O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI

FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

«5130100- matematika» ta’lim yo‘nalishi bo‘yicha
bakalavr darajasini olish uchun
015-46-guruh talabasi Sa’dullayev Anvar Qahramon o‘g‘lining
“Bir bog‘lamli ikki o‘lchovli topologik fazolar fundamental gruppalarini hisoblash”
mavzusidagi

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar:__________ B.A.Tursunov

“Himoyaga tavsiya etilsin”
Fizika – matematika fakulteti
dekani:_______________f.-m.f.d. A.Xolmurodov
“03” ___06_________ 2019-yil

Qarshi – 2019 y

MUNDARIJA

KIRISH

Bugungi kunda O‘zbekistonda ta’lim sohasida amalga oshirilayotgan islohotlar ko‘p jihatdan mamlakatimizni modernizatsiya qilish jarayonlari bilan hamohang tarzda olib borilmoqda. Bunda asosiy yo‘nalishlar sifatida oliy va o‘rta maxsus ta’lim tizimida o‘quv, o‘quv-uslubiy va ilmiy faoliyatni modernizatsiya qilish, ta’lim va tadqiqot jarayonlaridagi innovatsion yo‘nalishlarni kuchaytirish tadbirlari izchil amalga oshirilmoqda. Mazkur tadbirlardan kutilayotgan asosiy maqsad yuqori darajadagi intelliktual salohiyatga ega bo‘lgan milliy mutaxasislar, kadrlarni tayyorlash texnalogiyasi hamda ta’limning mazmunini yangicha bosqichga ko‘tarishdan iborat.

Hozirgi zamon pedagogikasining asosiy maqsadi uzluksiz ta’limdagi uzviylikni ta’minlashdan iborat bo‘lib, uning bosh masalalaridan biri yosh avlodga har tomonlama chuqur va puxta bilim berishning samarali metodika va metodlarini ishlab chiqishdan iborat. Bu esa o‘z navbatida uzluksiz ta’lim va uning mutaxasislari oldiga bo‘lajak kadrlarni tayyorlashda ularga o‘qitiladigan fanlarning uzluksiz ta’lim tizimining turli bosqichlarida o‘qitish uzvuyligi va uzluksizligini ta’minlashni muhim vazifalaridan biri qilib qo‘yadi.

Ana shunday vazifa uzluksiz ta’lim tizimida o‘qitiladigan matematika fanining oldiga ham qo‘yildi. Ko‘pgina matematik tushunchalar, ba’zida butun bir matematik nazariyalar vujudga kelishi bilan matematikadan tashqarida o‘z tatbig‘ini topmaydi. Jumboqli kompleks sonlar tarixi bunga yaqqol misol bo‘la oladi.

Shunga o‘xshash sohalardan yana biri Yevklid geometriyasi, Lobachevskiy geometriyasi, zamonamiz geometriyasi , qolaversa, zamonaviy matematikaning bir bo‘limi, hosilasi bo‘lgan topologiya fanidir. Topologiya – matematikaning yosh va muhim bo‘limlaridan biri hisoblanadi. Topologiya fani geometriya va matematik analiz fanlarining qator fundamental faktlari (tushunchalari) ni umumiy nuqtai nazardan qayta ko‘rib chiqish natijasida paydo bo‘ldi.

Hozirgi zamon fanlarining rivojlanishida topologiyaning fiziki, biologiya, informatika, kimyo hamda geografiya fanlaridagi tatbiqlari qo‘llanilmoqda.

Topologiya fani shunday fanki, u geometrik figuralarning sifatiy xossalarini faqat uch o‘lchamli fazoda emas, balki undan yuqori o‘lchamli fazolarda ham o‘rganishda yordam beradi.

Topologik fazolarning geometrik xossalarini o‘rganishda asosiy topologik usullardan biri algebraik vositalarni ishlatishdir. Topologiyada bu maqsadni amalga oshirish uchun qator usullar, topologik fazoga algebraik obyektlar, masalan, gruppalar, halqalar, maydonlar va algebralar mos qo‘yilib o‘rganila boshlandi. Topologiya masalalarini yechishga bunday yondashish mos algebraik masalaga olib keladi. Algebraik masalalarning “hosila” yechimi ko’p hollarda topologik masalalar yechimini aniqlash bilan bog‘liq bo‘ladi. Algebraik topologiya asosida esa shu ko‘rinishdagi mulohazalar yotadi. Algebraik topologiyaning muhim tushunchalaridan bo‘lgan gomotop yo‘llar, fundamental gruppalar keyinchalik o‘rganiladigan gomotopik gruppalar va gomologiyalarning elimentar tushunchalari hisoblanadi.

Yuqoridagi omillarni hisobga olib gomotop yo‘llar, fundamental gruppalar, bir va ko‘p bog‘lamli fazolar va ularning xossalarini o‘rganishga bag‘ishlangan ushbu bitiruv malakaviy ishi mavzusining dolzarbligini ham aytishiz mumkin.

BMI mavzusining maqsadi: Ba’zi ikki o‘lchovli ko‘p bog‘lamli topologik fazolar fundamental gruppalarini hisoblash.

BMI mavzusining vazifalari: Tatqiqod maqsadidan kelib chiqqan holda quyidagi vazifalar belgilandi:

- ✓ Chiziqli bog‘lanishli fazolarni o‘rganish;
- ✓ Yo‘llar gomotopiyasini o‘rganish;
- ✓ Sinflar ko‘paytmasini o‘rganish;
- ✓ Fazolarning fundamental gruppalari;
- ✓ Aylananing fundamental gruppasini hisoblash;

- ✓ Qoplovchi fazolarni o‘rganish;
- ✓ Qoplovchi fazolarning fundamental gruppasini o‘rganish;
- ✓ Ba’zi fazolarning fundamental gruppalarini hisoblashni o‘rganish.

BMI ning ob’ekti: yo‘llar va ularning ko‘paytmasi, yo‘llar gomotopiyasi, fazoning retrakti.

BMI ning predmeti: Gomotop yo‘llar, fundamental gruppalar hamda bir va ko‘p bog‘lamli fazolar.

BMI ning ilmiy va amaliy ahamiyati: BMI ishi bo‘yicha o‘rganilgan ma’lumotlar nazariy ahamiyatga ega bo‘lib, ular topologiyaning yangi bo‘limlaridan biri algebraik topologiyani o‘rganish jarayonida qo‘llaniladi.

BMI ning strukturaviy tuzilishi: Kirish, ikki bob, ja’mi oltita paragraf, xulosa hamda adabiyotlar ro‘yxatidan tashkil topgan.

Birinchi bob jami 13 ta ta’rif, 12 ta teorema, 2 ta lemma, 7 ta natija va 13 ta misoldan iborat bo‘lib, bu bobda yo‘llar, ekvivalent yo‘llar, yo‘llar ko‘paytmasi, gomotop akslantirishlar, retrakt akslantirish, fundamental gruppalar hamda bir bog‘lamli fazolar o‘rganilgan.

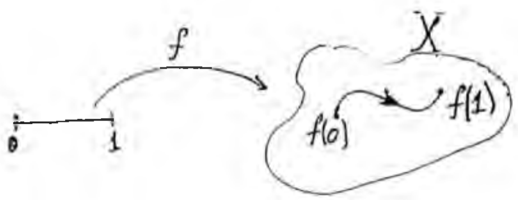
Ikkinchi bob esa 2 ta ta’rif, 16 ta teorema, 5 ta lemma, 6 ta natija va 4 ta misoldan tashkil topgan bo‘lib, ushbu bobda aylana va torning fundamental gruppasi, qoplovchi fazo va uning fundamental gruppasi, S^n $(n \geq 2)$ sferaning va Myobius yaprog‘ining fundamental gruppasini hisoblash o‘rganilgan.

I-BOB. YO‘LLAR GOMOTOPIYASI, BIR BOG‘LAMLI FAZOLAR

1.1-§. Yo‘llar va gomotop akslantirishlar

Bizga biror bo‘sh bo‘lmagan X topologik fazo berilan bo‘lsin. $f: [0,1] \to X$ uzluksiz akslantirishga X fazodagi ***yo‘l*** deyiladi.

Boshqacha aytganda, $f: [0,1] \to X$ uzluksiz akslantirish bo‘lib, $f(0) = a$ va $f(1) = b$ $(a, b \in X)$ bo‘lsa, u holda f akslantirishga a va b nuqtalarni tutashtiruvchi yo‘l, a —yo‘lning boshi, b —esa yo‘lning oxiri deyiladi.



Shuni ta’kidlash kerakki, yo‘l bu – f uzluksiz akslantirishning aynan o‘zi, uning X dagi obrazi $f([0,1])$ emas, f ning X dagi obraziga *egri chiziq* deyiladi.

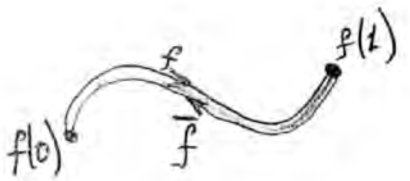
Masalan, yo‘lga sodda misol qilib har bir $t \in [0,1]$ uchun $id(t) = x$ formula bilan aniqlanuvchi $id: [0,1] \to X$ akslantirishni olishimiz mumkin, bu yerda x nuqta X fazoning biror nuqtasi. Bu yo‘lda biz faqat bitta nuqtada turaveramiz.

Eski yo‘ldan yangi yo‘lni hosil qilishning ikkita, ammo juda ham muhim bo‘lgan usuli mavjud. Birinchisi f yo‘lni teskari yo‘nalishda yuradigan, f bilan mos keluvchi g yo‘ldir, bu yo‘l f^{-1} orqali belgilanadi. Ikkinchisi esa bu ikki f va g yo‘llarni birlashtirib (agar mumkin bo’lsa), boshqa yangi bir yo‘lni hosil qilishdir. Bu ikki usullar haqida quyidagi lemmani keltiramiz :

1-lemma [2]. (a) Agar f — X topologik fazodagi yo‘l bo‘lsa, u holda

$$\bar{f}(t) = f(1 - t)$$

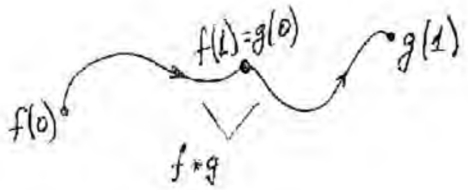
kabi aniqlangan akslantirish ham X fazoda yo‘l bo‘ladi.



