Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта-махсус тълим вазирлиги

З.М. Бобур номидаги Андижон Давлат Университети

Қўлёзма хуқуқида

УДК 512.83

Рўзимбетов Ёрқин Хабибуллаевич

Умумлашган транспонирланган матрицалар
ва уларнинг тадбиқлари

5А460105- “Математик мантиқ, алгебра ва сонлар назарияси ”
мутахасислиги бўйича магистр академик даражасини олиш
учун магистрлик диссертацияси

Илмий рахбар :

Андижон Давлат Университети профессори,
Физика-математика фанлари доктори
Миладжонов В.Ғ

Андижон-2012

Режа

КИРИШ

Мавзунинг долзарблиги: Матрица тушунчаси, чизиқли алгебранинг асосий тушунчаларидан бири бўлиб, унинг талаба томонидан чуқур ўзлаширилиши мухим ахамиятга эга. Чунки, бу тушунчанинг татбиқлари замонавий ишлаб чиқаришдаги мухим иқтисодий, техникавий масалаларни ечишда кенг қўлланилади. Бундан ташқари йирик масштабли системалар структураси ва динамик хоссаларини ўрганишда матрицалардан файдаланиш қулай бўлиб, матрицаларни транспонирлашмасаласи йирик масштабли системалар структурасининг ўзгариши масаласи билан устма-уст тушади. Шунинг учун йирик масштабли системалар билан матрицалар ўртасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиб, матрицаларни транспонирлаштушунчасидан фойдаланиб, йирик масштабли системалар структурасининг ўзгариш мумкин. Буларни хисобга олсак, қаралаётган мавзуни долзарб эканлигини кўриш қийин эмас.

Ишнинг мақсади: Матрицаларни умумлашган транS`онирлашнинг хоссаларини, умумлашган симметрик матрицалар хоссалари ўрганишдан иборат.

Тадқиқот усули: Матрицалар алгебраси усулларидан фойдаланиб, матрицаларни умумлашган транспонирлашнинг хоссаларини, умумлашган симметрик матрицалар хоссалари исботланади.

Илмий янгиликлар: Диссертацияда қуйидаги натижалар олинди:

1. Матрицаларни умумлашган транS`онирлашни 13 та хоссаси исботланди.
2. Умумлашган симметрик матрицаларни 10 та хоссаси исботланди.
3. Умумлашган кососимметрик матрицаларни 3 та хоссаси исботланди.
4. Умумлашган ортоганал матрицаларни 2 та хоссаси исботланди.

Амалий ва назарий аҳамияти: Ишнинг назарий аҳамияти шундан иборатки, матрицаларни умумлашган транспонирлашва умумлашган симметрик матрицаларнинг хоссалари матрицалар назарияси учун янгиликдир. Амалий жихатдан шуни айтиш мумкинки, олинган назарий натижаларни йирик масштабли системалар динамик хоссаларини ўрганишга ва Ляпунов функциясининг ишораларини аниқлашга қўллаш мумкин.

Ишнинг апробацияси: Диссертацияда олинган натижалар физика математика факультети математикаи кафедраси қошидаги илмий семинарда, “Интеграл” илмий тўгаракда ва “Математика ва уни ўқитишнинг долзарб муммолари” номли республика илмий-услубий анжуманида маъруза қилинган.

Эълон қилинган ишлари: Диссертациянинг асосий натижалари [13-16] ишларда эълон қилинган.

Диссертациянинг тузилиши ва хажми: Диссертация кириш, 3 та боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан тузилган бўлиб, ишнинг умуий хажми 79 сахифадан иборат. Адабиётлар сони рўйхат бўйича 18 та.

Диссертациянинг қисқача мазмуни. Ушбу магистрлик диссертациясининг кириш қисмида мавзунинг долзарблиги, ишнинг мақсади, тадқиқот усули, илмий янгиликлари, амалий ва назарий ахамияти, апробатцияси, диссертациянинг тузилиши, хажми ва қисқача мазмуни баён қилинган.

1-боб ёрдамчи характерга эга бўлиб, бунда матрицалар алгебрасининг элементлари баён қилинган.

2-боб матрицаларни умумлашган транспонирлаш ва унинг хоссаларини ўрганишга бағишланган бўлиб, 4 та параграфдан иборат. 1-параграфда матрицаларнинг умумлашган транS`онирлашнинг таърифи қуйидагича берилган:

1-тариф. Матрицани транспонирлашдеб, бирор аниқ қонун ёки қоида бўйича унин барча элементларини ўринларини алмаштиришга айтилади.

2-тариф 1.А матрицанинг сатрларини (устунларини) устунлари (сатрлари) билан тўғри тартибда алмаштириб, хосил қилинган A^T=(a_{ji}), j=1,2,…,n, i=1,2,…,m, матрица,

2. А матрицанинг сатрларини (устунларини) устунлари (сатрларини) билан тескари тартибда алмаштириб хосил қилинган A^L=($a_{n+1-j,\ m+1-j}$), j=1,2,…,n, i=1,2…,m матрица,

3. А матрицанинг i-сатрини m+1-i сатри билан алмаштириб, хосил қилинган A^-=($a_{m+1-i,\ \ j}$), i=1,2,…,m, j=1,2…,n матрица,

4. А матрицанинг j-устунини n+1-j устуни билан алмаштириб, хосил қилинган $A^{!}$-=($a_{i,n+1-j}$), i=1,2,…,m, j=1,2…,n матрица,

5. А матрицанинг i-сатрини m+1-i сатри билан, j- устунини n+1-j устуни билан алмаштириб хосил қилинган A^o=($a_{m+1-i,n+1-j}$), i=1,2,…,m, j=1,2…,n матрица,

А матрицани

1) Бош диагонали бўйича,
2) Бош бўлмаган диагонали бўйича,
3) Горизонтал ўқи бўйича,
4) Вертикал ўқи бўйича,
5) Маркази бўйича транспонирланган матрицаси дейилади.

2-параграфда келтирилган таърифларнинг геометрик маъноси ёритилган.

3-параграфда эса келтирилган таърифларнинг механик маъноси ёритилган.

4-параграфда матрицаларни умулашган транспонирлашнинг қуйидаги хоссалари исботланган:

1. Агар A ва B mxn ўлчовли, тўғри тўртбурчакли матрицалар бўлса, у холда

$(A+B)^T = A^T + B^T,$ $(A+B)^L = A^L + B^L,$

$(A+B)^{\bar{}} = A^{\bar{}} + B^{\bar{}},$ $(A+B)^{!} = A^{!} + B^{!},$

$(A+B)^o = A^o + B^o$

2. Агар A- mxn, ўлчовли тўғри тўртбурчакли матрица бўлиб, £ =0 хақиқий сон бўлса, у ҳолда

$(£A)^T = £A^T,$ $(£A) = £A,$ $(£A)^{!} = £A^{!},$

$(£A)^{\bar{}} = £A^{\bar{}},$ $(£A)^{0} = £A^{0},$

3. Агар A-mxn, ўлчовли, тўғри тўртбурчакли матрица бўлса, у ҳолда

$(A^T)^T = A,$ $(A) = A,$ $(A^{!})^{!} = A,$

$(A^{\bar{}})^{\bar{}} = A,$ $(A^{0})^{0} = A.$

4. Агар A mxn, B nxk ўлчовли тўғри бурчакли матрицалар бўлса, у холда

$(AB)^T B^T A^T,$ $(AB) BA,$ $(AB)^{0} B^{0} A^{0}.$

5. Агар A n-тартибли квадрат матрица бўлса, у ҳолда

$(A^T) = (A)^T = A^{0},$ $(A^{!})^{\bar{}} = (A^{\bar{}})^{!} = A^{0},$

$(A^{0})^T = (A^T)^{0} = A,$ $(A^{0}) = (A)^{0} = A^T,$

$(A^{0})^{!} = (A^{!})^{0} = A^{\bar{}},$ $(A^{0})^{\bar{}} = (A^{\bar{}})^{0} = A^{!}.$

6. Агар A n-тартибли квадрат матрица бўлса, у ҳолда

$$A = (A^{0})^{-1}(A^T A)^T = (A^{0})^{-1}(AA^T) = (AA^T)\,(A^{0})^{-1} = (A^T A)\,(A^{0})^{-1}$$

7. Агар A n-тартибли квадрат матрица бўлса у ҳолда

$|A^T| = |A| = |A^{0}| = |A|,$ $|A^{!}| = |A^{\bar{}}| = |-1|^{£}|A|$Б

бу ерда $£ - A$ матрицадан $A^{!}$ ёки $A^{\bar{}}$ матрицаларни ҳосил қилиш учун A матрицанинг сатр ёки устунларини алмаштиришлар сони.

8. Агар A квадрат матрица бўлса, у ҳолда қуйидаги тенгликлар ўринли:

1) $E^{|}A = E^{\bar{}}A + A^{\bar{}},$ 2) $AE^{|} = AE^{\bar{}} = A^{|},$

3) $E^{|}A^{|} = E^{\bar{}}AE^{\bar{}} = A^{0},$ 4) $A^T E^{|} = A^{|}, E^{|}A^T = A^{\bar{}},$

5) $AE^{|} = A^{\bar{}}, E^{|}A = A^{|},$ 6) $A^{\bar{}}\,E^{|} = A^{0}, E^{|}A^{\bar{}} = A.$

7) $A^{|}E^{|} = A.$

бу ерда E бирлик матрица

$$E^{|} = E^{-} = \begin{pmatrix} 00 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \\ 10 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

9. Агар А махсусмас квадрат матрица бўлса, у ҳолда

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}, \qquad (A^{-1}) = (A)^{-1}, \quad (A^{-1})^{|} = (A^{|})^{-1},$

$(A^{-1})^{-} = (A^{-})^{-1}, \qquad (A^{-1})^{0} = (A^{0})^{-1}.$

10. Агар А n-тартибли квадрат матрица, E n-тартибли бирлик матрица ва a сонли параметр бўлса, у ҳолда

$$|A^T - aE| = |A - aE| = \left|A^{\;0} - aE\right| = |A - aE|$$

11. Агар S` (A)-A матрицанинг изи бўлса, у ҳолда

S` ($A^T$)=S`(A)=S`($A^0$)=S`(A).

12. Агар rang(A)- A матрицанинг ранги бўлса, у ҳолда

$$rang\,(A^T) = rang\,(A) = rang\,(A^{|}) = rang\,(A^{-1}) = rang\,\left(A^{0}\right) = rang\,(A)$$

13. А квадрат матрица бўлиб, Δ_i, Δ^{T}_{i}, Δ_i, Δ^{0}_{i}, (Δi, Δ^{T}_{i}, Δ_i, Δ^{0}_{i}) i=1,2,…,n лар мос равишда A, A^T, A, A^0 матрицаларнинг бош минорлари (уларнинг мос тўлдирувчи минорлари) бўлсин. У ҳолда қуйидаги тенгликлар ўринли:

$$\Delta_i = \Delta^{-0}_{n-i},\ i = 1,2,\dots,n-1,\ \Delta_n = \Delta^{0}_{n} = |A| = |A^{0}|$$

$\Delta^{0}_{i} = \Delta_{n-i}$, и=1,2,…, н-1,

$$\Delta_i = \Delta^{T}_{i},\ i = 1,2,\dots,n,\ \Delta_n = \Delta^{T}_{n} = |A| = |A^T| (1.4.1)$$

$$\Delta_i = \Delta_{n-i},\ i = 1,2,\dots,\ n-1,\ \Delta_n = \Delta_n = |A| = |A| (1.4.4)$$

3-боб эса умумлашган симметрик матрицалар ва уларнинг хоссаларини ўрганишга бағишланган бўлиб, 4 та параграфдан иборат.

1- параграфда умумлашган симметрик матрицаларнинг таърифи қуйидагича келтирилган:

3-тариф. А матрица симметрик дейилади, агарда унинг хар бир элементи учун шундай элемент мавжуд бўлиб, бу элементлар жуфтликлари бирор нуқта ёки тўғри чизиққа нисбатан ўзари симметрик бўлса. Бу нуқта ёки тўғри чизиқда ётувчи элементлар ўзи ўзига симметрик дейилади.

4-тариф. А n- тартибли квадрат матрица

1) бош диагоналга нисбатан симметрик матрица дейилади, агарда A^T=A, яни a_{ij}=a_{ja} , i, j= 1,2… , n бўлса,

2) Бош бўлмаган диогоналга нисбатан симметрик матрица дейилади агарда A=A, яъни a_{ij}=$a_{n+1-j,n+1-i}$,i j=1,2... , n бўлса

3) Вертикал ўққа нисбатан симметрик матрица дейилади, агарда $A^{!}$=A, яъни a_{ij}=$a_{i,n+1-j}$, i ,j=1,2…,n бўлса,

4) горизонтал ўққа нисбатан симметрик матрица дейилади, агарда A^{-}=A, яъни a_{ij}=$a_{n+1-i,j}$, i, j=1,2… ,n бўлса,

5) матрица марказга нисбатан симметрик матрица дейилади , агарда A^{o}=A, яъни a_{ij}=$a_{n+1-i,n+1-j}$, i,j=1,2... , n бўлса,

2-параграфда эса симметрик матрицаларнинг қуйидаги хоссалари исботланган:

1. Бош ва бош бўлмаган диагоналларига нисбатан симметрик бўлган матрицалар шу матрица марказига нисбатан ҳам симметрик бўлади.

2. Вертикал ва горизонтал ўқларга нисбатан симметрик бўлган матрицалар шу матрица марказига нисбатан ҳам симметрик бўлади.

3. Вертикал (горизонтал) ўқга нисбатан симметрик бўлган матрицалар махсус матрицалар бўлади.

4. Ихтиёрий А квадрат матрица учун қуйидагилар мос равишда бош диагоналга, бош бўлмаган диагоналга, вертикал ўққа, горизонтал ўққа ва матрица марказига нисбатан симметрик матрицалар бўлади.

$S_1 = \frac{1}{2}$ (A+A^T),

$S_2 = \frac{1}{2}$ (A+A),

$S_3 = \frac{1}{2}$ (A+$A^{!}$),

$S_4 = \frac{1}{2}$ (A+A^{-}),

$S_5 = \frac{1}{2}$ (A+A^{o}),

5. Агар А квадрат матрица бош (бош бўлмаган) диагоналга, вертикал (горизонтал) ўққа, матрица марказига нисбатан симметрик матрица бўлса, у ҳолда

A^i (i=1,2,…), $\propto$A, T*AT

лар ҳам мос равишда бош бўлмаган) диагоналга, вертикал (горизонтал) ўққа, матрица марказига нисбатан симметрик матрица бўлади. Бу ерда Т-А матрица билан бир хил тартибли бўлган махсусмас квадрат матрица, $\propto$ - хақиқий сон, * - мос транспонирлаш белгисини билдиради.

6. Агар А махсусмас квадрат марица бош (бош бўлмаган) диагоналга, матрица марказига нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда A^{-1} ҳам мос равишда бош (бош бўлмаган) диагоналга, матрица марказига нисбатан симметрик бўлади.

7. Агар А ва В квадрат матрицалар ўз марказларига нисбатан симметрик матрицалар бўлса, у ҳолда АВ ва ВА матрицалар ўз марказларига нисбатан симметрик матрицалар бўлади.

8. Агар А n-тартибли квадрат матрица ўз марказига нисбатан симметрик бўлиб, $\triangle$i, i=1,2,…,n бу матрицанинг бош минорлари, $\triangle$i- шу минорларга мос тўлдирувчи минорлар бўлса, у ҳолда

$$\triangle i=\triangle_{n-i,\quad i=1,2,\ldots,n-1} \quad (2.2.1)$$

9. Агар А n-тартибли квадрат матраца ўз марказига нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда

$$\overline{\triangle}_i > 0,\ i=1,2,\ldots,\ n-1,\ \triangle_n = |A| > 0 \quad (2.2.6)$$

шартлар А матриканинг мусбат аниқланган бўлиши учун (2.2.6) шартлар қуйидаги кўринишда бўлади.

$$(-1)^i\overline{\triangle}_i > 0, i = 1,2,\ldots,\ n-1, \qquad (-1)^n\triangle_n = (-1)^n|A| > 0 \quad (2.2.8)$$

агар n – тоқ бўлса;

10. Агар А n-тартибли квадрат матрица

1) бош диагоналга

2) бош бўлмаган диагоналга

3) вертикал ўққа

4) горизонтал ўққа

5) матрица марказига нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда бу матрицани мос равишда қуйидагича блок матрицалар кўринишида ёзиш мумкин:

1) $n = 2k\ da \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1^T & A_2 \end{pmatrix}$

$$n = 2k + 1 \;\; da \;\; A = \begin{pmatrix} A_1 & a_1 & B_1 \\ a_1^T & a_{k+1,k+1} & a_2^T \\ B_1^T & a_2 & A_2 \end{pmatrix}$$

2) $n = 2k \;\; da \;\; A = \begin{pmatrix} A & C_1 \\ C_2 & A_1 \end{pmatrix}$

$$n = 2k + 1 \;\; da \;\; A = \begin{pmatrix} A_1 & a_1 & C_1 \\ a_2^T & a_{k+1,k+1} & a_1^T \\ C_1^T & a_2 & A_1 \end{pmatrix}$$

3) $n = 2k \;\; da \;\; A = \begin{pmatrix} A_1 & A_1^1 \\ A_2 & A_2^1 \end{pmatrix}$

$$n = 2k + 1 \;\; da \;\; A = \begin{pmatrix} A_1 & a_1 & A_1^1 \\ a_1^T & a_{k+1,k+1} & (0_2^T)^1 \\ A_2 & a_2 & A_2^1 \end{pmatrix}$$

4) $n = 2k \;\; da \;\; A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_1^1 & B_1^1 \end{pmatrix}$

$$n = 2k + 1 \;\; da \;\; A = \begin{pmatrix} A_1 & a_1 & B_1 \\ a_1^T & a_{k+1,k+1} & (a_2^T) \\ A_1^- & a_2^- & B_1^- \end{pmatrix}$$

5) $n = 2k \;\; da \;\; A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1^0 & A_1^0 \end{pmatrix}$

$$n = 2k + 1 \;\; da \;\; A = \begin{pmatrix} A_1 & a_2 & B_1 \\ a_1^T & a_{k+1,k+1} & (a_1^T)^0 \\ B_1^0 & a_2^0 & A_1^0 \end{pmatrix}$$

бу ерда барча блок матрицалар k- тартибли

$$a_1 = (a_{k+1,1}, \; a_{k+1,2}, \dots a_{k+1,k})^T,$$

$$a_2 = (a_{k+1,k+2}, \; a_{k+1,k+3}, \dots a_{k+1,n})^T.$$

3-параграфда умумлашган коссосимметрик матрицаларнинг таърифи ва хоссалари қараб чиқилган.

