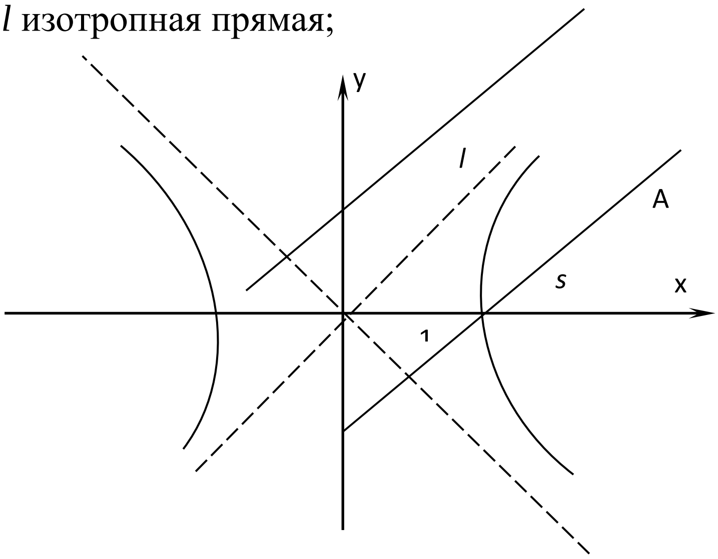


Рисунок 1.3.5

Так как изотропная прямая перпендикулярна всем параллельным ей прямым, то $s \in A$,

$s \parallel l$ (в этом случае параллельность и перпендикулярность совпадает).

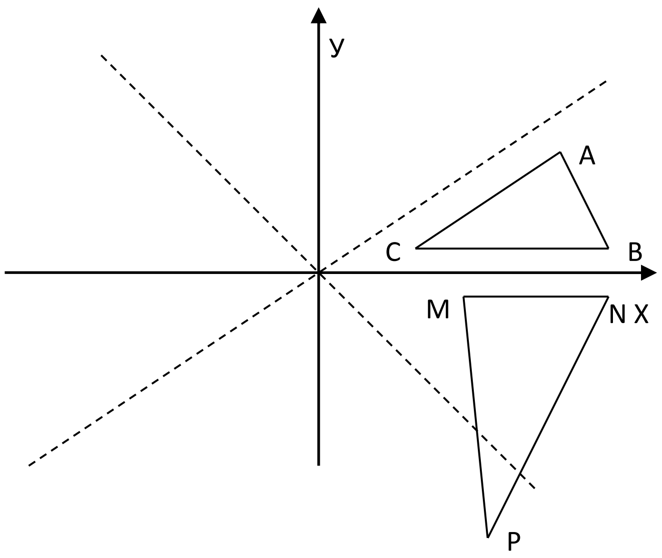
Из свойств сопряженности направлений вытекают еще три свойства перпендикулярности прямых.

4^0 Перпендикуляры к одной прямой параллельны.

5^0 Через любую точку проходит прямая, перпендикулярная данной, и только одна.

6^0 Перпендикулярные неизотропные прямые есть прямые разных родов.

Определение 11. Треугольником называют совокупность трех неколлинеарных точек, не лежащих по две на одной изотропной прямой, и трех попарно их соединяющих отрезков.



Δ *ABC* не является треугольником в плоскости Минковского

Δ *MNP* является треугольником в плоскости Минковского

Рисунок 1.3.6

Данные точки называют вершинами треугольника, соединяющие их отрезки - сторонами, углы между прямыми, проходящими по сторонам, называют углами треугольника. Обозначение $|AB| = c, |AC| = b\,, |BC| = a$.

Углы при вершинах *A,B,C* обозначим $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$.Рассмотрим треугольник со сторонами первого рода. Пусть ΔABC – произвольный треугольник в плоскости Минковского и пусть $|AB|$- его наибольшая сторона. Совершим гиперболический поворот вокруг точки *A* так, чтобы $[AB] \| Ox$. Если провести окружность Минковсого с центром в точке *A* и

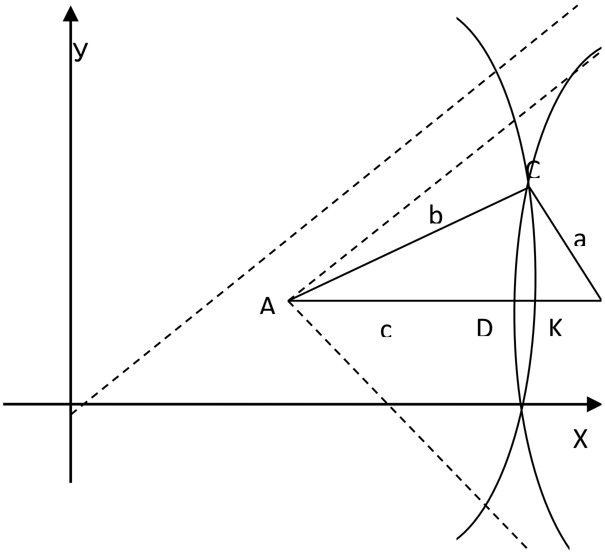


Рисунок 1.3.8

радиусом $|AC|$, то она пересечет [*AB*] в некоторой точке *D*.Так как *C* и *D* на одной окружности, то $|AC| = |AD| = b\,.|AC| < |AB|$, следовательно *D*- лежит между *A* и *B*.

Проведем окружность Минковского с центром в точке *B* и радиусом *a*. Она пересечет [*AB*] в точке *K*. Тогда $|BK| = |BC| = a$.Так как $|BC| < |AB|$, то *K* – внутри *[AB]*. Так как окружности Минковского – гиперболы с осью *AB,* то одна из них вогнутостью обращена к *A* , а другая к *B*. Поэтому точки *D* и *K* располжаться как на чертеже. Следовательно :

$|AB| > |AD| + |BK|$, т.е. $c>b+a$ (*).Итак, в треугольнике Минковского большая сторона больше суммы двух других сторон.

Следствия.

1) В плоскости Минковского нет равносторонних треугольников.
2) Если треугольник равнобедренный, то большая сторона является основанием и равна удвоенной боковой стороне.

Так как $\overline{AB} = \overline{CB} - \overline{CA}$,то $\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2 - 2\overline{CB} \cdot \overline{CA}$ или $c^2=a^2+b^2-2ab\ ch\hat{C}$ (1). Получим теорему косинусов для треугольников Минковского со сторонами первого рода.

Если стороны разнородные, то $c^2=a^2+b^2-2abcos\hat{C}$, но $\hat{C}$ уже будет комплексным числом.

Для треугольников со сторонами одного рода можно вывести «теорему синусов». Рассмотрим $\frac{a^2}{sh^2 A}, \frac{b^2}{sh^2 B}, \frac{c^2}{sh^2 C}$. По теореме косинусов $ch\hat{A} = (b^2+c^2-a^2)/2bc$, $ch\hat{B} = (a^2+c^2-b^2)/2ac$, $ch\hat{C} = (a^2+b^2-c^2)/2ab$, воспользуемся формулой $sh^2a=ch^2a-1$. Получим

$$\frac{a^2}{sh^2 A} = \frac{a^2}{\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2cb}\right)^2 - 1} = \frac{4a^2b^2c^2}{b^4+c^4+a^2-2b^2c^2-2a^2b^2-2a^2c^2},$$

$$\frac{b^2}{sh^2 B} = \frac{b^2}{\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2 - 1} = \frac{4a^2b^2c^2}{b^4+c^4+a^2-2b^2c^2-2a^2b^2-2a^2c^2},$$

$$\frac{c^2}{sh^2C}=\frac{a^2}{\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2-1}=\frac{4a^2b^2c^2}{b^4+c^4+a^2-2b^2c^2-2a^2b^2-2a^2c^2}.$$

Так как a>0,b>0,c>0, то получим $\frac{a}{shA}=\frac{b}{shB}=\frac{c}{shC}$.

Используя теоремы «косинусов» и «синусов», можно решать треугольники в плоскости Минковского.

Выводы по первой главе

Существует и аксиоматический подход к определению евклидова векторного пространства. Обобщая его, можно дать аксиоматическое определение обобщенного скалярного произведения векторов. С помощью евклидова пространства определяется евклидово точечное пространство. По аналогии с этим можно дать определение обобщенных псевдоевклидовых и полуевклидовых точечных пространств. С его помощью определяются псевдоевклидовы и полуевклидовы векторные пространства. Для того, чтобы показать структуру новых пространств, более подробно рассматривается псевдоевклидова плоскость (плоскость Минковского)

Пусть V_n –n мерное векторное пространство. $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n\}$-базис, $\bar{a}=\{x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+...+x_n\bar{e}_n\}$, $\bar{b}=\{y_1\bar{e}_1+y_2\bar{e}_2+...+y_n\bar{e}_n\}$.Зафиксируем билинейную форму $\psi(x_1,x_2,...,x_n;y_{1,}y_2,...,y_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$. Преобразованием координат эту форму можно привести к нормальному виду, т.е. к виду $x_1y_1+...+x_ky_k-x_{k+1}y_{k+1}-...-x_ry_r$, где $r\leq n$.Будем считать что базис B выбран уже такой, что форма ψ имеет нормальный вид.

Псевдоевклидово пространство - действительное аффинное пространство, в котором каждым двум векторам a и b поставлено в соответствие определенное число, называемое скалярным произведением (a, b). Действительное аффинное пространство, в котором каждым двум векторам a и b поставлено в соответствие определенное число, называемое скалярным произведением (a, b).

1) Скалярное произведение коммутативно: (a, b) =(b, a).

2) скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов: (a(b + c)) = (a, b) +(a, c).

3) числовой множитель можно вынести за знак скалярного произведения:

$(k\ a, b) = k(a, b)$.

В псевдоевклидово пространство имеются три вида прямых: евклидовы, направляющий вектор которых имеет положительный скалярный квадрат $((a, a)>0)$, псевдоевклидовы $(a, a)<0)$ и изотропные $((a, a)=0)$. Совокупность всех изотропных прямых, проходящих через некоторую точку, изотропным конусом.

В псевдоевклидово пространство имеется несколько видов плоскостей: евклидовы плоскости E_2, псевдоевклидовы плоскости $E(1;1)$ и плоскости, содержащие изотропные векторы,- т. н. полуевклидовы плоскости сигнатуры (0,1) и (1,0) и дефекта 1 и изотропные плоскости, все векторы которых изотропны.

Касательные к изотропному конусу плоскости имеют вырожденную метрику, т. е. сам конус является поверхностью с вырожденной метрикой. Разумеется, в псевдоевклидовом пространстве есть и другие поверхности с вырожденной метрикой.

ГЛАВА II. ПОЛНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И ПСЕВДОЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

2.1. Понятие полной поверхности ${}^1R_3$ *.Топология пространство* ${}^1R_3$

Поскольку мы собираемся изучать свойства поверхностей псевдоевклидова пространства в целом, нам необходимо рассмотреть, в каком смысле следует понимать полноту этих поверхностей. Проблема заключается в следующем. В геометрии поверхностей евклидова пространства полнота поверхности понимается как полнота того метрического пространства, которое индуцировано на этой поверхности.

В псевдоевклидовом пространстве на поверхности может вообще не индуцироваться никакое метрическое пространство, и такое определение теряет смысл. Эта проблема общая для всех пространств с индефинитной метрикой, и ее решение естественно попытаться получить следующим образом. [5]

Оказывается, что для риманова пространства можно построить такие эквивалентные определения полноты, которые не опираются на свойства метрического пространства, порожденного римановой метрикой, и сохраняют смысл для псевдориманова пространства. Впервые такое определение было построено Х. Хопфом и В. Риновым (1931). Именно псевдориманово пространство называется геодезически полным, если на каждой его геодезической геодезический параметр изменяется от $-\infty$до $+\infty$ при этом конечно, на отрезках геодезической геодезический параметр может изменяться в конечных пределах. Именно это понятие полноты нашло широкие физические применения; на его основе исследуется, в частности, понятие сингулярностей в решениях уравнений общей теории относительности. В то же время; сам поток работ по точной фиксации неформального понятия сингулярности показывает, что понятие геодезической полноты не наследует всех естественных свойств полноты метрического пространства. В частности, как отметили замкнутое многообразие с индефинитной метрикой (например, тор) не обязано быть геодезически полным. Более того, геодезически полное псевдориманово многообразие не обязано быть геодезически связным. Отметим, что эти феномены, возникают даже в самых простых ситуациях. Например, геодезически не связной и может быть метрика постоянной кривизны.