(b) Agar f va g lar X fazodagi yo‘llar bo‘lib, f yo‘lning oxiri bilan g yo‘lning boshi ustma-ust tushsa, ya’ni $f(1) = g(0)$ bo‘lsa, u holda quyidagi tenglik bilan aniqlangan $f * g$: $[0,1] \to X$ akslantirish ham X fazoda yo‘l bo‘ladi:

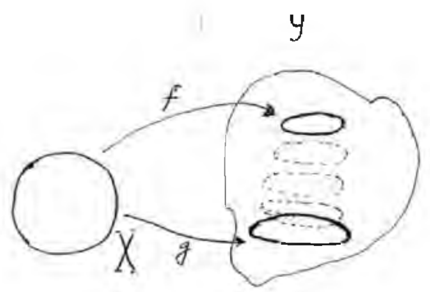
$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{agar } \ 0 \le t \le 1/2, \\ g(2t-1), & \text{agar } 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Buni quyidagi chizmada ko‘rishimiz mumkin:

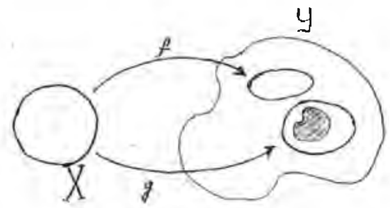


Biz topologik fazolarda aniqlangan uzluksiz akslantirishlar uchun ham ekvivalentlik munosabatini kiritishimiz mumkin. Faraz qilaylik bizga X va Y topologik fazolar va $f, g: X \to Y$ uzluksiz akslantirishlar berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar shunday uzluksiz $F: X \times I \to Y$ akslantirish mavjud bo‘lib, $F(x,0) = f(x)$ va $F(x,1) = g(x)$ shartlar bajarilsa, f va g akslantirishlar *gomotop* deyiladi. Bunda F uzluksiz akslantirish f va g o‘rtasidagi *gomotopiya* deyiladi, agarda g akslantirish o‘zgarmas bo‘lsa, f *nol gomotop* akslantirish deyiladi. Ya’ni gomotop akslantirishlarni quyidagi chizmadagi kabi tushinishimiz mumkin:



Quyidagi ko‘rsatilgan chizmada esa f va g akslantirishlar gomotop emas, chunki unda X fazoning f akslantirishdagi obrazini shu fazoning g akslantirishdagi obraziga akslantiruvchi uzluksiz $F: X \times I \to Y$ akslantirishni qurib bo‘lmaydi.



f va g gomotop akslantirishlar bo‘lsa $f \simeq g$ ko‘rinishida yoziladi.

1-misol. $F: \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$ akslantirishni $F(x,t) = x + t$ ko‘rinishida aniqlaylik. Uzluksiz funksiyalarning yig‘indisi ham uzluksiz ekanidan F ham uzluksiz. Shuning uchun F akslantirish $f(x) = F(x,0) = x$ va $g(x) = F(x,1) = x + 1$ akslantirishlar o‘rtasidagi gomotopiyadir.

2-misol. $f: I \to \mathbb{R}^2$ akslantirish

$$f(x) = (\cos(\pi x), \sin(\pi x))$$

ko‘rinishda, $g: I \to \mathbb{R}^2$ akslantirish esa

$$g(x) = (\cos(\pi x), -\sin(\pi x))$$

ko‘rinishda aniqlangan bo‘lsin. Bu akslantirishlar gomotop bo‘ladi. Haqiqatan,

$$F: I \times I \to \mathbb{R}^2$$

uzluksiz akslantirishni quyidagicha

$$F(x,t) = (\cos(\pi x), (1 - 2t)\sin(\pi x))$$

aniqlasak

$$F(x,0) = f(x) \text{ va } F(x,1) = g(x)$$

shartlarni ham qanoatlantiradi. Demak $F(x,t)$ akslantirish gomotopiya ekan.

3-misol. $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ birlik aylanani qaraylik. $f, g: S^1 \to \mathbb{R}^2$ akslantirishlar ixtiyoriy $(x,y) \in S^1$ lar uchun quyidagicha aniqlangan bo‘lsin:

$$f(x,y) = (x,y),$$

$$g(x,y) = (0,0).$$

Bu ikki akslantirish o‘zaro gomotop bo‘ladi. Bunda $F: S^1 \times I \to \mathbb{R}^2$ gomotopiyani

$$F\big((x,y),t\big) = (1-t)f(x,y)$$

ko‘rinishida aniqlashimiz mumkin. Haqiqatan

$$F\big((x,y),0\big) = f(x,y),$$

$$F\big((x,y),1\big) = g(x,y)$$

shartlar o‘rinli bo‘ladi.

4-misol. Bizga $f: [0,1] \to [0,1]$ ayniy akslantirish va $g: [0,1] \to [0,1]$ akslantirish ixtiyoriy $x \in [0,1]$ uchun $\mathrm{g}(x) = 0$ ko‘rinishida aniqlangan akslantirish berilgan bo‘lsin. Bu ikki akslantirishlar o‘zaro gomotop bo‘ladi. Ular o‘rtasidagi gomotopiya $F: [0,1] \times I \to [0,1]$ esa

$$F(x,t) = (1-t)x$$

ko‘rinishda aniqlanadi.

Bizga X va Y topologik fazolar berilgan bo‘lsin. U holda quyidagi teorema o‘rinli.

1-teorema [2,3]. Barcha $f: X \to Y$ uzluksiz akslantirishlar to‘plamida gomotoplik ($\simeq$) munosabati ekvivalent munosabat bo‘ladi.

Isboti [2] adabiyotda keltirilgan.

1-natija. $f, g: X \to Y$ va $h, j: Y \to Z$ uzluksiz akslantirishlar uchun $f \simeq g$ va $h \simeq j$ munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, u holda $(hf) \simeq (jg): X \to Z$ munosabat ham o‘rinli.

Isbot. $F: X \times I \to Y - f$ va g o‘rtasidagi gomotopiya, $H: Y \times I \to Z$ esa h va j o‘rtasidagi gomotopiya bo‘lsin. Unda biz hf va jg o‘rtasidagi $G: X \times I \to Z$ gomotopiyani

$$G(x,t) = H(F(x,t),t)$$

ko'rinishida aniqlashimiz mumkin. Tekshirib ko'rish mumkinki,

$$G(x,0) = H(F(x,0),0) = F(x,0) = f(x),$$
$$G(x,1) = H(F(x,1),1) = F(x,1) = g(x)$$

tengliklar o'rinli.■

2-ta'rif. $T \subset \mathbb{R}^n$ to'plamning ixtiyoriy ikkita x va y nuqtalarini tutashtiruvchi kesma shu to'plamda yotsa, bu to'plam *qavariq* deyiladi. Boshqacha qilib aytganda, har qanday $t \in [0,1]$ lar uchun $\{tx + (1-t)y\}$ to'plam T to'plamda yotsa, T to'plam qavariq deyiladi.

2-natija. Agar Y qavariq to'plam va X ixtiyoriy topologik fazo bo'lsa, u holda har qanday $f, g: X \to Y$ uzluksiz akslantirishlar o'zaro gomotop bo'ladi.

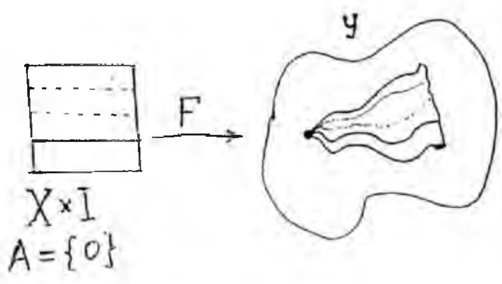
Isbot. Biz har qanday uzluksiz $f, g: X \to Y$ akslantirishlar olganimizda ham $Y \subset \mathbb{R}^n$ to'plam qavariq bo'lganligi uchun $F: X \times [0,1] \to Y$ gomotopiyani

$$F(x,t) = tf(x) + (1-t)g(x)$$

ko'rinishida aniqlasak bo'ladi.■

3-ta'rif. A to'plam X topologik fazoning qismto'plami hamda f_0 va f_1 lar X ni Y ga akslantiruvchi uzluksiz akslantirishlar berilgan bo'lsin. f_0 va f_1 akslantirishlar o'rtasida shunday $F: X \times I \to Y$ gomotopiya mavjud bo'lib, barcha $a \in A$ va barcha $t \in I$ lar uchun $F(a,t) = f_0(a)$ munosabat bajarilsa, f_0 va f_1 akslantirishlar *A to'plamga nisbatan gomotop* deyiladi va $f_0 \simeq_{rel\,A} f_1$ ko'rinishida belgilanadi.

Masalan, X topologik fazo sifatida I birlik kesmani va uning $A = \{0\}$ qismto'plamini olsak, u holda to'plamga nisbatan gomotopiyani quyidagi chizmadagi kabi tushunishimiz mumkin.



Yuqoridagi ta'rifdan ko'rinadiki, har bir $a \in A$ nuqtalar uchun $f_0(a) = f_1(a)$ tenglik bajariladi.

4-ta'rif. X va Y topologik fazolar uchun shunday uzluksiz $f: X \to Y$ va $g: Y \to X$ akslantirishlar mavjud bo'lib, $gf \simeq 1: X \to X$, $fg \simeq 1: Y \to Y$ shartlar bajarilsa, X va Y topologik fazolar *bir xil gomotop tipga ega* yoki *gomotop ekvivalent* deyiladi va $X \simeq Y$ ko'rinishida belgilanadi.

Ravshanki, har qanday gomeomorf fazolar bir xil gomotop tipli bo'ladi, ammo teskarisi har doim ham o'rinli emas.

5-misol. n o'lchamli disk $D^n \subset \mathbb{R}^n$ bitta nuqtaga (aytaylik $\{y\} \in D^n$ nuqtaga) gomeomorf emas, ammo bir xil gomotop tipli. Haqiqatan, $f: \{y\} \to D^n$ (masalan $f(y) = y$) va o'zgarmas $g: D^n \to \{y\}$ akslantirishlarni qaraylik. Ravshanki, $gf = 1$, bunda $F: D^n \times I \to D^n$ akslantirishni

$$F(x,t) = tx + (1-t)y$$

formula bilan aniqlaylik. Bu uzluksiz akslantirish fg va $1: D^n \to D^n$ akslantirishlar o'rtasidagi gomotopiya bo'ladi. Demak fazo nuqtaga gomotop ekvivalent ekan.

5-ta'rif. X topologik fazo biror nuqtaga gomotop ekvivalent bo'lsa, bu fazo *tortiluvchan fazo* deyiladi.

6-misol. Gomotop ekvivalent fazolar sifatida$C$ slindr vaS^1 aylanani olish mumkin. Ya'ni

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\},$$
$$S^1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$

bunda $i: S^1 \to C$ va $r: C \to S^1$ akslantirishni $r(x,y,z) = (x,y,0)$ tenglik yordamida aniqlaymiz. Ravshanki, $ri = 1: S^1 \to S^1$ munosabat o'rinli. Shunda $F: C \times I \to C$ akslantirishni

$$F\big((x,y,z),t\big) = (x,y,tz)$$

formula bilan aniqlasak, u ri va $1: C \to C$ lar o'rtasidagi gomotopiya bo'ladi.

3-natija. Ikki nuqtadan iborat S^0 fazo bir nuqtali fazoga gomotop ekvivalent emas.

2-teorema [4]. Agar X bog'lanishli, Y esa bog'lanishsiz topologik fazolar bo'lsa, u holda bu fazolar gomotop ekvivalent emas.

