УДК 621.311.52

МАРКОВСКИЙ ПОДХОД К ОБЕСПЕЧЕНИЮ НАДЕЖНОСТИ ЭКСПЛУАТАЦИИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Р.Б. Жалилов, Р.А. Ситдиков

Электроэнергетик тизим (ЭЭТ) элементларининг ва тизимнинг ишончлилиги кўрсаткичларини ҳисоблаш ва баҳолаш методлари ва уларнинг аниқлигини оширишга доир илмий адабиётларнинг шарҳи шуни кўрсатдики, ҳозирги ватқда ЭЭТ ишончлилигини тадқиқ қилишда комплекс тизимий ёндошув мвжуд эмас. Ушбу мақолада ЭЭТ ишончлилигини Марков жараёнлари асосида тадқиқ қилиб, унинг кўрсаткичларини ҳисоблашга оид материаллар келтирилган.

Обзор научной литературы по методам расчета и оценки показателей надёжности элементов и электроэнергетических систем (ЭЭС) и повышению их точности показал, что в настоящее время отсутствует комплексный системный подход к исследованию надежности ЭЭС. В материалах статьи приводятся результаты исследований надежности ЭЭС и расчету показателей её на основе Марковских процессов .

A review of the scientific literature on the methods of calculating and evaluating the reliability indicators of elements and electric power systems (EPS) and improving their accuracy has shown that there is currently no comprehensive systems approach to studying the reliability of EPS. The article contains the results of studies of the reliability of EPS and the calculation of its indicators based on Markov processes.

С помощью Марковских моделей надежности достаточно точно удается описать случайные процессы технических систем, а также разработан математический аппарат, позволяющий решать многие прикладные задачи, поэтому автором при исследования надёжности объектов электроэнергетики комплексным методом выбран системный подход опираясь на Марковские процессы .

Допустим, что система может находиться в возможных состояниях $x_1, x_2, \dots, x_m$ или $\{x_j, j = \overline{1,m}\}$. Для любого фиксированного мемента времени $t \geq 0$ состояние системы $X(t)$ интерпретируется как случайная величина. Поведение системы во времени можно интерпретировать как случайный процесс $\{X(t),\ t \geq 0\}$.

В зависимости от того, непрерывное или дискретное множество значений принимает случайная величина $X(t)$ и её параметр t, различают следующие основные виды случайных процессов [2,4,5] .

1. Дискретная случайная последовательность, (дискретный процесс) с

дискретным временем. В данном случае время принимает конечное или счетное множество значений $t_1, t_2, \dots, t_n$ или $\{t_i, i = \overline{1,n}\}$ и случайная величина $X(t_j) = X_j$ может принимать лишь дискретное множество значений $x_1, x_2, \dots, x_m$ или $\{x_j, j = \overline{1,m}\}$. Множество значений $\{t_i\}$ и $\{x_j\}$ могут быть конечными или бесконечными.

2. Непрерывный процесс с дискретным временем. В этом случае величина $X(t_j)$, $j = 1,2, \dots$ может принимать непрерывное множество значений .

3. Дискретный процесс с непрерывным временем. В этом случае $X(t)$ принимает дискретные значения $\{x_j, j = \overline{1,m}\}$, а время непрерывно изменяется в интервале $(0, T)$. Множество $\{x_j\}$ может быть конечным или счетным.

4. Непрерывный процесс с непрерывным временем. В этом случае $X(t)$ принимает значения из непрерывного множества, параметр также меняется непрерывно.

Известны также, помимо перечисленных более сложные, смещенные виды случайных процессов.

В связи с тем, что процессы с дискретными состояниями наиболее органически соответствуют поведению технических систем при исследовании их надежности, в дальнейшем подробно остановимся на таких процессах.

В соответствии с классификацией применительно к случайным марковским процессам различают марковские цепи, марковские последовательности, дискретные и непрерывные марковские процессы. Характер реализаций основных основных видов марковских процессов показаны на рис. 1. [2,3,5].

