M.X.TESHAYEV
G’.G’.YUNUSOV
Z.I.BOLTAYEV

OLIY MATEMATIKA I-QISM

O′ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O′RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

M.X.TESHAYEV, G’.G’.YUNUSOV, Z.I.BOLTAYEV

OLIY MATEMATIKA
I-QISM

O’zbekiston Respublikasi Oliy va o’rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan texnika yo’nalishi talabalari uchun o’quv qo’llanma sifatida tavsiya etilgan

Buxoro – 2018

Oliy matematika: o’quv qo’llanma «Oliy matematika» kafedrasining 201__yil ___ ________ kungi №_ __ majlisida muhokama etilgan va institut oʼquv-uslubiy kengashining 201__ yil ___ ____________ kungi №______-yig’ilishida tasdiqlanib, chop etishga tavsiya etilgan.

Tuzuvchilar:

BuxMTI «Oliy matematika» kafedrasi dotseni,
fizika-matematika fanlari nomzodi
Teshayev M.X.

BuxMTI «Oliy matematika» kafedrasi mudiri,
texnika fanlari nomzodi, dotsent
Yunusov G’.G’.

BuxMTI «Oliy matematika» kafedrasi dotseni,
fizika-matematika fanlari bo’yicha falsafa doktori
Boltayev Z.I.

Taqrizchilar:

BuxDU “Matematika” kafedrasi mudiri,
fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent
Mamatova N.X.

BuxMTI «Oliy matematika» kafedrasi dotseni,
texnika fanlari nomzodi
Imatov H.B.

Ushbu o’quv qo’llanmada «Oliy matematika» fanining chiziqli algebra, analitik geometriya, matematik analizga kirish, differensial va integral hisob boʼlimlari boʼyicha fanning ishchi oʼquv dasturida koʼzda tutilgan mavzular yoritilgan.

KIRISH

Eng avvalo “Matematika” fani nimani oʼrgatadi degan savolni quyamiz. Bu juda murakkab savol bo’lib, unga ta'lim darajasi turli bo’lgan odamlar turli javoblar beradilar. Masalan, boshlang’ich sinf uquvchilari matematika-narsalarni sanash qoidalarini oʼrgatadi deb javob beradilar va bu javobni notoʼgri deb boʼlmaydi. Chunki bu matematikaning muhim qismi boʼlmish arifmetikani mohiyatini tashkil etadi va u dastlabki tarixiy davrlarda matematikani toʼlik oʼz ichiga olgan. Oʼrta sinf oʼquvchilari bu javobga matematikani chiziqlar, figuralar, jismlarni, ya'ni geometrik ob'ektlarni ham oʼrganadi deb qushimcha qiladilar. Yuqori sinf uquvchilari esa bu savolga matematika funktsiyalarni oʼrganishini ham ilova qiladilar. Talabalar oliy oʼquv yurtlarida matematikaning differentsial tenglamalar, ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika kabi yangidan-yangi bo’limlarini oʼrganadilar va shu sababli ularning javoblari oʼquvchilar javobiga nisbatan kengroq va toʼlaroq boʼladi.

Ammo barcha bu javoblar bir tomonlama xarakterga ega bo’lib, matematikaning u yoki bu yoʼnalishlarini ifodalaydi. Bu savolga umumiy holda javob berish uchun juda ko’p matematiklar, faylasuflar harakat qilganlar. Hozircha bu savolga eng qoniqarli javob XX asrning buyuk matematigi ***A.N.Kolmogorov*** (1903-1987) tomonidan keltirilgan va quyidagicha ifodalanadi.

T A ' R I F : Matematika xaqiqiy olamning miqdoriy munosabatlari va fazoviy formalari haqidagi fandir.

Matematika soʼzi grek tilidan olingan boʼlib, miqdorlar haqidagi fan degan ma'noni bildiradi.

Matematika boshqa tabiiy fanlardan shu bilan farq qiladiki, u real olamni, atrofimizdagi ob'ekt va jarayonlarni abstraktlashtirilgan holda o’rganadi va shu sababli uning natijalari umumiy xarakterga ega.

Masalan, biologiya tirik hayotni o’rganuvchi fan bo’lib, unda qoʼllaniladigan usullar xususiy xarakterga va bu usullarni fizikaga yoki tilshunoslikga tadbiq etib boʼlmaydi. Xuddi shunday gaplarni fizika, ximiya, geologiya va boshqa fanlar toʼg’risida aytish mumkin.

Ammo arifmetikaning qonun – qoidalarini biologiya ob'ektlariga ham, fizik-ximik tadbiqotlarga ham, iqtisodiy masalalarni echishda ham, qishloq xoʼjaligida ham bir xil muvaffaqiyat bilan qoʼllash mumkin. Shu sababdan ham XIX asrning buyuk matematigi ***Gauss*** «Arifmetika - matematikaning podshohidir, matematika esa barcha fanlarning podshohidir.» -deb bejiz aytmagan.

Albatta, matematika bunday ulkan bahoga erishishi uchun uzoq taraqqiyot yoʼlini bosib oʼtishga toʼgri kelgan. ***A.N.Kolmogorov*** o’zining 1954 yilda qobusnoma uchun yozilgan va “Matematika“ deb atalgan maqolasida bu taraqqiyotni ushbu toʼrt davrga ajratadi.

I Matematikaning shakllanish davri.

II Elementar matematika davri.

III O’zgaruvchi miqdorlar matematikasi davri. Bu davrni shartli ravishda “Oliy matematika “davri deb ham aytish mumkin.

IV Hozirgi zamon matematikasi davri.

Shuni ta'kidlab o′tish kerakki, har bir keyingi davrda elementar matematikani rivojlanishi to′xtab qolgan emas.

I. Matematikaning shakllanish davri eramizdan oldingi VI-V asrgacha davom etdi. Bu davrda insoniyat turli predmetlarni sanashni o′rgandi. Sanoq sistemalari oldin og'zaki holda ishlatilgan. Yozma sanoq sistemalarini kashf etilishi bilan natural sonlar ustida turli arifmetik amallar bajarish qonun-qoidalari topila boshlandi. Yo′llarni uzunligini o′lchash, daromadlarni va etishtirilgan hosilni taqsimlash kabi masalalar natijasida kasr sonlar tushunchasi va ular ustida arifmetik amallar bajarish qoidalari ishlab chiqildi.

Natijada, eng qadimiy matematik fan- arifmetikaga asos solindi. Maydonlarni o′lchash, jismlar hajmlarini hisoblash, turli ish qurollarini yaratishga ehtiyoj paydo bo′lishi bilan geometriyaning kurtaklari shakllana boshlandi. Shunisi qiziqki, bu jarayonlar turli xalqlarda bir-biriga bog'liqmas ravishda, parallel ko'rinishda amalga oshdi.

Ayniqsa bu jarayonlar Misr va Vavilon davlatlarida yaqqol namoyon bo'ldi.

II. Elementar matematika davri eramizdan oldingi V asrdan boshlab XVII asr boshlarigacha davom etdi. Oldingi davrdagi matematik bilimlar tarqoq, xususiy ko'rinishdagi natijalardan, qonun-qoidalardan iborat edi. Ularni birlashtirish, umumiy ko'rinishga keltirish kadimgi Gretsiyadan boshlandi va matematika fanini ilmiy poydevoriga asos solindi.

Evklidning "Negizlar" asarida elementar geometriya fani aksiomatik ravishda ifodalandi va bu asar 2 ming yil davomida boshqa matematik fanlarni asosini yaratishga misol, namuna sifatida xizmat qilib keldi. Qadimgi Gretsiyada matematikaning (asosan geometriyani) rivojlanishiga ***Pifagor***, ***Aristotel***, ***Arximed***, ***Geron***, ***Diofant***, ***Ptolomey*** kabi mutafakkirlar katta hissa qo'shdilar.Turli gidrotexnik qurilishlar (masalan, Arximed vinti), harbiy mashinalar, Arximedni tosh otuvchi qurilmalari, oynalar sistemasida kemalarni yondirib yuborish, dengizda suzish uchun kerakli bilimlar, geodeziya va kartografiya, astronomik kuzatishlar bilan bog'liq masalalar matematikani rivojlanishiga katta turtki bo'ldi.

Ko'rilayotgan davrning IX-XV asrlari davomida matematikaning rivojlanishiga O′rta Osiyo olimlarining hissasi katta bo′ldi. Bu vaqtda arablar juda ko′p erlarni bosib olib, arab xalifaligiga birlashtirdilar. Bu erlarda olimlar yagona arab tilidan foydalana boshladilar va bu ular orasidagi aloqalarni mustahkamlanishiga olib keldi. Bundan tashqari o'sha davrda katta ilmiy tadqiqodlar davlat tomonidan moliyalashtirila boshlandi. Bu omillar bu erda ilmni rivojlanishiga, katta kutubxonalar tashkil etilishiga, rasadxonalar qurilishiga olib keldi.

IX asrda yashab ijod etgan xorazmlik olim ***Muhammad ibn Muso al Xorazmiy*** birinchi bo'lib o'zining "Aljabr" asarida algebra faniga asos soldi. Evropalik olimlar bu kitob orqali kvadrat tenglamalarni echish usuli bilan tanishdilar. X asrda Beruniy $x^3+1=3x$ ko'rinishdagi kub tenglamani taqribiy echish usulini topdi. XI-XII asrda yashagan ***Umar Xayyom*** kub tenglamalarni umumiy holda tekshirdi, ularni sinflarga ajratdi va echilish shartlarini topdi. XIII asrda ijod etgan ozarbayjon matematigi ***Nasriddin Tusiy*** sferik trigonometriyani asos solinishiga yakun yasadi va ***Evklidning*** “Negizlar” kitobini arab tiligа tarjima qildi. XV asrda buyuk astronom va matematik ***Mirzo Ulug’bek*** (1394-1449) ”Ziji Kuragoniy”asarida 1018 ta yulduzning koordinatalarini nihoyatda katta aniqlik bilan hisoblab berdi. Bu ishda rasadxonada eng zamonaviy aniq asboblardan foydalanilgani bilan bir qatorda yirik matematiklar ham ishlaganini ko′rsatib o′tish kerak. Ulardan eng mashhuri ***G’iyosiddin Jamshid ibn Masud ali Qushchi*** bo′lib hisoblanadi. U o′nli kasrlar ustida arifmetik amallar bajarish qonun–qoidalarini batafsil bayon qilib berdi (ungacha O′rta Osiyoda asosan oltmishlik sanoq sistemasi qo′llanilgan). Evropada bu natijalarga atigi XVI asrda erishildi. ***Ali Qushchi*** Nyuton binomi formulasini natural sonlar uchun og’zaki ko′rinishda ifodaladi, ”Aylana haqidagi risola” asarida (sonini 17 xona aniqlikda hisobladi, astronomik hisoblashlar uchun kerak bo’lgan sinuslar jadvalini tuzish uchun tenglamalarni iteratsion usulda sonli echish yo’lini ko’rsatdi.

Hindistonning matematikaga qo′shgan eng katta hissasi - o′nli sanoq sistemasi uchun raqamlar va nolni kashf etilishidir. Bu raqamlar evropaliklarga arab matematiklari asarlari orqali ma'lum bo’lgani uchun hozirgi paytda noto′g’ri ravishda «arab raqamlari» deb ataladi.

Elementar matematikaning rivojlanishiga Xitoy olimlarining ham katta ulushi bor. XII-XV asrlar davomida G’arbiy Evropa matematiklari asosan qadimgi Gretsiya va Sharq matematiklarining ishlarini o‘rganish bilan shug’ullanib kelganlar, matematik bilimlarni ommalashtirish maqsadida turli asarlar yozganlar, matematik simvollarni kashf etganlar. Ammo XVI asrdan boshlab bu erlik olimlar tomonidan yirik kashfiyotlar qilina boshlandi va yuksalish davri boshlandi. Masalan, polyak olimi ***Kopernikning*** astronomik kashfiyoti, italiyalik olim ***Galileyning*** mexanika bo’yicha qator kashfiyotlari matematikani rivojlanishiga turtki bo′ldi.

Italiyalik matematiklar ***Tartaliya***, ***Ferrari***, ***Kardano*** uchinchi va to’rtinchi tartibli algebraik tenglamalarni echish usullarini topdilar (oldin bu tenglamalar taqribiy echilar edi.). Frantsuz matematigi ***Viet*** n- darajali tenglama ildizlari bilan uning koeffitsientlari orasidagi munosobatlarni topdi.

III.Oliy matematika davri XVII asrdan boshlandi. Elementar matematikada kattaliklar va geometrik ob'ektlar qo’zg’almas, o’zgarmas miqdorlar kabi qaralar edi. Matematikada endi harakatlanuvchi va o’zgaruvchi miqdorlarni ko′rishga to′g’ri kela boshladi. Masalan, ***Boyl-Mariot*** (1662) gaz hajmi bilan uning bosimi o’rtasida o’zaro bog’lanish mavjud ekanligini, ***Guk*** (1660) esa qattiq jismning deformatsiyalanishi ε va kuchlanishi σ orasida $\sigma=\alpha\varepsilon$ ko’rinishdagi chiziqli bog’lanish mavjud ekanligini aniqladilar. Bu qonunlarda ikki o’zgaruvchi miqdor orasidagi o’zaro bog’lanishni o’rganishga to’g’ri keldi va bunday bog’lanishlar funktsiya tushunchasiga olib keldi. Elementar matematikada (arifmetikada) son qanday asosiy ahamiyatga ega bo’lsa, oliy matematikada funktsiya shunday asosiy ahamiyatga egadir. Funktsiyalarni o′rganish matematik tahlil degan fanga olib keldi. Bu fanda limit, hosila, integral kabi tushunchalar kiritildi. Nemis matematigi ***Leybnits*** 1682-1686 yillarda va ingliz matematigi, mexanigi ***Nyuton*** 1665-1666 yillarda differentsial va integral hisobni kashf etdilar.

Bu davrda matematikani rivojlanishiga ***Dekart***, ***Fure***, ***Paskal***, ***Ferma***, ***Gyuygents***, ***Bernulli***, ***Eyler***, ***Lagranj***, ***Dalamber***, ***Koshi*** kabi buyuk olimlar katta hissa qo’shdilar. Bu davrda matematik tahlilni rivojlantirish bilan bir qatorda analitik geometriya, differentsial tenglamalar, ehtimollar nazariyasi kabi yangi fanlarga asos solindi.

IV. Hozirgi zamon matematikasi davri XIX asr boshidan hisoblanadi. Oldingi davrlarda matematikaning rivojlanishi amaliy masalalarni echish natijasida amalga oshgan bo’lsa, endi matematika o′z ichki qonuniyatlari bo’yicha ham rivojlana boshladi. Bu rivojlanish oldin topilgan tushunchalarni, natijalarni umumlashtirish, ularni mantiqiy jihatdan tugallanganligiga erishish, oldingi natijalarni hozirgi zamon yu-tuqlari asosida qayta ko’rib chiqish, tahlil etish kabi yo’nalishlarda amalga oshadi. Masalan, $x^2-1=0$ kvadrat tenglama $x=\pm 1$ ildizga ega ekanligi ma’lum, ammo unga juda o′xshash $x^2+1=0$ tenglama xaqiqiy sonlar ichida ildizga ega emas. Shu sababli xaqiqiy sonlardan kengroq, umumiyroq bo′lgan kompleks sonlar tushunchasini kiritishga to’g’ri keldi. XIX asrda kompleks sonlar va ularning funktsiyalarini o′rganish natijasida «Kompleks tahlil» fani paydo bo’ldi. Bu nazariyaning amaliyotga tadbiqlari keyinchalik topildi.

Algebraik tenglamalarni echish masalalari bilan shug’ullanish natijasida ***Abel***, ***Galua*** (1830) tomonidan guruhlar nazariyasi yaratildi. XX asrdagina guruhlar nazariyasi kristallarni o’rganishda, kvant fizikasida o’z tadbig’ini topdi.

XIX asrda matematika fanining juda ko’p sohalarga qo’llanilishi, tarkibini juda kengayishi natijasida uning poydevorini ilmiy nuqtai-nazardan qayta ko’rib chiqish yoki yaratish masalalari muhim ahamiyatga ega bo’ldi. Matematik fanlarning asosiy poydevori sifatida to’plamlar nazariyasi va matematik mantiq olindi. XX asrda juda ko’p matematik fanlar poydevori to′plamlar nazariyasi asosida yaratildi. XIX-XX asrda yangi matematik fanlarga ham asos solindi va rivojlantirildi. Masalan, to′plamlar nazariyasi, matematik mantiq, xaqiqiy o′zgaruvchili funktsiyalar nazariyasi, funktsional tahlil, topologiya, matematik fizika masalalari.

O′zbekistonda matematika fanining rivojlanishiga to′xtalib o′taylik. O′zbekistonda matematika fani bo‘yicha yutuqlar Toshkentda 1920 yilda universitet tashkil etilishi bilan bog’liq. O′zbekistonga kelgan rus olimlari ichida ***V.I.Romanovskiy*** ham bor edi. U matematik statistika bo’yicha ko’zga ko’ringan olim edi va u o’zbek matematika maktabini yaratishga katta hissa qo′shdi. O′zbek matematiklaridan birichi bo’lib akademik ***Kori-Niyoziyni*** ko’rsatish mumkin. U matematika bo’yicha katta ilmiy ishlar qilmagan bo′lsada, matematikani targ’ib qi-lish, o′zbek tilida darsliklar yozish bilan O′zbekistonda matematikani rivojlanishiga katta hissa qo′shdi. Dunyoga tanilgan matematiklarimizdan akademik T.A.S arimsoqov (1915-1995), akademik S.X. Sirojiddinov(1920-1988), M.S. Salohitdinov funktsional tahlil, matematik statistika, matematik fizika tenglamalari bo′yicha juda katta kashfiyotlar qilib, o’zbek matematika maktabini jahonga tanittirdilar.

Matematikaning amaliy tadbiqlari bo’yicha ba'zi bir misollarni keltiramiz.

1.1845 yilda frantsuz matematigi ***Levere*** Uran planetasi traektoriyasi tenglamasini tekshirib, bizga noma'lum osmon jismi borligini, uning traektoriyasini va massasini nazariy yo’l bilan, ya'ni “qalam uchida” hisoblab topdi. U koʻrsatgan koordinatalar boʻyicha 1846 yil 23 sentyabr kuni nemis astronomi ***Galle*** teleskopda Neptun planetasini kashf etdi. Xuddi shunday ravishda 9-planeta 1915 yilda qilingan matematik hisoblar asosida 1930 yili kashf etildi.
2. ***Neytron***, kvark kabi elementlar zarrachalarining mavjudligi va ularning xossalari tajribalar asosida emas, hisoblashlar asosida kashf etildi.
3. Samolyotlarning uchish uzoqligi kattalasha borishi bilan ularni avtomatik boshqa-rish masalasi paydo boʻldi. Bu masalani ***L.S. Pontryagin*** (Rossiya) va ***Belman*** (AKSh) kabi matematiklar hal qilib, optimal boshqarish nazariyasi degan yangi fanga asos soldilar.
4.Telefon aloqasini rivojlanishi bilan aloqa boʻlimlarida abonentlarni navbatda qancha kutib turish vaqtlari kabi masalalar natijasida amerikalik olim ***Erlang*** “Ommaviy xizmat ko’rsatish nazariyasi” nomli yangi matematik fanga asos soldi.
5.Kosmosni oʻzlashtirish muammolarini echishda matematika roli benihoyat kattadir. Akademik ***Keldo`sh*** (Rossiya) rahbarlik qilgan ”Amaliy matematika” ilmiy-tekshirish institutida bu masalalarni echish usullari ishlab chiqildi va ular EXM lar yordamida amalga oshirildi.
6. Iqtisodiyotda xalq xoʻjaligini boshqarish uchun amerikalik iqtisodchi-olim ***Leontev*** tomonidan tarmoqlararo muvozanatning matematik modellari ishlab chiqildi va uning tenglamalari echilib, ishlab chiqarishni oqilona boshqarishga erishildi.
7. Akademik ***Kantorovich*** (Rossiya) materiallardan andoza olishning kamchiqim yoʻllarini axtarish bilan shug’ullandi va natijada chiziqli dasturlash nomli yangi matematik fanga asos soldi. Bu fan natijalari asosida xalq xoʻjaligida juda katta iqtisodiy foydaga erishildi va shu sababli ***Kantorovich*** iqtisodiyot boʻyicha Nobel mukofotiga sazovor bo’ldi.
Bunday misollarni yana koʻplab keltirish mumkin.

I BOB. CHIZIQLI ALGEBRA.

1.1. Matritsalar va ular ustida amallar

TA'RIF 1: m ta satr va n ta ustundan iborat to′g’ri to′rtburchak shaklidagi m·n ta sondan tuzilgan jadval mxn tartibli matritsa deb ataladi.

Matritsalar A,B,C kabi bosh lotin harflar bilan, ularni tashkil etuvchi sonlar esa a_{ij}, v_{ij}, s_{ij} kabi belgilanadi. Bu sonlar shu matritsaning elementlari deb ataladi. Bu erda i - element joylashgan satrni, j esa ustunning tartib raqamini bildiradi.

$$\text{Masalan, } A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1.2 \\ 0 & 7.5 & -1 \end{pmatrix}$$

matritsa 2x3 tartibli bo′lib, unda $a_{11}=1$, $a_{13}=1.2$, $a_{22}=7.5$

Agarda A matritsaning tartibini ko′rsatishga extiyoj bo′lsa, u A_{mxn} ko′rinishda yoziladi.

TA'RIF 2: A_{mxn} matritsada $m=n$ bo′lsa, u kvadrat, $m\neq n$ bo′lsa to′g’ri to′rtburchakli matritsa deyiladi.

Bunda, agar m = 1 bo′lsa, satr matritsaga va n = 1 bo′lsa, ustun matritsaga ega bo′lamiz. m=1 va n=1 bo′lganda matritsa bitta sonni ifodalaydi. Demak, matritsa ma'lum bir ma'noda son tushunchasini umumlashtiradi.

TA'RIF 3: A va B matritsalar teng deyiladi (A=B deb yoziladi), agarda ular bir xil tartibli va ularning mos elementlari o′zaro teng bo′lsa, ya'ni $a_{ij} = v_{ij}$ shart bajarilsa.

Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} a+a & a-a \\ a:a & a\cdot a \end{pmatrix} \qquad V=\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

bo′lsa, A = B deb yozish mumkin.

A={a_{ij}} matritsada a_{ii} ko′rinishdagi elementlar diagonal elementlar deyiladi.

TA'RIF 4: Barcha diagonal elementlari birga teng ($a_{ii}=1$), qolgan barcha elementlari esa nolga teng ($a_{ij}=0$, $i\neq j$) bo′lgan kvadrat matritsa birlik matritsa deyiladi va E kabi belgilanadi.

MMasalan, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

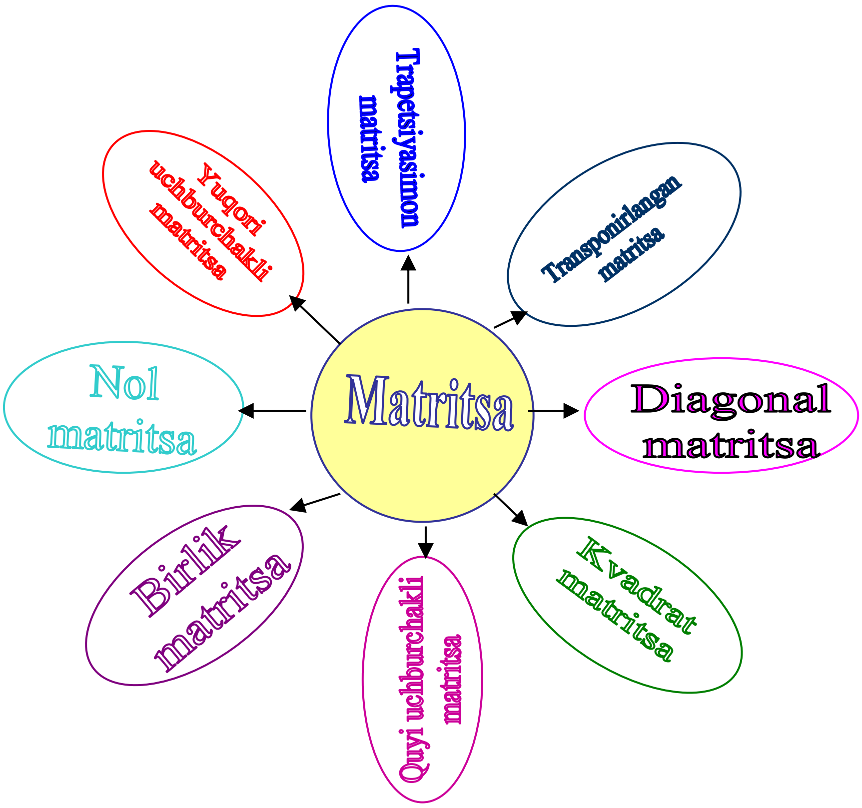
birlik matritsalardir.

TA'RIF 5: Barcha elementlari nolga teng ($a_{ij}=0$) bo′lgan matritsa nol matritsa deyiladi va 0 kabi belgilanadi.

Masalan,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$$

nol matritsalar bo′ladi.



<u>T A ' R I F 6 :</u> Bir xil mxn tartibli A va B matritsalar yig’indisi yoki ayirmasi deb shunday mxn tartibli C matritsaga aytiladiki, uning elementlari $s_{ij} = a_{ij} \pm v_{ij}$ kabi aniklanadi va S=A+V deb yoziladi.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

matritsalar uchun

$$A + V = \begin{pmatrix} 5+1 & 3+0 & -1+1 \\ 0+2 & 7+(-3) & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A - V = \begin{pmatrix} 5-1 & 3-0 & -1-1 \\ 0-2 & 7-(-3) & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

Matritsalar yig’indisi uchun A+B=B+A (kommutativlik),
A+(V+S) = (A+V)+S (assotsiativlik) qonunlari o′rinli bo′ladi.

Bundan tashqari A – A = 0 , A ± 0 = A , A+A =2A tengliklar ham o′rinli bo′ladi.

T A ' R I F 7 : Ixtiyoriy mx n tartibli A $=\{a_{ij}\}$ matritsaning λ songa ko′paytmasi deb $\{\lambda\, a_{ij}\}$ matritsaga aytiladi va u λ A kabi belgilanadi.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Matritsa uchun

$$6A = \begin{pmatrix} 6\cdot5 & 6\cdot4 & 6\cdot(-1) \\ 6\cdot0 & 6\cdot2 & 6\cdot7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 24 & -6 \\ 0 & 12 & 42 \end{pmatrix}$$

Matritsalarni qo′shish va songa ko′paytirish amallari uchun quyidagi tengliklar o′rinli bo′ladi:

$$\lambda\,(A\pm V) = \lambda A \pm \lambda V\ ,\quad (\lambda \pm \mu)\, A = \lambda\, A \pm \mu\, A,$$
$$0 \cdot A = O\ ,\quad \lambda \cdot O = O$$

T A ' R I F 8 : $A_{m\times r}$ va $V_{q\times n}$ matritsalar uchun p=q shart bajarilganda ularning ko′paytmasi (AB) deb shunday $S_{m\times n}$ matritsaga aytiladiki, uning s_{ij} elementlari (i = $\overline{1,m}$; j = $\overline{1,n}$) ushbu

$$s_{ij} = \sum_{\kappa=1}^{p} a_{ik}\, v_{kj}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Shunday qilib, s_{ij} element A matritsaning i – satr elementlarini B matritsaning j-ustun mos elementlariga ko′paytirib, ularni qo′shib chiqishdan hosil qilinadi, ya'ni "satrni ustunga ko′paytirish" qoidasi bilan topiladi.

Masalan,

$$A_{3x2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad V_{2x2} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matritsalar uchun m=3, r=q=2, n = 2 bo′lgani uchun ularni ko′paytirish mumkin va AV=S_{3x2} matritsa quyidagicha bo′ladi:

$$S_{3x2} = \begin{pmatrix} 3\cdot6+1\cdot1 & 3\cdot(-4)+1\cdot2 \\ 0\cdot6+(-2)\cdot1 & 0\cdot(-4)+(-2)\cdot2 \\ 4\cdot6+5\cdot1 & 4\cdot(-4)+5\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -10 \\ -2 & -4 \\ 29 & -6 \end{pmatrix}$$

Matritsalar kupaytmasi uchun AV≠VA, ya'ni kommutativlik qonuni o′rinli bo′lmaydi. Ammo A (VS) = (AV) S (assotsiativlik),

A (V+S) = AV + AS, (A+V) S = AS + VS distributivlik qonunlari bajariladi.

Bundan tashqari AE = EA = A , A·0 = 0·A = 0 , (λ A) V = A (λ V) tengliklar ham o′rinli bo′ladi.

Tayanch iboralar:

- Matritsa
- Matritsa tartibi
- Matritsa elementi
- To′rtburchakli matritsa
- Kvadrat matritsa
- Ustun matritsa
- Satr matritsa
- Matritsalar tengligi
- Diagonal elementlar
- Diagonal matritsa
- Birlik matritsa
- Nol matritsa
- Matritsani songa ko′paytmasi
- Matritsalar yig'indisi
- Ayirmasi
- Matritsalar ko′paytmasi

Nazorat savollari:

1. Matritsa nima?
2. Matritsaning tartibi qanday aniqlanadi?
3. Matritsalar qanday turlarga bo'linadi?
4. Diagonal elementlar deganda qanday elementlar tushuniladi?
5. Birlik matritsa nima?
6. Nol matritsa nima?
7. Qaysi shartda matritsalarni qo'shish yoki ayirish mumkin?
8. Matritsalar yig'indisi yoki ayirmasi qanday topiladi?
9. Matritsalar yig'ndisi amali qanday xossalarga ega?
10. Matritsani songa ko'paytirish qanday bajariladi?
11. Qaysi shartda matritsalarni ko'paytirish mumkin?
12. Matritsalarni ko'paytirish amali qanday aniqlanadi?
13. Matritsalarni ko'paytirish amali qanday xossalarga ega?

Adabiyotlar:

[1] I bob, §22-23, [3] IV bob, §1 , [8] V bob, §60-61

1. Klaus Weltner, Wolfgang J.Weber, Jean Grosjean, Peter Schuster. Mathematics for Physicists and Engineers. Germany. Springer. 2009 y., 598 p.
2. **СОАТОВ Ё.У.** «Олий математика», I жилд, Тошкент, Укитувчи, 1992 й.
3. **МАДРАХИМОВ Х.С., ГАНИЕВ А.Г., МУМИНОВ Н.С.** «Аналитик геометрия ва чизикли алгебра», Тошкент, Укитувчи, 1988 й.
4. **НАЗАРОВ Р.Н., ТОШПУЛАТОВ Б.Т., ДУСУМБЕТОВ А.Д.** «Алгебра ва сонлар назарияси», I кисм, Тошкент, Укитувчи, 1993 й.
5.

1.2. ANIQLOVCHILAR VA ULARNING XOSSALARI.

Tayanch iboralar: aniqlovchi ta'rifi, ikkinchi tartibli aniqlovchi, uchinchi tartibli aniqlovchi, aniqlovchi xossalari, algebraik to′ldiruvchi, aniqlovchilarni satr yoki ustun bo′yicha yoyish (Laplas teoremasi), yuqori tartibli aniqlovchilar.

Re j a:

1. Aniqlovchi haqida tushuncha.
2. II tartibli aniqlovchi va uni hisoblash formulasi.
3. III tartibli aniqlovchi va uni hisoblash formulasi.
4. Aniqlovchining xossalari.
5. Aniqlovchining nolga teng boʹlish shartlari.
6. Aniqlovchi elementining algebraik toʹldiruvchisi.
7. Laplas teoremasi.
8. Yuqori tartibli aniqlovchilarni hisoblash.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §9-10 [3] I bob, §1 [8] V bob, §65-69

T A’ R I F: n – tartibli kvadrat matritsa elementlaridan ma'lum bir qoida asosida hosil qilinadigan sonli ifoda n – tartibli aniqlovchi deb ataladi.

Masalan, ikkinchi tartibli aniqlovchi deb, ikkinchi tartibli kvadrat matritsadan quyidagicha hosil qilingan va belgilangan sonli ifodaga aytiladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \qquad (1)$$

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 4 \cdot 5 = 18 - 20 = -2, \qquad \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 5 \cdot 10 - 4 \cdot (-2) = 50 + 8 = 58$$

Uchinchi tartibli aniqlovchi esa quyidagi sonli ifoda kabi aniqlanadi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} \qquad (2)$$

Uchinchi tartibli aniqlovchini hisoblashga misol keltiramiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 0 + 6 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-2) -$$

$$-(-2) \cdot 5 \cdot 3 - 6 \cdot 1 \cdot 0 - 4 \cdot (-1) \cdot (2) = 112$$

Aniqlovchilar va matritsalar orasida quyidagi oʹxshashlik va farqlar mavjud:

1) Matritsa sonlar jadvali boʹlsa, aniqlovchi esa sonli ifoda boʹlib, uning qiymati sondan iboratdir;

2) Matritsa yoysimon chiziqlar bilan belgilansa, aniqlovchi toʹg’ri chiziqlar bilan belgilanadi;

3) Ular ichidagi sonlar elementlar deyiladi;

4) Ular satrlar va ustunlardan iborat;

5) Aniqlovchilarda ustun va satrlar soni teng bo′lishi kerak, ammo matritsalarda esa bunday bo′lishi shart emas.

Endi ixtiyoriy tartibli aniqlovchilarning xossalari bilan tanishamiz. Aniqlik va soddalik uchun bu xossalarni uchinchi tartibli aniqlovchilar uchun ifodalaymiz. Bu xossalarni o′rinli ekanligini (2) formula yordamida tekshirib ko′rish mumkin va buni talabalarga mustaqil ish sifatida havola qilamiz.

1. Agar aniqlovchining barcha satrlari mos ustunlar bilan almashtirilsa, u holda aniqlovchinig qiymati o′zgarmaydi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu xossadan aniqlovchining satr va ustunlari teng mohiyatli ekanligi kelib chiqadi.

2. Aniqlovchining ikkita ixtiyoriy satrlari (ustunlari) o′rni o′zaro almashsa, aniqlovchining faqat ishorasi teskarisiga o′zgaradi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3. Agar aniqlovchining ikkita satr (ustun) elementlari bir xil bo′lsa, u holda uning qiymati nolga teng.

I s b o t : Buning uchun bir xil elementli satrlarni (ustunlarni) o′rinlarini almashtiramiz. Natijada aniqlovchi ko′rinishi o′zgarmay qoladi. Bundan, oldingi xossaga asosan, $\Delta = -\Delta$ tenglik hosil bo′ladi va undan $\Delta=0$ ekanligi kelib chiqadi.

4. Satrning (ustunning) umumiy ko′paytuvchisini aniqlovchi belgisidan tashqariga chiqarib, ko′paytma shaklida yozish mumkin.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} k\,a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k\,a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ k\,a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

5. Agar aniqlovchining biror satri (ustuni) nollardan iborat bo′lsa, u holda aniqlovchining qiymati nolga teng bo′ladi.

6. Agar aniqlovchining ixtiyoriy ikkita satr (ustun) elementlari o′zaro proportsional bo′lsa, u holda uning qiymati nolga teng,

Masalan, aniqlovchining I va II satrlari proportsional bo′lsa,

$$\begin{vmatrix} k\,a_{11} & k\,a_{12} & k\,a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

7. Agar aniqlovchining biror satri (ustuni) ikki had yig’indisidan iborat bo′lsa, u holda bu aniqlovchi ikkita mos aniqlovchilar yig’indisiga yoyiladi

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

Umumiy holda n - tartibli ($n \in N$) aniqlovchi quyidagicha yoziladi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots & a_{1j} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots & a_{2j} \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \ldots & a_{ij} \ldots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots & a_{nj} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta$$

Yuqori tartibli aniqlovchilarni umumiy holda hisoblash formulalari juda murakkab ko′rinishda bo′ladi. Shu sababli uning elementining algebraik to′ldiruvchisi tushunchasi kiritiladi.

T A' R I F: a_{ij} ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$) elementning algebraik to′ldiruvchisi deb aniqlovchi-ning i-satri va j- ustunini tashlab yuborishdan hosil bo′lgan (n-1) tartibli aniqlovchi qiymatini $(-1)^{i+j}$ ga ko′paytmasiga aytiladi va A_{ij} kabi belgilanadi. Masalan,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

aniqlovchining quyidagi to′qqizta algebraik to′ldiruvchilari mavjud:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

Xuddi shunday, n-tartibli aniqlovchining algebraik to′ldiruvchilari n^2 ta (n–1)-tartibli aniqlovchilardan iborat bo′ladi.

Yuqori tartibli aniqlovchilarni hisoblash algebraik to′ldiruvchilar yordamida quyidagi teorema orqali osonroq bajariladi.

<u>TEOREMA(Laplas):</u> Uchinchi tartibli aniqlovchining qiymati uning istalgan satr (ustun) elementlarini ularning mos algebraik to′ldiruvchilariga ko′paytmalarining yig'indisidan iborat bo′ladi, ya'ni

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= a_{11}\bullet A_{11} + a_{12}\bullet A_{12} + a_{13}\bullet A_{13} \\ \Delta &= a_{21}\bullet A_{21} + a_{22}\bullet A_{22} + a_{23}\bullet A_{23} \\ \Delta &= a_{31}\bullet A_{31} + a_{32}\bullet A_{32} + a_{33}\bullet A_{33} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

yoki

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= a_{11}\bullet A_{11} + a_{21}\bullet A_{21} + a_{31}\bullet A_{31} \\ \Delta &= a_{12}\bullet A_{12} + a_{22}\bullet A_{22} + a_{32}\bullet A_{32} \\ \Delta &= a_{13}\bullet A_{13} + a_{23}\bullet A_{23} + a_{33}\bullet A_{33} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Bu tengliklarning o'rinli ekanligini to′g'ridan-to′g'ri hisoblashlar yordamida ko′rsatish mumkin. (3) yoki (4) aniqlovchini satrlar yoki ustunlar bo′yicha yoyilmasi deyiladi.

Yuqori tartibli aniqlovchi qiymatini topishda hisoblashlarni kamaytirish maqsadida uning nollari ko′proq bo′lgan satr yoki ustun bo′yicha yoyish maqsadga muvofiqdir.

<u>M i s o l :</u> To′rtinchi tartibli aniqlovchini ikkinchi satr bo′yicha yoyib, qiymatini Laplas teoremasi orqali hisoblaymiz.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}\, 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\bullet 66 - 18 = 198 - 18 = 180$$

<u>IZOH</u>**:** Aniqlovchining biror satr (ustun) elementlarini boshqa satr (ustun) mos elementlarining algebraik to′ldiruvchilariga ko′paytirib, ko′paytmalarni qo′shib chiqsak, yig'indida doimo 0 hosil bo′ladi.

Masalan,

$$a_{11}\bullet A_{21} + a_{12}\bullet A_{22} + a_{13}\bullet A_{23} = 0$$
$$a_{12}\bullet A_{11} + a_{22}\bullet A_{21} + a_{32}\bullet A_{31} = 0$$

Mavzuni mustahkamlash uchun savollar

1. Minor va algebraic to'ldiruvcchi orasida qanday farq bor.
2. Determinantni transponirlashdan tashqari uning ustida qanday almashtirishlar bajarganda kattaligi o'zgarmaydiq
3. Yukori tartibli determinantlarni nollar yigib hisoblash usuli nimadan iboratq
4. .Determinantlarni qo'shish mumkinmi va qandayq
5. Tartiblari teng determinantlarni ko'paytirish qoidasi nimadan iboratq

1.3. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI. KRAMER VA GAUSS USULLARI.

Tayanch iboralar: chiziqli tenglamalar sistemasi, koeffitsient, ozod had, asosiy aniqlovchi, yordamchi aniqlovchi, Kramer formulasi, Gauss usuli.

r e j a

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi.
2. Chiziqli tenglamalar sistemasining echimlari.
3. Sistemaning asosiy va yordamchi aniqlovchilari.
4. Kramer formulalari.
5. Sistemaning yagona, cheksiz ko'p yoki echimga ega bo′lmaslik shartlari.
6. Gauss usulining to′g'ri yo′li.
7. Gauss usulining teskari yo′li.
8. Kramer va Gauss usullarining qulayliklari hamda kamchiliklari.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §20-21 [3] I bob, §2 [8] IV bob, §51-57, V bob, §70

Maktab matematika kursidan ikki noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \qquad (1)$$

ko′rinishda bo′lishini bilamiz. Bunda a_{ij} cistemaning koeffitsentlari, b_i sistemaning ozod hadlari bo′lib, x_j sistemaning noma'lumlari bo′ladi. (1) sistemadagi tenglamalarni ayniyatga aylantiruvchi $x_j=\alpha_i$ sonlari sistemaning echimlari deyiladi. Bunda sistema echimi yagona, cheksiz ko′p yoki mavjud bo′lmasligi mumkinligi bizga ma'lum.

(1) sistema uchun Δ asosiy va ikkita Δ_1, Δ_2 yordamchi aniqlovchilarni quyidagicha kiritamiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Δ asosiy aniqlovchi sistemaning koeffitsentlaridan hosil qilinib, yordamchi aniqlovchilar esa uning ustunlarini ozod hadlar bilan almashtirishdan hosil qilinadi.

(1) sistema tenglamalarini dastlab mos ravishda a_{22} va $-a_{12}$ larga ko′paytirib, so′ngra ko′shamiz:

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})\,x_1+(a_{12}a_{22}-a_{22}a_{12})\,x_2=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

Bu tenglikni kiritilgan aniqlovchilar orqali quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{11} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta x_1=\Delta_1 \qquad (2)$$

Shuningdek (1) sistema tenglamalarini mos ravishda ($-a_{21}$) va a_{11} larga ko′paytirib qo′shsak, u holda

$(a_{11}a_{21} - a_{21}a_{11})\, x_1 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$

Yuqoridagidek

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{22} & b_2 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta x_2 = \Delta_2 \qquad (3)$$

Agar noma'lumlarga nisbatan (2) va (3) chiziqli tenglamalarni echsak,

$$x_1 = \Delta_1/\Delta \text{ va } x_2 = \Delta_2/\Delta \qquad (4)$$

formulalarga ega bo'lamiz. Ular (1) sistema echimi uchun ***Kramer formulalari*** deb yuritiladi.

Endi uch noma'lumli 3 ta tenglamalar sistemasini qaraylik:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{31}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \end{cases} \qquad (5)$$

Bu sistemaning echimi uchun ham Kramer formulalarini chiqarish qiyin emas.

Quyidagi asosiy aniqlovchini kiritamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bunda i ustunni b_1, b_2, b_3 ozod hadlar ustuni bilan almashtirib Δ_i, i=1,2,3 yordamchi aniqlovchilarni hosil qilamiz. a_{ij} elementning algebraik to′ldiruvchisini A_{ij} kabi belgilaylik.

(5) sistema tenglamalarini mos ravishda Δ aniqlovchidagi birinchi ustun elementlarining algebraik to′ldiruvchilariga (A_{11},A_{21},A_{31}) ko′paytirib qo′shib chiqaylik.

$$(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31})x_1+(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31})x_2+(a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31})x_3=$$
$$= b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31};$$

Oxirgi munosobatni aniqlovchilar tiliga o′tkazsak va Laplas formulasidan foydalansak, $\Delta x_1+0x_2+0x_3=\Delta_1$ yoki $\Delta x_1=\Delta_1$ tenglamani olamiz.

Shuningdek 2-ustun yoki 3-ustun elementlari algebraik to′ldiruvchilarini mos ravishda (5) sistema tenglamalariga ko′paytirib qo′shib chiqsak, $\Delta x_2 = \Delta_2$ va $\Delta x_3 = \Delta_3$ tenglamalarni olamiz.

Bu tenglamalardan (5) sistema uchun

$$x_1=\Delta_1/\Delta\,, \qquad x_2=\Delta_2/\Delta\,, \qquad x_3=\Delta_3/\Delta$$

Kramer formulalarini hosil qilamiz.

M i s o l : Sistema Kramer usulida echilsin:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3=0 \end{cases}$$

E ch i sh : Asosiy va yordamchi aniqlovchilarni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 18, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 7.$$

Kramer formulalariga asosan

$x_1 = \Delta_1/\Delta = -5/18$, $x_2 = \Delta_2/\Delta = -1/18$, $x_3 = \Delta_3/\Delta = 7/18$.

IZOH: (1) yoki (5) sistema yagona echimga ega bo′lishi uchun $\Delta \neq 0$ bo′lishi kerak. Agarda $\Delta=0$ va $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$ bo′lsa sistema cheksiz ko′p echimga ega bo′ladi. Agarda $\Delta=0$ va $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ yordamchi aniqlovchilardan kamida bittasi noldan farqli bo′lsa, sistema echimga ega bo′lmaydi.

