ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ГУЛИСТОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

“УМУМИЙ МАТЕМАТИКА” КАФЕДРАСИ

5460100- МАТЕМАТИКА ТАЪЛИМ ЙЎНАЛИШИ БЎЙИЧА БАКАЛАВР ДАРАЖАСИНИ ОЛИШ УЧУН

Шоёқубова БАРНОНИНГ

“Чизиқли тенгламалар системасини ечишда инновацион ёндашув”

МАВЗУСИДАГИ

Битирув малакавий иши

ИЛМИЙ РАХБАР ДОЦ.Ч.Э.МИРЗАЕВ.

ГУЛИСТОН – 2010

Кириш

<u>Мавзунинг долзарблиги:</u> Кадрлар тайёрлаш миллий дастурининг 3 – босқичи таълим тизимимизда кўплаб муаммолар борлигини кўрсатди. Бунинг учун таълим жараёнида қўлланилаётган замонавий ва ахборот технологиялари борасидаги тажрибаларни умумлаштириш талаб этилади (2,3)..

Мухтарам президентимиз И.А.Каримов XXI асрнинг биринчи ўн йиллиги ҳақида “Кимдир уни технологиялар замони деса, кимдир таффакур асри, яна биров ялпи ахборотлар даври сифатида изоҳламоқда... Аммо кўпчилик онгида бу давр глобаллашув даври тарзида таассурот уйғотмоқда” деган мухим фикрни такидлаб ўтди (1).

Олий таълимда математика ўқитиш борасидаги тажрибалар наъмунавий дастур асосида мавжуд ўқув адабиётларидаги ўқув материалини талабаларга етказиш ва уни талабалар томонидан ўзлаштириш бир қанча муаммолар борлигини кўрсатди (14,18,28).

Тенгламалар системасини ечиш ўрта мактабнинг 8 – синфида ўрганилади ва бунда тенгламалар системасини ечишнинг ўрнига қўйиш, қўшиш, график усулида ечиш усуллари ўрганилади (3,4,5,6,7). Ўрта ва ўрта махсус ўқув юртларида эса тенгламалар системасини график усулида ечиш, кўпайтувчиларга ажратиш усуллари билан илдизларини топиш ўрганилади, ҳамда тенгламалар системаси ва уларни мажмуаларини ўрганиш мўлжалланган (7,8,9,10,11,12). Олий таълимда айниқса, номатематик йўналишлар (иқтисод, табиатшунослик каби) да тенгламалар системасини ечиш вақт маъносида жиддий муаммо туғдирмоқда. Жумладан, ўқув адабиётларда аввало тенгламалар системасини ўрнига қўйиш, қўшиш, ўзгарувчиларни кетма – кет йўқотиш (Гаусс усули), тенгламалар системасини Крамер усули (Крамер формуласига) асосланиб ўрганиш, детерминантларнинг хоссаларини ўрганиш ва уларни хисоблаш, матрицаларни ўрганиш ва уларни хисоблаш, сўнгра тенгламалар системасини матрицаларга асосланиб ечиш каби узун йўл берилган

(13,15,18,34,38). Бироқ, хозирги ўқув режаларда бу мавзуни ўрганишни жуда кам яъни 8 соат (маъруза ва амалий машғулотлар билан бирга) вақт ажратилган. Бу вақт ичида мавзуни ўрганиш талабаларга жиддий муаммо яратмоқда. Шу боисдан ушбу мавзуни модулли ёки микромодулли ўқитиш технологиясига асосланиб ўрганиш мақсадга мувофиқ эканлиги кўриниб қолди (11,15,16,17,21). Ушбу битирув малакавий иш замонавий педагогик технологияларни таълимда тадбиқ этишда инновацион ёндашувларни амалга оширишга қаратилган (16,17,20,21,25,26,29) бўлиб, бу мавзунинг долзарблигини асослайди.

Битирув малкавий ишнинг мақсади: Модулли ўқитиш технологиясига асосланиб чизиқли тенгламалар системасини инновацион ёндашув ёрдамида ечиш.

Битирув малакавий ишнинг муаммоси: Чизиқли тенгламалар системасига оид ўқув материалини модулли ўқитиш технологиясига асосланиб қайта структуралаш ва унга мос технологик ёндашувни амалга ошириш.

Битирув малакавий ишнинг объекти: Ўрта, ўрта ва ўрта махсус, олий таълимда чизиқли тенгламалар системасини ўрганиш мазмуни ва усуллари.

Битирув малакавий ишнинг илмий фарази: Матрицалар ёрдамида чизиқли тенгламалар системасини ечиш вақт ва ўзлаштириш маъносида самарадорликка олиб келади.

Битирув малакавий ишнинг предмети: Чизиқли тенгламалар системасини ўрганишга оид ўқув материалини ўрганишда маъруза, амалий машғулот, кичик гуруҳларда топшириқларини бажариш, ҳамкорликда таълим олиш ва мустақил ишлларни бажаришни ўзаро мувофиқлаштириш.

Битирув малакавий ишнинг вазифаси: Чизиқли тенгламалар системасига оид ўқув материаллини модулли ўқитиш технологиясига асосланган таълим жараёнларини комплекс лойиҳалашни амалага ошириш.

Битирув малакавий ишнинг янгилиги (илмийлиги): Чизиқли тенгламалар системасини ўрганишда инновацион ёндашувни амалга ошириш. Матрицалар ёрдамида чизиқли тенгламалар системасини ечиш мазмуни, методлари, воситалари ва шаклларига асосланган янги таълим жараёнини ташкил қилиш. Таълим жараёнида жамоавий ўқитиш усули ва кичик гуруҳлар фаолиятидан самарали фойдаланиш маҳсули сифатида таълим жараёнини комплекс лойиҳалашга эришиш.

Битирув малакавий ишнинг фан учун аҳамияти: Чизиқли тенгламалар системасини матрицалар ёрдамида ўрганиш вақт жиҳатдан қисқа, маъруза ва амалий машғулотнинг бирлиги, таълимда интерфаол методлардан унумли фойдаланиш, ўқув материалининг бошқа фанларга тадбиқи (иқтисод ва бошқа фанлар), талабалар учун ўқув материалини қайта – қайта ўқиш ва олган билимларини (ўқув материалини ўзлаштиришда турли мураккаблик даражадаги назорат саволларини тузилиши) такомиллаштириб бориш ҳамда ўз билимини ўзи синаб кўриш имконияти яратилади.

Битирув малакавий ишнинг амалиёт учун аҳамияти: Чизиқли тенгламалар системасини ўрганишда инновацион ёндашув ўқув адабиётлардан фойдаланиш, дастурдаги материални самарали ўзлаштириш, талаба учун ўз билимини ўзи баҳолаш ва олган билимини бошқа фанларга тадбиқ қилиш (билимларни текшириб кўриш учун назорат саволлари берилиши) учун кенг имконият яратилади.

I– боб. Чизиқли тенгламалар системасини ўрганишнинг педагогик асослари.

Маъруза матни тайёрлашда мавзу модулларга ажратилиб, ўрганилаётган мавзу аниқ асосий саволларга бўлинади. Ҳар бир савол учун ўқитувчининг мақсади ва мавзудаги муаммолар кўрсатилган.Ўқитувчининг мақсади (талабанинг ўқув вазифалари деб аталди ишланмада) асосида талаба мавзуга оид муаммоларларни ўрганиш учун ўз олдига ўқув мақсадларини қўяди (20,21,23,29). Талаба асосан унинг учун белгиланган мақсадларни амалга оширишга эътиборни қаратади. Ўқув мақсадлари Б.Блум таксономиялари асосида "соддаликдан мураккабликга" қоидасига кўра вазифалар белгиланади. Бу мақсадлар: билиш, тушуниш, қўллаш, тахлил (анализ), синтез баҳолашдан иборат 6 та категорияга ажратилади. Б.Блум таксономиялари фақат ўқув мақсадлари амалга оширишга қаратилган, яъни тарбия муаммолари бунда қаралмайди (21,31,37). Педогогик технологияларини асосий камчилиги тарбия муаммоларига ечаолмаслигидадир. Шунинг учун тарбия муаммоларини таълим муаммолари билан қўшиб ўрганиш талаб этилмоқда. Талабанинг ўқув матриалини ўзлаштириши шу кўрсатилган 6 та ўқув мақсадлари категориясига мос холда тузилиши лозим. Таълимда дифференциаллаш (табақалаштириш) ва индувудаллаштиришга мос ёндошувларни амалга ошириш учун намунавий дастурлардан кўрсатилган ўқув дарсликлари ва қўлланмаларидаги ўқув материали қайта структураланади,яъни қайта тузилади ва тўлдирилади.Чунки мавжуд ўқув материали талабанинг педогогик технологиялар асосида таълим олишига мос эмас (13,14,33).

Демак, фанлардан педогогик технологиялар асосида машғулот олиб бориш учун ўқув материали қайта тузилиши талаб этилади (30,35,36,37). Бу ишлар кафедраларда малакали профессор – ўқитувчилар томонидан ўқув материалларини педагогик техналогиялар асосида ўрганишга қайта мослаш лозимлиги заруриятини яратаяпди (8,9,13,14,17,19).

Педогогик технологиялар асосида программалаштирилган ўқув методига таянишдир. Программалаштирилган ўқув методи ўқув материалларини ўқувчининг барча хислатларини хисобга олган холда ўқув материалини энг кичик соддалаштирилган, ўзлаштириш учун қулай бўлган бўлакларга бўлиб ўрганишни тоқозо этади. Педагогик технология асосидаги ўқув материали репродуктив (махсулдор, намунадаги, ўрганилаётган назарияни ўзлаштириш) амалга оширилади (20,21).Ўқув материали продуктив (сермахсул) ва ижодий ўзлаштириш даражани ўрганиш педогогик технологиялар учун асосий вазифа эмас. Демак программалаштирилган метод асосида тайёрланган ўқув материали "соддаликдан-мураккабликка" қоидасига тўла риоя қилинган, энг суст ўзлаштирувчи талабага мослаштирилган, ўзлаштириш учун вақт белгиланмаган, ҳар савол учун ўқувчининг ўз билимини ўзи синаб кўра олиши имконияти (назорат саволлари тузилган) яратилган бўлади. Бу материални ўрганишда талаба ўқув материалига қайта қайта мурожат қилиши, ва ўзлаштириш даражасини ошириб бориши мумкин.Ўқув материалини ўрганишда маъруза, амалий машғулот, семенар, мустақил ишлари, уйга вазифага оид топшириқлар аниқ кўрсатилади.Ўқув материалини ўрганишда кичик гурухлар ва жамоавий таълимга алохида эътибор берилади.Талабани ўзлаштириши рейтинг ишланмасида кўрсатилган пунктлар асосида белгиланади (27,28,29). Маърузада ўқув материалида берилган асосий мақсадлар билан материал ўзлаштиришда кутилаётган натижа орасидаги боғланиш яққол номоён этилади. Маърузада ўқув материали ўрганиш билан боғлиқ баъзи муаммолар тўлиқ ёритилмаслиги мумкин,лекин асосий мақсадни натижа билан боғланиш йўли талабаларга аён бўлиши лозим. Назарий материалларни маъруза давомида қандай ўзлаштирилиши 1-эсга олиш ва хотирага тиклаш, 2-репродуктив ўзлаштириш даражаси, 3-продуктив ўзлаштириш даражаси,4- ижодий ўзлаштириш даражасидаги саволлар орқали аниқланади. Саволлар иложи борича тест кўринишида тайёрланади.Талаба маърузага маъруза учун тайёрланган маъруза матнини тайёрлаб келади, яъни маърузадаги материал талабалар томонидан кичик гурухларга бўлинган холда ўрганиб келинади.Маъруза жараёнида ўқитувчи талаба учун мотиватция ва мотивга оид ўқув материалини баён қилади. Ҳар бир савол учун 15-20 минутдан ортиқ бўлмаган вақт сарфланади.Ҳар бир савол охирида талабаларни тест саволлари билан синаб кўради (20,21,22,32,35).