При анализе надежности систем электроснабжения в научной литературе [2,5,6] принято их функционирование рассматривать как случайный процесс перехода системы из состояния в состояние, обусловленный отказами и восстановлениями её составляющих элементов, который может быть достаточно строго описан дискретным марковским процессом, в некоторых задачах и марковской цепью. Свойством, определяющим марковский процесс, является независимость будущего поведения процесса от его прошлого, а зависимость только от настоящего (отсутствие последействия). Таким образом, случайный процесс $X(t)$ называется марковским, если для любых моментов времени $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ из отрезка $(0, T)$ условная функция распределения последнего значения $X(t_i)$ при фиксированных значениях $X(t_1)$, $X(t_2)$, …, $X(t_{n-1})$ зависит только от $X(t_{n-1})$, т.е. при заданных $x_1, x_2, \dots, x_n$ справедливо выражение

$$\mathrm{P}\left\{X(t_n) \le \frac{x_n}{X(t_1)} = x_1, \dots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\right\} = \mathrm{P}\left\{X(t_n) \le \frac{x_n}{X(t_1)} = x_{n-1}\right\} \quad (1.)$$

При разработке марковских моделей надежности состояние системы

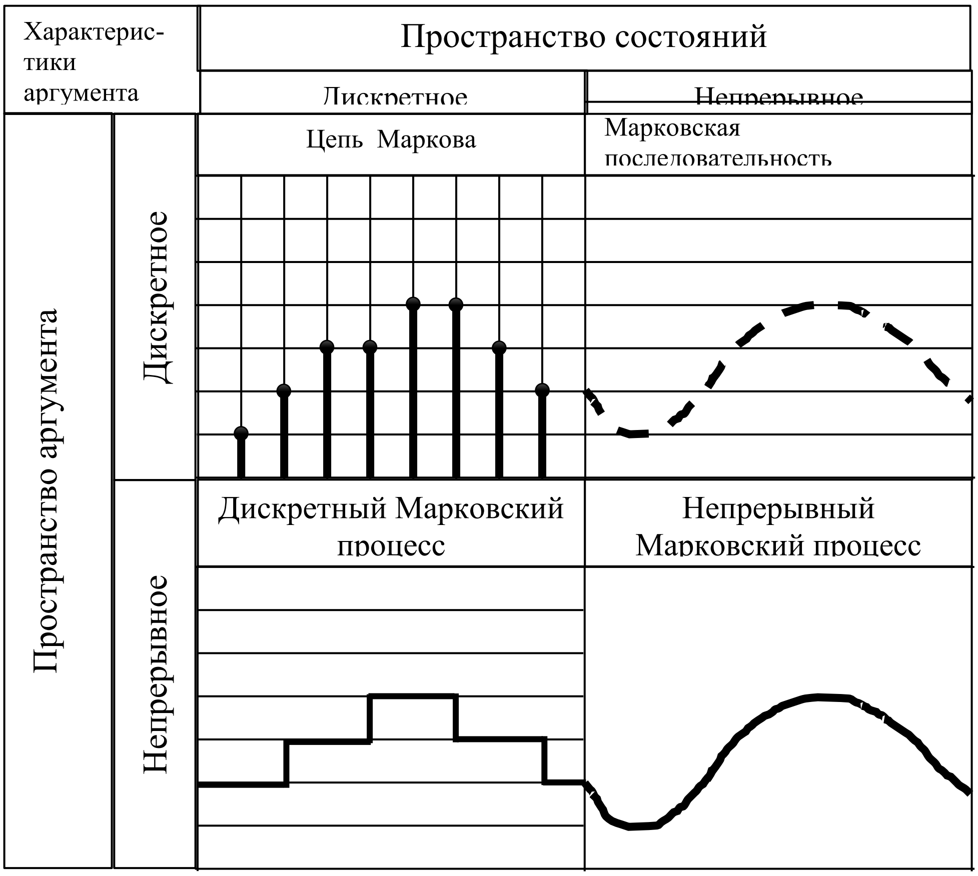

Рис. 1. Реализация случайных процессов.