Endi sistemani Gauss usulida echishni ko′rib chiqamiz. Bu usul mohiyatini (5) sistemani echish orqali ko′rsatamiz. (5) sistemani Gauss usulida echish uchun uning ikkinchi tenglamasidan x_1 noma'lumni, uchinchi tenglamasidan esa x_1 va x_2 noma'lumlarni yo′qotib, quyidagi uchburchak ko′rinishdagi sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ c_{22}x_2 + s_{23}x_3 = d_2 \\ s_{33}x_3 = d_3 \end{cases}$$

Bu Gauss usulining to′g’ri yo′li deb ataladi.

Uchburchakli sistemaning oxirgi tenglamasidan boshlab, birin-ketin x_3, x_2 va x_1 noma'lumni ketma–ket topamiz. Bu Gauss usulining teskari yo′li deb ataladi.

M i s o l :

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

E ch i sh : Ikkinchi va uchinchi tenglamalardan x_1 noma'lumni yo′qotamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ -17x_2 + 16x_3 = 82 \\ 8x_2 - 5x_3 = -31 \end{cases}$$

Endi uchinchi tenglamadan x_2 noma'lumni yo′qotamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ -17x_2 + 16x_3 = 82 \\ 43x_3 = 129 \end{cases}$$

Uchinchi tenglamadan $x_3 = 3$, so′ngra ikkinchi tenglamadan $x_2 = -2$ va nihoyat birinchi tenglamadan $x_1 = 1$ ekanligini topamiz.

Kramer va Gauss usullarining qulayliklari va kamchiliklarini ko′rsatamiz.

1) Kramer formulalari ixtiyoriy chiziqli sistema uchun bir xil ko′rinishga ega.
2) Kramer formulalarida echimlarning ixtiyoriy biri topilishi mumkin.
3) Kramer formulasi ikki va uch noma'lumli sistema uchun qulay.
4) To′rt va undan ortiq noma'lumli sistema uchun Kramer formulalaridan foydalanish murakkab.

5) Gauss usuli aniqlovchilarni hisoblashni talab etmasdan, faqat koeffitsientlar va ozod hadlar ustida arifmetik amallar bajarish orqali amalga oshiriladi.
6) Gauss usulini kompyuterda amalga oshirish oson.
7) Gauss usulida juda koʼp arifmetik amallar bajarish talab etiladi.
8) Gauss usulida noma'lumlardan faqat birini topib boʼlmaydi.

Takrorlash uchun savollar

1.Chiziqli tenglamalar sistemasi deb qanday sistemaga aytiladi
2. Kramer teoremasi.
3.Qaysi hollarda echim yagona, qaysi hollarda echim cheksiz ko’p echim bo’ladiq
4. Chiziqli tenglamalar sistemasi qanday ko’rinishd bo’ladi
5. Sistemaning koeffitsientlari va ozod hadlari deb nimaga aytiladi
6. Sistemaning echimi qanday ta'riflanadi
7. Sistemaning asosiy aniqlovchisi deb nimaga aytiladi
8. Sistemaning yordamchi aniqlovchilari qanday hosil qilinadi
9. Sistema echimi uchun Kramer formulalari qanday ko’rinishda bo’ladi
10. Qaysi shartlarda sistema yagona yoki cheksiz ko’p echimga ega bo’ladi
11. Sistema qaysi shartda echimga ega bo’lmaydi
12. Gauss usulining mohiyati nimadan iborat
13. Kramer usuli qanday afzalliklarga va kamchiliklarga ega
14. Gauss usuli qanday afzallik va kamchiliklarga ega

1.4. TESKARI MATRITSA. TENGLAMALAR SISTEMASINI MATRITSALAR USULIDA ECHISH.

Tayanch iboralar: teskari matritsa, teskari matritsa xossasi, matritsalar usuli.

<u>Re j a:</u>

1. Teskari matritsa ta'rifi.
2. Teskari matritsani mavjudlik va yagonalik sharti.
3. Teskari matritsani topish algoritmi.
4. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar usulida echish.
5. Matritsalar usulining afzalliklari va kamchiliklari.

<u>Adabiyotlar:</u>

[1] I bob, §24-25 [3] IV bob, §2-4

<u>T A' R I F :</u> Berilgan A kvadrat matritsaga teskari matritsa deb shunday bir (uni kelajakda A^{-1} kabi belgilaymiz) kvadrat matritsaga aytiladiki, agarda $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ (E- birlik matritsa) shart bajarilsa.

Agarda

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \Delta = \det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

bo′lsa,

$$A^{-1} = 1/\Delta \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

matritsa A ga teskari matritsa bo′lishini Laplas teoremasi yordamida ko′rsatish mumkin. Bunda A_{ij} lar A matritsaning a_{ij} elementining algebraik tuldiruvchilaridir (i=1,2,3; j=1,2,3).

M i s o l : Teskari matritsa topilsin:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 43$$

Dastlab A matritsa elementlarining algebraik to’ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 4 = 16, \qquad A_{12}= -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 8 = -17,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 16 = -10, \qquad A_{21}= -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(-9 - 8) = 17,$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 16 = -10, \qquad A_{23}= -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(4 + 12) = -16,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 16 = -10, \qquad A_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 12) = 16,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 9 = 17.$$

Natijada teskari matritsa ko′rinishi quyidagicha bo′ladi:

$$A^{-1} = 1/43 \begin{pmatrix} 16 & 17 & -10 \\ -17 & -10 & 16 \\ -10 & -16 & 17 \end{pmatrix}$$

Tekshirish o′tkazamiz. Darhaqiqat,

$$A^{-1}A = 1/43 \begin{pmatrix} 16 & 17 & -10 \\ -17 & -10 & 16 \\ -10 & -16 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1/43 \begin{pmatrix} 43 & 0 & 0 \\ 0 & 43 & 0 \\ 0 & 0 & 43 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Bu tenglikdan teskari matritsa to′g’ri topilganligiga ishonch hosil qilamiz. Endi uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini echishning matritsalar usuli bilan tanishamiz.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = bv_3 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

sistema berilgan bo′lsin. Quyidagi yordamchi matritsalarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Matritsalarni ko′paytirish ta'rifiga asosan (1) sistemani AX=B ko′rinishida yoza olamiz. Oxirgi matritsali tenglamani xar ikkala tomonini chapdan A^{-1} ga ko′paytiramiz va X echimlar matritsasini hosil qilamiz:

$$A^{-1}AX = A^{-1}V \Rightarrow X = A^{-1}V.$$

M i s o l : Tenglamalar sistemasi matritsa usulida echilsin:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

E ch i sh: Qaralayotgan sistema uchun yuqorida topilgan formulalarga asosan, quyidagi tengliklarni yoza olamiz :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}V = 1/43 \begin{pmatrix} 16 & 17 & -10 \\ -17 & -10 & 16 \\ 10 & -16 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix} =$$

$$= 1/43 \begin{pmatrix} 43 \\ -86 \\ 129 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Demak, sistemaning echimi $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$ bo′ladi.

Xulosa qilib shuni aytish kerakki, teskari matritsa tushunchasi ixtiyoriy n-tartibli kvadrat matritsa uchun ham yuqoridagidek aniqlanadi. Matritsa usuli har qanday sondagi tenglamalar sistemasi uchun ($\Delta \neq 0$) ham qo′llanilishi mumkin va tenglamalar sistemasi, uning echimlari matritsa ko′rinishida ixcham ifodalanadi. Bu usulning kamchiligi shundan iboratki, teskari matritsani topish murakkab va juda ko′p hisoblashlarni talab etadi.

savollari:

1. Teskari matritsa qanday ta'riflanadi
2. Teskari matritsaning mavjudlik va yagonalik sharti nimadan iborat
3. Teskari matritsa qanday topiladi
4. Chiziqli tenglamalar sistemasi matritsa ko′rinishda qanday yoziladi
5. Sistema matritsa usulida qanday echiladi
6. Matritsalar usulining qanday qulayliklari va kamchiliklari bor

II BOB. VEKTORLAR ALGEBRASI.

2.1. VEKTORLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR.

Tayanch iboralar: skalyarlar vektorlar, vektor moduli, vektorning geometrik talqini, nol vektor, kollinear vektorlar, vektorlar tengligi, vektorlar yig'indisi, vektorlar ayirmasi, vektorlarni songa ko′paytmasi, ort vektorlar, vektorning yoyilmasi, vektorning koordinatalari.

Re j a:

1. Skalyar va vektor kattaliklar.
2. Vektorning geometrik ma'nosi.
3. Vektorlarning kollinearligi va tengligi.
4. Vektorlar ustida arifmetik amallar va ularning xossalari.
5. Ort vektorlar va vektorning ortlar bo′yicha yoyilmasi.
6. Vektorning koordinatalari.
7. Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida amallar.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §1-7 [3] III bob, §1-2

Hayotda uchraydigan barcha kattaliklar matematikada ikki turga, skalyar va vektor kattaliklarga ajratiladi.

T A' R I F 1: Faqat sonli qiymatlari bilan aniqlanadigan kattaliklar skalyarlar deb ataladi.

Masalan, massa, hajm, uzunlik, modda zichligi, guruhdagi talabalar soni skalyarlar bo′ladi. Skalyarlar a, v, s kabi belgilanadi.

T A' R I F 2: Sonli qiymati va yo'nalishi bilan aniqlanadigan kattaliklar vektorlar deyiladi.

Masalan, kuch, tezlik, bosim, harakat, oqim vektor kattaliklar bo′ladi. Vektorlar $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$ kabi belgilanadi.

T A' R I F 3: $\vec{a}$ vektorning sonli qiymati uning **moduli** yoki **uzunligi** deb ataladi va $|\vec{a}|$ kabi belgilanadi.

Geometrik nuqtai-nazardan vektorlar yo′naltirilgan kesmalar singari qaraladi. Yo′naltirilgan kesmaning boshi A va oxiri B nuqtada bo′lsa, tegishli vektor $\overrightarrow{AB}$ kabi belgilanadi. Bunda A nuqta vektorning boshi, B nuqta esa vektorning uchi, kesma uzunligi vektor uzunligi deyiladi, ya'ni $|AB| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$.

T A' R I F 4: Boshi va uchi bitta nuqtadan iborat bo'lgan vektor nol vektor deyiladi.

Nol vektor $\vec{0}$ kabi belgilanib, uning moduli $|\vec{0}| = 0$ boʼladi. Bu vektor yoʼnalishi toʼgʼrisida soʼz yuritib boʼlmaydi.

<u>T A' R I F 5:</u> Bir toʼgʼri chiziqda yoki parallel toʼgʼri chiziqlarda joylashgan vektorlar **<u>kollinear</u>** vektorlar deb ataladi.

Masalan, ABCD parallelogramm boʼlsa, $\overrightarrow{AD}$ va $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{CD}$ vektorlar kollinear, $\overrightarrow{AD}$ va $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ va $\overrightarrow{AB}$ vektorlar esa kolllinear boʼlmaydi.

<u>I z o h.</u> Nol vektor $\vec{0}$ har qanday $\vec{a}$ vektorga kollinear deb hisoblanadi.

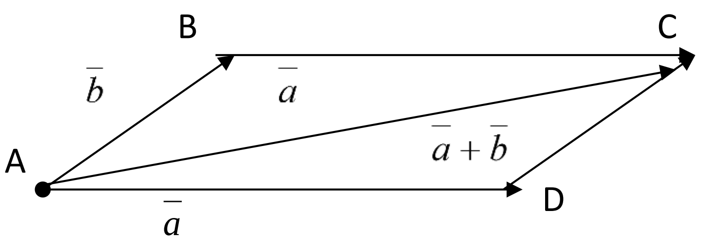
<u>T A' R I F 6:</u> Ikkita $\vec{a}$, $\vec{в}$ vektorlar teng deyiladi va $\vec{a} = \vec{в}$ kabi belgilanadi, agarda quyidagi uchta shart bajarilsa:

1. $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar kollinear;
2. $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar bir xil uzunlikka ega, ya'ni $|\vec{a}| = |\vec{в}|$;

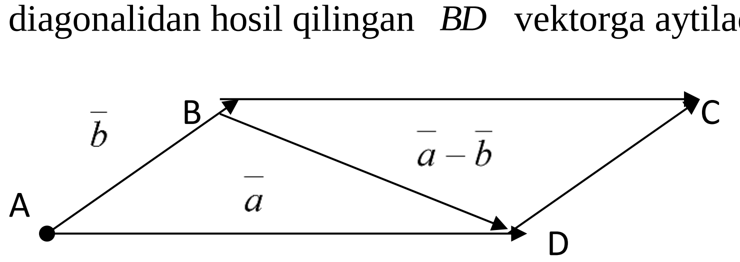
$\vec{a}$ va $\vec{в}$ bir xil yoʼnalishga ega.

Masalan, ABCD parallelogrammda $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ = $\overrightarrow{DC}$ boʼladi. Bu erdan vektorlarni parallel koʼchirish mumkinligi kelib chiqadi.

Endi ikkita $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlarni qoʼshish va ayirish amalini kiritamiz. Buning uchun parallel koʼchirish orqali ularning boshlarini bitta A nuqtaga keltiramiz. Unda bu vektorlarni $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{в} = \overrightarrow{AB}$ kabi belgilab, ABCD parallelogrammni hosil qilamiz.



Bu holda $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlarning yigʼindisi deb parallelogrammning A uchidan chiquvchi diagonalidan hosil qilingan $\overrightarrow{AC}$ vektorga aytiladi va $\vec{a} + \vec{в}$ kabi belgilanadi. Bu vektorlarning $\vec{a} - \vec{в}$ ayirmasi parallelogrammning B uchidan chiquvchi diagonalidan hosil qilingan $\overrightarrow{BD}$ vektorga aytiladi.



Vektorlarni qoʼshish amali quyidagi xossalarga ega:

1. $\vec{a} + \vec{в} = \vec{в} + \vec{a}$ **2.** $(\vec{a} + \vec{в}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{в} + \vec{c})$ **3.** $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

<u>T A' R I F 7:</u> $\vec{a}$ vektorni λ songa (skalyarga) koʼpaytmasi deb, $\lambda\vec{a}$ kabi belgilanadigan va quyidagi shartlar bilan aniqlanadigan vektorga aytiladi:

1. $|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, ya'ni vektorning uzunligi. $|\lambda|$ marta o′zgaradi;

2. $\lambda\vec{a}$ va $\vec{a}$ vektorlar kollinear;

3. $\lambda>0$ bo′lsa $\lambda\vec{a}$ va $\vec{a}$ bir xil yo′nalgan,

$\lambda<0$ bo′lsa $\lambda\vec{a}$ va $\vec{a}$ qarama-qarshi yo′nalgan.

Masalan, ABCD trapetsiya bo′lib, uning asoslari AD=8 va VS=4 bo′lsa, unda $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{AD}=-2\overrightarrow{CB}$ tengliklar o′rinli bo′ladi.

I z o h. $\lambda=0$ bo′lsa, har qanday $\vec{a}$ vektor uchun $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$ bo′ladi.

Vektorning songa ko′paytirish amali quyidagi xossalarga ega:

1. $\lambda(\beta\vec{a})=\beta(\lambda\vec{a})$ 2. $(\lambda\pm\beta)\vec{a}=\lambda\vec{a}\pm\beta\vec{a}$ 3. $\lambda(\vec{a}\pm\vec{в})=\lambda\vec{a}\pm\lambda\vec{в}$

Bu erda α va β ixtiyoriy sonlar, $\vec{a}$ va $\vec{в}$ ixtiyoriy vektorlardir.

T A' R I F 8: (-1) $\vec{a}$ vektor $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektor deyiladi va -$\vec{a}$ kabi belgilanadi. Bunda doimo $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ bo′ladi.

Endi bir tekislikda joylashgan vektorlarning koordinatalari tushunchasini kiritamiz. Buning uchun bu tekislikda XOY koordinatalar sistemasini olamiz. OX(OY) koordinata uqida joylashgan, musbat yo′nalishda yo′nalgan va uzunligi birga teng bo′lgan $\vec{i}(\vec{j})$ vektorni kiritamiz. Kiritilgan $\vec{i}$ va $\vec{j}$ vektorlar ort vektorlar yoki qisqacha ortlar deb ataladi. Endi berilgan $\vec{a}$ vektorni yo′naltirilgan kesma sifatida qarab, uning OX va OY o′qdagi proektsiyalarini qaraymiz. Bu proektsiyalar ham yo′naltirilgan kesma bo′lib, ular $\vec{a}$ vektorning OX va OY o′qdagi proektsiyalari deb ataladi va $\overrightarrow{a_x}$, $\overrightarrow{a_y}$ kabi belgilanadi. Unda, vektorlarni qo’shish ta'rifidan foydalanib, $\vec{a}=\overrightarrow{a_x}+\overrightarrow{a_y}$ tenglikni yozish mumkin.

Endi $\vec{a}$ vektor proektsiyalarining uzunligini $|\overrightarrow{a_x}|=|x|$, $|\overrightarrow{a_y}|=|y|$ kabi belgilaymiz. $\overrightarrow{a_x}$ va i ort $(\overrightarrow{a_y}$ va $\vec{j}$ ort$)$ kollinear vektorlar bo′ladi, chunki ular OX(OY) koordinata o′qida joylashgan. Unda $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$ bo′lgani uchun, vektorlarni songa ko′paytmasi ta'rifiga asosan, $\overrightarrow{a_x}=x\vec{i}$ va $\overrightarrow{a_y}=u\vec{j}$ deb yozish mumkin. Bu erda $\overrightarrow{a_x}$ va $\vec{i}$ ort bir xil yo’nalgan bo′lsa, $x=|\overrightarrow{a_x}|$ deb, qarama-qarshi yo′nalgan bo′lsa, $x=-|\overrightarrow{a_x}|$ deb olinadi. Xuddi shunday tarzda u qiymati $\pm|\overrightarrow{a_y}|$ kabi olinadi.Bu holda tekislikdagi ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorini $\vec{i}$ va $\vec{j}$ ortlar orqali

$$\vec{a}=x\vec{i}+u\vec{j} \qquad (1)$$

ko’rinishda yozish mumkin.

T A' R I F 9: (1) tenglik $\vec{a}$ vektorning ortlar bo′yicha yoyilmasi, x va y sonlari esa uning koordinatalari deb ataladi va $\vec{a}(x,u)$ kabi ifodalanadi.

Masalan, $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ vektorning koordinatalari x=2, u= – 3 bo′ladi.

Nol vektor uchun $\vec{0} = 0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j}$ bo′lgani uchun uning koordinatalari $x=0$, $u=0$ bo′ladi.

Har qanday $\vec{a}$ vektor uzining x va u koordinatalari bilan (1) tenglik orqali to′liq aniqlanadi. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning tengligi, kollinearligi va ular ustidagi qo′shish, ayirish, songa ko′paytirish amallarining natijalari oson aniqlanadi.

TEOREMA 1: $\vec{a}(x_1,u_1)$ va $\vec{в}(x_2,u_2)$ vektorlar teng bo′lishi uchun ularning mos koordinatalari teng, ya'ni $x_1=x_2$, $u_1=u_2$ bo′lishi zarur va etarli.

TEOREMA 2: $\vec{a}(x_1,u_1)$ va $\vec{в}(x_2,u_2)$ vektorlar kollinear bo′lishi uchun ularning mos koordinatalari proportsional, ya'ni

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = k \;\Rightarrow\; x_1 = kx_2,\, y_1 = ky_2$$

bo′lishi zarur va etarli.

Masalan, $\vec{a}$ (3,-2) va $\vec{в}$(9,-6) kollinear vektorlar, chunki 9/3=(-6/-2)=3.

TEOREMA 3: $\vec{a}(x_1,u_1)$ va $\vec{в}(x_2,u_2)$ vektorlar yig’indisi yoki ayirmasining koordinatalari mos koordinatalarning yig’indisi yoki ayirmasiga teng bo′ladi, ya'ni

$$\vec{a}(x_1,u_1) \pm \vec{в}(x_2,u_2) = \vec{c}(x_1 \pm x_2,\, u_1 \pm u_2)$$

Masalan, $\vec{a}$(4,-2) va $\vec{в}$(5,9) bo′lsa, $\vec{a}+\vec{в}$=(4+5,-2+9)=(9,7), $\vec{a}-\vec{в}$=(4-5,-2-9)=(-1,-11) koordinatali vektorlardan iborat bo′ladi.

TEOREMA 4: $\vec{a}(x,u)$ vektorning λ songa ko’paytmasining koordinatalari uning har bir koordinatasini λ songa ko′paytirishdan hosil bo′ladi, ya'ni $\lambda\cdot\vec{a}\,(x,u)=\vec{c}\,(\lambda x,\lambda u)$

Masalan, $\vec{a}$(4,-7) bo′lsa, $3\vec{a}$=(3·4,3·(-7))=(12,-21) koordinatali vektor bo′ladi.

Bu teoremalarning isboti talabalarga mustaqil ish sifatida beriladi.

Fazodagi vektorlarning koordinatalari tushunchasini kiritish uchun OX, OY va OZ o′qlari bo′yicha $\vec{i}, \vec{j}$ va $\vec{k}$ ort vektorlarni kiritamiz. Unda yo′qorida ko′rsatilgan singari, fazodagi ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorni

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\cdot\vec{k}$$

ko′rinishda yozish mumkin bo′ladi. Bu tenglik $\vec{a}$ vektorning ortlar bo′yicha yoyilmasi deb atalib, undagi x, u va z sonlari uning koordinatalari deyiladi va $\vec{a}\,(x,u,z)$ kabi yoziladi. Fazodagi vektorlar uchun ham yuqorida ko′rilgan teoremalardagi tasdiqlar o′rinli bo′ladi.

O′z-o′zini nazorat etish savollari.

1. Qanday kattaliklar skalyarlar deyiladiq
2. Skalyar miqdorlarga misollar keltiring.
3. Qanday kattaliklar vektorlar deb ataladiq
4. Vektorlarga misollar keltiring.

5. Vektorlarning geometrik ma'nosi nimadan iboratq
6. Vektorning moduli deb nimaga aytiladiq
7. Qanday vektor nol vektor deyiladiq
8. Qanday vektorlar kollinear deyiladiq
9. Qachon vektorlar teng deb hisoblanadiq
10. Vektorlar yig'indisi qanday aniqlanadiq
11. Vektorlar yig'indisi qanday xossalarga egaq
12. Vektorni songa ko′paytmasi qanday aniqlanadiq
13. Vektorni songa ko′paytmasi qanday xossalarga egaq
14. Ort vektorlar deb qanday vektorlar tushuniladiq
15. Vektorning ortlar bo′yicha yoyilmasi qanday aniqlanadiq
16. Vektorning koordinatalari qanday topiladiq
17. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning tenglik va kollinearlik sharti nimadan iboratq
18. Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida arifmetik amallar qanday bajariladiq

2.2. VEKTORLARNING SKALYAR KO′PAYTMASI, UNING XOSSALARI VA TADBIQLARI.

Tayanch iboralar: skalyar ko′paytma, skalyar ko′paytmaning mexanik ma'nosi, skalyar ko′paytma xossalari, vektorlarning ortogonalligi, skalyar ko′paytmaning koordinatalardagi ifodasi, ikki vektor orasidagi burchak.

Re j a:

1. Skalyar ko′paytma ta'rifi.
2. Skalyar ko′paytmaning mexanik ma'nosi.
3. Skalyar ko′paytma xossalari.
4. Vektorlarning ortogonalligi.
5. Skalyar ko′paytmaning koordinatalardagi ifodasi.
6. Skalyar ko′paytmaning tadbiqlari.

Adabiyotlar.

[1] I bob, §8 [3] III bob, §3-4

T A ` R I F : $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning **skalyar ko′paytmasi** deb $\vec{a}\cdot\vec{b}$ yoki $(\vec{a}, \vec{b})$ kabi belgilanadigan va

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot \text{sos}\varphi \qquad (1)$$

formula bilan aniqlanadigan songa aytiladi. Bu erda φ orqali $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasida burchak belgilangan.

Bu erda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning (1) formula orqali ko′paytirilganda son, ya'ni skalyar kattalik hosil bo′ladi va shu sababli $\vec{a}\cdot\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko′paytmasi deyiladi.

Skalyar ko’paytmaning mexanik ma'nosini ko′ramiz. $\vec{F}$ kuch moddiy nuqtaga ta'sir etib, uni to′g’ri chiziq bo′ylab $\vec{S}$ vektor bo′yicha harakatlantirgan bo′lsin. Agarda kuch va harakat yo′nalishlari orasidagi burchak φ bo′lsa, bajarilgan A ish miqdori

$$A = |\vec{F}|\cdot|\vec{S}|\cdot\cos\varphi$$

formula bilan aniqlanishi bizga fizika kursidan ma'lum. Ammo bu formulani (1) ga asosan $A=\vec{F}\cdot\vec{S}$ deb yozish mumkin. Demak, $\vec{F}$ kuch va $\vec{S}$ harakat vektorlarining skalyar ko’paytmasi bajarilgan ishni ifodalaydi.

Skalyar ko′paytmaning ta'rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ 2. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ 3. $\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\lambda\vec{b}$

4. $(\vec{a}\pm\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}\pm\vec{b}\cdot\vec{c}$

T A' R I F : $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak $\varphi=90^0$ bo′lsa, ular ortogonal vektorlar deyiladi va $\vec{a}\perp\vec{b}$ kabi belgilanadi.

Masalan, oldingi ma'ruzada ko′rib o′tilgan ort vektorlar ortogonaldirlar, ya'ni $\vec{i}\perp\vec{j}$, $\vec{i}\perp\vec{k}$ va $\vec{j}\perp\vec{k}$.

TEOREMA. Noldan farqli $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar ortogonal bo′lishi uchun ularning skalyar ko′paytmasi $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ bo′lishi zarur va etarli.

I s b o t.

Zaruriyligi. $\vec{a}\perp\vec{b}$ bo′lsin. Unda ular orasidagi burchak $\varphi=90^0$ bo′ladi va skalyar ko′paytma ta'rifiga asosan

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\text{sos}\varphi=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\text{sos}90^0=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot 0=0$$

Yetarliligi. $|\vec{a}|\neq 0$, $|\vec{b}|\neq 0$ bo′lib, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ bo′lsin. Unda skalyar ko′paytma ta'rifidan

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\text{sos}\varphi=0\Rightarrow\text{sos}\varphi=0\Rightarrow\varphi=90^0\Rightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Endi tekislikda yotuvchi va koordinatalari bilan berilgan $\vec{a}(x_1,u_1)$, $\vec{b}(x_2,u_2)$ vektorlarning skalyar ko′paytmasini topamiz. Buning uchun $\vec{i}\cdot\vec{i}=|\vec{i}|^2=1$, $\vec{j}\cdot\vec{j}=1$ va $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$ va $\vec{j}\cdot\vec{i}=0$ ekanligidan va skalyar ko′paytmaning 3) va 4) xossalaridan foydalanamiz.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x_1\vec{i}+u_1\vec{j})(x_2\vec{i}+u_2\vec{j})=x_1x_2\vec{i}\,\vec{i}+x_1u_2\vec{i}\,\vec{j}+u_1x_2\vec{j}\,\vec{i}+u_1u_2\vec{j}\,\vec{j}=$$

$$=x_1x_2\cdot 1+x_1u_2\cdot 0+u_1x_2\cdot 0+u_1u_2\cdot 1=x_1x_2+u_1u_2$$

Demak

$$\vec{a}(x_1,u_1)\cdot\vec{b}(x_2,u_2)=x_1u_2+u_1u_2, \qquad (2)$$

ya'ni vektorlarning skalyar ko′paytmasi ularning mos koordinatalari ko′paytmalarining yig’indisiga teng bo′ladi.

Masalan, $\vec{a}(3,6)$ va $\vec{b}(5,-2)$ bo′lsa, $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot5+6\cdot(-2)=15-12=3$ natijani olamiz.

Xuddi shunday tarzda fazodagi $\vec{a}(x_1,u_1,z_1)$ va $\vec{b}(x_2,u_2,z_2)$ vektorlarning skalyar ko′paytmasi uchun

$$\vec{a}(x_1,u_1,z_1)\cdot\vec{b}(x_2,u_2,z_2)= x_1x_2+u_1u_2+z_1z_2 \qquad (3)$$

formula o′rinli bo′lishini ko′rsatish mumkin.

Endi skalyar ko′paytma tadbiqlari sifatida quyidagi masalalarni ko′ramiz.

<u>1-masala.</u> $\vec{a}(x,u,z)$ vektorning modulini toping.

<u>Echish.</u> Skalyar ko'paytmaning 2) xossasiga va (3) formulaga asosan

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{x\cdot x + y\cdot y + z\cdot z} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (4)$$

Masalan, $\vec{a}(3,4,12)$ vektorning moduli

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$$

<u>2-masala.</u> $\vec{a}(x_1,u_1,z_1)$ va $\vec{b}(x_2,u_2,z_2)$ vektorlar orasidagi φ burchakni toping.

<u>Echish.</u> Skalyar ko′paytma ta'rifi (1), (3) va (4) formulalarga asosan

$$cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \qquad (5)$$

Masalan, $\vec{a}(1,0,1)$ va $\vec{b}(0,1,1)$ vektorlar orasidagi φ burchak uchun

$$cos\varphi = \frac{1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$$

natijani olamiz va undan $\varphi=60^0$ ekanligini topamiz.

<u>3-masala.</u> $\vec{a}(x_1,u_1,z_1)$ va $\vec{b}(x_2,u_2,z_2)$ vektorlarning ortogonallik shartini toping.

<u>Echish.</u> $\vec{a}\perp\vec{b}$ bo′lgani uchun ular orasidagi burchak $\varphi=90^0$ bo′ladi va shu sababli sosφ=0. Unda (5) formuladan

$$x_1x_2+u_1u_2+z_1z_2 = 0 \qquad (6)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu ikki vektorning ortogonallik shartidir.

Masalan, $\vec{a}(3,-2,1)$ va $\vec{b}(5,7,-1)$ vektorlar ortogonaldir, chunki

$$x_1x_2+u_1u_2+z_1z_2 = 3\cdot 5+(-2)\cdot 7+1\cdot(-1) = 15-14-1=0$$

<u>4-masala.</u> Fazodagi A(x_1,u_1, z_1) va V(x_2, u_2, z_2) nuqtalar orasidagi d masofani toping.

<u>Echish.</u> Bu nuqtalarni kesma bilan tutashtirib, $\overrightarrow{AB}$ vektorni hosil qilamiz. Ma'lumki, bu vektorning koordinatalari uning uchi bilan boshi koordinatalari ayirmasiga teng bo′ladi, ya'ni $\overrightarrow{AB}$ ($x_1–x_2, u_1–u_2,z_1–z_2$). Unda (4) formulaga asosan,

$$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (7)$$

tenglikka ega bo′lamiz.

Masalan, A(5,-3,1) va B(8,1,13) nuqtalar orasidagi masofa

$$d = \sqrt{(8-5)^2 + (1-(-3))^2 + (13-1)^2} = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13$$

bo′ladi.

Tekislikdagi vektorlar uchun 1-4 masalalarning echimlarini topishni talabaga mustaqil ish sifatida havola etamiz.

O′z-o′zini nazorat etish savollari.

1. Vektorlarning skalyar ko′paytmasi qanday aniqlanadiq
2. Vektorlar skalyar ko′paytmasining mexanik ma'nosi nimadan iboratq
3. Skalyar ko′paytma qanday xossalarga egaq
4. Qanday vektorlar ortogonal vektorlar deyiladiq
5. Vektorlarning ortogonalligini zaruriy va etarli sharti nimadan iboratq
6. Skalyar ko′paytma vektorlarning koordinatalari orqali qanday ifodalanadiq
7. Ikki vektor orasidagi burchak qanday topiladiq
8. Ikki vektorning ortogonallik sharti koordinatalarda qanday ifodalanadiq

2.3. VEKTORIAL KO′PAYTMA, UNING XOSSALARI VA TADBIQLARI

Tayanch iboralar: vektorial ko′paytma, vektorial ko′paytma xossalari, vektorial ko′paytmani hisoblash, kollinear vektorlar.

Re j a :

1. Vektorial ko′paytma ta'rifi.
2. Vektorial ko′paytmaning mexanik ma'nosi.
3. Vektorial ko′paytmaning xossalari.
4. Ortlarning vektorial ko′paytmasi.
5. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning vektorial ko′paytmasi.
6. Vektorial ko′paytma yordamida echiladigan masalalar.
7. Vektorlarning kollinearlik sharti.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §11 [3] III bob, §5-6

T A' R I F: $\vec{a}$ vektorning $\vec{в}$ vektorga ***vektorial ko'paytmasi*** deb, quyidagi uchta shartni qanoatlantiruvchi yangi $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{в}$ vektorga aytiladi:

1. $\vec{c}$ ning uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlarga ko′rilgan paralelleogramm yuziga teng bo′lib, quyidagicha ifodalanadi:

$\left|\vec{a} \times \vec{в}\right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{в}| \sin \varphi$, bu erda $\varphi = \vec{a} \wedge \vec{в}$, ya'ni vektorlar orasidagi burchakni ifodalaydi.

2. $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar tekisligiga perpendikulyar, ya'ni

$$\vec{a} \times \vec{в} \perp \vec{a}, \qquad \vec{a} \times \vec{в} \perp \vec{в}.$$

3. $\vec{c}$ vektor shunday yo′nalganki, uning uchidan qaraganda $\vec{a}$ vektordan $\vec{в}$ vektorga eng qisqa burilish soat strelkasi harakatiga teskari bo′ladi.

Agarda **F** radius vektori ***r*** bo′lgan moddiy A nuqtaga ta'sir etuvchi kuch bo′lsa, u holda **F**×***r*** vektorial ko′paytma **F** kuchni A nuqtaga nisbatan momentini ifodalaydi.

Vektorial ko′paytma xossalari.

1.Vektorial ko′paytmada ko′paytuvchilarning urni almashsa, ko′paytmaning faqat ishorasi o′zgaradi, ya'ni $\vec{a} \times \vec{в} = -(\vec{в} \times \vec{a})$

2. Vektorial ko′paytmada o′zgarmas λ ko′paytuvchini tashkariga chiqarish mumkin, ya'ni

$$\vec{a} \times (\lambda \vec{в}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{в} = \lambda(\vec{a} \times \vec{в})$$

3. Vektorial ko′paytma uchun taqsimot qonuni o′rinli, ya'ni

$$\vec{a} \times (\vec{в} + \vec{m}) = \vec{a} \times \vec{в} + \vec{a} \times \vec{m}$$

TEOREMA. Ikkita nolmas $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar kollinear bo′lishlari uchun ularning vektorial ko′paytmasi nolga teng bo′lishi zarur va etarli. ya'ni $\vec{a} \parallel \vec{в} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{в} = 0$

Isboti: $\vec{a} \parallel \vec{в}$ bo′lsin. U holda φ=0 yoki φ=π va sin φ=0.

Demak $\left|\vec{a} \times \vec{в}\right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{в}|$ sin φ$= |\vec{a}| \cdot |\vec{в}| \cdot 0 = 0$. Uzunligi nolga teng bo′lgan vektorning o′zi ham nol vektor bo′ladi, ya'ni $\vec{a} \times \vec{в} = 0$.

Endi, aksincha $\vec{a} \times \vec{в} = 0$ bo′lsin. U holda $|\vec{a}| \cdot |\vec{в}| \sin\varphi = |\vec{a} \times \vec{в}| = 0$ bo′ladi. Bunda $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{в}| \neq 0$ bo′lgani uchun faqat sin φ=0, ya'ni φ=0 yoki φ=π ekanligi kelib chiqadi. Bu esa $\vec{a} \parallel \vec{в}$ ekanligini bildiradi.

Natija: Ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{o}$ bo′ladi.

Misol: $(\vec{a} - 2\vec{в}) \times (2\vec{a} + \vec{в})$ ko′paytmani soddalashtiring.

Echish: $(\vec{a} - 2\vec{в}) \times (2\vec{a} + \vec{в}) = 2\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{в} - 2\vec{в} \times 2\vec{a} - 2\vec{в} \times \vec{в} = 5\vec{a} \times \vec{в}$

Vektorial ko’paytmani koordinatalarda hisoblash.

Avval koordinata o′qlaridagi $\vec{i}$, $\vec{j}$ va $\vec{k}$ ortlarning vektorial ko′paytmasini hisoblaymiz. Vektorial ko′paytmaning ta'rifiga asosan

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0, \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0, \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

Endi **i** x **j** vektorni hisoblaymiz. Ort vektorlar ta'rifiga asosan

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1, \quad \vec{i} \perp \vec{j}, \quad |\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Bu erdan va vektorial ko′paytmaning ta'rifidan **i** x **j** vektor OZ o′qi bo′ylab yo′nalgan va uning uzunligi 1 ga teng. Demak, **i** x **j** = **k** ekan. Xuddi shunga o′xshash **j** x **k =i** , **k**x**i =j.** Vektorial ko′paytmaning 1 – xossasiga binoan

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

$\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar o'zining koordinatalari bilan berilgan bo′lsin, ya'ni

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_u \vec{j} + a_z \vec{k}; \qquad \vec{в} = v_x \vec{i} + v_u \vec{j} + v_z \vec{k};$$

Bu holda $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlarning vektorial ko′paytmasini topamiz. Vektorial ko′paytma xossalari va ortlarning vektorial ko′paytmasiga asosan

$$\vec{a} \times \vec{в} = (a_x \vec{i} + a_u \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (v_x \vec{i} + v_u \vec{j} + v_z \vec{k}) = a_x v_x(\vec{i} \times \vec{i}) + a_x v_u(\vec{i} \times \vec{j}) + a_x v_z(\vec{i} \times \vec{k}) + a_u v_x(\vec{j} \times \vec{i}) + a_u v_u(\vec{j} \times \vec{j}) + a_u v_z(\vec{j} \times \vec{k}) + a_z v_x(\vec{k} \times \vec{i}) + a_z v_u(\vec{k} \times \vec{j}) + a_z v_z(\vec{k} \times \vec{k}) = 0 + a_x v_u \vec{k} - a_x v_z \vec{j} - a_u v_x \vec{k} + 0 + a_u v_z \vec{i} + a_z v_x \vec{j} + a_z v_u \vec{i} + 0 =$$

$$= (a_u v_z - a_z v_u)\vec{i} + (a_z v_x - a_x v_z)\vec{j} + (a_x v_u - a_u v_x)\vec{k} = s_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}.$$

Bunda s_x, c_y, c_z koordinatalar orqali mos qavslardagi ifodalar belgilandi. Bu koordinatlarni mos ravishda aniqlovchilar yordamida ham ko′rsatsa bo′ladi:

$$\vec{a} \times \vec{в} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ в_y & в_z \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ в_z & в_x \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ в_x & в_y \end{vmatrix} \vec{к}$$

yoki

$$\vec{a} \times \vec{в} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \end{vmatrix}$$

<u>Misol.</u> $\vec{a}(2; 3; -1)$ va $\vec{в}(3; -1; -4)$ vektorlarning vektorial ko′paytmasini toping.

<u>Echish:</u>

$$\vec{a} \times \vec{в} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -13\vec{i} + 5\vec{j} - 11\vec{k}$$

Endi vektorial ko′paytmaning ba'zi bir tadbiqlarini ko′ramiz.

<u>1-masala.</u> $\vec{a}(a_x, a_u, a_z)$ va $\vec{в}(v_x, v_u, v_z)$ vektorlarga yasalgan paralelogrammning yuzini toping.

<u>E ch i sh :</u> Vektorial ko′paytmaning ta'rifiga asosan paralellogramm yuzi quyidagicha topiladi:

$$S = |\vec{a} \times \vec{в}| = |\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ в_y & в_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ в_z & в_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_y & a_y \\ в_x & в_y \end{vmatrix}^2}$$

Misol. $\vec{a}(2;\ 3;\ -1)$ va $\vec{в}(3;\ -1;\ -4)$ vektorlarga yasalgan parallelogramm yuzasini toping.

E ch i sh : Oldin ko′rsatilganga asosan

$$\vec{a} \times \vec{в} = -13\vec{i} + 5\vec{j} - 11\vec{k}$$

bo′lgani uchun, izlangan S yuza

$$S=\sqrt{(-13)^2+5^2+(-11)^2}=\sqrt{169+25+121}=\sqrt{315}=3\sqrt{35}$$

Natija. $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlardan yasalgan uchburchakning yuzi

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{в}|$$

formula bilan topiladi.

2-masala. $\vec{a}(a_x, a_u, a_z)$ va $\vec{в}(v_x, v_u, v_z)$ vektorlarning kollinearlik shartini toping.

E ch i sh : Oldin ko′rilgan teoremada $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar kollinear bo′lishi uchun ularning vektorial ko′paytmasi $\vec{a} \times \vec{в}=0$ bo′lishi kerak ekanligi ko′rsatilgan edi. Bu tenglikni koordinatalarda ifodalaymiz:

$$\vec{a} \times \vec{в}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ в_x & в_y & в_z \end{vmatrix}=0.$$

Bu aniqlovchining birinchi satri vektorlardan, ikkinchi va uchinchi satrlari esa skalyarlardan iborat bo′lgani uchun, yuqoridagi tenglik faqat

$$\frac{a_x}{в_x}=\frac{a_y}{в_y}=\frac{a_z}{в_z}$$

bo′lganda o′rinli bo′ladi. Bu tenglik vektorlarning kollinearlik shartini ifodalaydi.

M i s o l. $\vec{a}(m,3,2)$ va $\vec{в}(4,6,\ n)$ vektorlar m va n parametrlarning qanday qiymatlarida kollinear bo′lishini toping.

E ch i sh. Kollinearlik shartiga asosan

$$\frac{m}{4}=\frac{3}{6}=\frac{2}{n} \Rightarrow m=2, n=4.$$

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. Vektorial ko′paytma qanday ta'riflanadiq
2. Vektorial ko′paytmaning mexanik ma'nosi nimadan iboratq
3. Vektorial ko′paytma qanday xossalarga egaq
4. Ortlarning vektorial ko′paytmasi qanday topiladiq
5. Vektorial ko′paytma koordinatalarda qanday ifodalanadiq
6. Ikkita vektorlardan hosil qilingan parallelogramm va uchburchak yuzalari qanday topiladiq
7. Vektorlarning kollinearlik sharti nimadan iboratq

2.4.VEKTORLARNING ARALASh KO′PAYTMASI, UNING XOSSALARI VA TADBIQLARI.

Tayanch iboralar: aralash ko′paytma, uning geometrik ma'nosi, komplanar vektorlar, aralash ko′paytma xossalari, aralash ko′paytmani koordinatalar orqali ifodalash, aralash ko′paytma tadbiqlari.

Re j a:

1. Vektorlarning aralash ko′paytmasi.
2. Aralash ko′paytmaning geometrik ma'nosi.
3. Aralash ko′paytmaning xossalari.
4. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning aralash ko′paytmasini hisoblash.
5. Aralash ko′paytma yordamida echiladigan masalalar.
6. Vektorlarning komplanarlik sharti.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §12 [3] III bob, §7

Uchta ***a, b, s*** vektorlarni o′zaro ko′paytirish masalasini ko′raylik. Agar ***a*** va ***b*** vektorlarni skalyar ko′paytirib, natijani ***c*** vektorga ko′paytirsak, u holda ***c*** vektorga kollinear vektor hosil bo′ladi. Agarda birinchi ikkita vektorni vektorial ko′paytirib, so′ngra hosil bo′lgan natijani uchinchi ***c*** vektorga yana vektorial ko′paytirsak, natijada yana bir yangi vektor hosil qilamiz. Bundan tashqari uchta vektorni quyidagi usulda ham ko′paytirish mumkin.

T A' R I F 1: ***a, b, s*** vektorlarning aralash ko′paytmasi deb ***a*** x ***b*** vektorial ko′paytmani s vektorga skalyar ko’paytmasi kabi aniqlanadigan songa aytiladi va ***a b c*** kabi belgilanadi.

Shunday qilib ta'rifga asosan aralash (vektor – skalyar) ko′paytma

$$\boldsymbol{a\,b\,s} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{s}$$

ko′rinishda bo′ladi.

T A' R I F 2: Vektorlar komplanar deyiladi, agarda ular bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda joylashgan bo′lsa.

Aralash ko′paytmaning geometrik ma'nosini ko′rib o′taylik. Buning uchun komplanar bo′lmagan ***a, b, s*** vektorlarni qaraylik. Ma'lumki, ***a*** x ***b*** uzunligi ko′paytuvchi vektorlardan tuzilgan parallelogrammning yuzasiga teng va parallelogramm tekisligiga perpendikulyar yo’nalgan vektordan iborat bo′ladi. Agar ***a*** x ***b*** vektorga ***c*** vektorni proektsiyalasak, u holda shu proektsiya parallelogramm tekisligiga perpendikulyar bo′lib, uning moduli ***a, b, s*** vektorlarga qurilgan parallelopiped balandligi H qiymatini ifodalaydi. Unda bu parallelopiped hajmi uchun

$$V = S_{asos} \cdot H = |(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}|$$

formulaga ega boʼlamiz. Shunday qilib, aralash koʼpaytma parallelepiped hajmini ifodalar ekan.