Маъруза материали асосида амалий машғулот, семинар, ТМИ белгиланади. Бу модул асосида талабанинг ўқув материалини ўрганиш ташкил этилади. Талаба берилган материални табақалаштирилган ва индивудуаллаштирилган ёндошув асосида рейтинг ишланмага кўра ўзининг ўзлаштириш даражасини белгилайди (35,36,37). Биз қуйида битта муаммо учун келтирилган фикрларимизни баён қиламиз.

1.1. Ўрта мактаб математика курсида тенгламалар системасини ўрганиш методикаси.

Ўрта мактаб математика курсида чизиқли тенгламалар аввало ўзгарувчили ифодаларни қийматларини таққослаш, ифодаларни шакл алмаштириш, сонлар устида бажариладиган амалларнинг хоссалари, айниятлар, ифодаларни айнан шакл алмаштириш, бир ўзгарувчили тенгламалар, тенглама ва унинг илдизлари, бир ўзгарувчили чизиқли тенгламалар, тенгламалар ёрдамида масалалар ечиш, чизиқли тенгламалар системалари, икки ўзгарувчили тенгламалар ва уларнинг системалари, икки ўзгарувчили чизиқли тенгламаларнинг системалари, чизиқли тенгламалар системаларини ечиш, ўрнига қўйиш усули, қўшиш усули ва масалаларни тенгламалар системалари ёрдамида ечишга доир ўқув материали ўрганилади ва бу материални ўрганиш усуллари белгиланади. Натижада ҳарфий ифодалар устида амаллар бажариш, ҳарфий ифодага қийматлар бериш ёрдамида ифодани қийматини топиш, тенглама ва унинг илдизлари, тенгламаларнинг тенг кучлилиги, тенгламаларни тенг кучли алмаштириш, тенгламанинг аниқланиш соҳаси, қийматлар соҳаси, ўзгарувчининг маънога эга бўлган қийматларини топиш, тенгламалар системаси ечиш усуллари, тенгламалар системасини ечишнинг геометрик маъноси берилади (4,5,6).

Хулоса:

Ўрта мактаб алгебра курсига оид ўқув материали етарлича ҳажмга эга ва ўқитиш методикаси содда. Лекин, ўқув материали қобилиятли ўқувчилар учун мослаштирилмаган. Дарсликлардаги ўқув материали педагогик технологиялар асосида ўрганишга мос эмас. Ўқув материалини замонавий технология асосида ўрганиш учун уни қайта структуралаш, қўшимча топшириқлар тузиш, дарсликдаги материални турли даражадаги саволлар билан бойитиш лозим бўлади.

1.2. Ўрта махсус ва касб – хунар коллежларда тенгламалар системасини ўрганиш методикаси

Ўрта ва ўрта махсус ўқув юртларидаги алгебраик ўқув материали етарлича содда ва тушунарли баён қилинган (8,9). Бунда тенгламалар ҳақида тушунча аввало алгебраик ифода, бирҳадлар ва кўпҳадларни ўрганиш билан шакллантирилади, сўнгра кўпҳадларни кўпҳадларга бўлиш, бир ўзгарувчили тенгламалар, уларни ечиш усуллари, модул қатнашган тенгламалар, юқори даражали алгебраик тенгламалар, Безу теоремаси, Горнер схемаси, кўпҳаднинг илдизлари, алгебраик тенгламаларнинг комплекс илдизлари, тенгламаларни тақрибий ечиш, тенгламалар системалари ва мажмуалари, тенгламалар системасини геометрик маъноси, тенгламалар системасини график усулда ечиш, тенг кучли системалар, кўпайтувчиларга ажратиш усули, тенгламалар системасини алгебраик қўшиш усули ёрдамида ечиш, номаълумларни чиқариш усули, Гаусс усули, ўзгарувчиларни алмаштириш усули, детерминант ҳақида тушунча, чизиқли тенгламалар системасини детерминантлар ёрдамида ечиш, тенгламалар тузишга доир масалаларга оид ўқув материали ўрганилади ва унга мос ўрганиш усуллари берилган (8,9). Бироқ, бу ўқув материалини ўрганиш анъанавий ўқитиш методикасига мослашган.

Хулоса

Ўрта ва ўрта махсус ўқув юртлари ўқув дарсликларида ва қўлланмаларидаги алгебраик материал педагогик технологияларга қўллаш мослашмаган. Берилган ўқув материалини замонавий технология асосида ўрганиш учун уни қайта структуралаш, материални мазмунини қайта тузиш ва унга мос ўрганиш усулларини топиш, маъруза, амалий машғулот, уйга вазифа ва дарс жараёнида материалини кичик гуруҳларга таяниб ўрганиш, таълимда жамоавий ўқитиш усулидан фойдаланиш, таълим жараёнини комплекс лойиҳалаш ишларини амалга ошириш мақсадга мувофиқ (15,20,21).

II – боб. Олий ўқув юртларида чизиқли тенгламалар системасини ўрганишнинг ўзига хос хусусиятлари.

Олий ўқув юртларида фанлардан замонавий педагогик техналогиялар асосида маъруза матни тайёрлашда мавзу модулларга ажратилиб, ўрганилаётган мавзу аниқ асосий саволларга бўлинади. Ҳар бир савол учун ўқитувчининг мақсади ва мавзудаги муаммолар кўрсатилган.ўқитувчининг мақсади (талабанинг ўқув вазифалари деб аталган битирув малакавий ишда) асосида талаба мавзуга оид муаммоларларни ўрганиш учун ўз олдига ўқув мақсадларини қўяди. Талаба асосан белгиланган мақсадларни амалга оширишга эътиборни қаратади. Ўқув мақсадлари Б.Блум таксономиялари асосида “соддаликдан мураккабликга” қоидасига кўра вазифалар белгиланади. Бу мақсадлар: билиш, тушуниш, қўллаш, тахлил, баҳолашдан иборат 6 та категорияга ажратилади. Б.Блум таксономиялари фақат ўқув мақсадлари амалга оширишга қаратилган, яъни тарбия муаммолари бунда қаралмайди. Бугунги кунда тарбия муаммоларини таълим муаммолари билан қўшиб ўрганиш талаб этилмоқда. Талабанинг ўқув матриалини ўзлаштириши шу кўрсатилган 6 та ўқув мақсадлари категориясига мос ҳолда тузилиши лозим. Таълимда дифференциаллаш (табақалаштириш) ва индивудаллаштиришга мос ёндошувларни амалга ошириш учун намунавий дастурларда кўрсатилган ўқув дарсликлари ва қўлланмаларидаги ўқув материали қайта структураланади, яъни қайта тузилади ва тўлдирилади.Чунки мавжуд ўқув материали талабанинг педагогик технологиялар асосида таълим олишига мос эмас.

Ушбу битирув малакавий ишда намунавий дастур асосида ўрганилиши лозим бўлган мавзу мазмунини қайта структуралаш, модулли, микромодулли, муаммоли ўқитиш, кичик гуруҳлар ёрдамида ўрганиш, мустақил иш мавзуларини белгилаш, таълим олувчини ҳамкорликда таълим олиш ва лойиҳалаш методларига асосланиш йўллари “Математика” фани мисолида кўрсатилган бўлиб, ундан бошқа фан ўқитувчилари ҳам фойдаланишлари мақсадга мувофиқ бўлади.

Демак, фанлардан педагогик технологиялар асосида машғулот олиб бориш учун ўқув материали қайта тузилиши талаб этилади. Бу ишлар кафедраларда малакали профессор–ўқитувчиларни фанлардан педагогик технологиялар асосида ўқув материалларини мослаштиришга жалб этилиши лозимлигини кўрсатаяпти.

Педагогик технологияларнинг асоси программалаштирилган ўқув методига таянишдир. Программалаштирилган ўқув методи ўқув материалларини ўқувчининг барча ҳислатларини ҳисобга олган ҳолда ўқув мате-риалини энг кичик соддалаштирилган, ўзлаштириш учун қулай бўлган бўлакларга бўлиб ўрганишни тақозо этади. Педагогик технология асосидаги ўқув материали репродуктив (маҳсулдор, намунадаги, ўрганилаётган назарияни ўзлаштириш) амалга оширилади. Программалаштирилган метод асосида тайёрланган ўқув материали “**соддаликдан-мураккабликка**” қоидасига тўла риоя қилинган, энг суст ўзлаштирувчи талабага мослаштирилган, ўзлаштириш учун вақт белгиланмаган, ҳар савол учун ўқувчининг ўз билимини ўзи синаб кўра олиши имконияти (назорат саволлари тузилган) яратилган бўлади. Бу материални ўрганишда талаба ўқув материалига қайта қайта мурожаат қилиши ва ўзлаштириш даражасини ошириб бориши мумкин. Ўқув материалини ўрганишда маъруза, амалий машғулот, семинар, мустақил ишлар, уйга вазифага оид топшириқлар аниқ кўрсатилади. Ўқув материалини ўрганишда кичик гуруҳлар ва жамоавий таълимга алохида эътибор берилади. Талабани ўзлаштириши рейтинг ишланмасида кўрсатилган пунктлар асосида белгиланади. Маърузада ўқув материалида берилган асосий мақсадлар билан материал ўзлаштиришда кутилаётган натижа орасидаги боғланиш яққол намоён этилади. Маърузада ўқув материали ўрганиш билан боғлиқ баъзи муаммолар тўлиқ ёритилмаслиги мумкин, лекин асосий мақсадни натижа билан боғланиш йўли талабаларга аён бўлиши лозим. Назарий материалларни маъруза давомида қандай ўзлаштирилиши

- Эсга олиш ва хотирага тиклаш,
- Репродуктив ўзлаштириш даражаси,
- Продуктив ўзлаштириш даражаси,
- Ижодий ўзлаштириш даражасидаги саволлар орқали аниқланади.

Саволлар иложи борича тест кўринишида тайёрланади.Талаба маъруза матнини тайёрлаб келади, яъни маърузадаги материал талабалар томонидан кичик гуруҳларга бўлинган ҳолда ўрганиб келинади. Маъруза жараёнида ўқитувчи талаба учун мотивация ва мотивга оид ўқув материалини баён қилади. Ҳар бир савол учун 15-20 минутдан ортиқ бўлмаган вақт сарфланади. Ҳар бир савол охирида талабаларни тест саволлари билан синаб кўради. Таълим жараёнларини комплекс лойиҳалаш дастурдаги қўйилган мақсад ва унинг натижасини яққол боғланишини ҳамда унинг амалга ошириш йўлини тасвирлаб беради. Таълим жараёнларини лойиҳалаш талабаларни билим олиш савиясини ва самарасини ривожлантиради, мустақил билим олиш фаолиятини кучайтиради ва унинг ўзлаштиришдаги рейтинги сифатли амалга оширилади. Режадаги ҳарбир мавзуни лойиҳалаш натижасида таълим жараёни комплекс лойиҳаланади. Бунинг оқибатида таълимда замонавий ахборот технологияларини қўллаш имконияти кучаяди. Таълимда таълим олувчиларнинг ҳамкорликда таълим олиш ва лойиҳалаш методларига асосланишлари таълимни таълим олувчи шахсига йўналтириш имкониятини тўлиқ яратади. Натижада таълим тизимимизга мос бўлган янги педагогик техналогиялар вужудга келади.