Для теории поверхностей в псевдоевклидовых пространствах важна другая особенность понятия геодезической полноты, отличающая его от полноты метрической. Очевидно, что уходящая на бесконечность поверхность в евклидовом пространстве, т. е» такая поверхность Ф, любая предельная точка которой в смысле объемлющего пространства принадлежит самой поверхности Ф, должна быть метрически полной. Однако это свойство теряется при переходе к поверхностям в| псевдоевклидовых пространствах. В них уходящая на бесконечность или, как принято говорить, внешне полная поверхность, может не быть геодезически полной. Впервые на это обратил внимание А. Л. Зельманов (1960) при исследовании вопроса о неинвариантности понятий пространственной и временной бесконечной анизотропной неоднородной космологической модели. В связи с конкретной физической направленностью результаты работы А. Л. Зельманова изложены в совершенно иной терминологии. Отметим, что А. Л. Зельманов рассматривал поверхности со знак определенной метрикой, для которых понятие геодезической полноты совпадает с понятием метрической полноты. Сама идея примера очень проста — метрическая полнота может быть утеряна, если поверхность столь быстро прижимается к изотропному конусу, что становится конечной длина некоторого пути, уходящего в пространственную бесконечность. Простые выкладки показывают, что метрически неполными являются все поверхности вида

$$z=\rho-1/(1+\rho)^{\alpha} \text{ где } \rho=\sqrt{x^2+y^2} \text{ при a>1.}$$

В более поздней работе обратили внимание на то, что внешне

полная поверхность может имеет конечную площадь (например, при a>3).
В рассмотренных примерах одновременно с нарушением метрической полноты нарушается и ограниченность гауссовой кривизны ($K \sim \rho^{\alpha+1}, \rho \to \infty$) но нетрудно построить аналогичные примеры с ограниченной кривизной, используя, например, цилиндрические поверхности. При исследовании выпуклых поверхностей с положительно определенной метрикой убедимся, что примеры потери внутренней полноты внешне полными поверхностями можно построить и в классе строго выпуклых поверхностей ограниченной гауссовой кривизны. Итак, в псевдоевклидовом пространстве бывают поверхности без особенностей и с ограниченной кривизной, которые, однако, внутренне неполны. Ситуация обратна встречающейся в теории седловых поверхностей в евклидовом пространстве, где метрическая полнота поверхности не влечет внешнюю полноту; в данном случае внешняя полнота не влечет метрическую полноту. [5]

В связи с рассмотренными обстоятельствами разумно попытаться построить понятие полноты псевдориманова пространства на основе понятия внешней полноты. Напомним, что псевдориманово пространство называется непродолжаемым, если оно не может быть представлено как собственное подмножество никакого другого псевдориманова многообразия той же размерности и сигнатуры. Максимальным аналитическим продолжением аналитического псевдориманова пространства *N* называется такое аналитическое непродолжаемое многообразие *M* той же размерности и сигнатуры, что *N* изометрично некоторой его части (или всему *M*). Разумеется, исследование сингулярной представляет интерес лишь для верности, часть которой была изометрична этому решению. Указанный метод был развит в ряде других работ обзор их в статье. В основе этих работ лежит представление о полноте риманова пространства как о возможности его внешне полного погружения в евклидово пространство достаточно высокой размерности. Однако результаты этого же круга показывают, что каждое псевдориманово многообразие можно представить в виде внешне полной поверхности в подходящем псевдоевклидовом пространстве. В псевдоевклидовых же пространствах низких размерностей легко строятся примеры внешне полных поверхностей, которые нет оснований считать полными с неформальной точки зрения.

Обзор других понятий полноты приведен Героком (1979) [отметим, что предыдущие замечания о внешней полноте решают в отрицательном смысле одну из проблем, сформулированных в этом обзоре]. В целом возникающая в связи понятиями полноты псевдоримановых пространств ситуация такова, что для решения каждого конкретного круга вопросов необходимо построение всего адекватного конкретного понятия полноты.

Будем пользоваться двумя понятиями полноты поверхности в псевдоевклидовом пространстве. Во-первых, это понятие геодезической или, как мы ее будем называть, внутренней полноты. Для случая поверхностей с положительно определенной метрикой это понятие совпадает с обычным понятием метрической полноты.

Другим понятием полноты будет внешняя полнота, которую мы, однако, будем понимать несколько более широко, чем только что сформулированное требование принадлежности к поверхности всех ее предельных в смысле объемлющего пространства точек. Дело в том, чтб поверхности индефинитной метрики и положительной кривизны могут реализовываться в виде поверхностей, близких к универсальной накрывающей однополостного гиперболоида, которые могут и не содержать всех своих предельных точек, но удовлетворять наглядному образу полной поверхности. Их также представляется разумным включить в число полных поверхностей. Будем называть внешне полными те поверхности Ф в для которых являются полными поверхности Ф* в (Соколов, 1980). Легко проверить, что это определение не зависит от того, какую систему координат выбрать для по строения наложенного пространства, хотя сама метрика поверхности Ф от этого выбора, разумеется, зависит. Это понятие полноты аналогично тому, которое принято при изучении гильбертова пространства с индефинитной метрикой . [5]

Важным продвижением в геометрии поверхностей в псевдоевклидовом пространстве было получение топологической классификации полных поверхностей всех четырех классов. Он справедлив независимо от знака кривизны, но будет интересовать нас лишь для поверхностей положительной кривизны, поскольку для поверхностей отрицательной кривизны ужеполучены более сильные ограничения. Простейшие примеры показывают, что обе возможности реализуются в действительности

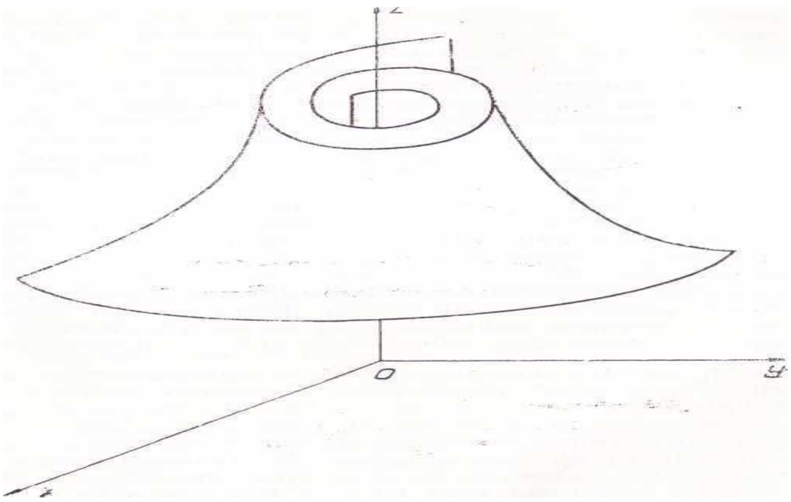


Рис. 2.1.1. Поверхность с положительно определенной метрикой, не проектирующаяся однозначно на плоскость *(x; y)* из их внешней полноты вытекает выпуклость в целом и, следовательно, гомеоморфность плоскости.

2.2. Аксиоматическое определение псевдоевклидовых и полуевклидовых векторных пространств

Пусть L_n – n –мерное линейное пространство и пусть на L_n определенна бинарная операция $(L_n \text{ x } L_n) \rightarrow R$, при которой каждой упорядоченной паре векторов ставиться в соответствие некоторое число. Результат этой операции, для упорядоченной пары a, b, будем обозначать (a,b) (или $a \cdot b$).

<u>Определение 12</u>. Бинарная операция $a \cdot b$ называется обобщенным скалярным произведением, если выполняются следующие аксиомы

A1 Для любой упорядоченной пары векторов из L_n произведение $a \cdot b$ определенно и однозначно.

A2 $a \cdot b = b \cdot a$ для $\forall a,b \in L_n$

A3 $(\alpha a) \cdot b = \alpha(a \cdot b)$ для $\forall a,b \in L_n$ и $\forall \alpha \in R$

A4 $(a+b) \cdot b = a \cdot c + b \cdot c$ для $\forall a,b,c \in L_n$

A5 $\exists$n линейно независимых векторов $a_1, a_2, ..., a_n$ и такие l и k где $0 \le l \le n$, $0 \le k \le n$

$a_i \cdot a_i > 0$ для $i \le l$,

$a_j \cdot a_j < 0$ для $l < j \le k$

$a_p \cdot a_p = 0$ для $k < p \le n;$

$a_s \cdot a_q = 0$ для $\forall$ s,q $1 \le s \ne q \le n$

<u>Определение 13</u>. Линейное пространство L_n , на котором определенно обобщенное скалярное произведение векторов, называют псевдоевклидовым (полуевклидовым) линейным пространством, если $k=n$ $(k<n)$.

Число l называют индексом псевдоевклидова (полуевклидова) пространства, в случае полуевклидова пространства число $d=n\text{-}k$ называют его дефектом, обозначения L_n^l - псевдоевклидово пространство индекса l, ${}^dL_n^l$ полуевклидово пространство индекса l и дефекта d. [8]

<u>Определение 14</u>. Обобщенной длиной вектора $\bar{a}$ называется число $\sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}}$ (обозн. $\sqrt{\bar{a}^2}=|\bar{a}|$)

По длине ненулевые векторы разбиваются на 3 типа:

-векторы 1-го рода $\Leftrightarrow$ их длина положительное действительное число.

-векторы 2-го рода $\Leftrightarrow$ их длина чисто мнимое число.

-изотропные векторы $\Leftrightarrow$ их длина равна 0, а сам вектор не нулевой.

Коллинеарные не нулевые векторы- векторы одного и того же рода.

Доказательство.

$|\alpha a|=\sqrt{(\alpha a)\cdot(\alpha a)}=\sqrt{\alpha^2(a\cdot a)}=|\alpha||a|$.

если $|a|$>0, то и $|\alpha a|$>0;

если $|a|$ число чисто мнимое то и $|\alpha a|$, тоже число чисто мнимое (т.к. $\alpha\in R_+$);

если $|a|$=0, то $|\alpha a|$=0

<u>Определение 15</u>. Вектор длины 1 или i называется нормированным.

Свойство Всякий неизотропный вектор можно нормировать.

Доказательство. Пусть a-неизотропный вектор, тогда $|a|\neq 0$, и $\exists a_0=\left|\frac{1}{|a|}\right|a$,

длина вектора $|a_0|=\left|\frac{1}{|a|}\right|\cdot|a|$ $\quad |a_0|=\begin{cases}1, \text{ если } a-\text{вектор } 1-\text{го рода}\\ i, \text{ если } a-\text{вектор } 2-\text{го рода}\end{cases}$

<u>Определение 16</u>. Углом между неизотропными векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется, такое число ψ (действительное или комплексное), которое определяется формулой

$$\cos\psi = \frac{a\cdot b}{|a||b|}.$$

Свойство. Если a и b неизотропные вектора и $\alpha, \beta \neq 0$, то $|\cos(a\cdot b)| = |\cos((\alpha a)\cdot(\beta b))|$

Доказательство $|\cos(a\cdot b)| = \left|\frac{a\cdot b}{|a||b|}\right|$ $|\cos((\alpha a)\cdot(\beta b))| = \left|\frac{\alpha\beta(a\cdot b)}{\alpha\beta|a||b|}\right| \Rightarrow$

$|\cos(a\cdot b)| = |\cos((\alpha a)\cdot(\beta b))|$.

Определение 17. Два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются ортогональными, если $\bar{a}\cdot\bar{b}$ =0 (или $\bar{a}\perp\bar{b} \Leftrightarrow \bar{a}\neq 0, \bar{b}\neq 0, \bar{a}\cdot\bar{b}=0$).

Свойства.

1^0 Изотропный вектор ортогонален сам себе ($\bar{a}^2 = 0, т.е. \bar{a}\cdot\bar{a} = 0$).

2^0 Если $a\perp b$, то $(\lambda\ a)\perp b$ для $\forall\lambda\in R, \lambda\neq 0$

Определение 18. Если L_n^l - псевдоевклидово пространство, то базис, векторы которого нормированы и попарно ортогональны, называют ортонормированным

Базис, о котором идет речь в аксиоме A_5 , является ортогональным. Разделим каждый из его неизотропных векторов на его длину, получим ортонормированный базис. Следовательно, хотя бы один ортонормированный базис существует.

Теорема 1. В любом базисе обобщенно скалярное произведение векторов задается билинейной симметрической формой от набора координат этих векторов.

Доказательство.

Пусть $e_1, e_2, .., e_k, e_{k+1}, ..., e_n$ базис, $a = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $b = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$

$a\cdot b = (x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n)\cdot(y_1e_1 + y_2e_2 + ... + y_ne_n) =$($A_3$, A_4)=

$x_1y_1(e_1\cdot e_1) + x_1y_2(e_1\cdot e_2) + ... + x_1y_n(e_1\cdot e_n) + x_2y_1(e_2\cdot e_1) + x_2y_2(e_2\cdot e_2) + ... + x_2y_n(e_2\cdot e_n) +$

$+ x_ny_1(e_n\cdot e_1) + x_ny_2(e_n\cdot e_2) + ... + x_ny_n(e_n\cdot e_n)$

Так как $e_i \cdot e_j \in R$, то получили билинейную форму от двух наборов переменных.
Так как $e_i \cdot e_j = e_j \cdot e_i$ (аксиома A_2), то форма симметричная.