Endi aralash ko’paytmaning xossalarini ko’rib o’tamiz:

1. Aralash ko’paytmada vektorial va skalyar koʼpaytma amallari oʼrnini almashtirish mumkin, ya'ni

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{s}) .$$

Shu sababli aralash koʼpaytmada amallarni koʼrsatmasdan, qisqacha ***avs*** kabi yozish mumkin.

2. Aralash koʼpaytmada koʼpaytuvchilar urnini soat miliga teskari yoʼnalish boʼyicha doiraviy ravishda almashtirilsa, uning qiymati oʼzgarmasdan qoladi, ya'ni

$$\boldsymbol{a\,b\;s} = \boldsymbol{s\,a\,b} = \boldsymbol{b\,s\,a} = \boldsymbol{a\,b\,s}.$$

Bunga aralash koʼpaytmaning aylanma xossasi deb yuritishadi.

3. Aralash koʼpaytmada yonma – yon turgan vektorlarni oʼrni almashtirilsa, uning ishorasi teskarisiga oʼzgaradi, ya'ni

$$\boldsymbol{a\,b\;s} = -\,\boldsymbol{b\,a\,s} = -\,\boldsymbol{s\,b\;a} = -\,\boldsymbol{a\,s\,b}$$

Skalyar hamda vektorial koʼpaytmalarning qanday sharoitda nolga teng boʼlishini tahlil qilgan edik. Bu savolni endi aralash koʼpaytma uchun koʼrib chiqaylik. Quyidagi hollar boʼlishi mumkin:

1) koʼpaytuvchi vektorlardan kamida bittasi nol vektor;
2) koʼpaytuvchi vektorlardan kamida ikkitasi kollinear;
3) koʼpaytuvchi vektorlar komplanar.

Birinchi holda aralash koʼpaytmaning nol boʼlishi oʼz–oʼzidan kelib chiqadi. Ikkinchi holda, ya'ni ikkita vektor kollinear boʼlsa, unda ularning vektorial koʼpaytmasi nol va shu sababli aralash koʼpaytma ham nolga teng boʼladi. Uchinchi holda $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ va ***c*** vektorlar perpendikulyar boʼladi va shu tufayli ularning skalyar koʼpaytmasidan hosil boʼlgan aralash koʼpaytma nol boʼladi.

Natijada quyidagi tasdiqni olamiz:

TEOREMA. Noldan farqli uchta vektorning komplanar boʼlishi uchun ular-ning aralash koʼpaytmasi nolga teng boʼlishi zarur va etarlidir.

Koordinatalari bilan berilgan $\boldsymbol{a}=(a_x,a_u,a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x,b_u,b_z)$, $\boldsymbol{s}=(s_x,s_u,s_z)$ vektorlarning aralash koʼpaytmasini hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz. Vektorial koʼpaytmani hisoblash formulasiga asosan

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_u & a_z \\ b_x & b_u & b_z \end{vmatrix} = (a_u\, b_z - a_z\, b_u)\,\mathbf{i} + (a_z\, b_x - a_x b_z)\,\mathbf{j} +$$

$$+ (a_x b_u - a_u b_x)\mathbf{k} = \mathrm{A}\mathbf{i}+\mathrm{V}\mathbf{j}+\mathrm{S}\mathbf{k} .$$

Skalyar koʼpaytmani hisoblash formulasi va yuqoridagi tenglikka hamda aniqlovchining satr boʼyicha yoyilmasiga asosan

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{s} = \mathrm{A}s_x + \mathrm{V}s_u + \mathrm{S}s_z = \begin{vmatrix} s_z & s_x & s_u \\ a_x & a_u & a_z \\ & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_u & a_z \\ b_x & b_u & b_z \\ & & \end{vmatrix}$$

$$b_z \quad b_x \quad b_u \qquad\qquad s_z \quad s_x \quad s_u$$

Demak, aralash ko′paytma ko’paytuvchi vektorlarning koordinatalaridan tuzilgan III tartibli aniqlovchi kabi hisoblanadi.

Masalan, ***a***=(3,1,-2), ***b***=(4, 0, 1), ***s***=(0,2,-1) vektorlarning aralash ko′paytmasini topamiz:

$$\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{s} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -16 - 6 + 4 = -18.$$

Aralash ko′paytmaning koordinatalardagi ko′rinishidan foydalanib, uchta vektorlarning komplanarlik shartini topamiz:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_u & a_z \\ b_x & b_u & b_z \\ s_x & s_u & s_z \end{vmatrix} = 0$$

Aralash ko′paytmadan foydalanib, quyidagi masalalarni echamiz :

M a s a l a 1 : ***a***, ***b, s*** vektorlardan tuzilgan uchburchakli piramida hajmini toping.

<u>E ch i sh :</u> Berilgan ***a*** , ***b*** va ***s*** vektorlardan tuzilgan piramidaning asosidagi ***a***, ***b*** vektorlar hosil qilgan uchburchak yuzasini S, balandligi | ***a*** x ***b*** |=h va hajmini V deb olsak, V= Sh ⁄ 3 tenglik o′rinli bo′ladi. Shu vektorlardan tuzilgan parallelopiped asosi yuzasi 2S, balandligi esa h bo′ladi. Bu parallelopiped hajmini V_0 deb olsak, V_0=2Sh =| ***a b s***| bo′ladi.

Bu holda piramida hajmi

$$V = V_0 / 6 = |\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{s}\,| / 6 = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_x & a_u & a_z \\ b_x & b_u & b_z \\ s_x & s_u & s_z \end{vmatrix}$$

formula bilan hisoblanadi.

M a s a l a 2 : Fazodagi to′rtta $M_1(x_1, u_1, z_1)$, $M_2(x_2, u_2, z_2)$, $M_3(x_3, u_3, z_3)$ va $M_4(x_4, u_4, z_4)$ nuqtalarni bir tekislikda yotish shartini toping.

<u>E ch i sh :</u> M_1 , M_2 , M_3 va M_4 nuqtalar bir tekislikda yotishi uchun

$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ u_2 - u_1,\ z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1,\ u_3 - u_1,\ z_3 - z_1)$,

$\overrightarrow{M_1M_4} = (x_4 - x_1,\ u_4 - u_1,\ z_4 - z_1)$ vektorlarni komplanar bo′lishi zarur va etarli, ya'ni

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & u_2 - u_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & u_3 - u_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & u_4 - u_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

shart kelib chikadi.

<u>O′z-o′zini nazorat etish savollari:</u>

1. Vektorlarning aralash ko′paytmasi qanday ta'riflanadiq
2. Aralash ko′paytmaning geometrik ma'nosi nimadan iboratq
3. Aralash ko′paytma natijasida qanaqa kattalik hosil bo′ladiq

4. Aralash ko′paytma qanday xossalarga egaq
5. Aralash ko′paytma koordinatalar orqali qanday topiladiq
6. Uchta vektordan hosil qilingan parallelopiped va piramida hajmi qaysi formula bilan topiladiq
7. Uchta vektorning komplanarlik sharti nimadan iboratq
8. To′rtta nuqta qaysi shartda bir tekislikda yotadiq

III BOB. TEKISLIKDA ANALITIK GEOMETRIYA
3.1. TEKISLIKDA ANALITIK GEOMETRIYA. TO'G'RI CHIZIQ TENGLAMALARI.

Tayanch iboralar: geometrik ob'ekt tenglamasi, analitik geometriya predmeti, ikkita asosiy masala, ikki nuqta orasidagi masofa, aylana tenglamasi, kesmani berilgan nisbatda bo′lish, o′rta nuqta koordinatalari, to′g'ri chiziqning normal tenglamasi, nuqtadan to′g'ri chiziqqacha bo′lgan masofa.

Re j a:

1. Geometrik ob'ekt tenglamasi.
2. Analitik geometriya predmeti va asosiy ikkita masalasi.
3. Ikki nuqta orasidagi masofa va aylana tenglamasi.
4. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish.
5. To'g'ri chiziqning normal tenglamasi.
6. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §13-17 [3] II bob, §1-4, V bob §1

Tekislikda XOY Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo′lsin. Bu holda tekislikdagi har bir M nuqta uning koordinatalari deb ataladigan (x,y) sonlar juftligi bilan to′liq aniqlanadi va M (x,y) kabi yoziladi. Tekislikdagi turli geometrik ob'ektlarni nuqtalar to′plami kabi qarash mumkin.

T A' R I F 1 : Tekislikdagi geometrik ob'ektlarni ularning $M(x,y)$ nuqtalarining koordinatalari orqali ifodalovchi tengliklar shu ob'ektning tenglamasi deb ataladi.

Tenglama odatda $F(x,u)=0$ ko′rinishda yoziladi. Agarda $M_0(x_0,u_0)$ nuqta uchun $F(x_0,u_0)=0$ shart bajarilsa, M_0 shu tenglama bilan aniqlangan geometrik ob'ektga tegishli bo′ladi. Aks holda M_0 nuqta bu ob'ektga tegishli bo′lmaydi. Shunday qilib, geometrik ob'ekt o′zining $F(x,u)=0$ tenglamasi bilan to′liq aniqlanadi.

T A' R I F 2 : Geometrik ob'ektlarni ularning tenglamalari orqali o′rganuvchi matematik fan **analitik geometriya** deb ataladi.

Analitik geometriya asoschisi bo′lib frantsuz matematigi va faylasufi Rene Dekart hisoblanadi.

Analitik geometriyada asosan ikkita masala qaraladi:

1. Berilgan geometrik ob'ektning tenglamasini topish.

2.Geometrik ob'ektning tenglamasi bo′yicha uning xossalarini o′rganib, ob'ektni aniqlash.

Bu masalalarni echishda vektorlar algebrasidan keng foydalaniladi. Misol tariqasida analitik geometriyaning quyidagi masalalarini ko′ramiz.

M a s a l a 1: Tekislikdagi $M_1(x_1,u_1)$ va $M_2(x_2,u_2)$ nuqtalar orasidagi d masofani toping.

E ch i sh : Berilgan nuqtalar bo′yicha $\mathbf{M_1M_2}=\{x_2-x_1,\ u_2-u_1\}$ vektorni hosil qilamiz. Berilgan nuqtalar orasidagi masofa shu vektorning uzunligiga teng, ya'ni

$$d=|\mathbf{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (1)$$

formulaga ega bo′lamiz.

Masalan, $M_1(3,1)$ va $M_2(-2,6)$ nuqtalar orasidagi masofa (1) ga ko′ra

$$d=\sqrt{(-2-3)^2+(6-1)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}\,.$$

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasidan foydalanib, markazi $M(a,b)$ nuqtada joylashgan R radiusli aylana tenglamasini topamiz. $N(x,y)$ shu aylanada joylashgan ixtiyoriy nuqta bo′lsin. Aylana ta'rifiga asosan u $|MN|=R$ tenglamani qanoatlanliruvchi nuqtalar to′plamining geometrik o′rnidan iborat. Natijada, (1) formulaga ko′ra

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-в)^2}=R \Rightarrow (x-a)^2+(y-в)^2=R^2 \qquad (2)$$

Bu aylana tenglamasini ifodalaydi. Aylananing (2) ko′rinishdagi tenglamasiga uning kanonik (eng informativ, eng qulay) tenglamasi deyiladi.

Masalan, markazi $M(2,3)$ va radiusi $R=5$ bo′lgan aylana

$$(x-2)^2 + (u-3)^2 = 25$$

tenglamaga ega bo′ladi. Bu erdan $N(5,7)$ nuqta shu aylanaga tegishli ekanligi kelib chiqadi, chunki

$$(5-2)^2 + (7-3)^2 = 25.$$

$K(2,6)$ nuqta aylanada yotmaydi, chunki uning tenglamasini qanoatlantirmaydi:

$$(2-2)^2 + (6-3)^2 = 9\neq 25.$$

M a s a l a 2. Uchlari $M_1(x_1,u_1)$ va $M_2(x_2,u_2)$ nuqtalarda joylashgan M_1M_2 kesmani berilgan $\lambda>0$ nisbatda bo′luvchi $M_0(x_0,u_0)$ nuqta koordinatalarini toping.

E ch i sh : $\mathbf{M_1M_0}=\{x_0-x_1,u_0-u_1\}$ va $\mathbf{M_0M_2}=\{x_2-x_0,u_2-u_0\}$ vektorlarni qaraymiz. Ular bir to′g’ri chiziqda yotgani uchun kollinear va masala shartiga ko′ra $|\mathbf{M_1M_0}|=\lambda\,|\mathbf{M_0M_2}|$. Aytganlarga asosan $\mathbf{M_1M_0} = \lambda\, \mathbf{M_0M_2}$ deb yozish mumkin. Bu tenglikni vektorlarning koordinatalari orqali ifodalaymiz (koordinatalar ko′rinishidagi ikki vektor teng bo′lishi uchun ularning mos koordinatalari teng bo′lishi kerak):

$$x_0-x_1=\lambda\,(x_2-x_0)\,,\quad u_0-u_1=\lambda\,(u_2-u_0).$$

Bu tengliklardan izlangan x_0 va y_0 koordinatalarni topamiz:

$$x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (3)$$

Xususiy, $\lambda = 1$, holda M_1M_2 kesmaning o′rta nuqtasi koordinatalarini topamiz :

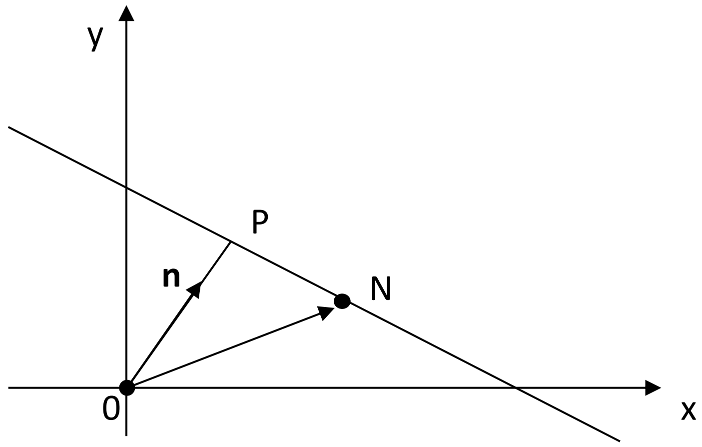
$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}\quad,\qquad y_0=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad (4)$$

Masalan, $M_1(3,-5)$ va $M_2(1\ ,1)$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesmaning o′rta nuqtasi

$$x_0 = \frac{3+1}{2} = 2 \quad , \qquad y_0 = \frac{-5+1}{2} = -2$$

koordinatalar bilan aniqlanadi.

Endi tekislikda biror ***l*** to′g’ri chiziq berilgan bo′lsin va uning tenglamasini topish talab etilsin. Buning uchun bu to′g’ri chiziqqa perpendikulyar bo′lgan **n** birlik vektor va koordinata boshidan bu to′g’ri chiziqqacha bo′lgan masofa |0R| = r ma'lum deb olamiz. Agarda **n** vektor OX koordinata o′qi bilan α burchak tashkil etgan bo′lsa, **n** = {cos α, sinα} deb yozish mumkin. N(x,y) berilgan to′g’ri chiziqdagi ixtiyoriy bir nuqta, **ON** = {x,u} va **n** vektorlar orasidagi burchak φ bo′lsin ($\angle$RON=φ). Hosil bo′lgan **n** ·**ON** skalyar ko′paytmani ikki usulda hisoblaymiz.



n ·**ON =** x cosα + u sin α **;**

n ·**ON =| n|** ·|**ON|** cosφ=1·|**ON**|·|OR|∕|**ON|**=|OR|=r.

Demak, berilgan to’g’ri chiziqdagi barcha N(x,y) nuqtalar uchun

$$x \cos\alpha + u \sin\alpha = r \Rightarrow x \cos\alpha + u \sin\alpha - r = 0 \qquad (5)$$

tenglik o’rinlidir. Bu tekislikdagi to′g’ri chiziqning ***normal tenglamasi*** deyiladi. Agarda K(x_0,u_0) berilgan ***l*** to′g’ri chiziqda yotmagan nuqta bo′lsa, undan bu to′g’ri chiziqqacha bo′lgan d masofa

$$d = |x_0 \cos\alpha + u_0 \sin\alpha - r| \qquad (6)$$

formula bilan aniqlanishini isbotlash mumkin.

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. Geometrik ob'ekt tenglamasi deb nimaga aytiladiq
2. Analitik geometriya predmeti nimadan iboratq
3. Analitik geometriyaning ikki asosiy masalasini ko′rsating.
4. Ikki nuqta orasidagi masofa qanday topiladiq
5. Aylana tenglamasi qanday ko′rinishda bo′ladiq
6. Kesmani berilgan nisbatda bo′luvchi nuqta koordinatalari qanday topiladiq
7. Kesmaning o′rta nuqtasi koordinatalari formulasini yozing.
8. To′g’ri chiziqning normal tenglamasini yozing.
9. Nuqtadan to′g’ri chiziqqacha masofa qanday topiladiq

3.2.TO′GRI CHIZIQNING TURLI TENGLAMALARI.

Tayanch iboralar: umumiy tenglama, kesmalardagi tenglama, burchak koeffitsientli tenglama, yo′naltiruvchi vektor, kanonik tenglama, berilgan nuqtadan o′tuvchi to′g’ri chiziqlar dastasi tenglamasi, ikki nuqtadan o′tuvchi to’g’ri chiziq tenglamasi.

Re j a:

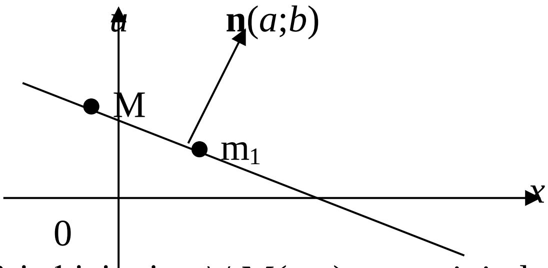
1. Berilgan nuqtadan o′tuvchi va berilgan vektorga perpendikulyar to′g’ri chiziq tenglamasi.
2. To′g’ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning tahlili.
3. To′g’ri chiziqlarning kesishish nuqtasi.
4. Yo′naltiruvchi vektor va to′g’ri chiziqning kanonik tenglamasi.
5. Berilgan nuqtadan berilgan yo′nalish bo′yicha o′tuvchi to′g’ri chiziq tenglamasi.
6. To′g’ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.
7. To′g’ri chiziqlar dastasi tenglamasi.
8. Berilgan ikki nuqtadan o′tuvchi to′g’ri chiziq tenglamasi.
9. To′g’ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §17-18 [3] V bob, § 2,7

Oldingi, ma'ruzada to′g’ri chiziqning normal tenglamasi ko′rsatilgan edi. Endi to′g’ri chiziqlarning boshqa ko′rinishdagi tenglamalari bilan tanishib chiqamiz.

1. **Berilgan $M_1(x_1,u_1)$ nuqtadan o′tuvchi va berilgan $n(a,b)$ vektorga perpendikulyar bo′lgan to′g’ri chiziq tenglamasi.**



Izlanayotgan ℓ to′g’ri chiziqning ∀ $M(x:u)$ nuqtasini olamiz va $\mathbf{M_1M}$ vektorni hosil qilamiz. Unda $\mathbf{M_1M}=(x-x_1,u-u_1)$ bo′lib, masala shartida **n** vektorga perpendikulyar bo′ladi. Vektorlarning ortogonallik shartiga ko′ra

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{M_1M}=0\Rightarrow a(x-x_1)+b(u-u_1)=0 \qquad (1)$$

tenglamani olamiz. Shunday qilib M(x;u) nuqta ℓ da yotsa, u holda **M₁M** va **n** vektorlar perpendikulyar. Aks holda esa **M₁M·n**≠0 bo′ladi, ya'ni M(x;u) nuqta (1) tenglamani qanoatlantirmaydi.

M i s o l : M(2:-5) nuqtadan o′tuvchi va **n**=2i-3j vektorga perpendikulyar bo′lgan to’g’ri chiziq tenglamasini toping.

E ch i sh : (1) tenglamaga asosan $2(x-2)-3(u+5)=0 \Rightarrow 2x-3u-19=0$

2. To′g’ri chiziqning umumiy tenglamasi.

Oldingi punktda to′g’ri chiziqning tenglamasi ikki noma'lumli chiziqli tenglama bo′lishi kelib chiqqan edi (analitik geometriyaning birinchi asosiy masalasi).

Endi bo′lsa ∀ ikki noma'lumli chiziqli tenglama

$$Ax+Vu+S=0 \qquad (2)$$

tekislikda to′g’ri chiziqni ifodalashini ko′rsatamiz (analitik geometriyaning 2-asosiy masalasi). Berilgan tenglamani shaklini quyidagicha almashtiramiz:

$$Ax+By+C= Ax+B(y+C/B)=0 \Rightarrow A(x-0)+V(u-(-S/V))$$

Bu esa, oldingi punktdagi (1) ga asosan, **n**(A,V) vektorga perpendikulyar va M(0; -C/B) nuqtadan o′tuvchi to′g’ri chiziq tenglamasidir. Ko′rinib turibdiki (2) tenglamada A va B koeffitsientlar bir vaqtda 0 ga teng bo′lmasligi kerak.

(2) to′g’ri chiziqning ***umumiy tenglamasi*** deyiladi. Unda **n(**A,B**)** vektor shu to′g’ri chiziqqa perpendikulyar bo′lib, uning ***normal vektori*** deyiladi.

Agar C=0 bo′lsa, $Ax+By=0$ tenglama hosil bo′ladi. Bu tenglamani O(0:0) nuqta koordinatalari qanoatlantirganligi uchun, u koordinatalar boshidan o′tuvchi to′g’ri chiziqlar tenglamasini ifodalaydi.

Xususan $y=0$ (A=0, C=0, B≠0) OX o′qining, $x=0$ (A≠0, C=0, B=0) esa OY o′qining tenglamasidir.

3. To′g’ri chiziqlarning kesishish nuqtasi.

Ikkita to′g’ri chiziq umumiy tenglamalari $a_1x+b_1y+c_1=0$ va $a_2x+b_2y+c_2=0$ bilan berilgan bo′lsin. To′g’ri chiziqlarning M(x_0,y_0) kesishish nuqtasi har ikkala to′g’ri chiziqqa tegishli bo′lgani uchun uning koordinatalari quyidagi tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1x+b_1y=-c_1 \\ a_2x+b_2y=-c_2 \end{cases}$$

M i s o l 1: $2x+u-1=0$ va $x+2u+1=0$ to′g'ri chiziqlarning $M_0(x_0;u_0)$ kesishish nuqtasini toping.

Echish. $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+2y=-1 \end{cases} \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow M_0(1;-1).$

4. To′g’ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi.

Koordinata boshidan o′tmaydigan to′g’ri chiziq OX va OY o′qlaridan uzunligi $|a|$ va $|b|$ bo′lgan kesmalar ajratgan bo′lsin. Bu to′g’ri chiziq tenglamasini topish uchun M(a,0) va N(0,b) nuqtalar unda yotishidan foydalanamiz. Bu nuqtalar koordinatalarini Ax+Vu+S=0 umumiy tenglamaga qo′yib, A=-S/a, V=-S/b ekanligini topamiz. Bu erdan

Ax+Vu+S=0 $\Rightarrow$ (-S/a)x+(-S/b)u+S=0 $\Rightarrow$ -S(x/a+u/b-1)=0 $\Rightarrow$ x/a+u/b=1

Demak, izlangan to′g’ri chiziq tenglamasi

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

bo′ladi. Bu to′g’ri chiziqning ***kesmalardagi tenglamasi*** deyiladi.

M i s o l 2:: 2x+3u-6=0 to′g’ri chiziqni yasang.

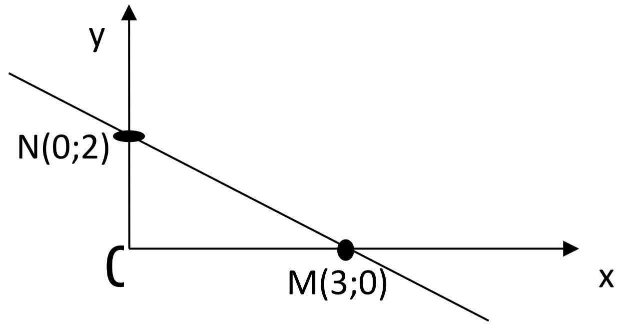
E ch i sh : Uni OX o′qi bilan kesishish nuqtasi M ni topamiz. Buning uchun quyidagi sistemani echish kifoya:

$$\begin{cases} 2x+3y-6=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \text{M(3;0)}$$

Demak berilgan to′g’ri chiziqning OX o′qi bilan kesishish nuqtasi topildi. Endi uning OY o′qi bilan kesishgan nuqtasi N ni topamiz:

$$\begin{cases} 2x+3y-6=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \text{N(0;2)}$$

M va N nuqtalarni yasab va ularni tutashtirib, berilgan to′g’ri chiziqni hosil qilamiz.



Bu erdan berilgan to′g’ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi x/3+u/2=1 ekanligini ko′ramiz.

Demak, umumiy tenglamadan kesmalardagi tenglamaga utish uchun uni qarama-qarshi ishora bilan olingan ozod hadga bo′lish kerak.

5. To′g’ri chiziqning yo′naltiruvchi vektori.
To′g’ri chiziqning kanonik tenglamasi.

Tekislikdagi l to′g’ri chiziqning biror M$_1$(x_1,u_1) nuqtasi berilgan hamda $\vec{S}=m\cdot\vec{i}+n\cdot\vec{j}$ vektor shu to′g’ri chiziqqa parallel bo′lsin. U holda berilgan M$_1$ nuqta va $\vec{S}$ vektor to′g’ri chiziqning holatini to′la belgilaydi. Shu sababli $\vec{S}$ to′g’ri chiziqning ***yo′naltiruvchi vektori***, M$_1$ esa uning ***boshlangich nuqtasi*** deyiladi. Berilgan to′g’ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy M(x,y) nuqtani olamiz va $\overrightarrow{M_1M}$ =(x-x_1,

u-u_1) vektorni hosil qilamiz. Shartga asosan bu va $\vec{S}$ vektorlar kollinear, ya'ni ularning mos koordinatalari proportsionaldir:

$$\frac{y-y_1}{m}=\frac{x-x_1}{n} \qquad (3)$$

Hosil bo′lgan (3) tenglama berilgan to′g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi.

IZOH: Agar to′g'ri chiziq OX o′qiga parallel, ya'ni to′g'ri chiziq $\vec{i}$ vektorga parallel bo′lsa, u holda m=0 bo′ladi va uning kanonik tenglamasi

$$\frac{y-y_1}{0}=\frac{x-x_1}{n} \Rightarrow 0(x-x_1)=n(y-y_1) \Rightarrow y=y_1.$$

Shunday qilib OX o′qiga parallel to′g'ri chiziqning tenglamasi u=u_1 bo′ladi. Aksincha to′g'ri chiziq OY o′qiga parallel bo′lsa, uning kanonik tenglamasi x=x_1 bo′ladi.

6. Berilgan nuqtadan berilgan yo′nalish bo′yicha o′tuvchi to′g'ri chiziq tenglamasi. To′g'ri chiziqlar dastasi.

Aytaylik l to′g'ri chiziq va OX o′qi orasidagi burchak α bo′lsin. Agar to′g'ri chiziq OX o′qiga parallel yoki u bilan ustma-ust tushsa, unda α=0 bo′ladi. Agarda $\alpha\neq 90^0$ bo′lsa, u holda to′g'ri chiziqning holatini α burchak va l ga tegishli bo′lib, koordinatalari bilan berilgan $M_1(x_1{:}u_1)$ nuqta to′la aniqlanishini ko′rsatamiz. Yo′naltiruvchi vektor sifatida l ga parallel bo′lgan, ya'ni OX o′qi bilan α burchak tashkil qiluvchi $\vec{e}$ birlik vektorni qaraymiz. Ma'lumki ixtiyoriy birlik vektor o′zining yo′naltiruvchi kosinuslari bilan aniqlanadi, ya'ni $\vec{e}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}$. Bunda cosβ=sinα bo′lgani uchun

$$\vec{e}=\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j}.$$

To′g'ri chiziqning (3) kanonik tenglamasiga m=cosα va n=sinα deb, quyidagi natijani olamiz:

$$\frac{y-y_1}{\sin\alpha}=\frac{x-x_1}{\cos\alpha} \Rightarrow tg\alpha\ (x-x_1)=y-y_1$$

Agar bunda k=tgα deb olsak, u holda

$$y-y_1=k\,(x-x_1) \qquad (4)$$

tenglamaga ega bo′lamiz. Bu berilgan nuqtadan berilgan yo′nalish bo′yicha o′tuvchi to′g'ri chiziq tenglamasi bo′lib, unda k – to′g'ri chiziqning burchak koeffitsienti deyiladi.

M i s o l : M(1;2) nuqtadan o′tib, OX o′qi bilan π/3 burchak tashkil qiluvchi to′g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

E ch i sh : Izlanayotgan to′g'ri chiziqning burchak koeffitsientini topamiz:

$$k=tg\alpha=tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}.$$

Natijada to′g'ri chiziqning tenglamasi (4) ga asosan quyidagicha bo′ladi:

$$y-y_1=k(x-x_1)\Rightarrow y-2=\sqrt{3}(x-1)\Rightarrow\sqrt{3}\,x-y-1-2\sqrt{3}=0.$$

Tekislikning biror M_0 nuqtasi orqali o′tuvchi to′g’ri chiziqlar to′plami ***to′g’ri chiziqlar dastasi***, umumiy nuqta M_0 esa ***dastaning markazi*** deyiladi.

7. To′g’ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.

To′g’ri chiziq OX o′qi bilan α burchak tashkil qilib, OY o′qini B(0,b) nuqtada kesib o′tsin. Shu to′g’ri chiziq tenglamasini topamiz. Buning uchun to′g’ri chiziklar dastasining tenglamasiga $x_1=0$, $y_1=b$ qo′yib,

$$y-b=k(x-0)\Rightarrow y=kx+b \qquad (5)$$

tenglamani olamiz. Bu to′g’ri chiziqning ***burchak koeffitsientli tenglamasi*** deyiladi. Xususan agar $b=0$ bo′lsa, $y=kx$ koordinatalar boshidan o′tuvchi to′g’ri chiziqlar dastasining tenglamasini ifodalaydi. Agarda k=0 bo′lsa, u holda OX o′qiga parallel to′g’ri chiziqning $y=b$ tenglamasiga ega bo′lamiz.

8. Berilgan ikki nuqta orqali o′tuvchi to′g’ri chiziq tenglamasi.

Tekislikda $M_1(x_1, u_1)$ va $M_2(x_2, u_2)$ nuqtalar berilgan bo′lsin. Shu nuqtalardan o′tuvchi to′g’ri chiziq tenglamasini topish uchun $M_1(x_1, u_1)$ nuqtani boshlang’ich, $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$ vektorni esa yo′naltiruvchi deb olish mumkin. Shu sababli izlangan to′g’ri chiziqning kanonik tenglamasi

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

ko′rinishda bo′ladi.

Masalan, $M_1(2,1)$ va $M_2(-3,0)$ nuqtalardan o′tuvchi to′g’ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo′ladi:

$$\frac{x-2}{-3-2}=\frac{y-1}{0-1}\Rightarrow -x+2=-5u+5\Rightarrow x-5u+3=0.$$

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. Berilgan nuqtadan o′tuvchi va berilgan vektorga perpendikulyar to′g’ri chiziq tenglamasini yozing.
2. To′g’ri chiziqning umumiy tenglamasi qanday ko’rinishda bo′ladiq
3. To′g’ri chiziqning umumiy tenglamasini tahlil eting.
4. Ikki to′g’ri chiziqning kesishish nuqtasi qanday topiladiq
5. To′g’ri chiziqning yo′naltiruvchi vektori deb nimaga aytiladiq
6. To′g’ri chiziqning kanonik tenglamasi qanday ko′rinishda bo′ladiq
7. To′g’ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasini yozing.
8. Burchak koeffitsientli tenglamadagi parametrlar qanday geometrik ma'noga egaq
9. Berilgan nuqtadan o′tuvchi to′g’ri chiziqlar dastasining tenglamasi qanday ko′rinishda bo′ladiq
10. Berilgan ikki nuqtadan utuvchi to′g’ri chiziq tenglamasini yozing.

11. To′g’ri chiziqning kesmalaradagi tenglamasini yozing va undagi parametrlarning geometrik ma'nosini ko′rsating.

3.3.TO′G’RI CHIZIQLARGA DOIR AYRIM MASALALAR.

Tayanch iboralar: ikki to′g’ri chiziq orasidagi burchak, to′g’ri chiziqlarning parallelik sharti, perpendikulyarlik sharti, nuqtadan to’g’ri chiziqqacha masofa.

Re j a s i :

1. Ikki to′g’ri chiziq orasidagi burchak.
2. To′g’ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik sharti.
3. Nuqtadan to′g’ri chiziqqacha bo′lgan masofa.

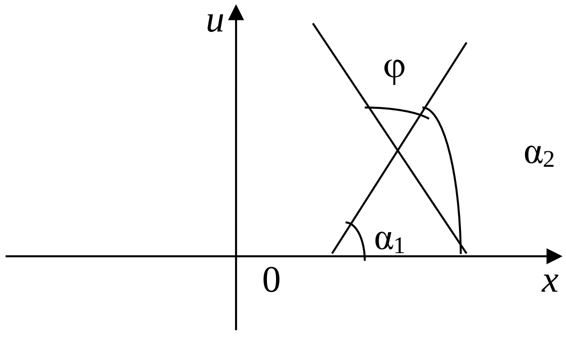
Adabiyotlar:

[1] I bob, §19 [3] V bob, §3,5,6

Ikki to′g’ri chiziq orasidagi burchak.

Tekislikning biror M nuqtasida kesishuvchi ikkita to′g’ri chiziq orasidagi burchakni topish bilan shug’ullanamiz. Bu to′g’ri chiziqlar o′zlarining burchak koeffitsentli tenglamalari bilan berilgan bo′lsin, ya'ni

u_1=k$_1x$+b_1 va u_2=k$_2x$+b_2



Bu to′g’ri chiziqlar orasidagi burchakni (bilan va ularning OX o′qi bilan hosil qilgan burchaklarini mos ravishda α_1 va α_2 bilan belgilaymiz. Chizmaga asosan izlanayotgan burchak tangensini topamiz:

$$\text{tg}\varphi=\text{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1+tg\alpha_2\cdot tg\alpha_1}$$

Bunda tgα_1 =k$_1$ va tgα_2 =k$_2$ ekanligini hisobga olsak va $\varphi\neq 90^0$ shartni qanoatlantirsa, u holda to′g’ri chiziqlar orasidagi burchakni

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1} \qquad (1)$$

formula orqali aniqlashimiz mumkin.

Agar to′g'ri chiziqlar $A_1x+V_1u+S_1=0$ va $A_2x+V_2u+S_2=0$ umumiy tenglamalari bilan berilgan bo′lsa, ularning $\mathbf{n_1}(A_1,V_1)$ va $\mathbf{n_2}(A_2,V_2)$ normal vektorlariga murojaat qilamiz. Unda izlangan φ burchak normal vektorlar orasidagi burchak bilan teng bo′ladi va vektorlar orasidagi burchak formulasiga asosan

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

formula bilan topiladi.

To′g'ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

Agar ikkita to′g'ri chiziq || yoki ustma-ust tushsa, y holda

$$\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2 \Rightarrow k_1 = k_2.$$

Aksincha, agar $k_1 = k_2$ bo′lsa, u holda tg φ=0=>φ=0. Shunday qilib, ikki to′g'ri chiziqning || bo′lishining zaruriy va etarli sharti $k_1 = k_2$ bo′ladi.

Agar to′g'ri chiziqlar ⊥ bo′lsalar, u holda (1) formula ma'nosiz bo′ladi. Aytaylik $0<\varphi<90^0$ bo′lsin. Bunda sosφ≠0, sinφ≠0 bo′lgani uchun φ burchakni kotangensini (1) ga asosan quyidagicha yozish mumkin:

$$\operatorname{ctg}\varphi=1/\operatorname{tg}\varphi =(1+ \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2)/ (\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1) = (1 + k_1 k_2) / (k_2 - k_1)$$

Bu formulada φ=π/2 desak, ctg φ=0 => $k_1 k_2 = -1$ natijani olamiz. Aksincha bu tenglik bajarilsa, u holda ctgφ =0⇒φ=π/2 ekanligini ko'rish qiyin emas.

Demak, ikkita to′g'ri chiziqning perpendikulyarligining zaruriy va etarli sharti $k_1 k_2= -1$ bo′ladi.

<u>1-m i s o l:</u> $6x+2u-1=0$ va $x-3u+2 =0$ to′gri chiziqlarning perpendikulyarligini ko′rsating.

<u>E ch i sh :</u>

$2u_1 =-6x+1$	$3u_2 = x+2$
$u_1 =-3x +1/2$	$u_2 = x/3 +2/3$
$k_1 = -3$	$k_2 = 1/3$

Natijada $k_1 k_2=-1$ ekanligini ko′ramiz, ya'ni $\varphi=90^0$ va bu to′g'ri chiziqlar o′zaro perpendikulyar ekan.

<u>2- m i s o l :</u> M(-3:-1) nuqta orqali o′tuvchi va $2x+u-3=0$ to′g'ri chiziqqa perpendikulyar bo′lgan to′g'ri chiziq tenglamasi topilsin.

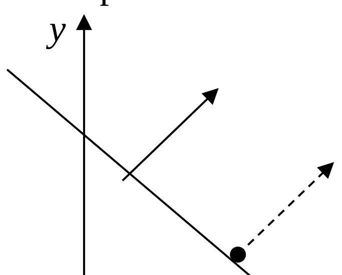
<u>E ch i sh :</u> Berilgan to′g'ri chiziqning burchak koeffitsienti $k_1=-1/2$ ga teng. Demak, unga perpendikulyar bo′lgan to′g'ri chiziqning burchak koeffitsienti $k_2=-1/k_1=2$ va uning tenglamasi $y=2x+b$ ko′rinishga ega. M(-3,-1) nuqta izlanayotgan to′g'ri chiziqda yotgani uchun uning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiradi:

$$-1= 2\cdot (-3)+b \Rightarrow b=5.$$

Natijada izlangan to′g'ri chiziq tenglamasi $y=2x +5$ ekanligini topamiz.

Nuqtadan to′g'ri chiziqqacha bo′lgan masofa.

Aytaylik $M_0 (x_0;u_0)$ nuqta va undan o′tmaydigan biror to′gri chiziq o′zining umumiy tenglamasi $ax+bu+s=0$ bilan berilgan bo′lsin. Berilgan nuqta va shu to′g'ri chiziq orasidagi masofani topish masalasini qo′yamiz.



n (a,b)

M$_0$ (x_0,u_0)

M$_1$ (x_1,u_1)

0 x

Berilgan to′g’ri chiziqqa perpendikulyar bo′lgan $\vec{n}=(a;b)$ va $\mathbf{M_1M_0}=(x_0-x_1;\ y_0-y_1)$ vektorlar parallel bo′ladi. Bunda $\bar{n}$ to′g’ri chiziqning normal vektori, M$_1$ esa to′g’ri chiziqqa M$_0$ nuqtada o′tkazilgan perpendikulyar asosini ifodalaydi. Chizmaga asosan va skalyar ko′paytmaning har ikkala ko′rinishiga binoan

$$\bar{n}\cdot\mathbf{M_1M_0} = |\bar{n}|\,|\,\mathbf{M_1M_0}\,|\cos 0 = a(x_0 - x_1) + b\,(y_0 - y_1),$$

$$\sqrt{a^2+в^2}\cdot d = a\,(x_0 - x_1) + b\,(y_0 - y_1) \qquad (2)$$

Bunda d=| $\mathbf{M_1M_0}$ | izlanayotgan masofani ifodalaydi.

M$_1(x_1;u_1)$ nuqta berilgan to′g’ri chiziqda yotganligi uchun uning koordinatalari to′g’ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi, ya'ni

$$a\,x_1 + b\,y_1 + c = 0 \Rightarrow a\,x_1 + b\,y_1 = -c.$$

Bularni hisobga olib, (2) ni ko′yidagicha yozish mumkin:

$$a\,x_0 + b\,y_0 - (a\,x_1 + b\,y_1) = (\pm d)\sqrt{a^2+в^2}\,,$$

$$a\,x_0 + b\,y_0 + c = (\pm d)\sqrt{a^2+в^2}\,,$$

$$d = \pm\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\,. \qquad (3)$$

<u>3- m i s o l :</u> $2x-3u+1=0$ to′g’ri chiziq va M(2;1) nuqtalar orasidagi masofani toping.

<u>E ch i sh:</u> Berilganlarni (3) formulaga quyib, berilgan nuqta va to′g’ri chiziq orasidagi masofani topamiz:

$$d = |2\cdot 2 - 3\cdot 1 + 1| / \sqrt{4+9} = 2/\sqrt{13}$$

Izoh: Oldingi ma'ruzada normal tenglamasi bilan berilgan to′g’ri chiziq bilan M$_0(x_0,u_0)$ orasidagi masofa

$$d = |x_0\cos\alpha + u_0\sin\alpha - r|$$

formula bilan ham topilishi ko′rsatilgan edi.

<u>O′z-o′zini nazorat etish savollari:</u>

1. Ikki to′g’ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladiq
2. To′g’ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti nimadan iboratq
3. To′g’ri chiziqlarning parallellik shartini yozing.
4. Nuqtadan to′g’ri chiziqqacha bo′lgan masofa qanday topiladiq

3.4.IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLAR.
AYLANA VA ELLIPS.

Tayanch iboralar: ikkinchi darajali tenglama, ikkinchi tartibli chiziqlar, aylana umumiy tenglamasi, ellips ta'rifi, ellipsning kanonik tenglamasi, fokus, ekstsentrisitet, fokal radius, direktrisa.

<u>Re j a s i :</u>

1. Ikkinchi darajali tenglama va ikkinchi tartibli chiziqlar.
2. Aylananing umumiy tenglamasi.
3. Ellips va uning kanonik tenglamasi.
4. Ellips tenglamasining tahlili va ellips grafigi.
5. Ellipsning ekstsentrisiteti.
6. Ellips direktrisalari va fokal radiuslari.

<u>Adabiyotlar:</u>

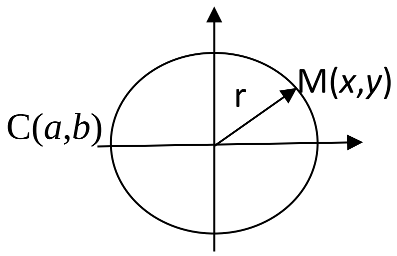
[1] I bob, §13, §35-36 [3] VII bob, §1-3

Ushbu II darajali tenglama

$$\mathrm{A}x^2+\mathrm{V}xu+\mathrm{S}u^2+\mathrm{D}x+\mathrm{E}u+\mathrm{F}=0 \qquad (1)$$

tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. Bu erda A, B, C lardan kamida bittasi nolga teng emas. (1) tenglama koeffitsientlarining qiymatlariga qarab turli ikkinchi tartibli chiziqlarni tasvirlashi mumkin. Biz quyida shu egri chiziqlarni tenglamalari bilan tanishamiz.

Aylananing umumiy tenglamasi.



Radiusi r ga teng va markazi C(a;b) nuqtada yotgan aylana tenglamasini keltirib chiqaramiz. M(x,y) shu aylanadagi ixtiyoriy bir nuqta bo′lsin. Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan

$$|\mathrm{MS}| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \Rightarrow \qquad (x-a)^2+(y-b)^2=\mathrm{r}^2 \qquad (2)$$

Bu markazi C(a;b) nuqtada bo′lib, radiusi r ga teng bo′lgan aylananing tenglamasidir. Agar $a=b=0$ bo′lsa $x^2+u^2=\mathrm{r}^2$. Bu markazi koordinatalar boshida yotgan aylananing tenglamasidir.

(2) tenglamadagi qavslarni ochsak,

$$x^2+u^2-2ax-2bu+a^2+b^2-\mathrm{r}^2=0,$$

ya'ni (1) ko′rinishdagi tenglamani olamiz. Oxirgi tenglamaga

$$\mathrm{D}=-2a; \qquad \mathrm{E}=-2b; \qquad \mathrm{F}=a^2+b^2-\mathrm{r}^2$$

belgilashlarni qo′yib, ushbu

$$x^2+u^2+Dx+Eu+F=0 \qquad (3)$$

aylananing umumiy ko′rinishdagi tenglamasi deb ataluvchi tenglamani olamiz.