Ушбу битирув малакавий ишда республикамиз таълим тизимига мос ва хос бўлган янги педагогик технологиялар яратиш борасидаги Гулистон Давлат университетида олиб борилган илмий тажрибалар мужассамлаштирилган. Бу йўналиш “Кадрлар тайёрлаш Миллий дастури”га тўлиқ мос келади. Фанларни ўқитишда намунавий дастур асосида ўрганилиши лозим бўлган ўқув материали мазмуни қайта структураланади, модулларга, микромодулларга ажратилади. Баъзи мавзуларни ўрганиш муаммоли ўқитишга мослаштирилади. Таълим жараёнида таълим олувчилар кичик гуруҳларга бўлинган ҳолда ҳамкорликда таълим олиш ва лойиҳалаш методларига асосланади. Ҳар бир мавзу учун алоҳида назорат саволлари, мустақил топшириқлар ва адабиётлар рўйҳати кўрсатилади. Талабаларнинг мавзуни ўзлаштирилганлигини билдирувчи рейтинг ишланма тўлдирилади. Таълим жараёнларини комплекс лойиҳалаш ўқитувчилар ҳамда талабалар учун катта қулайлик яратади. Ушбу битирув малакавий ишда кафедрада тайёрланган доц.Мирзаев Ч.Э.нинг **“Таълим жараёнларини комплекс лойиҳалаш**” номли ўқув қўлланмасидан фойдаланилди. Битирув малкавий иш замонавий педагогик технологиялар фанини матрицалар ва уларни чизиқли тенгламалар системасини ечишга тадбиғи мисолида қаралди.

2.1. Чизиқли тенгламалар системасини модулли ўқитиш технологияси.

Микро модул учун ажратилган вақт 8 –соат (маъруза 2соат, амалий машғулот 4-соат, мустақил иш 2 соат)

Асосий саволлар:

1. Матрицалар ҳақида умумий тушунчалар.
2. Матрицалар устида амаллар.
3. Матрицалар ёрдамида чизиқли тенгламалар системаси ечиш.

Таянч ибора ва асосий тушунчалар.

Детерминант, Крамер усули, чизиқли тенгламалар системасини матрицали ёзуви, тенгламалар системасининг ўрнига қўйиш усули билан ечиш, тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечиш, матрица, бош диогонал, диогонал матрица, бирлик матрица, транспонирланган матрица, тенг матрицалар, матрицалар йиғиндиси, матрицалар айирмаси, матрицалар кўпайтмаси, тескари матрица, матрицанинг ранги, матрицанинг минори, элементар алмаштиришлар, Кроникер-Капелли теоремаси, кенгайтирилган матрица, Жордан-Гаусс усули, чизиқли тенгламалар системасини иқтисодий масалаларни ечишга татбиқи.

1- савол: Матрицалар ҳақида умумий тушунчалар.

Ўқитувчининг мақсади: Чизиқли тенгламалар системасини ечишда матрицалардан фойдаланишга ўргатиш.

Талабанинг ўқув вазифалари(мақсадлари):

1.1 Матрица таърифини шарҳлаб беради .

1.2 Матрицада элементар алмаштиришлар бажаради.

Муоммолар: Чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг самарали усулларини кўрсатиш; тенгламалар системасида детерменантлар ва матрицалар тузиш; тескари ва транспонирланган матрицаларни топиш.

1-саволнинг баёни: Ушбу мавзуни ўрганиш учун талаба мактабда ва аввалги мавзуларда берилган тенглама, чизиқли тенгламалар ва уларнинг системаларини ечишга оид ўқув материалини мустақил равишда лозим бўлса кичик гурухларда такрорлаб дарсга тайёр холда келади. Акс холда талаба учун мавзу тушунарли бўлмайди. Шу мақсадда ҳар бир савол охирида назорат саволлари белгиланган.

Берилган бўлсин n -номаълумли m- та чизиқли тенгламалар системаси. Умумий холда $n \neq m$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

(1) чизиқли $n-$тартибли тенгламалар системасидан қуйидаги жадвал (шакл, ифода ёки символ)ни тузамиз:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

(2) жадвал $m-$та сатрли ва $n-$та устунли тўртбурчакли $n\bullet m$ та сондан тузилган nxm ўлчамли матрица деб аталади.

А- матрицани қисқача А=(a_{ij}) (бунда $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$) билан белгилаш мумкин.

Агар $m=n$ бўлса, яъни матрицадаги сатрлар сони устунлар сонига тенг бўлса, бундай матрицалар квадрат матрица деб аталади, акс холда яъни $m\neq n$ бўлганда тўртбурчакли матрица деб аталади.

Мисол учун:

1) $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ (3) учинчи тартибли квадрат матрица

2) $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$ (4) 4-сатрли, 3-устунли тўртбурчакли матрица.

Агар (2) матрица $m=1,\ n>1$ бўлса $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,a_n)$ кўринишидаги бир сатрли матрицага эга бўламиз. Бундай матрицани сатр-матрица ёки вектор-сатр деб атаймиз.

Агар (2) матрица $m>1,\ n=1$ бўлса $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ кўринишидаги бир устунли матрицага эга бўламиз.

Агар икки $A=(a_{i,j})$ ва $B=(b_{i,j})$ матрицаларни бир хил жойда жойлашиб, барча элементлари тенг бўлса яъни агар $a_{i,j}=b_{i,j}$ барча i ва j лар учун (яъни А ва В сатрлар сони мос ҳолда устунлар сонига тенг) бўлса бу матрицалар тенг дейилади.

Мисол учун: $A=B$ ёки $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

да $a_{11}=b_{11}, \cdots, \cdots, \cdots, a_{33}=b_{33}$

Квадрат матрицалар учун ушбу детерминантни тузиш мумкин.

Мисол учун:

$$|A|=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ каби ёзилади.

Агар А-матрица детерминанти нолга тенг бўлса яъни $\det A=0$ бўлса бундай А-матрица махсус матрица деб аталади.

Агар А-матрица детерминанти нолга тенг бўлмаса яъни $\det A\neq 0$ бўлса бундай А-матрица махсусмас ёки махсус бўлмаган матрица деб аталади.

Квадрат матрицани $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Кўринишида ёзиш мумкин. Бунда $a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ a_{44},\ \cdots,a_{nn}$- элементлар жойлашган диогонал бош диогонал, $a_{1n},\ a_{1n-1},\ a_{1n-2},\ \cdots,a_{n1}$- диогонал ёрдамчи диогонал дейилади. Бош диогоналдан бошқа барча элементлари 0-га тенг бўлган квадрат матрица диогонал матрица дейилади.

Диогоналдаги барча элементлари 1-га тенг, қолган элементлари 0-га тенг бўлган матрица бирлик матрица деб аталади ва Е билан белгиланади:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Агар квадрат матрицада барча элементлар $a_{mn}=a_{nk}$ шартни бажарса бу матрица симметрик матрица дейилади.

Агар А-матрицанинг ҳар бир сатри унинг мос устунига алмаштирилса, ҳосил бўлган матрица А-матрицага нисбатан транспонирланган матрица дейилади ва A^T - каби ёзилади

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Мисол учун:

$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 10 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ берилган бўлса A^T-ни топиш $A^T=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 10 & 0 \end{pmatrix}$

Барча элементлари нолга тенг бўлган матрица нол матрица деб аталади.

Мисол учун: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ каби белгиланади.

А-матрицага тескари матрица деб A^{-1} матрицага айтилади . бунда A^{-1} мавжуд бўлиши учун $\det A \neq 0$ бўлиши шарт акс холда A^{-1} мавжуд бўлмайди.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \vdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \vdots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & \vdots & A_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1m} & A_{2m} & \vdots & A_{nm} \end{pmatrix} \qquad (8)$$

A^{-1} матрицада $A_{11},\ A_{12},\ \cdots\ ,A_{mn}$ лар яъни A_{mn} - берилган $\det A$ даги a_{mn} элементларнинг алгебраик тўлдирувчисидир

Мисол учун: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ га тескари матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

А матрица берилган бўлиб унинг ўлчови $m \times n$ бўлсин. А матрицадан k - та сатр ва k - та устун ажратамиз. Бунда k - сони n ва m сонларидан кичик ёки уларга тенг бўлсин. У холда А- матрицадаги ажратилган сатр ва устунларнинг кесишувидан ҳосил бўлган k - тартибли детерминантга А-матрицанинг k -тартибли минори дейилади

А матрицанинг нолдан фарқли минорларининг энг юқори тартибли А-матрицанинг ранги деб аталади ва $rangA$ ёзилади. $r(A)$ каби белгиланади. Матрицани ҳисоблаш усули кўп сонли детерминантларни ҳисоблашга олиб келади. Ранг, синф ёки даража маъносини англатади. Матрица рангини ҳисоблаш қуйидаги амалларни бажаришни талаб қилади.

А) матрицалар фақат воллардан иборат сатр(ёки устун)ни ўчириш.

В) иккита сатр(ёки устун)нинг ўринларини алмаштириш.

С) бирор сатр(ёки устун)нинг элементларини бирор $x \neq 0$ сонга кўпайтириб, бошқа сатр(ёки устун)нинг мос элементларига қўшиш.

D) матрицанинг транспонирланганида унинг ранги ўзгармайди. Бу юқорида келтирилган амалларни бажаришга элементар алмаштиришлар деб аталади. Матрицалар устида амаллар бажариш ёрдамида тенгламалар системаси ечилади. Матрицалар устида амаллар бажариш детерминант, минор, алгебраик тўлдирувчи ва уларнинг хоссаларини чуқур ўзлаштирилиши билан бевосита боғлиқдир.

Мисол: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 4 & 3 \\ 3 & -9 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ матрица рангини топинг

$rangA = 2$ чунки $M_2 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$

Назорат саволлари

I. Эсга олиш ва хотирага тиклаш ўзлаштириш даражасидаги назорат саволлари.

1. $ax = b$ тенгламанинг ечими қайси формулага асосланиб топилади? Тўғри жавобни кўрсатинг.

А) $x = -\frac{b}{a}$

В) $x = a \cdot b$

С) $x = \frac{b}{a}$

D) $x = -\frac{a}{b}$

2. $ax = b$ тенгламанинг илдизи мавжуд ва ягона эканлиги a ва b коэффицентларнинг қийматларига боғлиқми ? Тўғри жавобни кўрсатинг.

A) $a \neq 0$, $b \neq 0$ ечим мавжуд ва ягона.

B) $a \neq 0$, $b = 0$ ечим мавжуд ва ягона.

C) $a = 0$, $b \neq 0$ ечим мавжуд эмас.

D) $a = 0$, $b = 0$ ечим чексиз кўп ёки аниқ эмас.

E) жавоблар ҳаммаси тўғри.

3. $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$ тенгламалар системасининг ечими мавжудлигини коэффицентлар орасидаги мунособатга кўра аниқланг?

A) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ечим мавжуд, ечим чексиз кўп.

B) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ечим мавжуд ва ягона, система биргаликда.

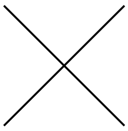
C) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ечим мавжуд эмас, система биргаликда эмас.

D) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ечим мавжуд ва ягона, система биргаликда .

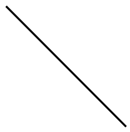
E) жавобларни ҳаммаси тўғри.

4. $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$ тенгламалар системасининг ечими мавжудлиги ёки мавжуд эмаслигини геометрик маъносини тушунтиринг.Тўғри жавобни кўрсатинг.

1) I



2) II



1) A) ечим мавжуд.

B) ечим мавжуд эмас.

C) илдизи номаълум.

D) ечим чексиз кўп.

2) A) ечим мавжуд.

B) ечим мавжуд эмас.

C) ечим чексиз кўп.

D) ечим борлиги номаълум.

3) A) ечим аниқ эмас.

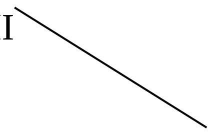
B) ечим мавжуд эмас.

C) илдизи йўқ.

D) илдизи номаълум.

3) I

II



5. Чизиқли (биринчи даражали) тенгламалар ва тенгламалар системаси ҳақидаги маълумотларни шархлаб беринг?

A) $ax+b=0$, $ax=b$ I- даражали бир номаълумли чизиқли тенгламалар системаси.

B) $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ I- даражали икки номаълумли чизиқли тенгламалар системаси.

C) $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ I- даражали уч номаълумли чизиқли тенгламалар системаси.