4-параграфда умумлашган ортаганал матрицаларнинг таърифи ва хоссалари қараб чиқилган.

I-БОБ

МАТРИЦАЛАР АЛГЕБРАСИ

§1.1 n ўлчовли арифметик фазо

1.1-таъриф. $F =< F;+,\cdot,-,^{-1},0,1 >$ ихтиёрий майдон бўлиб, F унинг асосий тўплами бўлсин. F^n тўғри кўпайтманинг ихтиёрий $\vec{a}=(a_1, a_2,..., a_n)$ элементи n - ўлчовли арифметик вектор дейилади.

$a_1, a_2,..., a_n$-сонлар $\vec{a}$ векторнинг мос равишда 1-, 2- . . . n- координаталари, n натурал сон эса унинг ўлчови дейилади.

Мактаб геометрия курсидан маълумки, текисликдаги вектор $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ва фазодаги вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ кўринишда бўлиб, уларнинг координаталари ҳақиқий сонлардан иборат. Ҳақиқий сонлар тўплами майдон ташкил этади. Демак, Декарт координаталар системаси ёрдамида ифодаланувчи текисликда олинган векторлар 2 ўлчовли, фазода олинган векторлар 3 ўлчовли арифметик векторга мисол бўлади.

1.2-таъриф. F^n нинг ихтиёрий иккита $\vec{a} = (a_1, a_2,..., a_n)$ ва $\vec{b} = (b_1, b_2,..., b_n)$ векторлари учун $a_1 = b_1, a_2 = b_2,..., a_n = b_n$ бўлса, берилган векторлар тенг дейилади.

1.3-таъриф. F^n нинг ихтиёрий иккита $\vec{a} = (a_1, a_2,..., a_n)$ ва $\vec{b} = (b_1, b_2,..., b_n)$ векторларининг йиғиндиси деб $\vec{a}+\vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2,..., a_n + b_n)$ векторга айтилади.

Агар $a_i + b_i = c_i, i = 1,..., n$ ва $\vec{c} = (c_1,..., c_n)$ белгилашларни қўлласак, у ҳолда $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ҳосил бўлади. F тўплам қўшишга нисбатан ёпиқ эканлигидан, арифметик векторларнинг йиғиндиси арифметик вектор бўлади. яъни F^n қўшиш амалига нисбатан ёпиқ тўплам бўлади.

1.4-таъриф. $\forall \lambda \in F$ скалярни $\forall \vec{a} \in F^n$ векторга кўпайтириш деб $\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2,..., \lambda a_n)$ векторга айтилади.

F тўплам кўпайтириш амалига нисбатан ёпиқ эканлигидан, F^n тўпламнинг скалярни векторга кўпайтириш амалига нисбатан ёпиқ тўплам эканлиги келиб чиқади. Скалярни векторга кўпайтириш амали одатда $\omega_\lambda(\vec{a}) = \lambda \vec{a}$ кўринишда ёзилади. $\forall \vec{a} \in F^n$

векторга $\exists \lambda\vec{a} \in F^n$ вектор мос қўйилганлиги учун, скалярни векторга кўпайтириш амали F^n да унар амал бўлади.

1.5-таъриф. F^n тўплам, унда аниқланган қўшиш бинар амали ва скалярни векторга кўпайтириш унар амаллари ёрдамида ҳосил қилинган $F^n =< F^n;+,\{\omega_\lambda \mid \lambda \in F\} >$ алгебра F майдон устида қурилган n – ўлчовли арифметик вектор фазо дейилади.

1.1-теорема. F^n да аниқланган қўшиш ва скалярни векторга кўпайтириш амаллари қуйидаги хоссаларга эга:

1°. $\forall(\vec{a},\vec{b} \in F^n)(\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a})$ - қўшишнинг коммутативлик хоссаси;

2°. $\forall(\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in F^n)((\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}))$ - қўшишнинг ассоциативлик хоссаси;

3°. $\forall(\vec{a} \in F^n)(\vec{a}+\vec{0} = \vec{a})$ (қўшишга нисбатан нейтрал элемент мавжуд);

4°. $\forall(\vec{a} \in F^n)(\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0})$ (қўшиш амалига нисбатан симметрик элемент мавжуд);

5^0.$\forall(\lambda \in F) \wedge \forall(\vec{a} \in F^n)(\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b})$ (скалярни векторлар йиғиндисига кўпайтириш дистрибутив);

6^0.$\forall(\lambda,\mu \in F) \wedge \forall(\vec{a} \in F^n)((\lambda\cdot\mu)\vec{a} = \lambda(\mu(\vec{a})))$ (скалярлар кўпайтмасини векторга кўпайтириш ассоциатив);

7^0.$\forall(\lambda,\mu \in F) \wedge \forall(\vec{a} \in F^n)((\lambda+\mu)(\vec{a}) = (\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}))$ (скалярлар йиғиндисини векторга кўпайтириш дистрибутив;

8^0.$\forall(\vec{a} \in F^n)(1\cdot\vec{a} = \vec{a})$.

1.6-таъриф. **F** = < F; +, ·, -, $^{-1}$, 0,1 > майдон устида $B\neq\varnothing$ тўплам берилган бўлиб, унда қуйидаги шартлар бажарилса,

B = < B; +, $\{\omega_\alpha \mid \alpha\in F\}$ > алгебрага **F** майдон устида қурилган чизиқли фазо дейилади:

1. $\forall$а,б $\in$ B $\Rightarrow$ а + б $\in$ B;
2. $\forall$а,б $\in$ B $\Rightarrow$ а + б = б + а;
3. $\forall$а,б,с $\in$ B $\Rightarrow$ (а + б) + с = а + (б + с);
4. $\forall$а $\in$ B $\wedge$ $\exists$ е $\in$B $\Rightarrow$ а + е =а (э=0);
5. $\forall$а $\in$ B $\wedge$ $\exists$ аъ $\in$B $\Rightarrow$ а + аъ =0 (аъ=-а);

6. $\forall a \in B \wedge \forall \alpha \in F \Rightarrow \omega_\alpha(a)=\alpha a \in B$;

7. $\forall a,б \in B \wedge \forall \alpha \in F \Rightarrow \alpha(a+б)=\alpha a+\alpha б$;

8. $\forall a \in B \wedge \forall \alpha,\beta \in F \Rightarrow (\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$;

9. $\forall a \in B \wedge \forall \alpha,\beta \in F \Rightarrow (\alpha\beta)a=\alpha(\beta a)$;

10. $\forall a \in B \Rightarrow$ 1™a=a.

1.7-таъриф. $F^n = < F^n;+,\{\omega_\lambda \mid \lambda \in F\} >$ n - ўлчовли арифметик вектор фазо берилган бўлсин. F^n нинг ихтиёрий бўш бўлмаган қисм тўплами $F^k (k \le n)$ арифметик вектор фазо ташкил қилса, F^k арифметик вектор фазога F^n арифметик ветор фазонинг фазоостиси (қисм фазоси) дейилади.

R^1, R^2, R^3 лар ҳақиқий сонлар майдони устида қурилган арифметик вектор фазолар ва R^1 фазо R^2, R^3 фазоларга; R^1, R^2 фазолар R^3 фазога фазоости бўлади.

$F = < F;+,\cdot,-,^{-1},0,1 >$ майдон устида қурилган $F^n = < F^n;+,\{\omega_\lambda \mid \lambda \in F\} >$ арифметик вектор фазо берилган бўлсин.

1.8-таъриф. F^n вектор фазонинг векторларидан иборат $\vec{a}_1, \vec{a}_2,..., \vec{a}_n,...$ системага векторларнинг чексиз системаси; $\vec{a}_1, \vec{a}_2,..., \vec{a}_n$ системага векторларнинг чекли системаси дейилади.

1.9-таъриф. F^n вектор фазонинг $\vec{a}_1, \vec{a}_2,..., \vec{a}_n,...$ системаси ва F майдоннинг $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n,...$ скалярлари берилган бўлсин. $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n + ...$ ифодага $\vec{a}_1, \vec{a}_2,..., \vec{a}_n,...$ векторлар системасининг чизиқли комбинацияси дейилади. Чизиқли комбинациядаги $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n,...$ скалярлар чизиқли комбинациянинг коэффициентлари дейилади.

1.1-мисол. $\vec{a} = (1,2,3), \vec{b} = (-1,2,4), \vec{c} = (7,-5,2)$ векторлар ва $\alpha = -2, \beta = 5, \gamma = 9$ скалярлар берилган бўлса, уларнинг чизиқли комбинациясини қуйидагича аниқлаймиз:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = (-2)(1,2,3) + 5(-1,2,4) + 9(7,-5,2) = (-2,-4,-6) + (-5,10,20) +$$
$$+(63,-45,18) = (56,-39,32).$$

1.10- таъриф. F сонлар майдони устида қурилган F^n арифметик вектор фазонинг чекли сондаги

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2,..., \vec{a}_n \qquad (1)$$

векторлари учун F майдонда камида биттаси нолдан фарқли шундай $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ скалярлар топилиб, улар учун ушбу

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0} \qquad (2)$$

тенглик бажарилса, у холда (1) система векторларнинг чизиқли боғланган системаси дейилади. Агар (2) тенглик $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, ..., \lambda_n = 0$ бўлганда бажарилса, у холда (1) векторларнинг чизиқли боғланмаган (чизикли эркли) системаси дейилади.

Векторларнинг бош системаси чизиқли боғланмаган система ҳисобланади.

1.11-таъриф. Агар исталган $\lambda_i \left(i = \overline{1, n}\right)$ сонлар учун ушбу

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_n \vec{a}_n \qquad (3)$$

тенглик бажарилса, у холда $\vec{a}$ вектор $\vec{a}_i (i = \overline{1, n})$ векторлар орқали чизиқли ифодаланади ($\vec{a}$ вектор $\vec{a}_i (i = \overline{1, n})$ векторларнинг чизиқли комбинациясидан иборат) дейилади.

1.2-мисол. $\vec{e}_1=(1,0,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$, $\vec{e}_3=(0,0,1)$ векторлар системаси чизиқли эркли векторлар системаси эканлигини исботланг.

Ҳақиқатдан ҳам, $\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\alpha_3\vec{e}_3=\alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(0,1,0)+\alpha_3(0, 0,1)= =(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(0,0,0)$ бўлиб, бундан $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=0$ келиб чиқади. Демак, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторлар системаси чизиқли боғланмаган система бўлади.

1.3-мисол. F^n арифметик вектор фазонинг $\vec{e}_1 = (1, 0, ..., 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., \vec{e}_n (0, ..., 0, 1)$ векторларидан иборат система чизиқли боғланмаган. Бу система n-ўлчовли бирлик векторлардан иборат система.

1.2-теорема. Камида битта нол векторга эга векторларнинг $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ чекли системаси чизиқли боғланган система бўлади.

Исбот. $\vec{a}_i$ вектор нол вектор бўлсин. У ҳолда ҳар қандай нолдан фарқли λ_i скаляр учун $0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + ... + \lambda_i \cdot \vec{0} + ... + 0 \cdot \vec{a}_m = \vec{0}$ тенглик бажарилади. Демак, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ система чизиқли боғланган система.

1.3-теорема. Чекли векторлар системасининг бирор-бир қисми чизиқли боғланган бўлса, системанинг ўзи ҳам чизиқли боғланган бўлади.

1.4-теорема. Векторларнинг чизиқли боғланмаган системасининг ҳар қандай қисм системаси чизиқли боғланмаган система бўлади.

1.5-теорема. Агар $\vec{a}_2,..., \vec{a}_n$ векторлардан камида биттаси ўзидан олдинги векторларнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлса, у ҳолда $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ бўлган $\vec{a}_1, \vec{a}_2,..., \vec{a}_n$ векторлардан иборат система чизиқли боғланган бўлади.

1.6-теорема. Агар $\vec{a}_1, \vec{a}_2,..., \vec{a}_n$ векторларнинг системаси чизиқли боғланмаган бўлиб, $\vec{a}_1, \vec{a}_2,..., \vec{a}_n \vec{b}$ система чизиқли боғланган бўлса, у ҳолда $\vec{b}$ вектор $\vec{a}_1, \vec{a}_2,..., \vec{a}_n$ векторлар системаси орқали ягона усулда чизиқли ифодаланади.

1.7-теорема. Агар $\vec{a}$ вектор $\vec{b}_1, \vec{b}_2,..., \vec{b}_n$ орқали ва $\vec{b}_i\,(i = \overline{1,n})$ векторлар $\vec{c}_1, \vec{c}_2,..., \vec{c}_m$ векторлар орқали чизиқли ифодаланса, у ҳолда $\vec{a}$ вектор $\vec{c}_1, \vec{c}_2,..., \vec{c}_m$ векторлар орқали чизиқли ифодаланади.

1.8-теорема. Агар $\vec{a}_1,..., \vec{a}_{n+1}$ векторлар $\vec{b}_1, \vec{b}_2,..., \vec{b}_n$ векторлар орқали чизиқли ифодаланса, у ҳолда $\vec{a}_1,..., \vec{a}_{n+1}$ система чизиқли боғланган бўлади.

1.1-натижа. Агар $\vec{a}_1, \vec{a}_2,..., \vec{a}_n$ векторлар $\vec{b}_1, \vec{b}_2,..., \vec{b}_m$ система орқали чизиқли ифодаланса ва $n > m$ бўлса, у ҳолда $\vec{a}_1, \vec{a}_2,..., \vec{a}_n$ система чизиқли боғланган бўлади.

1.2-натижа. Агар $\vec{a}_1, \vec{a}_2,..., \vec{a}_n$ векторлар $\vec{b}_1, \vec{b}_2,..., \vec{b}_m$ система орқали чизиқли ифодаланса ва $\vec{a}_1, \vec{a}_2,..., \vec{a}_n$ система чизиқли боғланмаган бўлса, у ҳолда $n \leq m$ бўлади.

1.3-натижа. n-ўлчовли арифметик вектор фазонинг ҳар қандай n дан ортиқ векторлардан иборат системаси чизиқли боғланган бўлади.

1.4-мисол. R^3 да $\vec{a}$ (1; 2; 3), $\vec{b}$ (-1; 0; 3), $\vec{c}$ (2; 1; -1) , $\vec{d}$ (3; 2; 2) векторлар системаси берилган. Унинг чизиқли боғланган ёки чизиқли боғланмаганлигини текширамиз.

$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} + \delta \vec{d} = \vec{0}$ тенгламадан $\alpha = -\frac{1}{4}; \beta = \frac{7}{4}; \gamma = \frac{5}{2}; \delta = -1$ эканлигини топамиз. Демак, таърифга кўра берилган система чизиқли боғланган. Ҳақиқатдан ҳам, $\vec{d} = -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{7}{4}\vec{b} + \frac{5}{2}\vec{c}$, яъни системанинг битта вектори қолганларининг чизиқли комбинацияси кўринишида ифодаланади.

$F =< F;+,\cdot,-,^{-1},0,1 >$ майдон устида қурилган $F^n =< F^n;+,\{\omega_\lambda \mid \lambda \in F\} >$ арифметик вектор фазо ва шу фазо векторларидан тузилган S ва T чекли системалар берилган бўлсин.

1.12-таъриф. Агар S ва T системаларнинг ихтиёрий биридан олинган ҳар қандай нолдан фарқли векторни иккинчи система векторларининг чизиқли комбинацияси сифатида ифодалаш мумкин бўлса, бундай системалар эквивалент системалар дейилади ва $R \sim T$ кўринишда белгиланади.

Векторларнинг чекли системалари тўпламида аниқланган $\sim$ бинар муносабат рефлексивлик, симметрилик, транзитивлик хоссаларига эга бўлганлиги учун эквивалентлик бинар муносабати бўлади.

1.5-мисол. Векторларнинг бўш системаси ўзига ҳамда нол векторлардан иборат системага эквивалент.

1.9-теорема. Агар векторларнинг ҳар қандай чизиқли эркли иккита чекли системалари эквивалент бўлса, улардаги векторлар сони тенг бўлади.

1.13-таъриф. Векторлар чекли системасини элементар алмаштиришлар деб қуйидаги алмаштиришларга айтилади:

1) системанинг қандайдир бир векторини нолдан фарқли скалярга кўпайтириш;

2) системанинг скалярга кўпайтирилган бир векторини иккинчи векторига қўшиш ёки айириш;

3) нол векторни системадан чиқариш ёки системага киритиш.

1.10-теорема. Агар векторларнинг бир чекли системаси иккинчи системани элементар аламаштиришлар натижасида ҳосил қилинган бўлса, бундай системалар эквивалент бўлади.

1.14-таъриф. Векторлар чекли системасининг чизиқли эркли, бўш бўлмаган қисм системаси ёрдамида системанинг ҳар қандай векторини чизиқли ифодалаш мумкин бўлса, бундай қисм системага берилган системанинг базиси дейилади.