Isbot. Faraz qilaylik X va Y topologik fazolar gomotop ekvivalent bo'lsin, ya'ni $f: X \to Y$ va $g: Y \to X$ uzluksiz akslantirishlar mavjud bo'lib, ularning kompozitsiyasi va ayniy akslantirish o'zaro gomotop bo'lsin. U holda shunday

$$F: Y \times I \to Y$$

gomotopiya mavjud bo'lib, ixtiyoriy $y \in Y$ larda

$$F(y,0) = f(g(0))$$

$$F(y,1) = y$$

shartlar bajariladi.

Agar Y bog'lanishsiz fazo bo'lsa uni ikkita bo'sh bo'lmagan ochiq to'plamlarning birlashmasi sifatida ifodalash mumkin, ya'ni $Y = U \cup V$. Bu yerda $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$ va $U \cap V = \emptyset$. Unda shunday uzluksiz suryektiv $p: Y \to S^0$ akslantirish mavjudki,

$$p(y) = \begin{cases} 1, & \text{agar } \ y \in U, \\ -1, & \text{agar } \ y \in V \end{cases}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

X bog'lanishli ekanligidan, $Im\, f \subset U$ bog'lanishliligi kelib chiqadi. V to'plam bo'sh emasligidan kamida bitta $v \in V$ nuqta mavjud va biz $h: [0,1] \to S^0$ uzluksiz akslantirishni $h(x) = p\big(F(v,x)\big)$ ko'rinishida aniqlashimiz mumkin.

$$F(v,0) = f(g(0)) \in U$$

$$F(v,1) = v \in V$$

bo'lgani uchun $h(0) = 1$ va $h(1) = -1$ tengliklar o'rinli. Aniqlanishiga ko'ra h suryektiv va uzluksiz. Yuqoridagi natijaga ko'ra bunday bo'lishi mumkin emas. Demak, X va Y fazolar gomotopik ekvivalent emas.■

7-misol. $X = [0,1]$ fazo bir nuqtali fazo $\{0\}$ ga gomotop ekvivalentdir. Ya'ni $f: X \to \{0\}$ akslantirishni $f(x) = 0$ ko'rinishida va $g: \{0\} \to [0,1]$ akslantirishni esa $g(0) = 0$ ko'rinishida aniqlasak, $(fg): \{0\} \to \{0\}$ akslantirish ayniy va shuning uchun u o‘ziga gomotop. $(gf): X \to X$ akslantirishni ixtiyoriy $x \in [0,1]$ uchun $(gf)(x) = 0$ ko‘rinishida aniqlasak, yuqoridagi 4-misolda ko‘rganimizdek bu akslantirish ayniy akslantirishga gomotop. Demak $X = [0,1]$ to‘plamda keltirilgan topologiya aniqlasak, bu topologik fazo tortiluvchan topologik fazo bo‘lar ekan.

8-misol. $(0,1)$ interval ham $\{0\}$ ga gomotop. Albatta, biz bunda $g: \{0\} \to (0,1)$ akslantirishni yuqoridagidan boshqacharoq, masalan $g(0) = 1/2$ ko‘rinishda olamiz. $(gf): (0,1) \to (0,1)$ akslantirish ayniy akslantirishga gomotop bo‘ladi. Haqiqatan ular o‘rtasidagi gomotopiya

$$H: (0,1) \times I \to (0,1) \text{ ni}$$

$$H(x,t) = \frac{1 - t + tx}{2}$$

ko‘rinishida aniqlashimiz mumkin, ma’lumki bu akslantirish uzluksiz.

9-misol. Bizga A to‘plam quyidagi ko‘rinishda berilgan bo‘lsin:

$$A = \left\{(x,y) \in R^2 : 1 \le \sqrt{x^2 + y^2} \le 2\right\}.$$

Bunda $A \simeq S^1$ munosabat o‘rinli. Haqiqatan, $f: S^1 \to A$ akslantirishni

$$f(x,y) = (x,y)$$

ko‘rinishida va $g: A \to S^1$ akslantirishni esa

$$g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x,y)$$

ko‘rinishida aniqlasak, u holda gf akslantirish S^1 da ayniy akslantirish bo‘ladi va u o‘ziga gomotopdir. Hamda

$$(fg)(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x,y)$$

akslantirish A da ayniy akslantirishga gomotopdir. Bunda $F: A \times I \to A$ gomotopiya

$$F\big((x,y),t\big) = \frac{t\sqrt{x^2 + y^2} + (1 - t)}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x,y)$$

ko‘rinishda aniqlanadi. Demak f va g akslantirishlar A va S^1 lar o‘rtasida gomotop ekvivalent munosabatini aniqlar ekan.

6-ta’rif. X topologik fazoning A qismto‘plami bo‘lsin. Agar shunday $r: X \to A$ uzluksiz akslantirish mavjud bo‘lib, $ri = 1: A \to A$ (yoki ekvivalent, $r|A = 1$) shart bajarilsa, A to‘plam X fazoning *retrakti* deyiladi. Bu yerda $i: A \to X$akslantirish aniqlangan. r uzluksiz akslantirish esa *retraksiya* deyiladi.

10-misol. Har qanday L to‘g‘ri chiziq R^2 fazoning retrakti bo‘ladi. Bunda R^2 ning L to‘g‘ri chiziqdagi ortogonal proyeksiyasi retraksiya bo‘ladi va bu akslantirish uzluksizdir.

7-ta’rif. A to‘plam X fazoning qismto‘plami bo‘lsin. Agar shunday $r: X \to A$ retraksiya mavjud bo‘lib, $ir \simeq 1: X \to X$ munosabat bajarilsa, A to‘plam X fazoning ***deformatsiyalangan retrakti*** deyiladi. Bu yerda $i: A \to X$ akslantirish kiritilgan.

Boshqacha qilib aytganda, agar shunday $F: X \times I \to X$ gomotopiya mavjud bo‘lib, barcha $x \in X$ lar uchun $F(x, 0) = x$ tenglik bajarilsa va $F(x, 1) - X$ da retraksiya bo‘lsa A to‘plam X fazoning deformatsiyalangan retrakti deyiladi.

Masalan, aylana – slindrning deformatsiyalangan retraktdagi obrazidir. Agar A to‘plam X ning deformatsiyalangan retrakti bo‘lsa, u holda A va X gomotop ekvivalent bo‘ladi.

8-ta’rif. Agar shunday $r: X \to A$ retraksiya mavjud bo‘lib, $ir \simeq_{rel\,A} 1: X \to X$ munosabat bajarilsa, X ning A qismto‘plami ***kuchli deformatsiyalangan retrakti*** deb ataladi.

Boshqacha aytadigan bo‘lsak, shunday $F: X \times I \to X$ gomotopiya mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $x \in X$ lar uchun $F(x, 0) = x$, ixtiyoriy $a \in A$, $t \in I$ lar uchun $F(a, t) = a$ va ixtiyoriy $x \in X$ lar uchun $F(x, 1) \in A$ munosabatlar bajarilsa, $A -$ X ning kuchli deformatsiyalangan retrakti deyiladi. Ravshanki kuchli deformatsiyalangan retrakt $-$ deformatsiyalangan retrakt bo‘ladi.

11-misol. $\mathbb{R}^2$ fazoning qismto‘plami $Y = C_1 \cup C_2$ ni ko‘rib chiqaylik. Bu yerda

$$C_1 = \{\, x = (x_1, x_2) \colon (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1\} \text{ va}$$

$$C_2 = \{x = (x_1, x_2) \colon (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Y —bitta umumiy nuqtaga ega bo‘lgan ikkita aylanalardan iborat. Bizga X to‘plam quyidagicha berilgan bo‘lsin: $X = Y \setminus \{(2,0), (-2,0)\}$.

Bunda $x_0 = (0,0)$ nuqta X ning kuchli deformatsiyalangan retrakti bo‘ladi. Ravshanki, $i \colon \{x_0\} \to X$ va $r \colon X \to \{x_0\}$ hamda $1 \colon X \to X$.

12-misol. X biror topologik fazo va biror $I \subset \mathbb{R}$ interval 0 nuqtani o‘z ichiga oluvchi interval bo‘lsin. U holda $X \times \{0\}$ qismfazo $X \times I$ fazoning deformatsiyalangan retrakti bo‘ladi. Haqiqatan, bunda deformatsiyalangan retraksiyani

$$(X \times I) \times [0,1] \to X \times I$$

$$\big((x, s), t\big) \longmapsto \big(x, s \cdot (1 - t)\big)$$

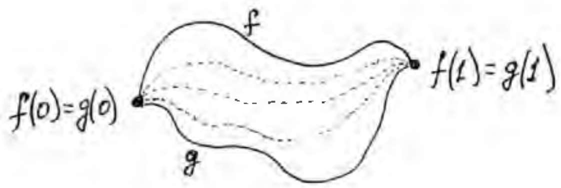
ko‘rinishida aniqlasak bo‘ladi.

1.2-§.Yo‘llar ko‘paytmasi va ekvivalent yo‘llar sinfi

Agar f va g lar$X$ dagi yo‘llar bo‘lib, $f(1) = g(0)$ tenglik bajarilsa, bu yo‘llarning ko‘paytmasi deganda biz quyidagicha aniqlangan yo‘lni tushunamiz:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{agar } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & \text{agar } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}.$$

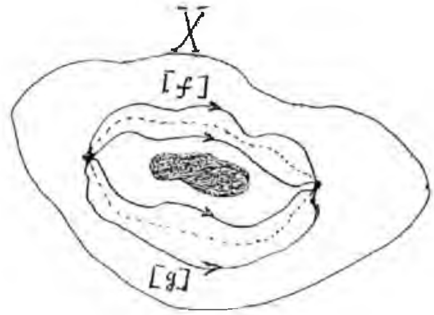
9-ta’rif. X fazodagi ikkita f va g yo‘llar $\{0,1\}$ to‘plamga nisbatan gomotop bo‘lsa, bu yo‘llar X fazoda ***ekvivalent yo‘llar*** deyiladi va $f{\sim}g$ ko‘rinishida yoziladi. Boshqacharoq aytadigan bo‘lsak, ekvivalent yo‘llar deb boshlari va oxirlari ustma-ust tushgan gomotop yo‘llarga aytiladi ya’ni uni quyidagi chizma kabi tushinishimiz mumkin:



Bu ta’rifdan ko‘rinadiki, f va g yo‘llar X da ekvivalent bo‘lsa, u holda shunday uzluksiz $F: I \times I \to X$ akslantirish mavjud bo‘lib, quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$F(t,0) = f(t) \text{ va } F(t,1) = g(t),\, t \in I,$$
$$F(0,s) = f(0) \text{ va } F(1,s) = f(1),\, s \in I.$$

Yo‘llarning ekvivalentlik munosabati X dagi yo‘llar to‘plamini ekvivalent sinflarga ajratadi. f yo‘lga ekvivalent bo‘lgan yo‘llar sinfi $[f]$ ko‘rinishida belgilanadi. Quyidagi chizmada f va g yo‘llarga ekvivalent bo‘lgan yo‘llar sinflari tasvirlangan, ammo bunda $[f]$ sinfning barcha elimentlari $[g]$ sinfning birorta elimenti bilan ekvivalent emas:



Quyidagi dastlabgi teorema

$$[f][g] = [f * g]$$

munosabat o‘rinli ekanligini ko‘rsatadi.