D) Чизиқли I- даражали тенгламалар системасидаги ҳар бир тенглама тўғри чизиқни ифодалайди .

E) ҳамма жавоблар тўғри.

II. Репродуктив (маҳсулдор) ўзлаштириш даражасидаги назорат саволлари.

1. Чизиқли тенгламалар системасини кўрсатинг?

A) $\begin{cases} x+5y-3xy=0 \\ x^2+y+5z=0 \\ x+y+z=5 \end{cases}$ B) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2+3=0 \\ xy+x+3y=4 \\ x+y+z^2=z \end{cases}$

C) $\begin{cases} x+y+5z=3 \\ 3x-2y+z=2 \\ x+y=3 \end{cases}$ D) $\begin{cases} 3x+4y=5z \\ xy+2y=0 \\ x+y-z=5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x+4y+5z=0 \\ 2x-4y=5 \\ x+y-z=3 \\ -x+y-2z=0 \end{cases}$ Тенгламалар системасидан матрица тузилган.

Тўғри жавобни кўрсатинг.

A) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ матрицанинг транспонирланган матрицасини

яъни A^T ни кўрсатинг?

A) $A^T=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ B) $A^T=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

C) $A^T=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D) $A^T=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 6 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ матрицага тескари A^{-1}- матрицани топинг?

A) $A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ B) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

C) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ D) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ матрицанинг рангини топинг?

A) $rangA=0$ B) $rangA=-2$

C) $rangA=2$ D) $rangA=$ мавжуд эмас.

III. **Продуктив (самарали) ўзлаштириш даражасидаги назорат саволлари**.

1. $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ матрицанинг рангини топинг?

A) $rangA=5$ B) $rangA=-1$ C) $rangA=2$

D) $rangA=3$

2. $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ матрицанинг рангини топинг?

A) $rangA=4$ B) $rangA=3$ C) $rangA=5$

D) $rangA=1$

2-савол: Матрицалар устида амаллар.

Ўқитувчининг мақсади: Матрицанинг асосий хоссалари ва унда элементар алмаштиришлар бажаришга ўргатиш.

Талабанинг ўқув вазифалари:

2.1 Матрицалар устида асосий амаллар (матрицаларни қўшиш, айириш, сонга кўпайтириш, матрицаларни кўпайтириш)ни бажаради.

2.2 чизиқли тенгламалар системасини ечишда Кроникер-Капелли теоремасини қўллайди.

Муаммолари: матрицада элементар алмаштиришлар; матрица рангини топиш; тенгламалар системасини ечишда Кроникер-Капелли теоремасига асосланиш.

2-саволнинг баёни.1)Икки матрицани қўшиш ва айириш амалини фақат бир хил ўлчовли матрицалар устида бажариш мумкин.Икки матрица берилган:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{ва} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Матрицаларни қўшиш ва айириш мумкин, чунки булар бир хил ўлчовли яъни ҳар бири (учта сатр ва учта устун) ўлчовли матрицалардир. Матрицаларни қўшиш(айириш) қоидасига кўра бу матрицалар қуйидагича қўшилади:

$$A\pm B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & a_{13}\pm b_{13} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & a_{23}\pm b_{23} \\ a_{31}\pm b_{31} & a_{32}\pm b_{32} & a_{33}\pm b_{33} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad \text{бунда} \quad c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$$

1- мисол $A=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$ матрицалари элементлари устида қўшиш ва айириш амалларни бажариш мумкин,чунки бу матрицалар бир хил ўлчовли бўлиб уларнинг ҳар бири икки устун ва учта сатрдан иборат.

$$A+B=\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 5 & 3 \\ 5 & 20 \end{pmatrix}, \qquad A-B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -11 \\ -11 & -2 \end{pmatrix}$$

2)Матрицанинг сонга кўпайтириш амали. А матрицани бирор m сонига кўпайтириш қуйидаги қоидага кўра бажарилади:

$$m\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \\ ma_{31} & ma_{32} & ma_{33} \end{pmatrix}$$

2-мисол $\quad 5\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$

3). А ва В матрицаларни кўпайтириш. Матрицаларни кўпайтириш қуйидаги қоидага кўра амалга оширилади.

А матрица mxn ўлчовли (m-сатр, n-устун)

В матрица mxp (m сатр, p устун) M матрицани кўпайтириш натижасида яна матрица ҳосил бўлади ва бу қуйидагича ифодаланади: $C=A\cdot B$, С матрицанинг элементлари $C_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ij}a_{kj}$ каби аниқланади. С-матрица биринчи кўпайтма А матрицадаги устунлар сони иккинчи кўпайтма В матрицанинг сатрлар сонига тенг бўлгандагина $A\cdot B$ матрицалар кўпайтмаси мавжуд, акс холда бу матрицаларни кўпайтириш мумкин эмас.

3-мисол. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 8 \end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad C=A\cdot B$

Кўпайтма мавжуд, чунки А- матрица устунлар сони В матрица сатрлар сонига тенг.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + (-1)(-1) & 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-3) + (-1) \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 + (-5)(-2) + 8(-6) & 4 \cdot 4 + (-5)(-3) + 8 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ 14 & 111 \end{pmatrix}$$

Матрицаларни кўпайтириш амалини юқоридагидек бажариш мумкин.

Энди $B \cdot A$ ни топайлик $B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 8 \end{pmatrix}$ кўпайтма мавжуд,

чунки B-матрица устунлари сони A матрица сатри сонига тенг.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 & 3 \cdot 3 + 4(-5) & 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 8 \\ -2 \cdot 1 + (-3) \cdot 4 & (-2) \cdot 3 + (-5)(-5) & (-2)(-1) + (-3) \cdot 8 \\ -1 \cdot 1 + 5 \cdot 4 & -1 \cdot 3 + 5 \cdot (-5) & -1(-1) + 5 \cdot 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 29 & -11 & 29 \\ -14 & 9 & -22 \\ 19 & -28 & 41 \end{pmatrix}$$

Ечилган мисолда $A \cdot B \neq B \cdot A$ эканлиги кўринади. Ҳудди шунингдек, $A \cdot (B \cdot C) = A \cdot (B \cdot C)$ тенгликни исботлаш мумкин.

Мисол учун $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ бўлса $A \cdot (B \cdot C)$ ва

$A \cdot (B \cdot C)$ мавжуд. Чунки, бу матрицалар матрицаларни кўпайтириш қоидасига бўйсунади .

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}, (A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Худди шунингдек 4, 5 та ва хакозо матрицаларни кўпайтириш мумкин.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+ & a_{12}\cdot b_{21}+ & a_{13}\cdot b_{31} & \ldots \\ a_{21}b_{11}+ & a_{22}b_{21}+ & a_{23}b_{31} & \ldots \\ a_{31}b_{11}+ & a_{32}b_{21}+ & a_{33}b_{31} & \ldots \end{pmatrix}$$

4) Квадратик матрицани бирлик матрицага кўпайтириш.

Ҳар қандай тартибли квадратик матрицании шу тартибдаги бирлик матрицага кўпайтириш мумкин. Кўпайтириш натижасида матрица ўзгармайди. Яъни $A\cdot E = E\cdot A = A$ бўлиб, бу бирлик матрицанинг мухим хоссасидир.

Мисол.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A\cdot E=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, E\cdot A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

бўлади.

5) Кронекер-Капелли теоремаси.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{mn} = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

чизиқли тенгламалар системаси берилган.Бунда матрицасини тузамиз:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

(1) Система матрицаси чизиқли тенгламалар системасини кенгайтирилган матрицаси деб қуйидаги В матрицага айтилади.

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix} \quad \text{ёки} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_n & b_n \end{pmatrix} \qquad (9)$$

(1) чизиқли тенгламалар системаси ечимга эга бўлиши учун , яъни тенгламалар системаси биргаликда бўлиши учун чизиқли тенгламалар системаси асосий матрицаси А ва унинг кенгайтирилган матрицаси В нинг ранглари тенг бўлиши зарур ва етарлидир, яъни $rangA = rangB$ бўлиши зарур ва етарли.

Теоремани исботи берилмайди.Исботи адабиётларда берилган. Агар $rangA = r$ ва системада номаълумлар сони n та бўлса, $r = n$ бўлганда тенгламалар системаси биргаликда ва ягона ечимга эга бўлади.

Тенгламалар системаси (биргаликда) ягона ечимга эга бўлиши учун $r = n$ бўлиши зарур ва етарлидир.

Агар $r < n$ бўлса (1) система $n - r$ та ихтиёрий параметрларга боғлиқ чексиз кўп ечимга эга бўлади. Агар (1) системада $b_1, b_2, \dots, b_n$ озод хадлар нолга тенг бўлса система бир жинсли система дейилади ва у қуйидагича ёзилади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n11}x_1 + a_{n12}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

Акс холда система бир жинсли эмас дейилади. Бир жинсли система учун $rangA = rangB$ бўлса, (1) система ҳар доим биргаликда ,яъни ечимга эга бўлади. Бу теореманинг назарий исботи адабиётларда келтирилган. Теореманинг мохиятини мисолда кўрсатамиз.

Мисол. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$ системани ечинг.

$rangA = 3, rangB = 4$

Демак $rangA \neq rangB$. Бундан берилган система ечимга эга эмас,яъни биргаликда эмаслиги келиб чиқади.

Назорат саволлари.

I. Эсга олиш ва хотирада тиклаш ўзлаштириш даражасидаги саволлар.

1. $D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

детерминатнинг қийматини қуйидаги формула билан хисобланади. тўғри жавобни кўрсатинг**.**

A) $D_3 = \sum_{k-1}^{3} a_{13} A_{13}$

B) $D_3 = (-1)^{1+1} M_{11} + (-1)^{1+2} M_{12} + (-1)^{1+3} M_{13}$

C) $D_3 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{21}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11})$

D) жавоблар ҳаммаси тўғри.

2. Детерминатни учбурчак кўринишига келтириш усули (Сарриус қоидаси) билан қандай хисобланади.

A) детерминат хоссаларидан фойдаланиб Крамер формуласи ёрдамида хисобланади.

B)Детерминатнинг асосий диоганалидан юқорида ёки пастдаги барча элементлар нолларга айлантирилади. Детерминант учбурчак кўринишига келтирилади.Бундай учбурчак кўринишига келтирилган детерминат қиймати асосий диоганалда турган элементлар кўпайтмасига тенг бўлади.

C) Детерминатни учбурчак қоидасига кўра хисобланади.

D) Детерминатни хисоблашда бундай усул йўқ.

3.Чизиқли тенгламалар системасини ечишда Крамер формуласидан фойдаланилган. Тўғри жавобни кўрсатинг.

A) Агар $D \neq 0, D_{x,} D_y$ лар нолдан фарқли ҳар қандай сон бўлса $x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$ формула маънога эга, ечим мавжуд ва ягона бўлади.

B) $D = 0, D_x, D_y$ ларга камида биттаси нолга тенг бўлса, $x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$ формулалар тенгламалар системасида ечим чексиз кўп (ноаниқ) эканлиги келиб чиқади.

C) $D = 0, D_x, D_y$ ларни камида биттаси нолдан фарқли бўлса, система ечими мавжуд эмас . $x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_x}{D}$ формула маънога эга эмас.

D) Жавоблар барчаси тўғри.

II. Репродуктив ўзлаштириш даражасидаги саволлар.

1. Матрицаларни қўшиш ва айириш амалларини бажаринг.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A) $A \pm B$ амалларини бажариб бўлмайди, чунки матрица бир хил ўлчовга эга эмас.

B) $A \pm B$ мавжуд чунки қўшиш ва айиришда матрицаларни бир хил ўлчовли бўлиши шарт эмас.

C) A ва B матрицалар бир ўлчовга келтирилади.

D) A ва B матрицалар бир ўлчовга келтирилмайди.

2. $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ матрицаларни айиринг.Тўғри жавобни кўрсатинг.