1.11-теорема. Камида битта нолдан фарқли векторга эга бўлган ҳар қандай чекли система базисга эга. Векторлар чекли системасининг ҳар қандай иккита базиси бир хил сондаги векторлардан иборат бўлади.

1.15-таъриф. Векторлар чекли системасининг ихтиёрий базисидаги векторлар сонига унинг ранги дейилади.

Нол векторлардан иборат системанинг ва бўш системанинг ранги нолга тенг деб ҳисобланади.

1.6-мисол. $\vec{a}(1;\ 2;\ 3)$, $\vec{b}(-1;\ 0;\ 3)$, $\vec{c}(2;\ 1;\ -1)$, $\vec{d}(3;\ 2;\ 2)$ векторлардан иборат системанинг базисларидан бири $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлардан ташкил топган. Демак, берилган системанинг ранги 3 га тенг.

1.12-теорема. $\vec{a}_2,..., \vec{a}_n$ векторлар системаси $\vec{b}_1, \vec{b}_2,..., \vec{b}_m$ векторлар системаси орқали чизиқли ифодаланса, у ҳолда $\vec{a}_2,..., \vec{a}_n$ системанинг ранги $\vec{b}_1, \vec{b}_2,..., \vec{b}_m$ системанинг рангидан катта эмас.

1.7-мисол. $\vec{a}$ (1; 2; 3), $\vec{b}$ (-1; 0; 3), $\vec{c}$ (2; 1; -1), $\vec{d}$ (3; 2; 2) векторлардан иборат системанинг ранги 3 га тенг. Унинг қисм системаси сифатида $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлардан ташкил топган системани олсак, у чизиқли боғланмаган бўлганлиги сабабли ранги 3 га тенг. Берилган системанинг ихтиёрий битта векторидан иборат система чизиқли боғланмаган ва ранги 1 га тенг қисм система бўлади.

1.13-теорема. Векторлар чекли системасининг ҳар қандай қисм системасининг ранги система рангидан катта эмас.

1.14-теорема. Векторлар эквивалент чекли системаларининг ранглари тенг.

1.15-теорема. n-ўлчовли арифметик вектор фазони ҳар қандай чекли системасининг ранги n данката эмас.

1.16-теорема. Агар векторлар чекли системасининг ранги n га тенг бўлса, у ҳолда унинг k та вектордан иборат ҳар қандай қисм системаси $k > n$ бўлганда чизиқли боғланган бўлади.

1.17-теорема. Агар $\vec{a}_2,..., \vec{a}_n$ векторларнинг системасининг ранги $\vec{a}_2,..., \vec{a}_n, \vec{b}$ векторлар системасининг рангига тенг бўлса, у ҳолда $\vec{b}$ векторни $\vec{a}_2,..., \vec{a}_n$ векторлар системасининг чизиқли комбинацияси кўринишида ифодалаш мумкин.

§1.2 Матрица ранги ва уни хисоблаш.

$F =< F;+,\cdot,-,^{-1},0,1 >$ майдон берилган бўлсин.

1.16-таъриф. F майдоннинг mn та a_{ij} (i=$\overline{1, m}$, j=$\overline{1, n}$) элементларидан тузилган ушбу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

кўринишдаги жадвал Ф майдон устидаги $m \times n$ тартибли матрица дейилади.

Матрица A,B,C,... ҳарфлар орқали белгиланади. a_{ij}лар матрицанинг элементлари дейилади. a_{ij} элемент, матрицанинг i-сатри, j-устуни кесишмасидаги элемент. Матрицада

$m>n$, $m<n$, $m=n$ бўлиши мумкин. Агар матрицада $m=n$ бўлса, у холда бундай матрица н-тартибли квадрат матрица дейилади.

1.17-таъриф. А ва В матрицалар берилган бўлиб, уларнинг мос равишда сатрлари ва устунлари сони тенг бўлса, у холда А ва В матрицалар номдош матрицалар деб юритилади.

Масалан, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ ва $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 22 & 6 \\ 6 & -3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалар 4×5 тартибли матрицалар, яъни улар номдош матрицалар.

1.18-таъриф. А матрицанинг ҳар бир a_{ij} элементи В матрицанинг унга мос $б_{иж}$ элементига тенг бўлса, у ҳолда А ва В номдош матрицалар тенг (акс холда тенг эмас) матрицалар дейилади.

$A^i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$ матрицага н та сатрли, 1 та устунли, $A_j = \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \end{pmatrix}$ матрицага 1 та сатрли, n та устунли матрица дейилади. Битта сатрли матрицаларни сатр векторлар, битта устунли матрицаларни устун векторлар деб қараш мумкин.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матрицада $\overline{A_1},..., \overline{A_m}$ сатр векторлар ва $\overline{A^1},..., \overline{A^n}$ устун векторлар мавжуд.

1.19-таъриф. Матрицадаги сатр векторлар системасининг рангига матрицанинг сатр ранги, устун векторлар системасининг рангига унинг устун ранги дейилади. А матрицанинг сатр рангини $r(A)$, устун рангини $\rho(A)$ кўринишда белгилаймиз.

Матрица рангини аниқлаш учун матрица устида элементар алмаштиришлар бажарилади. Улар қуйидагилар:

1. Матрицадаги ихтиёрий иккита сатр ёки устун ўринларини алмаштириш.

2. Матрицадаги ихтиёрий сатр ёки устун элементларини нолдан фарқли сонга купайтириш.

3. Матрицанинг сатр ёки устун элементларини нолдан фарқли сонга кўпайтириб, бошқа сатр ёки устуннинг мос элементларига қўшиш.

4. Барча элементлариноллардан иборат булган сатр ёки устунни матрицадан чиқариш.

$$1.\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$2.\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix};$$

$$3.\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & 6 \end{pmatrix};$$

$$4.\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.18-теорема. Элементар алмаштиришлар матрица рангини ўзгартирмайди.

Матрицани элементар алмаштиришлар натижасида унинг сатр (устун) векторлари системасида элементар алмаштиришлар бажарилади. Маълумки, векторларнинг чекли системасини элементар алмаштиришлар натижасида ундаги чизиқли эркли векторлар сони ўзгармайди, яъни векторлар системасининг ранги ўзгармайди. Шунинг учун матрицани элементар алмаштиришлар натижасида унинг ранги ўзгармайди.

1.20-таъриф. Матрица сатрининг бошловчи элементи деб унинг биринчи (чапдан ўнгга қараганда) нолдан фарқли элементига айтилади.

1.21-таъриф. Матрица поғонасимон дейилади, агар унинг нол қаторлари барча нолмас қаторлардан кейин жойлашган ва $\alpha_{1k_1}, \alpha_{2k_2}, \dots, \alpha_{rk_r}$ бошловчи элементлари учун $k_1 < k_2 < \dots < k_r$ бўлса.

Масалан, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ матрица поғонасимон матрица эмас.

Чунки, 3-, 4- сатрларидаги нолдан фарқли (чапдан ўнгга) биринчи элементлар 3-устунда жойлашган. Бу матрицанинг 3-сатрини (-2) га кўпайтириб, 5 га кўпайтирилган 4-сатрга қўшамиз:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4-, 5-сатрларнинг бошловчи элементлари 4-устунда бўлганлиги учун яна элементар алмаштириш бажарамиз. 4-устунни 3га, 5-устунни 11га кўпайтириб, уларни қўшамиз:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 112 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ҳосил бўлган матрицанинг 5-сатрини 112га бўламиз ва уни (-4)га кўпайтириб, 6-сатрга қўшамиз:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 112 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ҳосил бўлган охирги матрица поғонасимон матрица.

1.19-теорема. Ҳар қандай $m \times n$ тартибли матрица сатр элементар алмаштиришлар натижасида $m \times n$ тартибли поғонасимон матрицага эквивалент бўлади.

1-мисол. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$ матрицанинг рангини топиш учун унинг учта сатр векторларидан иборат векторлар системанинг рангини аниқлаймиз. Нол вектор чизиқли боғлиқ бўлганлиги ва векторлар системасидан нол векторни чиқариш унинг рангини ўзгартирмаганлиги учун, иккинчи қаторни матрицадан чиқарамиз. Векторлар системасини элементар алмаштириш натижасида берилган системага эквивалент система ҳосил бўлишини эътиборга олсак, берилган матрицага эквивалент $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$ матрица ҳосил бўлади. Устун нол векторларни матрицадан чиқариб $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$ матрицага эга бўламиз. Матрица рангини аниқлаш жараёнида устун ва сатр векторлар системасида элементар алмаштиришларни бажариш мумкин. Ҳосил қилинган матрицада иккита чизиқли боғланмаган сатр ҳамда устун векторлар системалари келиб чиқди. Демак берилган матрицанинг сатр ранги $r(A)$ =2 ва унинг устун ранги $\rho(A)$ =2.

2-мисол. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ ~ (биринчи ва иккинчи сатрларни қўшиб, биринчи сатр ўрнига ёзамиз) ~ $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ ~ (биринчи сатр элементлари $\frac{1}{4}$ га кўпайтирилган) ~ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ ~ (биринчи ва иккинчи сатрлар тенг бўлганлиги учун бирини қолдирамиз) ~ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Берилган матрицани сатр векторлар системасини элементар алмаштиришлар натижасида унинг сатр ранги $r(A)$ =2 эканлиги келиб чиқади.

§1.3 Матрицаларни қўшиш ва айириш

$F =< F;+,\cdot,-,^{-1},0,1 >$ майдон ва майдон устида матрицалар тўплами берилган бўлсин.

1.22-таъриф. Матрицанинг сатр ва устунлари сони тенг бўлса, бундай матрицага квадрат матрица дейилади.

Квадрат матрицаларнинг турлари:

Учбурчак матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1н} \\ 0 & a_{22} & . & . & . & a_{2н} \\ & . & . & . & . & . \\ & . & . & . & . & . \\ & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & a_{нн} \end{pmatrix}$$

Бирлик матрица

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & 1 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Диагонал матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & . & . & . & 0 & 0 \\ & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & \\ 0 & 0 & . & . & . & a_{н-1н-1} & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & a_{нн} \end{pmatrix}$$

Симметрик матрица $(a_{ij}=a_{ji}$, i=1,…,n; j=1,…,m)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & a_{m-1} \\ a_{m1} & . & . & . & a_{m-1} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Кососимметрик матрица (a_{ij}= - a_{ji} , i=1,…,n; j=1,…,m)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} & . & . & . & -a_{1\text{н}} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & -a_{\text{н}-1\text{н}} \\ a_{\text{н}1} & . & . & . & a_{\text{нн}-1} & a_{\text{нн}} \end{pmatrix}$$

1.23-таъриф. $\forall A,B\in F^{mxn} \Rightarrow A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}$ i=1,. . .,m; j=1,…,n.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1\text{н}} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2\text{н}} \\ & . & . & . & . & . & . \\ & . & . & . & . & . & . \\ & . & . & . & . & . & . \\ a_{\text{м}1} & a_{\text{м}2} & . & . & . & a_{\text{мн}} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} \text{в}_{11} & \text{в}_{12} & . & . & . & \text{в}_{1\text{н}} \\ \text{в}_{11} & \text{в}_{12} & . & . & . & \text{в}_{1\text{н}} \\ & . & . & . & . & . & . \\ & . & . & . & . & . \\ & . & . & . & . & . & . \\ \text{в}_{\text{м}1} & \text{в}_{\text{м}2} & . & . & . & \text{в}_{\text{мн}} \end{pmatrix}$$

1.24-таъриф. $\forall$ $A,B \in F^{mxn}$, $A+B=C$, $C\in F^{mxn}$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ & . & . & . & . & . & . \\ A_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} \text{в}_{11} & \text{в}_{12} & \dots & \text{в}_{1n} \\ \text{в}_{21} & \text{в}_{22} & \dots & \text{в}_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ B_{m1} & \text{в}_{m2} & \dots & \text{в}_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+\text{в}_{11} & a_{12}+\text{в}_{12} & \dots & a_{1\text{н}}+\text{в}_{1\text{н}} \\ a_{21}+\text{в}_{21} & a_{22}+\text{в}_{22} & \dots & a_{2\text{н}}+\text{в}_{2\text{н}} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ & & & \end{pmatrix} = \left| \begin{array}{l} \forall a,\text{в} \in F \\ a+\text{в} = c \\ a_{ij} \cdot \text{в}_{ij} = c_{ij} \wedge c_{ij} \in F = \end{array} \right|$$

$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n$$

$$A_{m1} + в_{m1} \quad a_{m2} + в_{m2} \ldots a_{mн} + в_{mн}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1н} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2н} \\ \ldots & & & \\ \ldots & & & \\ \ldots & & & \\ c_{м1} & c_{м2} & \ldots & c_{мн} \end{pmatrix} = C \quad F^{mxn}.$$

1-мисол.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & -4 & 6 \\ 1 & -5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad A+B=C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 & 7 \\ -2 & 8 & 2 & 9 \\ 1 & -6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

1.20-теорема. Матрицаларни қўшиш амали қуйидаги хоссаларга эга:

1. $\forall\ A,B \in F^{\,mxn} \Rightarrow A + B = B + A$ (коммутативлик).
2. $\forall\ A,B,C \in F^{\,mxn} \Rightarrow (A+B)+C = A + (B + C)$ (ассоциативлик).
3. $A \in F^{\,mxn},\ \exists\ X \in F^{\,mxn} \Rightarrow A + X = A$ (X=O-нейтрал).
4. $\forall\ A \in F^{\,mxn},\ \exists A` \in F^{mxn} \Rightarrow A+A` = O$ ($A`=-A$ - симметрик).

1.25-таъриф. $\forall A \in F^{mxn} \wedge \forall\ \alpha \in F \Rightarrow \omega_\alpha(A) = \alpha\, A = B \in F^{mxn}$.

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1н} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2н} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{м1} & a_{м2} & \dots & a_{мн} \end{pmatrix} \qquad \alpha A = \alpha \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1н} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2н} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{м1} & a_{м2} & \dots & a_{мн} \end{matrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1н} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2н} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{м1} & \alpha a_{м2} & \dots & \alpha a_{мн} \end{pmatrix} = B \in F^{mxn}.$$

3.2-мисол.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad (-4)A = \begin{pmatrix} -12 & -16 \\ -4 & 12 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}$$

1.21-теорема. Скалярни матрицага кўпайтириш қуйидаги хоссаларга эга:

1. $\forall A \in F^{mxn} \wedge \forall\ \alpha,\beta \in F \Rightarrow (\alpha+\beta)A = \alpha A+\beta A.$
2. $\forall A \in F^{mxn} \wedge \forall\ \alpha,\beta \in F \Rightarrow (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A).$
3. $\forall A, B \in F^{mxn} \wedge \forall\ \alpha \in F \Rightarrow \alpha(A+B) = \alpha A+\alpha B.$
4. $\forall A \in F^{mxn} \wedge \forall\ \alpha \in F \Rightarrow \alpha A = A\alpha.$

§ 1.4 Матрицаларни кўпайтириш

1.26-таъриф. $\forall\ A \in F^{mxn}$, $\forall\ B \in F^{nxk} \Rightarrow A{\cdot}B=C,\ C\in F^{mxк}$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1н} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2н} \\ & \ldots\ldots & & \\ \ldots\ldots & & & \\ & \ldots\ldots & & \\ a_{м1} & a_{м2} & \ldots & a_{мн} \end{pmatrix} \quad Б=\begin{pmatrix} в_{11} & в_{12} & \ldots & в_{1к} \\ в_{21} & в_{22} & \ldots & в_{2к} \\ & \ldots\ldots & & \\ \ldots\ldots & & & \\ & \ldots\ldots & & \\ в_{н1} & в_{н2} & \ldots & в_{нк} \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1к} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2к} \\ & \ldots & & \\ & \ldots & & \\ & \ldots & & \\ c_{м1} & c_{м2} & \ldots & c_{мк} \end{pmatrix}$$

$A_i \cdot B^j = a_{i1}\, в_{1j} + a_{i2}\, в_{2j} + \ldots + a_{in} в_{nj} = c_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$; $j=1, \ldots, k$

1-мисол.

$$A^{3x4} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B^{4x2} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 7 \\ 1 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot2+3\cdot0+(-1)\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot4+3\cdot7+(-1)\cdot(-5)+2\cdot2 \\ (-2)\cdot2+1\cdot0+6\cdot1+3\cdot3 & (-2)\cdot4+1\cdot7+6\cdot(-5)+3\cdot2 \\ 0\cdot2+(-1)\cdot0+2\cdot1+4\cdot3 & 0\cdot4+(-1)\cdot7+2\cdot(-5)+4\cdot2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 34 \\ 11 & -25 \\ 14 & -9 \end{pmatrix} = C^{3x2}$$

1.22-теорема. Матрицаларни кўпайтириш амали қуйидаги хоссаларга эга:

1. $\exists A\bullet B\in F^{mxk} \wedge \exists B\bullet C\in F^{kxc} \Rightarrow (A\bullet B)\bullet C=A\bullet(B\bullet C)$ (ассоциативлик).

2. $\forall\ A\in F^{mxn} \wedge \forall B,C\in F^{\,nxk} \Rightarrow A\bullet(B+C)=A\bullet B+A\bullet C$ (йиғиндини чапдан кўпайтириш);

3. $\forall A,B\in F^{mxn} \wedge \forall C\in F^{\,нхк} \Rightarrow (A+B)\bullet C = A\bullet C + B\bullet C$ (йиғиндини ўнгдан кўпайтириш);

4. $\forall\alpha\in F, \forall A\in F^{mxn}, \forall B\in F^{нхк} \Rightarrow \alpha\cdot(A\cdot B) = (\alpha\cdot A)\cdot B$.

2-мисол. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалар кўпайтмасини топинг.

$$A\cdot B = \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1\\ 4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1\\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 8 & 16 & 4\\ 6 & 12 & 3\end{pmatrix}.$$

$$B\cdot A = \begin{pmatrix}2 & 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} = 2\cdot 1 + 4\cdot 4 + 1\cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

3-мисол. $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ матрицалар ва

$\alpha = 2$ скалярлар учун $A^{T}\cdot B+\alpha\cdot C$ ни топинг.