Определение 19. Если ${}^dL_n^l$ полуевклидово пространство, то базис $e_1, e_2, .., e_k, e_{k+1}, ..., e_n$ (d=n-k) называется ортонормированным, если ортонормированна система $e_1, e_2, .., e_k$, а $e_{k+1}, ..., e_n$- линейно независимая система попарно ортогональных изотропных векторов. [8]

Теорема 2. В ортонормированном базисе $e_1, e_2, .., e_k, e_{k+1}, ..., e_n$, в котором

$e_i \cdot e_i = 1,\ 1 \le i \le l;$

$e_j \cdot e_j = -1,\ l+1 \le j \le k;$

$e_p \cdot e_p = 0,\ k+1 \le p \le n$

Скалярное произведение векторов $a = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $b = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ имеет вид $a \cdot b = x_1 y_1 + ... + x_l y_l - x_{l+1} y_{l+1} - ... - x_k y_k$

Если $e_1, e_2, .., e_k, e_{k+1}, ..., e_n$ любой базис в L_n^l (${}^dL_n^l$), то по *теореме 1* скалярное произведение в этом базисе задается симметрической билинейной формой. По свойствам симметрической билинейной формы всякую такую форму можно привести по формулам преобразования координат к нормальному виду $x_1 y_1 + ... + x_l y_l - x_{l+1} y_{l+1} - ... - x_k y_k$

Пусть новый базис $e_1', e_2', .., e_k', e_{k+1}', ..., e_n'$, тогда $e_i \cdot e_i = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 1 \le i \le l \\ -1, & \text{если} \quad 1 \le i \le k \\ 0, & \text{если} \quad k+1 \le i \le n \end{cases}$,

следовательно $e_1', e_2', .., e_k', e_{k+1}', ..., e_n'$ ортонормированный базис.
Итак доказана теорема. От любого базиса в L_n^l (${}^dL_n^l$) можно преобразованием координат перейти к ортонормированному базису.

Теорема 3. Для любого ортонормированного базиса числа l и k постоянны.

Это следует из закона инерции билинейной симметрической формы.

Вывод 1 . В пространстве L_n^l $({}^dL_n^l)$ всегда можно выбрать базис так , что бы скалярное произведение векторов задавалось формулой $a \cdot b = x_1 y_1 + \ldots + x_l y_l - x_{l+1} y_{l+1} - \ldots - x_k y_k$

Вывод 2. Определение обобщенного скалярного произведения и пространств L_n^l $({}^dL_n^l)$, данные в главах I и II, эквивалентны.

2.3 Кривизна псевдоримановых пространств

Для римановых пространств выбор знака кривизны связан сосвойствами устойчивости геодезических этих пространств. Мы уже говорили о том, что для псевдоримановых пространств этот выбор знака условен. Сейчас обсудим этот вопрос более подробно.Геометрический смысл кривизны псевдоримановых пространств.Как обычно, для построения кривизны сначала определяется тензор Римана R с помощью, например, формулы

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]} Z$$

где ∇ — линейная связность псевдориманова многообразия, порожденная его метрикой. Далее строится биквадратичная форма

$$k(X,Y) = (R(X,Y)J; X).$$

Для построения из тензора Римана кривизны по двумерному направлению нужно также ввести определитель Грама. Он строится по вспомогательному тензору $k_1(X;Y)Z = (Y;Z)X - (X,Z)Y$

$(X,\ Z)Y$ как биквадратичная форма

$$k_1(X;Y) = (k_1(X;Y); X) = (X, X)(X;Y) - (X;Y)^2$$

Тогда плоскости σ в касательном пространстве псевдориманова многообразия можно сопоставить кривизну в этом двумерном направлении, полагая

$$K_V = K(U;W) = \frac{k(V;W)}{k_1(V;W)} = \frac{(R(V;W)W;V)}{(V;V)(W;W) - (V;W)^2}$$

где V и W — линейно! независимые векторы из σ.

Этот стандартный способ построения K_σ (изложенный по Громолу, Клингенбергу и Мейнеру, 1971) в псевдоримановом пространстве приводит к определенному ответу лишь для плоскости с невырожденной метрикой. Для тех же плоскостей σ, для которых происходит вырождение метрики, определитель Грама обращается в нуль. Если в этом случае обращается в нуль и числитель, то понятие кривизны по двумерному направлению можно сохранить с помощью продолжения по непрерывности (Петров, 1961). Однако это можно сделать далеко не всегда. Например, А. А. Борисенко показал, что если в псевдоримановом пространстве размерности больше двух, секционные кривизны ограничены и сохраняют знак, то такое пространство является пространством постоянной секционной кривизны. Поэтому, в частности, весь комплекс вопросов современной глобальной геометрии римановых многообразий, связанный с теоремой о сфере и с аналогичными теоремами для пространств отрицательной кривизны (в частности, с теоремой Адамара — Картана), не имеет прямых аналогов в псевдоримановом пространстве. Это обстоятельство не случайно. Оно связано с тем, что построенная величина имеет несколько иной геометрический смысл, чем в римановом пространстве. [6]

Для анализа этого вопроса обратимся к уравнению Якоби.

Пусть Y — нормальная геодезическая на псевдоримановом многообразии, а X — параллельное поле вдоль y, нормированное и ортогональное y. Тогда поле Якоби J, параллельное полю X, удовлетворяет уравнению

$$\varphi'' + K_\sigma(V,V)\varphi = 0$$

где $J = \varphi X$, а K_σ -- секционная кривизна в направлении, натяну том на X и касательный вектор V геодезической y. Итак, свойства экспоненциальной устойчивости и неустойчивости геодезических, описываемые уравнением Якоби, определяются не кривизной, а величиной *(V; V), В* частности, на интересующих нас двумерных псевдоримановых многообразиях знак определенной кривизны одновременно наблюдается явление как экспоненциальной неустойчивости геодезических, так и их устойчивости. Оценки длины геодезической до ближайшей сопряженной точки и другие теоремы сравнения остаются, конечно, аналогичными, но меняется их геометрический смысл.Формула Гаусса — Бонне для двумерных псевдоримановых пространств. Другим аспектом, в котором рассмотрение кривизны псевдоримановых пространств отличается от рассмотрения кривизны римановых пространств, является формулировка теоремы Гаусса — Бонне. На первый взгляд, при анализе этой формулы для случая замкнутых многообразий не возникает никакой специфики. Легко доказывается, что для двумерного замкнутого многообразия Q с индефинитной метрикой

$$\iint_Q K d\sigma = 0$$

где K — гауссова кривизна, $d\sigma$ — элемент площади. Этот факт вполне соответствует тому, что ожидается из формулы Гаусса— Бонне, выписанной по аналогии с дефинитным случаем.

Действительно, индефинитную метрику можно задать только на двух замкнутых двумерных многообразиях — на торе и бутылке Клейна для которых эйлерова характеристика x(Q) равна нулю. Этот тривиальный результат допускает и многомерные обобщения. В этом случае индефинитная метрика^ также не может быть задана на произвольном замкнутом многообразии. Вопрос о том, на каких многообразиях можно задать индефинитную метрику, исследован совершенно новая ситуация возникает при рассмотрении формулы Гаусса — Бонне для области Q с границей ∂Q. Для многообразий с положительно определенной метрикой в этом случае формула Гаусса — Бонне приобретает вид

$$\iint\limits_{Q} K d\sigma = 2\pi X(Q) - \int\limits_{\partial Q} k_g ds$$

где k_g---геодезическая кривизна границы ∂Q, которая, разумеется, предполагается достаточно регулярной кривой. [6]

Сходные идеи предложены В. Л. Гуревичем (1979), построившим на их основе теорию двумерных многообразий ограниченной кривизны с индефинитной метрикой. Предлагаемый способ отличается тем, что он применим для произвольных гладких границ.

Пусть M — двумерное псевдориманово многообразие с метрикой g. В каждой его точке определены для изотропных направления метрики g, так что в малой области данной точки многообразие M оказывается параметризованным изотропными кривыми u=const и v = const, причем метрика g имеет вид

$$ds^2 = 2F(u,v)dudv$$

в предположении, что $F(u,v) \in C^2$. Ограничимся случаем,

когда такая параметризация возможна и в целом.

Выводы по второй главе

Связь между внутренней и внешней полнотой для поверхностей с индефиниткой метрикой. Будем предполагать, что рассматриваемая нами внутренне полная поверхность Ф принадлежит классу C^2. Прежде всего очевидно, что неизотропные геодезические поверхности Ф, рассматриваемые как кривые объемлющего пространства, должны иметь бесконечную длину. В силу обратного неравенства треугольника это возможно только в том случае, если кривые являются внешне полными. Тогда внешне полными должны быть и поверхности Ф, но доказательство этого фактора гораздо сложнее, чем для поверхностей с положительно определенной метрикой. Теперь мы должны коснуться граничной точки поверхности не произвольной кривой, а неизотропной геодезической. Сложность заключается в том, что, как уже отмечали, геодезически полное псевдориманово многообразие может не быть геодезически связным. Потеря геодезической связности обусловлена возникновением сопряженных точек. Нетрудно проверить, что на многообразии с индефинитной метрикой знакопостоянной кривизны K справедливо следующее утверждение. Если точки *M и N* можно соединить кривой, на которой $K(v;\ v)\ \leq Q,$ то их можно соединить и геодезической, на которой выполнено то же неравенство. Доказательство, этого утверждения основано на том, что, во-первых, достаточно близкие точки всегда можно соединит геодезической, а во-вторых, краевая задача для уравнения Якоби при условии $K(v,\ v)<0$ всегда имеет единственное решение. Опираясь на эти соображения, можно доказать следующую лемму о связи внутренней и внешней кривизны.

На первый взгляд, при анализе этой формулы для случая замкнутых многообразий не возникает никакой специфики. Легко доказывается, что для двумерного замкнутого многообразия Q с индефинитной метрикой

$$\iint_Q K d\sigma = 0$$

где K — гауссова кривизна, $d\sigma$ — элемент площади. Этот факт вполне соответствует тому, что ожидается из формулы Гаусса— Бонне, выписанной по аналогии с дефинитным случаем.

Для многообразий с положительно определенной метрикой в этом случае формула Гаусса — Бонне приобретает вид

$$\iint_Q K d\sigma = 2\pi X(Q) - \int_{\partial Q} k_g ds$$

где k_g---геодезическая кривизна границы ∂Q, которая, разумеется, предполагается достаточно регулярной кривой.

ГЛАВА III. ДВУХМЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В ПСЕВДОЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

3.1. Псевдоевклидово пространство (Пространство Минковского)

Пусть $E_n^l\,({}^dE_n^l)$ - множество точек, $L_n^l\,({}^dL_n^l)$ псевдоевклидово (полуевклидово) векторное пространство.

<u>Определение 20.</u> Множество точек $E_n^l\,({}^dE_n^l)$ называют псевдоевклидовым (полуевклидовым) точечным пространством, если определено отображение $\sigma:(E_n^l \times E_n^l) \to L_n^l$ (или $\sigma:(E_n^l \times E_n^l) \to\ {}^dL_n^l$) и выполняются аксиомы

B1. $E_n \neq 0$.

B2. $L_n^l\,({}^dL_n^l)$ -n мерное векторное псевдоевклидово(полуевклидово) пространство

индекса l (и дефекта d).

B3. σ - сюрьективное отображение.

B4. $(\forall A \in E_n^l(\text{или}\,{}^dE_n^l))(\forall \bar{a} \in L_n^l(\text{или}\,{}^dL_n^l))\exists! B : \overline{AB} = \bar{a}$.

B5. $(\forall A, B, C \in E_n)\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Замечание. Если $\sigma:(A,B) \to a$, то принято вектор а обозначать $\bar{A}\bar{B}$.

Псевдоевклидово точечное пространство обозначается E_n^l ,полуевклидово ${}^dE_n^l$.