Shunday qilib, ikkinchi tartibli (1) umumiy tenglama aylananing tenglamasi bo′lishi uchun x^2 va u^2 oldidagi koeffitsientlar teng va xy ko′paytma oldidagi koeffitsientning nolga teng bo′lishi zarur va etarlidir.

Masalan, $x^2+u^2-2x+3u+2=0$ tenglamani ko′ramiz. Bu tenglamada x va y qatnashgan hadlarni alohida–alohida guruhlab va to′la kvadrat ajratib, quyidagi aylana tenglamasini hosil qilish mumkin:

$$x^2-2x+1-1+u^2+3u+9/4-9/4+2=(x-1)^2+(u+3/2)^2-5/4=0$$

$$(x-1)^2+(u+3/2)^2=5/4$$

Bu markazi C(1,-3/2) nuqtada joylashgan va radiusi $r=\sqrt{5}/2$ bo′lgan aylana tenglamasidir.

Ellips va uning kanonik tenglamasi

TA'RIF: Ellips deb, har bir nuqtasidan berilgan ikki nuqtagacha (fokuslargacha) masofalarning yig’indisi o′zgarmas $2a$ soniga teng bo′lgan tekislik nuqtalarining geometrik o′rniga aytiladi.

Bu $2a$ o′zgarmas son fokuslar orasidagi $2c$ masofadan katta deb olinadi.

Biz F_1 va F_2 fokuslarni koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik qilib olamiz. Unda fokuslar $F_2(-c;0)$ va $F_1(c;0)$ koordinatalarga ega bo′ladi. Agar $M(x;y)$ ellipsda yotgan ixtiyoriy nuqta bo′lsa, unda ellips ta'rifiga asosan F_1M+F_2M yig’indi o′zgarmas son bo’lishi kerak, ya'ni

$$F_1M+F_2M=2a\,. \qquad (4)$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan

$$F_1M=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,, \qquad F_2M=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,.$$

Bu natijalarni (4)-tenglikka qo′yib, uni soddalashtiramiz:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

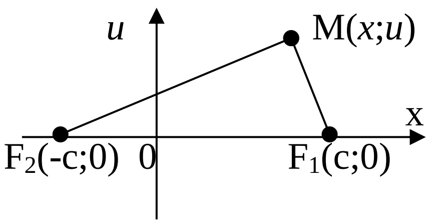
$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2$$

$$4a^2-4xs=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,; \qquad a^2-xs=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)=a^4-2a^2xc+x^2c^2$$

$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4+x^2c^2 \qquad (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \qquad (5)$$

F_1MF_2 uchburchakdan $MF_1+MF_2>F_1F_2$, undan esa $2a>2c$, $a>c$ bo′lishi kerakligi kelib chiqadi.



Natijada $a^2 - s^2 > 0$ bo′ladi va uni $a^2 - s^2 = b^2$ deb belgilab olish mumkin. Bu holda (5) tenglik $b^2x^2 + a^2u^2 = a^2b^2$ ko'rinishga keladi. Bu tenglamani a^2b^2 ga bo′lib, ushbu tenglamaga kelamiz:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (6)$$

Hosil bo′lgan tenglama ellipsning kanonik tenglamasi deyiladi.

Ellipsning shakli

Elippsning kanonik tenglamasiga asosan (x; u) nuqta ellipsda yotsa, u holda (-x; u), (-x; -u), (x; -u) nuqtalar ham unda yotadi. Shuning uchun ham koordinata o′qlari ellips uchun simmetriya o′qlari bo′lib hisoblanadi.

Ellipsning koordinata o′qlari bilan kesishgan nuqtalari ellipsning uchlari deyiladi. Ularni topish uchun (6) ga mos ravishda x=0 va y=0 qiymatlarni qo′yib, hosil bo′lgan tenglamalarni echamiz:

$$x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2 \Rightarrow y = \pm b,$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a.$$

Natijada ellipsning quyidagi to′rtta uchlari hosil bo′ladi:

$A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $V_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$

$A_1A_2=2a$ –ellipsning katta o′qi, $V_1V_2=2b$ - kichik o′qi, a va b esa uning yarim o′qlari deyiladi.

Kanonik tenglamadan

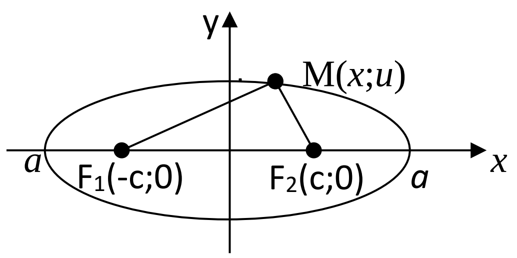
$$\frac{x^2}{a^2} \le 1 \Rightarrow x^2 \le a^2 \Rightarrow |x| \le a, \qquad \frac{y^2}{в^2} \le 1 \Rightarrow y^2 \le в^2 \Rightarrow |y| \le в,$$

natijalarni olamiz. Demak ellips chegaralangan egri chiziq bo′ladi

Koordinata o′qlari ellips uchun simmetriya chiziqlari ekanligidan uning shaklini faqat birinchi chorakda aniqlash kifoya. Unda $x \ge 0$, $u \ge 0$ bo′lgani uchun (6) tenglamadan

$$u = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

funktsiyani hosil qilamiz. Bu funktsiya uchun $x \in [0;a]$ bo′lib, x oshib borganda, y o′zgaruvchi b dan boshlab nolgacha kamayib boradi va ellipsning birinchi chorakdagi qismini hosil qiladi. Bu qismni simmetriya asosida davom ettirib, ellips shakli quyidagicha bo′lishini topamiz:



Ellipsning ekstsentrisiteti.

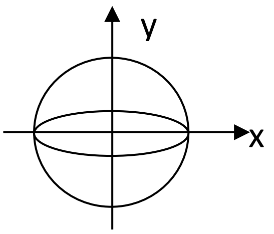
TA'RIF: Ellipsning fokuslari orasidagi $2c$ masofani uning katta o′qi uzunligi $2a$ ga nisbati ellipsning ekstsentrisiteti deb ataladi va ε kabi belgilanadi.

Ta'rifga asosan $\varepsilon=2s/2a=s/a$ va $s\in(0;a)$ bo′lgani uchun $0<\varepsilon<1$ qush tengsizlik o′rinli bo′ladi. Kanonik tenglama bo′yicha ε quyidagicha topiladi:

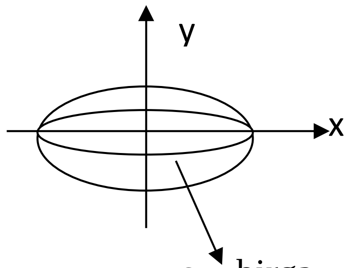
$$c=\sqrt{a^2-b^2}\Rightarrow\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

Bu erda $\varepsilon=0$ bo′lsa, $a=b$ bo′ladi va ellips aylanaga o′tadi. Demak aylana ellipsning xususiy holi bo′ladi.

ε birga yaqinlashgan sari ellips OX o′qiga yaqinlashadi, ya'ni b nolga yaqin bo′ladi.



ε = 0



ε - birga yakinlashganda

Ellips nuqtasining fokal radiuslari.

Ellipsning ixtiyoriy $M(x,u)$ nuqtasidan F_1 va F_2 fokuslarigacha bo′lgan r_1 va r_2 masofalar shu nuqtaning fokal radiuslari deyiladi. Ellips ta'rifiga asosan $r_1+r_2=2a$ bo′ladi. Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan

$$r_1=MF_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\quad r_2=MF_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,.$$

Bu fokal radiuslarni kvadratga ko′tarib ayirsak, u holda

$$r_2^2-r_1^2=4cx \text{ va } r_1+r_2=2a$$

tenglamalar sistemasi hosil bo′ladi va uni echib fokal radiuslar uchun quyidagi formulalarni olamiz:

$$r_1=a-\varepsilon x \qquad r_2=a+\varepsilon x$$

Ellipsning direktrisalari.

Ellipsning katta o′qiga perpendikulyar va kichik o′qiga parallel bo′lgan $x=\pm\ell$ $(\ell>0)$ to′g’ri chiziqlarni qaraymiz. Ellipsning ixtiyoriy $M(x;u)$ nuqtasidan shu nuqtaga yaqin $x=\pm\ell$ $(\ell>0)$ perpendikulyar to′g’ri chiziqqacha (d_1) hamda yaqin fokusigacha bo′lgan r_1 masofalar nisbatini olamiz:

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{a-\varepsilon x}{\lambda-x}=\varepsilon\,\frac{\frac{a}{\varepsilon}-x}{\lambda-x}$$

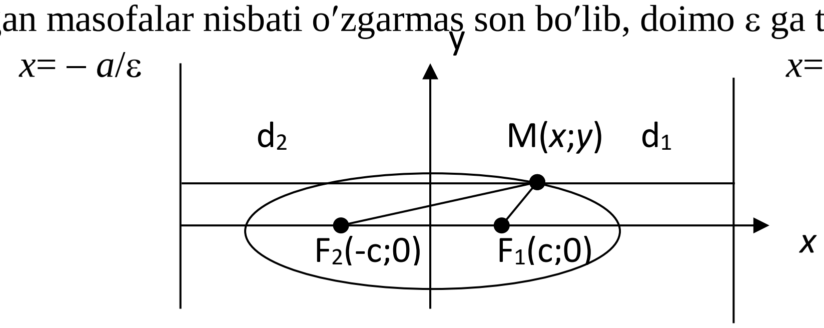
Agar ℓ sifatida $\ell=a/\varepsilon$ olinsa, u holda yuqoridagi nisbat o′zgarmas bo′lib, doimo ε ga teng bo′ladi. $M(x;y)$ nuqtadan $x=-\ell$ to′g’ri chizigigacha bo′lgan masofani

d_2 orqali belgilasak, u holda yuqoridagidek mulohazalar yuritib, $r_2/d_2 = \varepsilon$ tenglikni hosil qilamiz.

Ellips markazining chap va o'ng tomonida bir xil masofada joylashgan $x=\pm a/\varepsilon$ to′g'ri chiziqlariga ellipsning ***direktrisalari*** deyiladi.

Aylanada direktrisa bo′lmaydi, chunki unda $\varepsilon=0$.

Shunday qilib ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan fokusigacha va mos direktrisasigacha bo′lgan masofalar nisbati o′zgarmas son bo′lib, doimo ε ga teng bo′ladi.



Misol: $x^2+4u^2=4$ ellipsning barcha xarakteristikalarini toping.

Echish: Dastlab ellipsning kanonik tenglamasini hosil qilamiz:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1, \Rightarrow a^2=4;\ \ b^2=1 \Rightarrow c^2= a^2-b^2 = 3.$$

Unda fokuslar $F_1(-\sqrt{3},0)$ va $F_2(\sqrt{3},0)$, yarim o′qlar $a=2$ va $b=1$ bo′ladi. Bulardan ekstsentrisitet va direktrisalarni topamiz:

$$\varepsilon=\frac{c}{\mathrm{a}}=\frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \mathrm{x}=\pm\frac{\mathrm{a}}{\varepsilon}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Fokal radiuslar $r_1=2-\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ r_2=2+\frac{\sqrt{3}}{2}x$ formulalar bilan topiladi

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. Ikkinchi darajali tenglamaning umumiy ko′rinishi qanday bo′ladiq
2. Aylananing umumiy tenglamasini yozing va u bo′yicha aylana markazi hamda radiusi qanday topilishini ko′rsating.
3. Ellips qanday ta'riflanadiq
4. Ellipsning kanonik tenglamasini yozing va undagi parametrlar ma'nosini ko′rsating.
5. Ellipsning ekstsentrisiteti qanday aniqlanadi va u nimani ifodalaydiq
6. Ellipsning fokal radiuslari deb nimaga aytiladi va ular qanday topiladiq
7. Ellips direktrisalari deb nimaga aytiladiq

3.5.GIPERBOLA VA PARABOLA.

Tayanch iboralar: giperbola ta'rifi, giperbolaning kanonik tenglamasi, fokus, o′q, asimptota, ekstsentrisitet, direktrisa, fokal radius, parabola ta'rifi, kanonik tenglamasi, parabola fokusi va uning xossasi, parabola ekstsentrisiteti.

Re j a:

1. Giperbola va uning kanonik tenglamasi.
2. Giperbola grafigi va asimptotalari.
3. Giperbola ekstsentrisiteti, direktrisalari va fokal radiuslari.
4. Parabola va uning kanonik tenglamasi.
5. Parabola grafigi va ekstsentrisiteti.

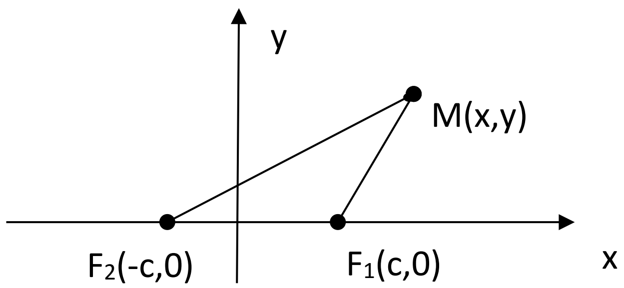
Adabiyotlar:

[1] I bob, §35-36 [3] VII bob, §4-5

TA'RIF: Giperbola deb, fokuslar deb ataluvchi ikki nuqtagacha masofalarining ayirmasi o′zgarmas $2a$ songa teng bo′lgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o′rniga aytiladi.

Bu o′zgarmas $2a$ soni fokuslar orasidagi $2c$ masofadan kichik bo′lishi kerak.

Fokuslarni koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik qilib olamiz. Unda ularni $F_1(c,0)$ va $F_2(-c,0)$ deb ifodalash mumkin. $M(x,y)$ giperboladagi ixtiyoriy bir nuqta bo′lsin.



Ta'rifdan foydalanib giperbola tenglamasini chiqaramiz. Ta'rifga asosan $|F_2M|-|F_1M| = 2a$ bo′ladi. Bu erda

$$|F_2M|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad |MF_1|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

va bu masofalarni yuqoridagi tenglikka qo′yib, soddalashtiramiz:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2 \Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=cx-a^2$$

$$a^2(x-c)^2+a^2y^2=c^2x^2-2cx\,a^2+a^4$$

$$a^2x^2-2cx\,a^2+a^2s^2+a^2y^2=c^2x^2-2cx\,a^2+a^4$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^4-a^2s^2 \Rightarrow (c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(s^2-a^2).$$

F_1MF_2 uchburchakdan $|F_2M|-|F_1M|<|F_1F_2| \Rightarrow 2a<2c \Rightarrow a<c$ bo′lgani uchun $v^2=s^2-a^2$ deb belgilash mumkin va oxirgi tenglikni unga bo′lib, ushbu tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{в^2}=1 \qquad (1)$$

Bu tenglamaga giperbolaning kanonik tenglamasi deyiladi.

Ellipsdagidek bu erda ham $r_2=|F_2M|$ va $r_1=|F_1M|$ giperbolaning fokal radiuslari deyiladi.

Giperbolaning koordinata o′qlari bilan kesishgan nuqtalarini topamiz:

$$u=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x^2=a^2 \Rightarrow \quad x=\pm a$$

Agar x=0 desak, u holda $u^2=-v^2 \Rightarrow u\in\varnothing$ bo′lib, giperbolani OY o′qi bilan kesishmasligiga ishonch hosil qilamiz. Shunday qilib, giperbolani OX o′qidagi kesishish nuqtalari $A_2(a;0)$ va $A_1(-a;0)$ bo′lib, ular ***giperbolaning uchlari*** deyiladi. Giperbola uchlari orasidagi $2a$ masofani giperbolaning ***haqiqiy o′qi*** va $V_2(0;\, v)$, $V_1(0;-v)$ nuqtalar orasidagi $2v$ masofani esa giperbolaning ***mavhum o'qi*** deb ataladi. Mos ravishda a va v sonlariga giperbolaning yarim ***haqiqiy*** va ***yarim mavhum*** o′qlari deyiladi. O′qlarning o′rta nuqtasi giperbolaning markazi deyiladi.

Giperbolaning shakli.

Agar (x,u) giperbolada yotgan nuqta bo′lsa, u holda, $(\pm x, \pm u)$ nuqtalar ham giperbolaga tegishli bo′ladi, ya'ni giperbola koordinata o′qlariga nisbatan simmetrikdir.

Giperbolaning kanonik tenglamasidan

$$\frac{x^2}{a^2}\geq 1 \Rightarrow x^2\geq a^2 \Rightarrow \quad |x|\geq a.$$

Agar yuqoridagidek, faqat birinchi chorak bilan kifoyalansak, u holda

$$u=\frac{в}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

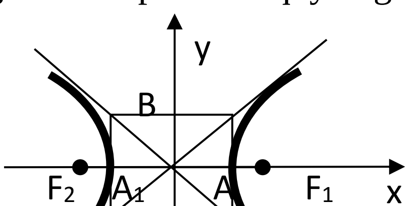
funktsiyada x o′zgaruvchi a dan ∞ gacha o′zgarib borganda, u o′zgaruvchi v dan ∞ gacha o′sadi, ya'ni giperbola chegaralanmagan egri chiziqdir. I chorakdagi giperbola grafigini simmetriya bo′yicha davom ettirib, giperbola ikkita bo'lakdan iborat egri chiziq bo′lishini ko′ramiz. Bu bo′laklar giperbolaning shoxlari deb ataladi.

Giperbolaning asimptotalari.

TA'RIF: Berilgan egri chiziq asimptotaga ega deyiladi, agarda shunday l to′g'ri chiziq mavjud bo′lsaki, egri chiziq bu to′g'ri chiziqqa cheksiz yaqinlashib borsa.

Giperbolaning $A_1A=2a$ va $VV_1=2v$ o′qlaridan yasalgan to′g'ri to′rtburchak diaganallari yotgan to′g'ri chiziqlar giperbolaning asimptotalari bo′lishini ko′rsatish mumkin.

Giperbolaning grafigi va asimptotalari quyidagi chizmada ko′rsatilgan:



Asimptotalarning tenglamalari quyidagi ko′rinishga ega:

$$y = \pm \frac{b}{a} x \qquad (2)$$

Agarda a=v bo′lsa, giperbola teng yonli deyiladi. Unda u=±x asimptotalarni koordinata o′qlari sifatida olsak, giperbola tenglamasi bizga maktabdan tanish bo′lgan $x{\cdot}u$=k⇒u=k/x ko′rinishga keladi.

M i s o l. a=3 va v=2 ga teng bo′lsa, giperbola va uning asimptotalari tenglamasi yozilsin.

E ch i sh : Giperbolaning (1) kanonik tenglamasi va (2) asimptotalar tenglamasiga asosan ushbu natijalarni olamiz:

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1, \qquad y = \pm \frac{2}{3} x$$

Giperbolaning ekstsentrisiteti.

TA'RIF: Giperbolani fokuslari orasidagi 2c masofani uning haqiqiy o′qi uzunligi 2a ga nisbati giperbolaning ***ekstsentrisiteti*** deyiladi va ε kabi belgilanadi.

Ta'rifga va kanonik tenglamaga asosan

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1+(\frac{b}{a})^2} > 1. \qquad (3)$$

Agar a parametr b ga nisbatan kichik bo′lsa, giperbolaning shoxlari OX o′qiga qarab siqiq bo’ladi, v qancha a ga yaqin bo’lsa uning shoxlari shuncha yoyiq bo’ladi.

Giperbolaning M nuqtasidan F1 va F2 fokuslarigacha bo’lgan masofalar shu nuqtaning fokal radiuslari deyiladi.

Ellipsning fokal radiuslarini topish yo′lidan foydalanib, giperbolaning fokal radiuslarini topamiz:

r_1= -a+εx, r_2=a+εx (o′ng shox uchun), r_1=a - εx, r_2= -a-εx (chap shox uchun)

Mi s o l : x^2 / 16 – u^2 / 9=1 giperbolaning abtsissasi 8 ga teng, ordinatasi musbat bo’lgan nuqtasining fokal radiuslari hisoblansin.

E ch i sh : Masala sharti va (3) formulaga asosan

$$x=8,\ y>0,\ a=4,\ b=3,\ c=\sqrt{16+9}=5,\ \ \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$$

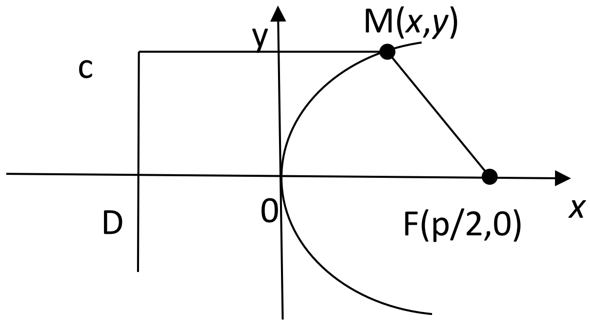
va (4) formulaga asosan ung shox fokal radiuslari

$$r_1=-a+\varepsilon x=-4+{}^5/_4\cdot 8=6, \qquad r_2=a+\varepsilon x=4+{}^5/_4\cdot 8=14$$

Giperbolaning direktrisalari.

TA'RIF: Giperbolaning direktrisalari deb uning markazidan ±a/ε masofada o′tib, fokal o′qiga perpendikulyar bo′lgan to′g'ri chiziqlarga aytiladi.
Ta'rifga asosan direktrisa tenglamalari $x=\pm a/\varepsilon$ bo′ladi.
Ektsentrisitet ε>1 bo′lgani uchun $a/\varepsilon<a$. Demak direktrisa O markaz bilan A_1 va A uchlar orasidan o′tadi.
TEOREMA: Giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan fokusigacha masofaning mos direktrisagacha masofasining nisbati o′zgarmas bo′lib, ε ektsentrisitetga teng bo′ladi, ya'ni r/d=ε.
Teoremani isbotini o′quvchiga xavola qilamiz.

TA'RIF: Parabola deb, har bir nuqtasidan berilgan nuqtagacha (fokusigacha) va berilgan to′g'ri chiziqqacha (direktrisagacha) masofalari o′zaro teng bo′lgan tekislik nuqtalarining geometrik o′rniga aytiladi.
Bunda direktrisa fokusdan o′tmasligi kerak.
Parabola tenglamasini topish uchun F fokus va *l* direktrisa orasidagi masofani FD=p, koordinata boshini ular o′rtasida deb olamiz. Unda fokus F(p/2,0), direktrisa tenglamasi x=-r/2 bo′ladi. Parabolaga tegishli ixtiyoriy M(x,y) nuqtani olamiz.



Ta'rifga ko'ra SM=MF va

$$MF=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},CM=\left|x+\frac{p}{2}\right|$$

bo′lgani uchun quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|\Rightarrow x^2-xp+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+xp+\frac{p^2}{4}\Rightarrow y^2=2px \quad (5)$$

Hosil bo′lgan (5) tenglama parabolaning ***kanonik tenglamasi*** deyiladi. Bu parabola OX o′qiga nisbatan simmetrik bo′ladi va p parabolaning parametri deyiladi.
Parabolaning ixtiyoriy M nuqtasidan direktirisagacha bo′lgan masofa SM=d, fokusigacha bo′lgan masofa FM=r deb belgilasak, ta'rifga asosan r=d va parabolaning ekstsentrisiteti ε=r⁄d =1 bo′ladi. Parabola uchun direktirisa tenglamasi x=-p/2, bo′ladi.
M i s o l: OX o′qi parabolaning simmetriya o′qi, uning uchi koordinatalar boshida yotadi. Parabola uchidan fokusigacha bo′lgan masofa 4 birlikka teng. Parabola tenglamasini tuzing.
Echish: Masala shartiga va (5) formulaga asosan

$OF=4 \Rightarrow r/2=4 \Rightarrow r=8 \Rightarrow y^2=2rx \Rightarrow u^2=2\cdot 8x=16x.$

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. Giperbola qanday ta'riflanadiq
2. Giperbolaning kanonik tenglamasi qanday ko’rinishda bo’ladiq
3. Giperbola kanonik tenglamasidagi parametrlar nimani ifodalaydiq
4. Giperbola asimptotalari qanday tenglama bilan ifodalanadiq
5. Giperbola ekstsentrisiteti deb nimaga aytiladi va u qanday qiymatlar qabul qila oladiq
6. Giperbolaning fokal radiuslari deb nimaga aytiladi va ular qanday topiladiq
7. Giperbola direktrisalari qanday xossaga egaq
8. Parabola qanday ta'riflanadiq
9. Parabolaning kanonik tenglamasi qanday ko’rinishda bo’′ladiq
10. Parabolaning ekstsentrisiteti nimaga tengq
11. Parabola kanonik tenglamasidan uning fokusi va direktrisasi qanday topiladiq

IV BOB. FAZODA ANALITIK GEOMETRIYA

4.1.FAZODA TEKISLIK TENGLAMALARI.

Tayanch iboralar: tekislikning vektor tenglamasi, normal tenglamasi, umumiy tenglamasi, tekislikning normal vektori, tekislikning kesmalardagi tenglamasi.

Re j a s i :

1. Tekislik va uning vektor tenglamasi.
2. Tekislikning normal tenglamasi.
3. Tekislikning umumiy tenglamasi.
4. Tekislikning normal vektori va uni topish.
5. Tekislik umumiy tenglamasini taxlil etish.
6. Tekislikning kesmalardagi tenglamasi.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §14-15 [3] VI bob, §1-2 [14]. 119-120 betlar.

Fazodagi xar bir M nuqta uchta x,y,z koordinatalar bilan aniqlanadi. Shu sababli fazodagi geometrik ob'ekt tenglamasi uch o′zgaruvchili, ya'ni F(x,y,z) = 0 ko′rinishda bo′ladi.
Fazoda eng asosiy geometrik obe'ktlardan biri bo′lib tekislik hisoblanadi. Uning tenglamasi quyidagi teorema bilan aniqlanadi.
TEOREMA: 1)Agarda fazoda tekislik berilgan bo′lsa, uning tenglamasi uch o′zgaruvchili chiziqli tenglamadan iborat bo′ladi.
2) Fazoda uch noma'lumli chiziqli tenglama berilgan bo′lsa, bu tenglama biror tekislikni aniqlaydi.
ISBOT: 1) Faraz qilaylik fazoda qandaydir tekislik berilgan bo′lsin. Uni uch o′zgaruvchili bitta chiziqli tenglama ifodalashini ko′rsatamiz.

Dekart koordinatalar sistemasida berilgan tekislikni ixtiyoriy bir nuqtasini M(x;y;z), uning radius-vektorini **r** kabi belgilaymiz. Tekislikdagi boshqa bir T(x_0;y_0;z_0) nuqtadan koordinatalar boshigacha bo′lgan masofani **r** orkali belgilaymiz, ya'ni OT=r. OT perpendikulyar ustida tekislikka yo′nalgan $\mathbf{n}^0$ birlik vektorni olamiz. M(x;y;z) nuqta tekislikning istalgan nuqtasi bo′lsa ham **OM**=**r** radius–vektorning birlik $\mathbf{n}^0$ vektorga proektsiyasi o′zgarmas bo′lib, **r** masofaga teng. Bundan

$$np_{\vec{n}^0}\overrightarrow{OM}=p \quad \text{ва} \quad np_{\vec{n}^0}\overrightarrow{OM}=\vec{r}\vec{n}^0 \Rightarrow \vec{r}\vec{n}^0-p=0 \qquad (1)$$

natijani olamiz. Hosil qilingan (1) tenglama tekislikning ***vektor tenglamasi*** deyiladi. Agarda

$$\mathbf{r}=(x;y;z), \quad \mathbf{n}^0=(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$$

deb olsak, skalyar ko′paytmaning koordinatalaridagi ifodasidan

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \qquad (2)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tekislikning ***normal tenglamasi*** deyiladi. Undan har qanday tekislikka chiziqli uch noma'lumli tenglama mos kelishini ko′ramiz.

2) Aytaylik bizga

$$Ax+Vu+Sz+D=0 \qquad (3)$$

uch noma'lumli chiziqli tenglama berilgan bo′lsin. Agar M(x;y;z) (3) tenglama aniqlaydigan sirtning ixtiyoriy nuqtasi bo′lsa, uning radius–vektori **r**=(x;y;z) va yordamchi ***p*=**(A;V;S) o′zgarmas vektorni kiritaylik. Bo’lardan foydalanib (3) tenglamani skalyar ko′paytma yordamida quyidagicha ifodalaymiz:

$$\mathbf{nr}+D=0 \qquad (4)$$

(3) tenglamani |**n**| ga bo′lamiz. Natijada quyidagi xollar kuzatiladi:

I. Agar D<0 bo′lsa, u holda $\mathbf{n^0r}+D/|\mathbf{n}|=0$ va $r= -D/|\mathbf{n}|$ desak, $\mathbf{rn^0}-p=0$ vektor tenglamani olamiz. Bu tenglamani qanoatlantiruvchi barcha M(x;y;z) nuqtalarning geometrik o′rni, (1) ga asosan, tekislikdan iborat bo′ladi.

II. Agar D>0 bo′lsa, (4) ni -|**n**| ga bo′lamiz va yana $r = D/|\mathbf{n}|$ desak, $\mathbf{r\,(-n^0)}-p=0$ vektor tenglamani olamiz.

III. Agar D=0 bo′lsa, u holda (4) ni |**n**| yoki-|**n**| ga bo′lib, $\mathbf{rn^0}=0$ vektor tenglamani hosil qilamiz.

Demak, (3) tenglamadan (1) tenglama kelib chiqadi va bundan o’nga fazoda tekislik mos kelishi isbotlanadi.

(3) ko′rinishdagi tenglamaga tekislikning ***umumiy tenglamasi*** deyiladi.

Aytaylik M(x;y;z) tekislikning ixtiyoriy va $M_1(x_1;y_1;z_1)$ esa uning ma'lum bir nuqtasi bo′lsin. U holda bu nuqtalar tekislik umumiy tenglamasini qanoatlantiradi, ya'ni

$$Ax+Vu+Sz+D=0$$
$$Ax_1+Vu_1+Sz_1+D=0.$$

Ularni birinchisidan ikkinchisini ayirsak,

$$A(x-x_1)+V(u-u_1)+S(z-z_1)=0. \qquad (5)$$

Bu berilgan M_1 nuqtadan o′tuvchi ***tekisliklar dastasining tenglamasi*** bo′ladi. (5) tenglama **n**=(A;V;S) va $\mathbf{M_1M}=(x-x_1;\ u-u_1;\ z-z_1)$ vektorlarning ortogonallik shartini ifodalaydi.

Tekislikka perpendikulyar bo′lgan ixtiyoriy noldan farqli vektor shu tekislikning ***normali*** deb ataladi.

$\mathbf{M_1M}$ vektor tekislikda yotganligi sababli, **n** vektor ham shu tekislikning normallaridan biridir. Demak (3) yoki (5) tenglamadagi o′zgaruvchilarning oldidagi A, B, C koeffitsientlar orqali hosil qilingan **n(A,V,S)** tekislikning normallaridan biri ekan.

Shunday qilib normal tenglama (3) tenglamaning xususiy xoli bo′ladi. Tekislikning umumiy tenglamasidan normal tenglamasiga o′tish uchun (3) ni

$$M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

soniga ko′paytirish kerak (M va D ning ishoralari qarama – qarshi bo′lishi kerak). Natijada ushbu tenglamaga kelamiz:

MAx+MVu+MSz+MD=0

Bunda M ***normallashtiruvchi ko'paytuvchi*** deyiladi.

MA=cosα, MB=cosβ, MC=cosγ, MD= –p

ekanligini hisobga olsak, normal tenglamani topish uchun quyidagilarga ega bo′lamiz:

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad \cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad p = \mu\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Misol: Tekislikning 2x-u+2z-5=0 umumiy tenglamasini normal tenglama ko′rinishga keltiring.

Echish: Normallashtiruvchi ko′paytuvchini topamiz va uni berilgan tenglamaga ko′paytiramiz:

$$M=\frac{1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z-\frac{5}{3}=0$$

Tekislikning umumiy tenglamasini tekshirish.

Tekislikning umumiy tenglamasi

Ax+Vu+Sz+D=0

berilgan bo′lsin. Ma'lumki bunda A,B,C koeffitsientlarning kamida bittasi noldan farqli bo′lishi kerak, ya'ni tekislikning normali **n**=A***i***+B***j***+C***k*** nol vektor bo′lmasligi kerak.

Quyida umumiy tenglama unda qatnashayotgan koeffitsientlarning turli qiymatlarida qanday tekisliklarni ifodalanishini ko′rib o′tamiz.

1. D=0⇒ Ax+Vu+Sz=0 - tekislik koordinatalar boshidan o′tadi.
2. A=0⇒ Vu+Sz+D=0 - tekislik OX o′qiga parallel bo′ladi.
3. V=0⇒ Ax+Sz+D=0 - tekislik OY o′qiga parallel bo′ladi.
4. S=0⇒ Ax+Vu+D=0 - tekislik OZ o′qiga parallel bo′ladi.
5. A=0 , D=0⇒ Vu+Sz=0 - tekislik OX o′qidan o′tadi.
6. V=0 , D=0⇒ Ax+Sz=0 - tekislik OY o′qidan o′tadi.
7. S=0, D=0⇒ Ax+Vu=0 - tekislik OZ o′qidan o′tadi.
8. A=0, V=0⇒ Sz+D=0⇒Z=-D/S - tekislik XOY tekisligiga parallel bo′ladi.
9. A=0, S=0⇒ Vu+D=0⇒u=-D/V - tekislikXOZ tekisligiga parallel bo′ladi.
10. V=0, S=0⇒Ax+D=0⇒ x=-D/A - tekislik UOZ tekisligiga parallel bo′ladi.
11. A=0, V=0, D=0⇒Sz=0 - XOY tekisligi hosil bo′ladi.
12. A=0, S=0, D=0⇒Vu=0 - XOZ tekisligi hosil bo′ladi.
13. V=0, S=0, D=0⇒ Ax=0 - YOZ tekisligi hosil bo′ladi.

Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi.

Fazoda koordinatalar boshidan o′tmaydigan va koordinata o′qlarini mos ravishda *a*, *v* va *s* nuqtalarda kesib o′tuvchi tekislik tenglamasini tuzamiz. Buning uchun tekislikning umumiy

$$Ax+Vu+Sz+D=0$$

tenglamasidan foydalanamiz. Bu erda A,B,C,D koeffitsientlarni quyidagi mulohazalardan topamiz. Tekislik (a;0;0), (0;v,0) va (0;0; s) nuqtalardan o′tganligi uchun, ularning koordinatalari umumiy tenglamani qanoatlantiradi, ya'ni

$$\begin{array}{lll} Aa+D=0 & A=-D/a & a=-D/A \\ Vv+D=0 \quad\Rightarrow & V=-D/v \quad\Rightarrow & v=-D/V \\ Cc+D=0 & S=-D/c & c=-D/S\ . \end{array}$$

Koeffitsientlarning topilgan qiymatlarini tenglamaga qo′ysak, u holda

$$-D\frac{x}{a}-D\frac{y}{в}-D\cdot\frac{z}{c}+D=0$$

va hosil bo′lgan bu tenglamani (-D) ga bo′lsak hamda ixchamlasak, u holda

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{в}+\frac{z}{c}=1 \qquad (1)$$

(1) tekislikning ***kesmalarga nisbatan tenglamasi*** deyiladi.

M i s o l: 3x-4u+z-5 =0 tekislik tenglamasini kesmalarga nisbatan ko′rinishga keltiring.

E ch i sh : Yuqoridagidek mulohaza yuritib *a*, *v*, *s* larni topish mumkin:

$$a=-\frac{D}{A}=\frac{5}{3};b=-\frac{D}{B}=-\frac{5}{4};c=-\frac{D}{C}=+\frac{5}{1}=5$$

Demak tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi

$$\frac{x}{5/3}+\frac{y}{-5/4}+\frac{z}{5}=1$$

ekanligi kelib chiqadi.

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. Tekislikning vektor tenglamasi qanday ko′rinishda bo′ladiq
2. Tekislikning normal tenglamasini yozing va undagi parametrlar ma'nosini ko′rsating.
3. Tekislikning umumiy tenglamasi qanday ko′rinishda bo′ladiq
4. Tekislikning normal vektori deb nimaga aytiladiq
5. Tekislik umumiy tenglamasidan uning normal vektori qanday topiladiq
6. Tekislikning umumiy tenglamasidan normal tenglamasiga qanday o′tiladiq
7. Tekislikning umumiy tenglamasida ba'zi parametrlar nol bo′lganda hosil bo′ladigan tekisliklarni aniqlang.
8. Tekislikning kesmalardagi tenglamasi qanday ko′rinishda bo′ladiq
9. Tekislikning kesmalardagi tenglamasidagi parametrlar qanday ma'noga ega bo′ladiq

4.2. TEKISLIK TENGLAMALARIGA DOIR MASALALAR.

Tayanch iboralar: berilgan nuqtadan o′tuvchi tekisliklar tenglamasi, uchta nuqtadan o′tuvchi tekislik tenglamasi, tekisliklar orasidagi burchak, tekisliklarni perpendikulyarlik va parallellik sharti, nuqtadan tekislikkacha masofa.

R e j a:

1. Berilgan nuqtadan o′tuvchi tekisliklar tenglamasi.
2. Berilgan uchta nuqtadan o′tuvchi tekislik tenglamasi.
3. Ikki tekislik orasidagi burchak.
4. Tekisliklarning perpendikulyarlik va parallellik sharti.
5. Uchta tekislikning kesishish nuqtasi.
6. Nuqtadan tekislikkacha bo′lgan masofa.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §16-19 [3] VI bob, §3-4 [14]. 119-120 betlar.

1. Berilgan nuqtadan o′tuvchi tekisliklar tenglamasi.

Aytaylik tekislik berilgan M_1 (x_1; u_1 ; z_1) nuqtadan utsin va uning tenglamasi ko′rinishini topish talab etilsin. Izlanayotgan tekislikning umumiy tenglamasini qaraymiz:

$$Ax+Vu+Sz+D=0$$

M_1 nuqta tekislikda yotgani uchun bu tenglamani qanoatlantirishi kerak:

$$Ax_1+Vu_1+Sz_1+D=0$$

Hosil bo′lgan bu tenglikni yuqoridagi tenglamadan ayirib, izlangan

$$A(x-x_1)+V(u-u_1)+S(z-z_1)=0 ,$$

ya'ni berilgan M_1 nuqtadan o′tuvchi tekisliklar tenglamasini hosil qilamiz. Undagi koeffitsientlarga turli qiymatlar berib, M_1 nuqtadan o′tuvchi tekisliklar dastasini olamiz.

2. Berilgan uchta nuqtadan o′tuvchi tekislik tenglamasi.

Fazoda uchta nuqta $M_1(x_1,u_1,z_1)$, $M_2(x_2,u_2,z_2)$, $M_3(x_3,u_3,z_3)$ berilgan bo′lib, ulardan o′tuvchi tekislik tenglamasini topish talab qilingan bo′lsin. Bu nuqtalarga mos keluvchi radius-vektorlarni mos ravishda

$$\vec{r}_1\{x_1;y_1;z_1\},\vec{r}_2\{x_2;y_2;z_2\},\vec{r}_3\{x_3;y_3;z_3\}$$

kabi belgilaymiz.

Agar tekislikning ixtiyoriy M(x,u,z) o’zgaruvchi nuqtasiga mos keluvchi radius-vektorni $\vec{r}=\{x;y;z\}$ desak, u holda $\bar{r}-\bar{r}_1,\bar{r}_2-\bar{r}_1,\bar{r}_3-\bar{r}_1$ uchta vektor qaralayotgan bitta tekislikda yotadi. Vektorlarning komplanarlik shartiga asosan ularning aralash ko′paytmasi nolga teng bo′ladi:

$$[(\bar{r} - \bar{r}_1) \times (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)](\bar{r}_3 - \bar{r}_1) = 0$$

Bu berilgan uchta nuqtadan o′tuvchi tekislikning vektor ko′rinishli tenglamasi bo′ladi. Bu aralash ko′paytmani vektorlarning koordinatalari orqali ifodalab,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

ya'ni berilgan uchta nuqtadan o′tuvchi tekislikning koordinatalar ko′rinishidagi tenglamasini hosil qilamiz.

Berilgan uchta nuqtadan o′tuvchi tekislik tenglamasini boshqacha, vektorlardan foydalanmasdan ham chiqarish mumkin.

Darxaqiqat, berilgan nuqtalarning biridan, masalan, $M_1(x_1;u_1;z_1)$ nuqtadan o′tgan tekislik tenglamasini yozamiz:

$$A(x-x_1)+V(u-u_1)+S(z-z_1) = 0 \qquad (1)$$

Shartga ko′ra bu tenglamani ikkinchi $M_2(x_2;u_2;z_2)$ va uchinchi $M_3(x_3;u_3;z_3)$ nuqtalar ham qanoatlantirishi kerak, ya'ni

$$A(x_2-x_1)+V(u_2-u_1)+S(z_2-z_1) = 0$$
$$A(x_3-x_1)+V(u_3-u_1)+S(z_3-z_1) = 0.$$

Agar oxirgi tenglamalarni C ga bo′lsak va hosil bo′lgan

$$\begin{cases} A(x_2-x_1)/C+V(u_2-u_1)/C+(z_2-z_1) = 0 \\ A(x_3-x_1)/C+V(u_3-u_1)/C+(z_3-z_1) = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan A/C va B/C nisbatlarini topib, (1) tenglamaga qo′ysak, u holda uch nuqtadan o′tuvchi tekislik tenglamasi hosil bo′ladi.

M i s o l : Berilgan (1;2;3), (-1;0;0) va (3;0;1) nuqtalardan o′tuvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

E ch i sh : Birinchi usulga ko′ra

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-4(x-1)+6(u-2) - 4(z-3) - 4(z-3)+4(u-2)+6(x-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x-1)+10(u-2)-8(z-3)=0 \Rightarrow (x-1)+5(u-2)-4(z-3)=0.$$

Bu erda o′xshash hadlarni ixchamlab, izlanayotgan tekislikning tenglamasini hosil qilamiz:

$$x + 5u - 4z + 1 = 0$$

4. Tekisliklar orasidagi burchak. Tekisliklarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

Ikkita tekislik o′zlarining

$$A_1x + V_1u + S_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + V_2u + S_2z + D_2 = 0$$

umumiy tenglamalari bilan berilgan bo′lsin. Ular orasidagi ikki yokli α burchakni topish masalasini tekisliklarning mos $\overline{n}_1\{A_1,B_1,C_1\}$ va $\overline{n}_2\{A_2,B_2,C_2\}$ normallari orasidagi burchakni topish masalasiga keltirish mumkin. Fazodagi ikki vektor orasidagi burchak formulasiga asosan

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (2)$$

Agar yukorida keltirilgan tekisliklar perpendikulyar bo′lsa, u holda $\overline{n}_1$ va $\overline{n}_2$ vektorlar ham ortogonal bo′ladi. Natijada

$$\overline{n}_1\,\overline{n}_2 = 0 \Rightarrow A_1A_2 + V_1V_2 + S_1S_2 = 0 \qquad (3)$$

Bu tekisliklarning perpendikulyarlik shartini ifodalaydi.

Xuddi shunday ravishda tekisliklarning parallellik sharti ularning normallarini kolleniarlik shartidan kelib chiqadi, ya'ni

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (4)$$

__1–masala:__ Berilgan tekislikka parallel va berilgan nuqtadan o′tuvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

__Echish:__ Berilgan nuqta $M_1(x_1; u_1; z_1)$ va berilgan tekislik tenglamasi

$$A_1x + V_1u + S_1z + D_1 = 0$$

bo′lsin. U holda M_1 nuqtadan o′tuvchi ixtiyoriy tekislik tenglamasi

$$A(x-x_1) + V(u-u_1) + S(z-z_1) = 0$$

ko′rinishga ega bo′ladi. Undagi koeffitsientlarni tekisliklarning paralellik shartidan, ya'ni (4) nisbatlar tengligidan topiladi.

Masalan, $A=A_1$, $B=B_1$, $C=C_1$ deb olsak, nisbatlar birga teng bo′ladi va izlanayotgan tekislik tenglamasini hosil qilamiz:

$$A_1(x-x_1) + V_1(u-u_1) + S_1(z-z_1) = 0 \qquad (5).$$

__2-masala:__ Berilgan $M_1(x_1; u_1; z_1)$ va $M_2(x_2; u_2; z_2)$ nuqtalardan o′tuvchi va tenglamasi $A_1x + V_1u + S_1z + D_1 = 0$ bo′lgan tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasi tuzilsin.