определяется состоянием каждого элемента системы: элемент работает или отказал, или находится в планово- предупредительном ремонте, или в каком-то другом состоянии. Множество состояний системы ещё называют пространством состояний, а также фазовым пространством. Выделяют класс поглощающих состояний ,т.е. такое состояние, попав в которое , система уже не может из него выйти.

Дискретным марковским процессам и цепям Маркова соответствует ориентированный граф, позволяющий наглядно представить возможный характер развития процесса. Вершинам графа соответствует состояние цепи. Каждое дуге из состояния x_i в состояние x_j ставится в соответствие число, характеризующее интенсивность или вероятность перехода. В качестве примера на рис.2. показан граф, отражающий поведение системы, которая может оказаться в работоспособном состоянии x_1 , может отказать (состояние x_2) или находиться на техническом обслуживании x_3 . Граф (смотреть рис.2) можно использовать для описания системы, состоящей из двух дублирующих элементов. В этом случае состояния можно интерпретировать так : x_1- работоспособны оба элемента; x_2 –отказал один из двух элементов; x_3 –отказали оба элемента, т.е. случился полный отказ системы.

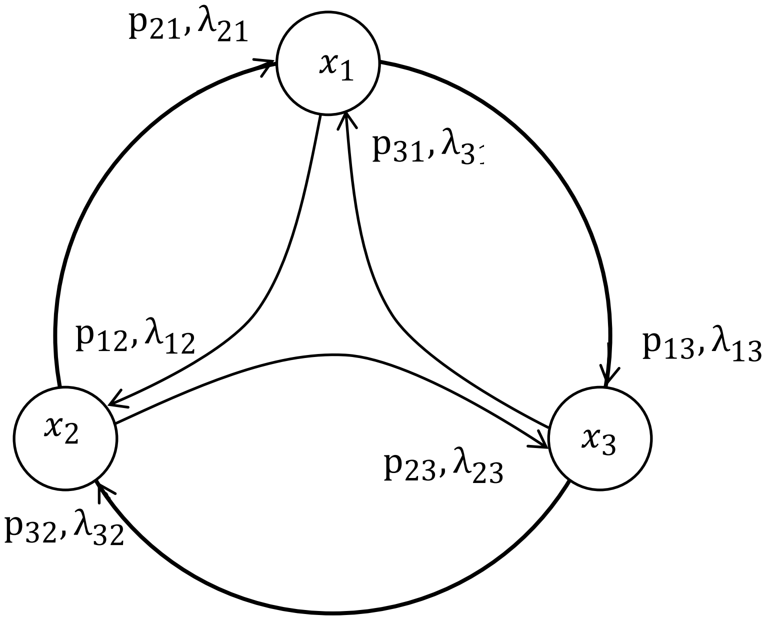

Рис.2. Граф состояний и переходов системы:
λ_{ij} – интенсивности; p_{ij} – вероятности переходов их x_i в $x_j, \forall_{ij}$.

Вероятность переходов между состояниями процесса можем записать в виде

$$\mathrm{P}_{ij}(t_1, t') = \mathrm{P}\{t_1, t_i; t', x_j\} = \mathrm{P}\left\{X(t) = \frac{x_j}{X(t)} = x_i\right\}. \qquad (2)$$

Это условная вероятность того, что система в момент времени будет находится в состоянии x_j , если в предшествующий момент времени t она находилась в состоянии x_i .

Определение параметров марковского процесса во многом зависит от свойств самого процесса. Выделим следующие свойства [2, 4,5] .

Однородность. Если вероятность переходов марковского процесса $X(t)$ для всех возможных состояний x_i и x_j не зависит от значений t и t', а зависит от их разности $\tau = t - t'$, т.е. $\mathrm{P}_{ij}(t_1, t') = \mathrm{P}_{ij}(\tau)$ для всех i и $j = 1,2, \dots, m$, то марковский процесс называется однородным.