A) $A-B=\begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ B) $A-B=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

C) $A-B=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ D) $A-B=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. A+B-C ни топинг. $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & 3 & b \\ 1 & 4 & c \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix} 0 & 2 & k \\ 0 & 3 & f \\ 1 & 4 & n \end{pmatrix}$

A) $A+B-C=\begin{pmatrix} k & f & n \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -10 \end{pmatrix}$ B) $A+B-C=\begin{pmatrix} -k & -f & n \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

C) $A+B-C=\begin{pmatrix} 1+k & b+f & a=1-n \\ -2 & 3 & b+2 \\ 4 & 10 & c \end{pmatrix}$ D) $A+B-C=\begin{pmatrix} k & f & n \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix} 2 & a \\ -5 & b \end{pmatrix}$ матрицани -5 сонига кўпайтиринг**.**

A) $-5\cdot A=-5\cdot\begin{pmatrix} 2 & a \\ -5 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 & -5a \\ 25 & -5b \end{pmatrix}$

B) $-5\cdot A=-5\cdot\begin{pmatrix} 2 & a \\ -5 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & a-5 \\ -10 & b-5 \end{pmatrix}$

C) $-5\cdot A=\begin{vmatrix} 7 & a+5 \\ 0 & b+5 \end{vmatrix}$

D) -5 сонини А матрицага кўпайтириб бўлмайди.

5. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ матрицани кўпайтиринг**.**

A) А ва В матрицани кўпайтириб бўлмайди, чунки А*В кўпайтма матрицанинг қоидасига зид.

B) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ C) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$ D) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

6.. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**,** $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ матрицани кўпайтиринг.

A) $A\cdot B=C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ B) $C=A\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

C) $C=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}$ D) $C=A\cdot B$ кўпайтма мавжуд эмас.

7. $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ бўлса $A\cdot B$ ва $B\cdot A$ ни топинг**.**

A) $A\cdot B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}, B\cdot A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, AB\neq BA$

B) $A\cdot B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, B\cdot A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, AB=BA$

C) $A\cdot B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, B\cdot A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}, AB\neq BA$

D) A ва B матрицани кўпайтириб бўлмайди.

8. $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ матрицани кўпайтиринг.

A) $A\cdot E=E\cdot A=A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ $AE=EA=A$ демак E матрица мухим хосса эга экан.

B) $A\cdot E=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}, E\cdot A=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}, AE\neq EA$ тенглик бажарилмайди.

C) $A\cdot E=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}, E\cdot A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, AE\neq EA$ тенглик бажарилмайди

D) $A\cdot E=E\cdot A=A$ бажарилмайди.

III. Продуктив ўзлаштириш даражасидаги саволлар.

1. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$

чизиқли тенгламалар системасини Кронекер-Капелли теоремасига кўра ечими мавжудлигини кўрсатинг.

A) $D_3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = -35 \neq 0 \qquad A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & -6 & 5 \end{vmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

rang A=2, rangB=3 демак rangA$\neq$rangB система биргаликда эмас

B) $M_3 \neq 0, rangA = 1, rangB = 4$ система ечимга эга.

C) $\det A \neq 0, rangA = 0, rangB = 3$ системада ечим йўқ.

D) Системани Кронекер-Капелли теоремаси орқали ечиб бўлмайди.

2.Қуйидаги $x_1 = 3y_1 - y_2 \qquad y_1 = z_1 + z_2$

$x_1 = y_1 + 5y_2, \qquad y_2 = 4z_1 + 2z_2$

чизиқли алмаштиришларни кетма-кет бажариш натижасини кўрсатинг.

A) $x_1 = 3(z_1 + z_2) - (4z_1 + 2z_2) = -z_1 + z_2$

$x_2 = (z_1 + z_2) + 5(4z_1 + 2z_2) = 21z_1 + 11z_2$

чизиқли алмаштириш бўлади.

B) $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ C) $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$ D) $x_1 - x_2 = y_1 - y_2$

IV. Ижодий ўзлаштириш даражасидаги саволлар.

$x_1 = 5y_1 - y_2 + 3y_3$ ва $y_1 = 2z_1 + z_3$

$x_2 = y_1 - 2y_2 \qquad y_2 = z_2 - 5z_3$

$x_3 = 7y_2 - y_3$ ва $y_3 = 2z_2$

чизиқли алмаштиришлар натижасини матрицадан фойдаланиб топинг.

Жавоб: $x_1 = 10z_1 + 5z_2 + 10z_3$

$x_2 = 2z_1 - 2z_2 + 11z_3$

$x_3 = 5z_2 + 35z_3$

3-савол. Матрицалар ёрдамида чизиқли тенгламалар системасини ечиш.

Ўқитувчининг мақсади: Матрицалар ёрдамида чизиқли тенгламалар системасини ечишга ўргатиш.Чизиқли тенгламалар системасини иқтисодий масалаларни ечишга тадбиқини кўрсатиш.

Талабанинг ўқув вазифалари:

3.1 Чизиқли тенгламалар системасини Крамер усули билан ечишни билади.

3.2 Чизиқли тенгламалар системасини ечишда матрицали усулга асосланади.

3.3 Чизиқли тенгламалар системасини ечишда Жордан-Гаусс усули қўллайди.

Муаммолари: Чизиқли тенгламалар системасини ечиш усулларини таққослаш; чизиқли тенгламалар системасини иқтисодий масалаларни ечишга тадбиқини кўрсатиш;

1. Чизиқли n-номаълумли тенгламалар системасини Крамер усулида ечиш учун система $m = n$ ўлчовли, матрица детерминанти $\det A \neq 0$, бўлиши, $i = \overline{1, n}$ бўлганда Крамер формуласи $x_i = \dfrac{\Delta_n^{(i)}}{\Delta_n}$ дан фойдаланилади, бу ерда $\det A = \Delta_n$ бўлиб, $\Delta_n^{(i)}$ n –тартибли.

Δ_n-детерминатдаги i - устун элементларини озод хадлар билан алмаштириш орқали хосил қилинади.Айтилган фикрларни соддалаштириш учун учинчи тартибли детерминатдан фойдаланиш мисолида кўрамиз.

Мисол. $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+y+z=-1 \\ x+3y+z=2 \end{cases}$ тенгламалар системасини ечинг.

Ечиш: $\Delta_3 = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1+6+2-1-3-4 = 1 \neq 0$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Демак $x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-1}{1} = -1, y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1, z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{0}{1} = 0$

Жавоб: (-1,1,0)

2. Матрицали усул. n- номаълумли чизиқли тенгламалар системаси учун m=n яъни тузилган матрица квадратик матрица бўлиб , $\det A \neq 0$ яъни А махсусмас матрица бўлса, у холда А матрица учун унинг тескариси A^{-1} -матрица мавжуд. A^{-1}-ни топамиз ва тенгламалар системасидаги озод хадларидан иборат устундан $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ устун матрицани топамиз,система номаълумларидан $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ устун матрицани топамиз. Берилган (1) тенгламалар системасини $AX = B$ кўринишида ифодалаш мумкин. Демак (1) ни $AX = B$ кўринишида ифодалаш мумкин экан.

Энди $AX = B$ ни A^{-1} га кўпайтирсак $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}B$ бўлиб $EX = X = A^{-1}B$ тенглик Е-бирлик матрица хоссасига кўра бажарилади. Демак X –матрицани топиш учун $A^{-1}B$ кўринишидаги кўпайтмани топиш керак бўлади.

X матрица топилса демак номаълумлар $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ дан топилади.

Келтирилган мисолларда кўрсатамиз. Талаба учун усулларни таққослаш ва жавоблар бир хил бўлишини кўрсатиш мақсадида юқоридаги усулда ечилган мисолни матрицали усулда ечишда кўрсатамиз

Мисол. $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = -1 \\ x + 3y + z = 2 \end{cases}$

Ечиш: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ матрица детерминантини топамиз.

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ демак A матрица махсус эмас экан.Демак, A матрица учун A^{-1} тескари матрица мавжуд. A^{-1} ни топамиз.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

топилади.Бунда A_{ij} детерминант $\det A$ нинг алгебраик тўлдирувчиларидир.

Демак $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ бўлганда $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ бўлади.

Энди $X = A^{-1} \cdot B$ кўпайтмани топамиз.

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$ кўпайтма мавжуд, чунки A^{-1} ни устунлари 3 га , В ни сатрлари 3 та .Демак матрицаларни кўпайтириш мумкин.Топамиз.

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ Бу устун матрицадан $x = -1$, $y = 1$, $z = 0$ топилади. Жавоб: (-1,1,0)

Агар шу системани Крамер усулида ечимига қарасак матрица усулида ечим билан бир хил экан.Энди бошқа усулда ечсак ҳам система (-1,1,0) жавобга эга эканлигини кўриш мумкин.

2.2. Чизиқли тенгламалар системасини ечишни лойиҳалаштириш.

Бу мавзуни тенгламалар системасини Жордан Гаусс усулида ечиш мисолида кўрсатамиз. Аввалги мавзулардан бизга маълумки чизиқли тенгламалар системасини ечишда бир неча усуллар мавжуд.Жумладан ўрнига қўйиш, (белгилаш), кетма кет номаълумларни йўқотиш (Гаусс) усули ўрганилган.Бироқ тенгламалар системасида номаълумлар сони ошиб борган сари бу усулларда ечиш жуда қийинлашади.Шунинг учун тенгламалар системасини детерминант ва матрицаларга асосланиб ечишнинг турли хил ечиш усулларини ўрганиш самарали бўлади.

Куйида чизиқли тенгламалар системасини матрицаларга таянган холда ечишга оид усулларни ўрганамиз.Бу усуллардан бири Жордан –Гаусс усули (баъзан Жордан усули деб ҳам аталади.)

(1)Чизиқли тенгламалар системасининг асосий матрицаси А нинг ранги $r \le n$ яъни $rangA = r \le n$ бўлиб у холда унга келтирилган

матрицаси $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_m \end{pmatrix}$

ни элементлар алмаштиришлар ёрдамида

$= \begin{pmatrix} 1 & \bar{a}_{12} & \dots & \bar{a}_{1n} & \bar{b}_1 \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_n \end{pmatrix}$ - матрица ҳосил қилинади.

В- матрица қуйидаги системанинг

$$\begin{cases} x_1 + \bar{a}_{11}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \bar{b}_1 \\ x_2 + \bar{a}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = \bar{b}_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + \dots + \dots a_n x_n = \bar{b}_r \\ 0 = \bar{b}_{r+1} \\ 0 = \bar{b}_n \end{cases} \qquad (1^*)$$

Кенгайтирилган матрицасидир.Бу система (1) га энди эквевалент бўлади.Агар $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n$ сонлардан бирортаси нолдан фарқли бўлса, у холда (1) система биргаликда бўлади ва (1*) системада $x_1, x_2, \dots, x_r \dots, x_n$ ларни кетма-кет топиш мумкин.Агар $r = n$ бўлса, у холда система ягона ечимга эга бўлади.

1- мисол. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -5 \end{cases}$

системани Жордан-Гаусс усули билан биргаликда ёки биргаликда эмаслигини аниқланг.

Агар система биргаликда бўлса уни ечинг Кранекер-Капели теоремасидаги $rangA = rangB, r = n$ бўлса, система ягона ечимга эга бўлади.

Ечиш: Берилган системадан кенгайтирилган матрица тузамиз ва унда элементар алмаштириш бажарамиз.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \end{pmatrix} \ldots =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

дан қуйидаги системани ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ \quad x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \qquad x_3 - x_4 = 2 \\ \qquad\quad x_4 = -1 \end{cases}$$

бу система берилган системага эквивалент. Системадан пастдан юқорига қараб кетма-кет номаълумлар аниқланади:

$$x_4 = -1$$
$$x_3 = 2 + x_4 = 2 - 1 = 1$$
$$x_2 = -x_3 - x_4 = -1 + 1 = 0$$
$$x_1 = 1 - x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 1 - 5 + 2 = -2$$

Демак илдизлар топилади. Шундай қилиб система $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1$ ечимга эга.