Так как L_n^l $({}^dL_n^l)$ являются векторными пространствами, то E_n^l $({}^dE_n^l)$ являются аффинными пространствами, т.е. все аффинные свойства пространств E_n^l $({}^dE_n^l)$ сохраняются. Пространство E_n^l и ${}^dE_n^l$ определяется на одном и том же векторном пространстве L_n , поэтому их аффинные свойства одни и те же. Например, прямой, определяемой точкой А и вектором $a \neq 0$, $l_{A,\bar{a}} = \{M I \overline{AM} = \alpha\bar{a}, \alpha \in R\}$. Так как все вектора $\alpha a, \alpha \in R$, образуют одномерное векторное подпространство в L_n , то прямую можно определить так $\underset{A,\bar{a}}{l} = \{MI\overline{AM} \in L_1\}$, где L_1- одномерное подпространство в L_n.

Аналогично можно определить s-плоскости. Плоскостью $\Pi_{A,Ls}$, определяемой точкой A и s-мерным векторным подпространством $L_s \subset L_n$, называют $\Pi_{A,Ls}=\{MI\overline{AM} \in L_s\}$. [15]

Так как все вектора $\alpha a\,(\alpha \neq 0)$ одного рода, то все направляющие вектора прямой одного рода, поэтому прямые тоже можно классифицировать.

Прямая называется прямой 1-го рода , если все её направляющие вектора 1-го рода.

Прямая называется прямой 2-го рода , если все её направляющие вектора 2-го рода.

Прямая называется изотропной, если все её направляющие вектора изотропные.

Из аффинных свойств пространства следует, что :

1^0Две различные прямые имеют не более одной общей точки;

2^0Через две различные прямые проходит прямая и только одна;

3^0Две пересекающиеся прямые лежат в одной и только одной 2-плоскости и т.д.

Определение 21. Две прямые называться ортогональными, если ортогональны их направляющие векторы. Если прямая изотропна, то любой её направляющий вектор ортогонален сам себе и всем параллельным ему векторам. Поэтому для изотропных прямых параллельность и перпендикулярность совпадают.

Аффинным репером называется совокупность точки и базиса, ортонормированным репером называется совокупность точки(начала координат) и ортонормированного базиса. Координатами вектора $\overline{AB}$, с координатами точек $A(x_1, x_2,.., x_n)$ $B(y_1, y_2,.., y_n)$, являются

$$\overline{AB} = ((y_1 - x_1), (y_2 - x_2),..., (y_n - x_n))$$

<u>Определение. 22</u>. Расстоянием между точками A и B назовем обобщенную длину вектора $\overline{AB}$. Если $A(x_1, x_2,.., x_n)$ $B(y_1, y_2,.., y_n)$ то $|AB| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + ... + (y_l - x_l)^2 - (y_{l+1} - x_{l+1})^2 - (y_k - x_k)^2}$. Расстояние может быть действительным числом, нулем , и чисто мнимым числом.

<u>Определение 23</u>. Движением пространства $E_n^l\,({}^dE_n^l)$ называют такое аффинное преобразование, которое сохраняет обобщенное расстояние между точкам

Свойства движения.

1^0 Тождественное преобразование есть движение.

2^0 Преобразование, обратное движению, есть движение.

3^0 Произведение 2-х движений есть движение.

Следствие. Множество движений пространства $E_n^l\,({}^dE_n^l)$ есть группа.

4^0 Движение сохраняет обобщенное скалярное произведение.

<u>Определение 24</u>. Сферой в пространстве $E_n^l\,({}^dE_n^l)$ называют множество, точек, равноудаленных от данной точки. Данная точка называется центром сферы. Расстояние, на которое все точки удаленны от ее центра, называют радиусом.

Если $r>0$, то сфера называется сферой 1 рода.

Если r чисто мнимое число, то сфера называется сферой 2 рода.

Если $r=0$, то сфера называется изотропной

Обозначим $S(C,r)$ сферу радиуса r и с центром в точке c. Пусть $R=\{0, e_1, e_2,.., e_n\}$ ортонормированный репер, C $(x_1^0, x_2^0,...., x_n^0)$-центр сферы и r ($r \in R_+$, или $r = \alpha i$, где $\alpha \in R_+$, или $r=0$) –радиус сферы. Если М$(x_1, x_2,...., x_n)$, то М$\in$ $S(C,r) \Leftrightarrow |MC| = r$ (по определению).Это уравнение равносильно

$|MC|^2 = r^2$, перепишем его в координатном виде

$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + ... + (x_l - x_l^0)^2 - (x_{l+1} - x_{l+1}^0)^2 - ... - (x_k - x_k^0)^2 = r^2$- получили уравнение сферы. Для сферы первого рода $r^2>0$, для сферы второго рода $r^2<0$, для изотропной сферы $r^2=0$.

Пусть скалярное произведение в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ задано формулой $a \cdot b = x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2$, где $a(x_1, y_1, z_1)$, $b(x_2, y_2, z_2)$, тогда в репере $R=\{0, e_1, e_2, e_3\}$ расстояние между точками будет $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}$, где $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Прямые в E_3^2 могут быть, очевидно, всех трех видов.

Любая плоскость $П_{M_0, L_2}$, задается точкой M_0 и подпространством $L_2=<a,b>$ и может быть либо евклидовой, либо псевдоевклидовой, либо полуевклидовой. Убедимся в этом.

1) Рассмотрим $L_2=<e_1,e_2>$. Если m и $n \in L_2$ и $m=x_1e_1+y_1e_2$, $n=x_2e_1+y_2e_2$, то $m \cdot n = x_1x_2 + y_1y_2$, т.е. L_2-евклидово пространство и плоскость $П_{M_0, L_2}$ - евклидова.

2) Пусть $L_2=<e_1,e_3>$. Если m и $n \in L_2$ и $m=x_1e_1+z_1e_3$, $n=x_2e_1+z_2e_3$, то $m \cdot n = x_1x_2 - z_1z_2$, т.е. L_2-псевдоевклидово пространство и плоскость $П_{M_0, L_2}$ - псевдоевклидова.

3) $L_2=<e_1,e_2+e_3>$. $a \in L_2 \Leftrightarrow a = xe_1 + y(e_2 + e_3)$ т.е. $a = xe_1 + ye_2 + ye_3$, это значит что, $a(x, y, y)$ в пространстве L_3. Если $a,b \in L_2$ и $a(x, y, y), b(x_1, y_1, y_1)$, то $a \cdot b = xx_1 + yy_1 - yy_1 = xx_1$. Отсюда следует что, плоскость $П_{M_0, L_2}$ есть полуевклидова.

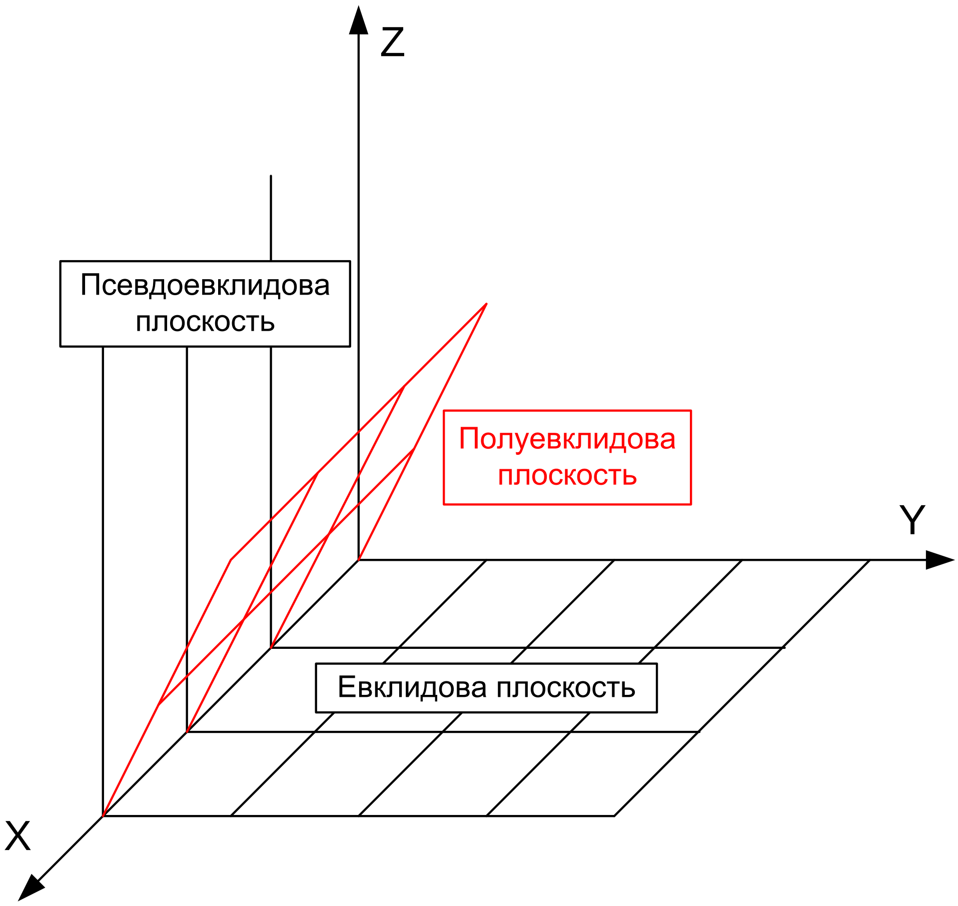


Рисунок 3.1.1

Свойства плоскостей в E_3^2

1)*Любая плоскость, параллельная евклидовой, полуевклидовой или псевдоевклидовой, является евклидовой полуевклидовой или псевдоевклидовой соответственно*. Это утверждение следует из того, что параллельные плоскости имеют одно и тоже направляющее векторное подпространство.

2)*Пересечение двух евклидовых плоскостей или евклидовой и псевдоевклидовой, или евклидовой и полуевклидовой плоскостей может быть либо пустое множество, либо евклидова прямая*. Это следует из того, что $L_2 \cap L_2' = \begin{cases} 0 \\ L_1 \end{cases}$, но в L_2 все вектора 1го рода, поэтому L_1 состоит только из векторов 1го рода, следует что L_1 определяет прямые 1го рода, т.е. евклидовы прямые.

3)*Пересечение псевдоевклидовой плоскости с псевдоевклидовой плоскостью или с полуевклидовой плоскостью может быть либо пустое, либо прямая первого рода, либо изотропная прямая.*

4)*Пересечение двух полуевклидовых плоскостей либо пустое, либо прямая 1го рода.*

Сфера *S(C,r)* радиуса *r* и с центром в точке $C(x^0, y^0, z^0)$ в пространстве E_3^1 имеет в выбранном нами базисе уравнение $(x-x^0)^2+(y-y^0)^2-(z-z^0)^2=r^2$. Для сферы первого рода $r^2>0$, для сферы второго рода $r^2<0$, для изотропной сферы $r^2=0$. [15]

3.2. Числовая модель плоскости Минковского

Наряду с комплексными числами математика знает еще 2 другие системы «чисел»- так называемые «двойные числа» и «дуальные числа».Рассмотрим «двойные числа»

Определение 25.Двойное число- выражение вида $z=x+ey$, где x,y- вещественные, а «двойная единица» e (это тоже есть «число особого вида», несравнимое с вещественными) удовлетворяет условию $e^2=+1$.

Сложение и вычитание двойных чисел определяется аналогично сложению и вычитанию комплексных чисел:

$(x+ey)\pm(x_1+ey_1)=(x\pm x_1)+e(y\pm y_1)$ (1)

А умножение

$(x+ey)\,(x_1+ey_1)=(xx_1+yy_1)+e(xy_1+yx_1)$ (2)

Очевидно, сложение двойных чисел определено и однозначно. Относительно этой операции множество двойных чисел является абелевой аддитивной группой. Умножение двойных чисел для любой их пары определенно и однозначно. Оно удовлетворяет коммутативному и ассоциативному законам. Имеет место закон дистрибутивности. Число $1+0e$ играет роль единицы при умножении. Следовательно, множество двойных чисел есть коммутативное кольцо с единицей. Обозначим его К.

Из формулы (2) следует что

(x+ey) (x₁+ey₁)=0 $\Leftrightarrow \begin{cases} xx_1 + yy_1 = 0, \\ xy_1 + x_1 y = 0 \end{cases}$ (3).

Если *x,y* зафиксировать, то система (3) имеет не нулевые решения $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix} = 0$, т.е.

x^2-y^2=*0*, или $|x| = |y|$. Отсюда следует, что числа $x \pm xe$ являются делителями нуля. Итак, *K*- коммутативное кольцо с единицей и делителями нуля. Так как в кольце с делителями нуля на делители нуля делить нельзя, то пусть *z* $\neq$ $x \pm xe$ тогда можно определить z_1/z

$$\frac{x_1 + ey_1}{x + ey} = \frac{(x_1 + ey_1)(x - ey)}{(x + ey)(x - ey)} = \frac{xx_1 - yy_1}{x^2 - y^2} + e\frac{xy_1 - x_1 y}{x^2 - y^2} \ .$$

Как и в случае с комплексными числами условимся писать *x=Rez, y=Imz* и введем понятие модуля и аргумента

$$|z| = \begin{cases} \pm\sqrt{x^2 - y^2}, |x| \geq |y| \\ \pm\sqrt{y^2 - x^2}, |x| \leq |y| \end{cases},$$

где знак перед корнем выбирается совпадающим со знаком большего по абсолютной величине из чисел *x,y*. Очевидно, модуль делителя нуля равен 0.