Ординарность. Если за малый промежуток времени τ невозможно не более чем одно изменение состояние процесса, то процесс называется ординарным.

Эргодичность. Марковский процесс эргодичен, если для вероятностей переходов из состояния x_i в любое состояние x_j, x_i, $x_j \in X$ существуют пределы.

Дискретный марковский процесс с непрерывным временем. Поведение технической системы во времени, которая укладывается в рамки ординарного дискретного процесса, отражается системой дифференциальных уравнений Колмогорова – Чепмена для вероятностей реализаций возможных состояний

$$\frac{d\mathrm{P}_i(t)}{dt} = \mathrm{P}_i(t)\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}(t) + \sum_{i=1}^{m}\mathrm{P}_i(t)\,\lambda_{ji}(t)\,, \qquad (3)$$

где $i,j=\overline{1,m}$ (для системы из n элементов $m=2^n$); $\lambda_{ij}(t)$ - интенсивность перехода из x_i, в x_j; $\lambda_{ji}(t)$ - интенсивность перехода из x_j в x_i; $\mathrm{P}_i(t) = \mathrm{P}\{t,x_i\}$ - вероятность того, что в момент t процесс будет находится в состоянии x_i; $\mathrm{P}_i(t) = \mathrm{P}\{t,x_j\}$ –соответственно в x_j.

Вероятности $\mathrm{P}_i(t)$ должны удовлетворят условию нормировки

$$\sum_{i=1}^{m}\mathrm{P}_i(t) = 1\,. \qquad (4)$$

Интенсивности связаны с переходными вероятностями следующим образом :

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathrm{P}_{ij}(t,t+\Delta t\,)}{\Delta t}\;;$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\lambda_{ij}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1-\mathrm{P}_{ii}(t,t+\Delta t\,)}{\Delta t} = -\lambda_{ii}(t)\,.$$

В однородном марковском процессе интенсивности переходов не зависят от времени $\lambda_{ij}(t)=\lambda_{ij}$, $\lambda_{ii}(t)=\lambda_{ii}$.В этом случае уравнение (3) примет вид

$$\frac{d\mathrm{P}_i(t)}{dt} = \mathrm{P}_i(t)\lambda_{ii} + \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{m}\mathrm{P}_j(t)\lambda_{ii}(t)\quad. \qquad (5)$$

или в матричной форме

$$\left[\dot{\mathrm{P}}\,(t)\right] = [\Lambda][\mathrm{P}(t)] \qquad , \qquad (6.)$$

где матрица интенсивностей $[\Lambda]$ определена

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \dots \lambda_{im} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \dots \lambda_{2m} \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} \dots \lambda_{mm} \end{bmatrix} \qquad ,$$

диагональные элементы матрицы $[\Lambda]$ определены в виде $\lambda_{ii} = \sum_{i\neq j}\lambda_{ij}$.

Сумма элементов в каждой строке этой матрицы равна нулю.

Система уравнений (3), (4) решаются при начальных условиях $\mathrm{P}_i(t_0)$, $\forall i$. Такая система дифференциальных первой степени уравнений решается аналитическим путем. Однако в ряде задач, когда число состояний (уравнений) бывают слишком большим, применяют численные методы решения.

Среди аналитических методов рекомендуются методы: исключения; неопределенных коэффициентов Лагранжа; эволюционного оператора Коши. На практике приходится часто иметь дело с однородными марковскими процессами. В этом случае коэффициенты дифференциальных уравнений не зависят от времени (см. формулу 5), т.е имеем дело с системой обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, при решении которых удобнее больше всех применение метода преобразований Лапласа. Известно, что преобразование Лапласа

$$\mathrm{F}(s) = L[f(t)] = \int_{\mathbf{0}}^{\infty} f(t) exp\,(-st) dt \qquad (7)$$

ставит в соответствие с каждой однозначной функции (оригиналу) $f(t)$, для которого несобственный интеграл (7) сходится, единственную функцию $\mathrm{F}(s)$ (изображение) комплексной переменной s .