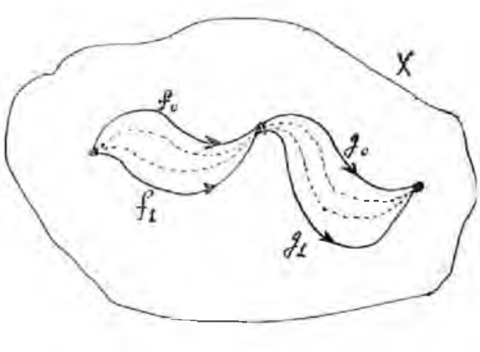
3-teorema [2,3]. f_0, f_1, g_1 va g_2 lar X fazodagi yo‘llar bo‘lib,

$$f_0(1) = g_0(0) \text{ va } f_1(1) = g_1(0)$$

tengliklar o‘rinli bo‘lsin. Agar $f_0 \sim f_1$ va $g_0 \sim g_1$ munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, u holda

$$f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$$

munosabat ham o‘rinli bo‘ladi, ya’ni



Keyingi teorema yo‘llar sinflarini ko‘paytirishning assosiativligini ko‘rsatadi, ya’ni

$$([f][g])[h] = [f]([g][h])$$

(bunda $f(1)=g(0)$ va $g(1)=h(0)$) ekanligini ko‘rsatadi. Lekin umuman olganda yo‘llar ko‘paytmasi assosiativ emas ya’ni

$$(f*g)*h \neq f*(g*h).$$

4-teorema [2]. f,g va h lar X fazodagi yo‘llar bo‘lib, $f(1)=g(0)$ va $g(1)=h(0)$ tengliklar o‘rinli bo‘lsa, u holda

$$(f*g)*h \sim f*(g*h)$$

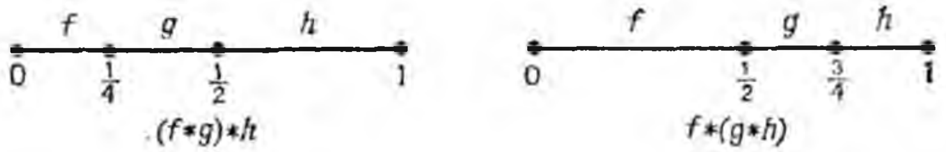
munosabat o‘rinli.

Isbot. Biz yo‘llar ko‘paytmasini quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$\big((f*g)*h\big)(t)=\begin{cases} f(4t), & 0\le t\le \frac{1}{4} \\ g(4t-1), & \frac{1}{4}\le t\le \frac{1}{2} \\ h(2t-1), & \frac{1}{2}\le t\le 1; \end{cases}$$

$$\big(f*(g*h)\big)(t)=\begin{cases} f(2t), & 0\le t\le \frac{1}{2} \\ g(4t-2), & \frac{1}{2}\le t\le \frac{3}{4} \\ h(4t-3), & \frac{3}{4}\le t\le 1. \end{cases}$$

Bu yo‘llar ko‘paytmalarini quyidagi chizmadagi kabi tushunish mumkin:



Bunda biz $F: I\times I\to X$ akslantirishni

$$F(t,s)=\begin{cases} f\left(\frac{4t}{1+s}\right), & 0\le t\le \frac{s+1}{4} \\ g(4t-s-1), & \frac{s+1}{4}\le t\le \frac{s+2}{4} \\ h\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right), & \frac{s+2}{4}\le t\le 1 \end{cases}$$

ko‘rinishida aniqlaylik.

Ko‘rish mumkinki, bu F akslantirish uzluksiz va

$$F(t,0)=\big((f*g)*h\big)(t)\,,$$
$$F(0,s)=f(0)=\big((f*g)*h\big)(0)\,,$$
$$F(t,1)=\big(f*(g*h)\big)(t)\,,$$
$$F(1,s)=h(1)=\big(f*(g*h)\big)(1)\,.$$

shartlarni qanoatlantiradi. Demak F akslantirish $(f*g)*h$ va $f*(g*h)$ yo‘llar o‘rtasidagi gomotopiya bo‘lar ekan.■

Har bir $x\in X$ lar uchun o‘zgarmas $\varepsilon_x\colon I\to X$ yo‘l $\varepsilon_x(t)=x$ ko‘rinishida aniqlanadi.

5-teorema [2]. Agar f yo‘l X dagi boshi x nuqtada va oxiri y nuqtada bo‘lgan yo‘l bo‘lsa, u holda $\varepsilon_x*f\sim f$ va $f*\varepsilon_y\sim f$ munosabatlar o‘rinli bo‘ladi.

Biz f yo‘lga teskari yo‘l deganda $\bar{f}(t)=f(1-t)$ kabi aniqlangan yo‘lni tushunamiz.

6-teorema [2]. Bizga $f-X$ dagi boshi x nuqtada va oxiri y nuqtada bo‘lgan yo‘l berilgan bo‘lsin. U holda $f*\bar{f}\sim\varepsilon_x$ va $\bar{f}*f\sim\varepsilon_y$ munosabatlar o‘rinli bo‘ladi.

Yuqoridagidan farqli $f*\bar{f}$ va ε_x o‘rtasida boshqacha $G\colon I\times I\to X$ gomotopiya ham kiritish mumkin. Masalan,

$$G(t,s)=\begin{cases} f(2t), & 0\le t\le \dfrac{1-s}{2},\\ f(1-s), & \dfrac{1-s}{2}\le t\le \dfrac{1+s}{2},\\ f(2-2t), & \dfrac{1+s}{2}\le t\le 1.\end{cases}$$

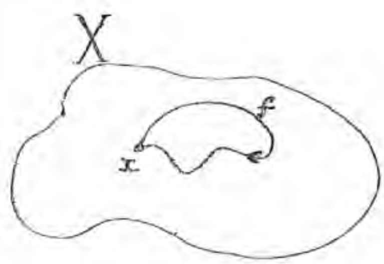
Tekshirib ko‘rish mumkinki, bu $G(t,s)$ akslantirish uzluksiz hamda $f*\bar{f}$ va ε_x lar o‘rtasidagi gomotopiya shartlarini qanoatlantiradi.

1.3-§. Fundamental gruppalar, bir bog‘lamli fazolar

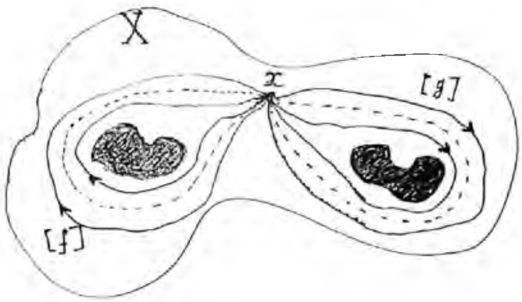
Biz bu paragrifda ekvivalent yo‘llar sinfi X topologik fazoda gruppa aksiomalarini bajarishini ko‘rib chiqamiz.

Dastlab biz gruppalar nazariyasidagi terminlarni eslab olamiz. Faraz qilaylik $(G,*)$ va $(G^1,*_1)$ gruppalar berilgan bo‘lsin. Agar shunday $f: G \to G^1$ akslantirish mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $x, y \in G$ lar uchun $f(x * y) = f(x) *_1 f(y)$ tenglik bajarilsa, bu gruppalar *gomomorf* deyiladi. f akslantirish esa G va G^1 gruppalar o‘rtasidagi *gomomorfizm* deyiladi. Bu ta’rifdan ko‘rinadiki, f gomomorfizm bo‘lsa $f(e) = e^1$ va $f(x^{-1}) = \left(f(x)\right)^{-1}$ tengliklar o‘rinli bo‘ladi. f *akslantirishning yadrosi* deb $f^{-1}(e^1)$ to‘plamga aytiladi, ya’ni G^1 gruppaning birlik elimenti e^1 ning proobrazlar to‘plami f akslantirishning yadrosi deyilar ekan. Agar f gomomorfizm inyektiv bo‘lsa (boshqacha aytadigan bo‘lsak f ning yadrosi faqat e elimentdan iborat bo‘lsa) f akslantirish *monomorfizm* deyiladi. Agar f suryektiv akslantirish bo‘lsa u *epimorfizm* deyiladi. Agar f biyektiv akslantirish bo‘lsa, bu akslantirish *izomorfizm* deyiladi.

10-ta’rif. X fazoda aniqlangan f yo‘l $f(0) = f(1)$ shartni bajarsa u *yopiq yo'l* (yoki *sirtmoq*) deyiladi. Agar $f(0) = f(1) = x$ shart bajarilsa, bu f yo‘l x nuqtada yopiq deyiladi.



$x \in X$ nuqtada yopiq bo‘lgan barcha ekvivalent yo‘llar sinfini biz $\pi(X, x)$ ko‘rinishida belgilaymiz, ya’ni bu to‘plam ekvivalent yo‘llar sinflaridan tashkil topgan ekan.



Biror $x \in X$ nuqtada yopiq bo‘lgan har qanday ikkita f va g yo‘llar uchun ularning ko‘paytmasi $f * g$ aniqlangan, hamda $[f], [g] \in \pi(X, x)$ lar uchun

$$[f][g] = [f * g]$$

munosabat o‘rinli.

7-teorema [2,4]. $\pi(X, x)$ to‘plam ekvivalent yo‘llar sinfini ko‘paytirish amali bilan birgalikda gruppa bo‘ladi.

Bu teoremada birlik eliment $[\varepsilon_x]$, hamda har bir $[f]$ elimentga teskari eliment $[f]^{-1} = [\bar{f}]$ ko‘rinishida aniqlanadi. Ekvivalent yo‘llar sinfini ko‘paytirish assosiativ ekanligini esa yuqoridagi paragrifda ko‘rgan edik.

11-ta’rif. $\pi(X, x)$ gruppani X fazoning x nuqtadagi *fundamental gruppa*si deb ataymiz.

Turli $x, y \in X$ nuqtalar uchun ularni bog‘laydigan birorta yo‘l mavjud bo‘lsa, $\pi(X, x)$ va $\pi(X, y)$ gruppalar o‘rtasida ham qandaydir munosabat borligini quyidagi teoremada ko‘rishimiz mumkin.

8-teorema [2]. $x, y \in X$ nuqtalar uchun ularni bog‘laydigan birorta yo‘l mavjud bo‘lsa, $\pi(X, x)$ va $\pi(X, y)$ gruppalar izomorf bo‘ladi.

5-natija [2]. Agar X chiziqli bog‘lanishli fazo bo‘lsa, u holda har qanday $x, y \in X$ nuqtalar uchun $\pi(X, x)$ va $\pi(X, y)$ gruppalar izomorfdir.