Жавобларни тўғрилигини текшириб кўрилади. Бундан система биргаликда ва ечим ягона эканлиги келиб чиқади.

4. Чизиқли тенгламалар системаси ёрдамида иқтисодий масалаларни ечиш.

Математиканинг тадбиқи сифатида чизиқли тенгламалар системасини кўрсатиш мумкин. Жумладан чизиқли тенгламалар системаси ёрдамида тўғри чизиқнинг бурчак коэфиценти тенгламасини иқтисодиётга тадбиқи катта. Маълумки, чизиқли тенгламалар системасининг ҳар бири алохида бир тўғри чизиқни ифодалайди. Тенгламалар системаси ечимга эга бўлиши системанинг биргаликда бўлиши ёки биргаликда бўлмаслиги билан боғлиқ.Бу муаммони юқоридаги саволларда қараб чиқдик ва тахлил қилдик. Агар система содда хол учун икки номаълумли битта тенгламадан иборат бўлса, бу тенгламани $y = kx + b$ кўринишида ифодалаб ,унинг иқтисодий масалаларга тадбиғини қараб кўрамиз.Бу тенгламалар α бурчак ўткир бўлса, $k > 0$ билан ўсиб боради., α ўтмас бурчак бўлганда $k < 0$ бўлиб тўғри чизиқ х нинг ўсиши билан камаювчи бўлади.

Мисол1. Бозорда рақобатбардош маҳсулот сотилмоқда. Маҳсулотнинг нархи ўзгармас Р га тенг бўлсин.Махсулот сонини х, кунлик тушум у бўлсин . у ва х орасидаги боғланишни топинг.

Ечиш. Махсулот қанча кўп сотилса тушум шунча кўп бўлади. Шунинг учун тушум билан махсулот сони орасида қуйидаги чизиқли боғланиш мавжуд. $y = Px$

Мисол.2 Авторемонт корхонасидаги жиҳозларнинг нархи 476000 сўм, ҳар йилги амортизация фонди 26000 сўмни ташкил қилади.Жихозлар баҳосининг вақт бирлиги билан боғланишини топинг.

Ечиш. у билан жихозларни белгилаймиз, х йиллар деб олсак, у холда боғланиш $y = 476000 - 26000x$ кўринишида бўлади . Бу тенгламадан бизга керакли бўлган иқтисодий маълумотлар олинади.

Энди ўрганилган материални ўзлаштириш даражасини аниқлаш мақсадида назорат саволларини белгилаймиз.

I Эсга олиш ва хотирада тиклаш ўзлаштириш даражасидаги саволлар.

1. Чизиқли тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечишнинг қандай хусусиятлар бор? Тўғри жавобни кўрсатинг.

A) 3 та хусусияти бор.

1) Чизиқли тенгламалар системаси номаълумлар сони ва тенгламалар сонига тенг бўлиши лозим.

2) Номаълумлар тенгламалар системасидан кам бўлиши.

3) Крамер формуласини қўллашда. $\det A = 0$ бўлиши лозим.

B) 1) Система биргаликда ва аниқ бўлса ($\det A \neq 0$) у холда ягона ечим бўлиши мумкин.

2) Система биргаликда ва аниқмас бўлса, иккита айнан тенг бўлган тенглама хосил бўлади. Системада мавжуд тенгламалар сони номаълумлар сонидан 1 та кам бўлиб қолади.

3) Система биргаликда бўлмаса, у холда бирор қадамда йўқолаётган номаълум билан биргаликда бўлган барча номаълумлар ҳам йўқолади. Ўнг томонда эса нолдан фарқли озод хад қолади.

C) Гаусс усули номаълумларни кетма-кет йўқотиш усули билан тенгламалар системасини ечишдир.

D) Системадаги $\det A = \det B$ бўлиши зарур.

2. Тенгламалар системасини ечишда матрица рангини аниқлаш нега керак?

A) Номаълумлар сонини аниқлаш учун

B) Тенгламалар системасини биргаликда ёки биргаликда эмаслигини аниқлаш учун

C) Кенгайтирилган матрицани топиш учун.

D) Тенгламалар системасини ечимини топишда матрица рангини алоқаси йўқ.

II. Репродуктив ўзлаштириш даражасидаги саволлар.

1)Чизиқли тенгламалар системасини ечишда матрицали усул қандай холларда қўлланилади.? Тўғри жавобни кўрсатинг.

A) Ҳар қандай ўлчовли матирца учун, матрица элементи қўллаш орқали уни ечимини мавжудлигини кўрсатиш мумкин.

B) тенгламалар системасини ечишда матрицалар усулини қўллашни алохида холлари (ёки шартлари) йўқ.

C) Система матрицаси - А учун кенгайтирилган В матрица мавжуд бўлиши зарур.

D) Чизиқли тенгламалар системаси учун номаълумлар сони n системадаги тенгламалар сони m га тенг бўлиши зарур.

E) $\det A \neq 0$ бўлиши лозим.

2. Чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг матрицали усули қандай амалга оширилади?

A) (1) системада $m = n$ бўлган хол учун 1) А матрица тузилади.

2) $\det A \neq 0$ эканлиги текширилади.Яъни матрица махсусмас бўлиши лозим

3) А матрица учун A^{-1} тескари матрица топилади.

4) (1) системадан X ва B матрицалар номаълумлар ва озод хадлардан тузилади.

5) (1) дан $AX = B$ матрицали ифода тузилади.

6) $AX = B$ дан $A^{-1}AX = AB$ топилади ва ундан $EX = X = A^{-1}B$ топилиб, сўнгра X –устун матрица топилади.

7) X матрицадан жавоб кўрсатилади.

B) А ва В дан $rangA = rangB$ аниқланади ва жавоб ёзилади.

C) (1) чизиқли тенгламалар системасини матрицали усул билан ечиб бўлмайди, чунки ҳар доим $\det A = 0$ бўлади.

D) чизиқли тенгламалар системасини фақат Крамер формуласига асосланиб ечилади.

3. Қачон тенгламалар ситемаси ягона ечимга эга бўлади? Тўғри жавобни кўрсатинг

A) $\det A = 0$, $\det A \neq 0$ бўлганда.

B) $\det A = \det B = 0$ бўлганда.

C) Агар номаълумлар сони- n , матрица ранги-r га тенг бўлганида

D) $rangA = 2, rangB = 3$ бўлганида система илдизи 1га тенг.

E) Агар $\det A \neq 0, rangA = rangB, n = r$ бўлса ечими ягона бўлади.

4. Чизиқли тенгламалар системасини Жордан-Гаусс усули билан ечишда қандай шартлар қўлланилади? Тўғри жавобни кўрсатинг.

A) кенгайтирилган B матрица, ранги яъни $rangB \neq 0$ бўлиши.

B) $rangA \neq rangB$ бажарилганда

C) $r = rangA, rangB = n$, бўлиб r<n бўлганда

D) $\det A = \det B$ бўлганда

III Продуктив ўзлаштириш даражасидаги саволлар

1.Чизиқли тенгламалар системаси

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

берилган системадан А ва В матрицалар рангини топинг.

A) $rangA = 0, rangB = 2$

B) $rangA = 2, rangB = -5$

C) $rangA = 2, rangB = 2$

D) $rangA = -3, rangB = 2$

2.Чизиқли тенгламалар системаси ечимлари кўрсатилган. Тўғри жавобни кўрсатинг.

A) $rangA = rangB = 2$ $2 < n = 4, n - r = 2$ кўра берилган системадан

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ \quad x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$ системага келтирилади. Бундан эса бу система чексиз кўп ечимга эгалиги келиб чиқади.

B) Системани ечимлари мавжудлигининг матрица рангини топишга алоқаси йўқ.

C) фақат $rangB$ топилса бўлди.

D) Жордан –Гаусс усули билансистеманинг ечимини аниқлаб бўлмайди.

3. Юкни ташиб келиш учун икки хил транспорт турларида фойдаланиш имконияти бор.Улар мос равишда қуйидаги чизиқли тенгламаларни қаноатлантиради.

$y_1 = 100 + 40x, y_2 = 200 + 20x$

Бутун x- масофа (100 км хисобида) y_1, y_2 эса транспорт ларга сарфлаш харажатларини билдиради. Қайси транспортда фойдаланиш арзон тушади? Масалани ечинг ва тўғри жавобни кўрсатинг.

A) Иккинчи транспротдан фойдаланиш арзон.

B) Биринчи транспортдан фойдаланиш арзон

C) Хар иккала транспортдан фойдаланиш арзон

D) 500 км гача биринчи , 500 км ортиқ бўлган масофада юк ташиш иккинчи транспортда арзон бўлади.

VI Ижодий ўзлаштириш даражасидаги саволлар.

1. Уч хил транспорт билан юк ташиш харажати

$y_1 = 100 + 50x, y_2 = 150 + 25x, y = 200 + 16\frac{2}{3}x$ тенглама билан аниқланади.x вақт, 200км гача ва 600км дан ортиқ масофа учун қайси транспортдан фойдаланиш фойдали эканлигини кўрсатинг.

2. Бешта турли транспортлар билан юк ташиш харажати

$y_1 = 100 + 75x, y_2 = 200 + 50x, y_3 = 300 + 25x$

$, y_4 = 350 + 16\frac{2}{3}x, y_5 = 50 + 100x$

Тенгламалар билан хисобланади.бунда x-масофа 100км хисобида ,

$y_1, y_2, y_3, y_{4,} y_5$ харажатлар сўмларда хисобланади.Қандай масофада ва қанча транспортда фойдаланиш арзон бўлади.

Тўғри жавобни кўрсатинг.

A) Хамма транспортларда

B) биринчи ва учинчи транспортда

C) биринчи,иккинчи ва учинчи транспортларда

D) биринчи ва иккинчи транспортда.

Амалий машғулот (4-соат)

Мавзу: Матрицалар ва улар устида амаллар.Тенгламалар системасини ечишга татбиқи.

Ўқитувчининг мақсади: Чизиқли тенгламалар системасини ечишда матрицалардан фойдаланишга ўргатиш.

Талабанинг ўқув вазифалари(мақсадлари):

1.3 Матрица элементлари устида элементар алмаштиришларни бажаради .

1.4 Матрица ёрдамида чизиқли тенгламалар системасини ечиш усулларини билади.

Муоммолар: Матрицалар тузиш; матрицалар устида амаллар бажариш;матрицаларни чизиқли тенгламалар системасини ечишда қўллаш.

Дарсда куйидаги мисоллар ишланади:

1-мисол $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ берилган бўлса A^T -ни топиш

Ечиш. Устунлари билан сатрларини алмаштирамиз $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ хосил булади.

Навбатда куйидаги мисоллар ечилади: [6],
2-§, 38-punkt, № 3, 5.

2-мисол $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 2 & -5 & 4 & 3\\ 3 & -9 & 3 & 2\end{pmatrix}$ матрица рангини топинг

Ечиш. $rangA=2$ чунки $M_2=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -5 & 4\end{vmatrix}\neq 0$

Навбатда куйидаги мисоллар ечилади: [6], 6-§, 41- пункт, № 2, 5; 43-пункт, № 3, 5.

3-мисол 1- мисол $A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 2 & -4\\ -3 & 9\end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & 7\\ 8 & 11\end{pmatrix}$ матрицалари элементлари устида қўшиш ва айириш амалларни бажаринг

Ечиш. $A+B=\begin{pmatrix}-1 & 10\\ 5 & 3\\ 5 & 20\end{pmatrix}$ $A-B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & -11\\ -11 & -2\end{pmatrix}$

Навбатда куйидаги мисоллар ечилади: [6], 6-§, 39-пункт, № 1, 2, 40-пункт, № 1, 2, 3.