Для чисел, не являющими делителями нуля, можно ввести аргумент. Для этого надо рассмотреть 2 случая

A. $|x| \geq |y|$ модуль *r* числа *z* определяется по формуле $r = |z| = \pm\sqrt{x^2 - y^2}$ (где знак числа *r* совпадает с *x*). Поэтому $\left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{x^2 - y^2}{r^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2} = 1$, следовательно, существует такое число ϕ(которое можно понимать как некоторый угол в плоскости Минковского), что $ch\phi = \frac{x}{r} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, sh\phi = \frac{y}{r} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}, th\phi = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$

В. $|y| \geq |x|$ модуль r числа z определяется по формуле $r = |z| =$

$\pm\sqrt{y^2 - x^2}$ (где знак числа r совпадает y). Поэтому

$\left(\frac{y}{r}\right)^2 - \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2 - x^2}{r^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^2 - x^2} = 1$, следовательно, существует такое

число ϕ (которое можно понимать как некоторый угол в плоскости Минковского), что $sh\phi = \frac{x}{r} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, ch\phi = \frac{y}{r} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}, th\phi = \frac{x}{y} = \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}$.

Таким образом, каждое двойное число *z=x+ey* ненулевого модуля можно записать в одной из форм $z=r(ch\phi+esh\phi)$ или $z=r(sh\phi+ech\phi)$. Числа *x+ey*, где $|x| \geq |y|$ будем называть *двойными числами 1-го рода,* а если $|x| < |y|$ то *двойными числами 2-го рода*. Произведение (частное)двух одноименных двойных чисел есть число 1-го вида, а произведение (частное) двух разнородных двойных чисел есть число 2-го рода.

После этого аналитического введения перейдем к геометрии.

Полярными координатами точки М плоскости Минковского будем называть (понимаемое в смысле геометрии Минковского) расстояние $OM=d_{om}=r$ и один из углов $\angle xOM=\delta_{Ox}, OM=\phi$ и $\angle yOM=\delta_{Oy}, OM=\phi$, в зависимости от того, является *ОМ* прямой первого или второго рода. Построим числовую модель плоскости Минковского. Для этого каждой точке *M(x,y)* поставим в соответствие двойное число *z=x+ey*. Если l_1 и l_2 - биссектрисы координатных углов, то для внутренних точек тех углов, внутри которых проходит *Ox,* $|x| > |y|$. Для другой пары вертикальных углов $|x| < |y|$. Если $|x| = |y|$, т.е *z*- делитель нуля, то точка, соответствующая числу *z* лежит на l_1 или l_2 , соответствующее двойное число *z* можно представить в виде $z=r(ch\phi+esh\phi)$ или $z=r(sh\phi+ech\phi)$ в зависимости от того, какое из равенств $\phi = \angle xOM$ или $\phi = \angle yOM$ имеет место. [15]

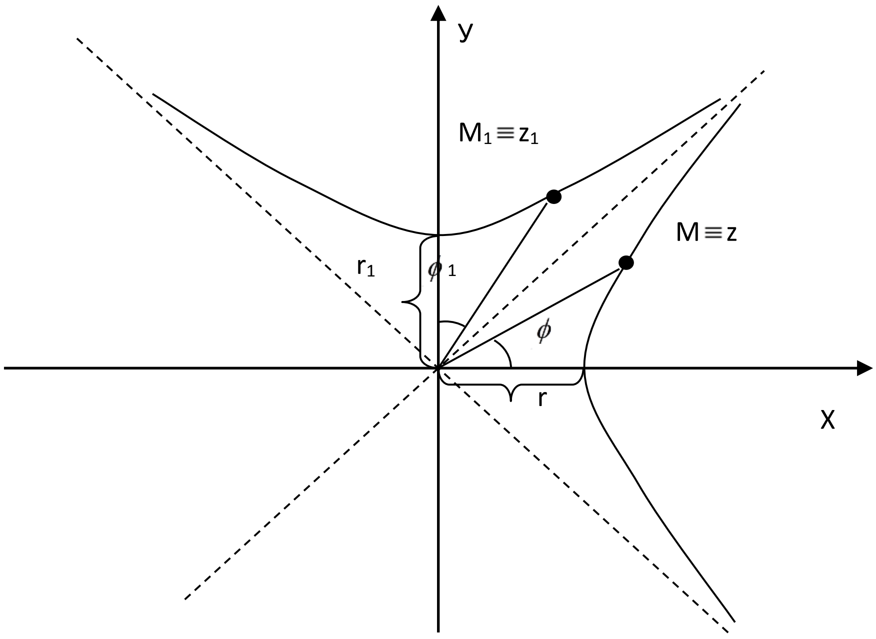


Рисунок 3.2.1

Расстояние $d_{z,z1}$ между двумя точками плоскости Минковского будет задаваться формулой $d_{z,z1} = |z - z_1|$

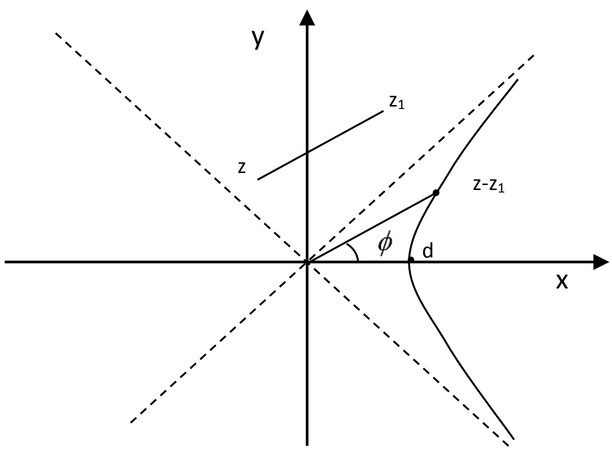


Рисунок 3.2.2

Угол $\delta_{(z0,z1)(z0,z2)}$ между прямыми $(z_0,z_1),(z_0,z_2)$, соединяющими точи z_1 и z_2 с одной и той же точкой z_0, выражается формулой $\delta_{(z0,z1)(z0,z2)} = ArgV(z_2, z_1, z_0) = Arg\dfrac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$,где величину $V(z_2, z_1; z_0) = \dfrac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$

называют простым отношением трёх точек z_2,z_1,z_0 плоскости Минковского. Используя формулу $Arg(z/z_1)=Argz-Argz_1$, получим $\delta_{(z0,z1)(z0,z2)}=\phi_2-\phi_1$, где

$\phi_1 = Argz_1^0 = Arg(z_1 - z_0), \phi_2 = Argz_2^0 = Arg(z_2 - z_0)$

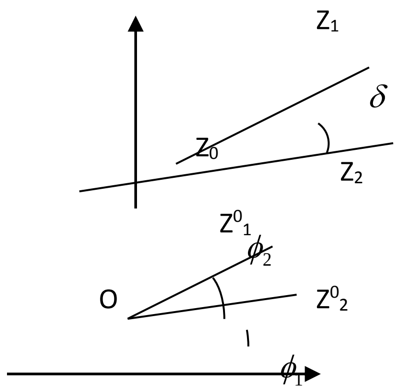


Рисунок 3.2.3

Поскольку прямая (z_1,z_2), очевидно, представляет собой множество таких точек z , что

$ImV(z,z_1;z_2)=0$, где $V(z\ ,z_1;z_2)=\dfrac{z-z_2}{z_1-z_2}$ - простое отношение трех точек плоскости Минковсого, то уравнение прямой плоскости Минковского имеет вид $\dfrac{z-z_2}{z_1-z_2}=\dfrac{\overline{z}-\overline{z_2}}{\overline{z_1}-\overline{z_2}}$ или $Bz-\overline{B}\overline{z}+C=0, \mathrm{Re}C=0$, где B и C двойные числа. Данное уравнение задаёт некоторую прямую линию плоскости Минковского, а именно прямую, соединяющую такие точки z_1 и z_2, что $z_1-z_2=B, z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2=C.$ Окружность с центром z_0 и квадратом радиуса $p=\pm r^2$, причем $r>0$, представляет собой множество таких точек z, что

$|z-z_0=r|$ или $(z-z_0)(\overline{z}-\overline{z_0})=p$, при этом необходимо потребовать что бы все разности $z-z_0$ были числами одного вида. Таким образом, уравнение окружности имеет вид

$z\bar{z}-\bar{z}_0 z-z_0\bar{z}+(z_0\overline{z_0}-p)=0$ или $az\bar{z}+bz+\overline{bz}+c=0, \mathrm{Im}\, a=\mathrm{Im}\, c=0$. Обратное, каждое уравнение вида $az\bar{z}+bz+\overline{bz}+c=0, \mathrm{Im}\, a=\mathrm{Im}\, c=0$ определяет окружность плоскости Минковского, центр z_0 и квадрат радиуса p которой определяется из соотношений

$$\overline{z_0}=-\frac{a}{b}, z_0\overline{z_0}-p=\frac{c}{a}$$

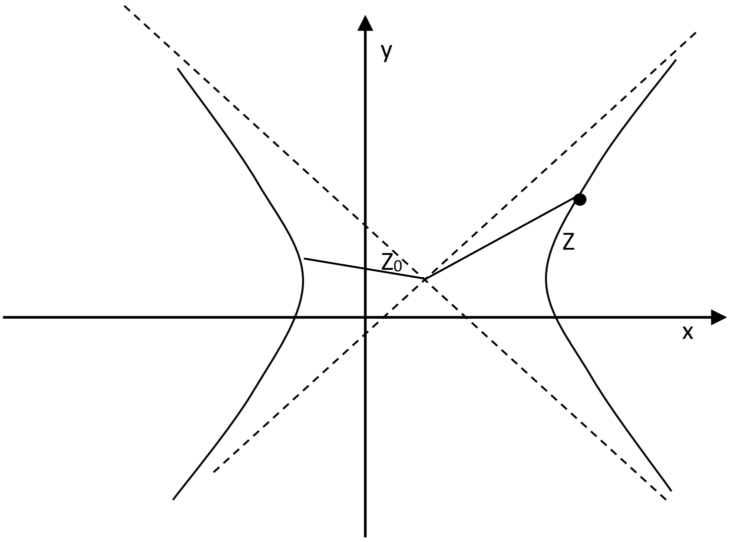


Рисунок 3.2.4

Окружность плоскости Минковского, проходящая через точки z_1,z_2 и z_3 это множество таких точек z, что $\delta_{(z3,z1),(z3,z2)}=\delta_{(z,z1),(z,z2)}$, т.е. что

$ImW(z_1,z_2;z_3,z) = Im\frac{V(z_1,z_2;z_3)}{V(z_1,z_2;z)}=$

$=\mathrm{Im}\left(\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z}{z_2-z}\right)=0$, *гд*е $W(z_1,z_2;z_3,z)=$ $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z}{z_2-z}$-(сложное или двойное) отношение четырех точек z_1,z_2,z_3,z плоскости Минковского. Таким образом, уравнение рассматриваемой окружности имеет вид $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z}{z_2-z}=\frac{\overline{z_1}-\overline{z_3}}{z_2-z_3}:\frac{\overline{z_1}-\bar{z}}{z_2-z}$ или вид

$Az\bar{z} + Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0, \operatorname{Re} A = \operatorname{Re} C = 0$, где коэффициенты *A,B* и *C* определяются по формулам

$$A = (z_1 - z_3)(\overline{z_2} - \overline{z_3}) - (\overline{z_1} - \overline{z_3})(z_2 - z_3)$$

$$B = \overline{z_2}(\overline{z_1} - \overline{z_3})(z_2 - z_3) - \overline{z_1}(z_1 - z_3)(\overline{z_2} - \overline{z_3})$$

$$C = \overline{z_1} z_2 (z_1 - z_3)(\overline{z_2} - \overline{z_3}) - z_1 \overline{z_2}(\overline{z_1} - \overline{z_3})(z_2 - z_3)$$

Данное уравнение и уравнение $az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0, \operatorname{Im} a = \operatorname{Im} c = 0$ равносильны (для того что бы обратить данное уравнение в $az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0, \operatorname{Im} a = \operatorname{Im} c = 0$ достаточно умножить данное на e).