Применяя преобразование Лапласа к системе дифференциальных уравнений (6) с постоянными коэффициентами , получаем

$$s[\mathrm{P}(s)] - [\mathrm{P}(0)] = [\Lambda]\,[\mathrm{P}(s)] \qquad (8)$$

или

$$[\mathrm{P}(s)] = (s[\mathrm{I}] - [\Lambda])^{-\mathbf{1}}\,[\mathrm{P}(0)] \qquad ,$$

где s – комплексная переменная; $[\mathrm{P}(s)]$ – изображение вектор функции $[\mathrm{P}(t)] = \{\mathrm{P}_1(t), \ldots, \mathrm{P}_m(t)\}$; $[\mathrm{I}]$ – единичная матрица.

Таким образом, получаем систему алгебраических уравнений для изображения $[\mathrm{P}(s)]$, которая решается методами линейной алгебры. Затем, применяя обратное преобразование Лапласа изображению $[\mathrm{P}(s)]$ с учетом начальных условий $[\mathrm{P}(0)]$ **,** находим решение $[\mathrm{P}(t)]$ исходной системы.

Для численного решения системы дифференциальных уравнений (3) рекомендуются методы: последовательных приближений, Эйгера, схемы Адамса, Рунге- Кутта. Большое всего распространение нашел последний метод.

Если все функции распределения, характеризующие поведение элементов системы, экспоненциального вида, от систему можно описать с помощью однородных марковских процессов. Тогда аналитическое определение характеристик системы относительно не сложно.

В системах, где не все величины поддаются определению экспоненциальным или эрланговскими распределениями, используют специальные аналитические приёмы, приводящие исследуемые процессы к марковским. В монографии [5] способы маркизирования разделены на «внешние» и «внутренние» .

Метод дополнительных переменных служит примером внешнего маркизирования. Сущность метода заключается в том, что пространство состояний начального немарковского процесса с помощью дополнительных величин расширяется так, чтобы случайный процесс с расширенным фазовым пространством стал марковским. Дополнительные переменные выбираются либо как остаточные времена неэкспоненциально распределенных времен от текущего времени t до полного завершения соответствующих времен (процесс при этом, как правило определяется системой дифференциальных уравнений), либо как срок наработки неэкспоненциально распределенных времен с начало их отсчета до момента времени (система интегродифференциальных уравнений) .

Согласно метода вложенных цепей Маркова (является примером внутреннего маркизирования) для случайного процесса описывающего надежность системы, выделяют такие моменты времени, в которые процесс становится марковским (рис.2). Свойство марковости соблюдается в состояниях x_1, x_2, x_3 и соответствующих моментах времени t_1, t_2, t_3. При исследовании процесса во внимание принимаются только выделенные моменты. Для полученных марковских цепей находят вероятностные характеристики и преобразовывают их в соответствующие характеристики исходного процесса.