Bizga $\varphi: X \to Y$ uzluksiz akslantirish berilgan bo‘lsa, quyidagi uchta fakt ravshan:

(i) Agar $f, g - X$ dagi yo‘llar bo‘lsa, u holda $\varphi f, \varphi g$ $-$lar Y da yo‘l bo‘ladi;

(ii) Agar $f \sim g$ bo‘lsa, u holda $\varphi f \sim \varphi g$ munosabat o‘rinli bo‘ladi;

(iii) Agar f $-$yo‘l X ning x nuqtasida yopiq bo‘lsa, u holda φf yo‘l ham Y ning $\varphi(x)$ nuqtasida yopiq yo‘l bo‘ladi.

Shunday ekan, agar $[f] \in \pi(X, x)$ bo‘lsa, unda $[\varphi f]$ ham $\pi(Y, \varphi(x))$ fundamental gruppaning elementlari bo‘ladi. Binobarin,

$$\varphi_*: \pi(X, x) \to \pi(Y, \varphi(x))$$

uchun ham

$$\varphi_*[f] = [\varphi f]$$

tenglik o‘rinli.

2-lemma [2,3]. $\varphi_* - \pi(X, x)$ va $\pi(Y, \varphi(x))$ gruppalar o‘rtasidagi gomomorfizm bo‘ladi.

Ya’ni

$$\varphi_*([f][g]) = \varphi_*[f * g] = [\varphi(f * g)] = [\varphi f * \varphi g] = [\varphi f][\varphi g] = \varphi_*[f]\varphi_*[g]$$

tenglik o‘rinli.

12-ta’rif. $\varphi_*: \pi(X, x) \to \pi\big(Y, \varphi(x)\big)$ *keltirilgan gomomorfizm* deyiladi va $\varphi_*[f] = [\varphi f]$ tenglik bilan aniqlanadi, bu yerda $\varphi: X \to Y$ uzluksiz akslantirish.

9-teorema [2]. (i) Agar $\varphi: X \to Y$ va $\psi: Y \to Z$ uzluksiz akslantirishlar bo‘lsa, u holda $(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

(ii) Agar $1: X \to X$ ayniy akslantirish bo‘lsa, u holda $1_*: \pi(X, x) \to \pi(X, x)$ akslantirish ayniy gomomorfizm bo‘ladi.

6-natija. Agar $\varphi: X \to Y$ akslantirish gomeomorfizm bo‘lsa, u holda $\varphi_*: \pi(X, x) \to \pi\big(Y, \varphi(x)\big)$ akslantirish izomorfizm bo’ladi.

10-teorema [2]. $\varphi, \psi: X \to Y$ topologik fazolar o‘rtasidagi uzluksiz akslantirish va $F: \varphi \simeq \psi -$ gomotopiya bo‘lsin. Agar $f: I \to Y$ – $\varphi(x_0)$ va $\psi(x_0)$ nuqtalarni bog‘lovchi yo‘l $f(t) = F(x_0, t)$ tenglik bilan aniqlangan bo‘lsa, u holda

$$\varphi_*: \pi(X, x_0) \to \pi\big(Y, \varphi(x_0)\big) \text{ va}$$

$$\psi_*: \pi(X, x_0) \to \pi(Y, \psi(x_0))$$

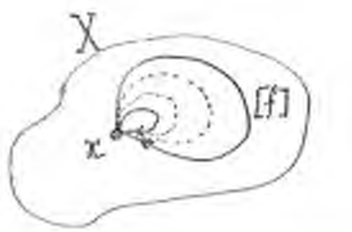
gomomorfizmlar o‘zaro $\psi_* = u_f\varphi_*$ kabi munosabatda bo‘ladi. Bu yerda $u_f -$ $\pi(Y, \varphi(x_0))$ va $\pi(Y, \psi(x_0))$ gruppalar o‘rtasidagi izomorfizm.

Quyidagi ikki teoremalar gomotopik ekvivalent fazolarning o'zaro munosabatlari bilan bog'liq.

11-teorema [2,4]. Agar $\varphi: X \to Y$ $-$gomotop ekvivalentlik bo'lsa, u holda ixtiyoriy $x \in X$ lar uchun $\varphi_*: \pi(X, x) \to \pi\big(Y, \varphi(x)\big)$ $-$ izomorfizm bo'ladi.

Isbot. φ $-$gomotop ekvivalentlik bo'lgani uchun shunday uzluksiz $\psi: Y \to X$ akslantirish mavjud bo'lib, $\varphi\psi \simeq 1: Y \to Y$ va $\psi\varphi \simeq 1: X \to X$ munosabatlar o'rinli. Yuqoridagi teoremaga ko'ra $u_f(\psi\varphi)_* = 1_*$ tenglik o'rinli hamda $u_f$va1_* lar izomorfizm, $(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*$ ham izomorfizmdir. Bu esa ψ_* $-$ epimorfizm, φ_* $-$esa monomorfizm ekanligini anglatadi. ■

13-ta'rif. X topologik fazo chiziqli bog'lanishli va ba'zi $x \in X$ lar uchun $\pi(X, x) = \{1\}$ tenglik bajarilsa, bu fazo *bir bog'lamli topologik fazo* deyiladi. Bu gruppa esa *trivial fundamental gruppa* deyiladi (rasmga qarang).



7-natija [4]. Tortiluvchan fazo trivial fundamental gruppaga ega.

12-teorema [2,4]. X va Y lar chiziqli bog'lanishli topologik fazolar bo'lsin. $X \times Y$ dekart ko'paytmaning fundamental gruppasi X va Y fazolarning fundamental gruppalari dekart ko'paytmasiga izomorf bo'ladi, ya'ni

$$\pi\big(X \times Y, (x, y)\big) \cong \pi(X, x) \times \pi(Y, y).$$

13-misol. X topologik fazo $\mathbb{R}^n$ ning biror yulduzcha shaklidagi qismto'plamidan iborat bo'lsin va undan x_0 nuqta shunday tanlangan bo'lsinki, $\forall\, x \in X$ nuqtalar uchun x va x_0 nuqtalarni tutashtiruvchi kesma X ta yotsin. Biz quyidagi akslantirishlarni qaraylik

$$\begin{matrix} f: X \to \{x_0\} \\ x \longmapsto x_0 \end{matrix} \quad \text{va} \quad \begin{matrix} g: \{x_0\} \to X \\ x_0 \longmapsto x_0 \end{matrix}.$$

Ko'rish mumkinki, $fg = id_{\{x_0\}}$ va $gf \simeq id_X$ munosabatlar o'rinli. Bu esa X fazoning tortiluvchan (x_0 nuqtaga) ekanligini ko'rsatadi.

II-BOB. KO‘P BOG‘LAMLI FAZOLAR FUNDAMENTAL GRUPPALARI

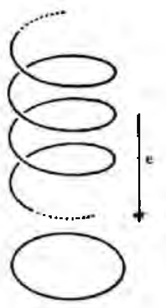
2.1-§. Aylananing fundamental gruppasi

Bu paragrifda biz S^1 aylananing fundamental gruppasini hisoblaymiz va buning javobi esa $\mathbb{Z}$ butun sonlar to‘plamiga izomorf ekanligini ko‘rib chiqamiz. $1 \in S^1$ (ya’ni bu yerda $1 \in S^1$ deb $(1,0) \in \mathbb{R}^2$ nuqtani qaraymiz) nuqtada yopiq bo‘lgan f yo‘l aylana bo‘ylab ma’lum marta aylanadi; bu aylanishlar soni esa f ning buralishlar soni yoki darajasi deyiladi. ((t) akslantirish $f(0) = 1$ nuqtadan boshlanib o‘sib boradi; bunda har bir soat strelkasiga teskari aylanishni $+1$, va soat strelkasi bo‘ylab yo‘nalishni esa -1 deb belgilaymiz; umumiy aylanishlar sonini esa buralishlar soni yoki f ning darajasi deb ataymiz.) 1 nuqtada yopiq bo‘lgan har bir yo‘lga biz yagona bir butun sonni mos qo‘yamiz, va har bir butun son uchun darajasi n ga teng bo‘lgan 1 nuqtada yopiq yo‘l mavjud.

Endi biz $1 \in S^1$ nuqtada yopiq bo‘lgan va $\mathbb{R}$ haqiqiy sonlar to‘plamini S^1 ga akslantiruvchi quyidagi $e: \mathbb{R} \to S^1$ akslantirishni ko‘rib chiqamiz:

$$e: t \to \exp(2\pi i t).$$

Biz bu akslantirishni $\mathbb{R}^3$ dagi geometrik ko‘rinishini spiral deb qarashimiz mumkin va bunda $e^{-1}(1) = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ekanligi bizga ma’lum.



Agar bizga

$$f(0) = f(1) = 1$$

tengliklarni qanoatlantiruvchi $f: I \to S^1$ akslantirish berilgan bo‘lsa, u holda shunday $\tilde{f}: I \to R$ akslantirish mavjud va u $\tilde{f}(0) = 0$ hamda $e\tilde{f} = f$ tengliklar bajarilishini ko‘ramiz, bunda $\tilde{f}$ akslantirish f ning ko‘taruvchisi deyiladi. $f(1) = 1$ bo‘lganligidan biz $\tilde{f}(1) \in e^{-1}(1) = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ munosabat bajarilishini bilamiz; Biz yana S^1 da ekvivalent f_0 va f_1 yo‘llar uchun $\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1)$ tenglik o‘rinli bo‘lishini ham ko‘rishimiz mumkin.

3-lemma [3]. Bizga $S^1\backslash\{1\}$ ning biror U qism to‘plami va $V = I \cap e^{-1}(U) \subset \mathbb{R}$ to‘plam berilgan bo‘lsin. U holda $e^{-1}(U)$ to‘plam ochiq $V + n = \{v + n : v \in V\}$ to‘plamlarning birlashmalari ko‘rinishida ifodalanadi.

8-natija [3]. Agar $f: X \to S^1$ suryektiv bo‘lmasa, u holda f nolgomotop bo‘ladi.

Biz hozir keltiradigan teoremamiz odatda yo‘lning ko‘taruvchisi haqidagi teorema deb ataladi.

13-teorema [2,3]. Ixtiyoriy uzluksiz $f: I \to S^1$ akslantirish ko‘taruvchi akslantirish $\tilde{f}: I \to \mathbb{R}$ ga ega. Agar $x_0 \in \mathbb{R}$ va $e(x_0) = f(0)$ bo‘lsa, u holda f ning ko‘taruvchisi $\tilde{f}$ mavjud va yagona hamda $\tilde{f}(0) = x_0$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Biz bu teoremadan foydalanib S^1 da yopiq yo‘lning darajasini aniqlashimiz mumkin. Bizga f -S^1ning 1 nuqtasida yopiq yo‘l berilgan bo‘lsin va $\tilde{f}(0) = 0$ kabi aniqlangan yagona $\tilde{f}: I \to \mathbb{R}$ ko‘taruvchi bo‘lsin. $e^{-1}\big(f(1)\big) = e^{-1}(1) = \mathbb{Z}$ ekanligidan $\tilde{f}(1) - f$ ning darajasini aniqlashini ko‘rishimiz mumkin. Ekvivalent yo‘llar bir xil darajaga ega bo‘lishini ko‘rsatishdan avval ekvivalent yo‘llar ekvivalent ko‘taruvchilarga ega ekanligini ko‘rsatamiz. Bunday qilish uchun yuqoridagi teoremadagi I ni I^2 ga almashtiramiz va quyidagi lemmani hosil qilamiz:

4-lemma [4]. Har qanday uzluksiz $F: I^2 \to S^1$ akslantirish $\tilde{F}: I^2 \to \mathbb{R}$ ko‘taruvchiga ega. Agar $x_0 \in \mathbb{R}$ va $e(x_0) = F(0,0)$ bo‘lsa, u holda yagona $\tilde{F}(0,0) = x_0$ ko‘taruvchi mavjud bo‘ladi.