__E ch i sh :__ M_1 nuqtadan o′tuvchi tekislik tenglamasini yozamiz:

$$A(x-x_1)+V(u-u_1)+S(z-z_1) = 0 \Rightarrow \frac{A}{C}(x - x_1) + \frac{B}{C}(y - y_1) + (z - z_1) = 0$$

Bu tenglamani M_2 nuqta ham qanoatlantirishi hamda tekisliklarning perpendikulyarlik shartidan ushbu sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} A(x_2-x_1)+V(u_2-u_1)+S(z_2-z_1)=0 \\ A_1A+V_1V+S_1S=0 \end{cases}$$

Bu sistema tenglamalarini C ga bo′lib, hosil bo′lgan

$$\frac{A}{C}(x-x_1)+\frac{B}{C}(y-y_1)+(z-z_1)=0$$

$$\frac{A}{C}A_1+\frac{B}{C}V_1+S_1=0$$

sistemadan A/C va B/S nisbatlarni topamiz. Topilgan nisbatlarning qiymatlarini yuqoridagi tenglamaga qo′yib, izlanayotgan tekislik tenglamasini hosil qilamiz.

3-masala: Berilgan uchta tekislikning kesishish nuqtasini toping.

Echish: Tekisliklarning kesishish nuqtasi ularning uchalasiga ham tegishli bo′lgani uchun, uning x,y,z koordinatalarini topish uchun berilgan tekisliklarning umumiy tenglamalarini sistema qilib echamiz:

$$\begin{cases} A_1x + V_1u + S_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + V_2u + S_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + V_3u + S_3z + D_3 = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

4-masala: Berilgan $M_1(x_1;\ u_1;\ z_1;)$ nuqtadan umumiy tenglamasi

$$A_1x + V_1u + S_1z + D_1 = 0$$

bilan berilgan tekislikkacha bo′lgan d masofani toping.

Echish: Izlangan masofa tekislikning normal tenglamasi orqali quyidagi formula bilan hisoblanishini ko′rsatish mumkin:

$$d=\pm(x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p). \qquad (7)$$

Bundagi $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ yunaltiruvchi kosinuslarni va r parametrni topish uchun berilgan umumiy tenglamani normallashtiruvchi ko′paytuvchiga ko′paytirib, ushbu formulani hosil qilamiz:

$$d=\frac{|A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}. \qquad (8)$$

M i s o l: N(1;2;3) nuqtadan 2x-2u+z-3=0 tenglama bilan ifodalanuvchi tekislikkacha bo′lgan masofani toping.

Echish: (8) formulaga asosan izlangan masofani topamiz:

$$d=\frac{|2\cdot1+(-2)\cdot2+1\cdot3+(-3)|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{2}{3}.$$

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. Berilgan nuqtadan o′tuvchi tekisliklar tenglamasini yozing.
2. Berilgan uchta nuqtadan o′tuvchi tekislik tenglamasi qanday topiladiq
3. Ikki tekislik orasidagi burchak qanday topiladiq
4. Ikki tekislikning perpendikulyarlik sharti nimadan iboratq
5. Ikki tekislikning parallellik sharti nimadan iboratq
6. Uchta tekislikning kesishish nuqtasi qanday topiladiq
7. Nuqtadan tekislikkacha bo′lgan masofa qanday topiladiq

4.3.FAZODAGI TO′GRI CHIZIK TENGLAMALARI.

Tayanch iboralar: yo′naltiruvchi vektor, boshlang′ich nuqta, to′g′ri chiziqning vektor tenglamasi, kanonik tenglamasi, parametrik tenglamasi, umumiy tenglamasi, fazodagi ikki to′g′ri chiziq orasidagi burchak, to′g′ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik sharti, berilgan nuqtadan o′tuvchi to′g′ri chiziqlar tenglamasi, berilgan ikki nuqtadan o′tuvchi to′g′ri chiziq tenglamasi, to′g′ri chiziq va tekislik orasidagi burchak, to′g′ri chiziq va tekislikning parallellik va perpendikulyarlik sharti, ikki to′g′ri chiziqni bir tekislikda yotish sharti.

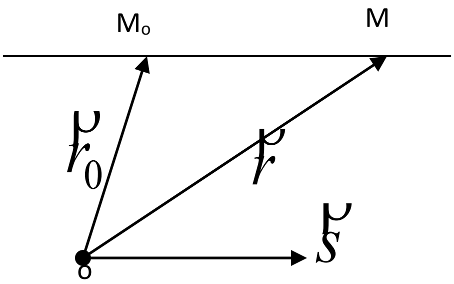
R e j a s i :

1. Fazodagi to′g′ri chiziqning yo′naltiruvchi vektori va boshlang′ich nuqtasi.
2. Fazodagi to′g′ri chiziqning vektor tenglamasi.
3. Fazodagi to′g′ri chiziqning parametrik va kanonik tenglamasi.
4. Fazodagi to′g′ri chiziqning umumiy tenglamasi.
5. Fazodagi ikki to′gri chiziq orasidagi burchak.
6. To′g′ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari.
7. Berilgan nuqtadan o′tuvchi to′g′ri chiziqlar tenglamasi.
8. Berilgan ikki nuqtadan o′tuvchi to′g′ri chiziq tenglamasi.
9. To′g′ri chiziq va tekislik orasidagi burchak.
10. To′g′ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik va parallellik shartlari.
11. Berilgan nuqtadan o′tuvchi va berilgan tekislikka parallel to′g′ri chiziqlar dastasi tenglamasi.
12. Ikki to′g′ri chiziqning bir tekislikda yotish sharti.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §19 , [1] I bob, §17-18 , [14]. 121-122 betlar,
§5 [14]. 120-121 betlar, [3] VI bob

Fazodagi to′g′ri chiziqqa parallel bo′lgan har qanday **s** vektorga shu to′g′ri chiziqning ***yo′naltiruvchi vektori*** deyiladi. Aytaylik $M_0(x_0;u_0;z_0)$ to′g′ri chiziqning ma'lum bir nuqtasi, M(x;y;z) esa to′g′ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo′lsin. M_0 shu to′g′ri chiziqning ***boshlang′ich nuqtasi*** deyiladi. Bu nuqtalarning radius- vektorlari $\bar{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, $\bar{r}\ (x, y, z)$ va $\mathbf{M_0M}$ ($x-x_0$, $u-u_0$, $z-z_0$) vektorni olamiz. Unda, quyidagi chizmaga asosan, $\bar{r} = \bar{r}_0 + \overline{M_0M}$ tenglikka ishonch hosil qilish mumkin:



Agar **s**(m,n,p) shu to′g′ri chiziqning yo′naltiruvchi vektori bo′lsa, u holda **M₀M** **v**a **s**(m;n;r) vektorlar kollinear, ya'ni **M₀M** = t·**s**, bunda t – o′zgarmas son. Natijada ushbu tenglamani hosil qilamiz:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\,\mathbf{s} \qquad (1)$$

Bu fazodagi to′g′ri chiziqning ***vektor ko'rinishidagi tenglamasi*** deyiladi. Agar (1) vektor tenglamani koordinatalarda ifodalasak, u holda

$$(x; u; z)= (x_0; u_0; z_0) +t\ (m; n; p) \Rightarrow (x; u; z)= (x_0+tm; u_0+tn; z_0+tp) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=x_0+tm\ , \quad y=y_0+tn\ , \quad z= z_0+tp \qquad (2)$$

Hosil bo′lgan tenglamalarda t parametr o′zgarishi bilan x; y; z o′zgaruvchilar to′g′ri chiziqning turli nuqtalarini ifodalaydi, ya'ni (2) to′g′ri chiziqni to′lik aniqlaydi. Shu sababli (2) to′gri chiziqning ***parametrik tenglamasi*** deyiladi. Agarda (2) dan t ni topsak, u holda

$$t=\frac{x-x_0}{m},\ t=\frac{y-y_0}{n},\ t=\frac{z-z_0}{p} \Rightarrow \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (3)$$

Bu to′gri chiziqning ***kanonik tenglamasi*** deyiladi. Unda maxrajdagi m,n,p conlari yo′naltiruvchi vektor koordinatalari, suratdagi x_0, u_0, z_0 sonlari esa boshlang′ich nuqtaning koordinatalari bo′lishini ta'kidlab o′tamiz.

Bu tenglamani **s** va **M₀M** vektorlarning kollinearlik shartidan ham bevosita olishimiz mumkin edi.

To′g′ri chiziqning ushbu kanonik tenglamasi berilgan bo′lsin:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\ .$$

Bunda r ≠0 deb olamiz. Bu tenglamani ikkiga ajratib,

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}, \qquad \frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz va bu sistema ham to′g′ri chiziqni ifodalaydi. Ammo ularning har biri tekislik tenglamasidir. Birinchi tenglama OY o′qiga parallel, ikkinchi tenglama esa OX o′qiga parallel tekislikni ifodalaydi. Bu tekisliklarning kesishmasida (3) kanonik tenglamasi bilan berilgan to′g′ri chiziq hosil bo′lmoqda.

Umuman olganda, fazoda to′g′ri chiziqning nuqtalari ikkita tekislik tenglamalaridan tuzilgan quyidagi sistemaning echimlaridan iborat bo′ladi:

$$\begin{cases} A_1x+V_1u+S_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+S_2z+D_2=0\ . \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasi fazodagi to′g′ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. Bu to′g′ri chiziqning yo′naltiruvchi vektori **s** tekisliklarning

$$\mathbf{n_1}=(A_1; B_1; C_1), \quad \mathbf{n_2}=(A_2; B_2; C_2)$$

normallariga perpendikulyar bo′ladi. Shuning uchun ham to′g′ri chiziqqa parallel $\mathbf{n_1}$x$\mathbf{n_2}$ vektorni uning yo′naltiruvchi vektori sifatida olish mumkin.

1-misol: Fazodagi to′g′ri chiziqning umumiy tenglamasini kanonik ko′rinishga keltiring.

$$2x-3u+z-5=0$$
$$3x+y-2z-4=0$$

Echish: Izlanayotgan to′g′ri chiziqda yotuvchi biror M_0 nuqtaning koordinatalarini aniqlaymiz. Tenglamalar sistemasida noma'lumlar 3 ta, lekin tenglamalar soni esa ikkita. Shuning uchun bitta noma'lumni erkin qilib olamiz. Masalan, z=1 deb olamiz. Natijada berilgan sistema

$$\begin{cases} 2x-3u=4 \\ 3x+u=6 \end{cases}$$

ko′rinishni oladi. Bu sistemadan x=2, y=0 ekanligini topamiz. Demak, $M_0(2;0;1)$ nuqta to′g′ri chiziqda yotadi. Yo′naltiruvchi vektor esa tekisliklarning $\mathbf{n_1}$ va $\mathbf{n_2}$ normallari vektorial ko′paytmasi kabi topiladi:

$$\vec{n}_1 x \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -7\mathbf{i}+7\mathbf{j}+11\mathbf{k}.$$

Demak, yo′naltiruvchi vektor $\mathbf{s}(-7;7;11)$.Unda to′g′ri chiziqning kanonik tenglamasi quyidagicha bo′ladi:

$$\frac{x-2}{-7}=\frac{y-0}{7}=\frac{z-1}{11}$$

2-misol. To′g′ri chiziqning umumiy tenglamasini parametrik va kanonik ko′rinishga keltiring:

$$\begin{cases} 2x+u-z+1=0 \\ 3x-y+2z-3=0 \end{cases}$$

Echish: Tenglamalarni xar birini x va y ga nisbatan echamiz:

$$\begin{cases} 2x+y=z-1 \\ 3x-y=3-2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x=2-z \\ 5y=7z-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{5}z+\frac{2}{5} \\ y=\frac{7}{5}z-\frac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\frac{x-2/5}{-1/5} \\ z=\frac{y+9/5}{7/5} \end{cases}$$

Natijada to′g′ri chiziqning ushbu kanonik tenglamasiga kelamiz:

$$\frac{x-2/5}{-1/5}=\frac{y+9/5}{7/5}=\frac{z}{1}$$

Bu erdan parametrik tenglamalarni olish qiyin emas. Darxaqiqat, xar bir nisbatni t ga tenglashtirsak, u holda

$$x=\frac{-t}{5}+\frac{2}{5}; \quad y=\frac{7}{5}t-\frac{9}{5}; \quad z=t$$

izlangan parametrik tenglama bo′ladi.

FAZODAGI TUGRI CHIZIKLARGA DOIR MASALALAR.

1. Ikki to′g′ri chiziq orasidagi burchak.

Fazoda ikkita to′g′ri chiziq o′zlarining kanonik tenglamalari bilan berilgan bo′lsin:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ ва } \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

Ular orasidagi α burchakni topish masalasini ko′ramiz. Bu masalani ularning yo′naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakni topish masalasiga keltirish mumkin. Yo′naltiruvchi $\vec{s}_1=\{m_1;n_1;p_1\}, \vec{s}_2=\{m_2;n_2;p_2\}$ vektorlar orasidagi burchak quyidagi formula yordamida topiladi:

$$\cos\alpha=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \qquad (4)$$

M i s o l : Kanonik tenglamalari bilan berilgan quyidagi to′g′ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1}, \qquad \frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}$$

E ch i sh : (4) formulaga asosan

$$\cos\alpha=\frac{1\cdot 2+(-4)(-2)+1\cdot(-1)}{\sqrt{1+16+1}\sqrt{4+4+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Bundan $\alpha=45^0$ ekanligini ko′ramiz.

2. To′g′ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

Agar to′g′ri chiziqlar perpendikulyar bo′lsa, u holda (4) formulada $\cos\alpha=0$ bo′ladi. Bundan esa ikki to′g′ri chizikning perpendikulyarlik sharti kelib chiqadi:

$$m_1m_2+n_1n_2+r_1r_2=0$$

Agar to′g′ri chiziqlar parallel bo′lsa, u holda ularning yo′naltiruvchi vektorlari ham o′zaro parallel bo′ladi va bundan ikki to′gri chiziqning parallellik sharti kelib chiqadi:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

3.Berilgan nuqtadan o′tuvchi va berilgan to′gri chiziqqa parallel bo′lgan to′gri chiziq tenglamasi.

Aytaylik fazoda M(a;v;s) nuqta va kanonik tenglamasi

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

bo′lgan to′g′ri chiziq berilgan bo′lsin. Berilgan M nuqtadan o′tuvchi to′g′ri chiziq tenglamasini

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-в}{n}=\frac{z-c}{p}$$

kabi ifodalash mumkin. To′g′ri chiziqlarning parallellik shartiga asosan

$$\frac{m}{m_1}=\frac{n}{n_1}=\frac{p}{p_1}$$

munosabat o′rinli bo′ladi. Bundan, $m=m_1$, $n=n_1$ va $r=r_1$ deb olish mumkinligini ko′ramiz. Demak izlanayotgan to′g′ri chiziq tenglamasi

$$\frac{x-a}{m_1}=\frac{y-в}{n_1}=\frac{z-c}{p_1}$$

ko′rinishda bo′ladi.

4. Berilgan ikki nuqtadan o′tuvchi to′g′ri chiziq tenglamasi.

Aytaylik fazoning ikkita nuqtasi o′zining koordinatalari bilan berilgan bo′lsin. Ular $M_1(x_1;u_1;z_1)$ va $M_2(x_2;u_2;z_2)$ bo′lsin. Shu nuqalardan o′tuvchi to′g′ri chiziq tenglamasini topamiz.

Izlanayotgan to′g′ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzish uchun unda yotuvchi biror nuqtaning koordinatalarini va yo′naltiruvchi vektorini bilish kifoya. Shunday nuqta sifatida berilgan nuqtalardan istalganini, aytaylik M_1 ni olamiz. Yo′naltiruvchi vektor sifatida esa unda yotuvchi $\mathbf{M_1M_2}(x_2-x_1;\ u_2-u_1;\ z_2-z_1)$ vektorni tanlaymiz. Natijada berilgan ikki nuqtadan o′tuvchi to′g′ri chiziq tenglamasini hosil qilamiz:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

5. To′g′ri chiziq va tekislik orasidagi burchak.

Aytaylik, to′g′ri chiziq va tekislik mos ravishda o′zlarining kanonik va umumiy tenglamalari bilan berilgan bo′lsin:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-в}{n}=\frac{z-c}{p},\quad Ax+Vu+Sz+D=0.$$

Ma'lumki tekislik va uni kesuvchi to′g′ri chiziq orasidagi burchakni aniqlash uchun shu tug′ri chiziqni tekislikka proektsiyalab, hosil bo′lgan chiziqli burchak topiladi. Uni α orqali belgilaylik. Shu burchakning sinusini to′g′ri chiziqning **s**(m,n,p) yo′naltiruvchi vektori va tekislikning **n**(A,B,C) normal vektori orqali topamiz:

$$\sin\alpha=\cos(90^0-\alpha)=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

6. To′g′ri chiziq va tekislikning parallellik va perpendikulyarlik shartlari

Aytaylik quyidagi

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-в}{n}=\frac{z-c}{p}, \quad Ax+Vu+Sz+D=0$$

tenglamalari bilan berilgan to′g′ri chiziq va tekislik o′zaro parallel bo′lsinlar. U holda to′g′ri chiziqning yo′naltiruvchi vektori **s**(m,n,p) va tekislik normalin **n**(A,B,C) o′zaro perpendikulyar bo′ladilar. Bundan to′g′ri chiziq va tekislikning parallellik sharti quyidagicha ekanligi kelib chiqadi:

$$Am + Bn + Cr = 0$$

Bu tenglikni sin α=0 shartdan ham keltirib chiqarish mumkin edi.

Endi berilgan to′g′ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik shartini keltirib chiqaraylik. To′g′ri chiziqning yo′naltiruvchi vektori va tekislik normali kollinear vektorlar ekanligidan, ikki vektorning kollinearlik shartiga asosan

$$\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C} \quad \text{yoki} \quad \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

bo′ladi. Bu to′g′ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik shartini ifodalaydi.

7. Berilgan nuqtadan o′tuvchi va berilgan tekislikka parallel bo′lgan to′g′ri chiziqlar dastasining tenglamasi.

Berilgan M(a;v;s) nuqtadan o′tuvchi to′g′ri chiziqlarning kanonik tenglamasini yozamiz:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-в}{n}=\frac{z-c}{p}$$

Bu to′g′ri chiziqqa parallel bo′lgan tekislik tenglamasi Ax+Vu+Sz+D=0 bo′lsin. To′g′ri chiziq va tekislikning parallellik shartidan Am+Bn+Cr=0 munosabatni olamiz. Nisbatlarning tengligidan esa m=x-a, n=u–v, r=z–c deb olishimiz mumkin. U holda izlanayotgan to′g′ri chiziqlar dastasining quyidagi tenglamasini hosil qilamiz:

$$A(x-a)+V(u-v)+S(z-s)=0.$$

8.Ikki to′g′ri chiziqning bir tekislikka yotish sharti.

Ikkita to′g′ri chiziq uzlarining kanonik tenglamalari bilan berilgan bo′lsin:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \qquad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

Ularning yo′naltiruvchi vektorlarini mos ravishda $\mathbf{s_1}(m_1;n_1;r_1)$ va $\mathbf{s_2}(m_2;n_2;r_2)$ kabi belgilaymiz. To′g′ri chiziqlarning $M_1(x_1,u_1,z_1)$ va $M_2(x_2,u_2,z_2)$

boshlang′ich nuqtalarining radius-vektorlarini $\mathbf{r_1}(x_1;u_1;z_1)$ va $\mathbf{r_2}(x_2;u_2;z_2)$ kabi belgilaymiz. Unda bu nuqtalarning biridan ikkinchisiga yo′nalgan **M_1M_2** vektor $\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$ bo′ladi. Vektorlarni ayirish qoidasiga asosan $\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1} = (x_2-x_1;u_2-u_1;z_2-z_1)$ tenglikni yoza olamiz. Geometrik mulohazalarga asosan berilgan ikkita to′g′ri chiziqning bitta tekislikda yotishi uchun $\mathbf{s_1}$, $\mathbf{s_2}$ va $\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$ vektorlarning komplanar bo′lishi zarur va etarlidir. Bundan aralash ko′paytma $(\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1})\,\mathbf{s_1}\,\mathbf{s_2} = 0$ yoki

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Bu ikki to′g′ri chiziqning bir tekislikda yotish shartini ifodalaydi.

<u>O′z – o′zini nazorat etish savollari:</u>

1. Fazodagi to′g′ri chiziqning yo′naltiruvchi vektori deb nimaga aytiladiq
2. Fazodagi to′g′ri chiziqning boshlang′ich nuqtasi deb nimaga aytiladiq
3. Fazodagi to′g′ri chiziqning vektor tenglamasini yozing.
4. Fazodagi to′g′ri chiziqning parametrik tenglamasi qanday ko′rinishda bo′ladiq
5. Fazodagi to′g′ri chiziqning kanonik tenglamasini yozing va undagi parametrlarning ma'nosini ko′rsating.
6. Fazodagi to′g′ri chiziqning umumiy tenglamasi qanday ko′rinishda bo′ladiq
7. To′g′ri chiziqning umumiy tenglamasidan kanonik va parametrik tenglamasiga qanday o′tiladiq
8. Fazodagi ikki to′g′ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladiq
9. Ikki to′g′ri chiziqning perpendikulyarlik (parallellik) sharti nimadan iboratq
10. Berilgan ikki nuqtadan o′tuvchi to′g′ri chiziq tenglamasi qanday ko′rinishda bo′ladiq
11. To′g′ri chiziq va tekislik orasidagi burchak qanday topiladiq
12. To′g′ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik (parallellik) sharti nimadan iboratq
13. Berilgan nuqtadan o′tuvchi va berilgan tekislikka parallel to′g′ri chiziqlar tenglamasini yozing.
14. Qaysi shartda ikki to′g′ri chiziq bir tekislikda yotadiq

V BOB. MATEMATIK ANALIZGA KIRISH.

5.1. FFUNKTSIYA VA U BILAN BOG'LIQ BO'LGAN TUSHUNCHALAR.

Tayanch iboralar: o'zgarmas miqdor, o'zgaruvchi miqdor, funktsiya, aniqlanish sohasi, o'zgarish sohasi, funktsiya grafigi, funktsiyaning berilish usullari, o'suvchi va kamayuvchi funktsiya, juft va toq funktsiya, davriy funktsiya, murakkab funktsiya, teskari funktsiya, asosiy elementar funktsiyalar, elementar funktsiyalar.

R e j a:

1. O'zgarmas va o'zgaruvchi miqdorlar.
2. Funktsiya ta'rifi.
3. Funktsiyaning aniqlanish va o'zgarish sohasi.
4. Funktsiya grafigi.
5. Funktsiyani berilish usullari.
6. Funktsiya turlari.
7. Murakkab va teskari funktsiya.
8. Asosiy elementar va elementar funktsiyalar.

Adabiyotlar:

[1] II bob, §1-2 [2] I bob, §6-8

Atrofimizdagi turli jarayonlarni matematik usullarda tadqiqot qilayotganimizda o'zgarmas va o'zgaruvchi miqdorlarga duch kelamiz.

T A' R I F: Faqat bitta sonli qiymat qabul qiladigan kattaliklar o'zgarmas miqdorlar deyiladi.

Masalan, yorug'lik tezligi **s**, erkin tushish tezlanishi **g**, aylana uzunligini uning diametriga nisbati π, izotermik jarayonlarda harorat $\mathbf{t^0}$ o'zgarmas miqdorlardir.

T A' R I F : Turli sonli qiymatlar qabul qila oladigan kattaliklar o'zgaruvchi miqdorlar deyiladi.

Masalan, tekis harakatda vaqt **t** va bosib o'tilgan masofa **s** o'zgaruvchi miqdorlardir.

Biror jarayonni o'rganayotganimizda bir nechta o'zgaruvchi miqdorlar o'rtasidagi o'zaro bog'lanishlarga duch kelamiz.

Masalan, tekis harakatda tezlikni **v**, vaqtni **t** va bosib o'tilgan yo'lni **s** desak, u holda bu o'zgaruvchilar o'zaro $\mathbf{s=v\cdot t}$ ko'rinishda bog'lanadi. Bunday bog'lanishlarni juda ko'p keltirish mumkin va shu sababli ularni atroflicha o'rganish maqsadida funktsiya tushunchasi kiritiladi.

T A ' R I F : Agarda x o'zgaruvchini har bir mumkin bo'lgan son qiymatiga u o'zgaruvchining yagona bir son qiymati mos qo'yilgan bo'lsa, u o'zgaruvchi x o'zgaruvchining funktsiyasi deyiladi.

Biror u o'zgaruvchi x o'zgaruvchining funktsiyasi ekanligi $y=f(x)$ kabi belgilanadi (f harfi o'rniga F, h, g, φ kabi boshqa harflarni ham qo'llash mumkin).

Bu erda *x* erkli o'zgaruvchi yoki argument, *u* esa erksiz o'zgaruvchi yoki funktsiya deb ataladi.

T A' R I F : *y=f(x)* funktsiyada *x* argumentning *u* funktsiya ma'noga ega bo'ladigan barcha son qiymatlari to'plami shu funktsiyaning aniqlanish sohasi deyiladi va **D{f}** kabi belgilanadi. Funktsiya qabul qiladigan barcha qiymatlar to'plami esa shu funktsiyaning o'zgarish sohasi deyiladi va **E{f}** kabi belgilanadi.

Masalan**,** $f(x) = \sin\sqrt{x}$ funktsiya uchun $D\{f\}=[0,\infty)$, $E\{f\}=[-1,1]$ bo'ladi.

T A' R I F : XOY tekislikdagi $(x, f(x))$, $x\in D\{f\}$, koordinatali nuqtalarning geometrik o'rni u=f(x) funktsiyaning grafigi deyiladi.

Masalan, $u=x^2$ funktsiya grafigi paraboladan, u=sosx funktsiya grafigi sinusoidadan, u=2x+5 funktsiya grafigi esa to'g'ri chiziqdan iboratdir.

Funktsiyalar analitik ko'rinishda, ya'ni formulalar orqali, jadval yoki grafik ko'rinishda berilishi mumkin. Masalan, aylana radiusi x va uning yuzasi u orasidagi bog'lanish funktsiyasi $u=\pi x^2$ formula orqali analitik ko'rinishda, Bradisning matematik jadvallar kitobchasida funktsiyalar jadval ko'rinishida, yurak ishlashini ifodalovchi funktsiya kardiogramma orqali grafik ko'rinishda ifodalanadi.

T A' R I F : u=f(x) funktsiya biror $D\subset D\{f\}$ soxada o'suvchi (kamayuvchi) deyiladi, agarda $\forall x_1, x_2\in D$ uchun $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$ shart bajarilsa.

Masalan, $u=x^2$ funktsiya $(-\infty;0)$ soxada kamayuvchi, $(0,\infty)$ soxada esa usuvchi buladi.

T A ` R I F : u=f(x) funktsiya nol nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgan D{f} aniklanish soxasida juft(tok) deyiladi, agarda $\forall x\in D\{f\}$ uchun $(-x\in D\{f\})$ $f(-x)= f(x)$ $(f(-x)=-f(x))$ shart bajarilsa.

Masalan, $f(x)=x^2$ – juft funktsiya, $f(x)=x^3$ esa tok funktsiya buladi. Lekin, $f(x)=x^2 -3x+1$, $f(x)=2x -3$ funktsiyalar na juft va na tokdir.

T A ` R I F : u=f(x) funktsiya davriy deb ataladi, agarda shunday T>0 son mavjud bo'lsaki, $\forall x\in D\{f\}$uchun $f(x+T)= f(x)$ shart bajarilsa. Bu shartni qanoatlantiruvchi eng kichik T soni shu funktsiyaning davri deyiladi.

Masalan, y=sinx davri $T=2\pi$, u={x} (*x* ning kasr kismi) davri T=1 bo'lgan davriy funktsiyalardir. $u=x^2$ funktsiya esa davriy emas.

***T A ` R I F:*** u=f(x), $u=\varphi(x)$ funktsiyalar berilgan bo'lib, $x\in D\{\varphi\}$ bo'lganda $E\{\varphi\} \subset D\{f\}$ shart bajarilsin. Bu xolda, $F(x)=f(\varphi(x))$ funktsiya ma`noga ega buladi va u murakkab funktsiya deb ataladi. Bu erda φ ichki, f **e**sa tashki funktsiya deyiladi.

Masalan, $u=\sin x^2$ funktsiya uchun $\varphi(x)=x^2$ ichki, $f(\varphi)=\sin\varphi$ esa tashki funktsiya buladi. $u=\sin^2 x$ murakkab funktsiyada esa $\varphi(x)=\sin x$ ichki, $f(\varphi)=\varphi^2$ tashki funktsiya buladi.

T A ` R I F: u=f(x) funktsiyadan *x* argumentni *u* funktsiya orkali ifodalashdan xosil bo'lgan $x=\varphi(u)$ ko'rinishdagi φ funktsiya f funktsiyaga teskari funktsiya deb ataladi va f^{-1} kabi belgilanadi.

Odatda argument *x*, funktsiya esa *u* orkali belgilanganligi uchun, teskari funktsiya $u=\varphi(x)$ yoki $u=f^{-1}(x)$ ko'rinishda yoziladi. Teskari funktsiyani f(u)=x tenglama echimi kabi topishimiz mumkin.

Masalan, f(x)=3x-1 bo'lsa, 3u-1=x tenglamadan bu funktsiya uchun teskari funktsiya $f^{-1}(x)=(x+1)/3$ ekanligini aniklaymiz.

SHuni ta`kidlab utish kerakki,bunda $D\{f\}=E\{f^{-1}\}$, $E\{f^{-1}\} = D\{f\}$ munosabatlar o'rinli buladi.

Maktab matematikasidan bizga ma`lum bo'lgan quyidagi funktsiyalarni eslatib utamiz:

1. Darajali funktsiya $u=x^{\alpha}$, $\alpha \in R$. Masalan, $u=x^2$, $u=\sqrt{x}$, $u= 1/x$.
2. Kursatkichli funktsiya. $u=a^x$ $(a>0,a\neq 1)$. Masalan, $u=3^x$, $u=(1/10)^x$
3. Logarifmik funktsiya $u=\log_a x$, $(a>0,a\neq 1)$. Masalan, $u=\log_2 x$, $u=\lg x$, $u=\ln x$.
4. Trigonometrik funktsiyalar $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}\,x$, $y=\mathrm{ctg}\,x$.
5. Teskari trigonometrik funktsiyalar $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arctg}\,x$, $y=\mathrm{arcctg}\,x$.

Bu funktsiyalar asosiy elementar funktsiyalar deb ataladi.

CHekli sondagi asosiy elementar funktsiyalar ustida arifmetik amallar va murakkab funktsiya xosil kilish orkali tuzilgan funktsiyalar elementar funktsiyalar deyiladi. Masalan , $2\ln\sin x+x^2/5$ elementar funktsiya buladi.

$u=\{x\}$, $u=[x]$ (x ning butun kismi), $u=|x|$ kabi funktsiyalar elementar bulmagan funktsiyalarga misol buladi.

Funktsiyaning iktisodiyotda kullanilishi.

Funktsiyalar iktisodiyot nazariyasi va amaliyotda juda keng qo'llaniladi. Funktsiyalarni iktisodiyotga tadbik etish spektri juda keng va xilma xildir. eng oddiy chizikli, bir uzgaruvchili funktsiyalar ham murakkab ko'rinishga ega bo'lgan kup uzgaruvchili hamda vaqtga boglik bo'lgan funktsiyalar ham urganilayotgan iktisodiy ob`ektlarning turli davrlardagi xolatlari va boglanishlarini ifodalashi mumkin.

CHizikli, nochizikli, kasr-chizikli, darajali (kvadratik, kubik va xakozo), kursatkichli (eksponentsial), logarifmik va boshka transtsendent funktsiyalar iktisodiyotda qo'llaniladi. Ba`zi iktisodiy jarayonlarning davriyligi va tebranuvchanligi tufayli trigonometrik funktsiyalar qo'llaniladi.

Kup qo'llaniladigan funktsiyalar quyidagilar:

1. Foydalilik (afzallik) funktsiyasi keng ma`noda kandaydir iktisodiy xarakat samarasi, natijasi yoki foydasi bilan shu iktisodiy xarakat kulami (miqdori) va tezligi orasidagi boglanishni ifodalaydi.
2. Ishlab chikarish funktsiyasi – ishlab chikarish faoliyati natijasida *u* bilan uning omillari $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ orasidagi boglanishni ifodalaydi, ya`ni $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$- kup uzgaruvchili funktsiya.
3. Ishlab chikarish funktsiyasining xususiy xoli bo'lgan, maxsulot ishlab chikarish funktsiyasi- ishlab chikarilgan maxsulot xajmi bilan unda ishlatilgan resurslar orasidagi boglanishni ifodalaydi.
4. Sarf-xarajat funktsiyasi – ishlab chikarish funktsiyasining xususiy xoli bo'lgan sarf-xarajat funktsiyasi ishlab chikarilgan maxsulot xajmi bilan ishlab chikarish xarajatlari orasidagi boglanishni ifodalaydi.
5. Talab, taklif va iste`mol funktsiyalari. Aloxida tovar va xizmatlarga talab, taklif va iste`mol miqdorlari bilan ularni xarakterlovchi turli omillar (masalan narx, baxo, daromad…) orasidagi boglanishlarni ifodalaydi.

Iktisodiy xodisa va jarayonlar turli omillarning ta`siri natijasida ruy berishini urganish uchun kup uzgaruvchili funktsiyalar keng kullanilishini xisobga olish kerak. bunday funktsiyalar ichidan multiplikativ funktsiyalarni aloxida ko’rsatish mumkin. Ular natijaviy uzgaruvchini omiliy uzgaruvchilarning kupaytmasi ko’rinishda ifodalaydi, hamda biror omilning katnashmasligi natijaviy kursatkichni pulga aylantiradi, bu esa iktisodiy xodisa yoki jarayonning tom ma`nosini tula xarakterlaydi.

YUkoridagi funktsiyalardan tashkari separabel’ va additiv funktsiyalar ham iktisodiy boglanishlarni urganishda qo’llaniladi.

Agar uncha muxim bulmagan 2-darajali omillarni xisobga olmay yoki ularni ma`lum darajada uzgarmas deb hisoblasak, u xolda bitta asosiy omilning iktisodiy faoliyat natijasiga ta`siri bir uzgaruvchili funktsiya yordamida urganiladi.

Masalan, turli tavorlarga bo’lgan talab extiyojning daromadga boglanishni urganish quyidagi tornkvist funktsiyalari

$$y = \frac{в_1(x - a_1)}{x - c_1}, \quad (x > a_1, \quad c_1 < x), \quad y = \frac{в_2(x - a_2)}{x - c_2}, \quad (x > a_2, \quad c_2 < x),$$

$y = \dfrac{в_3 x(x - a_3)}{x - c_3}, \quad (x > a_3, \quad c_3 < x)$ yordamida amalga oshirilish mumkin, bu erda a_1, a_2, a_3-daromad darajalari, v_1, v_2, v_3 1, 2, 3 –gurux tovarlarga bo’lgan talabning kondirilish darajalari, s_1, s_2, s_3 1, 2, 3 –darajali tovarlar kiymatlari daromadni ifodalovchi uzgaruvchi, *u* –talab extiyojni xarakterlovchi uzgaruvchi.

<u>O’z-o’zini nazorat etish savollari:</u>

1. Kanday miqdorlar uzgarmas deyiladiq Misollar keltiring.
2. Kanday miqdorlar uzgaruvchi deyiladiq Misollar keltiring.
3. Funktsiya kanday ta’riflanadiq
4. Funktsiyaning aniklanish soxasi deb nimaga aytiladiq
5. Funktsiyaning uzgarish (kiymatlar) soxasi kanday ta’riflanadiq
6. Funktsiya grafigi deb nimaga aytiladiq
7. Funktsiya kanday usullarda berilishi mumkinq
8. Kaysi shartda funktsiya usuvchi (kamayuvchi) deyiladiq
9. Kaysi shartda funktsiya juft (tok) deb ataladiq
10. Davriy funktsiya deb kanday funktsiyaga aytiladiq
11. Murakkab funktsiya kanday ta’riflanadiq
12. Teskari funktsiya kanday aniklanadiq
13. Kaysi funktsiyalar asosiy elementar funktsiyalar deyiladiq
14. Elementar funktsiyalar deb kanday funktsiyalarga aytiladiq

5.2 FUNKTSIYA LIMITI VA UNING XOSSALARI.

Tayanch iboralar: funktsiyaning chekli limiti, funksiyaning cheksiz limiti, limitning yagonaligi, chap va ung limit, limitning mavjudlik sharti, cheksiz kichik miqdor, cheksiz kichik miqdorlarning xossalari, algebraik yigindining limiti, kupaytmaning limiti, bulinmaning limiti, ajoyib limitlar.

R e j a:

1. Funktsiya limiti.
2. CHap va ung limitlar.
3. Limitning mavjudlik sharti.
4. Limitning yagonaligi.
5. CHeksiz kichik miqdorlar va ularning xossalari.
6. Limit mavjudligining zaruriy va etarli sharti.
7. Limitlarning asosiy xossalari.
8. Ajoyib limitlar.

Adabiyotlar:

[1] II bob, §5-10 [2] II bob, §1-7

Oliy matematikaning muxim tushunchalaridan biri limit bo'lib, uning yordamida egri chizikka urinma, egri chizik yoyi uzunligi, funktsiya uzluksizligi va xosilasi, anik integral kabi juda kup tushunchalar kiritiladi.

T A ` R I F : Agarda oldindan berilgan ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun unga boglik shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son topilsaki, $0<|x-a|<\delta$ shartni kanoatlan-tiruvchi xar kanday $x\in D\{f\}$uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, A soni u=f(x) funktsiyaning $x\to a$ bo'lgandagi limiti deb ataladi va bu tasdiq

$$\lim_{x\to a} f(x)=A$$

ko'rinishda yoziladi.

Misol sifatida, $\lim\limits_{x\to 3} x^2=9$ ekanligini kursatamiz. Bu erda $x\to 3$ bo'lgani uchun $2<x<4$, ya`ni $|x+3|<7$ deb olishimiz mumkin. Bu xolda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun

$$|f(x)-A|=|x^2-9|=|x+3||x-3|<7|x-3|<\varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bulishi uchun $|x-3|<\varepsilon/7$, ya`ni $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/7$ deb olish mumkin. Demak, limit ta'rifiga asosan, $\lim\limits_{x\to 3} x^2=9$ tenglik o'rinli buladi.

T A ` R I F : u=f(x) funktsiya $x\to a$ bo'lganda cheksiz ($+\infty$ yoki $-\infty$) limitga ega deyiladi, agarda xar kanday katta $N>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(N)>0$ con mavjud bo'lsaki, $0<|x-a|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi xar kanday $x\in D\{f\}$ uchun $|f(x)|>N$ tengsizlik o'rinli bo'lsa.

Ta'rifdagi tasdiq $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan, $\lim\limits_{x\to 2} (x^3-8)^{-2}=\infty$ ekanligini ko'rsatish mumkin.

T A ` R I F : A soni u=f(x) funktsiyaning $x\to\pm\infty$ bo'lgandagi limiti deyiladi, agarda xar kanday kichik $\varepsilon>0$ con uchun shunday katta $M=M(\varepsilon)>0$ son mavjud bo'lsaki, $|x|>M$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in D\{f\}$ uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa.

Bu tasdiq $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=A$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$ ekanligini kursatamiz. Ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ uchun $|f(x)-A|=|\frac{x+1}{x}-1|=|1/x|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilishi uchun, $|x|>\varepsilon^{-1}$, ya`ni $M(\varepsilon)=\varepsilon^{-1}$ deb olishimiz mumkin. Bu erdan, ta'rifga asosan, yukoridagi tenglik o'rinli ekanligi kelib chikadi.

T A ` R I F : u=f(x) funktsiyaning $x\to\pm\infty$ bo'lgandagi limiti cheksiz deyiladi, agarda xar kanday katta $N>0$ coni uchun shunday $M=M(N)$ son mavjud bo'lsaki, $|x|>M$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x\in D\{f\}$ uchun $|f(x)|>N$ tengsizlik o'rinli bo'lsa.

Ta'rifdagi tasdiq $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2=+\infty$ ekanligini ta'rif buyicha isbotlash mumkin.

Ba`zi xollarda funktsiyaning chap va ung limiti tushunchalari kerak buladi.

T A ` R I F : u=f(x) funktsiyaning argumenti x kandaydir a soniga fakat chap $(x<a)$ yoki ung $(x>a)$ tomondan yakinlashib borganda funktsiya limiti biror A_1 yoki A_2 sonidan iborat bo'lsa, u funktsiyaning *a* nuqtadagi chap yoki ung limiti deb ataladi va $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A_1$ yoki $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A_2$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan , $\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, x>0 \\ 0, x=0 \\ -1, x<0 \end{cases}$ funktsiya uchun

$$A_1=\lim_{x\to 0-0}\operatorname{sgn}x=-1,\ A_2=\lim_{x\to 0+0}\operatorname{sgn}x=1.$$

Agarda biror a nuqtada u=f(x) funktsiya A limitga ega, ya`ni $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ bo'lsa, u xolda $A_1=A_2=A$ tenglik o'rinli bulishi chap va ung limit ta'rifidan kelib chikadi. Aksincha, agar chap va ung limitlar teng bo'lsa, u xolda limitning ta'rifidan funktsiya limiti mavjudligi kelib chikadi.

SHuni ta`kidlab utish kerakki, funktsiya limiti xar doim ham mavjud bulavermaydi. Masalan, u=sgnx funktsiya $x\to 0$ bo'lganda limitga ega emas, chunki bu xolda $A_1=-1$ va $A_2=1$ bo'lib, $A_1\neq A_2$. Ammo bu funktsiya $x\to a$, $a\neq 0$, bo'lganda 1 yoki –1 limitga egadir.

TEOREMA: Agar $x\to a$ bo'lganda funktsiya limiti mavjud bo'lsa, u xolda bu limit yagona buladi.

I s b o t: Teskarisini faraz kilaylik, ya`ni funktsiya $x\to a$ bo'lganda ikkita A va V limitlarga ega bo'lsin.Limit ta'rifiga kura, xar kanday kichik $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$ va $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$ sonlar topiladiki, $0<|x-a|<\delta_1$ va $0<|x-a|<\delta_2$

shartlarda $|f(x)-A|<\varepsilon/2$ va $|f(x)-V|<\varepsilon/2$ tengsizliklar bajariladi. Agar $\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$ deb olsak $0<|x-a|<\delta$ bo'lganda

$$|A-V|=|A- f(x)+ f(x)+V|\le |f(x)-A|+ |f(x)-V|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

tengsizlik o'rinli buladi. Bu erda ε ixtiyoriy kichik son bo'lganidan va A, V sonlar x ga boglik emasligidan $|A-V|=0$, ya`ni $A=V$ ekanligi kelib chikadi. Demak funktsiya limiti mavjud bo'lsa, u fakat yagona buladi.

Limitlarga doir turli tasdiqlarni isbotlashda cheksiz kichik miqdor va ularning xossalari muxim ahamiyatga ega.

T A ` R I F : $\alpha(x)$ funktsiya $x\to a$ ($|a|<\infty$ yoki $a=\pm\infty$) bo'lganda cheksiz kichik miqdor deb ataladi, agarda $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ shart bajarilsa.

TEOREMA : Agar $x\to a$ bo'lganda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar bo'lib, f(x) biror M soni bilan chegaralangan, ya`ni $|f(x)|\le M$ bo'lsa, u xolda $\alpha(x)\pm\beta(x)$; $\alpha(x)\,\beta(x)$; $f(x)\,\alpha(x)$; $S\alpha(x)$ (S= sonst) funktsiyalar ham cheksiz kichik miqdorlar buladi.

I s b o t : $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar, ya`ni $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$,

$\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$ bo'lgani uchun limit ta'rifiga asosan ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ topiladiki, $0<|x-a|<\delta$ shartlarda $|\alpha(x)|<\varepsilon/2$, $|\beta(x)|<\varepsilon/2$ tengsizliklar bir paytda o'rinli buladi. Natijada $0<|x-a|<\delta$ bo'lganda

$$|\alpha(x)\pm\beta(x)|\le |\alpha(x)|+|\beta(x)| <\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,$$

$$|\alpha(x)\,\beta(x)|= |\alpha(x)|\,|\beta(x)| <\varepsilon/2\;\varepsilon/2=\varepsilon^2/2,$$

$$|f(x)\,\alpha(x)|= |f(x)|\,|\alpha(x)| <|M|\,\varepsilon/2\,, \qquad |c\,\alpha(x)|=|c|\,|\alpha(x)| < |c|\,\varepsilon/2$$

tengsizliklar o'rinli buladi. Bulardan va limit ta'rifiga asosan

$$\lim_{x\to a}(\alpha(x)\pm\beta(x))=0, \quad \lim_{x\to a}\alpha(x)\,\beta(x)=0$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\,\alpha(x)=0, \quad \lim_{x\to a} c\,\alpha(x)=0$$

natijalarni olamiz. Teorema isbotlandi.

NATIJA: CHekli sondagi cheksiz kichik miqdorlarning algebraik yigindisi, kupaytmasi yana cheksiz kichik miqdordan iborat buladi.