а

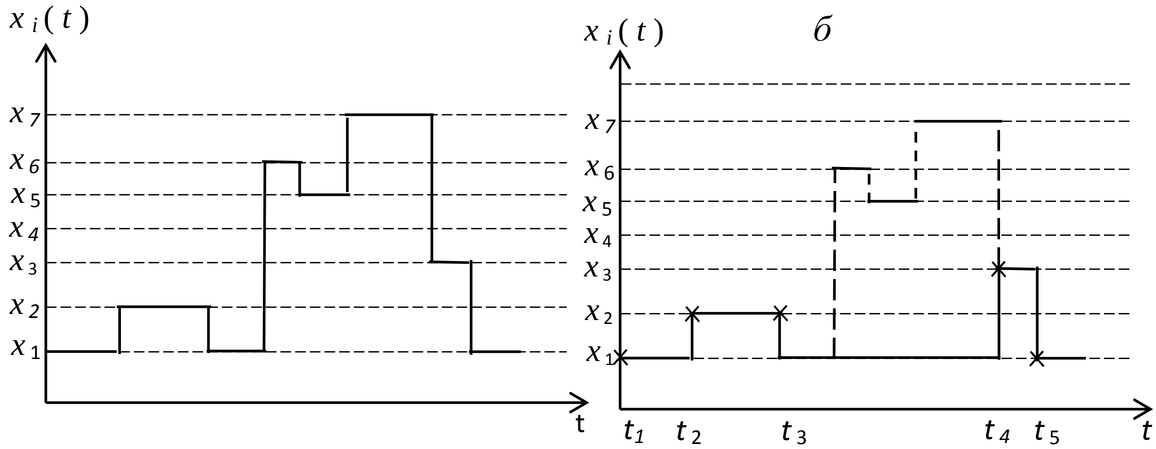

Рис. 3. Реализация исходного и (*а*) и вложенного (*б*) случайного процесса.

Если характеристики вложенных цепей дают исчерпывающую информацию о функционировании исходного процесса, то последний исключается.

В более общем случае смена состояний системы образует марковскую цепь, а время пребывания в состоянии x_i при переходе в другое состояние x_j является случайной величиной t_{ij} с произвольным распределением. Такие процессы названы полумарковским (ПМП). Время t_{ij} не зависит от предыстории процесса, т.е. от того, в каких состояниях и сколько времени процесс находился до момента перехода в состояние x_i . Оно зависит лишь от данного состояния x_i и того состояния x_j, в которое система переходит. Следовательно, при переходе к ПМП марковское свойство сохраняется. При этом процесс является марковским только в определенные моменты времени, в которые осуществляется переход из состояния в состояние. Следовательно, для получения соответствующей формальной модели системы с помощью ПМП необходимо задать вероятностные характеристики двухмерного процесса

$(x_j, t_{ij}), i, j = \overline{1, n}$.

Известны несколько способов задания ПМП [2,3,5]. Представляет интерес способ, согласно которого задание ПМП с помощью вектора функции распределения времени пребывания процесса в состоянии $x_i - \mathrm{F}_i(t)$ и матрицы услов-ных вероятностей того, что при исходном состоянии x_i процесс за один шаг перейдет в состояние x_j при условии, что в состоянии x_i он провел время $t - [\mathrm{Q}] = \{q_{ij}(t)\}$. Данный способ связан с двумя другими способами задания ПМП соотношениями

$$\mathrm{F}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{p}_{ij} T_{ij}(t)\ ,\ i = \overline{1, n} \quad ; \tag{9}$$

$$\mathrm{F}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}_{ij}(t) \quad ; \tag{10}$$

$$\mathrm{P}_{ij}(t) = \int_{\mathbf{0}}^{t} q_{ij}\,(t) d\mathrm{F}_i(t\,) \quad ; \tag{11}$$

$$T_{ij}(t) + \frac{1}{\mathrm{p}_{ij}} \int_{\mathbf{0}}^{t} q_{ij}\,(t) d\mathrm{F}_i(t\,) \quad . \tag{12}$$

Ниже в таблице приведены не некоторые ориентировочные сведения о применении методов моделирования [2,4,5].

Табл.

Применение модификаций марковских методов

Метод	Область применения		Трудоемкость
	Количество состояний системы	Количество неэкспоненциальных величин	
Однородный МП	Не ограничено	Нет	Невелика
Марковская цепь	Не ограничено	*	Невелика
Метод фаз Эрланга	Не большое	Допускающая аппроксимацию Эрлангским распределением	Больше чем в предыдущих
Метод дополнительных переменных	Небольшое	Несколько	Значительна
Вложение цепи	Не ограни-	Как правило,1	Иногда значительна

Маркова	чено	
Полумарковские цепи	Не ограни- Как правило,1 чено	Иногда значительна

* Примечание: переходы могут быть достаточно определены только переходными вероятностями.

При решении задач, связанных с управлением или плановым ремонтно- техническим обслуживанием системы необходимо вычисление нестационарных показателей. При решении задач, направленных на повышение экономической эффективности системы можно ограничиться средними за ограниченный период или стационарными показателями надежности.