Соотношении *ImW(z₁,z₂;z₃,z)*= $\operatorname{Im}\left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z}{z_2 - z}\right) = 0$ представляет собой (необходимое и достаточное) условие принадлежности четырех точек z_1, z_2, z_3, z плоскости Минковского одной окружности .

Движения плоскости Минковского можно описать как преобразования, переводящие точку *z* в *z'*, где *z'=pz+q*.

3.3. Понятие полной поверхности ${}^2R_5$

Зафиксируем в E_3^2 сферу *S* действительного радиуса *($r^2>0$)*. Можно считать, что центр сферы совпадает с началом координат. Построим гиперболическую плоскость следующим образом: «точкой» этой плоскости будем считать *A=(A₁,A₂)* пару диаметрально противоположных точек сферы *S*.

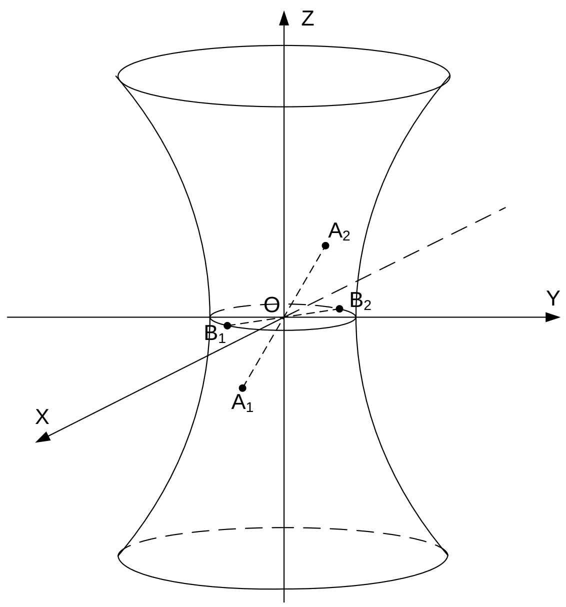


Рисунок 3.3.1

«Прямой» гиперболической плоскости будем называть множество «точек», лежащих в пересечении сферы S с любой плоскостью, проходящей через точку O.

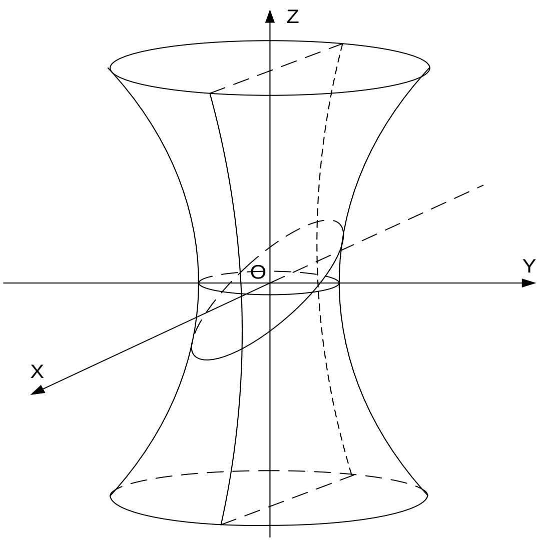


Рисунок 3.3.2

Свойства гиперболической плоскости.

1^0Через любые две «точки» проходит «прямая» и только одна.

Доказательство.

Даны две «точки», т.е. различные пары $A(A_1,A_2)$ и $B=(B_1,B_2)$ однополосного гиперболоида. Эти пары точек лежат в одной и только одной евклидовой плоскости $П$, причем $П \in O$.Такая плоскость пересекает сферу S . По определению, линия пересечения является «прямой». На наглядной модели такая прямая изобразиться либо эллипсом (прямая AB), либо гиперболой (прямая AC).

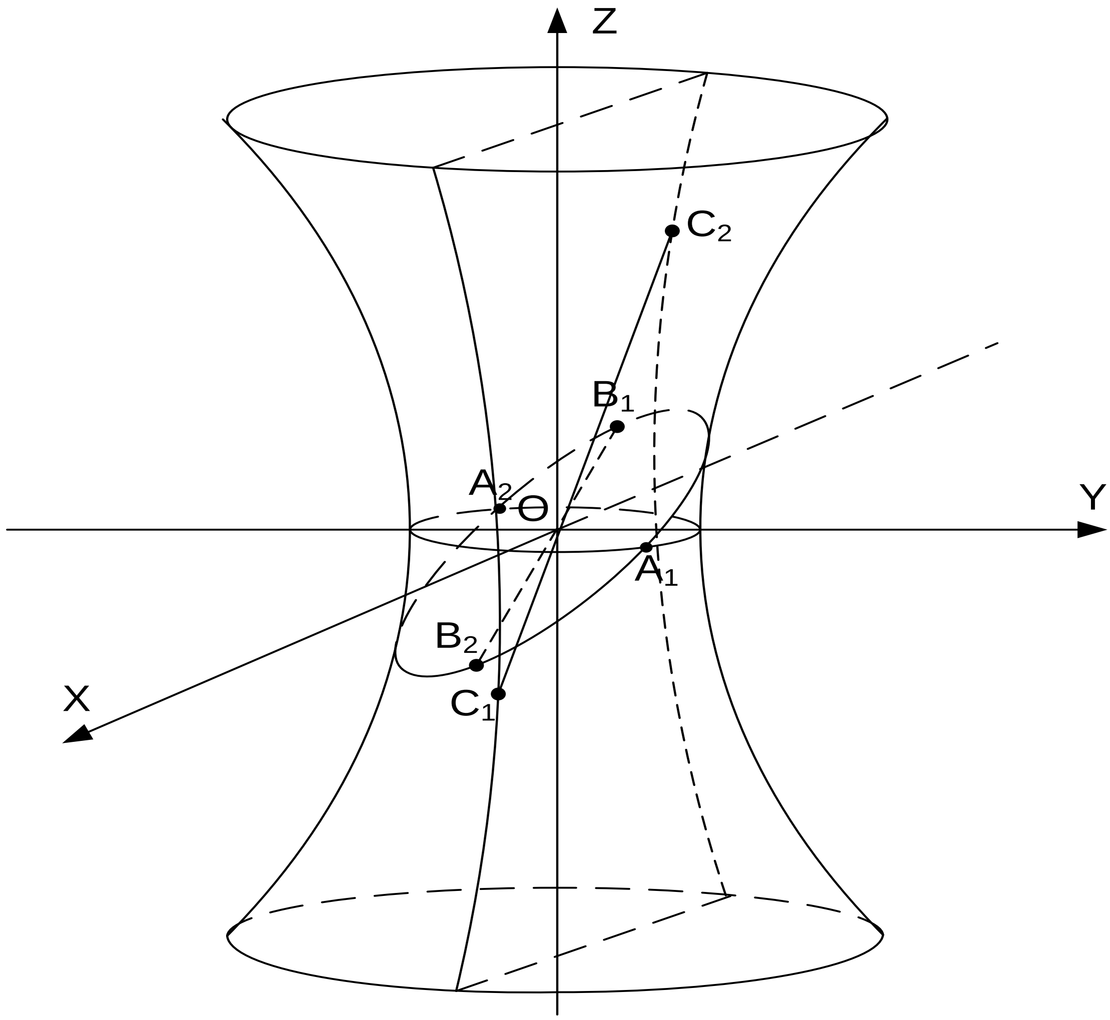


Рисунок 3.3.3

2^0Через любую «точку» проходит бесконечно много «прямых», не пересекающих дан ную прямую.

Доказательство.

Пусть дана «прямая» a и пусть α - евклидова плоскость в которой она лежит. Проведем евклидову прямую $t \| (Ox)$ и возьмем точки B_1 и C_1 на t вне сферы (т.е. вне гиперболоида). Пусть $D=(D_1,D_2)$ – данная точка «точка» и т. $D \notin a$. Проведем евклидовую прямую l, пересекающую (Oz) и параллельную (Ox). Она пересечет асимптотический конус в точках K и P. Возьмем B_1 между точками K и O_1, B_2 – диаметрально противоположная ей точка. Через точки (B_1,B_2) и (D_1,D_2) пройдет плоскость $П$, $П \in O$.Кроме того $П \cap \alpha = t$ (евклидова прямая), $t=(B_1,B_2)$. Так как (B_1,B_2) проходит внутри асимптотического конуса, то она с этим конусом, а поэтому и с однополостным гиперболоидом (т.е. сферой) не пересекается. Если $b = S \cap П$, то $b \in D$ и $b \cap a = 0$. Так как точек B, лежащих между K и O_1 бесконечно много, то прямых вида b тоже бесконечно много. [15]

Уже по этим свойствам гиперболическая плоскость похожа на плоскость Лобачевского. Можно показать, что она является моделью этой плоскости. Если зафиксировать гиперболическую плоскость и назвать каждую ее «точку» точкой Лобачевского, каждую прямую- «прямой» Лобачевского и каждое движение псевдоевклидова пространства, сохраняющее фиксированную сферу, движением Лобачевского, то все аксиомы планиметрии Лобачевского выполняются.

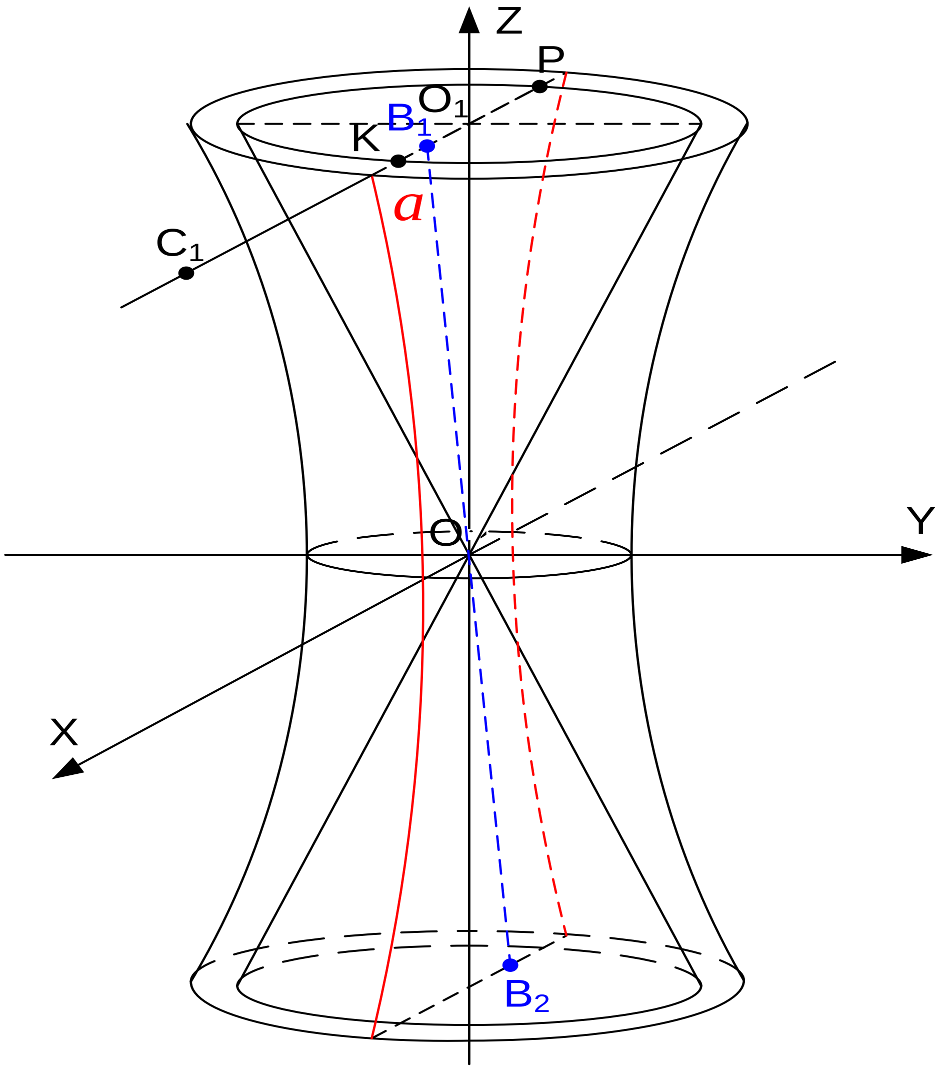


Рисунок 3.3.4

Мы только что проверили аксиому I_1. Аксиомы I_2, I_3 выполняются очевидно. Доказательство свойства 2^0 есть проверка аксиомы IV*. Аксиомы II иY групп выполняются очевидно, так как термин «лежать между» здесь будет таким же как и в евклидовом пространстве, и все сечения однополостного гиперболоида есть непрерывные линии. Верность аксиом III группы будет вытекать из свойств движения псевдоевклидова пространства.