Ечиш: $A^{T} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & -4\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$;

$$A^{T}\cdot Б = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & -4\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 1\cdot 2\\ 0\cdot 1 + 4\cdot 3 - 4\cdot 2\\ 3\cdot 1 + 1\cdot 3 + 2\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\4\\10\end{pmatrix};$$

$$\alpha\cdot C = \begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix}; \qquad A^{T}\cdot B+\alpha\cdot C = \begin{pmatrix}9\\4\\10\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\8\\12\end{pmatrix}.$$

§ 1.5 Тескари матрица ва уни хисоблаш.

$F =< F;+,\cdot,-,^{-1},0,1>$ майдон ва майдон устида матрицалар тўплами берилган бўлсин.

1.27-таъриф. Шундай, X ва A n-тартибли квадрат матрицалар берилган бўлиб, улар учун XA = AX = E (E – n-тартибли бирлик матрица) шарт бажарилса, у ҳолда X матрицага A матрицага тескари матрица дейилади ва A^{-1} кўринишда белгиланади.

Тескари матрицага эга матрица тескариланувчи матрица дейилади.

Тескари матрицани топишнинг умумий йўлини кўриб чиқамиз.

Таърифга кўра : AX = E $\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot x_{kj} = e_{ij}$, i=($\overline{1,n}$), j=($\overline{1,n}$), бу ерда $i \neq j$ бўлса, $e_{ij} = 0$ ва $i = j$ бўлса, $e_{ij} = 1$ бўлади.

Натижада қуйидаги тенгламалар системаси ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + \ldots + a_{1n}x_{nj} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_{1j} + a_{j2}x_{2j} + \ldots + a_{jn}x_{nj} = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + \ldots + a_{nn}x_{nj} = 0 \end{cases},$$

ЧТСни ечиб X матрицани топамиз.

1-мисол. A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ матрица берилган бўлса, A^{-1} ни топинг.

Ечиш. AX =E, яъни тенгликдан ЧТСни тузамиз ва уни ечамиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = e_{11} = 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = e_{12} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = e_{21} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = e_{22} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 3x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} = -2 \\ x_{12} = 1 \\ x_{21} = 3/2 \\ x_{22} = -1/2 \end{cases}$$

Демак, $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

1.23-теорема. Агар берилган квадрат матрица тескариланувчи бўлса, у ҳолда унга тескари матрица ягонадир.

F майдон устида олинган тескариланувчи n-тартибли квадрат матрицалар тўпламини $GL(n, F)$ кўринишда белгилаймиз.

1.24-теорема. $< GL(n, F); \cdot, ^{-1} >$ алгебра группа бўлади.

1.25-теорема. Ҳар қандай сондаги тескариланувчи матрицалар кўпайтмаси, яна тескариланувчи матрица бўлади.

1.26-теорема. Тескари матрицалар қуйидаги хоссаларга эга:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

1.28-таъриф. Бирлик матрицадан қуйидаги элементар алмаштиришларнинг бири ёрдамида ҳосил қилинган матрицага элементар матрица дейилади:

1) бирлик матрица сатри (устуни)ни нолдан фарқли скалярга кўпайтириш.

2) бирлик матрица бирор бир сатри (устуни) га нолдан фарқли скалярга кўпайтирилган сатр (устун)ни қўшиш ёки айириш.

E бирлик матрицада бажарилган φ сатр элементар алмаштириш 1) ёки 2) кўринишдаги элементар алмаштириш бўлса, у ҳолда ҳосил бўлган элементар матрицани E_{φ} кўринишда белгилаймиз.

2-мисол. Қуйидаги матрицалар иккинчи тартибли элементар матрицалар:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$. Бу ерда λ -нолдан фарқли ихтиёрий скаляр.

1.27-теорема. Ҳар қандай элементар матрица тескариланувчи. Элементар матрицага тескари матрица, элементар.

1.28-теорема. Элементар матрицалар кўпайтмаси элементар.

1.29-теорема. Агар B матрица A матрицани $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ элементар алмаштиришлар ёрдамида ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда $B = E_{\varphi_n} \cdot E_{\varphi_{n-1}} \cdots E_{\varphi_1} A$.

$F =< F; +, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1 >$ майдон ва майдон устида $F^{n \times n}$ квадрат матрицалар тўплами берилган бўлсин.

1.30-теорема. Камида битта нол сатр ёки устунга эга квадрат матрица тескариланувчи эмас.

Исбот. A_i сатри нол сатр бўлган A квадрат матрица ва B ихтиёрий квадрат матрицалар берилган бўлсин. У ҳолда AB кўпайтманинг i-сатри яъни, $(AB)_i = (A_i B^1, ..., A_i B^n) = (0, ..., 0)$. Бундан AB кўпайтманинг B матрица қандай бўлишидан қатъий назар, нол сатрга эга бўлиши келиб чиқади. Матрицанинг тескариланиш таърифига кўра, AB = E бўлса, A матрица тескариланувчи дейилади. Теорема шартида берилган A матрицанинг қайси сатри нол сатр бўлса AB кўпайтманинг ўша сатри нол сатр бўлар экан. Демак, кўпайтма бирлик матрицага тенг бўла олмайди ва A матрица тескариланувчи эмас.

1.31-теорема. Агар квадрат матрицанинг сатрлари чизиқли боғлиқ бўлса, у тескариланувчи эмас.

13.1-натижа. Агар квадрат матрица тескариланувчи бўлса, у ҳолда унинг сатрлари чизиқли эркли бўлади.

1.32-теорема. Сатрлари чизиқли эркли бўлган квадрат матрицани элементар матрицалар кўпайтмаси кўринишида ифодалаш мумкин.

Исбот. А матрица сатрлари чизиқли эркли бўлган квадрат матрица бўлсин. У ҳолда А матрицани Е матрицага ўтказувчи шундай $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ элементар алмаштиришлар мавжудки, $E_{\varphi_n} \cdot E_{\varphi_{n-1}} \cdots E_{\varphi_1} \cdot A = E$ бўлади. Бундан $A = E^{-1}_{\varphi_n} \cdot E^{-1}_{\varphi_{n-1}} \cdots E^{-1}_{\varphi_1}$.

1.33-теорема. Ихтиёрий А квадрат матрица учун қуйидаги шартлар тенг кучли:

1) А матрица тескариланувчи:

2) А матрицанинг сатрлари (устунлари) чизиқли эркли:

3) А матрицани элементар матрицалар кўпайтмаси кўринишида ифодалаш мумкин.

Теорема элементар матрицаларнинг хоссалари ва юқоридаги теоремалар асосида исботланади.

1.35-теорема. Агар А квадрат матрицани элементар алмаштиришлар занжири (кетма-кет бажарилган элементар алмаштиришлар) бирлик матрицага ўтказса, у ҳолда А матрица тескариланувчи ва бажарилган элементар алмаштиришлар занжири Е матрицани A^{-1} матрицага келтиради.

Исбот. $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ элементар алмаштиришлар А матрицани Е матрицага ўтказади деб фараз қиламиз. У ҳолда $E_{\varphi_n} \cdot E_{\varphi_{n-1}} \cdots E_{\varphi_1} \cdot A = E$. Бундан $A^{-1} = E_{\varphi_n} \cdot E_{\varphi_{n-1}} \cdots E_{\varphi_1}$ келиб чиқади.

теорема асосида тескари матрицани топиш жараёни қуйидагича: $A \in F^{n \times n}$ матрицага тескари матрицани топиш учун тартиби $n \times 2n$ бўлган

$$A \mid E = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

матрицани элементар алмаштиришлар занжири ёрдамида

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right) = E \mid B$$

кўринишга келтирамиз. Хосил бўлган В матрица берилган А матрицага тескари матрица.

3-мисол. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ матрицага тескари матрицани топинг.

$$A \mid E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

матрицанинг сатрлари бўйича элементар алмаштиришларни бажариб

$$A \mid E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) = E \mid A^{-1},$$

$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ матрицани ҳосил қиламиз.

Тескари матрица тўғри топилганлиги $AA^{-1}=E$ тенглик асосида текширилади.

§ 1.6 Чизиқли тенгламалар системасини матрицалар ёрдамида ечиш.

$F =< F;+,\cdot,-,^{-1},0,1>$ майдон берилган бўлсин.

1.29-таъриф. Барча номаълумларининг даражаси бирдан катта бўлмаган тенгламага чизиқли тенглама дейилади.

1.30-таъриф. $a_1x_1 + ... + a_nx_n = b$ **т**енгламани тўғри сонли тенгликка айлантирувчи $\vec{\xi} = (\xi_1,..., \xi_n), \xi_i \in F, i = \overline{1,n}$ векторга берилган тенгламанинг ечими дейилади.

1.31-таъриф. Ушбу

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

системага F майдон устида берилган n та номаълумли m та чизиқли тенгламалар системаси дейилади, бунда $a_{ij}, b_i \in F \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ системанинг коэффициентлари, a_{ij} ноъмалумлар коэффициентлари, b_j озод ҳадлар бўлиб, x_i лар эса ноъмалумлардан иборат.

1.32-таъриф. n та номаълумли m та чизиқли тенгламалар системасининг ечими деб шундай $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n), \xi_i \in F, i = \overline{1,n}$ векторга айтиладики, у системанинг барча тенгламаларини тўғри тенгликка айлантиради.

1.33-таъриф. ЧТС камида битта ечимга эга бўлса, у ҳамжойли, ечимга эга бўлмаса, ҳамжойли бўлмаган ЧТС дейилади.

1.34-таъриф. Ягона ечимга эга бўлган система аниқ система, чексиз кўп ечимга эга бўлган система аниқмас система дейилади.

мисол. $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$ тенгламалар системаси ягона x =1; y = 2; z = 3, яъни (1,2,3) ечимга эга бўлганлиги учун аниқ системага мисол бўлади.

$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$ система ечимлар тўплами бўш тўплам бўлганлиги учун у ҳамжойсиз тенгламалар системасига мисол бўлади.

$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10 \end{cases}$ тенгламалар системаси чексиз кўп ечимга эга. Демак, берилган система аниқмас.

1.35-таъриф. Берилган иккита ЧТС учун биринчисининг ҳар бир ечими иккинчиси учун ҳам ечим бўлса, иккинчи ЧТС биринчи ЧТСнинг натижаси дейилади.

Таърифга кўра биринчи чизиқли тенгламалар системасининг ечимлар тўплами, натижа система ечимлар тўпламига қисм тўплам бўлади.

мисол. Ҳар қандай n номаълумли ЧТСга н номаълумли ҳамжойли бўлмаган ЧТС натижа бўлади. Чунки, бўш тўплам ҳар қандай тўпламга қисм тўплам бўлади.

1.36-таъриф. $\lambda_1,...,\ \lambda_m \in F$ скалярлар ёрдамида ҳосил қилинган

$(\lambda_1 a_{11} + ... + \lambda_m a_{m1})x_1 + ... + (\lambda_1 a_{1n} + ... + \lambda_m a_{mn})x_n = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_m b_m$ чизиқли тенглама (1) системанинг чизиқли комбинацияси дейилади.

1.36-теорема. ЧТСнинг ҳар қандай чизиқли комбинацияси берилган системанинг натижаси бўлади.

1.37-таъриф. Иккита ЧТС тенг кучли дейилади, агар биринчисининг ҳар бир ечими иккинчисига ечим бўлса ва аксинча.

мисол. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$ тенгламалар системаси

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}$ тенгламалар системасига тенг кучли.

1.37-теорема. Иккита ЧТС тенг кучли бўлиши учун, ҳар бир система иккинчисининг натижаси бўлиши зарур ва етарли.

1.38-теорема. Иккита ЧТС тенг кучли бўлиши учун, уларнинг ечимлар тўпламлари тенг бўлиши зарур ва етарли.

1.38-таъриф. Қуйидагилар ЧТСни элементар алмаштиришлар дейилади:

1) системани қандайдир тенгламасининг иккала қисмини нолдан фарқли скалярга кўпайтириш:

2) бир тенгламанинг иккала қисмига скалярга кўпайтирилган бошқа тенгламанинг мос қисмларини қўшиш ёки айириш:

3) системага нол тенгламани киритиш ёки уни системадан чиқариш.

1.39-теорема. ЧТСни элементар алмаштиришлар натижасида унга эквивалент бўлган ЧТС ҳосил бўлади.

мисол. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -2x_1 + 8x_2 - 2x_3 = -2, \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

$F =< F;+,\cdot,-,^{-1},0,1 >$ майдон ва майдон устида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин.

1.39-таъриф. (1) чизиқли тенгламалар системасининг номаълумлари олдидаги коэффициентлардан тузилган $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ матрица (1) нинг асосий матрицаси, номаълумлар олдидаги коэффициентлар ва озод ҳадлардан иборат $B= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ матрица (1) нинг кенгайтирилган матрицаси дейилади.

$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ система учун қуйидаги белгилашларни қўллаймиз:

$A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$ … $A^н = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Натижада, $x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_н \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ тенгламани, яъни

$x_1A^1 + x_2 A^2 + \ldots + x_n A^n = \vec{b}$ (2) тенгламани ҳосил қиламиз.

1.40-теорема. (1) система (2) системага тенг кучли.

1.41-теорема (Кронекер-Капелли теоремаси).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

чизиқли тенгламалар системаси ҳамжойли бўлиши учун унинг асосий ва кенгайтирилган матрицалари рангларининг тенг бўлиши зарур ва етарли.

Исботи. 1. Зарурлиги. (1) система хамжойли, яъни камида битта ($\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_н$) ечимга эга бўлсин. У холда

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n = b_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right) \qquad (3)$$

тўғри сонли тенгликлар хосил бўлади. (2) тенгликдан кўринадики B матрицанинг охирги

$\vec{b}_i = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ устун вектори ўзидан олдинги н та устунларни ифодаловчи $\vec{a}^{\,1},\vec{a}^{\,2},\ldots,\vec{a}^{\,н}$

векторларнинг чизиқли комбинациясидан иборат, яъни

$$\alpha_1 A^1+\alpha_2 A^2+\ldots+\alpha_н A^н=\vec{b}$$

эканлиги келиб чиқади. Демак, A ва B матрицаларнинг

$$A^1, A^2,\ldots, A^н, \qquad (4)$$

$$A^1, A^2,\ldots, A^н, \vec{b} \qquad (5)$$

вертикал векторлари системалари эквивалентдир. Эквивалент векторлар системалари бир хил рангга эга деган мулохазага кўра A ва B матрицалар бир хил рангга эга, яъни р(A)=р(B) бўлади.

2. Етарлилиги. (1) система учун р(A)=р(B)=k бўлсин. A матрицанинг, яъни (5) вертикал векторларнинг рангини аниқловчи қисм системани

$$A^1, A^2,\ldots, A^к \qquad (6)$$

дейлик. B матрицанинг ранги хам к га тенг бўлганидан, (6) система (5) системанинг рангини аниқловчи система бўлади. У холда (5) системанинг $\vec{b}$ вектори (6) система орқали ва демак, (4) система орқали хам чизиқли ифодаланади, яъни $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_н\in F$ сонлар мавжуд бўлиб, $\alpha_1 A^1+\alpha_2 A^2+\ldots+\alpha_н A^н=\vec{b}$ тенглик бажарилади. Бундан иккита векторларнинг тенглик шартига кўра $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n = b_i \ \left(i = \overline{1, m}\right)$

тенгликларга эга бўламиз. Шундай қилиб, (1) система $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_н)$ ечимга эга, яъни (1) система хамжойли система бўлади.

1.42-теорема. А ва В лар мос равишда $F =< F;+,\cdot,-,^{-1},0,1>$ майдон устида берилган (1) чизиқли тенгламалар системасининг асосий ва кенгайтирилган матрицалари бўлсин. У ҳолда қуйидаги шартлар тенг кучли:

1. (1) система ҳамжойли.

2. F майдон устида (2) система ечимга эга.

3. $\vec{b}$ вектор A матрицанинг устун векторларининг чизиқли комбинациясидан иборат, яъни, $\vec{b} \in L(A^1,..., A^n)$.

4. A ва B матрицаларнинг устун (сатр) ранглари тенг.

мисол. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$ тенгламалар

системасининг ҳамжойли ёки ҳамжойсиз эканлигини аниқланг.

Ечиш: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix}.$$

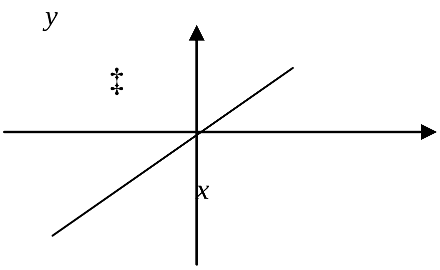
Бундан, $r(A) = 2$ ва $r(B) = 3$.

Демак, берилган чизиқли тенгламалар системасининг асосий ва кенгайтирилган матрицаларининг сатр ранглари тенг эмас. Бундан берилган ЧТСнинг ҳамжойсиз эканлиги келиб чиқади.

1.40-таъриф. $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$ чизиқли тенгламалар системасига бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси (БЧТС) дейилади.

1.43-теорема. $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$ кўринишдаги н номаълумли m та БЧТС, m<n бўлганда нолмас ечимга эга бўлади.

Масалан, $ax - by = 0$ икки ўзгарувчили чизиқли тенглама. Унинг ечимлари чексиз кўп бўлиб, улардан биттаси нол ечим, қолганлари нолмас ечимлар. Ечимлар тўплами Декарт координаталар текислигида қуйидаги тўғри чизиқни ифодалайди: $y = \dfrac{a}{b}x$



1.44-теорема. Бир жинсли чизиқли тенгламалар системасида асосий матрицасининг устун векторлари системаси чизиқли боғлиқ бўлса, у нолмас ечимга эга бўлади.