Bu natijani oldingi teoremani bir necha marta kullab isbotlash mumkin.

LEMMA: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ tenglik o'rinli bulishi uchun f(x) funktsiya $f(x)=A+\alpha(x)$ ko'rinishda bulishi zarur va etarli. Bunda $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, ya`ni $\alpha(x)$ cheksiz kichik miqdordir.

Lemma isboti limit va cheksiz kichik miqdor ta'rifidan kelib chikadi.

ASOSIY TEOREMA: Agar $x\to a$ bo'lganda f(x) va g(x) funktsiyalar chekli limitlarga ega bo'lsalar, unda

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\pm \lim_{x\to a} g(x) \quad (1)$$

$$\lim_{x\to a} cf(x)= c\lim_{x\to a} f(x) \quad (2)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\ \lim_{x\to a} g(x) \quad (3)$$

tengliklar o'rinli buladi. Agar $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$ bo'lsa,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \quad (4)$$

tenglik o'rinlidir.

I s b o t. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$ bo'lsin. Bu xolda, lemmaga asosan, $f(x)=A+\alpha(x)$, $g(x)=B+\beta(x)$ deb yoza olamiz. Bu erda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funktsiyalar $x\to a$ bo'lganda cheksiz kichik miqdorlardir. Bu tengliklardan foydalanib

$$f(x)\pm g(x) =(A+\alpha(x)) \pm (V+\beta(x))=(A\pm V)+(\alpha(x) \pm\beta(x))$$

natijani olamiz. CHeksiz kichik miqdorlar xossasiga asosan bu erda $\gamma(x)=\alpha(x) \pm\beta(x)$ funktsiya $x\to a$ bo'lganda cheksiz kichik miqdor buladi. Bu xolda yukoridagi tenglikdan va lemmaga asosan

$$\lim_{x\to a} (f(x)\pm g(x)) =A\pm V= \lim_{x\to a} f(x)\pm \lim_{x\to a} g(x)$$

tenglik o'rinli ekanligiga ishonch xosil kilamiz.

Teoremadagi kolgan tengliklar ham shu tarzda isbotlanadi.

YUkorida kursatilganidek, funktsiya xar doim ham limitga ega bulavermaydi. SHu sababli funktsiya limitini hisoblashdan oldin uning mavjudligini tekshirib ko'rishga tugri keladi. SHu maksadda quyidagi teoremalarni isbotsiz keltiramiz:

TEOREMA 1: Agar $\varphi(x) \leq f(x)\leq\psi(x)$ tengsizliklar ixtiyoriy x uchun o'rinli bo'lib, $x\to a$ bo'lganda $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funktsiyalarining limitlari mavjud va $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)= \lim\limits_{x\to a}\psi(x)=A$ bo'lsa, u xolda $x\to a$ bo'lganda f(x) funktsiya uchun ham limit mavjud bo'lib, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ munosabat o'rinli buladi.

TEOREMA 2: Agarda f(x) funktsiya usuvchi (kamayuvchi) bo'lib, yukoridan (kuyidan) biror M(m) soni bilan chegaralangan bo'lsa, u xolda bu funktsiya $x\to a$ bo'lganda limitga ega va bu limit uchun $\lim\limits_{x\to a} f(x)\leq M$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x)\geq m$) munosabatlar o'rinli buladi.

Turli funktsiyalarning limitini hisoblashda quyidagi tengliklardan foydalanish mumkin:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e=2.7182818284\ldots\ldots$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}=a$$

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a, \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} = \alpha$$

Bular matematikada ajoyib limitlar deb ataladi va ularning isboti kelgusi mavzularda beriladi.

Funktsiya limitining iqtisodiyotda qo'llanilishi. Uzluksiz foiz stavkasi masalasi.

Bankdagi boshlangich omonat miqdori Q_0 ga teng. Bank xar yili r% ustama tulaydi. t yildan sung omonat miqdori Q_t ning miqdori topilsin.

Xar yili omonat miqdori r% ga oshsa, u xolda omonat xar yili (1+p/100) marta oshadi, ya`ni $Q_1=Q_0(1+p/100)$, $Q_2=Q_1(1+p/100)=Q_0(1+p/100)^2,\ldots$, $Q_t=Q_{t-1}(1+p/100)=Q_0(1+p/100)^t$.

Agar xar yili omonat k marta ustama foiz kushilsa, u xolda t yilda kt marta ustama foiz tulanadi, umumiy omonat miqdori $Q_t=Q_0(1+\frac{p}{100k})^{k\cdot t}$, ga teng buladi. (k=2 bo'lsa 1-yilda 2 marta, k=4 bo'lsa, xar kvartalda va k=12 bo'lsa, xar oyda, k=365 bo'lsa, xar kuni,k=8760 bo'lsa xar soatda va xakozo, $k\to\infty$ da uzluksiz ravishda ustama foiz tulanadi).

Agar $n\to\infty$ da

$$Q_t = \lim_{k\to\infty}\left[Q_0\left(1+\frac{p}{100k}\right)^{k\cdot t}\right] = Q_0\lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{100k}\right)^{\frac{100k}{p}}\right]^{\frac{pt}{100}} = Q_0 e^{\frac{pt}{100}}.$$

Bu formula omonat miqdorining eksponentsial konun asosida usishini kursatadi.

<u>O'z-o'zini nazorat etish savollari:</u>

1. Funktsiyaning chekli limiti kanday ta'riflanadiq
2. Funktsiyaning cheksiz limiti kanday ta'riflanadiq
3. Funktsiyaning chap (ung) limitlari deb nimaga aytiladiq
4. Kanday shartda funktsiyaning limiti mavjud buladiq
5. Limiti mavjud bulmagan funktsiyaga misol keltiring.
6. CHeksiz kichik miqdor deb nimaga aytiladiq
7. CHeksiz kichik miqdorlar kanday xossalarga egaq
8. Funktsiya limiti mavjudligining zaruriy va etarli sharti nimadan iboratq
9. Limitlarning asosiy xossalari nimalardan iboratq
10. Ajoyib limitlarni yoza olasizmiq

5.2. UZLUKSIZ FUNKTSIYALAR VA ULARNING XOSSALARI.

Tayanch iboralar: funktsiyaning nuqtadagi uzluksizligi, argument orttirmasi, funktsiya orttirmasi, funktsiyani oralikda uzluksizligi, asosiy elementar funktsiyalarning uzluksizligi, funktsiyani nuqtada chap va ung tomondan uzluksizligi, funktsiyaning uzilish nuqtalari, I va II tur uzilish nuqtalari, uzilish nuqtasida funktsiyani sakrashi, kesmada uzluksiz funktsiyalar va ularning xossalari.

R e j a :

1. Funktsiyaning nuqtadagi uzluksizligi ta'rifi.
2. Argument va funktsiya orttirmasi.
3. Funktsiyalar uzluksizligini orttirmalar orkali ifodalanishi.
4. Asosiy elementar funktsiyalarning uzluksizligi.
5. Uzluksiz funktsiyalarning asosiy xossalari.
6. Elementar funktsiyalarning uzluksizligi.
7. Funktsiyaning nuqtada chap va ung tomondan uzluksizligi.
8. Funktsiyaning oralik va kesmada uzluksizligi.
9. Funktsiyaning uzilish nuqtalari va ularning turlari.
10. Kesmada uzluksiz funktsiyaning xossalari.

Adabiyotlar:

[1] II bob, §13-16 [2] II bob, §9-10

y=f(x) funktsiya x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniklangan bo'lsin.

T A ` R I F : y=f(x) funktsiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi, agarda u bu nuqtada aniklangan va quyidagi shart bajarilsa:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)= f(x_0) \qquad (1)$$

$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$ ekanligini xisobga olib, (1) uzluksizlik shartini

$$\lim_{x\to x_0} f(x)= f(\lim_{x\to x_0} x)$$

kabi yozish mumkin.

Demak, f(x) funktsiya x_0 nuqtada uzluksiz bulishi uchun funktsiya olish va limit olish amallarini urnini almashtirish mumkin bulishi kerak ekan.

Amaliy masalalarda funktsiya uzluksizligini orttirma tushunchasi orkali tekshirish kulay.

Agar x nuqta x_0 nuqta atrofidan olingan bo'lsa, $x-x_0$ ayirma argument orttirmasi deyiladi va Δx kabi belgilanadi. Bu xolda $f(x)-f(x_0)$ ayirma funktsiya orttirmasi deyiladi va Δf yoki Δu kabi belgilanadi.

Demak, Δx argumentning uzgarishini, Δf esa funktsiya uzgarishini ifodalaydi. Agarda $x\to x_0$ bo'lsa, u xolda $\Delta x\to 0$ buladi. $x=x_0+\Delta x$ ekanligidan foydalanib, (1) uzluksizlik shartini

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0) \qquad (2)$$

ko'rinishida yozish mumkin. Bu shartni $\Delta f=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ ekanligidan foydalanib,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f=0 \qquad (3)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Demak f(x) funktsiya uzluksiz bulishi uchun argumentning "kichik" Δx uzgarishiga funktsiyaning ham "kichik" Δf uzgarishi mos kelishi kerak.

Misol sifatida $u=x^2$ funktsiyaning xar kanday x_0 nuqtada uzluksiz ekanligini (3) shart yordamida kursatamiz:

$$\Delta y=\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=$$
$$=x_0^2+2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x^2)-x_0^2=(2x_0+\Delta x)\Delta x\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=0$$

ASOSIY TEOREMA: Barcha asosiy elementar funktsiyalar aniklanish soxasidagi xar bir x_0 nuqtada uzluksizdir.

Bu teoremani isbotsiz kabul kilamiz.

TEOREMA: Agarda f(x) va g(x) funktsiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u xolda f(x)±g(x), f(x) g(x) funktsiyalar ham bu nuqtada uzluksiz buladi. Agarda kushimcha ravishda $g(x_0)\neq 0$ shart bajarilsa, f(x)/g(x) nisbat ham x_0 nuqtada uzluksizdir. Agarda $U_0=g(x_0)$ nuqtada f(x) funktsiya uzluksiz bo'lsa, f(g(x))=F(x) murakkab funktsiya ham x_0 nuqtada uzluksiz buladi.

Isbot: Teoremaning isboti limitlar xossalaridan va uzluksizlikning (1) shartidan kelib chikadi.

Masalan, h(x)=f(x)±g(x) funktsiyaning x_0 nuqtada uzluksizligini kursatamiz. Teorema shartiga asosan

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),\qquad \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$$

bo'lgani uchun

$$\lim_{x\to x_0} h(x)=\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)\pm g(x_0)=h(x_0).$$

Ta'rifga asosan h(x) funktsiya x_0 nuqtada uzluksiz buladi. Teoremaning kolgan kismini isboti talabalarga mustakil ish sifatida tavsiya etiladi.

Asosiy terema va bu teoremadan quyidagi natija kelib chikadi.

Natija: Barcha elementar funktsiyalar aniklanish soxasidagi xar bir x_0 nuqtada uzluksiz buladi.

T A ` R I F: u= f(x) funktsiya biror chekli yoki cheksiz (a,v) intervalning xar bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u shu intervalda uzluksiz deyiladi.

Masalan, $u=(1-x^2)^{-1/2}$ funktsiya (-1,1) intervalda uzluksizdir.

T A ` R I F : u=f(x) funktsiya a nuqtada aniklangan bo'lib,

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)=f(a)\ \left(\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a-0)=f(a)\right)$$

shartni qanoatlantirsa, u xolda f(x) funktsiya a nuqtada ungdan(chapdan) uzluksiz deyiladi.

Masalan,
$$y=\begin{cases}1, x\geq 0\\ -1, x<0\end{cases}\qquad (4)$$

funktsiya x=0 nuqtada ungdan uzluksiz, chunki

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} 1=1=f(0).$$

Ammo

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}(-1)=-1\neq f(0),$$

ya`ni x=0 nuqtada funktsiya chapdan uzluksiz emas.

Agarda u=f(x) funktsiya x=*a* nuqtada uzluksiz bo'lsa, u xolda bu funktsiya shu nuqtada ham chapdan, ham ungdan uzluksiz buladi.

Aksincha, x=*a* nuqtada funktsiya chapdan va ungdan uzluksiz bo'lsa, bu nuqtada funktsiya uzluksizdir.

SHunday qilib, f(x) funktsiyaning *a* nuqtada uzluksiz bulishi uchun

$$\lim_{x\to a+0} f(x)= \lim_{x\to a-0} f(x)= f(a) \qquad (5)$$

shart zarur va etarlidir.

<u>T A ` R I F:</u> u=f(x) funktsiya uchun biror *a* nuqtada (5) tenglik bajarilmasa, u shu nuqtada uzlukli, *a* esa uning uzilish nuqtasi deyiladi.

Masalan, (4) funktsiya uchun x=0, $u=(1-x^2)^{-2}$ funktsiya uchun esa x=±1 uning uzilish nuqtasi buladi.

Agarda *a* nuqta u=f(x) funktsiyaning uzilish nuqtasi bo'lib, bu nuqtada funktsiyaning chap va ung limitlari chekli sonlardan iborat bo'lsa, x=*a* funktsiyaning I tur uzilish nuqtasi deyiladi. Masalan, (4) funktsiya uchun x=0 I tur uzilish nuqtasi buladi. Bu xolda Δ=f(a+0)-f(a-0) funktsiyaning a nuqtadagi sakrashi deb ataladi.

Agarda u=f(x) funktsiyaning *a* uzilish nuqtasida uning chap va ung limitlaridan kamida bittasi cheksiz yoki mavjud bulmasa x=*a* II tur uzilish nuqtasi deyiladi.

Masalan,

$$y=\begin{cases} x^2, x\geq 0 \\ x^{-2}, x<0 \end{cases}$$

funktsiya x=0 nuqtada II tur uzilishga ega, chunki f(0+0)=0, f(0-0)=∞ bulmokda.

Xuddi shunday, $f(x)=(x-2)^{-1}$ funktsiya uchun x=2 II tur uzilish nuqtasi buladi, chunki f(2-0)= –∞, f(2+0)= ∞.

<u>T A ` R I F:</u> u=f(x) funktsiya [a,v] kesmada uzluksiz deyiladi, agarda u (a,v) intervalda uzluksiz, x=a (x=v) chegaraviy nuqtada ungdan(chapdan) uzluksiz bo'lsa.

Masalan, u=sinx funktsiya xar kanday [a,v] kesmada uzluksizdir.

Agarda funktsiya [*a*,*v*] kesmada uzluksiz bo'lsa, uning grafigining shu kesmaga mos keluvchi kismi yaxlit (uzluksiz) chizikdan iborat buladi. Agarda f(x) funktsiya x_0 nuqtada uzilishga ega bo'lsa, uning grafigi ham shu nuqtada uziladigan chizikdan iborat buladi. Uzluksizlikning bu geometrik talkini uzluksiz funktsiyalarning quyidagi xossalari va ularning isbotini tasavvur etishga imkon beradi.

<u>1 – xossa :</u> Agarda f(x) funktsiya [*a*,*v*] kesmada uzluksiz bo'lsa, bu kesmada kamida bitta shunday x_1 (x_2) nuqta mavjudki, xar kanday x∈[*a*,*v*] uchun $f(x_1)\geq f(x)$ ($f(x_2)\leq f(x)$) munosabat bajariladi.

Bu xossadagi $f(x_1)$ yoki $f(x_2)$ berilgan f(x) funktsiyaning [*a*,*v*] kesmadagi eng katta yoki eng kichik kiymati deb ataladi va

$$\max_{x\in[a,b]} f(x), \qquad \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

kabi belgilandi. Xakikatdan ham, funktsiya grafigining eng baland yoki eng past joylashgan nuqta yoki nuqtalaridan birining abstsissasi x_1 yoki x_2 deb olsak , xossada aytilgan tasdiq kelib chikadi.

Masalan, $f(x)=x^2$, $x\in[2,4]$ funktsiya uchun $x_1=2$, $x_2=4$ buladi, chunki bu kesmada $4\le x^2\le 16$, ya`ni $f(2)\le f(x)\le f(4)$ munosabat o'rinli.

2 - xossa: Agar f(x) funktsiya [a,v] kesmada uzluksiz va uning chegaralarida turli ishorali kiymatlarni kabul kilsa, ya`ni $f(a)\, f(v)<0$ shart bajarilsa, u xolda kamida bitta shunday $s\in(a,v)$ nuqta mavjudki, unda $f(s)=0$ tenglik bajariladi.

Bu xossaning geometrik ma`nosi shundan iboratki, kursatilgan shartlarda funktsiya grafigi [a,v] kesmada uzluksiz chizikdan iborat bo'lib, uning bir uchi OX koordinata ukidan pastda, ikkinchi uchi esa undan yukorida buladi. SHu sababli funktsiya grafigi OX ukini kamida bitta $x=s$ nuqtada kesib utadi va shu nuqtada $f(s)=0$ buladi.

Bu xossa yordamida $f(x)=0$ ko'rinishdagi tenglamaning ildizlari yotgan oraliklarni topish mumkin. Masalan, $x-\cos x=0$ tenglama $(0,\pi)$ oralikda ildizga ega, chunki $f(x)=x-\cos x$ funktsiya $[0,\pi]$ kesmada uzluksiz va $f(0)=-1<0$, $f(\pi)=\pi+1>0$. Demak kandaydir $x_0\in(0,\pi)$ nuqtada $f(x_0)=0$ buladi va x_0 berilgan tenglama ildizini ifodalaydi.

3 - xossa: Agarda f(x) funktsiya $[a,v]$ kesmada uzluksiz va $f(a)=A$, $f(v)=V$, $A\neq V$ bo'lsa, xar kanday $\mu\in(A,V)$ son uchun kamida bitta shunday $s\in(a,v)$ nuqta topiladiki, unda $f(s)=\mu$ tenglik o'rinli buladi.

Bu xossani geometrik nuqtai nazardan quyidagicha talkin etish mumkin. OU koordinata ukida joylashgan va $A<\mu<V$ shartni qanoatlantiradigan μ nuqtadan OX ukiga parallel tugri chizik utkazsak, bu tugri chizik $u=f(x)$, $x\in[a,v]$, funktsiya grafigini xech bulmaganda bitta M nuqtada kesib utadi. SHu nuqtaning absissasi $x=s$ uchun $f(s)=\mu$ tenglik bajariladi.

Masalan, $f(x)=x^3$, $x\in[1,3]$, funktsiya uchun A=1, V=27 va xar kanday $\mu\in(1,27)$ uchun $s=\sqrt[3]{\mu}$ deb olsak, $f(s)=s^3=(\sqrt[3]{\mu})^3=\mu$ tenglik bajariladi. Bu xossadan ushbu natijani chikarish mumkin:

Natija: Agarda f(x) funktsiya $[a,v]$ kesmada uzluksiz va bu erda uning eng katta va eng kichik kiymatlari M va m bo'lsa, u xolda funktsiya kiymatlari [m,M] kesmani to'liq tuldiradi.

O'z – o'zini nazorat etish savollari:

1. Kachon funktsiya nuqtada uzluksiz deyiladiq
2. Argument va funktsiya orttirmalari kanday aniklanadiq
3. Orttirmalar tilida funktsiya uzluksizligi kanday ifodalanadiq
4. Asosiy elementar funktsiyalar uzluksizmiq
5. Uzluksiz funktsiyalarning asosiy xossalari nimadan iboratq
6. Elementar funktsiyalar uzluksizligi xakida nima deyish mumkinq
7. Kachon funktsiya nuqtada chap (ung) tomondan uzluksiz deyiladiq
8. Funktsiyaning nuqtada uzluksiz bulishining zaruriy va etarli sharti nimadan iboratq
9. Funktsiyaning uzilish nuqtalari kanday aniklanadiq

10. Uzilish nuqtalari kanday turlarga ajratiladiq
11. Kachon funktsiya oralikda (kesmada) uzluksiz deyiladiq
12. Kesmada uzluksiz funktsiya kanday xossalarga egaq

VI BOB. DIFFERENSIAL HISOB.

6.1.FUNKTSIYA XOSILASI VA UNING GEOMETRIK, MEXANIK MA`NOSI.

Tayanch iboralar: xosila ta'rifi, xosilaning geometrik ma`nosi, xosilaning mexanik ma`nosi, differentsiallanuvchi funktsiya, differentsiallanuvchi funktsiyaning uzluksizligi.

R e j a :

1. Funktsiya xosilasi.
2. Xosilaning geometrik ma`nosi.
3. Xosilaning mexanik ma`nosi.
4. Differentsiallanuvchi funktsiyaning uzluksizligi.

Adabiyotlar:

[1] II bob, §1-2 [2] III bob, §1-4

u=f(x) funktsiya (a,v) oralikda aniklangan bo'lib, x va x+Δx shu oralikdagi nuqtalar bo'lsin. Bu xolda argumentning Δx orttirmasiga funktsiyaning Δf=f(x+Δx)-f(x) orttirmasi mos keladi.

T A ` R I F : u=f(x) funktsiya Δf orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbati Δx→0 bo'lganda chekli limitga ega bo'lsa, bu limit kiymati funktsiyaning x nuqtadagi xosilasi deb ataladi va $f'(x)$ yoki u′(x) kabi belgilanadi.

Ta'rifga asosan

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Misol sifatida f(x)=x^2 funktsiya xosilasini ta'rifga asosan topamiz: Δf=f(x+Δx)-f(x) = $(x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x + \Delta x) = 2x$$

Demak, $(x^2)' = 2x$ bular ekan.

u=f(x) funktsiya xosilasining geometrik ma`nosini aniklash uchun bu funktsiyaning grafigida abtsissasi x va x+Δx , ordinatalari esa f(x) va f(x+Δx) bo'lgan M va N nuqtalarni olamiz. Bu nuqtalardan utuvchi MN kesuvchining OX ukining musbat yunalishi bilan xosil kilgan burchagini β kabi belgilaymiz. Bu xolda tegishli chizmani chizib, $tg\beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ natijani olish mumkin. endi Δx→0 bo'lsin. Bu xolda N nuqta M nuqtaga yakinlashib boradi, MN kesuvchi esa funktsiya grafigining M nuqtasiga utkazilgan urinmaga yakinlashib boradi. Bu urinmaning OX uki musbat yunalishi bilan xosil kilgan burchagini α deb belgilasak, yukoririda aytilganlarga kura $\Delta x \to 0$ bo'lganda $\beta \to \alpha$ yoki tg $\beta \to$ tgα munosobat o'rinli buladi. Demak,

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x).$$

SHunday qilib, f′(x) xosila kiymati funktsiya grafigining M(x,f(x)) nuqtadagi urinmasining k=tgα burchak koeffitsientiga teng bular ekan.

Xosilaning mexanik ma`nosini ko'rsatish uchun x argumentni vaqt momenti, u=f(x) funktsiyani esa tugri chizik buylab xarakatlanayotgan moddiy nuqtaning *x* vaqt momentigacha bosib utgan masofasi deb karaymiz. Bu xolda Δf orttirma Δx vaqt ichida moddiy nuqtaning bosib utgan yulini, Δf/Δx nisbat esa uning *v* (urtacha) tezligini ifodalaydi. $\Delta x \to 0$ bo'lganda *v* (urtacha) tezlik moddiy nuqtaning *x* vaqt momentidagi
v (oniy) tezligiga yakinlashib boradi, ya`ni

$$v(оний) = \lim_{\Delta x \to 0} v(уртача) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x).$$

Demak, $f'(x)$ xosila f(*x*) funktsiyaning uzgarish tezligini ifodalaydi.

Agar u=f(x) funktsiya x nuqtada chekli f(x) xosilaga ega bo'lsa, u shu nuqtada differentsiallanuvchi deyiladi. Funktsiyaning differentsiallanuvchanligi va uzluksizligi orasidagi boglanish quyidagi teorema orkali ifodalanadi.

TEOREMA: Agarda u=f(x) funktsiya *x* nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, u shu nuqtada uzluksiz buladi.

I s b o t : Funktsiya uzluksizligi ta'rifiga asosan

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \qquad (2)$$

munosabatni ko'rsatish kifoya. Xosila ta'rifini ifodalovchi (1) tenglik va limitni mavjudligi xakidagi oldin kurib utilgan lemmaga asosan

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$$

tenglikni yozish mumkin. Bu erda $\Delta x \to 0$ bo'lganda α(Δx) cheksiz kichik miqdor buladi. Bu xolda, limit hisoblash qoidalariga asosan,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} (f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)) = f'(x) \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

Demak, (2) munosabat o'rinli va shu sababli f(x) funktsiya *x* nuqtada uzluksiz buladi.

I Z O X : Teoremadagi tasdiqning teskarisi umuman olganda o'rinli emas.

Masalan, f(x)=│x│ funktsiya x=0 nuqtada uzluksiz, ammo bu nuqtada differentsiallanuvchi emas. Xakikatan ham, x=0 nuqtaga Δx orttirma berganimizda Δf=f(0+Δx)- f(0)=Δx tengik o'rinli buladi. Bu erdan

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \qquad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Demak, $\Delta x \to 0$ bo'lganda Δf/Δx nisbat limitga ega emas, ya`ni $f^{/}(0)$ xosila mavjud emas.

T A ` R I F : u=f(x) funktsiya (a,v) oralikning xar bir nuqtasida differentsiallanuvchi bo'lsa, u shu oralikda differentsiallanuvchi deb ataladi.

Masalan, $u=x^2$ funktsiya xar kanday oralikda differentsiallanuvchi. $u=|x|$ funktsiya esa x=0 nuqtani uz ichiga olmaydigan oraliklarda (masalan, (-1,0), (0,1), (2,4) oraliklarda) differentsiallanuvchi, x=0 nuqtani uz ichiga oluvchi oraliklarda (masalan, (-1,1), (-5,3) oraliklarda) differentsiallanuvchi bulmaydi

Xosilaning iqtisodiy ma`nosi.

Mexnat unumdorligi haqidagi masala.

t vaqtda ishlab chikarilgan maxsulot xajmi u=u(t) funktsiya orkali ifodalansin va $t=t_0$ vaqtdagi mexnat unumdorligini topish kerak bo'lsin. t_0 dan $t_0+\Delta t$ vaqtgacha ishlab chikarilgan maxsulot miqdori $u_0=u(t_0)$ dan $u_0+\Delta u=u(t_0+\Delta t)$ gacha uzgaradi. U xolda urtacha muxnat unumdorligini shu vaqt oraligida $z_{урт}=\dfrac{\Delta u}{\Delta t}$ ni tashkil etadi. t_0 vaqtdagi mexnat unumdorligini esa $\Delta t\to 0$ dagi limitni hisoblash orkali hisoblash mumkin, ya`ni $z=\lim\limits_{\Delta t\to 0} z_{урт}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta t}=u'(t)$ bu esa u(t) funktsiyadan vaqt buyicha olingan xosilani ifodalaydi.

Xosilaning iktisodiy mazmunini ifodalovchi yani bir masala.

Ishlab chikarish xarajatlarini u ni ishlab chikarilgan maxsulot miqdori x ning funktsiyasi deb karash mumkin: u=u(x), Δx- maxsulotning usishi (orttirmasi), Δu- ishlab chikarish xarajatlarning usishi (orttirmasi) bo'lsa, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$-ishlab chikarilgan maxsulot birligiga mos keladigan sarf-xarajatning urtacha orttirmasi.

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=y'(t)$- xosila ishlab chikarish xarajatlarning limit kiymati bo'lib, takriban kushimcha maxsulot birligini ishlab chikarishga ketgan kushimcha xarajatni ifodalaydi. SHunday qilib xosila, biror iktisodiy ob`ekt yoki jarayonning vaqt yoki boshka biror iktisodiy omilga nisbatan uzgarish tezligini ifodalaydi.

Iktisodiy jarayonlarni urganish va boshka amaliy masalalarni echish uchun kupincha funktsiyaning elastikligi tushunchasi ishlatiladi. u(x) funktsiyaning elastikligi $E_x(u)$ deb u=u(x) funktsiya nisbiy orttirmasi $\dfrac{\Delta y}{y}$ ni argument x ning nisbiy orttirmasi $\dfrac{\Delta x}{x}$ ga nisbatining $\Delta x\to 0$ dagi limitiga ataladi, ya`ni $E_x(u)=$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{y}:\dfrac{\Delta x}{x}\right)=\dfrac{x}{y}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{x}{y}\cdot y'$ funktsiyaning elastikligi x argument 1% ga uzgarganda u=u(x) funktsiyaning necha % ga uzgarishini taxminan ifodalaydi. Funktsiya elastikligi quyidagi xossalarga ega.

1. u=u(x) funktsiyaning elastikligi uning usish sur`ati $T_u=(\ln y)'=y'/y$ bilan x ning kupaytmasiga teng, ya`ni $E_x(u)=x\cdot T_u$.

2. $u(x)\cdot v(x)$ funktsiyaning elastikligi ular elastiklarining yigindisiga teng. $E_x(u\cdot v)=E_x(u)+E_x(v)$.
3. $\frac{u(x)}{v(x)}$ ning elastikligi ular elastiklarining ayirmasiga teng. $E_x(u/v)=E_x(u)-E_x(v)$.

Funktsiya elastikligi talab va iste`molni taxlil etishda qo'llaniladi. Masalan, talab – u x- baxoning yoki daromadning funktsiyasi bo'lsa, u xolda $E_x(u)=x\cdot u'/y$ elastiklik koeffitsienti baxo yoki daromad x 1% ga uzgarganda talab yoki iste`mol miqdori u necha % ga uzgarishini ifodalaydi.

Bulardan tashkari ishlab chikarish va iste`mol, talab va taklif nazariyasi konunlari ham anik matematik talkinga ega ekanligini quyidagi misollarda ko'rish mumkin.

1. Ishlab chikaruvchi uchun tovar ishlab chikarishning optimal darajasi limit xarajatlarini limit daromadga tengligi bilan aniklanadi, ya`ni x_0 ishlab chikarish darajasi ishlab chikaruvchi uchun optimal buladi, agarda $LS(x_0)=LD(x_0)$, LS-limit xarajatlar, LD-limit daromad. Agar S(x) deb foyda funktsiyasini belgilasak, u xolda $S(x)=D(x)-S(x)$. Hamda ishlab chikarish darajasi optimal bulishi uchun foyda maksimal bulishi kerak. x ning shunday x_0 kiymatini topish kerakki S(x) funktsiya maksimumga erishsin. Ferma teoremasiga asosan bunday nuqtada $S'(x)=0$ buladi. $S'(x)= D'(x)- S'(x)$, ya`ni $S'(x_0)= D'(x_0)- S'(x_0)$ yoki $D'(x_0) = S'(x_0)$ bundan esa $LD'(x_0) =LS'(x_0)$ kelib chikadi.
2. Tejamlirok ishlab chikarish darajasi ishlab chikarish nazariyasining eng muxim tushunchalaridan biridir, uning moxiyati tovar ishlab chikarishning urtacha xarajatlarini minimumlashtirishdan iborat. Bu iktisodiy konun quyidagicha: ya`nada tejamlirok ishlab chikarish darajasi urtacha va limit ishlab chikarish xarajatlarining tengligi bilan aniklanadi. Urtacha xarajatlar US(x) - $\frac{S(x)}{x}$ bilan aniklanadi, ya`ni tovar ishlab chikarish xarajatlarini ishlab chikarilgan tovar miqdori x ga nisbati orkali aniklanadi. Bu funktsiyaning minimumi xosilani nolga aylantiruvchi nuqtada buladi.

   $(US(x))'= \left(\frac{S(x)}{x}\right)' = \frac{S'\cdot x - S}{x^2} \Rightarrow S'\cdot x - S=0$ yoki $S'(x)=\frac{S(x)}{x}$, ya`ni $LS(x)=US(x)$.
3. Tanikli iktisodiy konunlardan biri kamayuvchi daromad konuni quyidagichadir. Ishlab chikarishning usishi natijasida xar birlik yangi ishlab chikarish resursiga mos keladigan kushimcha maxsulot miqdori ma`lum bir vaqtdan kamaya boradi, boshkacha qilib aytganda $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ miqdor (Δx- resurs orttirmasi, Δu- ishlab chikarish maxsulot orttirmasi) x usishi bilan kamaya boradi. SHunday qilib, z=f(x) x- ishlab chikarishga jalb etilgan resurs miqdoriga boglik ishlab chikarilgan maxsulot funktsiyasi kamayuvchi funktsiyadir.

4. u=u(x) – foydalalik funktsiyasi (x-tovar, u-foydalilik) ham kamayuvchi funktsiyadir. Kamayuvchan foydalilik konuni quyidagicha: tovar miqdorining usishi bilan uning kushimcha foydaliligi kamaya boradi.

Uz-uzini nazorat etish savollari:

1. Funktsiyaning nuqtadagi xosilasi kanday ta’riflanadiq
2. Xosilaning geometrik ma`nosi nimadan iboratq
3. Xosilaning mexanik ma`nosi nimadan iboratq
4. Differentsiallanuvchi funktsiyaning uzluksizligi xakida nima deyish mumkinq
5. Uzluksiz funktsiyaning differentsiallanuvchanligi tugrisida nima deyish mumkinq
6. Kachon funktsiya oralikda differentsiallanuvchi deyiladiq

6.2. FUNKTSIYANI DIFFERENTSIALLASH QOIDALARI. XOSILALAR JADVALI.

Tayanch iboralar: xosilani topish algoritmi, algebraik yigindi xosilasi, kupaytma xosilasi, bulinma xosilasi, murakkab funktsiya xosilasi, teskari funktsiya xosilasi, asosiy elementar funktsiyalarning xosilalari, xosilalar jadvali.

R e j a :

1. Funktsiya xosilasini ta’rif buyicha hisoblash algoritmi.
2. Funktsiyalar algebraik yigindisining xosilasi.
3. Funktsiyalar kupaytmasining xosilasi.
4. Funktsiyalar bulinmasining xosilasi.
5. Murakkab funktsiyaning xosilasi.
6. Teskari funktsiya xosilasi.
7. Xosilalar jadvali.

Adabiyotlar:

[1] III bob, §3-9 [2] III bob, §5-15

Umumiy xolda u=f(x) funktsiyaning xosilasini topish, ya`ni uni differentsiallash, quyidagi algoritm buyicha amalga oshiriladi:

1) x argumentga $\Delta x \neq 0$ orttirma berib, $x+\Delta x$ nuqtani topamiz;
2) funktsiya orttirmasini $\Delta f = f(x+\Delta x)-f(x)$ tenglik buyicha hisoblaymiz;
3) $\Delta f/\Delta x$ nisbatni topamiz va uning $\Delta x \to 0$ bo’lgandagi limitini hisoblaymiz. Bu limit mavjud bo’lsa, uning kiymati $f'(x)$ xosilani aniklaydi.

Misol sifatida f(x)=sinx funktsiya xosilasini yukoridagi algoritm buyicha topamiz:

1) x va $x+\Delta x$ nuqtalarda funktsiyani hisoblaymiz;

2) trigonometrik formuladan foydalanib, funktsiya orttirmasini quyidagicha yozamiz:

$$\Delta f=\sin(x+\Delta x)-\sin x= 2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)$$

3) $\Delta f/\Delta x$ nisbatni tuzamiz va uning limitini hisoblaymiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta f/\Delta x)= \lim_{\Delta x\to 0} 2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)/\Delta x=$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\sin(\Delta x/2)/(\Delta x/2)\cdot \lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2)=1\cdot\cos x=\cos x.$$

Bu erda kupaytmaning limiti, $\lim_{x\to 0}\sin x/x=1$ ajoyib limitdan va $u=\cos x$ funktsiya uzluksizligidan foydalanildi.

Demak, $(\sin x)'=\cos x$ buladi. Xuddi shunday usulda $(\cos x)'= -\sin x$ ekanligi aniklanadi. Bundan tashkari

$$(a^x)'= a^x\ln a\ ,\ (\log_a x)'= \frac{1}{x}\log_a e$$

ekanligini isbotlash mumkin.

Ammo, xar kanday funktsiya xosilasini bu algoritm buyicha hisoblash oson emas va muximi shart ham emas. Umumiy xolda funktsiya xosilasini hisoblashni quyidagi differentsiallash qoidalari buyicha amalga oshirish mumkin.

1- qoida: Uzgarmas S soning xosilasi nolga teng , ya`ni $(S)'=0$.

<u>I s b o t :</u> Uzgarmas S sonni x argumentning xar kanday kiymatida bir xil kiymat kabul kiluvchi $f(x)=S$ funktsiya deb karash mumkin. Bu xolda,

$$\Delta f= f(x+\Delta x)-f(x)=S-S=0,\qquad \Delta f/\Delta x=0,$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0.$$

2-qoida: *u=u(x), v=v(x)* funktsiyalar *x* nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, bu nuqtada $u\pm v$, $u\cdot v$ va $v(x)\neq 0$ shartda u/v funktsiyalar ham differentsiallanuvchi bo'lib, ularni hisoblash uchun

$$(u\pm v)'= u'\pm v'\ ,\quad (u\cdot v)'= u'\cdot v + u\cdot v'\ ,\quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

formulalar o'rinli buladi.

<u>I s b o t :</u> Funktsiya orttirmasi ta'rifidan foydalanib, xar kanday Δx argument orttirmasida $\Delta(u\pm v)=\Delta u\pm\Delta v$ ***e***kanligini ko'rsatish mumkin. Bu xolda limit xossasi va xosila ta'rifiga asosan

$$(u+v)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\pm\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'+v'.$$

Xuddi shunday,

$$\Delta(u\cdot v) = u\cdot\Delta v +\Delta u\cdot v +\Delta u\cdot\Delta v,\qquad \Delta\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{u\Delta v-u\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

munosobatlardan foydalanib, 2-qoidadagi kolgan formulalarni ham isbotlash mumkin.

<u>Natija 1:</u> Funktsiyaga ixtiyoriy S uzgarmas sonni kushsak, uning xosilasi uzgarmaydi.

Xakikatdan ham $(f(x)+S)'=f'(x)+S'=f'(x)+0=f'(x)$.

Natija 2 : Uzgarmas S kupaytuvchini xosila belgisidan tashkariga chikarish mumkin.

Xakikatdan ham, kupaytmaning xosilasi formulasi va 1-qoidaga asosan

$$(S\cdot f(x))'=S'\cdot f'(x)+S\cdot f'(x)=0\cdot f(x)+S\cdot f'(x)=S\cdot f'(x)$$

Natija 3 : $(tgx)'=1/\cos^2 x$, $(ctgx)'=-1/\sin^2 x$.

Xakikatan ham, bulinmaning xosilasi formulasiga kura

$$(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Xuddi shunday ravishda $(ctgx)'$ xosila topiladi.

3-qoida: *u=f(u)* murakkab funktsiyada *f(u)* va *u(x)* funktsiyalar argumentlari buyicha differentsiallanuvchi bo'lsin. Bu xolda $u=f(u)$ murakkab funktsiya x buyicha differentsiallanuvchi bo'lib, uning xosilasi $f'_x=f'(u)\cdot u'(x)$ formula bilan topiladi.

I s b o t : *u(x)* funktsiya differentsiallanuvchi bo'lganligidan uning uzluksizligi kelib chikadi va shu sababli $\Delta x\to 0$ bo'lganda $\Delta u\to 0$ buladi. Xosila ta'rifiga asosan

$$f'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'(u)\cdot u'(x).$$

Masalan, $(\sin x^2)'=(i=x^2)=(\sin i)'_x=\cos i\cdot i'=2x\cos x^2$. Bu qoidaning tadbiki sifatida $u=x^\alpha$ darajali funktsiyaning u' xosilasini topamiz. Bu xolda

$$\ln u=\ln x^\alpha=\alpha\ln x\Rightarrow(\ln u)'_x=(\alpha\ln x)'\Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{\alpha}{x}\Rightarrow y'=\frac{\alpha}{x}y=\frac{\alpha}{x}x^\alpha=\alpha\cdot x^{\alpha-1}.$$

4-qoida:. $u=f(x)$ differentsiallanuvchi va $f'(x)\neq 0$ bo'lsa, $x=f^{-1}(u)$ teskari funktsiya ham differentsiallanuvchi buladi va uning xosilasi $x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$ formula buyicha topiladi.

I s b o t : $x=f^{-1}(u)$ teskari funktsiyaning argument orttirmasi $\Delta u\neq 0$ bo'lgandagi orttirmasi Δx bo'lsin. Berilgan f(x) funktsiya differentsiallanuvchi bo'lgani uchun uzluksizdir va shu sababli unga teskari $f^{-1}(u)$ funktsiya ham uzluksiz buladi. Demak, $\Delta u\to 0$ bo'lganda $\Delta x\to 0$ buladi. Bu xolda, xosila ta'rifiga asosan,

$$x_u'=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^{-1}=\frac{1}{y'_x}.$$

Misol sifatida u=arcsinx funktsiya xosilasini topamiz. Bu erda D{f}=[-1;1] , E{f}=[-π/2, π/2] bo'lgani uchun, x=siny teskari funktsiyaning xosilasi $x'_y=\cos y\neq 0$, u $\in$(-π/2 π/2), shartni qanoatlantiradi. Bu xolda (arcsin x)′=

$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}$. Ammo u∈(-π/2 π/2) bo'lganda cosy > 0 va cosy $= \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$, x∈(-1,1) tenglik o'rinli. Bu natijani oldingi tenglikka kuyib, (arcsinx)′=$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ formulani xosil kilamiz. Xuddi shunday usulda (arcsos x)′= $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, (arctg x)′= $\frac{1}{1+x^2}$, (arcctg x)′= $-\frac{1}{1+x^2}$ formulalarni xosil kilish mumkin.

SHunday qilib, barcha asosiy elementar funktsiyalar aniklanish soxasida differentsiallanuvchi va ularning xosilalari quyidagi formulalar bilan hisoblanadi:

1) $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, α- ixtiyoriy xakikiy son;

2) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $(e^x)' = e^x$; 3) $(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

4) (sinx)'= cosx , (cosx)′= - sinx , (tgx)' = $= \frac{1}{\cos^2 x}$ (ctgx)′ $= -\frac{1}{\sin^2 x}$

5) (arcsinx)′= - (arccosx)′ = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, (arctg x)′= - (arcctg x)′= $\frac{1}{1+x^2}$

Bu xosilalar jadvalidan va kurib utilgan

I. (S)′= 0 II. $(u \pm v)' = u' \pm v'$, III. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$,

IV. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ V. $[f(u)]' = f'_u \cdot u'_x$ VI. $x'_y = \frac{1}{y'_x}$

xosila olish qoidalaridan foydalanib, xar kanday elementar funktsiyaning xosilasini hisoblash mumkin.

Masalan, $(e^x \cdot \sin 2x)' = (e^x)'\sin 2x + e^x(\sin 2x)' = e^x \cdot \sin 2x + e^x \cdot \cos 2x \cdot (2x)' =$
$= (\sin 2x + 2\cdot\cos 2x)\, e^x$,

$$(\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{cosx}{\sin x} = ctgx.$$

<u>O'z-o'zini nazorat etish savollari:</u>

1. Ta'rif buyicha funktsiya xosilasini topish algoritmi kanday kadamlardan iboratq
2. Uzgarmas sonning xosilasi nimaga tengq
3. Funktsiyalar algebraik yigindisini xosilasi kanday hisoblanadiq
4. Funktsiyalar kupaytmasining xosilasi kanday topiladiq
5. Funktsiyalar nisbatining xosilasi kanday hisoblanadiq
6. Xosila olishda uzgarmas kupaytuvchini nima kilish mumkinq
7. Murakkab funktsiyaning xosilasi kanday topiladiq
8. Teskari funktsiyaning xosilasi kanday topiladiq
9. Asosiy elementar funktsiyalarning xosilalarini yozing.

6.3. KESMADA DIFFERENTSIALLANUVCHI FUNKTSIYALAR HAQIDAGI TEOREMALAR.

Tayanch iboralar: Roll teoremasi, Lagranj teoremasi, Koshi teoremasi.

R e j a :

1. Kesmada differentsiallanuvchi funktsiyalar.
2. Roll teoremasi.
3. Lagranj teoremasi.
4. Koshi teoremasi.

Adabiyotlar:

[1] III bob, §19 [2] IV bob, §1-3

Biz kuyida differentsial xisobning asosiy teoremalaridan bo'lib hisoblanadigan teoremalarni keltiramiz.

1-TEOREMA (Roll teoremasi): f(x) funktsiya [a, b] kesmada uzluksiz va uning ichki nuqtalarida differentsiallanuvchi bo'lib, chegaralarida teng kiymatlar kabul kilsin, ya`ni f($a$)=f($b$) bo'lsin. U xolda shu kesma ichida kamida bitta shunday "s" nuqta topiladiki, unda funktsiya xosilasi nolga teng, ya`ni f'(c)=0 buladi.

I s b o t : Kesmada uzluksiz funktsiya shu kesmada uzining eng kichik (m) va eng katta (M) kiymatlariga erishishi bizga ma`lum.