Quyidagi ko‘rsatmoqchi bo‘lgan natijamiz $e: \mathbb{R} \to S^1$ uchun monodrom haqidagi teorema deyiladi :

9-natija. Faraz qilaylik bizga S^1 ning 1 nuqtasida yopiq bo‘lgan ikkita f_0 va f_1 ekvivalent yo‘llar berilgan bo‘lsin. Agar $\tilde{f}_0$ va $\tilde{f}_1$ larning ko‘taruvchilari uchun $\tilde{f}_0(0) = \tilde{f}_1$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda $\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1)$ tenglik ham o‘rinli bo‘ladi.

14-teorema [2,4]. $\pi(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

Isbot. $\varphi: \pi(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ akslantirish $\varphi([f]) = \deg(f)$ ko‘rinishida aniqlangan bo‘lsin ya’ni, $\varphi([f]) - f$ ning darajasi bo‘lsin. Yana shuni eslash mumkinki, $\deg(f) = \tilde{f}(1)$ bo‘lar edi, bu yerda $\tilde{f} - \tilde{f}(0) = 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi f ning yagona ko‘taruvchisi. φ funksiya yuqoridagi natijadagi kabi aniqlangan. Biz hozir φ ning gruppalar o‘rtasidagi izomorfizm ekanligini ko‘rsatishimiz kerak.

Avval biz φ ning gomomorfizm ekanligini ko‘rsataylik. $l_a(f)$ bilan f ning boshi a nuqtada $\left(a \in e^{-1}\big(f(0)\big)\right)$ da bo‘lgan ko‘taruvchisini belgilaylik. S^1 ning $A(1,0)$ nuqtasidan boshlangan f yo‘l uchun $l_0(f) = \tilde{f}$ va $l_a(f)(t) = \tilde{f}(t) + a$ ekanligini anglatadi.

Ma’lumki $l_a(f * g) = l_a(f) * l_b(g)$ tenglik o‘rinli, bu yerda $b = \tilde{f}(1) + a$. Agar $[f], [g] \in \pi(S^1, 1)$ bo‘lsa, u holda

$$\varphi([f][g]) = \varphi([f * g]) = \widetilde{f * g}(1) = l_0(f * g)(1) = \big(l_0(f) * l_b(g)\big)(1) =$$
$$= l_b(g)(1) = b + \tilde{g}(1) = \tilde{f}(1) + \tilde{g}(1) = \varphi([f]) + \varphi([g])$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Bu esa φ gomomorfizm ekanini anglatadi. Endi φ ning suryektiv ekanini ko‘rsatamiz: $n \in \mathbb{Z}$ va $g: I \to \mathbb{R}$ akslantirish $g(t) = nt$ tenglik bilan aniqlangan bo‘lsin. U holda $eg: I \to S^1$ yo‘l 1 nuqtada yopiq yo‘l bo‘ladi. $g - g(0) = 0$ bo‘lgan eg ning ko‘taruvchisi ekanidan biz $\varphi([eg]) = \deg(eg) = g(1) = n$ ga ega bo‘lamiz. Bu φ ning suryektiv ekanligini bildiradi. Endi biz φ ning inyektiv ekanligini ko‘rsatishimiz kerak. Faraz qilaylik $([f]) = 0$, ya’ni $\deg(f) = 0$ bo’lsin. Bu f ning ko‘taruvchisi $\tilde{f}$ uchun $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1) = 0$ ekanligini anglatadi. $\mathbb{R}$ ning tortiluvchan fazo ekanidan $\tilde{f} \simeq \varepsilon_0(rel\{0,1\})$ bo‘lishi ya’ni boshqacha qilib aytganda $F: I^2 \to \mathbb{R}$ akslantirish mavjud bo‘lib, $F(0, t) = \tilde{f}(t)$, $F(1, t) = 0$ va

$F(t,0) = F(t,1) = 0$ bo‘lishini hosil qilamiz. Haqiqatan, $F(s,t) = (1-s)\tilde{f}(t)$. Ammo $eF: I^2 \to S^1$ akslantirish

$$eF(0,t) = f(t), eF(1,t) = 1, eF(t,0) = eF(t,1) = 1$$

shartlarni qanoatlantiradi va shuning uchun $f \simeq \varepsilon_1(rel\{0,1\})$, ya’ni $[f] = 1 \in \pi(S^1, 1)$ ekanligi kelib chiqadi. Bu esa φ ning inyektiv ekanligini ko‘rsatadi. Demak φ izomorfizm ekan. ■

Bizga $(G, *_1)$ va $(H, *_2)$ gruppalar berilgan bo‘lsin. Ularning to‘g‘ri ko‘paytmasi

$$G \times H := \{(g,h): g \in G, h \in H\}$$

kabi aniqlanadi. Bu to‘g‘ri ko‘paytma ham

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) := (g_1 *_1 g_2, h_1 *_2 h_2)$$

kabi aniqlangan amal bilan birgalikda gruppa bo‘ladi.

10-natija [2]. Torning fundamental gruppasi $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ga izomorf bo‘ladi.

Endi biz bu paragrifning so‘ngida aylananing fundamental gruppasining ikkita tatbiqi bilan tanishib chiqaylik. Ulardan birinchisi algebraning fundamental teoremasi deb ataladi .

15-teorema [2]. Har qanday o‘zgarmasdan farqli kompleks ko‘phad kamida bitta ildizga ega.

Bu teoremaning isboti [2] adabiyotda keltirilgan. Biz uning isbotini boshqacha usulda keltiramiz.

Isbot. Bizga

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{k-1} z^{k-1} + a_k z^k (k \geq 1)$$

ko‘rinishidagi kompleks ko‘phad berilgan bo‘lsin. Faraz qilaylik $p(z)$ ko‘phad ildizga ega bo‘lmasin va $G: I \times [0, \infty) \to S^1 \subset \mathbb{C}$ funksiya ixtiyoriy $0 \leq t \leq 1$ va $r \geq 0$ lar uchun

$$G(t,r) = \frac{p\big(r\, exp(2\pi t i)\big)}{|p(r \exp(2\pi t i))|} \cdot \frac{|p(r)|}{p(r)}$$

tenglik orqali aniqlangan bo‘lsin. Ravshanki, $G -$ uzluksiz akslantirish bo‘ladi. $F: I^2 \to S^1$ akslantirish esa

$$F(t,s)=\begin{cases} G\left(t,\dfrac{s}{1-s}\right), & 0\le t\le 1, 0\le s<1,\\ \exp(2\pi kti), & 0\le t\le 1, s=1\,. \end{cases}$$

tenglik bilan aniqlangan bo‘lsin. Ko‘rish mumkinki,

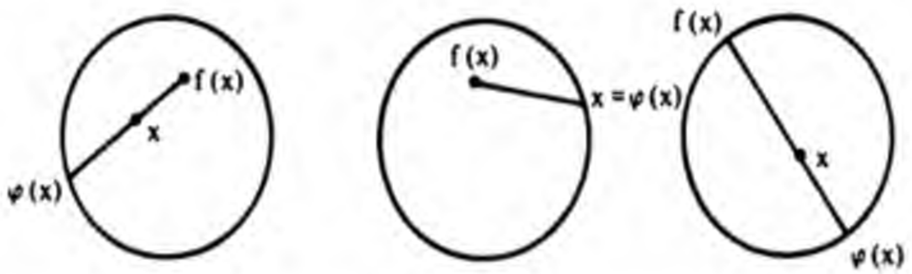
$$\lim_{s\to 1} F(t,s)=\lim_{s\to 1} G\left(t,\frac{s}{1-s}\right)=\lim_{r\to\infty} G(t,r)=(\exp(2\pi ti))^k$$

munosabat o‘rinli, bundan F ning uzluksiz ekanligi kelib chiqadi va yana F akslantirish $f_0(t)=F(t,0)$ va $f_1(t)=F(t,1)$ lar o‘rtasidagi $\{0,1\}$ ga nisbatan gomotopiya bo‘ladi. Lekin $f_0(t)=1$ va $f_1(t)=\exp(2\pi kti)$, shuning uchun $\deg(f_0)=0$, $\deg(f_1)=k$. Bu esa ziddiyat, chunki $k\ge 1$ deb olgan edik. ■

Ikkinchi tatbiqi tekislikda Brauverning qo‘zg‘almas nuqta haqidagi teoremasi nomi bilan mashhur. Keyingi teoremani D^2 uchun keltiramiz ammo u yuqori o‘lchamli fazolarda ham o‘rinli bo‘ladi.

15-teorema. Har qanday uzluksiz $f: D^2\to D^2$ akslantirish kamida bitta qo‘zg‘almas nuqtaga ega, ya’ni shunday $x\in D^2$ nuqta mavjudki, $f(x)=x$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Teskarisidan faraz qilaylik, barcha $x\in D^2$ nuqtalar uchun $x\ne f(x)$ bo‘lsin. U holda biz shunday $\varphi: D^2\to S^1$ akslantirishni olamizki, bunda $\varphi(x)\in S^1$ nuqta $f(x)$ dan x ga yo‘nalgan nur bilan S^1 ning kesishish nuqtasi bo‘lsin.



Bunda φ − uzluksiz akslantirish bo‘ladi. $i: S^1\to D^2$ akslantirish aniqlangan va u $\varphi i=1$ shartni qanoatlantirsin. Unda biz quyidagi komutativ diagrammaga ega bo‘lamiz:

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "i"'] & & S^1 \\ & D^2 \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Bu esa boshqa bir komutativ diagrammani hosil qiladi:

$$\begin{tikzcd} \pi(S^1,1) \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "i_*"'] & & \pi(S^1,1) \\ & \pi(D^2,1) \arrow[ur, "\varphi_*"'] & \end{tikzcd}$$

Ammo $\pi(D^2,1) = 0$ va D^2 tortiluvchan bo‘lganligidan biz quyidagiga kelib qolamiz:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "i_*"'] & & Z \\ & 0 \arrow[ur, "\varphi_*"'] & \end{tikzcd}$$

Bunday bo‘lishi esa mumkin emas. Bu esa teoremani isbotlaydi. ■

2.2-§. Qoplovchi fazo va uning fundamental gruppasi

Bizga ma'lumki har qanday qavariq $A \subset \mathbb{R}^n$ to'plam trivial fundamental gruppaga ega bo'ladi. Biz bu paragrifda qoplovchi fazo tushunchasi bilan tanishib chiqamiz. Bu tushuncha Riman sirtlari va kompleks ko'pxilliklarni o'rganishda ham muhim ahamiyatga ega.