1.45-теорема. н номаълумли БЧТСнинг ранги н дан кичик бўлса, у ҳолда система нолмас ечимларга эга бўлади.

Бир жинсли чизиқли тенгламалар системасининг тенгламаларини элементар алмаштиришлар натижасида системанинг қолган тенгламалар орқали чизиқли ифодаланувчи тенгламаси нол тенгламага айланади. Агар н номаълумли БЧТСнинг ранги n дан кичик бўлса, демак камида битта тенглама қолганлари орқали чизиқли ифодаланади. У ҳолда берилган БЧТСга тенг кучли БЧТСда камида битта эркли ўзгарувчилар мавжуд бўлиб, натижада чексиз кўп ечимлар ҳосил бўлади. Бу ечимларни топишда эркли ўзгарувчиларга нолдан фарқли камида битта қиймат бериш билан нолмас ечим ҳосил қилинади.

$F =< F;+,\cdot,-,^{-1},0,1>$ майдон ва майдон устида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин.

1.41-таъриф. $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ бир жинсли чизиқли тенгламалар системасига (1) системага ассоцирланган БЧТС дейилади.

1.46-теорема. Бир жинсли бўлмаган ЧТСнинг ечимига унга ассоцирланган БЧТСнинг ечими қўшилса, бир жинсли бўлмаган ЧТСнинг ечими ҳосил бўлади.

1.47-теорема. Бир жинсли бўлмаган ЧТСнинг иккита ечимининг айирмаси унга ассоцирланган БЧТСнинг ечими бўлади.

1.48-теорема. Бир жинсли чизиқли тенгламалар системасининг ечимлари тўплами чизиқли фазо ташкил қилади.

Агар берилган БЧТСнинг ечими ягона нол вектордан иборат бўлса,
у ҳолда нол вектордан иборат тўплам чизиқли фазо таърифига
бўйсунишини текшириш осон.

Агар БЧТСнинг ечимлари чексиз кўп бўлса, у ҳолда умумий ечимни ифодаловчи вектор координаталари камида битта эркли ўзгарувчи орқали ифодаланади.

Масалан, $(2x_3 + x_4; -x_3 - 3x_4; x_3; x_4),\ x_3, x_4 \in R$ бирор-бир БЧТСнинг ечимларини ифодаловчи векторлар бўлса, у ҳолда x_3, x_4 ўзгарувчиларнинг камида биттасига нолдан фарқли қиймат бериб, иккита нолдан фарқли ечим ҳосил қиламиз: $x_3 = 1, x_4 = 2; x_3 = 2, x_4 = 3$

$\vec{a}_1 = (4;-7;1;2),\ \vec{a}_2 = (7;-11;2;3)$. Бу векторларнинг йиғиндиси $x_3 = 3, x_4 = 5$ бўлганда умумий ечимдан ҳосил бўладиган $(11;-18;3;5)$ вектор бўлади. Ҳудди шундай, нолдан фарқли скаляр $\lambda = 3$ ни $\vec{a}_1 = (4;-7;1;2)$ ечимга кўпайтириш натижасида $x_3 = 3, x_4 = 6$ қийматлар ёрдамида ҳосил қилинган $(12;-21;3;6)$ ечимга эга бўламиз.

1.49-теорема. $\vec{a}$ бир жинсли бўлмаган ЧТСнинг ечими ва Л- унга ассоцирланган БЧТСнинг ечимлари тўплами бўлсин. У ҳолда $\vec{a} + L$ тўплам берилган ЧТСнинг ечимлар тўпламидан иборат бўлади.

1.42-таъриф. 1.49-теоремада келтирилган $\vec{a} + L$ тўпламга БЧТС ечимлар тўплами ёрдамида ҳосил қилинган чизиқли кўпҳиллик дейилади.

1.50-теорема. Ҳамжойли бир жинсли бўлмаган ЧТС ягона ечимга эга бўлиши учун унга ассоцирланган БЧТСнинг ягона нол ечимга эга бўлиши зарур ва етарли.

мисол. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$ чизиқли тенгламалар системасига

ассоцирланган $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ бир жинсли чизиқли тенгламалар системасининг ечимларини топамиз.

Ҳосил қилинган $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ тенгламалар системасига Гаусс усулини қўлласак, унга тенг кучли бўлган $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_2 - 7x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases}$ системага эга бўламиз. Бундан, БЧТСнинг ягона нол ечимга эга эканлиги келиб чиқади.

Берилган бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламалар системасини элементар алмаштиришлар натижасида унга тенг кучли бўлган $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}$ системага эга бўламиз. Бундан системанинг ягона

$x_3 = 2$; $x_2 = 5$; $x_1 = 1$ ечимга эга эканлиги келиб чиқади.

1.51-теорема. Агар F майдон устида берилган н номаълумли иккита бир жинсли бўлмаган ЧТС тенг кучли бўлса, у ҳолда уларга ассоцирланган БЧТСлари ҳам тенг кучли бўлади.

R майдон устида n та номаълумли n та чизиқли тенгламалар системаси

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

кўринишда берилган бўлсин.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

У ҳолда берилган ЧТСни матрицали тенглама, яъни $AX = B$ кўринишида ёзиш мумкин.

1.43-таъриф. $AX = B$ чизиқли тенгламага $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$ чизиқли тенгламалар системасининг матрицали ифодаси дейилади.

1.52-теорема. Агар A матрицанинг сатрлари чизиқли эркли бўлса, у ҳолда $A^{-1}B$ вектор $AX = B$ тенгламанинг ягона ечими бўлади.

А·Х = Б тенгламада А матрица тескариланувчи бўлса, у ҳолда $А^{-1}$ матрицани топиб, тенгламанинг иккала томонини $А^{-1}$ га чап томондан кўпайтирамиз (матрицаларни кўпайтириш, хаттоки квадрат матрицалар бўлса, ҳам коммутатив эмас): $А^{-1}$·А·Х = $А^{-1}$·Б.

$А^{-1}$·А = Е эканлигидан Е·Х = $А^{-1}$·В, бундан эса Х = $А^{-1}$·В эканлиги келиб чиқади.

n та номаълумли n та ЧТС берилган бўлса, унинг матрицали тенгламаси $AX = B$ бўлади. Лекин матрицали тенгламани фақат ЧТС ёрдамида ҳосил қилинмайди. Балки А., В матрицалар берилган бўлса $A \cdot X = B$ ±ки $X \cdot A = B$ кўринишдаги матрицали тенгламаларни; А,В,С матрицалар берилган бўлса $A \cdot X \cdot B = C$ кўринишдаги матрицали тенгламаларни тузиш мумкин бўлса, уларни ечиш учун ўзгарувчининг чап ёки ўнг томонидаги А матрица тескариланувчи бўлса, унинг ечими $А^{-1}$·Б ёки $B \cdot A^{-1}$ кўринишда; ўзгарувчининг ўнг ва чап томонидаги А ва В лар тескариланувчи бўлса, $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$ кўринишда бўлади.

мисол. $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$ тенгламалар системасини матрицали тенгламага келтириб, ечимини топинг.

Ечиш. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $Б = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ белгилашлар ёрдамида

$AX = B$ тенгламани тузиб оламиз ва агар А матрица тескариланувчи бўлса A^{-1}ни топиб $X = A^{-1} \cdot B$ тенглик ёрдамида ЧТСнинг ечимини топамиз.

А матрицани сатр элементар алмаштиришлар ёрдамида чизиқли эркли эканлигини текширамиз:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -11 & -16 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Хосил бўлган поғонасимон матрицада нол сатрлар йўқ. Демак, А матрица чизиқли эркли матрица ва матрицанинг тескариланиш шартларига кўра унинг тескари матрицаси мавжуд. Тескари матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix}$ дан иборат.

Тескари матрица тўғри топилганлигини текшириб оламиз:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25 + 10 - 5 & 5 + 14 - 19 & 5 - 16 + 11 \\ 5 - 20 + 15 & 1 - 28 + 57 & 1 + 32 - 33 \\ 20 - 30 + 10 & 4 - 42 + 38 & 4 + 48 - 22 \end{pmatrix} = E$$

Демак, тескари матрица ёрдамида ЧТСни ечимини топамиз. Яъни

$X = A^{-1} \cdot B$ тенгликдан

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3}0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6}0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ ни}$$

бундан

x =1; й = 2; з = 3 ечимни ҳосил қиламиз.

II – боб. МАТРИЦАЛАРНИ ТРАНПОНИРЛАШ.

§2.1 Матрицаларни транспонирлаш тушунчаси.

2.1-тариф. Матрицани транспонирлаш деб, бирор аниқ қонун ёки қоида бўйича унин барча елементларини ўринларини алмаштиришга айтилади.

Бизга mxn, (m<n) ўлчовли A=(a_{ij}), (i=1,2,…,m, j=1,2…,n) – тўғри тўртбурчакли матрица берилган бўлсин. Матрицанинг барча елементларини ўринларини алмаштирувчи тривал (содда) қоидаларни қараб чиқайлик:

1. Матрица сатрларини (устунларини) унинг устунлари (сатрлари) билан тўғридан тўғри (тўғри тартибда) алмаштириш,
2. Матрица сатрларини (устунларини) унинг устунлари (сатрлари) билан тескари тартибда алмаштириш,
3. Матрица i – сатрини (i=1,2,…,m) мос равишда m+1-i- сатри билан алмаштириш,
4. Матрица ж – устунини (j=1,2,…,n) мос равишда n+1-j- устуни билан алмаштириш,
5. Матрица i – сатрини (i=1,2,…,m) мос равишда m+1- i- сатри билан, j-устунини (j=1,2,…,n) мос равишда n+1-j устуни билан алмаштириш.

Аввал матрица билан боғлиқ бўлган баъзи тушунчаларни аниқлаб оламиз. Маълумки, ҳар бир тўғри тўртбурчакли матрицага шу матрица элементлари ичида ётувчи тўғри тўртбурчак мос келади.

а) А матрицанинг бош (бош бўлмаган) диоганали деб, шу матрицанинг a_{ii}, i= 1,2,…,m ($a_{\mathrm{i,m+1-i}}$, i=1,2,…,m) элементлари жойлашган нуқталардан ўтувчи чизиқ кесмасига айтилади.

Агар А матрицамиз тўртинчи тартибли қуйидаги кўринишда берилган матрица бўлса,

А матрицанинг бош диоганали (a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}) элементлари жойлашган нуқталардан ўтувчи чизиқ кесмасидан иборат.

А матрицанинг бош бўлмаган диоганали (a_{14} a_{23} a_{32} a_{41}) элементлари жойлашган нуқталардан ўтувчи чизиқ кесмасидан иборат.

б) А матрицанинг вертикал ўқи деб, шу матрицага мос тўғри бурчакли тўрбурчакнинг вертикал симметрия ўқларига айтилади.

Агар А матрицамиз тоқ тартибли, Б матрицамиз жифт тартибли бўлса,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

А матрицанинг вертикал ўқи, $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$

устун элементлари жойлашган нуқталардан ўтувчи чизиқ кесмасидан иборат.

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{array}\right)$$

А матрицанинг вертикал ўқи , чизиқ кесмасидан иборат.

в) А матрицанинг горизонтал ўқи деб, шу матрицага мос тўғри бурчакли тўртбурчакнинг горизонтал симметрия ўқларига айтилади.

Агар А матрицамиз тоқ тартибли,Б матрицамиз жуфт тартибли бўлса,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

А матрицанинг горизонтал ўқи,

$(a_{21} \;\; a_{23} \;\; a_{23})$ сатр элементлари жойлашган нуқталардан ўтувчи чизиқ кесмасидан иборат.

$$B = \left(\begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{array}\right)$$

В матрицанинг горизонтал ўқи, чизиқ кесмасидан иборат.

г) А матрицанинг маркази деб, унга мос тўғри тўртбурчакнинг симметрия марказига айтилади.

Агар А матрицамиз тоқ тартибли, В матрицамиз жуфт тартибли бўлса,

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

А матрицамизнинг маркази, a_{22} элемент жойлашган нуқтадан иборат.

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{array}\right)$$

В матрицанинг маркази, вертикал ўқи билан горизонтал ўқи билан кесишиш нуқтасидан иборат.

Энди А матрицанинг барча элементларининг ўринларини алмаштирувчи, юқорида келтирилган, тривал (содда) қоидаларига мос келувчи, матрицани транспонирлашнинг таърифини келтирамиз.

2.2-таъриф

1. А матрицанинг сатрларини (устунларини) устунлари (сатрлари) билан тўғри тартибда алмаштириб, хосил қилинган A^T=(a_{ji}), j=1,2,…,n, i=1,2,…,m, матрица,

2. А матрицанинг сатрларини (устунларини) устунлари (сатрларини) билан тескари тартибда алмаштириб хосил қилинган A^L=($a_{n+1-j,\ m+1-j}$), j=1,2,…,n, i=1,2…,m матрица,

3. А матрицанинг и-сатрини m+1-i сатри билан алмаштириб, хосил қилинган A^{-}=($a_{m+1-i,\ \ j}$), i=1,2,…,m, j=1,2…,n матрица,

4. А матрицанинг ж-устунини н+1-ж устуни билан алмаштириб, хосил қилинган $A^{|}$-=($a_{i,n+1-j}$), i=1,2,…,m, j=1,2…,n матрица,

5. А матрицанинг i-сатрини m+1-i сатри билан, j устунини n+1-j устуни билан алмаштириб хосил қилинган A^o=($a_{m+1-i,n+1-j}$), i=1,2,…,m, j=1,2…,n матрица,

А матрицани

6) Бош диагонали бўйича,
7) Бош бўлмаган диагонали бўйича,
8) Горизонтал ўқи бўйича,
9) Вертикал ўқи бўйича,
10) Маркази бўйича транспонирланган матрицаси дейилади.

§2.2 Матрицаларни транспонирлашнинг геометрик маъноси.

Тўғри тўртбурчакли А матрицанинг бош ва бош бўлмаган диоганаллари унга мос тўғри тўртбурчакнинг диоганаллари билан устма-уст тушмайди. Шунинг учун бундай матрицалар тронспонирланганда уларнинг ўлчови nxm га алмашади. Агар n=m бўлса, яъни А квадрат матрицадан иборат бўлса,у холда бу матрицанинг бош (бош бўлмаган) диоганали унга мос квадратнинг чап (ўнг) диоганали билан устма-уст тушади. Демак, геомерик нуқтаи назардан матрицани тронспонирлаш нуқта ёки тўғри чизиққа нисбатан амалга оширилади. Агар нуқта ёки тўғри чизиқ кесмаси шу матрицага мос тўғри тўртбурчак (квадрат)нинг симметрия маркази ёки симметрия ўқи билан устма-уст тушса, у ҳолда тронспонирланган матрицанинг ўлчови ўзгармайди, акс ҳолда транспонирланган матрицанинг ўлчови ўзгаради. Агар А матрица бирор нуқта ёки тўғри чизиққа нисбатан транспонирланса, у ҳолда бу матрицанинг шу нуқта ёки тўғри чизиқда ётган элементлари (агар бўлса) ўзгармай қолади.

Агар А матрицага бирор тўғри тўртбурчак (квадрат) мос келиб, А матрица шу тўғри тўртбурчак (квадрат)да ётувчи нуқта ёки тўғри чизиқ кесмасига нисбатан транспонирланган бўлса, у ҳода транспонирланган матрицага шу тўғри тўртбурчак (квадратни) транспонирлаш ўтказилган нуқта ёки тўғри чизиқ кесмаси атрофида 180̊ га бурилгани мос келади.

2.2-Тарифнинг геометрик ма`носи А матрицага мос келувчи тўғри тўртбурчакни

1) Бош диагоналидан ўтувчи тўғри чизиқ атрофида,
2) Бош бўлмаган диагоналидан ўтувчи тўғри чизиқ атрофида,
3) Горизонтал ўқи атрофида,
4) Вертикал ўқи атрофида,
5) А матрица маркази атрофида 180^0 га буришни ифодалайди.

§2.3Матрицаларни транспонирлашни механик маъноси.

Матрицаларни транспонирлашнинг механик маъносини очиш учун матрица билан йирик маштабли механик системалар ўртасида қуйидагича мослик ўрнатамиз.

А=(a_{ij}) – тўғри бурчакли mxn (аниқлик учун m≤n деб оламиз) ўлчовли матрица бўлиб, R_n да аниқланган йирик масштабли механик системалар м та эркин қисм системалардан ташкил топган бўлсин. А матрицанинг бош диогоналида ётувчи элементларига йирик масштабли механик системаларнинг эркин қисм системаларини шундай мос қўямизки, унда аии, i=1,2,…m элементга мос келувчи эркин қисм система аm+1-i, m+1-i элементга мос келувчи эркин қисм система аm+1-i, m+1-i элементга мос келувчи эркин қисм система билан мувозанатлашсин, А матрицанинг аиж, i, j=1,2,…,m i<j (i>j) элементларига мос аии ва a_{jj} i,j=1,2,…,m эркин қисм системалар орасидаги боғланишлар (тескари боғланишлар)ни, яъни a_{ii} (a_{jj}) элементга мос келувчи эркин қисм системани a_{jj} (a_{ii}) элементга мос келувчи эркин қисм системага та`сирини ифодоловчи функсияларни мос қўямиз. Бу бўгланишлар йирик масштабли механик системаларнинг ички боғланишлари дейилади. А матрицанинг қолган элементларига, яъниаиж, i=1,2,…,m, j=m+1, m+2,…,n, i<j (i>j) элементларига эркин қисм системалар билан берилган йирик масштабли механик системалар билан бирга характерланувчи ташқи системалар орасидаги боғланишлар (тескари боғланишлар)ни мос қўямиз. Бу боғланишлар ташқи боғланишлар дейилади.