Agar m=M bo'lsa, u xolda albatta f(x)=const buladi va teorema tasdigi kesmaning xar bir nuqtasida bajariladi.

Aytaylik m<M bo'lsin. Kesma chegaralarida funktsiya kiymatlari uzaro teng bo'lgani uchun funktsiyaning eng katta va eng kichik kiymatlari kesmaning fakat ichki nuqtalarida erishiladi.

Agar biror a<c<b nuqtada f(s) = M bo'lsa, u xolda $\Delta f(c)=f(c+\Delta x)-f(c) < 0$ buladi. Bu erdan quyidagi natijalar kelib chikadi:

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \le 0, \text{ agar } \Delta x>0 \text{ bo'lsa,}$$

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \ge 0, \text{ agar } \Delta x<0 \text{ bo'lsa.}$$

Kesmaning ichki nuqtalarida funktsiyaning differentsialla-nuvchanligidan foydalanib, yukoridagi munosabatlarda limitga utsak, u xolda quyidagi xulosalarga kelamiz:

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \le 0 \quad \text{va} \quad f'(c)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \ge 0$$

Ammo f'(c)≥0 va f'(c)≤0 tengsizliklar fakat f'(c)=0 bo'lgandagina birgalikda buladi.

f(c)=m xol ham xuddi shunday kuriladi. Teorema isbot kilindi.

SHunday qilib, differentsiallanuvchi funktsiyaning teng kiymatlari orasida funktsiya xosilasining xech bulmaganda bitta noli mavjud bular ekan.

Roll teoremasi quyidagi geometrik talkinga ega: uzluksiz funktsiya (a, b) oralikdagi xar bir nuqtada yagona urinmaga ega bo'lsa va kesmaning chegaralarida bir xil kiymatlar kabul kilsa, u xolda shu urinmalar orasida kamida bittasi OX ukiga parallel buladi.

2-TEOREMA (Lagranj teoremasi): f(x) funktsiya [a,b] kesmada uzluksiz va kesmaning ichki nuqtalarida xosilaga ega bo'lsa, u xolda (a,b) oralikda kamida bitta shunday "s" nuqta topiladiki, unda

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad \text{yoki} \quad f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

tenglik o'rinli buladi.

<u>I s b o t :</u> Teorema shartini qanoatlantiruvchi f(x) funktsiya orkali ushbu yordamchi funktsiyani kiritamiz:

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Bu funktsiyaning (a,b) oralikdagi xosilasini topamiz:

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Kiritilgan φ(x) funktsiya $\varphi(a)=0$ va $\varphi(b)=0$ shartlarni qanoatlantiradi. Unda Roll teoremasiga asosan kamida bitta shunday s nuqta topiladiki, s$\in$(a,b) va $\varphi'(s)=0$ buladi. Bundan

$$\varphi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

natija kelib chikadi. Teorema isbot buldi.

Lagranj teoremasining geometrik ma`nosi shundan iboratki, f(x) funktsiya grafigining A(a, f(a)) va V(b, f(b)) nuqtalarini tutashtiruvchi AV vatarga parallel va kandaydir S(s, f(c)) nuqtadan utuvchi urinma mavjud.

3-*TEOREMA* (Koshi teoremasi): f(x) va g(x) funktsiyalar [a,b] kesmada uzluksiz va uning ichki nuqtalarida differentsiallanuvchi bo'lsin. Agar $\forall$ x$\in$(a,b) uchun $g'(x)\neq 0$ bo'lsa, u xolda kamida bitta shunday s$\in$(a,b) nuqta topiladiki, unda ushbu tenglik o'rinli buladi:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

<u>I s b o t:</u> Teorema shartiga kura $\forall$x$\in$(a,b) uchun $g'(x)\neq 0$ ekanligidan g(b)$\neq$g(a) kelib chikadi. Xakikatan ham, agar g(b)=g(a) bo'lsa, unda Roll teoremasiga asosan, kamida bitta "s" nuqtada $g'(s)=0$ bular edi. Bu esa teorema shartiga zid. SHu sababli quyidagi yordamchi funktsiyani kiritish mumkin:

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

Bu funktsiya [a,b] kesmada aniklangan va uzluksiz bo'lib,

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$$

xosilaga ega. Kiritilgan yordamchi F(x) funktsiya F(*a*)= F(b)=0 shartni qanoatlantirishini tekshirib ko’rishimiz mumkin. Demak, F(x) funktsiya [*a*,b] kesmada Roll teoremasining hamma shartlarini qanoatlantiradi. SHuning uchun [*a*,b] kesma ichida kamida bitta shunday s nuqta (*a*<s<b) topiladiki, unda F′(s)=0 buladi, ya`ni

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

Bundan esa teorema tasdigi tugri ekanligi kelib chikadi, ya`ni

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Izox: Koshi teoremasidan xususiy g(x)=x xolda Lagranj teoremasi kelib chikadi.

Kurib utilgan bu uchta teoremaning ahamiyati funktsiyani tula tekshirish va aniqmasliklarni ochishda kurinadi.

O’z-o’zini nazorat etish savollari:

1. Roll’ teoremasini shartlari va tasdigi nimadan iboratq
2. Roll’ teoremasining geometrik ma`nosini kursating.
3. Lagranj teoremasini ifodalang.
4. Lagranj teoremasining geometrik ma`nosi nimadan iboratq
5. Koshi teoremasi kanday ifodalanadiq
6. Kaysi xolda Koshi teoremasidan Lagranj teoremasi kelib chikadiq

6.4. FUNKTSIYA DIFFERENTSIALI. YUKORI TARTIBLI XOSILA VA DIFFERENTSIALLAR.

Tayanch iboralar: funktsiya differentsiali, differentsial mavjudligini zaruriy va etarli sharti, algebraik yigindi differentsiali, kupaytma differentsiali, bulinma differentsiali, differentsialning invariantligi, yukori tartibli xosilalar, yukori tartibli differentsiallar, parametrik funktsiya xosilasi.

M a ` r u z a   r e j a s i :

1. Funktsiya differentsiali.
2. Differentsialning takribiy xisobdagi tatbigi.
3. Differentsialning geometrik ma`nosi.
4. Differentsiallash qoidalari.
5. YUkori tartibli xosilalar.
6. YUkori tartibli differentsiallar.
7. Parametrik funktsiya xosilasi.

Adabiyotlar:

[1] III bob, §12-15, § 17-18 [2] III bob, §22-23

Berilgan u=f(x) funktsiyada x argument orttirmasi Δx bo'lganda funktsiya orttirmasi Δf=f(x+Δx)–f(x) kabi aniklanishini eslatib utamiz.

TA'RIF: Agarda $\Delta x\to 0$ bo'lganda funktsiya orttirmasini

$$\Delta f=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\,\Delta x \qquad (1)$$

ko'rinishda ifodalab bo'lsa, unda A·Δx ifoda shu funktsiyaning ***differentsiali*** deyiladi va df kabi belgilanadi. Bunda A Δx ga boglik emas, $\alpha(\Delta x)$ esa cheksiz kichik miqdordir.

Demak, funktsiya differentsiali uning orttirmasini Δx ga nisbatan chizikli kismini ifodalaydi.

Ta'rif buyicha, ya`ni (1) tenglik orkali funktsiya differentsialini topish ancha murakkab masaladir. SHu sababli uni osonrok usulda topish masalasi paydo buladi. Bu masala quyidagi teoremada uz echimini topadi.

TEOREMA: Agar u=f(x) funktsiya biror (a,v) oralikda differentsiallanuvchi, ya`ni f'(x) xosilaga ega bo'lsa, uning differentsiali

$$df=f'(x)\cdot\Delta x \qquad (2)$$

formula bilan topilishi mumkin.

Isbot: Xosila ta'rifi va limitning mavjudligi xakidagi lemmaga (28-MA'RUZAga karang) asosan quyidagi tengliklarni yozish mumkin:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x)\Rightarrow\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(\Delta x)\Rightarrow\Delta f=f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$$

Oxirgi tenglikni (1) bilan solishtirib va differentsial ta'rifidan foydalanib, (2) formulaga ega bulamiz. Teorema isbot buldi.

Endi f(x)=x xususiy xolni kuramiz. Bu xolda df =dx buladi va (2) formulaga asosan dx=(x)′·Δx=Δx. Demak *x* erkli uzgaruvchi (argument) uchun Δx=dx, ya`ni orttirma va differentsial tushunchalari bir narsani ifodalaydi. SHu sababli differentsialni hisoblashning (2) formulasini

$$df=f'(x)dx \qquad (3)$$

ko'rinishda yozish mumkin.Demak, funktsiya differentsialini topish uchun uning xosilasini dx ga kupaytirish kifoya. Masalan, $dx^2=(x^2)'dx=2x\,dx$, dsinx=(sinx)′dx=cosx dx buladi.

(3) formuladan xosilani $f'(x)=\dfrac{df}{dx}$ kabi belgilash ma`nosi kelib chikadi.

(1) tenglik va differentsial ta'rifidan

$$\Delta f=df+\alpha(\Delta x)\Delta x \qquad (4)$$

tenglikni yozish mumkin. Bu tenglikdan argument orttirmasi Δx kichik bo'lganda funktsiya orttirmasi Δf va differentsiali df kiymatlari bir-biriga yakin bulishini, ya`ni $\Delta f\approx df$ bulishini kuramiz.

<u>1-Misol.</u> $f(x)=x^2$ funktsiyaning x=40 va Δx=0,01 bo'lgandagi orttirmasi va differentsiali topilsin.

Echish. $df=2xdx=2\cdot 40\cdot 0{,}01=0{,}8$

$\Delta f=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2=2\cdot 40\cdot 0{,}01+0{,}0001=0{,}8+0{,}0001=0{,}8001.$

Bu natijalardan kurinib turibdiki, Δf va df kiymatlari anchalik yakin ekan. SHu sababli (4) formuladan ushbu takribiy hisoblash formulasini keltirib chikarish mumkin:

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x \qquad (5)$$

(5) formula takribiy hisoblashlarda keng foydalaniladi.

2-misol. sin31° hisoblansin.

Echish. $f(x)=\sin x$ funktsiyani kiritamiz. Unda $f'(x)=\cos x$. va $x=30°$, $\Delta x=1°$ desak, u xolda (5) formuladan quyidagi natijani olamiz:

$$\sin 31^0=\sin(30°+1°)\approx\sin 30°+\cos 30°\cdot 1°=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{1}{2}+\frac{1{,}73}{2}\cdot\frac{3{,}14}{180}=0{,}52.$$

Bunda $1°=\pi/180$ ekanligidan foydalandik. Demak, $\sin 31°\approx 0{,}52$.

3-misol. $\sqrt{25{,}002}$ ifoda hisoblansin.

Echish. $f(x)=\sqrt{x}$ funktsiyani kiritsak va $x=25$, $\Delta x=0{,}002$ desak, u xolda (5) takribiy formuladan, $f'(x)=1/2\sqrt{x}$ ekanligini xisobga olib,

$$\sqrt{25{,}002}\approx\sqrt{25}+\frac{1}{2\sqrt{25}}\cdot 0{,}002=5+\frac{0{,}002}{10}=5{,}0002$$

takribiy kiymatni olamiz.

SHunday qilib differentsialni hisoblash funktsiya xosilasini argument differentsialiga kupaytirish bilan yakunlanadi. SHuning uchun ham xosila hisoblash qoidalari osongina differentsial hisoblash uchun kuchiriladi:

1. $dS=0$, $S=const$ 2. $dSf(x) = Sdf(x)$ 3. $d[f(x)\pm g(x)]= df(x)\pm dg(x)$

4. $df(x)g(x)= f(x)dg(x)+g(x)\,df(x)$ 5. $d\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]=\frac{\varphi(x)df(x)-f(x)d\varphi(x)}{[\varphi(x)]^2}$

Endi $u=f(u)$, $u=u(x)$, murakkab funktsiyaning differentsialini hisoblash masalasini kuramiz. Bunda tashki $f(u)$ va ichki $u(x)$ funktsiyalar differentsiallanuvchi deb karaladi. Differentsialni hisoblashning (3) formulasi va murakkab funktsiyani hisoblash qoidasiga asosan ushbu tenglikni yozish mumkin:

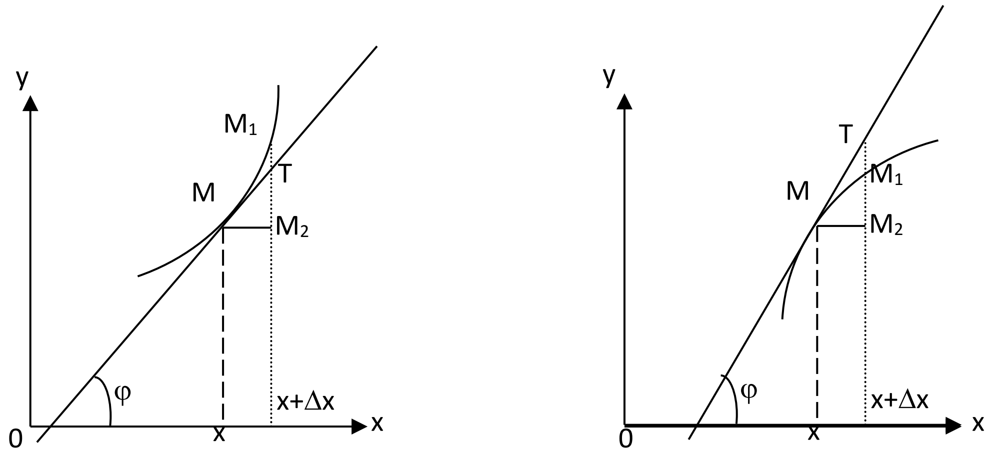
$$df(u)=(f(u))'dx=f'(u)\cdot u'dx=f'(u)\cdot du \qquad (6)$$

Bu erdan, (3) va (6) formulalarni takkoslab, oddiy va murakkab funktsiya differentsiali bir xil usulda hisoblanishini kuramiz. Bu ***differentsialning invariantlik xossasi*** deyiladi. Demak, $u=f(x)$ funktsiyada x urniga biror $u=u(x)$ funktsiya kuyib, $f(u)$ murakkab funktsiya xosil kilinsa, uning differentsiali ko’rinishi uzgarmay koladi.

Masalan, $u=\cos\sqrt{x}$ funktsiya uchun $dy=-\sin\sqrt{x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=-\sin\sqrt{x}\,d(\sqrt{x})$.

Endi differentsialning geometrik ma`nosini kuramiz.

Aytaylik $y=f(x)$ funktsiyamiz quyidagi ikkita ko’rinishda bo’lsin va uning $M(x;f(x))$ nuqtasiga utkazilgan urinma OX ukining musbat yunalishi bilan φ burchak xosil kilsin.



Agar x argumentga Δx orttirma bersak, u xolda funktsiya Δf orttirma oladi. CHizmada $M_1(x+\Delta x; f(x+\Delta x))$, $M_2(x+\Delta x; f(x))$ nuqtalarni karaymiz.
Grafikning M(x,f(x)) nuqtasiga utkazilgan urinmaning ixtiyoriy bir T nuqtasini olamiz. Ma`lumki, $\Delta f=M_1 M_2$, $\Delta x=MM_2$ buladi.

Endi MTM_2 tugri burchakli uchburchakdan va xosilaning geometrik ma`nosidan ushbu tenglikni olamiz:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{M_2T}{MM_2} \Rightarrow M_2T = \mathrm{tg}\varphi \cdot MM_2 = f'(x)\Delta x$$

Bu erdan va differentsial ta'rifidan $M_2T=df$ tenglikni olamiz. Demak, y=f(x) funktsiyaning differentsiali *x* argument Δx ga uzgarganda funktsiya grafigining M(x;f(x)) nuqtasiga utkazilgan urinmaning xosil kilgan orttirmasiga teng.

Endi funktsiyaning yukori tartibli xosilasi va differentsiali tushunchalarini kiritamiz.

Ma`lumki, y=f(x) funktsiyaning birinchi tartibli xosilasi $f'(x)$, umuman olganda, *x* uzgaruvchining yangi funktsiyasi buladi. SHu sababli $f'(x)$ funktsiyaning xosilasi tugrisida suz yuritish mumkin.

T A ` R I F: Agar $f'(x)$ differentsiallanuvchi funktsiya bo'lsa, uning xosilasi u=f(x) ***funktsiyaning II tartibli xosilasi*** deyiladi va $f''(x)$ yoki $f^{(2)}(x)$ kabi belgilanadi.

Demak, II tartibli xosila $f''(x) = (f'(x))'$ kabi aniklanadi va hisoblanadi. Masalan,$f(x)=x^4$ funktsiya uchun $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=(4x^3)'=12x^2$.

Birinchi tartibli xosila $f'(x)$ tezlikni ifodalasa, ikkinchi tartibli xosila $f''(x)$ tezlanishni ifodalaydi.

Xosila tartibi tushunchasi kiritilgach $f'(x)$ xosila I tartibli, f(x) funktsiyaning uzi esa 0 – tartibli xosila, ya`ni $f(x)= f^{(0)}(x)$ deb karaladi.

Xuddi shunday tarzda uchinchi tartibli $f'''(x)$, turtinchi tartibli $f^{(IV)}(x)$ va xokazo n- tartibli xosilalar tushunchasi kiritiladi. Umuman olganda n–tartibli xosila quyidagi rekkurent formula orkali topiladi:

$$f^{(n)}(x)= (f^{(n-1)}(x))', \quad n=1,2,3,\ldots \qquad (7)$$

Masalan, $f(x)=x^3$ uchun $f^{(1)}(x)=3x^2$, $f^{(2)}(x)=6x$, $f^{(3)}(x)=6$ va $n\geq 4$ bo'lganda $f^{(n)}(x)=0$ buladi. Ba`zi funktsiyalar uchun yukori tartibli xosilalar ifodasini birdaniga yozish mumkin. Masalan, $f(x)=a^x$ bo'lsa,$f^{(n)}(x)=a^x(\ln a)^n$,
$f(x)=\sin x$ bo'lsa, $f^{(n)}(x)=\sin(x+\pi n/2)$ buladi.

$df=f'(x)dx$ ifodada birinchi kupaytuvchi x argumentning funktsiyasi, ikkinchi kupaytuvchi $dx = \Delta x$ esa x ga boglik bulmagan uzgarmas son buladi. Demak df differentsial ham x uzgaruvchining funktsiyasi ekan. Undan (3) formula buyicha differentsial olamiz va natijada xosil bo'lgan ifodani ***ikkinchi tartibli differentsial*** deb ataymiz va d^2f kabi belgilaymiz:

$$d^2f=d(df)=d(f'(x)dx)=dx\, d(f'(x))=dx\, f''(x)dx= f''(x)(dx)^2= f''(x)dx^2.$$

Xuddi shunday tarzda n – tartibli differentsial

$$d^nf=d(d^{n-1}f)= f^{(n)}(x)(dx)^n = f^{(n)}(x)dx^n$$

kabi aniklanadi va hisoblanadi. Masalan, $f(x)=x^3$ uchun $df=6x^2\, dx$, $d^2f=12xdx^2$. YUkori tartibli differentsillardan foydalanib, yukori tartibli xosilalarni

$$f'(x)=\frac{dy}{dx},\quad f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots,\ f^{(n)}(x)=\frac{d^nf}{dx^n}$$

kabi yozish mumkin.

T A ` R I F: Agar x va u uzgaruvchilar orasidagi boglanish uchinchi bir t uzgaruvchi (parametr) orkali $x=\varphi(t)$ va $u=\psi(t)$, $\alpha\leq t \leq \beta$, funktsiyalar ko'rinishda berilgan bo'lsa, x va u orasidagi $u=f(x)$ funktsiya ***parametrik*** ko'rinishda berilgan deyiladi.

Masalan, $x=t^2$, $u=t^6$ parametrik ko'rinishda berilgan funktsiya $u=f(x)=x^3$ funktsiyani ifodalaydi.

Parametrik ko'rinishda berilgan funktsiyani xar doim ham dastlab $u=f(x)$ ko'rinishda yozib, so'ngra uning xosilasini hisoblab bulmaydi. SHu sababli parametrik ko'rinishda berilgan funktsiyaning xosilasini topish masalasini kuramiz. Aytaylik $u=f(x)$ funktsiya $x=\varphi(t)$ va $u=\psi(t)$ parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsin. Agar φ va ψ funktsiyalar keraklicha differentsiallanuvchi bo'lsalar, u xolda quyidagi formulalar o'rinli buladi:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$y''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(dy/dt)}{dx}=\frac{d(dy/dx)/d(t)}{dx/d(t)}=\frac{d(\psi'(t)/\varphi'(t))}{\varphi'(t)}=$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}.$$

Bu tengliklar parametrik ko'rinishda berilgan funktsiya xosilasini topishni ifodalaydi.

4- M i s o l: $u=f(x)$ funktsiya $x=2\cos t$ va $y=3\sin t$ funktsiyalar orkali parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsin. $y'(x)$ va $y''(x)$ xosilalar topilsin.

E ch i sh: YUkoridagi formulalarga asosan

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3\cos t}{-2\sin t} = -\frac{3}{2}ctgt; \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{2}\frac{1}{\sin^2 t}\frac{1}{(-2\sin t)^3} = -\frac{3}{16}\frac{1}{\sin^5 t}.$$

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Funktsiya differentsiali kanday ta'riflanadiq
2. Funktsiya differentsiali xosila orkali kanday topiladiq
3. Funktsiya orttirmasi va differentsiali orasida kanday boglanish mavjudq
4. Differentsialning geometrik ma`nosini kursating.
5. Differentsiallash qoidalari nimalardan iboratq
6. Differentsialning invariantlik xossasi nimadan iboratq
7. YUkori tartibli xosilalar kanday aniklanadiq
8. YUkori tartibli differentsiallar kanday ifodalanadiq
9. Parametrik ko'rinishda berilgan funktsiyaning xosilasi kanday topiladiq

6.5. FUNKTSIYANI XOSILA YORDAMIDA TEKSHIRISH.

Tayanch iboralar: funktsiya monotonligining zaruriy va etarli sharti, funktsiya ekstremumlari, ekstremumning zaruriy sharti, kritik nuqta, ekstremumning etarli sharti, ekstremumni II tartibli xosila orkali tekshirish.

R e j a :

1. Funktsiyaning monotonlik oraliklari.
2. Differentsiallanuvchi funktsiyaning monotonlik oraliklarini topish.
3. Funktsiya ekstremumlari.
4. Ekstremumning zaruriy sharti.
5. Kritik nuqtalar.
6. Ekstremumning zaruriy shartini I tartibli xosila orkali ifodalash.
7. Ekstremumning zaruriy shartini II tartibli xosila orkadi ifodalash.

Adabiyotlar:

[1] IV bob, §1-6 [2] V bob, §1-6

u=f(x) funktsiya differentsiallanuvchi bo'lsa, uning juda kup xususiyatlarini $f'(x)$ xosila yordamida aniklash mumkin. SHu sababli xosila funktsiyani tekshirish uchun asosiy va kuchli kurol bo'lib hisoblanadi.

I. Funktsiyaning monotonlik oraliklari.

T A ` R I F 1: Agarda u=f(x) funktsiya (a,v) oralikda aniklangan va bu oralikdagi ixtiyoriy $x_1 < x_2$ nuqtalarda $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$) shartni qanoatlantirsa, u shu oralikda ***usuvchi (kamayuvchi)*** deb ataladi.

Masalan, u=x^2 fuktsiya $(-\infty, 0)$ oralikda kamayuvchi, $(0,\infty)$ oralikda esa usuvchi buladi.

Funktsiyaning usish va kamayish oraliklari birgalikda uning ***monotonlik oraliklari*** deyiladi.Bu oraliklarni xosila orkali kanday topish mumkinligi ushbu teoremadan kelib chikadi.

TEOREMA 1: **a)** Agarda differentsiallanuvchi f(x) funktsiya biror oralikda usuvchi (kamayuvchi) bo'lsa, uning xosilasi bu oralikda $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) shartni qanoatlantiradi.

v) Agarda biror oralikda funktsiyaning xosilasi $f'(x)>0$, ($f'(x)<0$) shartni qanoatlantirsa, u xolda shu oralikda funktsiya usuvchi (kamayuvchi) buladi.

<u>Izox:</u> Teoremaning **a)** va **v)** kismlari funktsiya monotonligining zaruriy va etarli shartlarini ifodalaydi.

<u>Isbot:</u> **a)** u=f(x) funktsiya (a,v) oralikda usuvchi va x, x +Δx nuqtalar shu oralikka tegishli bo'lsin.Agarda Δx>0 bo'lsa,

$$x+\Delta x>x \Rightarrow f(x+\Delta x) > f(x) \Rightarrow \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) >0 \Rightarrow \Delta f/\Delta x>0$$

munosobatlar o'rinli buladi. Xuddi shunday Δx<0 bo'lganda ham Δf/Δx>0 buladi. Bu erdan, xosila ta'rifi va limit xossasiga asosan,

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\geq 0$$

ekanligi kelib chikadi.

Xuddi shunday usulda kamayuvchi u=f(x) funktsiya uchun $f'(x)\leq 0$ ekanligi isbotlanadi.

v) Funktsiyaning xosilasi (a,v) oralikdagi xar bir x nuqtada $f'(x)>0$ shartni qanoatlantirsin. Bu xolda, chekli orttirmalar xakidagi Lagranj teoremasiga asosan, bu oralikdagi xar kanday $x_1<x_2$ nuqtalar uchun

$$f(x_2)-f(x_1) = (x_2-x_1)\ f'(\xi),\ x_1<\xi<x_2$$

tenglik bajariladi.Bu tenglikda $x_2-x_1>0$ va $f'(\xi)>0$ bo'lgani uchun undan $f(x_2)-f(x_1)>0 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ ekanligi, ya`ni funktsiya usuvchi ekanligi kelib chikadi.

Xuddi shunday usulda $f'(x)<0$ bo'lsa, funktsiya kamayuvchi ekanligi isbotlanadi.

Demak, berilgan u= f(x) funktsiyaning usish (kamayish) oraliklarini topish uchun $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) tengsizlikni echish kerak.

Masalan, f(x)=x+1/x funktsiya uchun $f'(x)=1-1/x^2>0$ tengsizlikning echimi $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ soxadan iborat va bu soxada berilgan funktsiya usuvchi buladi. x=0 nuqtada funktsiya aniklanmaganligini xisobga olib, u $(-1,0)\cup(0,1)$ soxada kamayuvchi ekanligini kuramiz.

II. Funktsiya ekstremumlari.

<u>T A ` R I F 2</u>: u= f(x) funktsiya biror x_0 nuqta va uning atrofidagi ixtiyoriy x nuqtalar uchun aniklangan bo'lib, $f(x_0)\geq f(x)$ ($f(x_0)\leq f(x)$) shartni qanoatlantirsa, u shu x_0 nuqtada ***maksimumga (minimumga)*** erishadi deb ataladi.

Masalan, f(x)=sinx funktsiya x=π/2 nuqtada sin(π/2)=1 maksimumga, x=3π/2 nuqtada esa sin(3π/2)=-1 minimumga erishadi.

Funktsiyaning maksimum va minimum kiymatlari birgalikda uning e***kstremumlari*** deyiladi.

TEOREMA 2 (Ekstremumning zaruriy sharti): Agarda differentsi-allanuvchi u=f(x) funktsiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, u xolda uning xosilasi bu nuqtada $f'(x_0)$=0 shartni qanoatlantiradi.

Isbot: Aniklik uchun funktsiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo'lsin. Bu xolda $|\Delta x|$ etarli kichik bo'lsa, $f(x_0+\Delta x) \leq f(x_0) \Rightarrow \Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \leq 0$ tengsizlik bajariladi.Bundan $\Delta x>0$ ($\Delta x<0$) bo'lganda, $\Delta f/\Delta x \leq 0$ ($\Delta f/\Delta x \geq 0$) ekanligi kelib chikadi . SHu sababli bir tomondan

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\leq 0 \quad ,$$

ikkinchi tomondan esa

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\geq 0 \, .$$

Teorema shartiga $f'(x_0)$ kura xosila mavjud bo'lgani uchun, bu ikkala tengsizlikdan $f'(x_0)$=0 ekanligi kelib chikadi.

Funktsiya x_0 da minimumga ega bo'lgan xol ham xuddi shunday karaladi.

Masalan, f(x) =sinx funktsiya x=π/2 nuqtada maksimumga ega va bu nuqtada uning xosilasi f ′(π/2)=cos (π/2)=0 tenglikni qanoatlantiradi.

f(x) =|x| funktsiya x=0 nuqtada minimumga ega,ammo uning xosilasi bu nuqtada mavjud emas.

Xulosa : Uzluksiz funktsiya ekstremumga xosilasi nolga teng yoki mavjud bulmagan nuqtalardagina ega bulishi mumkin.

T A ` R I F 3: Funktsiya xosilasi nolga teng yoki mavjud bulmagan nuqtalar shu funktsiyaning ***kritik yoki statsionar nuqtalari*** deyiladi.

Demak, funktsiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, x_0 nuqta uning kritik nuqtasi buladi. Ammo bu tasdiqning teskarisi xar doim ham o'rinli bulmaydi, ya`ni ekstremumning yukorida kursatilgan zaruriy sharti doimo ham etarli emas.

Masalan, $u=x^3$ funktsiya uchun x=0 kritik nuqta buladi, lekin bu nuqtada funktsiya ekstremumga ega emas.

TEOREMA 3 (Ekstremumning etarli sharti.): Agarda x_0 kritik nuqtani chapdan ungga karab bosib utishda $f'(x)$ xosila uz ishorasini uzgartirsa (ya`ni x_0 kritik nuqtaning biror atrofidagi xar kanday $x_1<x_0$, $x_2>x_0$ nuqtalar uchun $f'(x_1)\cdot f'(x_2)$ <0 shart bajarilsa), u xolda x_0 kritik nuqtada f(x) funktsiya ekstremumga erishadi. Jumladan, $f'(x_1)$>0, $f'(x_2)$<0 ($f'(x_1)$<0, $f'(x_2)$>0) bo'lsa, x_0 kritik nuqtada funktsiya uzining maksimumiga (minimumiga) erishadi.

Isbot: Dastlab $f'(x)<0$ ($x<x_0$) va $f'(x)>0$ ($x>x_0$) xolni kuramiz. Bu xolda, 1-teoremaga asosan, x_0 nuqtaning chap atrofida funktsiya kamayuvchi, ung atrofida esa usuvchi buladi. Demak, x_0 nuqtada funktsiya minimumga erishadi. Xuddi shunday tarzda $f'(x)>0$ ($x<x_0$) va $f'(x)<0$ ($x>x_0$) shartlarda funktsiya x_0 nuqtada maksimumga ega bulishi isbotlanadi.

Masalan, $f(x)=x^2+1$ funktsiya xosilasi $f'(x)=2x$ bo'lib, $x_0=0$ kritik nuqta buladi.Bu funktsiya xosilasi $x<0$ bo'lganda manfiy va $x>0$ bo'lganda musbat kiymat kabul kiladi. Demak, funktsiya x_0=0 kritik nuqtada minimumga ega va uning minimum kiymati f(0)=1 buladi.

Izox: Agarda funktsiya xosilasi x_0 kritik nuqtadan utishda ishorasini uzgartirmasa, bu nuqtada funktsiya ekstremumga ega bulmaydi.

Xakikatan ham, $x<x_0$ yoki $x>x_0$ bo'lganda $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) bo'lsin. Bu xolda x_0 nuqtaning chap atrofida ham, ung atrofida ham f(x) funktsiya usuvchi (kamayuvchi) buladi va shu sababli x_0 nuqtada ekstremumga ega bulmaydi.

Masalan,$f(x)=x^3$ funktsiyaning xosilasi $f'(x)=3x^2$ kritik $x=0$ nuqta atrofida fakat musbat kiymatlarni kabul kiladi va shu sababli bu nuqtada funktsiya ekstremumga ega emas.

Agarda funktsiya uzining x_0 kritik nuqtasida ikki marta differentsiallanuvchi bo'lsa, uning ekstremumini quyidagi teorema orkali aniklash kulayrokdir.

TEOREMA 4: Agarda x_0 kritik nuqtada $f'(x_0)=0$ va $f''(x_0)\neq 0$ bo'lsa, x_0 nuqtada f(x) funktsiya ekstremumga ega. Jumladan, $f''(x_0)<0$ bo'lsa, $f(x_0)$ funktsiyaning maksimumi, $f''(x_0)>0$ bo'lsa, $f(x_0)$ funktsiyaning minimumi buladi.

Bu teoremani isbotsiz kabul kilamiz.

Masalan, $f(x)=x^4-4x$ funktsiya uchun $f'(x)=4x^3-4=4(x^3-1)=0$ tenglamadan $x_0=1$ kritik nuqta ekanligini aniklaymiz. Funktsiyaning II tartibli xosilasi $f''(x)=12x^2$ bu kritik nuqtada $f''(1)=12>0$ kiymatni kabul kiladi. Demak, berilgan funktsiya $x_0=1$ kritik nuqtada minimumga ega va bu minimum f(1)=1-4=-3 buladi.

Izox: Agarda x_0 kritik nuqtada ikkinchi tartibli xosila $f''(x_0)=0$ bo'lsa, unda funktsiyaning x_0 nuqtada ekstremumga ega bulishi yoki bulmasligi, birinchi tartibli xosila orkali, 3-teorema yordamida aniklanadi.

Uz-uzini nazorat etish savollari:

1. Funktsiyaning usish (kamayish) oraliklari deb nimaga aytiladiq
2. Funktsiyaning monotonlik oraliklari kanday aniklanadiq
3. Differentsiallanuvchi funktsiyalarning monotonlik oraliklari kanday topiladiq
4. Funktsiyaning maksimumi (minimumi) deb nimaga aytiladiq
5. Funktsiyaning ekstremumlari kanday ta'riflanadiq
6. Ekstremumning zaruriy sharti nimadan iboratq
7. Ekstremumning zaruriy sharti etarli buladimiq Misol keltiring.
8. Kritik nuqta deb nimaga aytiladiq
9. Ekstremumning etarli sharti I tartibli xosila orkali kanday ifodalanadiq
10. Ekstremumning etarli sharti II tartibli xosila orkali kanday ifodalanadiq

6.6. FUNKTSIYANI XOSILA YORDAMIDA TEKSHIRISH (DAVOMI).

Tayanch iboralar: funktsiya grafigining kavarikligi va botikligi, kavariklik va botiklikning zaruriy va etarli sharti, burilish nuqtasi va uni topish, funktsiya asimptotalari, funktsiyani to'liq tekshirish. boskichlari

R e j a :

1. Funktsiyaning botiklik va kavariklik soxalari.
2. Funktsiyaning botiklik va kavariklik soxalarini topish.
3. Funktsiyaning burilish nuqtalari va ularni topish.
4. Funktsiya asimptotalari va ularni topish.
5. Funktsiyani to'liq tekshirish.

Adabiyotlar:

[1] IV bob, §7-9 [2] V bob, §9-11

Oldingi MA'RUZAda xosila yordamida funktsiyani monotonlik oraliklari va ekstremumlarini topish masalasini kurgan edik.Bu tushunchalar quyidagi geometrik ma`noga ega.Funktsiyaning usish soxasida uning argumenti x chapdan ungga karab uzgarganda, funktsiya grafigi pastdan yukoriga karab usib boradi. Kamayish soxasida esa aksincha, ya`ni funktsiya grafigi yukoridan pastga karab kamayib boradi. Funktsiyaning ekstremumlari uning grafigida yukori yoki pastki uchlarni ifodalaydi.

Bu MA'RUZAda funktsiyani xosila yordamida urganishni davom ettiramiz.

III Funktsiya grafigining qavariqlik va botiqlik sohalari.

T A ` R I F 4: u= f(x) funktsiya grafigi (a,v) oralikda ***kavarik (botik)*** deyiladi, agarda u uzining xar kanday M (x, f(x)), nuqtasiga utkazilgan urinmasidan pastda (yukorida)joylashgan bo'lsa.

Masalan, u=sinx funktsiyaning grafigi $(0,\pi)$ oralikda kavarik, $(\pi,2\pi)$ oralikda esa botik buladi.

TEOREMA 5: Agarda f(x) funktsiya (a,v) oralikning xar bir nuqtasida ikki marta differentsiallanuvchi va ixtiyoriy $x\in(a,v)$ nuqtada $f''(x)>0$ $(f''(x)<0)$ shart bajarilsa, funktsiya grafigi bu oralikda botik (kavarik) buladi.

Bu teoremaning isbotini Adabiyotlar ruyxatida kursatilgan darsliklardan ko'rish mumkin.

Misol: $f(x)=x^3$ funktsiya uchun $f''(x)=6x>0$ tengsizlik echimi $(0,\infty)$ soxadan iborat buladi va bu soxada uning grafigi botik buladi.Xuddi shunday $f''(x)=6x<0$ tengsizlik echimi bulmish $(-\infty;0)$ soxada funktsiya grafigi kavarik buladi.

T A ` R I F 5: Funktsiya grafigi biror $M(x_0, f(x_0))$ nuqtadan utayotganda botikligini kavariklikka yoki aksincha kavarikligini botiklikka uzgartirsa, bu nuqta uning ***burilish (egar) nuqtasi*** deyiladi.

Masalan, kurib utilgan $f(x)=x^3$ funktsiya uchun koordinatalar boshi O(0,0) burilish nuqtasi buladi.

<u>TEOREMA 6</u>: Agarda biror x_0 nuqtada ikkinchi tartibli xosila $f''(x_0)=0$ bo'lib, bu nuqtadan utishda $f''(x)$ uz ishorasini uzgartirsa, $M(x_0, f(x_0))$ nuqta funktsiya grafigining burilish nuqtasi buladi.
<u>Isbot:</u> $f''(x)<0$, $x<x_0$ va $f''(x)>0$, $x>x_0$ xolni kuramiz. Oldingi teoremaga asosan, x_0 nuqtaning chap tomonida funktsiya grafigi kavarik, ung tomonida esa botik buladi. Demak, $M(x_0, f(x_0))$ nuqta atrofida funktsiya grafigi botiklikni kavariklikka uzgartiradi, ya`ni bu nuqta grafikning burilish nuqtasi buladi.

Misol sifatida $f(x)=x^3-3x^2$ funktsiya grafigining burilish nuqtasini topamiz. Bu erda $f''(x)=6x-6=0$ tenglamadan $x_0=1$ natijani olamiz.Bu erda $x<1$ bo'lganda $f''(x)<0$ (grafik kavarik) va $x>1$bo'lganda $f''(x)>0$ (grafik botik) bo'lgani uchun M(1,-2) funktsiya grafigining burilish nuqtasi buladi.

<u>IV.Funktsiya grafiginig asimptotalari.</u>

<u>TA ` R I F 6 :</u> u= kx+b tenglama bilan berilgan tugri chizik f(x) funktsiya grafigining ***ogma asimptotasi*** deyiladi, agarda

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=0$$

shart bajarilsa.
<u>T A ` R I F 7:</u> x=*a* tenglamali vertikal tugri chizik u= f(x) funktsiya grafigining vertikal asimptotasi deyiladi, agarda x argument *a* nuqtaga yakinlashib borganda ,funktsiyaning chap va ung

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to a+0} f(x)$$

limitlaridan kamida bittasi cheksiz bo'lsa.

Odatda vertikal asimptotalar funktsiyaning aniklanish soxasi buyicha uning uzilish nuqtalari orkali topiladi. Masalan, $f(x)=1/(x^3-1)$ funktsiya grafigi uchun x=1 tugri chizik vertikal asimptota buladi.

Funktsiyaning ogma asimptotalarining mavjudligi va ularning tenglamasi quyidagi teorema buyicha aniklanadi.

TEOREMA 7: u=f(x) funktsiya grafigi ogma asimptotaga ega bulishi uchun

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k, \qquad \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$$

limitlar mavjud hamda chekli bulishi zarur va etarlidir.Bu xolda ogma asimptota u= kx+b tenglama bilan topiladi.
<u>Isbot:</u> Zaruriylik sharti.Berilgan shartlarni zaruriyligini kursatamiz. u= kx+b tugri chizik ogma asimptota bo'lsin.Unda 6-ta'rif va limit xossalariga asosan quyidagilarni yozish mumkin:

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=\lim_{x\to\infty}x[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}]=0\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}]=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-k-\lim_{x\to\infty}\frac{b}{x}=0$$

Bu erdan, eng sunggi limit kiymati nol bo'lgani uchun,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$$

ekanligi kelib chikadi. Ogma asimptota ta’rifidan yana bir marta foydalanib,

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$$

natijani olamiz.

Etarlilik sharti. Teorema shartidagi ikkinchi limitga asosan

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=0$$

tenglikni yoza olamiz. Bu erdan, 6-ta’rifga asosan, u=kx+b tugri chizik funktsiyaning grafigi uchun ogma asimptota bulishi kelib chikadi.

Masalan, $f(x)=(2x^2+3x-5)/x$ funktsiya uchun

$$k=\lim_{x\to\infty} f(x)/x=2,\quad b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-2x]=3$$

ekanligini topamiz. Demak, bu funktsiyaning grafigi uchun u=2x-3 tugri chizik ogma asimptota buladi.

YUkorida olingan natijalar buyicha u=f(x) funktsiya xususiyatlarini quyidagi tartibda to’liq tadkikot kilish mumkin:

1. Funktsiyaning D{f} aniklanish soxasini topamiz;

2. Funktsiyani juft yoki toklikka tekshiramiz;

3. Funktsiyani davriylikka tekshiramiz, davriy bo’lsa, uning davrini aniklaymiz;

4. Funktsiyaning uzilish nuqtalarini topamiz va ularning turini aniklaymiz;

5. f(x) =0 tenglamadan funktsiya nollarini topamiz va ular orkali funktsiya uz ishorasini saklaydigan oraliklarni va OX uki bilan kesishish nuqtalarini aniklaymiz;

6. $f'(x)$>0 va $f'(x)$<0 tengsizliklarni echib, funktsiyaning usish va kamayish, ya`ni monotonlik soxalarini aniklaymiz;

7. f ″(x) =0 yoki f ″(x) = ± ∞ shartlardan kritik nuqtalarni topamiz va bu nuqtalarda funktsiyani I yoki II tartibli xosila yordamida ekstremumga tekshiramiz.

8. f ″ (x) > 0 va f ″(x)< 0 tengsizliklarni echib, funktsiya grafigining botiklik va kavariklik soxalarini topamiz;

9. f ″(x)= 0 yoki f ″(x)= ± ∞ shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalarni topib, ularning orasidan funktsiya grafigining burilish nuqtalarini aniklaymiz;

10. Funktsiya grafigining asimptotalarini, agarda ular mavjud bo’lsa, topamiz.

11. 1-10 kadamlarda olingan natijalar asosida funktsiya grafigini chizamiz.

<u>O’z-o’zini nazorat etish savollari:</u>

1. Funktsiyaning botiklik (kavariklik) soxalari kanday ta’riflanadiq
2. Differentsiallanuvchi funktsiyaning botiklik (kavariklik) soxalari kanday topiladiq
3. Funktsiyaning burilish nuqtasi nimaq
4. Differentsiallanuvchi funktsiyaning burilish nuqtalari kanday topiladiq
5. Funktsiya grafigining ogma asimptotalari kanday ta’riflanadiq
6. Funktsiya grafigining vertikal asimptotalari kanday ta’riflanadiq

7. Vertikal asimptotalar kanday topiladiq
8. Ogma asimptotalar mavjudliganing zaruriy va etarli sharti nimadan iboratq
9. Funktsiyani to'liq tekshirish boskichlarini kursating.

6.7. ANIQMASLIKLAR VA ULARNI LOPITAL QOIDALARI YORDAMIDA OCHISH.

Tayanch iboralar: 0/0, ∞/∞ ko'rinishdagi aniqmasliklar, aniqmasliklarni ochish, Lopitalning birinchi qoidasi, Lopitalning ikkinchi qoidasi, Lopital qoidalarning tadbiklari, $0\cdot\infty$, 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0}, $\infty - \infty$ ko'rinishdagi aniqmasliklar va ularni ochish.

R e j a :

1. 0/0 , ∞/∞ ko'rinishdagi aniqmasliklar va ularni ochish.
2. Lopitalning I qoidasi.
3. Lopitalning II qoidasi.
4. Lopital qoidalari yordamida ajoyib limitlarni isbotlash.
5. Boshka ko'rinishdagi aniqmasliklar va ularni ochish.

Adabiyotlar:

[1] III bob, §20 [2] IV bob, §4-5

**T A ` R I F 1:** Agar f (x) va g (x) funktsiyalar $x\to a$ da cheksiz kichik miqdorlar bo'lsa, ya`ni $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ munosabatlar o'rinli bo'lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ funktsiya $x\to a$ da $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik deyiladi.