Предположим, что A и B - две замкнутые и гладкие строго выпуклые поверхности в ${}^2R_5$. Это границы компактных строго выпуклых областей в ${}^2R_5$с непустой внутренней частью. Чтобы изучить движение A и B друг на друге, нам нужно четкое описание конфигураций контактов. Каждая контактная конфигурация этих поверхностей может быть определена путем идентификации касательной плоскости A с касательной плоскостью B что может быть сделано двумя различными способами в соответствии с различными ориентациями касательных плоскостей. В одном из этих двух типов контактных конфигураций две поверхности касаются друг друга снаружи, а в другом случае они касаются изнутри. Тип конфигурации контакта можно указать, выбрав ориентации для A и B. После того, как мы установим ориентации для A и B, идентификация двух касательных плоскостей может быть выполнена путем идентификации единичного вектора в одной из них с единичным вектором в другой. , Отныне мы предполагаем, что все наши поверхности ориентированы. Плавное движение A и B друг на друга дает две гладкие кривые p (t) и q (t) на A и B соответственно. Заметим, что в целом это движение не может быть восстановлено по этим двум кривым, но в нескользких движениях эти кривые однозначно описывают движение.

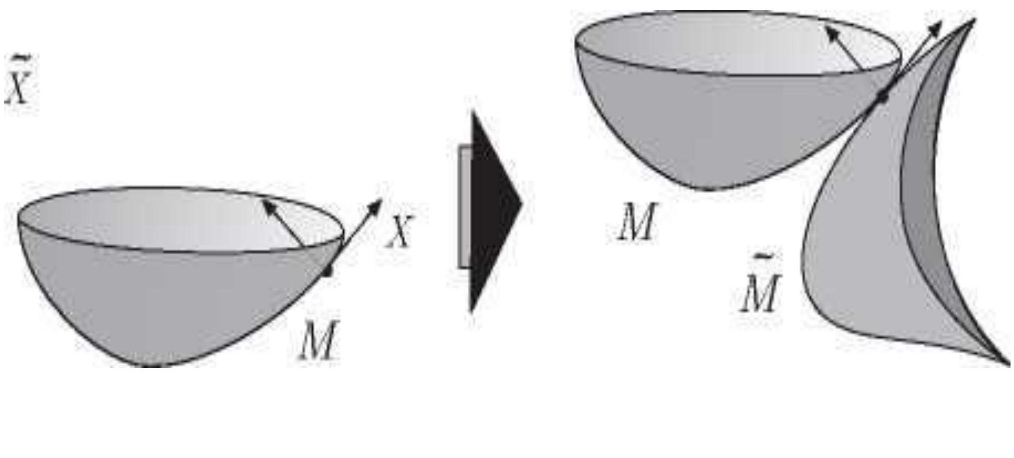


Рисунок 3.3.5

Если движение не скользит и не вращается, то p и q имеют одинаковую скорость и геодезическую кривизну. Наоборот, две гладкие кривые p (t) и q (t) с одинаковой скоростью и геодезической кривизной в каждый момент времени t однозначно определяют плавное наматывание A и B друг на друга. Поэтому, начиная с конфигурации контакта, плавная кривая на одной из поверхностей, начинающихся с точки контакта, идентифицирует уникальное сворачивание A и B.

Поверхности положительной кривизны с индефинитной метрикой. Из индефинитности метрики поверхности Ф немедленно вытекает, что Z-координата точек этой поверхности, рассмотренная как функция на гладкой поверхности Ф, не может иметь критических точек. Непосредственно из этого, конечно, еще не вытекает окончательных! выводов о возможном топологическом строении такой поверхности, но, если потребовать дополнительно выполнения условия внешней полноты, то нетрудно проверить,что сечения поверхности Ф плоскостями $z = a$ будут гомеоморфными при всех a. Отсюда следует, что рассматриваемые поверхности гомеоморфны либо плоскости, либо цилиндру, и при этом проектируются на всю ось . Он справедлив независимо от знака кривизны, но будет интересовать нас лишь для поверхностей положительной кривизны, поскольку для поверхностей отрицательной кривизны уже получены более сильные ограничения. Простейшие примеры показывают, что обе возможности реализуются в действительность. Оказывается, что для риманова пространства можно построить такие эквивалентные определения полноты, которые не опираются на свойства метрического пространства, порожденного римановой метрикой, и сохраняют смысл для псевдориманова пространства. Проблема заключается в следующем. В геометрии поверхностей евклидова пространства полнота поверхности понимается как полнота того метрического пространства, которое индуцировано на этой поверхности.

В псевдоевклидовом пространстве на поверхности может вообще не индуцироваться никакое метрическое пространство, и такое определение теряет смысл. Неголономные системы появляются в нескольких областях науки и интересны как своей актуальностью для практических применений, так и проблемами, связанными с их планированием и контролем. Существует много работ и подходов к изучению природы таких систем и их геометрических структур . Интересным примером таких систем является подвижная пара твердых тел. При движении твердого тела, касающегося другого, может произойти скольжение или вращение. Движение скользит, если точка контакта в свое время контакта имеет ненулевую скорость относительно другого тела.

Выводы по третий главе

Для теории поверхностей в псевдоевклидовых пространствах важна другая особенность понятия геодезической полноты, отличающая его от полноты метрической. Очевидно, что уходящая на бесконечность поверхность в евклидовом пространстве, т. е» такая поверхность Ф, любая предельная точка которой в смысле объемлющего пространства принадлежит самой поверхности Ф, должна быть метрически полной. Однако это свойство теряется при переходе к поверхностям в| псевдоевклидовых пространствах. В них уходящая на бесконечность или, как принято говорить, внешне полная поверхность,можетне быть геодезически полной. Формула Гаусса — Бонне для двумерных псевдоримановых пространств. Другим аспектом, в котором рассмотрение кривизны псевдоримановых пространств отличается от рассмотрения кривизны римановых пространств, является формулировка теоремы

Гаусса — Бонне. На первый взгляд, при анализе этой формулы для случая замкнутых многообразий не возникает никакой специфики. Легко доказывается, что для двумерного замкнутого многообразия Q с индефинитной метрикой

$$\iint_Q K d\sigma = 0$$

Предположим, что A и B - две замкнутые и гладкие строго выпуклые поверхности в ${}^2R_5$. Это границы компактных строго выпуклых областей в ${}^2R_5$с непустой внутренней частью. Чтобы изучить движение A и B друг на друге, нам нужно четкое описание конфигураций контактов. Каждая контактная конфигурация этих поверхностей может быть определена путем идентификации касательной плоскости A с касательной плоскостью B что может быть сделано двумя различными способами в соответствии с различными ориентациями касательных плоскостей

Заключение

По нашему мнению для выпуклых поверхностей и для поверхностей с положительно определенной метрикой сформулированное понятие внешней полноты совпадает с условием принадлежности поверхности всех предельных точек. В частности, для выпуклой поверхности внешняя полнота означает, что поверхность является всей границей выпуклого тела и совпадает с тем понятием полноты, которое было развито. Для седловых поверхностей наша терминология несколько расходится с принятой в геометрии поверхностей в евклидовом пространстве, с точки зрения которой используемое понятие полноты было бы последовательнее называть полнотой в наложенном пространстве.

Связь между внутренней и внешней полнотой для поверхностей с индефиниткой метрикой. Будем предполагать, что рассматриваемая нами внутренне полная поверхность Ф принадлежит классу C^2. Прежде всего очевидно, что неизотропные геодезические поверхности Ф, рассматриваемые как кривые объемлющего пространства, должны иметь бесконечную длину. В силу обратного неравенства треугольника это возможно только в том случае, если кривые являются внешне полными. Тогда внешне полными должны быть и поверхности Ф, но доказательство этого фактора гораздо сложнее, чем для поверхностей с положительно определенной метрикой. Теперь мы должны коснуться граничной точки поверхности не произвольной кривой, а неизотропной геодезической. Сложность заключается в том, что, как уже отмечали, геодезически полное псевдориманово многообразие может не быть геодезически связным. Потеря геодезической связности обусловлена возникновением сопряженных точек. Нетрудно проверить, что на многообразии с индефинитной метрикой знакопостоянной кривизны K справедливо следующее утверждение. Если точки M $и$ N можно соединить кривой, на которой $K(v;\ v) \leq Q,$ то их можно соединить и геодезической, на которой выполнено то же неравенство. Доказательство, этого утверждения основано на том, что, во-первых, достаточно близкие точки всегда можно соединит геодезической, а во-вторых, краевая задача для уравнения Якоби при условии $K(v,\ v)<0$ всегда имеет единственное решение. Опираясь на эти соображения, можно доказать следующую лемму о связи внутренней и внешней кривизны. Для теории поверхностей в псевдоевклидовых пространствах важна другая особенность понятия геодезической полноты, отличающая его от полноты метрической. Очевидно, что уходящая на бесконечность поверхность в евклидовом пространстве, т. е» такая поверхность Ф, любая предельная точка которой в смысле объемлющего пространства принадлежит самой поверхности Ф, должна быть метрически полной. Однако это свойство теряется при переходе к поверхностям в| псевдоевклидовых пространствах. В них уходящая на бесконечность или, как принято говорить, внешне полная поверхность,можетне быть геодезически полной.

Формула Гаусса — Бонне для двумерных псевдоримановых пространств. Другим аспектом, в котором рассмотрение кривизны псевдоримановых пространств отличается от рассмотрения кривизны римановых пространств, является формулировка теоремы Гаусса — Бонне. На первый взгляд, при анализе этой формулы для случая замкнутых многообразий не возникает никакой специфики. Легко доказывается, что для двумерного замкнутого многообразия Q с индефинитной метрикой

$$\iint_Q K d\sigma = 0$$

Предположим, что A и B - две замкнутые и гладкие строго выпуклые поверхности в ${}^2R_5$. Это границы компактных строго выпуклых областей в ${}^2R_5$с непустой внутренней частью. Чтобы изучить движение A и B друг на друге, нам нужно четкое описание конфигураций контактов. Каждая контактная конфигурация этих поверхностей может быть определена путем идентификации касательной плоскости A с касательной плоскостью

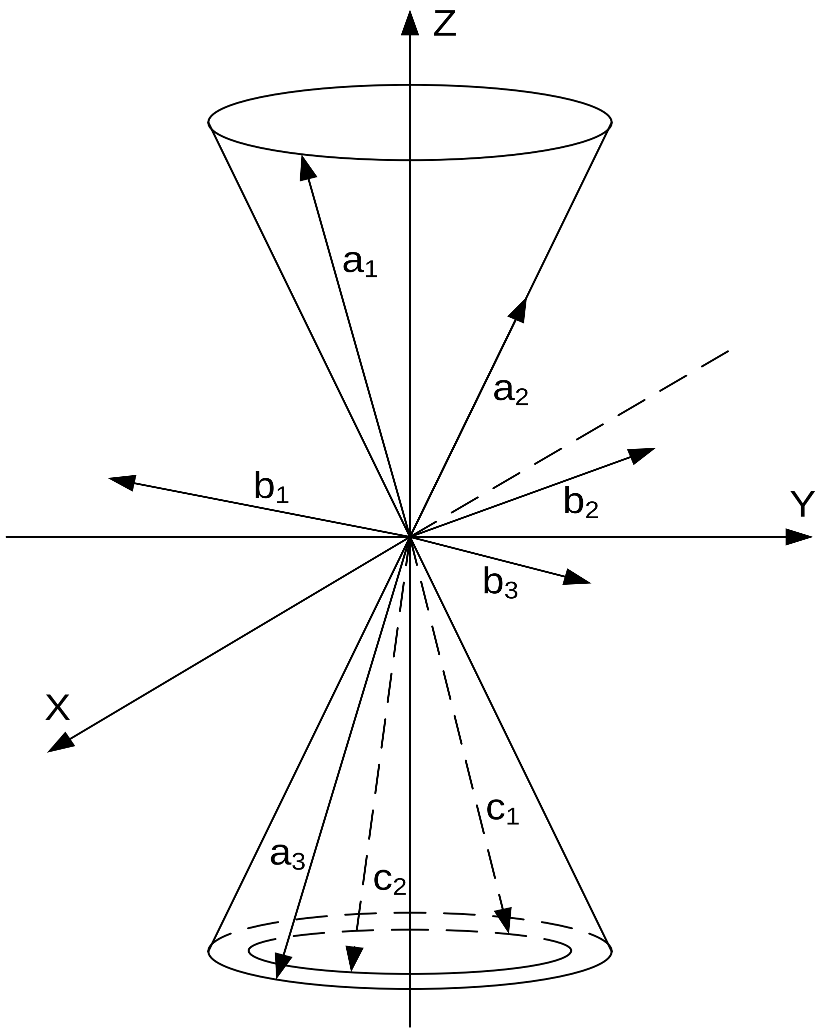
В что может быть сделано двумя различными способами в соответствии с различными ориентациями касательных плоскостей

Построим «наглядную» модель пространства E_3^2. Для этого возьмем аффинное трехмерное пространство. Зафиксируем в нем систему координат. Заданную репером $R=\{0,e_1,e_2,..,e_n\}$. Векторы будем откладывать от начала координат.