Агар m=n бўлса, ташқи боғланишлар қаралмайди, яъни барча боғланишлар ички боғланишлар бўлади. Бундай ўрнатилган мосликда матрицанинг мос бўлмаган диагоналидаги элементларга ўзаро мувозанатлашувчи эркин қисм системалар орасидаги бўгланишлар ва тескари боғланишлар мос келади. Агар m-жуфт бўлса, у холда хар бир эркин қисм системага мос мувозанатлаштирувчи эркин қисм система мавжуд бўлади. Агар m-тоқ бўлса, у холда a $\frac{m+1}{2}$, $\frac{m+1}{2}$ элементга мос эркин қисм системага

мувозанатлашувчи қисм система мавжуд бўлмайди. Шунинг учун бу эркин қисм ситема эталон қисм система дейилиб, алохида қаралади. (Масалан, йирик масштабли энергетик системаларда системани ташкил этувчи машиналар сони тоқ бўлиб, битта мошина эталон мошина сифатида қаралади). Бу мосликдан кўринадики, транспонирлашйирик масштабли механик системаларнинг ички структураси ўзгаришини аниқлайди.

Юқорида матрица билан йирик масштабли механик системалар ўртасида ўрнатилган мосликка асосан шуни айта оламизки, таъриф 2 да келтирилган транспонирланган матрица мос равишда қаралаётган йирик масштабли механик системалар ички структурасини

1) Эркин қисм системаларни ўзгартирмай, эркин қисм системалар ўртасидаги боғланишларни уларга мос тескари боғланишлар билан ўзаро алмаштирилиб,
2) Ўзаро мувозанатлашувчи эркин қисм системалар ўртасидаги боғланишлар ва тескари боғланишлар ўзгармай, мувозанатлашувчи эркин қисм системаларни ўзаро ва қолган боғланишларни (тескари боғланишларни) мос равишда ўзаро алмаштириб,
3) Эркин қисм системаларни ўзаро мувозанатлашувчи эркин қисм системалар орасидаги боғланишлар ва тескари тартибда алмаштириб,
4) Эркин қисм системаларни ўзаро мувозанатлашувчи эркин қисм системалар орасидаги боғланишлар ва тескари боғланишлар билан тўғри тартибда алмаштириб,
5) Эталон қисм система (агар бор бўлса)дан ташқари мувозанатлашувчи қисм системаларни ўзаро ва уларга мос барча боғланишларни мос тескари боғланишлар билан алмаштириб, ўзгартирилишини ифодалайди.

Эслатма

1 Агар n (m) – тоқ бўлса, у холда вертикал (горизонтал) ўқ бўйича транспонирлашда эталон қисм система ва унга мос вертикал (горизонтал) боғланишлар ва

тескари боғланишлар ўзгартирилмайди. Агар n(m) – жуфт бўлса, бундай қисм система мавжуд бўлмайди.

2 Агар n ва m – тоқ бўлса, у холда марказ бўйича транспонирлашда фақат эталон қисм система ўзгартирилмайди, бу қисм системага мос боғланишлар ва тескари боғланишлар тескари тартибда ўзаро алмашади. Агар n ва m – жуфт бўлса, бундай қисм система мавжуд бўлмайди.

§2.4 Матрицаларни транспонирлашнинг хоссалари.

Бевосита текшириб қуйидаги хоссаларни ўринли эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

3. Агар А ва Б mxn ўлчовли, тўғри тўртбурчакли матрицалар бўлса, у холда

$(A+B)^T = A^T + B^T$, $\quad (A+B)^L = A^L + B^L$,

$(A+B)^{-} = A^{-} + B^{-}$, $\quad (A+B)^{!} = A^{!} + B^{!}$,

$(A+B)^o = A^o + B^o$

Хақиқатдан, айтайлик $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), \quad A + B = (c_{ij}) = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)$, и=1,м, ж=1,н бўлсин.

У ҳолда қуйидагига эга бўламиз.

$$(A+B)^T = (c_{ij})^T = (c_{ji}) = (a_{ji} + b_{ji}) = (a_{ji}) + (b_{ji}) = (a_{ij})^T + (b_{ij})^T = A^T + B^T;$$

$$(A+B)^{\perp} = (c_{ij})^{\perp} = (c_{n+1-j,\ m+1-i}) = (a_{n+1-j,\ m+1-i} + b_{n+1-j,\ m+1-i}) =$$
$$= (a_{n+1-j,\ m+1-i} + b_{n+1-j,\ m+1-i}) =)(a_{ij})^{\perp} + (b_{ij})^{\perp} = A^{\perp} + B^{\perp};$$
$$(A+B)^{-} = (c_{ij})^{-} = a_{n+1-j,\ i+bn+1-j,\ i}) = (a_{n+1-j,\ i}) + \left(b_{n+1-j,\ i}\right) = (a_{ij})^{-} +$$
$$+ (b_{ij})^{-} = A^{-} + B^{-};$$

$$(A+B)^{!} = (c_{иж})^{!} = (c_{и,\ м+1-ж}) =$$
$$(a_{i,\ m+1-j} + b_{i,\ m+1-j}) = a_{i,m+1-j}) + (b_{i,m+1-j}) = a_{ij})^{!} + (b_{ij})^{!} = A^{!} + B^{!};$$

$$(A+B)^{0} = (c_{ij})^{0} = (c_{m+1-i,n+1-j}) = (a_{m+1-i,n+1-j} + b_{m+1-i,n+1-j}) =$$
$$= (a_{m+1-i,n+1-j}) + (b_{m+1-i,n+1-j}) = (a_{ij})^{0} + (b_{ij})^{0} = A^{0} + B^{0};$$

4. Агар А- mxn, ўлчовли тўғри тўртбурчакли матрица бўлиб, λ =0 хақиқий сон бўлса, у ҳолда

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T, \qquad (\lambda A) = \lambda A, \qquad (\lambda A)^{!} = \lambda A^{!},$$

$$(\lambda A)^{-} = \lambda A^{-}, \qquad (\lambda A)^{0} = \lambda A^{0},$$

Хақиқатдан, айтайлик $A = (a_{ij}),\ i = 1,2,\dots,\ m,\ j = 1,2,\dots,\ n, \lambda \neq 0 \in \mathrm{P}$,

у ҳолда қуйидагини хосил қиламиз.

(λA)^T= $(\lambda \mathrm{a}_{ij})^T = (\lambda \mathrm{a}_{ji}) = \lambda(\mathrm{a}_{ji}) = \lambda A^T$

$(\lambda A) = (\lambda \mathrm{a}_{ij}) = (\lambda \mathrm{a}_{n+1-j,\ m+1-i}) = \lambda(\mathrm{a}_{n+1-j,\ m+1-i}) = \lambda A$

$(\lambda A)^{-} = (\lambda \mathrm{a}_{ij})^{-} = (\lambda \mathrm{a}_{m+1-i,j}) = \lambda(\mathrm{a}_{m+1-i,j}) = \lambda A^{-}$

$(\lambda A)^{!} = (\lambda \mathrm{a}_{ij})^{!} = (\lambda \mathrm{a}_{i,n+1-j}) = \lambda(\mathrm{a}_{i,n+1-j}) = \lambda A^{!}$

$(\lambda A)^{0} = (\lambda \mathrm{a}_{ij})^{0} = (\lambda \mathrm{a}_{m+1-i,n+1-j}) = \lambda(\mathrm{a}_{m+1-i,n+1-j}) = \lambda A^{0}$

3. Агар А-mxn, ўлчовли, тўғри тўртбурчакли матрица бўлса, у ҳолда

$$(A^T)^T = A, \qquad (A^{\perp})^{\perp} = A, \qquad (A^{!})^{!} = A,$$

$$(A^{-})^{-} = A, \qquad (A^{0})^{0} = A.$$

Хақиқатдан, айтайлик $A = (a_{ij}),\ i$ =1,2,…м, ж=1,2,…,н, бўлсин, у ҳолда қуйидагига эга бўламиз.

$(A^T)^T = ((a_{ij})^T)^T = (a_{ji})^T = (a_{ij}) = A,$

$(A^{\perp})^{\perp} = ((a_{ij}))$=$(a_{n+1-j,m+1-i})$=$(a_{m+1-(m+1-i),n+1-(n+1-j)})$= $(a_{ij}) = A,$

$(A^{-})^{-} = ((a_{ij})^{-})^{-}$=$(a_{m+1-i,j})^{-}$=$(a_{m+1-(m+1-i),j)})$= $(a_{ij}) = A,$

$(A^{!})^{!} = ((a_{ij})^{!})^{!}$=$(a_{i,n+1-j})^{!}$=$(a_{i,,n+1-(n+1-j)})$= $(a_{ij}) = A,$

$(A^{0})^{0} = ((a_{ij})^{0})^{0}$=$(a_{m+1-i,n+1-j})^{0}$=$(a_{m+1-(m+1-i),n+1-(n+1-j)})$= $(a_{ij}) = A,$

4. Агар А mxn, В nxk ўлчовли тўғри бурчакли матрицалар бўлса, у холда

$$(AB)^T = B^T A^T, \quad (AB) = B\,A, \qquad (AB)^{0} = \mathrm{A}^{0}\mathrm{B}^{0}.$$

Хақиқатдан, айтайлик $A = (a_{ij})$, i=1,2,…, m, j=1,2,…, n; B=(b_{il}), i=1,2,…, n, l=1,2,…, k. AB=(s_{il}), i=1,2,…, m, l=1,2,…,k бўлсин. Бу ерда (s_{il})= $\sum_{j=0}^{n} a_{ij}\ \ b_{jl}$. У ҳолда қуйидагига эга бўламиз.

$(AB)^T = (s_{il})^T = (s_{il}) = (\sum_{j=1}^{n} b_{lj}\ a_{ji}) = (b_{lj})(a_{ji}) = B^T A^T$

$(AB) = (s_{il}) = \left(s_{k+1-l,m+1-i}\right)= (\sum_{j=1}^{n} b_{k+1-l,j}\, a_{jm+1-i}) =(b_{k+1-l,j})\ (a_{j,m+1-i})=$

$=B\,A$

$(AB)^{-} = (s_{il})^{-} = (s_{m+1-i,l}) = (\sum_{j=1}^{n} a_{m+1-i,j}\ b_{j,l}) = A^{-}B,$

$A^{-}=(a_{m+1-i,j})$

$(AB)^{!} = (s_{il})^{!} = (s_{i,k+1-l}) = (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ b_{j,k+1-l}) = AB^{!},$

$B^{!}=(b_{j,k+1-l})$

$(AB)^{0} = (s_{il})^{0} = (s_{m+1-i,k+1-l}) = (\sum_{j=1}^{n} a_{m+1-i}\,, b_{j,k+1-l}) = (a_{m+1-i,j})\ (b_{j,k+1-l}=$

$=А^{0}Б^{0}$

5. Агар А н-тартибли квадрат матрица бўлса, у ҳолда

$(A^{T}) = (A)^{T} = A^{0},$ $\qquad$ $(A^{!})^{-} = (A^{-})^{!} = A^{0},$

$(A^{0})^{T} = (A^{T})^{0} = A,$ $\qquad$ $(A^{0}) = (A)^{0} = A^{T},$

$(A^{0})^{!} = (A^{!})^{0} = A^{-},$ $\qquad$ $(A^{0})^{-} = (A^{-})^{0} = A^{!}.$

Ҳақиқатдан,

$(A^{T})= ((a_{ij})^{T})=(a_{ji})=(a_{n+1-i,n+1-j})=A^{0};$

$(A)^{T}= ((a_{ij}))^{T}=(a_{n+1-j,n+1-i})^{T}=(a_{n+1-i,n+1-j})=A^{0};$

$(A^{!})^{-}= ((a_{ij})^{!})^{-}=(a_{n+1-i,j})^{-}=(a_{n+1-i,n+1-j})=A^{0};$

$(A^{-})^{!}= ((a_{ij})^{-})^{!}=(a_{i,n+1-j})^{!}=(a_{n+1-i,n+1-j})=A^{0};$

$(A^{0})^{T}= ((a_{ij})^{0})^{T}=(a_{n+1-i,n+1-j})^{T}= (a_{n+1-j,n+1-i}) = A;$

$(A^{T})^{0}= ((a_{ij})^{T})^{0}=(a_{ji})^{0}=(a_{n+1-j,n+1-i})=A;$

$(A^{0})= ((a_{ij})^{0})=(a_{n+1-i,n+1-j})= (a_{n+1-(n+1-j),n+1-(n+1-i)}) = (a_{ji}) = A^{T};$

$(A)^{0}= ((a_{ij}))^{0}=(a_{n+1-j,n+1-i})^{0}= (a_{n+1-(n+1-j),n+1-(n+1-i)}) = (a_{ji}) = A^{T};$

$(A^{0})^{!}= ((a_{ij})^{0})^{!}=(a_{n+1-i,n+1-j})= (a_{n+1-i,n+1-(n+1-j)}) = (a_{n+1-i,j}) = A^{-};$

$(A^{!})^{0}= ((a_{ij})^{!})^{0}=(a_{i,n+1-j})^{0}= (a_{n+1-i,n+1-(n+1-j)}) = (a_{n+1-i,j}) = A^{-};$

$(A^{0})^{-}= ((a_{ij})^{0})^{-}=(a_{n+1-i,n+1-j})^{-}= (a_{n+1-(n+1-i),n+1-j)}) = (a_{i,n+1-j}) = A^{!};$

$(A^{-})^{0}= ((a_{ij})^{-})^{0}=(a_{n+1-i,j})^{0}= (a_{n+1-(n+1-i),n+1-j}) = (a_{i,n+1-j}) = A^{!};$

6. Агар А n-тартибли квадрат матрица бўлса, у ҳолда

$$A=(A^{0})^{-1}(A^{T}A)^{T}=(A^{0})^{-1}(AA^{T})=(AA^{T})\,(A^{0})^{-1}=(A^{T}A)(A^{0})^{-1}$$

Ҳақиқатдан,

$$(A^{0})^{-1}(A^{T}A)^{T}=(A^{0})^{-1}(A)^{T}(A^{T})^{T}=(A^{0})^{-1}A^{0}A=A;$$

$$(A^{0})^{-1}(AA^{T})=(A^{0})^{-1}(A^{T})(A)=(A^{0})^{-1}A^{0}A=A;$$

$$(AA^{T})^{T}(A^{0})^{-1}=(A^{T})^{T}(A)^{T}(A^{0})^{-1}=AA^{0}(A^{0})^{-1}=A;$$

$$(A^{T}A)(A^{0})^{-1}=(A)(A^{T})(A^{0})^{-1}=AA^{0}(A^{0})^{-1}=A;$$

7. Агар А n-тартибли квадрат матрица бўлса у ҳолда

$|A^{T}|=|A|=|A^{0}|=|\mathrm{A}|,$ $\qquad$ $|A^{!}|=|A^{-}|=|(-1)^{\propto}|\mathrm{A}|$Б

бу ерда $\propto -\mathrm{A}$ матрицадан $A^{!}$ ёки A^{-} матрицаларни ҳосил қилиш учун А матрицанинг сатр ёки устунларини алмаштиришлар сони.

Бу тенгликларнинг тўғрилиги таърифдан ва детерминантнинг хоссаларидан келиб чиқади.

8. Агар А квадрат матрица бўлса, у ҳолда қуйидаги тенгликлар ўринли:

1) $E^{|}A=E^{-}A+A^{-}$, $\qquad$ 2) $AE^{|}=AE^{-}=A^{|}$,

3) $E^{|}A^{|}=E^{-}AE^{-}=A^{0}$, $\qquad$ 4) $A^{T}E^{|}=A^{|}, E^{|}A^{T}=A^{-}$,

5) $AE^{|}=A^{-}, E^{|}A=A^{|}$, $\qquad$ 6) $A^{-}\,E^{|}=A^{0}, E^{|}A^{-}=A.$

7) $A^{|}E^{|}=A.$

бу ерда Е бирлик матрица

$$E^{|}=E^{-}=\begin{pmatrix} 00 & \dots & 1\\ \dots & \dots & \\ 10 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

Ҳақиқатдан, айтайлик Е n-тартибли бирлик матрица бўлсин ва

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$E^{|}A=\begin{pmatrix} 00 & \dots & 01\\ 00 & \dots & 10\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}=$$

$$E^{\mid}A = \begin{pmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} = A^{\text{-}}$$

бўлади.

Қолган тенгликларни текшириш ҳам шунга ўхшаш бажарилади.

9. Агар А махсусмас квадрат матрица бўлса, у ҳолда

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$, $(A^{-1}) = (A)^{-1}$, $(A^{-1})^{\mid} = (A^{\mid})^{-1}$,

$(A^{-1})^{\text{-}} = (A^{\text{-}})^{-1}$, $(A^{-1})^{0} = (A^{0})^{-1}$.

Хақиқатдан, айтайлик $A = (a_{ij}),\ \ i,j = 1,2,\dots,n,$ бўлсин, у ҳолда $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ (A_{ji})$, бу ерда $A_{ij} - a_{ij}$ нинг алгебраик тўлдирувчи элементи |A|=дет A.