14-ta'rif. Bizga $\tilde{X}$ va X topologik fazolar va $p: \tilde{X} \to X$ uzluksiz va suryektiv akslantirish berilgan bo'lsin. $U \subset X$ ixtiyoriy ochiq to'plam bo'lib, $p^{-1}(U)$ to'plam $\tilde{X}$ da o'zaro kesishmaydigan ochiq V_α to'plamlarning birlashmasi ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa, u holda U to'plam p akslantirish yordamida tekis qoplanuvchi deyiladi.

Ko'rish qiyin emaski, agar U ochiq to'plam p akslantirish yordamida tekis qoplanuvchi bo'lib, W esa U ning ochiq qism to'plami bo'lsa, u holda W ham p yordamida tekis qoplanuvchi bo'ladi.

15-ta'rif. Bizga $p: \tilde{X} \to X$ uzluksiz va suryektiv akslantirish berilgan bo'lsin. Agar X ning har bir b nuqtasi uchun uning shunday U atrofi mavjud bo'lib, bu atrof p yordamida tekis qoplanuvchi bo'lsa, u holda $p -$ qoplovchi akslantirish, $\tilde{X}$ fazo esa X ning qoplovchi fazosi deyiladi. Agar $p: \tilde{X} \to X$ qoplovchi akslantirish bo'lsa, har bir $b \in X$ nuqta uchun $\tilde{X}$ ning qismfazosi $p^{-1}(b)$ diskret topologiyaga ega bo'ladi, ya'ni har bir $V_\alpha \subset \tilde{X}$ ochiq qismto'plam va $p^{-1}(b)$ to'plamning kesishmasi faqat bitta nuqtadan iborat bo'ladi; shu sababli bu nuqta $p^{-1}(b)$ da ochiq to'plam bo'ladi.

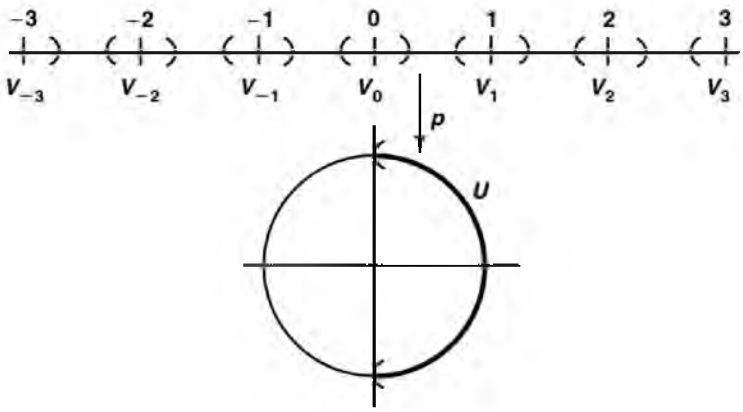
Agar $p: \tilde{X} \to X$ qoplovchi akslantirish bo'lsa, p ochiq akslantirish bo'ladi. Ya'ni $A \subset \tilde{X}$ ochiq to'plam va $x \in p(A)$ nuqta uchun x ning shunday U atrofini olish mumkinki, u p akslantirish yordamida tekis qoplanadi.

14-misol. X biror fazo, $i: X \to X$ ayniy akslantirish bo'lsin. U holda i qoplovchi (eng oddiy) akslantirish bo'ladi. Umumiyroq oladigan bo'lsak $\tilde{X}$ fazo $X \times \{1,2, \dots, n\}$ ko'rinishida bo'lsin. $p: \tilde{X} \to X$ akslantirish hamma i $(i = 1, \dots, n)$

lar uchun $p(x,i) = x$ ko‘rinishida bo‘lsa, bu akslantirish ham qoplovchi akslantirish bo‘ladi.

17-teorema [3]. $p(x) = (cos2\pi x, sin2\pi x)$ tenglik bilan aniqlanuvchi $p: R \to S^1$ akslantirish qoplovchi akslantirish bo‘ladi.

Bu akslantirishni biz $\mathbb{R}$ haqiqiy sonlar to‘g‘ri chizig‘i bilan S^1 ni o‘rash kabi tushunishimiz mumkin. Bunda har bir $[n, n+1]$ kesma S^1 ning ustiga akslanadi.

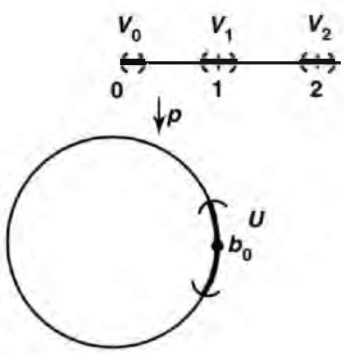


Agar $p: \widetilde{X} \to X$ qoplovchi akslantirish bo‘lsa, u holda p akslantirish $\widetilde{X}$ ning X bilan lokal gomeomorfizmi bo‘ladi. Ya’ni har bir $e \in \widetilde{X}$ nuqtaning shunday atrofi mavjudki, bu atrof p akslantirish yordamida X ning biror ochiq qismto‘plamining ustiga akslanadi.

15-misol. $p: \mathbb{R}_+ \to S^1$ akslantirish quyidagi tenglik orqali berilgan bo‘lsin:

$$p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$$

Bu akslantirish suryektiv va u lokal gomeomorfizm bo‘ladi.



Lekin bu p akslantirish qoplovchi akslantirish bo‘lmaydi, chunki $b_0 = (1,0)$ nuqta p akslantirish yordamida tekis qoplanuvchi biror U atrofga ega emas. b_0 ning biror U atrofi har bir $n \in \mathbb{N}$ larning kichik atroflari V_n lardan tashkil topgan proobrazga ega, V_0 sifatida esa biror kichik $(0, \epsilon)$ intervalni olsak, U ning proobrazi V_0 ni ham o‘z ichiga oladi. Har bir V_n intervallar ($n > 0$) p akslantirish yordamida U ning ustiga gomeomorf akslanadi, lekin faqatgina V_0 intervalning p akslantirishdagi obrazi U ning ichida qoladi.

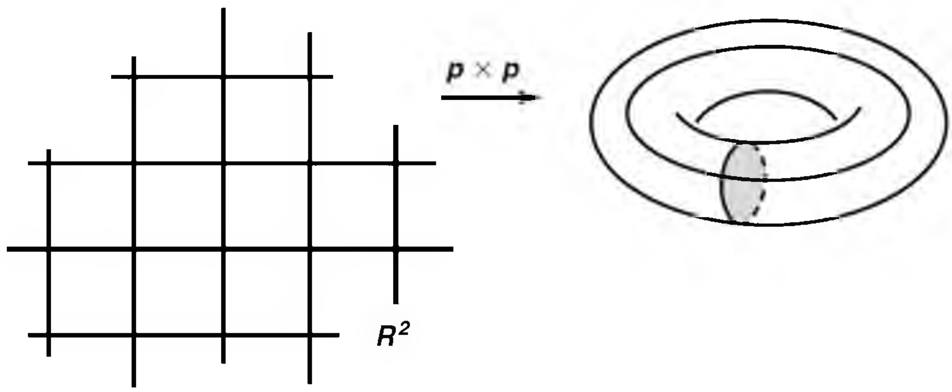
18-teorema [3]. $p: \tilde{X} \to X$ qoplovchi akslantirish bo‘lsin. Agar X_0 fazo X ning qismfazosi va $\tilde{X}_0 = p^{-1}(X_0)$ bo‘lsa, u holda p ning cheklanishi $p_0: \tilde{X}_0 \to X_0$ ham qoplovchi akslantirish bo‘ladi.

19-teorema [2,3]. Agar $p: \tilde{X} \to X$ va $p': \tilde{X}' \to X'$ lar qoplovchi akslantirishlar bo‘lsa, u holda $p \times p': \tilde{X} \times \tilde{X}' \to X \times X'$ akslantirish ham qoplovchi akslantirish bo‘ladi.

16-misol. Bizga $T = S^1 \times S^1$ fazo berilgan bo‘lsin. Quyidagi akslantirish

$$p \times p: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$$

torning $\mathbb{R}^2$ tekislik yordamida qoplovchi akslantirishi bo‘ladi, bu yerda p akslantirish yuqoridagi teoremaga ko‘ra aniqlangan. Har bir $[n, n+1] \times [m, m+1]$ kabi kvadratlar $p \times p$ akslantirish yordamida torning atrofini to‘laligicha qoplab oladi:



20-teorema [3]. $p: \tilde{X} \to X$ qoplovchi akslantirish bo‘lsin. U holda p ochiq akslantirish bo‘ladi.

5-lemma [3]. $p: \tilde{X} \to X$ qoplovchi akslantirish va $\tilde{f}, \tilde{\tilde{f}}: Y \to \tilde{X}$ lar esa $f: Y \to X$ uzluksiz akslantirishning ko‘taruvchilari bo‘lsin. Agar Y bog‘lanishli va ba’zi $y_0 \in Y$ lar uchun $\tilde{f}(y_0) = \tilde{\tilde{f}}(y_0)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda $\tilde{f} \equiv \tilde{\tilde{f}}$ bo‘ladi.

11-natija. Faraz qilaylik $\tilde{X}$ chiziqli bog‘lanishli fazo va $\varphi: \tilde{X} \to \tilde{X}$ uzluksiz akslantirish $p\varphi = p$ tenglik bilan aniqlangan bo‘lsin. Agar ba’zi $x_1 \in \tilde{X}$ nuqtalar uchun $\varphi(x_1) = x_1$ tenglik bajarilsa, u holda barcha $x \in \tilde{X}$ lar uchun $\varphi(x) = x$ (ya’ni $\varphi - \tilde{X}$ da ayniy akslantirish) bo‘ladi.

Isbot. $x - \tilde{X}$ ning ixtiyoriy nuqtasi va $\alpha: I \to \tilde{X}$ yo‘l x_1 ni x ga bog‘laydigan yo‘l bo‘lsin. $\varphi(x_1) = x_1$ ekanligidan α va $\varphi\alpha$ yo‘llarning ikkalasi ham x_1 nuqtadan boshlanadi hamda $p\alpha = p\varphi\alpha$ tenglik o‘rinli bo‘ladi va shuning uchun α va $\varphi\alpha$ lar $p\alpha: I \to X$ yo‘lning ko‘taruvchilari bo‘ladi. Yuqoridagi lemmaga ko‘ra $\alpha = \varphi\alpha$ bo‘ladi hamda α va $\varphi\alpha$ yo‘llarning oxirlari ham ustma-ust tushadi, ya’ni $\varphi(x) = x$ bo‘ladi. ■

21-teorema [3]. $p: \tilde{X} \to X$ qoplovchi akslantirish bo‘lsin. U holda:

(i) Berilgan $f: I \to X$ yo‘l va $x \in \tilde{X}$ nuqta uchun $p(a) = f(0)$ tenglik bajarilsa, shunday yagona $\tilde{f}$ yo‘l mavjudki, $p\tilde{f} = f$ va $\tilde{f}(0) = a$ tengliklar ham o‘rinli bo‘ladi.