При вычислении стационарных показателей надежности системы, моделируемой полумарковским процессом смена состояний системы образует марковскую цепь, а время пребывания в каждом состоянии перед переходом в другое состояние является случайной величиной с произвольным распределением. При основном (первом) способе задания ПМП известны :

матрица переходных вероятностей соответствующей марковской цепи

$$[\mathrm{p}] = \begin{bmatrix} \mathrm{p}_{11} & \mathrm{p}_{12} \cdots \mathrm{p}_{1n} \\ \mathrm{p}_{21} & \mathrm{p}_{22} \cdots \mathrm{p}_{2n} \\ & . \; . \; . \\ \mathrm{p}_{n1} & \lambda_{n2} \ldots \lambda_{nn} \end{bmatrix} \quad ;$$

матрица функций распределения длительности пребывания процесса в состоянии X при условии перехода в состояние x_j

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11}(t) & T_{12}(t) \ldots T_{1n}(t) \\ T_{21}(t) & T_{22}(t) \ldots T_{2n}(t) \\ & . \; . \; . \\ T_{n1}(t) & T_{n2}(t) \ldots T_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad .$$

Через $[\mathrm{p}]$ и $[T]$ определяются следующие показатели надежности системы.

Наработка на отказ $T_{\text{н}}$ системы определяется как среднее время пребывания ПМП в подмножестве работоспособных состояний X_+ после очередного перехода процесса из подмножества неработоспособных состояний X_- в подмножество X_+ .

$$T_{\text{н}} = \sum_{x_n \in X_+} \pi_n a_n \left(\sum_{x_i \in x_+} \pi_i \ \sum_{x_j \in X_-} \mathrm{p}_{ij}\right)^{-1} = \sum_{x_n \in X_+} \pi_n a_n \left(\sum_{x_i \in x_-} \pi_i \ \sum_{x_j \in X_+} \mathrm{p}_{ij}\right)^{-1} \quad , \quad 13)$$

где x_+ , x_- - подмножества граничных состояний (из X_+ и X_- , т.е.

таких состояний, из которых можно попасть соответственно в X_+ и X_- за один переход); π_i- стационарные (финальные) вероятности вложенной цепи Маркова. Вектор π_i , $i = \overline{1,m}$ имеет элементами финальные вероятности состояний. Для эргодических марковских цепей

$\pi_i = \sum_{i=1}^{m} \pi_j \, \mathrm{p}_{ji}$;

$\sum_{i=1}^{m} \pi_i = 1$; a_i – среднее время пребывания ПМП в состоянии X_i. Значение a_i определяется по формуле

$$a_i = \int_0^{\infty} [1 - \mathrm{F}_i(t)] \, dt \qquad , \qquad (14)$$

где $\mathrm{F}_i(t)$ – функция распределения времени пребывания процесса в состоянии x_i (определяется суммой (9)) .

Среднее время восстановления $T_{\text{в}}$ системы определяется как среднее время пребывания ПМП в подмножестве неработоспособных состояний X_- после очередного перехода процесса из подмножества работоспособных состояний X_+ в подмножество X_-

$$T_{\text{в}} = \sum_{x_n \in X_-} \pi_n a_n \left(\sum_{x_i \in x_-} \pi_i \sum_{x_j \in X_+} \mathrm{p}_{ij}\right)^{-1} =$$
$$\sum_{x_n \in X_-} \pi_n a_n \left(\sum_{x_i \in x_+} \pi_i \sum_{x_j \in X_-} \mathrm{p}_{ij}\right)^{-1} \qquad . \qquad (15)$$

Коэффициент готовности $K_{\text{г}}$ системы определяется как стационарная вероятность пребывания ПМП в подмножестве работоспособных состояний X_+

$$K_{\text{г}} = \sum_{x_i \in X_+} \pi_i a_i \left(\sum_{x_i \in x_+} \pi_i \, a_i \sum_{x_j \in X_-} \pi_j a_j\right)^{-1} \qquad . \qquad (16)$$