$(A^T)^{-1} = ((a_{ij})^T)^{-1} = (a_{ji})^{-1}\ \frac{1}{|A^T|}\ (A_{ij}) = \frac{1}{|A|}\ (A_{ij})$= $\frac{1}{|A|}\ (A_{ij})^T = (\frac{1}{|A|}\ (A_{ij}))^T$ =

= $(A^{-1})^T$;

$(A)^{-1} = ((a_{ij}))^{-1} = (a_{n+1-j,\ n+1-i})^{-1}$ = $\frac{1}{|A|}$ $(A_{n+1-i,\ n+1-j}) = \frac{1}{|A|}$ (A_{ji})=

=($\frac{1}{|A|}\ (A_{ji})) = (A^{-1})$;

$(A^{\mid})^{-1} = ((a_{ij})^{\mid})^{-1} = (a_{i,n+1-j})^{-1}$=$\frac{1}{|A^{\mid}|}$ $(A_{n+1-j,i}) = \frac{1}{(-1)^{\varepsilon}|A|}$ $(A_{ji})^{\mid}$=($\frac{1}{(-1)^{\varepsilon}|A|}$ $(A_{ji}))^{\mid}$= = $(A^{-1})^{\mid}$;

$(A^{\text{-}})^{-1} = ((a_{ij})^{\text{-}})^{-1} = (a_{n+1-i,j})^{-1}$=$\frac{1}{|A^{\text{-}}|}\ (A_{j,n+1-i}) = \frac{1}{(-1)^{\varepsilon}|A|}\ (A_{ji})^{\text{-}}$=(

$\frac{1}{(-1)^{\varepsilon}|A|}\ (A_{ji}))^{\text{-}}$= = $(A^{-1})^{\text{-}}$;

$(A^{0})^{-1} = ((a_{ij})^{0})^{-1}$=$(a_{n+1-i,n+1-j})^{-1}$=$\frac{1}{|A^{0}|}\ (A_{n+1-j,n+1-i}) = \frac{1}{|A|}\ (A_{ji})^{0}$=

($\frac{1}{|A|}\ (A_{ji}))^{0}$= = $(A^{-1})^{0}$.

10. Агар A n-тартибли квадрат матрица, E n-тартибли бирлик матрица ва a сонли параметр бўлса, у ҳолда

$$|A^T - aE| = |A - aE| = |A^{\circ} - aE| = |A - aE|$$

Бу тенгликларнинг тўғрилиги 1.,2.,7 хоссалар ва E=$E^T = E = E^0$ эканлигидан келиб чиқади.

11. Агар S` (A)-A матрицанинг изи бўлса, у ҳолда

S` ($A^T$)=S`(A)=S`($A^0$)=S`(A).

Хақиқатдан, асосий транспонирлаш бўйича матрицанинг барча элементлари асосий диагонал марказ қилиб олиниб, шу марказ бўйича транS`онирланган. Бунда асосий диагонал ўз ўрнида қолган.

12. Агар rang (A)- A матрицанинг ранги бўлса, у ҳолда

$$rang\,(A^T) = rang\,(A) = rang\,(A^{!}) = rang\,(A^{-1}) = rang\,(A^{0}) = rang\,(A)$$

Бу тенгликлар 9 хосса ва матрица рангининг таърифига кўра тўғридир.

13. A квадрат матрица бўлиб, Δ_i, Δ_i^T, Δ_i, Δ_i^0, (Δi, Δ_i^T, Δ_i, Δ_i^0) i=1,2,…, n лар мос равишда $A,\ A^T,\ A,\ A^0$ матрицаларнинг бош минорлари (уларнинг мос тўлдирувчи минорлари) бўлсин. У ҳолда қуйидаги тенглилар ўринли:

$\Delta_i = \Delta_{n-i}^{-0},\ i = 1,2,\dots,n-1,\ \Delta_n = \Delta_n^0$=|A|=|$A^0$| (1.4.1)

$\Delta_i^0 = \Delta_{n-i}$, i=1,2,…, n-1, (1.4.2)

$\Delta_i = \Delta_i^T,\ i = 1,2,\dots,n,\ \Delta_n = \Delta_n^T = |A| = |A^T|$(1.4.1)

$\Delta_i = \Delta_{n-i},\ i = 1,2,\dots,\ n-1,\ \Delta_n = \Delta_n = |A| = |A|$(1.4.4)

Бу тенгликларнинг тўғрилиги таъриф 1.2, 7 хосса ва детерминантнинг хоссаларидан келиб чиқади.

III. Боб Симметрик матрицалар.

§3.1- Симметрик матрица тушунчаси.

A n-тартибли квадрат матрица бўлсин, яъни(a_{ij}), i,j=1,2,…,n

3.1-тариф. A матрица симметрик дейилади, агарда унинг хар бир элементи учун шундай элемент мавжуд бўлиб, бу элементлар жуфтликлари бирор нуқта ёки тўғри чизиққа нисбатан ўзари симметрик бўлса. Бу нуқта ёки тўғри чизиқда ётувчи элементлар ўзи ўзига симметрик дейилади.

Симметрик квадрат матрицанинг барча кўринишларини аниқлаш учун қуйидагича белгилашлар киритамиз. A n- тартибли квадрат матрицага қандайдир квадрат мос келади.

1. Квадратнинг чап (ўнг) диагоналани A матрицанинг бош (бош бўлмаган) диагонали деб айтамиз.

2. Квадратнинг вертикал (горизонтал) симметрия ўқини A матрицанинг вертисал (горизонтал) ўқи деб айтамиз.

3. Квадратнинг симметрия марказини A матрицанинг маркази деб айтамиз.

3.2-Та`риф A n- тартибли квадрат матрица

1) бош диагоналга нисбатан симметрик матрица дейилади, агарда A^T=A, яни a_{ij}=a_{ji} , i,j= 1,2… , n бўлса,

2) Бош бўлмаган диагоналга нисбатан симметрик матрица дейилади агарда $A^{\perp}$=A, яъни a_{ij}=$a_{n+1-j,n+1-i}$, i,j=1,2... ,n бўлса

3) Вертикал ўққа нисбатан симметрик матрица дейилади, агарда $A^{|}$=A, яъни a_{ij}=$a_{i,n+1-j}$, i,j=1,2…, n бўлса,

4) горизонтал ўққа нисбатан симметрик матрица дейилади, агарда A^{-}=A, яъни a_{ij}=$a_{n+1-i,j}$, i,j=1,2… , n бўлса,

5) матрица марказга нисбатан симметрик матрица дейилади , агарда A^{o}=A, яъни a_{ij}=$a_{n+1-i,n+1-j}$, i,j=1,2... , n бўлса,

Шуни айтиб ўтамизки, бош ва бош бўлмаган диагоналларда A матрицанинг элементлари мавжуд, вертикал ва горизонтал ўқларда эса n- жуфт бўлганда A матрицанинг элементлари мавжуд бўлмайди , n- тоқ бўлганда мавжуд бўлади матрица марказида n-жуфт бўлганда матрица элементи мавжуд эмас.

n-тоқ бўлганда $a_{\frac{n+1}{2}}$, $a_{\frac{n+1}{2}}$ элемент матрица марказида ётади.

Е бирлик матрица бош ва бош бўлмаган диагоналлар, хамда матраица марказига нисбатан симметрик бўлади.

3.3-тариф. R^n фазодаги н нуқта эркин қисм системалардан ташкил топган йирик масштабли механик системалар

1) Эркин қисм системаларга нисбатан симметрик дйилади, агарда унинг мос боғланишлари ва тескари боғланишлари бир хил бўлса,
2) Ўзаро мувозанатлашувчи эркин қисм системалар ўртасидаги боғланишлар ва тескари боғланишларга нисбатан симметрик дейилади, агарда мувозанатласувчи эркин қисм системалар ўртасидаги боғланишлардан бошқа боғланишлар ўзларига мос тескари боғланишлар билан бир хил бўлса.
3) Йирик масштабли механик системалар марказига нисбатан симметрик дейилади, агарда мувозанатлашувчи эркин қисм системалар жуфтликлари ўзаро ва барча боғланишлар ўзларига мос тескари боғланишлар билан бир хил бўлса.

§3.2 Симметрик матрица хоссалари.

Таърифдан симметрик матрицаларнинг қуйидаги хоссалари келиб чиқади.

А- n-тартибли квадрат матрица:

1. Бош ва бош бўлмаган диагоналларига нисбатан симметрик бўлган матрицалар шу матрица марказига нисбатан ҳам симметрик бўлади.

Хақиқатан, А=(a_{ij}), i,j=1,2,…,n n-тартибли квадрат матрица бўлиб бош ва бош бўлмаган диагоналларга нисбатан симметрик бўлсин, яъни

A^T= А=A^L ёки a_{ij}=a_{ji}; a_{ij}=$a_{n+1-j,n+1-i}$, i,j=1,2,…,n. бўлади.

Бу ердан a_{ji}=$a_{n+1-j,\ n+1-i}$ ёки a_{ij}=$a_{n+1-i,\ n+1-j}$ келиб чиқади.

Шунинг учун

А=(a_{ij}) = (a_{ji}) = ($a_{n+1-j,\ n+1-i}$) = ($a_{n+1-i,\ n+1-j}$) = A^o га эга бўламиз.

2.2. Асосий таърифдан А матрица марказга нисбатан симметрик.

2. Вертикал ва горизонтал ўқларга нисбатан симметрик бўлган матрицалар шу матрица марказига нисбатан ҳам симметрик бўлади.

Хақиқатан, айтайлик А=А=$A^!$, яъни a_{ij} = $a_{n+1-i,j}$ ва

a_{ij} = $a_{i,n+1-j},\ \ i,j=1,2,\dots,n$ бўлгани учун $a_{n+1-i,j}$. = $a_{i,n+1-j}$ ёки

a_{ij} = $a_{n+1-i,\ n+1-j}$ келиб чиқади. Шунинг учун

A = (a_{ij}) = $(a_{n+1-i,j})$ = $(a_{i,n+1-j})$ = $(a_{n+1-i,n+1-j})$ = $A,^{o}$ яъни2.2 асосий таърифга кўра А матрица марказга нисбатан симметрик матрица.

3. Вертикал (горизонтал) ўқга нисбатан симметрик бўлган матрицалар махсус матрицалар бўлади.

Хақиқатдан, агар А матрица вертикал (горизонтал) ўқга нисбатан симметрик бўлса у ҳолда 2.2 асосий таърифга кўра $a_{ij} = a_{i,n+1-j.}$ $(a_{ij} = a_{n+1-i,j})$ бўлади. Бу ердан j – чи ва n+1-j – устунлар (i ва n+1-i – сатрлар) бир хил элементларга эга. Равшанки бундай матрицанинг детерминанти 0 га тенг. Демак А матрица махсус матрица бўлади.

4. Ихтиёрий А квадрат матрица учун қуйидагилар мос равишда бош диагоналга, бош бўлмаган диагоналга, вертикал ўққа, горизонтал ўққа ва матрица марказига нисбатан симметрик матрицалар бўлади.

$S_1 = \frac{1}{2}$ (A+A^T),

$S_2 = \frac{1}{2}$ (A+A),

$S_3 = \frac{1}{2}$ (A+$A^!$),

$S_4 = \frac{1}{2}$ (A+A^-),

$S_5 = \frac{1}{2}$ (A+A^o),

Хақиқатдан, 2.1 таърифнинг 1 муносабатдан қуйидагиларга эга бўламиз

$S_1^T = \frac{1}{2}(A+A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T+A) = \frac{1}{2}(A+A^T) = S_1$

$S_2 = \frac{1}{2}(A+A) = \frac{1}{2}(A+A) = \frac{1}{2}(A+A) = S_2$

$S_3^! = \frac{1}{2}(A+A^!)^! = \frac{1}{2}(A^!+A) = \frac{1}{2}(A+A^!) = S_3$

$S_4^- = \frac{1}{2}(A+A^-)^- = \frac{1}{2}(A^-+A) = \frac{1}{2}(A+A^-) = S_4$

$S_5^0 = \frac{1}{2}(A+A^0)^0 = \frac{1}{2}(A^0+A) = \frac{1}{2}(A+A^0) = S_5$

5. Агар А квадрат матрица бош (бош бўлмаган) диагоналга, вертикал (горизонтал) ўққа, матрица марказига нисбатан симметрик матрица бўлса, у ҳолда

A^i (i=1,2,…), $\propto$A, T*AT

лар ҳам мос равишда бош бўлмаган) диагоналга, вертикал (горизонтал) ўққа, матрица марказига нисбатан симметрик матрица бўлади. Бу ерда Т-А матрица билан бир хил тартибли бўлган махсусмас квадрат матрица, $\propto$ - хақиқий сон, * - мос транспонирлашбелгисини билдиради.

Хақиқатдан,

a) Агар A^T = A бўлса, у ҳолда

$(A^i)^T = (A^T)^i = A^i$, (i=1,2,…), $(\propto A)^T = \propto A^T = \propto A$,

$(T^T A T)^T = (AT)^T (T^T)^T = T^T A^T T = T^T AT$;

бўлади;

b) Агар A = A бўлса, у ҳолда $(A^i) = (A)^i = A^i$, (i=1,2,…), $(\propto A) = \propto A = \propto A$,

$(T AT) = (AT)(T) = T A T = T AT$

бўлади;

6. Агар A махсусмас квадрат марица бош (бош бўлмаган) диагоналга, матрица марказига нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда A^{-1} ҳам мос равишда бош (бош бўлмаган) диагоналга, матрица марказига нисбатан симметрик бўлади.

Хақиқатдан, асосий 1.4.9 муносабатга кўра

a) Агар $A^T = A,$ бўлса, $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$;

b) Агар $A = A,$ бўлса, $(A^{-1}) = (A)^{-1} = A^{-1}$;

c) Агар $A^0 = A,$ бўлса, $(A^{-1})^0 = (A^0)^{-1} = A^{-1}$;

7. Агар A ва B квадрат матрицалар ўз марказларига нисбатан симметрик матрицалар бўлса, у ҳолда AB ва BA матрицалар ўз марказларига нисбатан симметрик матрицалар бўлади.

Хақиқатдан, $A = A^0$ ва $B = B^0$ бўлса у ҳолда 1.4.4. муносабатнинг охирги тенглигидан қуйидагига эга бўламиз.

$$(AB)^0 = (A^0 B^0) = AB$$

$$(BA)^0 = (B^0 A^0) = BA$$

8. Агар A n-тартибли квадрат матрица ўз марказига нисбатан симметрик бўлиб, △i, i=1,2,…,n бу матрицанинг бош минорлари, △i- шу минорларга мос тўлдирувчи минорлар бўлса, у ҳолда

△i=$\triangle_{n-i,\ \ i=1,2,\dots,n-1}$ (2.2.1)

Исбот. А n-тартибли қуйидаги кўринишга эга бўлган, марказга нисбатан симметрик бўлган квадрат матрица бўлсин.

$$A = (a_{k,j}),\ a_{kj} = a_{n+1-j,\ k,\ \ j=1,2,\dots,n} \text{ (2.2.2)}$$

Қуйидаги матрицаларни қараймиз.

$$A_i = (a_{k,j}),\ k,j = 1,2,\dots,i,\ 1 \le i \le n \text{ (2.2.3)}$$

$$\overset{*}{A_i} = (a_{n+1-k,\ \ n+1-j}),\ k,j = i,\ i-1,\ i-2,\dots,1,1 \le i \le n \text{ (2.2.4)}$$

(2.2.2)дан $|A_i| = |\overset{*}{A_i}|$ келиб чиқади.

Масалан и=1 учун $A_1 = (a_{11}),\ \overset{*}{A_1} = (a_{nn})$;

i=2 учун

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \overset{*}{A_2} = \begin{pmatrix} a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

бўлгани учун $a_{11} = a_{nn}$;

(2.2.2)дан $\overset{*}{A_2} = \overset{0}{A_2}$ келиб чиқади.

Шунинг учун $|A_2| = |\overset{*}{A_2}|$

Барча $i \le \left[\frac{n}{2}\right]$ бўлганлиги учун (2.2.2)га кўра A* = $\overset{0}{A_i}$ га эга бўламиз. $i \le \left[\frac{n}{2}\right]$ бўлганлиги учун эса матрицанинг охирги сатрлари (устунлари) $\overset{*}{A_i}$ матрицанинг биринчи сатрлари (устунлари) билан тескари тартибда мос тушади ва нихоят i=n учун A_i ва $\overset{*}{A_i}$ матрицалар мос келади. A_i матрицалар А матрицанинг бош минорига мос келади яъни

$$\triangle_i = |A_i| = |\overset{*}{A_i}|, \quad \text{и=1,2,…,н,}$$

бу ерда $A_n = A$.

(2.2.3)дан А матрицанинг тўлдирувчи минорига $\overline{A}$ матрицанинг $\overline{\triangle}_i$ тўлдирувчи минорларига

$$\overline{A}_i = (a_{i+k,i+j}), \text{ k,j=1,2,…, n-i}$$

матрицалар мос келади.

Бундан

$$\overline{A}_{n-i} = (a_{n-i+k,n-i+j}), \text{ k,j=1,2,…, i (2.2.5) келиб чиқади.}$$

(2.2.4) ва (2.2.5) ларни тенглаб

$\overline{A}_{n-i} = \mathrm{A}_i^*$ ни ҳосил қиламиз.

Ва нихоят

$$\triangle_i = |A_i| = \left|\mathrm{A}_i^*\right| = |\overline{A}_{n-i}| = \overline{\triangle}_{n-i}.$$

Мисол 2.1. А тўртинчи тартибли марказга нисбатан симметрик матрица бўлсин.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{34} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Унинг бош минорини ва мос тўлдирувчи минорларини хисоблаймиз.

$\triangle_1 = a_{11};$

$\triangle_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$

$\triangle_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}^2 + a_{12}\, a_{23}\, a_{24} +$

$+a_{13}a_{21}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{12}a_{21};$

$\triangle_4 = |A|,$

$\overline{\triangle}_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}^2 + a_{12}\, a_{23}\, a_{24} +$

$+a_{13}a_{21}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{24} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{12}a_{21};$

$\overline{\triangle}_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$

$\overline{\triangle}_3 = a_{11}.$

Бу ердан

$$\triangle_1 = \overline{\triangle}_{4-1} = \overline{\triangle}_3,$$

$$\triangle_2 = \overline{\triangle}_{4-2} = \overline{\triangle}_2,$$

$$\triangle_3 = \overline{\triangle}_{4-3} = \overline{\triangle}_1,$$

келиб чиқади.