(ii) Berilgan uzluksiz $F: I \times I \to X$ akslantirish va $a \in \tilde{X}$ nuqta uchun $p(a) = F(0,0)$ tenglik bajarilsa, shunday yagona uzluksiz $\tilde{F}: I \times I \to \tilde{X}$ akslantirish mavjudki, $p\tilde{F} = F$ va $\tilde{F}(0,0) = a$ tengliklar ham o‘rinli bo‘ladi.

12-natija [2]. Faraz qilaylik f_0 va f_1 lar X dagi ekvivalent yo‘llar bo‘lsin. Agar $\tilde{f}_0(0) = \tilde{f}_1(0)$ bo‘lsa, u holda $\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1)$ tenglik ham o‘rinli bo‘ladi.

22-teorema [3]. $p: \tilde{X} \to X$ qoplovchi akslantirish va $\tilde{X}$ bir bog‘lamli fazo va $a \in \tilde{X}$ bo‘lsin. U holda $\pi(X, p(a))$ va $p^{-1}(p(a))$ to‘plamlar o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjud.

Isbot. Dastlab biz $\varphi: \pi(X, p(a)) \to p^{-1}(p(a))$ moslikni

$$\varphi([f]) = \tilde{f}(1)$$

kabi aniqlaylik, bu yerda $\tilde{f} - f$ ning ko‘taruvchisi va $\tilde{f}(0) = a$ tenglikni qanoatlantiradi. Yuqoridagi natijaga ko‘ra bunday ko‘taruvchini aniqlash mumkin.

Endi biz $\psi: p^{-1}(p(a)) \to \pi(X, p(a))$ munosabatni aniqlaymiz. Bunday qilish uchun $x \in p^{-1}(p(a))$ va a ni x ga bog‘lovchi f yo‘lni olamiz. $\tilde{X}$ bir bog‘lamli bo‘lganligi uchun ixtiyoriy ikkita shunday yo‘llar ekvivalent bo‘ladi va shuning uchun $\pi(X, p(a))$ ning elementi $[pf]$ aniqlanadi. Osongina tekshirib ko‘rish mumkinki, $\varphi\psi = 1$ va $\psi\varphi = 1$ bo‘ladi va shuning uchun φ va ψ lar biyeksiya.■

Endi biz $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ va uning $\pi(X, x_0)$ bilan bog‘liqligini o‘rganamiz, bu yerda $p: \tilde{X} \to X$ qoplovchi akslantirish va $p(\tilde{x}_0) = x_0$ tenglik o‘rinli. Dastlab biz quyidagi teoremani keltiramiz:

23-teorema [3]. Agar $p: \tilde{X} \to X$ qoplovchi akslantirish hamda $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ va $x_0 \in X$ nuqtalar uchun $p(\tilde{x}_0) = x_0$ tenglik bajarilsa, u holda keltirilgan gomomorfizm

$$p_*: \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi(X, x_0)$$

monomorfizm bo‘ladi.

Tabiiy savol tug‘iladiki, agar biz $\tilde{x}_0$ va x_0 nuqtalarni o‘zgartirsak nima bo‘lar ekan?

Bu savolga keying teorema orqali javob topishimiz mumkin.

24-teorema [3]. Bizga $\tilde{X}$ chiziqli bog‘lanishli fazo va $p: \tilde{X} \to X$ qoplovchi akslantirish bo‘lsin. Agar $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ bo‘lsa, unda X da $p(\tilde{x}_0)$ ni $p(\tilde{x}_1)$ ga bog‘lovchi shunday f yo‘l mavjudki,

$$u_f p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$$

tenglik o‘rinli.

Agar yuqoridagi teoremada $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1) = x_0$ bo‘lsa, u holda f yo‘l $\pi(X, x_0)$ gruppaning $[f]$ elimentini aniqlaydi va shuning uchun

$$p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = [f]^{-1} \left(p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\right) [f]$$

munosabat o‘rinli.

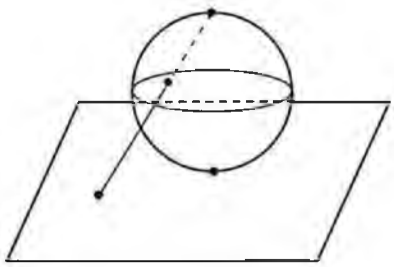
2.3-§. Ba’zi fazolarning fundamental gruppalari

Ba’zi bir sirtlarning fundamental gruppalarini hisoblash masalasi zamonaviy algebraik topologiyaning ko‘pgina bo‘limlarini rivojlantirishga undaydi. Biz hozir S^n sferaning fundamental gruppasini o‘rganib chiqamiz.

25-teorema [4]. Har qanday $P \in S^n$ nuqta uchun $S^n \backslash \{P\}$ fazo bir bog‘lamlidir.

Isbot. Shunday $f: S^n \to \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ gomeomorfizm mavjud va u quyidagicha

$$f: (x_1, \dots x_{n+1}) \to \begin{cases} \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right), \text{agar } x_{n+1} < 1, \\ \infty, \quad \text{agar } x_{n+1} = 1. \end{cases}$$



$Q := f^{-1}(\infty)$ deylik. U holda $f: S^n \backslash \{Q\} \to \mathbb{R}^n$ akslantirish gomeomorfizm bo‘ladi. P nuqta S^n ning biror nuqtasi bo‘lsin. Unda shunday bir $g: S^n \to S^n$ gomeomorfizm mavjudki, $g(P) = Q$ bo‘ladi. Bulardan esa $fg: S^n \to \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ akslantirish gomeomorfizm bo‘lishini ko‘ramiz. Oldin ko‘rgan edikki, $\mathbb{R}^n$ bir bog‘lamli edi, bu esa $S^n \backslash \{P\}$ ning ham bir bog‘lamli ekanligini ko‘rsatadi.■

26-teorema [3,4]. Har qanday natural $n \geq 2$ son uchun S^n fazo bir bog‘lamlidir.

Isbot.$x_0 \in S^n$ va $\gamma: [0,1] \to S^n$ yo‘l x_0 nuqtada yopiq bo‘lsin. Biz γ ning nolgomotop ekanligini ko‘rsatishimiz kerak. Yuqoridagi teoremaga ko‘ra $S^n \backslash \{P\}$ bir bog‘lamli bo‘lgani uchun $\gamma - S^n \backslash \{P\}$ da nolgomotop bo‘ladi va bundan tashqari S^n da ham nolgomotop bo‘ladi.■

27-teorema [4]. A va B topologik fazolar, $a_0 \in A$ va $b_0 \in B$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Quyidagi $i: A \to A \times B$ va $j: B \to A \times B$ akslantirishlarni qaraylik:

$$i: a \to (a, b_0) \text{ va } j: b \to (a_0, b).$$

Bunda $\varphi: (x, y) \to i_*(x) \cdot j_*(y)$ kabi aniqlangan

$$\varphi: \pi(A, a_0) \times \pi(B, b_0) \to \pi\big(A \times B, (a_0, b_0)\big)$$

akslantirish izomorfizm bo'ladi.

17-misol [4]. a) $\pi(S^1 \times \ldots \times S^1) \cong \pi(S^1) \times \ldots \pi(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^n$

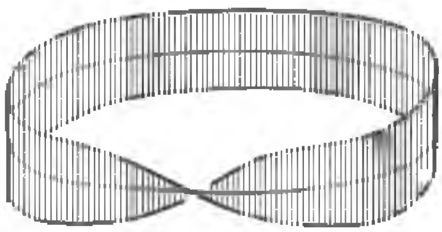
b) $\pi(S^k \times S^l) \cong \pi(S^k) \times \pi(S^l) \cong 0 \times 0 = 0$

6-lemma [4]. a) Har qanday $n \in \mathbb{N}$ son uchun S^{n-1} sfera $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ fazoning deformatsiyalangan retrakti bo'ladi;

b) Myobius yaprog'i

$$M = [0,1] \times [-1,1]/(0, y) \sim (1, -y)$$

ning markaziy aylanasi $[0,1] \times \{0\}$ uning deformatsiyalangan retrakti bo'ladi



7-lemma [3,4]. X topologik fazoning A qismto'plami uning deformatsiyalangan retrakti va retraksiya esa F bo'lsin. U holda $f: x \to F(x, 1)$ kabi aniqlangan $f: X \to A$ akslantirish gomotopik ekvivalentlik bo'ladi.

27-teorema. Bizga $f: X \to Y$ gomotopik ekvivalentlik va $x_0 \in X$, $f(x_0) = y_0 \in Y$ berilgan bo'lsin. U holda $f_*: \pi(X, x_0) \to \pi(Y, y_0)$ keltirilgan akslantirish izomorfizm bo'ladi.

13-natija. Myobius yaprog'ining fundamental gruppasi $(\mathbb{Z}, +)$ ga izomorf bo'ladi.

XULOSA

Bitiruv malakaviy ishining “Yo‘llar gomotopiyasi, bir bog‘lamli fazolar” deb nomlangan birinchi bobida yo‘llar va ularning ko‘paytmasi, gomotop yo‘llar, fundamental gruppalar hamda bir bog‘lamli fazolar, tortiluvchan fazo, fazoning retrakti kabi tushunchalar o‘rganildi, hamda har bir tusunchalar misollar yordamida yoritildi.

Bitiruv malakaviy ishining ikkinchi bobi “Ko‘p bog‘lamli fazolar fundamental gruppalari” deb nomlangan bo‘lib, bu bobda aylananing, qoplovchi fazolarning hamda ba’zi fazolarning fundamental gruppalari o‘rganildi. Bu bobning birinchi paragrafida aylananing fundamental gruppasi va uning ba’zi muhim xossalari teoremalar va misollar yordamida o‘rganildi.

Ikkinchi paragrafda qoplovchi fazo va uning fundamental gruppasi, xossalari o‘rganildi, misollar keltirildi.

Uchinchi paragrafda esa ba’zi fazolarning jumladan, S^n sfera, $S^n\backslash\{P\}$ bir nuqtasi yo‘q sferaning, hamda Myobius yaprog‘ining fundamental gruppalari o‘rganildi, misollar keltirildi.

Bundan tashqari ushbu BMI da izomorf fazolarning fundamental gruppalari bir xil bo‘lishi, fazoning fundamental gruppasi bilan, uning deformatsiyalangan retraktining fundamental gruppasi bir xil bo‘lishi ko‘rsatildi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. А.Я.Нарманов, “Дифференциал геометрия”, Тошкент, Университет, 2003.
2. C.Kosniowski, “A first course in algebraic topology”, Cambridge university press, 1980.
3. R.Munkres, “Topology second edition”, Massachusetts Institute of Technology, 2000.
4. Stefan Frield, “Algebraic topology I-II”, 685 pages.
5. A.Hatcher, “Algebraic topology”, 2001.
6. Tammo tom Dieck, “Algebraic topology”, Europen Mathematical Society, 2008.