При этом средняя частота отказов W системы определяется как

$$W = \frac{K_{\text{г}}}{T_{\text{н}}} = \left(\sum_{x_i \in x_+} \pi_i \sum_{x_j \in X_-} \mathrm{p}_{ij}\right)\left(\sum_{x_i \in x_+} \pi_i \, a_i \sum_{x_j \in X_-} \pi_j a_j\right)^{-1} =$$
$$= \left(\sum_{x_i \in x_-} \pi_i \sum_{x_j \in X_+} \mathrm{p}_{ij}\right)\left(\sum_{x_i \in x_+} \pi_i \, a_i \sum_{x_j \in X_-} \pi_j a_j\right)^{-1} \qquad . \qquad (17)$$

При автоматизации расчетов и вычислении показателей надежности на ЭВМ для расчета финальных вероятностей удобно пользоваться выражением

$\pi_i = D_i \left(\int_{j=1}^{n} D_j\right)^{-1}$,

где D_i – минор, получаемый вычёркиванием $i -$ й строки и $i -$ го столбца

матрицы $[D]$,

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 - \mathrm{p}_{11} & -\mathrm{p}_{12} \cdots & -\mathrm{p}_{1n} \\ -\mathrm{p}_{21} & 1 - \mathrm{p}_{22} \cdots & -\mathrm{p}_{2n} \\ & \cdot \;\cdot \;\cdot & \\ -\mathrm{p}_{n1} & -\mathrm{p}_{n2} \cdots & 1 - \lambda_{nn} \end{bmatrix} \qquad .$$

Основной недостаток метода имитационного моделирования - для задач надежности требуется значительное число испытаний, в результате чего затраты машинного времени на моделирование оказывается чрезвычайно большими. Например, чтобы получить оценку вероятности отказа системы Q необходимо провести N испытаний $\widehat{\mathrm{Q}} = N_0/N$, где $N_0 -$ число испытаний, в которых зафиксированы отказы системы. Объём реализаций N определяется в зависимости от заданной погрешности ε и требуемой достоверности α по формуле

$$N = \mathrm{Q}^{-1}(k/\varepsilon)^2 , \quad (18)$$

где $k -$ корень уравнения

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^k \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \ .$$

Таким образом, если $\alpha = 0{,}99$, $k = 2{,}57$, $\varepsilon = 0{,}1$, то для получения $\widehat{\mathrm{Q}}$ на уровне 0,01 необходимо $N = 0{,}01^{-1}(2{,}57/0{,}1)^2 = 6{,}6 \cdot 10^4$ реализаций. Если $\alpha = 0{,}95$, $k = 1{,}96$, то требуется $N = 0{,}01^{-1}(1{,}96/0{,}1)^2 = 3{,}8 \cdot 10^4$ реализаций.

Эффективным средством исследования надежности систем является имитационное моделирование на основании марковских процессов [1,2,5].

Литература

1. Китушин В.Г. Надежность энергетических систем. –Новосибирск: Издательство НГТУ. 2003. –256 с.
2. Stettner Lukasz. Ergodic control of Markov chains with mixed obser-Vation structure// Diss. math. 1995. № 341. P.1-36
3. Tsantas N., Vassilion P. The non-homogeneons Markov sustem in a Stochastic environment//J. Appl.Prorab.1993.30, №2. P.285-301.
4. Карманов А.В. Исследование управляемых конечных Марковских цепей с неполной информацией Минимаксный подход. Москва, ФИЗМАТЛИТ. 2002. – 173с.
5. Меньшов Б.Г., Ершов М.С. Надежность электроснабжения газотурбинных компрессорных станций.–М.: Недра, 1995. – 283с.
6. Жалилов Р.Б. , Сытдыков Р.А. Графоаналитический метод исследования надёжности объектов электроэнергетики.// Проблемы энерго- и ресурсосбережения. – Ташкент, 2017. – № 1-2. – С . 23-29 .