9. Агар А n-тартибли квадрат матраца ўз марказига нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда

$\overline{\triangle}_i > 0$, i=1,2,…, n-1, $\triangle_n = |A| > 0$ (2.2.6)

шартлар А матриканинг мусбат аниқланган бўлиши учун (2.2.6) шартлар қуйидаги кўринишда бўлади.

$$(-1)^i\overline{\triangle}_i > 0, i = 1,2,\dots,\ \ n-1, \qquad (-1)^n\triangle_n = (-1)^n|A| > 0 \quad (2.2.8)$$

агар n – тоқ бўлса;

Исбот: Айтайлик А марказга нисбатан симметрик бўлган n-тартибли квадрат матрица бўлсин.

Зарурлиги: Агар А матрица мусбат аниқланган матрица бўлсин, у ҳолда силвестр критериясига кўра

$\triangle_i > 0,$ i=1,2,…, n-1, $\triangle_n = |A| > 0$ бўлади ва 8-тасдиққа кўра

$\triangle_i = \overline{\triangle}_{n-1} > 0,$ i=1,2,…, n-1.

Равшанки агар и 1,2,…, н-1 қийматларни қабул қилса у ҳолда н-и ҳам шу қийматларни тескари тартибда қабул қилади.

Шунинг учун $\triangle_i = \overline{\triangle}_{n-1} > 0$ дан $\triangle_{n-i} = \overline{\triangle}_i > 0$ келиб чиқади.

Етарлилиги: Саккизинчи тасдиққа кўра

$\triangle_i = \overline{\triangle}_{n-1,}\ \ i = 1,2,\dots,n-1$ ёки

$\triangle_{n-i} = \overline{\triangle}_{i,}\ \ i = 1,2,\dots,n-i$ (2.2.9)

га эга бўламиз.

Агар $\overline{\triangle}_i > 0,\ i = 1,2,\dots\ ,\ n-i,\ \ \triangle_n = |A| > 0$ бўлса, у ҳолда (2.2.9) дан $\triangle_{n-i} > 0$ келиб чиқади. Бу ердан Силвестр критериясига кўра А матрица мусбат аниқланган.

Мисол 2.2.

А қуйидаги кўринишга эга бўлган матрица бўлсин.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

яъни марказга нисбатан симметрик матрица.

1) Силвестр критериясига кўра

$$\triangle_1 = -1 < 0,$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 > 0,$$

$$\triangle_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -5 < 0,$$

$$\triangle_4 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 9 > 0$$

$$\triangle_5 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0.$$

ва нихоят A матрица силвестр критериясига кўра манфий аниқланган.

2) Тўққизинчи тасдиққа кўра

$$\overline{\triangle_1} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 9 > 0,$$

$$\overline{\triangle_2} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -5 < 0,$$

$$\overline{\triangle_3} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 > 0,$$

$$\overline{\triangle_4} = -1 < 0.$$

ва нихоят,

$$(-1)^0\overline{\Delta}_1 = 9 > 0,\quad (-1)^1\overline{\Delta}_2 = 5 > 0,\quad (-1)^2\overline{\Delta}_3 = 2 > 0,$$
$$(-1)^3\overline{\Delta}_4 = 1 > 0,\quad (-1)^5\overline{\Delta}_5 = 8 > 0,$$

Шунинг учун А матрица 9-тасдиққа кўра манфий аинқланган.

10. Агар А n-тартибли квадрат матрица

1) бош диагоналга

2) бош бўлмаган диагоналга

3) вертикал ўққа

4) горизонтал ўққа

5) матрица марказига нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда бу матрицани мос равишда қуйидагича блок матрицалар кўринишида ёзиш мумкин:

6) $n = 2k\ da \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1^T & A_2 \end{pmatrix}$

$$n = 2k+1\ \ da\ \ A = \begin{pmatrix} A_1 & a_1 & B_1 \\ a_1^T & a_{k+1,k+1} & a_2^T \\ B_1^T & a_2 & A_2 \end{pmatrix}$$

7) $n = 2k\ \ da\ \ A = \begin{pmatrix} A & C_1 \\ C_2 & A_1 \end{pmatrix}$

$$n = 2k+1\ \ da\ \ A = \begin{pmatrix} A_1 & a_1 & C_1 \\ a_2^T & a_{k+1,k+1} & a_1^T \\ C_1^T & a_2 & A_1 \end{pmatrix}$$

8) $n = 2k\ \ da\ \ A = \begin{pmatrix} A_1 & A_1^1 \\ A_2 & A_2^1 \end{pmatrix}$

$$n = 2k+1\ \ da\ \ A = \begin{pmatrix} A_1 & a_1 & A_1^1 \\ a_1^T & a_{k+1,k+1} & (0_2^T)^1 \\ A_2 & a_2 & A_2^1 \end{pmatrix}$$

9) $n = 2k \;\; da \;\; A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_1^1 & B_1^1 \end{pmatrix}$

$$n = 2k + 1 \;\; da \;\; A = \begin{pmatrix} A_1 & a_1 & B_1 \\ a_1^T & a_{k+1,k+1} & (a_2^T) \\ A_1^{-} & a_2^{-} & B_1^{-} \end{pmatrix}$$

10) $n = 2k \;\; da \;\; A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1^{\circ} & A_1^{\circ} \end{pmatrix}$

$$n = 2k + 1 \;\; da \;\; A = \begin{pmatrix} A_1 & a_2 & B_1 \\ a_1^T & a_{k+1,k+1} & (a_1^T)^{\circ} \\ B_1^{\circ} & a_2^{\circ} & A_1^{\circ} \end{pmatrix}$$

бу ерда барча блок матрицалар k- тартибли

$$a_1 = (a_{k+1,1},\ a_{k+1,2}, \dots a_{k+1,k})^T,$$

$$a_2 = (a_{k+1,k+2},\ a_{k+1,k+3}, \dots a_{k+1,n})^T.$$

§3.3 Кососимметрик (антисимметрик) матрицалар ва уларнинг хоссалари.

3.4-тариф. $A = (a_{ij})$ n-тартибли квадрат матрица.

1) Бош диагоналга нисбатан кососимметрик (антисимметрик) дейилади, агарда $A^T = -A$, яъни

$a_{ij} = -a_{ji}\ ,\ \ i,j = 1,2,\dots,n,$ бўлса;

2) бош бўлмаган диагоналга нисбатан кососимметрик дейилади, агарда $A = -A$ яъни

$a_{ij} = -a_{n+1-j,\ \ n+1-i,}\ \ \ i,j = 1,2,\dots,n,$ бўлса;

3) вертика ўққа нисбатан кососимметрик дейилади, агарда $A^1 = -A,$ яъни

$a_{ij} = -a_{i,n+1-j}\ i,j = 1,2,\dots,n,$ бўлса;

4) горизонтал ўққа нисбатан кососимметрик дейилади, агарда $A^{\circ} = A,$ яъни

$a_{ij} = -a_{n+1-i,\ \ n+1-j,}\ \ \ i,j = 1,2,\dots,n,$ бўлса;

Бу таърифдан қуйидагилар келиб чиқади.

1. Хар қандай А квадрат матрица учун қуйидагилар мос равишда бош диагоналга, бош бўлмаган диагоналга, вертикал ўққа, горизонтал ўққа, матрица марказига нисбатан кососимметрик матрицалар бўлади.

$\overline{S}_1 = \frac{1}{2}\ (A - A^T),$

$\overline{S}_2 = \frac{1}{2}\ (A - A),$

$\overline{S}_3 = \frac{1}{2}\ (A - A^{!}),$

$\overline{S}_4 = \frac{1}{2}\ (A - A^{\text{`}}),$

$\overline{S}_5 = \frac{1}{2}\ (A - A^{0}).$

Хақиқатдан.

$$\overline{S}_1^T = \frac{1}{2}\ (A - A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T) = -\overline{S}_1$$

$$\overline{S}_2 = \frac{1}{2}\ (A - A)^{\perp} = \frac{1}{2}(A - A)^{\perp} = -\frac{1}{2}(A - A)^{\perp} = -\overline{S}_2$$

$$\overline{S}_3^{!} = \frac{1}{2}\ (A - A^{!})^{!} = \frac{1}{2}(A^{!} - A) = -\frac{1}{2}(A - A^{!}) = -\overline{S}_3$$

$$\overline{S}_4^{\text{`}} = \frac{1}{2}\ (A - A^{\text{`}})^{\text{`}} = \frac{1}{2}(A^{\text{`}} - A) = -\frac{1}{2}(A - A^{\text{`}}) = -\overline{S}_4$$

$$\overline{S}_5^{0} = \frac{1}{2}\ (A - A^{0})^{0} = \frac{1}{2}\left(A^{0} - A\right) = -\frac{1}{2}\left(A - A^{0}\right) = -\overline{S}_5$$

2. Агар А квадрат матрица бўлса, у ҳолда $A = S_1 + \overline{S}_i$, i=1,2,3,4,5 А матрицани мос равишда бош диагоналга, бош бўлмаган диагоналга, вертикал ўққа, горизонтал ўққа, матрица марказига нисбатан симметрик ва кососимметрик бўлган матрицалар йиғиндилари ёйилмаси бўлади.

3. Агар А n-тартибли квадрат матрица

1) бош диагоналга,

2) бош бўлмаган диагоналга,

3) вертикал ўққа,

4) горизонтал ўққа,

5) матрица марказига нисбатан кососимметрик бўлса, у ҳолда бу матрицани мос равишда қуйидагича блок матрицаларга ажратиб ёзиш мумкин.

1) $= 2k\ \ da\ \ A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ -B_1^T & A_2 \end{pmatrix},$

$$n = 2k+1 \;\; da \;\; A = \begin{pmatrix} A_1 & a_1 & B_1 \\ a_1^T & -a_{k+1,k+1} & a_2^T \\ -B_1^T & -a_2 & A_2 \end{pmatrix},$$

2) $= 2k \;\; da \;\; A = \begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ C_1^T & A_1 \end{pmatrix}$,

$$n = 2k+1 \;\; da \;\; A = \begin{pmatrix} A_1 & a_1 & C_1 \\ a_2^T & -a_{k+1,k+1} & -a_1^T \\ -B_1^T & -a_2 & -A_1 \end{pmatrix},$$

3) $= 2k \;\; da \;\; A = \begin{pmatrix} A_1 & -A_1^1 \\ C_1^T & -A_2^1 \end{pmatrix}$,

$$n = 2k+1 \;\; da \;\; A = \begin{pmatrix} A_1 & -a_1 & -A_1^1 \\ (a_1^T)^1 & -a_{k+1,k+1} & (-a_2^T)^1 \\ A_2 & -a_2 & -A_2^1 \end{pmatrix},$$

4) $= 2k \;\; da \;\; A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ -A_1^{-} & -B_1^{-} \end{pmatrix}$,

$$n = 2k+1 \;\; da \;\; A = \begin{pmatrix} A_1 & a_1 & B_1 \\ -a_1^T & -a_{k+1,k+1} & -a_2^T \\ -A_1^{-} & -a_2^{-} & -B_1^{-} \end{pmatrix},$$

1) $= 2k \;\; da \;\; A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ -B_1^{0} & -A_1^{0} \end{pmatrix}$,

$$n = 2k+1 \;\; da \;\; A = \begin{pmatrix} A_1 & a_2 & B_1 \\ a_1^T & -a_{k+1,k+1} & a_2^T \\ -B_1^{0} & -a_2^{0} & -A_1^{0} \end{pmatrix},$$

бу ерда барча блок матрицалар к-тартибли

$$a_1 = (a_{k+1,\;k+1,}\, a_{k+1,2}\,, \dots ,\; a_{k+1,\;k})^T$$

$$a_2 = (a_{k+1,\;k+2,}\, a_{k+1,\;k+3}\,, \dots ,\; a_{k+1,\;n})^T$$

§3.4 Умумлашган ортаганал матрицалар

3.5-тариф. $A = (a_{ij})$ $n -$ тартибли квадрат матрица:

1) бош диагоналга нисбатан ортогонол дейилади, агарда

$A^T = A^{-1}$ бўлса,

2) бош бўлмаган диагоналга нисбатан ортогонол дейилади, агарда

$A^{\perp} = A^{-1}$ бўлса,

3) вертикал ўққа нисбатан ортогонол дейилади, агарда

$A^{!} = A^{-1}$ бўлса,

4) горизонтал ўққа нисбатан ортогонол дейилади, агарда

$A^{-} = A^{-1}$ бўлса,

5) матрица марказига нисбатан ортогонол дейилади, агарда

$A^{0} = A^{-1}$ бўлса,

Бу таърифдан келиб чиқадики, агарда А ва В квадрат матрицалар бош (бош бўлмаган) диагоналга, вертикал (горизонтал) ўққа, матрица марказига нисбатан ортогонал бўлса у ҳолда A^{-1} ва АВ матрицалар ҳам мос равишда бош (бош бўлмаган) диагоналга вертикал (горизонтал) ўққа матрица марказига нисбатан ортогонал бўлади.

Ҳақиқатдан, агар

a) $A^T = A^{-1}$, $B^T = B^{-1}$ бўлса, $(AB)^T = B^T A^T = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$,

$(BA)^T = A^T B^T = A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1}$,

b) $A = A^{-1}$, $B = B^{-1}$ бўлса, $(AB) = BA = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$,

$(BA) = AB = A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1}$.

Хулоса

Матрица тушунчаси, чизиқли алгебранинг асосий тушунчаларидан бири бўлиб, унинг талаба томонидан чуқур ўзлаширилиши мухим ахамиятга эга. Чунки, бу тушунчанинг татбиқлари замонавий ишлаб чиқаришдаги мухим иқтисодий, техникавий масалаларни ечишда кенг қўлланилади. Бундан ташқари йирик масштабли системалар структураси ва динамик хоссаларини ўрганишда матрицалардан файдаланиш қулай бўлиб, матрицаларни транспонирлаш масаласи йирик масштабли системалар структурасининг ўзгариши масаласи билан устма-уст тушади. Шунинг учун йирик масштабли системалар билан матрицалар ўртасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиб, матрицаларни транспонирлаш тушунчасидан фойдаланиб, йирик масштабли системалар структурасининг ўзгаришини ўрганиш мумкин. Бунинг учун матрицаларни умумлашган транспонирлашнинг хоссаларини, умумлашган симметрик матрицалар хоссалари ўрганиб чиқиш керак бўлади. Бунда матрицалар алгебраси усулларидан фойдаланиб, матрицаларни умумлашган транспонирлашнинг хоссалари, умумлашган симметрик матрицалар хоссалари исботланади.

Ушбу магистрлик диссертациясида қуйидаги натижалар олинди: матрицаларни умумлашган транспонирлашни 13 та хоссаси исботланди, умумлашган симметрик матрицаларни 10 та хоссаси исботланди, умумлашган кососимметрик матрицаларни 3 та хоссаси исботланди, умумлашган ортогонал матрицаларни 2 та хоссаси исботланди.

Ишнинг назарий аҳамияти шундан иборатки, матрицаларни умумлашган транспонирлаш ва умумлашган симметрик матрицаларнинг хоссалари матрицалар назарияси учун янгиликдир. Амалий жихатдан шуни айтиш мумкинки, олинган назарий натижаларни йирик масштабли системалар динамик хоссаларини ўрганишга ва Ляпунов функциясининг ишораларини аниқлашга қўллаш мумкин.

Адабиётлар.

1. Беллман Р. В ведение в теории матриц. – М. , Наука, 1976.
2. Вохидов С., Хамдамов Ш. Умумлашган симметрик матрицалар. Республика илмий-амалий анжумани материаллари. – Андижон 2011. 64-66 бетлар.
3. Гельфонт И.М. Чизиқли алгебрадан лекциялар. -Т. Олий ва ўрта мактаб. 1964
4. Гантмахер Ф.Р. Теории матриц. − М.: Наука, 1967. − 576 с.
5. Груйич Л.Т., Мартынюк А.А., Риббенс – Павелла М. Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. − Киев.: Наук. думка, 1984. − 307 с.
6. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. –М.: Наука, 1967. − 472 с.
7. Искандаров Д., Муллажонова Ж. Квадратик формаларнинг ишоралари. Республика илмий-амалий анжумани материаллари. – Андижон 2011. 67-68 бетлар.
8. Курош А. Г. Олий алгебра курси. Т. «Ўқитувчи» 1976
9. Кострикин А.И., Сборнык задач по алгебре. М., «Наука», 1986
10. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1982. −277с.
11. Миладжанов В. Г., Муллажонов Р.В. Анализ устойчивости динамической системы на основе матриц – функций Ляпунова. //Межд. научно−практическая конф. “Известия вузов”.Сборнык научных статей. −Бишкек, 2005. −С. 49−53.
12. Миладжанов В. Г., Муллажонов Р.В. Об одном методе анализа устойчивости линейных крупномасштабных систем. // Узбекский журнал Проблемы механики. − Ташкент, 2009. − № 2-3. −С. 28-30.
13. Миладжонов В.Ғ., Муллажонов Р.И., Абдуғоппорова Ш.Н., Транспонирланган ва симметрик матрицалар. –Андижон, илмий хабарнома 2009-№1
14. Муллажонов Р.В. Обобщенное транспонирование матриц и структуры линейных крупномасштабных систем // Украинский журнал «Доп.НАН Украини». −Киев, 2009. - №11.С. 27 −35.
15. Муллажонов Р.В. Анализ устойчивости линейных крупномасштабных систем. // Проблема механики. − Ташкент, 2010. −№2.−С. 4− 7.
16. Муллажонов Р.В., Рўзимбетов Ё. Матрицаларнинг умумлашган транспонирлаш. Республика илмий-амалий анжумани материаллари. – Андижон 2011. 62-64 бетлар.
17. Фадеев Д.К. Лекции по алгебре. М. «Наука», 1984

18. Хожиев Ж.Х., Файнлейб А.С. Алгебра ва сонлар назарияси курси. Т. “Ўзбекистон” 2001