1)Вектор $a\{x,y,z\}$ изотропный $\Leftrightarrow x^2+y^2-z^2=0$. Концы таких векторов – это точки конуса с вершиной в начале координат. Изотропные вектора будут откладываться на поверхности этого конуса (вектора a_1,a_2,a_3 изотропные).

2) Вектор $b\{x,y,z\}$вектор первого рода $\Leftrightarrow x^2+y^2-z^2>0$. Такие векторы, отложенные от начала координат, распложаться вне конуса (вектора b_1,b_2,b_3 – вектора первого рода).

3) Вектор $c\{x,y,z\}$вектор второго рода $\Leftrightarrow x^2+y^2-z^2<0$. Такие векторы, отложенные от начала координат, распложаться внутри конуса (вектора c_1,c_2, – вектора второго рода).



Все евклидовы плоскости будут параллельны тем проходящим через т.O плоскостям, которые имеют с конусом одну общую точку O. Все псевдоевклидовы плоскости параллельны тем плоскостям, которые проходят через т.O и пересекают конус по двум образующим. Все полуевклидовы плоскости параллельны тем проходящим через O плоскостям, которые касаются конуса.

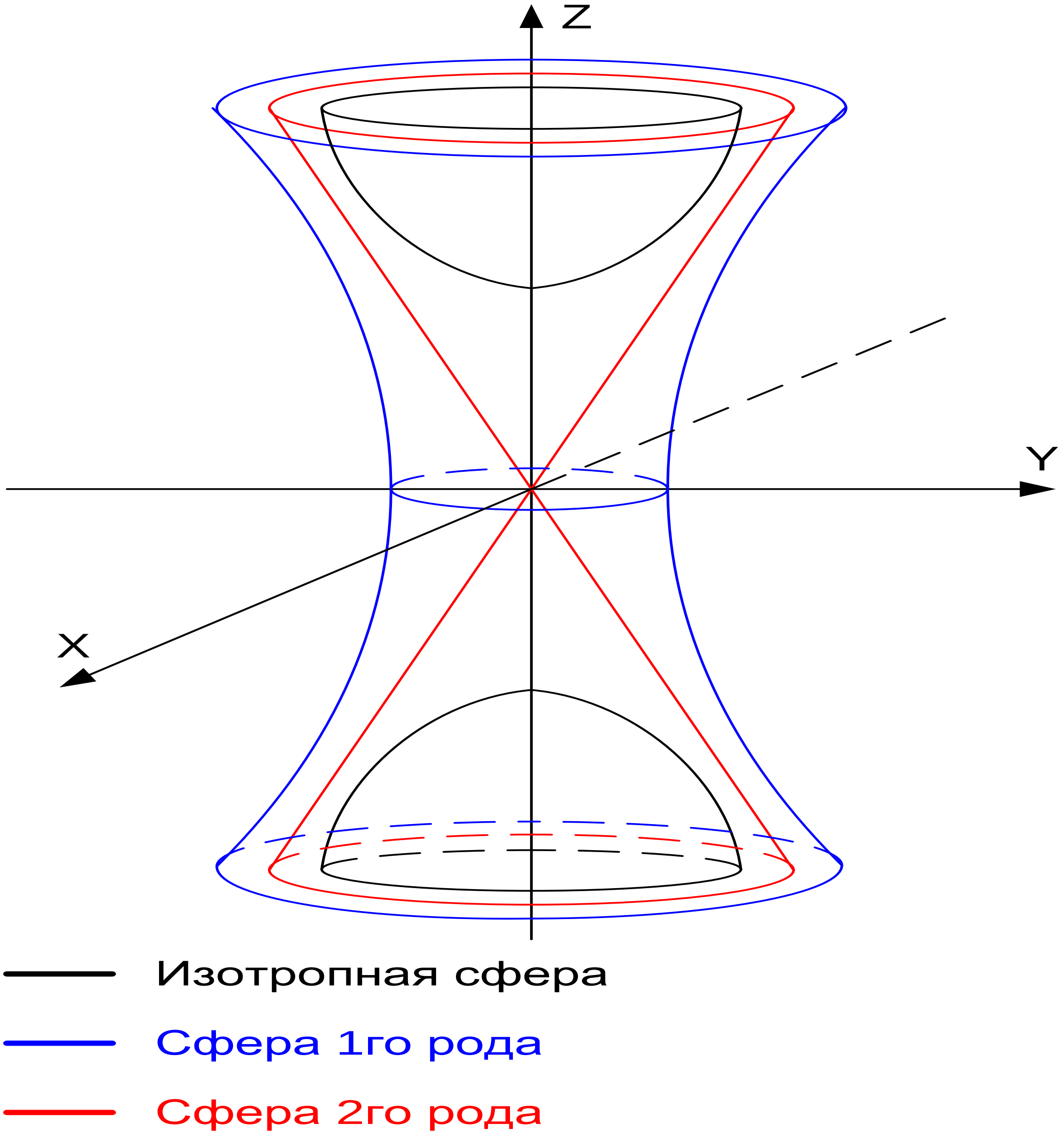
На этой модели сфера будет изображаться

- при $r^2>0$ однополостным гиперболоидом с центром (x^0, y^0, z^0) и асимптотическим конусом *C*,

- при $r^2<0$ двуполостным гиперболоидом с тем же центром и тем же асимптотическим конусом,

- при $r^2=0$ асимптотическим конусом.

На чертеже изображены сферы с центром в начале координат.



Угол ψ между неизотропными ненулевыми векторами определим, как и на плоскости E_2^1, формулой $\cos\psi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$.

Два ненулевых вектора назовем ортогональными $\Leftrightarrow a\cdot b = 0$. Если $a\{x_1, y_1, z_1\}$,$b\{x_2, y_2, z_2\}$, то $a\perp b \Leftrightarrow a\neq 0, b\neq 0$ и $x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2 = 0$. А это есть условие сопряженности относительно конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Так как относительно этого конуса каждый ненулевой вектор имеет сопряженные векторы и все сопряженные ему векторы образуют двумерное векторное пространство, то

1^0Через любую точку проходит плоскость, перпендикулярная данной прямой, и только одна;

2^0Из любой точки на плоскость можно опустить перпендикуляр и только один;

3^0Все плоскости, перпендикулярные данной прямой, параллельны.

Список использованной литературы:

1. Каримов И.А. Узбекистан на пороге Независимости. – Т., 2011.
2. Идея национальной независимости: основные понятия и принципы. - Т., «Узбекистон», 2003.
3. ПРООН Узбекистан. 2001. Отчет по электронной готовности Узбекистана.
4. Александров А.Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М-Л. ОГИЗ, 1948. 388 с
5. Соколов Д.Д., Артыкбаев А. Геометрия в целом в плоском пространстве-времени. Ташкент издательствщ «Фан» 1991
6. Артыкбаев А. К проблеме Минковского в галилеевом пространстве. доклад 1986.
7. Андреева З.И. , Шеремет Г.Г. Псевдоевклидова плоскость (плоскость Минковского)// в сб. Актуальные проблемы обучения математике. Т. 3: Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Орел: Изд.ОГУ, 2002
8. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. - М. : Наука, 1978
9. Яглом И.М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия, - М. : Наука, 1972
10. Попов В.А. Аналитическое продолжение локально заданных римановых многообразий// матем. заметки. 1984
11. Шварц Л. Математический методы для физических наук. М. : Мир1965
12. Стинрод Н. Топология косых произведений. М. :ИЛ. 1958
13. Широков П.А. Избранные работы по геометрии. Казань: изд. Казанского ун-та, 1966. С 15-79
14. Акивис М.А. Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977 84 с

15. Соколов Д.Д. Поверхности в псевдоевклидовом пространстве. Проблемы геометрии 1980
16. Гуревич В.Л. Выпуклые поверхности в псевдоевклидовом пространстве// доклад 1978.
17. Милка А.Д. Что геометрия « в целом » ? М. : Знание 1986.
18. Погорелов А.В. Многомерная проблема Минковского . М. : Наука, 1975.
19. Демидов С.П. Теория упругости. М.: Высшая школа , 1979.
20. Дубровин Б.А. ,Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М. : Наука, 1979
21. Погорелов А.В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М. : Наука, 1969.
22. Nash L.F. The imbedding problem for Riemannian manifolds// Ann. Math. 1956
23. Акивис М.А. О строении поверхностей, несущих сеть сопряженных линий. М. :1963
24. Панкина Н.Е. К теории поверхностей трехмерного галилеева пространства. М. :1980
25. Громов Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М. : Мир1975

Интернет ресурсы:

1. http://revolution.allbest.ru/pedagogics/
2. http://www.refsru.com/
3. www.norma.uz
4. http://nashol.com/
5. https://infourok.ru/
6. http://www.erono.ru/рской
7. http://www.scopus.co

ПРИЛОЖЕНИЯ.

Система аксиом Лобачевского

I. Аксиомы принадлежности

I_1. Каковы бы ни были две точки, существует прямая, проходящая через эти точки, и притом только одна.

I_2. На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

I_3.Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

II. Аксиомы порядка

Эти точки связаны с отношением «лежать между». Если точка *B* лежит между *A* и *C*, то обозначение $B \mid AC$.

II_1. Если $A \mid BC$, то $A \mid CB$.

II_2. Для любых двух различных точек *A* и *B* существуют такие точки *C* и *D*, что $C \mid AB$ и $A \mid BD$.

II_3. Из трех различных точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

На основе этой аксиомы вводится понятие отрезка. Отрезком *AB* называется множество, состоящее из точек *A* и *B* и всех точек, лежащих между ними.

II_4.(аксиома Паша). Для любых трех точек, не лежащих на одной прямой, если прямая не проходит ни через одну из данных точек и пересекает один из определяемых ими отрезков, то она пересекает один и только один из двух оставшихся.

III. Аксиомы движения.

III_1. Движение есть однозначное отображение, при котором точки отображаются на точки, прямые на прямые.

III_2. Движение сохраняет отношение «лежать на».

III_3. Движение сохраняет отношение «лежать между».

III_4.Отображение, обратное движению, есть движение.

III_5. Произведение двух движений есть движение.

Репером называют совокупность фиксированной точки O, луча с началом в этой точке и полуплоскости, граница которой сдержит данный луч.

III_6. Для любой упорядоченной пары реперов существует и только одно движение, переводящее первый репер во второй.

ОТЗЫВ

О диссертационном исследовании Караматова Болатбека Тынчбековича «Двухмерные поверхности в пятимерном псевдоевклидовом пространстве» на соискание академической степени магистра по специальности 5A110101- математика

На современном этапе развития нашего общества как никогда возросла социальная потребность в нестандартно мыслящих творческих личностях. Потребность в творческой активности специалиста и развитом мышлении, в умении конструировать, оценивать, рационализировать быстро растет. Решение этих проблем во многом зависит от содержания и методики обучения будущих специалистов.

Основой целью профессионального образования является подготовка квалифицированного специалиста, способного к эффективной профессиональной работе по специальности и конкурентного на рынке труда.

Новизна диссертации состоит в следующем:

- предпринята попытка полного анализа инновационных технологий в решении задач;
- исследование геометрического строение и доказательство существование ряда классов поверхности;

Во введении обосновывается актуальность исследования, характеризуется степень разработанности проблемы, формируются цели и задачи исследования, определяются научная новизна и практическая значимость работы, а также общая структура диссертации.

В первой главе «Аналитическое определение псевдоевклидовых и полуевклидовых пространств» раскрываются основные понятия средств принципиально новые возможности.

В заключении делается вывод об актуальности разработки и использовании. **Во второй главе «Полные поверхности в псевдоевклидовом пространстве»** даётся понятие о видах технологий,

В третьей главе «Двухмерные поверхности пятимерным псевдоевклидовом пространстве» представлено содержание

В заключении диссертации формулируется основные выводы содержатся рекомендации по использованию результатов исследования.

Магистерская диссертация написана на должном научном уровне, оформлены с соблюдением действующих и необходимых стандартов.

Опубликованы автором работы полностью отражает содержание диссертации.

В своей работе Караматов Б.Т. демонстрирует способности к самостоятельной исследовательской работе; рассуждения, анализ, выводы диссертанта логичны и убедительны.

Таким образом, диссертация является законченной исследовательской работой и ее автор, Караматов Б.Т. заслуживает присуждения ей академической степени магистра.

Научный руководитель: **проф. А.Артыкбаев**