4-мисол. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 4 & -5 & 8\end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & -3\\ -1 & 5\end{pmatrix}$ $C=A\cdot B$ топинг

Ечиш.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 3\cdot(-2) + (-1)(-1) & 1\cdot 4 + 3\cdot(-3) + (-1)\cdot 5 \\ 4\cdot 3 + (-5)(-2) + 8(-6) & 4\cdot 4 + (-5)(-3) + 8\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ 14 & 111 \end{pmatrix}$$

Навбатда куйидаги мисоллар ечилади:

[6], 6-§, 38-пункт, № 2, 6, 7; 39- пункт, № 3, 4, 5; 40- пункт, № 4, 5, 6; 41- пункт, № 1, 3, 4, 6; 43- пункт, № 1, 2, 4, 6.

5-мисол. $\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 1 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 11 \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases}$ системани Жордан-Гаусс усули билан ечинг.

Ечиш.

Жордан-Гаусс усули билан ечиш учун системани биргаликда ёки биргаликда эмаслигини аниқлаймиз.

Агар система биргаликда бўлса уни ечинг Кранекер-Капели теоремасидаги $rangA = rangB, r = n$ бўлса, система ягона ечимга эга бўлади.

Навбатда куйидаги мисоллар ечилади: [8], 4-§, № 1, 2, 5,6,7

Уйга вазифа:

[6], 6-§, 38-пункт, № 10, 12, 13; 15- пункт, № 5, 7,9; 40- пункт, № 7, 8, 9; 41- пункт, № 1, 3, 4, 6; 43- пункт, № 1, 2, 4, 6. мисолларни ечиш

Мустақил ишлар.

1.ТМИ дарсида:а)Академик гурух учун умумий топшириқ.

1 микрогурух учун умумий топшириқ..Берилган тенгламани ечинг.

$$\begin{cases} x_1+5x_2-6x_3=-15 \\ 3x_1+x_2+4x_3=13 \\ 2x_1-3x_2+x_3=9 \end{cases}$$

2 микрогурух учун умумий топшириқ.. Берилган тенгламани ечинг.

$$\begin{cases} 4x_1-9x_2+5x_3=1 \\ 7x_1-4x_2+x_3=11 \\ 3x_1+5x_2-4x_3=5 \end{cases}$$

3.микрогурух учун умумий топшириқ.. Берилган тенгламани ечинг

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1-x_2-x_3=0 \\ 2x_1-3x_2+x_3=0 \end{cases}$$

4.микрогурух учун умумий топшириқ. Берилган тенгламани ечинг.

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3=0 \\ 7x_1-5x_2+3x_3=0\,.. \\ 5x_1-4x_2-x_3=0 \end{cases}$$

Б) Кичик гурухлар учун вазифалар:

1-кичик гурух учун топшириқ.

А) Кучли талаба учун. Детерминтни хисобланг.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

В) Ўртача талаба учун топшириқ.

Матрицаларни кўпайтиринг . ..

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix},$$

$i=3,\ j=3$

C) Кучсиз талаба учун топшириқ.

Тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$$

2-кичик гурух учун топшириқ.

A) Кучли талаба учун. Детерминтни хисобланг.

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

B) Ўртача талаба учун топшириқ.

Матрицаларни кўпайтиринг .

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$i=4,\ j=1$

C) Кучсиз талаба учун топшириқ.

Тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$$

3- кичик гурух учун топшириқ.

A). Кучли талаба учун. Детерминтни хисобланг.

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$$

B) Ўртача талаба учун топшириқ.

Матрицаларни кўпайтиринг .

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$i = 1, j = 3$

C) Кучсиз талаба учун топшириқ.

Тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - 5x_3 = 9 \end{cases}$$

4- кичик гурух учун топшириқ.

A) Кучли талаба учун. Детерминтни хисобланг.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

B) Ўртача талаба учун топшириқ.

Матрицаларни кўпайтиринг .

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 7 & 1\end{bmatrix}$$

$i=2, j=4$

С) Кучсиз талаба учун топшириқ.

Тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=5\\ 3x_1+x_2+2x_3=0\\ 2x_1-3x_2+5x_3=0\end{cases}$$

Жамоавий таълим учун мавзу : Транспорт масаласи.

Адабиётлар:

1. Г.Ғаймназаров .С.Қосимов .О.Ғаймназаров “Иқтисодиётда математика” Т-“Фан ва технология”, 2008 йил, 53-57 бетлар,
2. Насритдинов Ғ, Абдураимов М. “Иқтисодчилар учун математика”, Т-ЎЗМУ, 2003.15-22 бетлар.
3. Ғофуров М. ва бошқалар. Иқтисодий-математик усуллар ва моделлар, Т-ТДИУ,2001, 58-62 бетлар.
4. Юсупова А. Математик моделлаштириш, Т-“Янги аср авлоди”,2001.16-49 бетлар.

Мавзу бўйича талабаларнинг индувидуал билимларини синаб кўриш учун назорат саволлари.

Талабалар келтирилган саволлар асосида ўқув материалларида кўрсатилган адабиётлардан программалаштирилган ўқув методи асосида мазмунини қайта тузадилар ва мустақил ўрганадилар.

1. 2- тартибли детерминант қандай белгиланади ва у нимага тенг?
2. 3- тартибли детерминант қандай белгиланади ва у қандай ҳисобланади?
3. Детерминантнинг хоссалари нималардан иборат?
4. Чизиқли тенгламалар системасининг детерминанти деб нимага айтилади?
5. Чизиқли тенгламалар системаси қачон ягона ечимга эга бўлади?
6. Чизиқли тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлиши қандай топилади?
7. Крамер формулалари нимадан иборат?
8. Матрица деб нимага айтилади?
9. Матрицанинг ўлчови нима ва у қандай ёзилади?
10. Квадрат матрица деб қандай матрицага айтилади?
11. Матрицанинг детерминанти нима?
12. Махсус ва махсусмас матрицалар қандай матрицалар?
13. Диоганал матрица деб нимага айтилади?
14. Бирлик матрица деб қандай матрицага айтилади?
15. Транспонирланган матрица деб нимага айтилади?
16. Қандай матрицалар тенг бўлади?
17. Кенгайтирилган матрица қандай тузилади?
18. Матрицалар йиғиндиси нима?
19. Матрицаларни сонга кўпайтириш қандай бўлади?
20. Қандай матрицаларни кўпайтириш мумкин?
21. Матрицалар қандай кўпайтирилади?
22. Тескари матрица деб қандай матрицага айтилади?

23. Матрицанинг k- тартибли минори нимага тенг?
24. Матрицанинг ранги нима?
25. Элементар алмаштиришлар деб қандай амалларга айтилади?
26. Тенгламалар системасининг матрицали ёзуви қандай бўлади?
27. Чизиқли тенглама деганда қандай тенгламани тушунасиз?
28. Чизиқли тенгламалар системаси деганда қандай тенгламалар системасини тушунасиз?
29. Бир жинсли тенгламалар системаси деганда қандай тенгламалар системасини тушунасиз?
30. Бир жинсли бўлмаган тенгламалар системаси деганда қандай системани тушунасиз?
31. Чизиқли тенгламалар системасидан матрица қандай тузилади?
32. Тенгламалар системаси матрицалар ёрдамида қандай ечилади?
33. Тескари матрица қандай топилади?
34. Қандай тенгламалар системаси биргаликда дейилади7
35. Кронекер-Капелли теоремасининг шарти нимадан иборат?
36. Тенгламалар системаси қандай шартда ягона ечимга эга бўлади?
37. Қандай матрицага кенгайтирилган матрица дейилади?
38. Бир жинсли система деб қандай системага айтилади?
39. Бир жинсли система қандай холда биргаликда бўлади?
40. Бир жинсли система нолдан фарқли ечимга эга бўлиши учун қандай шарт бажарилиши керак?
41. Бир жинсли система нолдан фарқли ечимга эга бўлиши мумкинми?
42. Бир жинсли система қандай холда нолдан фарқли ечимга эга бўлиши мумкин?
43. Бир жинсли системанинг детерминанти нолга тенг бўлса, у нолдан фарқли ечимга эга бўладими?
44. Тенгламалар системасини ўрта мактаб курсидан ечишни қандай усулларини биласиз ?

45. Тенгламалар системасининг ечишнинг Гаусс усули мохиятини тушунтиринг?
46. Система биргаликда ва аниқмас бўлса уни Гаусс усулида қандай ечиш мумкин?
47. Система биргаликда бўлмаса,уни Гаусс усулида қандай ечиш мумкин?
48. Чизиқли тенгламалар системаси Жордан-Гаусс усулида қандай ечилади?
49. Тенгламалар системасини Жордан-Гаусс усулида ечишнинг самарали эканлигини кўрсатинг?
50. Чизиқли тенгламалар системасини иқтисодий масалаларни ечишга тадбиқини кўрсатинг?

Мавзу учун фойдаланилган адабиётлар рўйхати.

1.Ё У.Соатов Олий математика ,1 2,3 жилд.Т, Ўқитувчи 1992 й

2. Т.Жўраев ва бошқалар .Олий математика асослари Т, Ўзбекистон,1998 йил

3. П.Е. Данко ва бошқалар . Высшая математика в упражнениях и задачах. М, «Высшая школа» 1979 г

4. Х.Р.Латипов ва бошқалар.Аналитик геометрия ва чизиқли алгаебрадан масалалар ечиш бўйича қўлланма.Т, Фан,1999й

5. А.Б.Бегмат, М.Я. Якубов Иқтисодчилар учун математика.Самарқанд, 2003й

6. Г.Ғаймназаров .С.Қосимов .О.Ғаймназаров "Иқтисодиётда математика" Т-"Фан ва технология", 2008 йил, 53-57 бетлар,

7. Ч.Э.Мирзаев, Олий математика. Ўқув услубий мажмуа, Гулистон, 2008й

8. Х.Р. Латипов, Ф.У. Носиров, Ш.И. Тожиев «Аналитик геометрия ва чизиқли алгебрадан масалалар ечиш бўйича қўлланма» 1999 й.

Рейтинг ишланма

№	Бахолаш тури	Балл	Жами
1	Маъруза дарсида фаоллиги	1	1
2	Амалий машгулот дарсида фаоллиги .	2	1
3	ТМИ а) дарсида топширикларни бажариш в) кичик гурухлардаги топширикларини бажариши	2x1,5	3
5	Уй вазифаси	2x1.5	3
	Жами		8

3. Хулоса ва таклифлар

Чизиқли тенгламалар системасини ечишда инновацион ёндашув мавзусидаги битирув малакавий ишни бажариш жараёнида ўрта мактаб алгебра курсига оид, ўрта ва ўрта махсус ўқув юртларида алгебра ва математик анализ асослари курсига оид, Олий ўқув юртлари номатематик йўналишларда олий математика фанини ўқув мазмуни ва уни ўқитиш усуллари тахлил қилинди. Математика ўқитишда анъанавий ёндашувдаги камчиликлар, интерфаол усулларни, таълим жараёнида ҳамкорликда таълим олиш ва лойиҳалаш методини қўллаш билан боғлиқ муаммолар ўрганиб чиқилди. Шу билан бирга олий математика фанини ўрганишда таълим жараёнларини комплекс лойиҳалаш билан боғлиқ муаммолар тадқиқот этилди. Битирув малакавий ишни бажариш қуйидаги хулосаларга олиб келди:

1. Ўрта мактаб алгебра курсига оид ўқув материали етарлича ҳажмга эга ва ўқитиш методикаси содда эканлиги, ўқув мазмуни асосан анъанавий ўқитиш методикасига мослиги, шу билан бирга бу материал интерфаол усулларни қўллаб ўрганишга мослаштирилмаганлиги аниқланди.
2. Ўқув материали қобилиятли ўқувчилар учун мослаштирилмаган. Дарсликлардаги ўқув материали мазмуни педагогик технологиялар асосида ўрганишга мос эмас. Ўқув материалини замонавий технология асосида ўрганиш учун уни қайта структуралаш, қўшимча топшириқлар тузиш, дарсликдаги материални турли даражадаги саволлар билан бойитиш лозим бўлади.
3. Ўрта ва ўрта махсус ўқув юртлари ўқув дарсликларда ва қўлланмалардаги алгебраик материал педагогик технологияларга қўллаш мослашмаган. Берилган ўқув материалини замонавий технология асосида ўрганиш учун уни қайта структуралаш, материални мазмунини қайта тузиш ва унга мос ўрганиш усулларини топиш, маъруза, амалий машғулот, уйга вазифа ва дарс жараёнида материалини кичик гуруҳларга таяниб ўрганиш, таълимда жамоавий ўқитиш усулидан фойдаланиш, таълим жараёнини комплекс лойиҳалаш ишларини амалга ошириш мақсадга мувофиқ эканлиги аниқланди.
4. Битирув малакавий ишни бажаришда 40 дан ортиқ адабиётлар ўрганиб чиқилди. Жумладан, таълимда давлат стандартига риоя қилиш, “Кадрлар тайёрлаш миллий дастури” бажарилишининг хозирги босқичидаги муаммоларни ўрганишга ёрдам берувчи бир қатор мақолалар ва адабиётлар ўрганиб чиқилди. Тадқиқот мавзуси юзасидан мактаб, лицей, касб – ҳунар коллежлари, олий ўқув юртлари профессор – ўқитувчилари ҳамда Сирдарё вилояти ўқитувчи педагогларни қайта тайёрлаш ва уларни малакаларини ошириш институти тингловчилари билан сухбатлар ўтказилди ва уларнинг фикрлари инобага олинди.
5. Таълим тизимида математика ўқитиш ўқув материали анъанавий ўқитиш усулига мослаштирилган бўлиб, уни янги таълим технологиялари асосида ўрганиш учун ўқув мазмунини қайта тузиш лозим бўлади. Сўнгра бу ўқув

материалини модулли ёки микромодулли (ёки бошқа усуллар) усулларга асосланиб, таълимда самара берадиган ёндашувларни топиш мақсадга мувофиқ эканлиги асослаб берилди.
6. Чизиқли тенгламалар системасини ечишда инновацион ёндашув мавзудаги битирув малакавий ишда мавзуни 8 соатга мўллажалланган микро модулли ўқитиш технологияси берилди. Бунда мавзу асосий саволларга бўлинди. Асосий саволлар таянч ибора ва асосий тушунчалар орқали ёритилди. Мавзудаги ҳар бир савол учун ўқитувчининг мақсади ва унга мос талабанинг ўқув вазифалари, саволдаги муаммолар кўрсатилди. Сўнгра саволнинг баёни берилиб ҳар бир савол охирида талабани ўз билимини ўзи синаб кўриш имконини берувчи эсга олиш ва хотирага тиклаш, репродуктив, продуктив ва ижодий ўзлаштириш даражасидаги назорат саволлари тузилди. Бу саволлар талабани ўзлаштириш даражасини аниқлашга яъни ўз рейтингини билишга имконият яратилди. Ҳар бир мавзу учун уйга бериладиган топшириқлар, мустақил ишлар, кичик гуруҳларда бажариш учун топшириқлар, жамоавий таълим учун мавзулар белгиланди. Мавзуни ўрганишда баҳолаш мезони ва рейтинг ишланмасидан фойдаланиш йўллари кўрсатилди.
7. Чизиқли тенгламалар системасини ўрганишга оид ўқув материалини матрицаларга асосланиб ўрганишнинг яхлит шакли сифатида таълим жараёнларини комплекс лойиҳалашга эришилди. Ўқув материалини ўзлаштиришга кафолат берувчи педагогик технологияларга асосланган, программалаштирилган ўқув дастурига кўра назорат саволи тузилди. Бу саволлар асосида талаба репродуктив ўзлаштириш даражасида эвристик ўқитиш методи асосида ўз билимини синаб кўради ва билимини ривожлантириб бориш имкониятига эга бўлади. Бу эса ушбу мавзуни ўрганишда инновацион ёндашувдир.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. И.А.Каримов. Юксак маънавият – енгилмас куч. Т. “Маънавият”, 2008 йил.
2. И.А.Каримов. Баркамол авлод пойдевори. Т.”Ўзбекистон”, 2004 й.
3. Умумий ўрта таълим Давлат таълим стандарти ва ўқув дастури. “Шарқ”, 2004 й.
4. Алимов Ш.О. ва бошқалар. Алгебра (умум таълим мактабларининг 7 – синфлари учун дарслик). Т.”Ўқитувчи”, 2006 й.
5. Алимов Ш.О. ва бошқалар. Алгебра (умум таълим мактабларининг 8 – синфлари учун дарслик). Т.”Ўқитувчи”, 2006 й.
6. Алимов Ш.О. ва бошқалар. Алгебра (умум таълим мактабларининг 9 – синфлари учун дарслик). Т.”Ўқитувчи”, 2006 й.
7. Антонов М.С., Гуссев В.А. “Современные проблемы методики преподавания математики”.М. «Просвещение», 1985 г.
8. Абдуҳамидов А.У., Ҳ.А.Насимов, У.М.Носиров, Ж.Ҳ.Ҳусанов. Алгебра ва математик анализ асослари 1 қисм (академик лицейлар учун дасрлик). “Ўқитувчи” нашириёт – матбаа ижодий уйи. Тошкент – 2007 й.
9. Абдуҳамидов А.У., Ҳ.А.Насимов, У.М.Носиров, Ж.Ҳ.Ҳусанов. Алгебра ва математик анализ асоалари 2 қисм (академик лицейлар учун дасрлик). “Ўқитувчи” нашириёт – матбаа ижодий уйи. Тошкент – 2007 й.
10. Бегмат А.Б., М.Я. Якубов Иқтисодчилар учун математика.Самарқанд, 2003й
11. Гаймназаров Г., С.Қосимов, О.Г.Гаймназаров. Иқтисодиётда математика (Респулика олий таълими муассасаларида таълим олаётган бакалавр таълим йўналиши талабалари учун ўқув қўлланма). Тошкент - 2008 йил.
12. Джўраев Р.Х., Ч.Э.Мирзаев, Б.Рахимов. Замонавий педагогик технологияларни таълим жараёнига тадбиқ этиш жараёнини комплекс лойиҳалаш. “Узлуксиз таълим” илмий – услубий журнал, Тошкент – 2008 й., 14 – 23 бет.
13. Данко П.Е. ва бошқалар . Высшая математика в упражнениях и задачах. М, «Высшая школа» 1979 г.
14. Жўраев Т. ва бошқалар.Олий математика асослари Т., Ўзбекистон,1998 йил.
15. Купченко В.Е. Личностные особенности молодых людей с разным типом жизненной стратегии (на примере студентов высших учебных заведений). Психология в вузе 2009 г. № 3. май – июнь. Научно – методический журнал, Москва – Обнинск, 28 – 37 ст.
16. Кондаков А.М. Стандарт: инновационность и преемственность. Педагогика научно - теоретический журнал Российской академии образования. № 4., 2009 г.,14 – 18 ст.
17. Лунгу К. Модернизация содержания математического образования в техническом вузе. Образовательные технологии. 2009 г., № 2., Народное образование, 49 ст.

18. Латипов Х.Р. ва бошқалар.Аналитик геометрия ва чизиқли алгаебрадан масалалар
ечиш бўйича қўлланма.Т., Фан,1999 й.
19. Мясников В.А. «Образование сегодня. Новые возможности, новые проверка». Мир образования – образования в Мире, журнал, № 1.(29), 2008 г., Москва.
20. Мирзаев Ч.Э. Ўқувчи(талаба)ларнинг ҳамкорликда таълим олиш хусусиятлари. (Замонавий педагогик технологиялар фани ўқитиладиган олий ўқув юртлари талабалари ва малака ошириш курси тингловчиларига мўллжалланган ўқув қўлланма). Гулистон – 2003 йил.
21. Мирзаев Ч.Э. Таълим жараёнларини комплекс лойиҳалаш. Тошкент – 2010.
22. Мирзаев Ч.Э. Математика таълимида инновацион ёндашув. “Таълим тизимига ахборот технологияларини татбиқ этишнинг замонавий муаммолари” Республика илмий – амалий анжумани материалларининг тўплами. Гулистон – 2009 йил 4 декабрь, 93-95 бет.
23. Мирзаев Ч.Э. Таълимнинг сифати ва самаардорлигини таъминлашда дастурнинг роли. Ҳалқ таълими илмий –методик журнал. № 6., 2006 йил ноябр – декабр, 6 – 10 бет.
24. Мирзаев Ч.Э., Ўразалиев Т. Таълим жараёнини жамулжам лойиҳалаш ҳақида. Мирзо Улуғбек номидаги миллий университет “Инновацион педагогик технологиялар” илмий – амалий маркази. Замонавий контекстида педагогика фани ва унинг методологик муаммолари Республика илмий – назарий конференция материаллари. Тошкент - 2005 йил 20 – 21 май, 117 – 118 бет.
25. Мирзаев Ч.Э. Таълимни шахсга йўналтиришнинг баъзи муаммолари. “Узлуксиз таълим тизимида инновацион технологиялар, муаммо ва ечимлар” Республика илмий – амалий конференциясининг материаллари тўплами. Гулистон - 2010 йил 6 – 7 май, 52 – 53 бет.
26. Мирзаев Ч.Э., Норжигитов Х. Ўз – ўзини бошқариш тизимини такомиллаштириш муаммолари. “Узлуксиз таълим тизимида инновацион технологиялар, муаммо ва ечимлар” Республика илмий – амалий конференциясининг материаллари тўплами. Гулистон 2010 йил 6 – 7 май, 221 – 223 бет.
27. Мирзаев Ч.Э., С.Саматов. Таълимда янги педагогика технологиялар (Замонавий педагогик технологиялар фани ўқитиладиган олий ўқув юртлари талабалари ва малака ошириш курси тингловчиларига мўллжалланган ўқув қўлланма) . Гулистон 2003 йил.
28. Мирзаев Ч.Э., Олий математика. Ўқув услубий мажмуа, Гулистон, 2008й
29. Новиков А.М., Д.А.Новиков «О предмете и структуре методологии». Мир образования – образование в Мире, журнал, № 1.(29), 2008 г., Москва.
30. Новычков В.Б. «Целепологание в образовании семантика и структура» Мир образования – образования в Мире, журнал, № 1.(29), 2008 г., Москва.

31. Рыбаков А.С. «Что есть образования?» Мир образования – образования в Мире, журнал, № 1.(29), 2008 г., Москва.
32. Сахарова В.И. «От традиционного обучения и современного» Мир образования – образования в Мире, журнал, № 3, 2008 г., Москва.
33. Содействие реформированию системы непрерывного образования Республики Узбекистан. по редакцией проф. К.Аллаева. Ташкент 2009 г.
34. Соатов Ё У. Олий математика ,1 2,3 жилд.Т, Ўқитувчи 1992 й
35. Тожиев М., А.Я.Алимов, Д.У.Қучқаров. Педагогик технология – таълим жараёнига татбиғи (Бошланғич таълимда математика ўқитиш методикаси фани дарсларининг лойиҳаси) 1 – қисм. Т.;"Тафаккур" 2010 йил.
36. Ғуломов С.С., Х.Р.Раимов, М.Ҳ.Саидов, Б.Ю.Ходиев. Таълим – тарбия сифати ва қирралари. Тошкент – "Фан ва технология" – 2004 йил.
37. Юнусова Д.И., А.С.Юнусов. Алгебра ва сонлар назарияси (модул технологияси асосида тайёрланган мисол ва машқлар тўплами). "Илм – зиё", Тошкент – 2009 й.
38. Яремчук Ф.П., П.А.Рудченко. Алгебра и элементарные функции. Киев «Наукова Думка», 1987 йил.
39. Интернет
40. Зиёнет

Мундарижа