Masalan, $\frac{\sin x}{x}$ funktsiya $x\to 0$ da, $\frac{x^2-1}{x^3-1}$ funktsiya $x\to 1$ da, $\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{e^{\frac{1}{x}}-1}$ funktsiya esa $x\to\infty$ da $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmasliklardan iborat.

T A ` R I F 2:** Agar f ($x$) va g ($x$) funktsiyalar $x\to a$ da cheksiz katta miqdorlar bo'lsa, ya`ni $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty,\quad \lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ munosabatlar o'rinli bo'lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ funktsiya $x\to a$ da $\frac{\infty}{\infty}$ ***ko'rinishdagi aniqmaslik* deyiladi.

Masalan, $\frac{\ln|\sin x|}{\ln|x|}$ funktsiya $x\to 0$ da, $\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ funktsiya $x\to\infty$ da $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslikdir.

T A ` R I F 3 : $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi $\frac{f(x)}{g(x)}$ aniqmaslikning $x\to a$ dagi limitini topish shu ***aniqmaslikni ochish*** deb ataladi.

Shuni ta`kidlab utish kerakki, aniqmaslikni ochish , ya`ni $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ limitni hisoblash uchun bulinmaning limiti formulasidan foydalanib bulmaydi, chunki yoki $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ (maxraj nolga teng)yoki surat va maxraj limitlari chekli emas.

Limitlar mavzusi buyicha misollar echganimizda aniqmasliklarni ochish masalasi bilan shugullangan edik. Ammo unda xar bir aniqmaslikni ochish uchun kupaytuvchilarga ajratish,kushmasiga kupaytirish, eng katta darajasiga bulish, ajoyib limitlarga keltirish kabi sun`iy usullardan foydalanilgan edi. SHunday qilib, xar bir aniqmaslikni ochish uchun uziga xos xususiy usuldan foydalangan edik. endi aniqmasliklarni ochishning umumiy qoidasini kurib chikamiz. Bu qoidani frantsuz matematigi Fransua Lopital (1661-1704y.) uzining 1696 yilda bosmadan chikkan «CHeksiz kichik miqdorlar taxlili» degan kitobida birinchi marta keltirgan va shuning uchun u Lopital qoidasi nomi bilan tarixga kirgan.Aslida bu qoidani Lopitalning ustozi va dusti, shveytsariyalik matematik Iogann Bernulli (1667-1748) topgan.I. Bernulli Parijga kelgan paytida boy oiladan chikkan va matematika bilan kizikuvchi Lopital bilan tanishadi. Lopitalning iltimosiga kura u usha paytlarda Leybnits va N'yuton tomonidan yangi yaratilgan differentsial xisob buyicha Lopitalga MA'RUZAlar ukiydi. Lopitalning xizmati shundan iboratki, u bu MA'RUZAlar asosida differentsial xisob buyicha yukorida kursatilgan birinchi darslikni yozdi.

T E O R E M A 1 : f (x) va g (x) funktsiyalar a nuqta atrofida aniklangan va differentsillanuvchi bo'lib, $g'(x) \neq 0$ va

$$\lim_{x\to a} f(x)=0 \ , \qquad \lim_{x\to a} g(x)=0 \qquad (1)$$

tengliklar bajarilsin. Bu xolda, agarda $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud bo'lsa, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ham mavjud buladi va ushbu tenglik o'rinli buladi:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (2).$$

<u>I s b o t :</u> Avval $a<\infty$ xolni kuramiz. Teorema shartiga kura a nuqta atrofida f (x) va g (x) funktsiyalar differentsiallanuvchi bo'lgani uchun, ular bu erda uzluksiz buladilar va shuning uchun ham, (1) shartga kura,

$$f(a)=\lim_{x\to a} f(x)=0, \qquad g(a)=\lim_{x\to a} g(x)=0 \qquad (3)$$

tengliklar o'rinli buladi. a nuqta atrofidagi ixtiyoriy (a,x) oralikni karaymiz. Teorema shartlariga asosan bu oralikda f(x) va g(x) funktsiyalar uzluksiz, differentsiallanuvchi va $g'(x)\neq 0$, ya`ni ular Koshi teoremasi shartlariga buysunadi. SHuning uchun, Koshi teoremasiga asosan , shunday $s\in(a, x)$ nuqta mavjudki,

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (4)$$

Bu erda (3) tengliklardan ham foydalanildi. (4) tenglikda $x\to a$ da limit olamiz va bunda $s\to a$ bulishidan,chunki $s\in(a, x)$, foydalanib,ushbu natijalarni olamiz:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (5)$$

Limitning kiymati undagi uzgaruvchi miqdorni kanday belgilanishiga boglik emas va shuning uchun (5) tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (6)$$

(5) va (6) tengliklardan isbotlanishi kerak bo'lgan

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (7)$$

natijani olamiz.

Endi $a=\infty$ xolni kuramiz, ya`ni $x\to\infty$. Bu xolda $z=\frac{1}{x}$ yangi uzgaruvchini kiritsak, unda $x\to\infty$ bo'lganda $z\to 0$ buladi.Bu erda $x=\frac{1}{z}$ bo'lgani uchun va (7) tenglikka asosan

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f(\frac{1}{z})}{g(\frac{1}{z})}=\lim_{z\to 0}\frac{\left[f(\frac{1}{z})\right]'}{\left[g(\frac{1}{z})\right]'}=\lim_{z\to 0}\frac{f'(\frac{1}{z})(\frac{1}{z})'}{g'(\frac{1}{z})(\frac{1}{z})'}=\lim_{z\to 0}\frac{f'(\frac{1}{z})}{g'(\frac{1}{z})}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

natijani olamiz. Teorema to'liq isbot buldi.

T E O R E M A 2 : f (x) va g (x) funktsiyalar 1 – teorema shartlarini qanoatlantirsin, ammo

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty, \qquad \lim_{x\to a} g(x)=\infty \qquad (8)$$

munosabat o'rinli bo'lsin. Bu xolda ham (2) tenglik uz kuchini saklab koladi.

Bu teorema isbotini darsliklardan kurib chikish mumkin.

Kurib utilgan teoremalardagi (2) tenglik bilan ifodalanadigan tasdiqlar mos ravishda ***Lopitalning I va II qoidalari*** deb ataladi.

SHunday qilib $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi $\frac{f(x)}{g(x)}$ aniqmaslikni Lopital qoidasi yordamida ochish uchun f(x) surat va g (x) maxrajdan aloxida-aloxida xosila olib, $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ xosilalar nisbatining limitini topish kerak.

Lopital qoidasining tadbiklari sifatida oldin kurib utilgan va matematikada ajoyib limitlar deb ataluvchi bir nechta limitni hisoblaymiz.

1. f (x) =sinx, g (x) = x funktsiyalar $x\to 0$ da cheksiz kichik miqdorlar buladi va shuning uchun $\frac{\sin x}{x}$ ifoda $x\to 0$ da $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik buladi . Lopitalning I qoidasiga asosan

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1.$$

Bu natija 1 ajoyib limitni ifodalaydi.

2. f (x) =ln (1+x) , g (x)=x funktsiyalar uchun f (0) =ln1=0 , g (0)=0. Demak, $x\to 0$ bo'lganda $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ln(1+x)}{x}$ ifoda $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikdan iborat.

Bu aniqmaslikni ochish uchun Lopitalning I qoidasiga murojaat kilamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{[\ln(1+x)]'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}\cdot(1+x)'}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1+0}=1.$$

Bu limit matematikada III ajoyib limit deb ataladi.

Xuddi shunday ravishda

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}$$

ekanligini ko'rsatish mumkin.

3. f (x) =e ^{x} –1 , g (x)=x differentsiallanuvchi funktsiyalar uchun f(0)=0, g(0)=0 buladi. Unda

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=\frac{e^0}{1}=1.$$

Bu natija IV ajoyib limit deyiladi.

Talabalarga mustakil ish sifatida

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

ekanligini ko'rsatish tavsiya etiladi.

4. f (x) =(1+x)$^{\alpha}$ –1 (α -$\forall$ xakikiy son) va g (x)=x funktsiyalar x=0 nuqta atrofida differentsiallanuvchi va f(0)=0, g(0)=0. Bu xolda

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to 0}\frac{[(1+x)^{\alpha}-1]'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1}=\alpha\cdot(1+0)^{\alpha-1}=\alpha.$$

Bu natija V ajoyib limit deyiladi.

Izoxlar: **1.** Agarda (2) formulada $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ifoda $x\to a$ bo'lganda yana 0/0 yoki ∞/∞ ko'rinishdagi aniqmaslikdan iborat bo'lib, $f'(x)$ va $g'(x)$ xosilalar 1-teorema yoki 2-teorema shartlarini qanoatlantirsin. Bu xolda $\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ mavjud bo'lsa, quyidagi tenglik o'rinli buladi:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)} \qquad (9)$$

SHunday qilib, aniqmaslikni ochish uchun Lopital qoidasini bir necha marta ketma-ket qo'llash mumkin. Buning uchun xar gal teorema shartlarini tekshirib ko'rish kerak.

Misol sifatida quyidagi limitni hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[(x+1)^2\right]'}{\left(x^2+1\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2(x+1)}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+0}{1}=1.$$

2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud bo'lsa, unda $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ mavjud. Ammo teskari tasdiq doimo ham o'rinli bulavermaydi, ya`ni $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ mavjud bo'lib, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud bulmasligi mumkin.

M i s o l : f(x)=x+sinx, g(x)=x, x→∞. Bu xolda

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x})=$$

$$=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1+0=1$$

Ammo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+\cos x)=1+\lim_{x\to\infty}cosx$$

bo'lgani uchun bu limit mavjud emas.

SHartli ravishda $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ kabi belgilangan aniqmasliklardan tashkari shartli ravishda $\infty\cdot0$, 0^0, ∞^0, 1^∞, $\infty-\infty$ kabi belgilanadigan aniqmasliklar ham mavjud.

T A ` R I F 4 : Agarda $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ bo'lsa, f(x) ·g(x) ifoda x→a bo'lganda ***0·∞ ko'rinishdagi aniqmaslik*** deyiladi.

Bu aniqmaslikni ochish uchun uni f(x) ·g(x)=$\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ ko'rinishda yozib, $\frac{0}{0}$ aniqmaslikka yoki f(x)·g(x)=$\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ ko'rinishda yozib, $\frac{\infty}{\infty}$ aniqmaslikka keltiriladi va so'ngra Lopital qoidasi qo'llaniladi.

M i s o l:

$$\lim_{x\to0}x\ln x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x}=-\lim_{x\to0}x=0\cdot$$

T A ` R I F 5 : Agarda $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1, \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ bo'lsa, $[f(x)]^{g(x)}$ ifoda $x\to a$ bo'lganda ***1^∞ ko'rinishdagi aniqmaslik*** deyiladi.

Bu aniqmaslikni ochish uchun $u=[f(x)]^{g(x)}$ deb belgilaymiz. Bu tenglikni ikkala tomonidan logarifm olamiz:

$$\ln y=\ln[f(x)]^{g(x}=g(x)\ln f(x)=[\ln f(x)]g(x)\ ,$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=1\Rightarrow \lim_{x\to a}\ln f(x)=\ln[\lim_{x\to a} f(x)]=\ln 1=0\ .$$

Demak , $[\ln f(x)]g(x)$ ifoda $0\cdot\infty$ ko'rinishidagi aniqmaslik va uni Lopital qoidasi yordamida ochish mumkin. Faraz kilamiz

$$\lim_{x\to a}\ln y=\lim_{x\to a}\{[\ln f(x)]g(x)\}=b$$

bo'lsin. Bu erdan kelib chikadiki,

$$\lim_{x\to a}\ln y=\ln[\lim_{x\to a} y]=b\Rightarrow \lim_{x\to a} y=e^b\Rightarrow \lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=e^b.$$

Misol sifatida $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x$, $x\to\infty$ deb olib,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^X=e,$$

ya`ni ikkinchi ajoyib limitni isbotlaymiz.

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^X\Rightarrow \ln y=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^X=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=(\infty\cdot 0)=\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right),$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1.$$

SHunday qilib, bizning misolda b=1 chiqdi. Demak

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^X=e^1=e.$$

<u>O'z-o'zini nazorat etish savollari:</u>

1. 0/0 ko'rinishdagi aniqmaslik ta'rifini bering.
2. ∞/∞ ko'rinishdagi aniqmaslik kanday ta'riflanadiq
3. Aniqmasliklarni ochish deb nimaga aytiladiq
4. Lopitalning I qoidasi nimadan iboratq
5. Lopitalning II qoidasi nimadan iboratq
6. Lopital qoidasi yordamida I ajoyib limit kanday isbotlanadiq
7. Lopital qoidasiga teskari tasdiq o'rinlimiq
8. 0/0 va ∞ ⁄ ∞ aniqmaslikdan tashkari yana kanday aniqmasliklarni bilasiz
9. II ajoyib limit Lopital qoidasi yordamida kanday isbotlanadiq

VII BOB. INTEGRAL HISOB.

7.1. BOSHLANGICH FUNKTSIYA. INTEGRALLAR JADVALI.

Tayanch iboralar: Boshlangich funktsiya, aniqmas integral, integral ostidagi ifoda, integrallar jadvali.

Rejasi:

1. Boshlang′ich funktsiya va uning xossalari.
2. Aniqmas integral va uning xossalari.
3. Integrallar jadvali.

Adabiyotlar:

[**1**]. III bob, §1-3   [**2**]. IX bob, §1

a) Boshlangich funktsiya va uning xossalari.

TA'RIF: Biror oraliqda aniqlangan $f(x)$ funktsiya uchun bu oraliqning hamma qiymatlarida

$$F'(x)=f(x)$$

tenglik o′rinli bo′lsa, u holda F(x) funktsiya $f(x)$ funktsiyaning boshlangich funktsiyasi deyiladi.

M i s o l : 1) $F(x)=\frac{a^x}{ln\, a}$, $(a\neq 1, a>0)$ butun sonlar o′qida $f(x)=a^x$ funktsiyaning boshlangich funktsiyasi bo′ladi, chunki x ning istalgan qiymatida

$$F'(x)=\left(\frac{a^x}{ln\, a}\right)'=a^x=f(x)$$

tenglik to′gri bo′ladi.

2) $F(x)=\frac{x^5}{5}$ funktsiya sonlar o′qining xamma nuqtalarida $f(x)=x^4$ funktsiyaning boshlangich funktsiyasi bo′ladi, chunki x ning istalgan qiymatida uning hosilasiga nisbatan

$$F'(x)=\left(\frac{x^5}{5}\right)'=x^4=f(x)$$

tenglik o′rinli bo′ladi.

Berilgan funktsiyaning boshlangich funktsiyasini topish masalasi bir qiymatli xal qilinmaydi. Haqiqatan ham, agar F(x) funktsiya f(x) ning boshlangich funktsiyasi bo′lsa, u holda F(x)+C funktsiya ham (bunda C ixtiyoriy o′zgarmas son) f (x) ning boshlangich funktsiyasi bo′ladi, chunki C ning istalgan qiymati uchun $(F(x)+C)'=f(x)$ bo′ladi.

M i s o l : F(x)= $\dfrac{a^x}{ln\, a}$ funktsiya $f(x)=a^x$ funktsiyaning boshlangich funktsiyasi yuqorida ko′rildi.

$$(F(x)+C)'=\left(\frac{a^x}{\ln a}+C\right)'=a^x=f(x)$$

tenglikdan esa $\dfrac{a^x}{\ln a}+C$ funktsiya xam a^x funktsiyaning boshlangich funktsiyasi ekanligi kelib chikadi.

Yuqoridagi mulohazalardan boshlangich funktsiyalarning quyidagi xossasi kelib chiqadi.

LEMMA: Agar F(x) va Φ(x) funktsiya f(x) funktsiyaning boshlangich funktsiyalari bo′lsa, u holda Φ(x) = F(x)+C tenglik o′rinli bo′ladi, bunda C ixtiyoriy o′zgarmas son.

I s b o t : F(x) va Φ(x) funktsiya f(x) ning boshlangich funktsiyalar bo′lgani uchun

$$F'(x)=f(x) \quad \text{ва} \quad \Phi'(x)=f(x)$$

tenglik to′gri bo′ladi.

Yordamchi Q(x) funktsiyani kiritamiz :

$$\Phi(x) - F(x) = Q(x).$$

Uning hosilasi x ning hamma qiymatlarida nolga teng, haqiqatan ham

$$Q'(x) = [\Phi(x)- F(x)]'= \Phi'(x) - F'(x)= f(x)- f(x)=0$$

Endi Q′(x)=0 tenglikdan Q(x) funktsiyaning o′zgarmas son ekani kelib chiqishini ko′rsatamiz. Faraz qilaylik, x_0 argumentning tayinlangan qiymati, x esa uning istagan qiymati bo′lsin. [x_0 ,x] oraliqda Lagranj formulasini tuzamiz:

$$Q(x)- Q(x_0)= Q'(\xi)(x- x_0) \;,$$

bunda $x_0<\xi<x$ bo′ladi.

Bu erdan Q′(x) =0 tenglik x ning hamma qiymatida, shu jumladan ξ da ham Q′(ξ)=0 bo′lgani uchun Q(x)- Q(x_0)=0 ya'ni Q(x)=Q(x_0) ni hosil qilamiz. Bu holda Q(x) funktsiyaning qiymati x ning hamma qiymatida bir xil bo′lishini bildiradi. Shunday qilib, Q(x)=C yoki

$$\Phi(x)- F(x) =C$$

tenglik o′rinli bo′ladi. Lemma isbotlandi.

Isbotlangan lemmadan, berilgan funktsiyaning ikkita boshlangich funktsiyasi bir-biridan faqat o′zgarmas songa farq kilishi kelib chiqadi.

b) Aniqmas integral va uning xossalari.

TA'RIF: Agar F(x) funktsiya biror oraliqda f (x) funktsiyaning boshlangich funktsiyasi bo′lsa, u holda F(x)+C (bunda C ixtiyoriy doimiy) funktsiyalar to′plami shu kesmada f (x) funktsiyaning ***aniqmas integrali*** deyiladi va

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

kabi belgilanadi. Bu erda $\int$ - integral belgisi, f (x) integral ostidagi funktsiya, f (x)dx integral ostidagi ifoda, x integrallash o′zgaruvchisi deyiladi.

Aniqmas integralni topish jarayoni integrallash deyiladi. Kesmada uzluksiz bo′lgan istalgan funktsiya shu oraliqda boshlangich funktsiyaga ega, demak, aniqmas integralga ham ega ekanini isbotsiz aytib o′tamiz.

<u>M i s o l :</u> 1) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ 2) $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$

Aniqmas integral quyidagi xossalarga ega :

I. Aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funktsiyaga teng, ya'ni

$$(\int f(x)dx)' = f(x)$$

<u>Isbot:</u> $(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$

I. Aniqmas integralning differentsiali integral ostidagi ifodaga teng, ya'ni

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx$$

II. Biror funktsiyaning hosilasidan olingan aniqmas integral shu funktsiya bilan ixtiyoriy o′zgarmasning yigindisiga teng, ya'ni

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

III. Biror funktsiyaning differentsialidan olingan aniqmas integral shu funktsiya bilan o′zgarmas yigindisiga teng, ya'ni

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

IV. O′zgarmas k ko′paytuvchini integral belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin, ya'ni

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

V. Chekli sondagi funktsiyalarning algebraik yigindisidan olingan aniqmas integral shu funktsiyalarning har biridan olingan aniqmas integrallarning algebraik yigindisiga teng, ya'ni

$$\int (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$$

<u>в) Asosiy integrallar jadvali.</u>

1. $\int dx = x + c$ 2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$

3. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$ 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$

5. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ 6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

7. $\int e^x dx = e^x + c$ 8. $\int sin\, xdx = -cos\, x + c$

9. $\int \cos x dx = \sin x + c$

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$

12. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$

13. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right| + c$

14. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + c$

15. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + c$

16. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c$

17. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

O’z-o’zini nazorat etish savollari:

1.Berilgan funktsiyalarning boshlangich funktsiyasi deb nimaga aytiladi?
2.Boshlangich funktsiya qanday xossalarga ega?
3.Berilgan funktsiyaning anikmas integrali deb nimaga aytiladi?
4.Aniqmas integralning eng oddiy xossalarini keltiring.
5.Integrallar jadvalini yozing.

7.2. INTEGRALLASH USULLARI.

Tayanch iboralar: Bevosita integrallash, differentsial ostiga kiritish, o′zgaruvchilarni almashtirish, bo′laklab integrallash.

Reja:

1. Integrallashning eng oddiy usullari.
2. Aniqmas integralda o′zgaruvchini almashtirish.
3. Bo′laklab integrallash usuli.

Adabiyotlar:

[**1**]. VI bob, §4-6 [**2**]. IX bob, §2,4

a) Bevosita integrallash usuli deb V va VI xossalarni qo′llash va asosiy integrallar jadvalidan foydalanib integrallashga aytiladi.

M i s o l : Integralni toping:

$$\int \frac{7x - 5x^2 + 1}{x^2} dx$$

Echimi: Suratni maxrajga bo′lib, keyin V va VI xossalarni qo′llab, integral ostidagi funktsiyani almashtiramiz va integrallar jadvalidan foydalanamiz:

$$\int\frac{7x-5x^2+1}{x^2}dx=\int\left(\frac{7}{x}-5+\frac{1}{x^2}\right)dx=7\int\frac{dx}{x}-5\int dx+\int\frac{dx}{x^2}=7\ln|x|-5x-\frac{1}{x}+c.$$

b) Differentsial belgisi ostiga kiritish usuli aniqmas integralning ushbu invariantlik xossasiga asoslangan:

$$\int f(x)dx=F(x)+c\Rightarrow\int f(u)du=F(u)+c.$$

Bu erda $u=u(x)$ ixtiyoriy differentsiallanuvchi funktsiyani ifodalaydi.

M i s o l : 1) $\int(x+4)^5dx=\int(x+4)^5d(x+4)=\frac{(x+4)^6}{6}+c.$

Bu erda $dx=d(x+4)$ ligidan foydalandik.

2) $\int\frac{xdx}{1+x^2}=\frac{2}{2}\int\frac{xdx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c.$

Bu erda oldin integralni 2 songa ko′paytirdik va ayni shu paytda uni 2 songa bo′ldik. Undan keyin $2xdx=dx^2=d(1+x^2)$ ekanligidan foydalandik.

3) $\int\frac{dx}{4x-11}=\frac{4}{4}\int\frac{dx}{4x-11}=\frac{1}{4}\int\frac{d(4x-11)}{4x-11}=\ln|4x-11|+c.$

v) Aniqmas integralda o′zgaruvchilarni almashtirish usuli.

Integrallar jadvaliga kirmagan integralni hisoblash kerak bo′lsin. x ni t erkli o′zgaruvchining biror differentsiallanuvchi funktsiyasi orqali ifodalab, integrallashning yangi t o′zgaruvchisini kiritamiz: $x=\varphi(t)$, bunga teskari $t=\psi(x)$ funktsiya mavjud bo′lsin, u holda

$$dx=\varphi'(t)dt$$

bo′lib

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$$

ekanini isbotlaymiz. Tenglikning xar ikkala tomonining hosilalari teng ekanligi ko′rsatilsa, teorema isbotlangan bo′ladi.

F(x) funktsiya f(x) funktsiyaning boshlangich funktsiyasi bo′lsin, u holda

$$\left(\int f(x)dx\right)'=F(x)\ ,$$

$$\left(\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt\right)'_x=\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_t\cdot\frac{dx}{dt}=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=$$

$$=f(\varphi(t))=f(x).$$

Teorema isbotlandi.

<u>**M i s o l :**</u> 1) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x+4}}$ integralni toping.

Echimi: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = \begin{bmatrix} \sqrt{x+4} = t, x+4 = t^2 \\ x = t^2 - 4 \\ dx = 2tdt \end{bmatrix} =$

$$= \int \frac{2tdt}{(t^2-4)\cdot t} = 2\int \frac{dt}{t^2 - 2^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C$$

M i s o l : 2) $\int \sqrt{1-x^2}dx$ integralni toping.

Echimi: $\int \sqrt{1-x^2dx} = \begin{bmatrix} x = \cos tdx = -\sin tdt \\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sin t \end{bmatrix} =$

$$= -\int \sin^2 tdt = -\int \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\int \cos 2tdt - \frac{1}{2}\int dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int cos 2td2t - \frac{1}{2}t = \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{2}t + c = \frac{1}{4}\sin 2\arccos x - \frac{1}{2}\arccos x + c =$$

$$= \frac{1}{2}\sin \arccos x \cdot \cos \arccos x - \frac{1}{2}\arccos x + c = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{1}{2}\arccos x + c$$

g) Bo′laklab integrallash usuli.

Faraz qilaylik, $u(x)$ va $v(x)$ funktsiyalar x ning differentsiallanuvchi funktsiyalari bo′lsin. Bu funktsiyalar ko′paytmasining differentsialini topamiz:

$$d(u\cdot v) = vdu + udv \ .$$

Bundan

$$udv = d(uv) - vdu\,.$$

Oxirgi tenglikning ikkala qismini integrallab, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

yoki

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Bu formula bo′laklab integrallash formulasi deyiladi.

Odatda, $\int x^n \cos xdx, \int x^n \sin xdx, \int \sqrt{a-x^2}dx, \int x^n a^x dx, \int x^n \ln xdx$ va shularga o′xshash integrallar bo′laklab integrallash formulasi orqali hisoblanadi.

M i s o l : 1) $\int \sqrt{1-x^2}dx$ integralni toping.

Echimi: $\int \sqrt{1-x^2}dx = \begin{bmatrix} \sqrt{1-x^2} = u, dx = dv \\ \frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}} = du, x = v \end{bmatrix} =$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx - \arccos x + C$$

Quyidagi tenglik hosil bo′ldi:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx - \arccos x + C$$

Demak,

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{x \cdot \sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{arc\cos x}{2} + C.$$

<u>M i s o l :</u> 2) $\int x \cdot 5^x\,dx$ integralni toping.

<u>Echimi:</u> $\int x \cdot 5^x\,dx = \begin{bmatrix} x = u, 5^x\,dx = dv \\ dx = du, \dfrac{5^x}{ln\,5} = v \end{bmatrix} =$

$$\frac{x \cdot 5^x}{ln\,5} - \frac{1}{ln\,5}\int 5^x\,dx = \frac{x \cdot 5^x}{ln\,5} - \frac{1}{ln^2\,5} \cdot 5^x + C.$$

<u>O′z-o′zini nazorat etish savollari:</u>

1. Bevosita integrallash usuli ta'rifini keltiring.
2. Differentsial ostiga kiritish usuli nimadan iborat?
3. Bo′laklab integrallash formulasini chiqaring.
4. Aniqmas integralda uzgaruvchilarni almashtirish usuli nimadan iborat?

7.3. KVADRATIK UCHHAD KATNASHGAN BA'ZI FUNKTSIYALARNI INTEGRALLASH. ENG SODDA RATSIONAL KASRLARNI INTEGRALLASH.

<u>Tayanch iboralar:</u> kvadratik uchxad, eng sodda ratsional kasr, rekurrent formula.

<u>Reja:</u>

1. Kvadratik uchhad.
2. Eng sodda ratsional kasrlarni integrallash.
3. Ratsional kasr.
4. Rekkurent formula.

<u>Adabiyotlar:</u>

[**1**]. VI bob, §8-9 [**2**]. IX bob, §3,5

a) Kvadratik uchhad qatnashgan ba'zi funktsiyalarni integrallash.

Ushbu integrallarni qaraymiz:

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \qquad \bar{I}_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Avval maxrajdan kvadrat uchhadni yigindi yoki ayirma ko′rinishiga keltiramiz:

$$ax^2 + вx + c = a\left[x^2 + \frac{в}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 + 2\frac{в}{2a}x + (\frac{в}{2a})^2 + \frac{c}{a} - (\frac{в}{2a})^2\right] =$$

$$= a\left[(x + \frac{в}{2a})^2 + (\frac{c}{a} - \frac{в^2}{4a^2})\right] = a\left[(x + \frac{в}{2a})^2 \pm к^2\right]$$

bu erda

$$\frac{c}{a} - \frac{в^2}{4a^2} = \pm к^2$$

belgi kiritildi.

Shunday qilib,

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + вx + c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{(x + \frac{в}{2a})^2 \pm к^2} = \left[\begin{array}{l} x + \frac{в}{2a} = t, \\ dx = dt \end{array}\right] = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm к^2}$$

Bu esa jadvaldagi integraldir.

Shu kabi,

$$\overline{I_1} = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + вx + c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x + \frac{в}{2a})^2 + к^2}} = \left[\begin{array}{l} x + \frac{в}{2a} = t \\ dx = dt \end{array}\right] = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm к^2}}$$

M i s o l : Ushbu integralni hisoblang :

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20}$$

Echimi: $\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20} =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 10} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4 + 10 - 4} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2 + 6} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} x + 2 = t \\ dx = dt \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + 6} = \frac{1}{2\sqrt{6}} arctg \frac{t}{\sqrt{6}} + C$$

b) Umumiyrok ko′rinishdagi integrallarni qaraymiz:

$$I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + вx + c}dx, \overline{I_2} = \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + вx + c}}dx$$

Integral ostidagi funktsiyani bunday almashtiramiz:

$$I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+вx+c}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+в)+(B-\frac{Aв}{2a})}{ax^2+вx+c}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{(2ax+в)dx}{ax^2+вx+c}+(B-\frac{A}{2a})\int\frac{dx}{ax^2+вx+c}=\frac{A}{2a}\int\frac{(2ax+в)dx}{ax^2+вx+c}+(B-\frac{A}{2a})\cdot J_1$$

$$I_2=\begin{bmatrix}ax^2+вx+c=t\\(2ax+в)dx=dt\end{bmatrix}=\frac{A}{2a}\int\frac{dt}{t}+(B-\frac{A}{2a})\cdot J_1$$

$$I_2=\frac{A}{2a}\ln|t|+(B-\frac{A}{2a})I_1=\frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+вx+c\right|+(B-\frac{A}{2a})I_1+C$$

Bu erdagi I_1 integralning hisoblanishi yuqorida koʻrsatilgan.

Shu kabi $\overline{I}_2$ integral ham hisoblanadi.

$$\overline{I}_2=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+вx+c}}dx=\int\frac{A\cdot\frac{(2ax+в)}{2a}+(B-\frac{Aв}{2a})}{\sqrt{ax^2+вx+c}}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+в}{\sqrt{ax^2+вx+c}}dx+(B-\frac{A}{2a})\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+вx+c}}=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+в}{\sqrt{ax^2+вx+c}}dx+$$

$$+(B-\frac{Aв}{2a})\overline{I}_1=\begin{bmatrix}ax^2+bx+c=t\\(2ax+b)dx=dt\end{bmatrix}=\frac{A}{2a}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\overline{I}_1=$$

$$=\frac{A}{a}\sqrt{t}+(B-\frac{Aв}{2a})\overline{I}_1=\frac{A}{a}\sqrt{ax^2+вx+c}+(B-\frac{Aв}{2a})\overline{I_1}+C$$

$\overline{I_1}$ integralni echilishi yuqorida koʻrsatilgan.

M i s o l : Quyidagi integralni hisoblang :

$$\int\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx$$

Echimi:

$$\int\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx=\int\frac{\frac{5}{2}(2x+4)+(3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx=$$

$$=\frac{5}{2}\int\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx-\int\frac{7\cdot dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}}=$$

$$=5\sqrt{x^2+4x+10}-7\,ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right|+C$$

v) Eng sodda ratsional kasrlarni integrallash.

Quyidagi ratsional kasrlarni eng sodda ratsional kasrlar deb aytiladi:

I. $\frac{A}{x-a}$, II. $\frac{A}{(x-a)^{\kappa}}$, III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, IV. $\frac{(Ax+B)}{(x^2+px+q)^n}$

I va II turdagi oddiy kasrlarni integrallash jadval integrallariga oson keltiriladi:

I. $\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\,ln|x-a| + C$

II. $\int \frac{Adx}{(x-a)^{\kappa}} = A\int (x-a)^{-\kappa} d(x-a) =$

$$= A\frac{(x-a)^{-\kappa+1}}{-\kappa+1} + C = \frac{A}{(1-\kappa)(x-a)^{\kappa-1}} + C$$

III. Turdagi oddiy kasrning integralini qaraymiz: $\frac{p^2}{4} - q < 0$ bo′lsin, unda

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q} = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) - \frac{Ap}{2} + B}{x^2+px+q} dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + (B - \frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \begin{bmatrix} x^2+px+q = t \\ (2x+p)dx = dt \end{bmatrix} = \frac{A}{2}\int \frac{dt}{t} + (B - \frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2} ln|x^2+px+q| + (B - \frac{Ap}{2})\int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{A}{2} ln|x^2+px+q| - (B - \frac{Ap}{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} arctg \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C$$

Endi IV turdagi oddiy kasrning integralini hisoblaymiz.

IV. $\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + B - \frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^n} dx = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n} +$

$$+(B - \frac{Ap}{2})\int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{((x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4})^n} = \frac{A}{2} I + (B - \frac{Ap}{2}) \cdot \bar{I}$$

Bu erda

$$I = \int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n} \quad , \quad \bar{I} = \int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{((x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4})^n}$$

bo′ladi.

1) $$I=\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n}=\begin{bmatrix}x^2+px+q=t\\(2x+p)dx=dt\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{t^n}=$$

$$\frac{1}{(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}}+C$$

2) $$\bar{I}=\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{((x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4})^n}=\begin{bmatrix}x+\frac{p}{2}=t\\dx=dt\\q-\frac{p^2}{4}=a^2\end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^n}dt=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n} \qquad (1)$$

Oxirgi integralga bo′laklab integrallash formulasini qo′llaymiz:

$$\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n}=\begin{bmatrix}u=t,dv=\frac{tdt}{(t^2+a^2)^n}\\du=dt,v=\frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}$$

Agar $\quad I_n=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$

belgi kiritsak, u holda (1) dagi formula quyidagi ko′rinishni oladi:

$$I_n=\frac{t}{2(n-1)a^2(t^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1}$$

yoki

$$I_n=\frac{1}{2(n-1)a^2}\cdot(\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}) \qquad (2)$$

Bu formula bo′yicha I_{n-1} integralni I_{n-2} orqali ifodalaymiz, so′ngra I_{n-2} ni I_{n-3} orqali ifodalaymiz va hokazo. Bu jarayon quyidagi integralni hosil qilgunimizcha davom etadi:

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C$$

(2) formula keltirish yoki rekurrent formula deyiladi.

M i s o l : $\int\frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+3)^2}$ integralni hisoblang.

Echimi: $\int \frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+3)^2} = \qquad\qquad =$

$$\int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-2}{(x^2+2x+3)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)dx}{(x^2+2x+3)^2} - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} =$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+2x+3)} - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+2x+3)} - 2I_2. \qquad (3)$$

I_2 integralni hisoblaymiz:

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{dx}{((x+1)^2+2)^2} = \begin{bmatrix} x+1=t \\ dx=dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+2-t^2}{(t^2+2)^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+2)^2}$$

Oxirgi integralni qaraymiz:

$$\int \frac{t^2dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{td(t^2+2)}{(t^2+2)^2} = -\frac{1}{2}\int td(\frac{1}{t^2+2}) =$$

$$= \begin{bmatrix} u=t, dv=d(\frac{1}{t^2+2}) \\ du=dt, v=\frac{1}{t^2+2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}arctg\frac{t}{2} + C = \frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

Demak

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\left[-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right] + C$$

bo′ladi.

I_2 integral qiymatini (3) tenglikka qo′ysak, berilgan integralning qiymati kelib chiqadi :

$$\int \frac{(x-1)dx}{(x^2+2x+3)^2} = -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

<u>O′z-o′zini nazorat etish savollari:</u>

1. Kvadrat uchxad katnashgan $I_1, \overline{I_1}, I_2, \overline{I_2}$ integrallarni yozing.
2. $\overline{I_1}$ va $\overline{I_2}$ integrallarning hisoblash tartibini ko′rsating.
3. Eng sodda ratsional kasr deb qanday kasrlarga aytiladi?
4. Eng sodda ratsionil kasrlarni integrallash tartibini ko′rsating.

7.4. RATSIONAL KASRLARNI ENG SODDA RATSIONAL KASRLARGA AJRATISH. RATSIONAL KASRLARNI INTEGRALLASH.

Tayanch iboralar: Ratsional kasr, darajali ko′pxad, to′gri ratsional kasr, noto′gri ratsional kasr.

Reja:

1. Ratsional kasrlarni eng sodda ratsional kasrlarga ajratish.
2. Ratsional kasrlarni integrallash.

Adabiyotlar:

[**1**]. VI bob, §7-9 [**2**]. IX bob, §5

a) Ratsional kasrlarni eng sodda ratsional kasrlarga ajratish.

Ma'lumki ,

$$P_n(x)=a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} +\dots a_{n-1}x + a_0x^n + a_n$$

funktsiya darajali ko′pxad deyiladi, bunda a_0, a_1, $a_2,\dots$, ko′pxadning koeffitsientlari, n esa daraja ko′rsatgichi.

TA'RIF: Ikki ko′pxad nisbati ratsional kasr deyiladi.

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{в_0x^m+в_1x^{m-1}+\dots+в_{m-1}x+в_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n}$$

Agar m<n bo′lsa, u holda ratsional kasr to′gri, agar m≥n bo′lsa, u holda ratsional kasr noto′gri kasr deb aytiladi.

R(x) ratsional kasr noto′gri bo′lgan xollarda kasrning $Q_m(x)$ suratini $P_n(x)$ maxrajiga bo′lish yuli bilan uning butun qismini ajratish kerak:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=Q(x)+\frac{r(x)}{P_n(x)}$$

Bu erda $\frac{r(x)}{P_n(x)}$ to′gri kasr, chunki $r(x)$ koldikning darajasi $P_n(x)$ ning darajasidan kichik.

M i s o l : Ushbu $$R(x)=\frac{2x^4-3x^3+1}{x^2+x-2}$$

noto′gri ratsional kasrning butun qismini ajrating.

Echimi:

$$\begin{array}{l|l}
_\,2x^4-3x^3+1 & \underline{x^2+x-2} \\
\underline{2x^4+2x^3-4x^2} & 2x^2-5x+9 \\
_\,-5x^3+4x^2+1 & \\
\underline{5x^3-5x^2+10x} & \\
_\,9x^2-10x+1 & \\
\underline{9x^2+9x-18} & \\
-19x+19 &
\end{array}$$

Demak,

$$\frac{2x^4-3x^3+1}{x^2+x-2}=2x^2-5x+9+\frac{-19x+19}{x^2+x-2}$$

Ushbu $R(x)=\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$

to′gri ratsional kasrni qarab chiqamiz Bu kasrning $P_n(x)$ maxraji

$$(x-\alpha)^{\kappa},(x^2+px+q)^s$$

ko′rinishdagi chiziqli va kvadratik ko′paytuvchilarga yoyiladi. Bu erda $(x-\alpha)^{\kappa}$ ko′rinishdagi ko′paytuvchi k karrali haqiqiy ildizga mos keladi, $(x^2+px+q)^s$ ko′rinishdagi ko′paytuvchi s karrali kompleks qo′shma ildizlarga mos keladi:

$$P_n(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}\cdot(x-\alpha_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_r)^{k_r}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdot$$

$$\cdot(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_lx+q_l)^{s_l}. \qquad (1)$$

TEOREMA: Har qanday $R(x)=\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ ratsional kasrni, bunda $P_n(x)$ (1) formula bo′yicha ko′paytuvchilarga ajratilgan, $\dfrac{A}{x-\alpha},\dfrac{A}{(x-\alpha)^k}$, (k≥2 va butun), $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q},\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^s}$, (s≥2 va butun) turdagi oddiy kasrlarning yigindisi ko′rinishida ifodalash mumkin. Bunda:

1) (1) yoyilmaning $(x-\alpha)$ ko′rinishdagi ko′paytuvchisiga bitta $\dfrac{A}{x-\alpha}$ kasr mos keladi;

2) (1) yoyilmaning $(x-\alpha)^{\kappa}$ ko′rinishdagi ko′paytuvchisiga

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)^k}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_k}{(x-\alpha)},$$

kasrlar yigindisi mos keladi;

3) (1) yoyilmaning x^2+px+q ko′rinishdagi ko′paytuvchisiga bitta $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ kasr mos keladi;

4) (1) yoyilmaning $(x^2-+px+q)^s$ ko′rinishdagi ko′paytuvchisiga

$$\frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)^s}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^{s-1}}+\ldots+\frac{A_sx+B_s}{(x^2+px+q)}$$

kasrlar yig′indisi mos keladi;

Bu teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

Yuqorida ko′rsatilgan ratsional kasrning oddiy kasrlar yig′indisi yoyilmasidagi $A,B,A_1,A_2,\ldots,B_1,B_2,\ldots$ koeffitsientlarni aniqlash uchun turli usullar mavjud. Ulardan bittasi noma'lum koeffitsientlar usulidir. Uni misolda quramiz.

M i s o l : Ushbu

$$R(x)=\frac{x+2}{x^3-3}$$

ratsional kasrni oddiy kasrlar yig′indisiga ajrating.

Echimi: Maxrajni ko′paytuvchilarga ajratamiz:

$$x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)$$

Keltirilgan teoremaga asosan berilgan kasrni oddiy kasrlarga ajratish bunday ko′rinishda bo′lishi mumkin:

$$\frac{x+2}{x^3-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{D}{x+1}$$

A,B,D noma′lum koeffitsientlarni topishga kirishamiz. Buning uchun oxirgi tenglikning o′ng qismini umumiy maxrajga keltiramiz va hosil qilingan tenglikning ikkala qismida maxrajni tashlab yuboramiz. Bu amallar natijasida quyidagi ayniyat kelib chiqadi :

$$x+2\equiv A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Dx(x-1)\ ,$$

$$x+2\equiv(A+B+D)x^2+(B-D)x-A$$

Ko′pxadlarning tengligidan quyidagi A.B.D larga nisbatan tenglamalar sistemasini hosil qilamiz va ildizlarini topamiz:

$$\begin{cases}A+B+D=0\\ B-D=1\\ -A=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-2\\ B=\dfrac{3}{2}\\ D=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Demak, $$\frac{x+2}{x^3-x}=-\frac{2}{x}+\frac{3}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)}$$

M i s o l : Ushbu

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-x+2}$$

ratsional kasrni oddiy kasrlar yig′indisiga ajrating.

Echimi: Berilgan ratsional kasrning maxrajini ko′paytuvchilarga ajratamiz :

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-x+2}=\frac{x+1}{(x+2)(x^2-x+1)}$$

Yuqorida keltirilgan teoremaga asosan

$$\frac{x+1}{(x+2)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Yuqoridagi misoldagiday, bu tenglikni ham o′ng qismini umumiy maxrajga keltiramiz va hosil qilingan tenglikning ikkala qismidagi maxrajlarni tashlab yuboramiz. Natijada quyidagi ayniyat hosil bo′ladi:

$$x+1\equiv(A+B)x^2+(-A+2B+C)x+A+2C$$

Ko′phadlarning tengligidan foydalanib A.B.C larga nisbatan tenglamalar sistemasini tuzib uning ildizlarini topamiz:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+2B+C=1 \\ A+2C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{1}{7} \\ B=\dfrac{1}{7} \\ C=\dfrac{4}{7} \end{cases}$$

Shunday qilib, ratsional kasr quyidagi sodda ratsional kasrlarga yig′indisiga ajraldi :

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-x+2}=-\frac{1}{7(x+2)}+\frac{x+4}{7(x^2-x+1)}$$

b) Ratsional kasrlarni integrallash.

Ratsional kasrni integrallash uchun quyidagilarni bajarish kerak:

1) Uning to′gri yoki noto′gri kasr ekanligini tekshirib va aks holda ya′ni, noto′g′ri kasr bo′lganda, oldin uning butun qismini ajratib, shundan keyin ko′phad butun qismi va ratsional kasr qismlari yig′indisi ko′rinishida yoziladi;
2) To′gri ratsional kasr oddiy ratsional kasrlar yigindisiga ajratiladi;
3) Yoyilmaning koeffitsientlari topiladi;
4) Ratsional kasrning integrali hisoblanadi.

M i s o l : Integralni hisoblang :

$$\int\frac{(x^2+3)dx}{x(x-1)(x+2)}$$

Echimi: Yuqoridagi ko′rsatmalarni birin-ketin bajarib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\frac{x^2+3}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{D}{x+2},$$

$$x^2+3\equiv(A+B+D)x^2+(A+2B-D)x-2A,$$

$$\begin{cases} A+B+D=1 \\ A+2B-D=0 \\ -2A=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{3}{2} \\ B=\dfrac{4}{3} \\ D=\dfrac{7}{6} \end{cases}$$

$$\int \frac{(x^2+3)dx}{x(x-1)(x+2)} = -\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{7}{6}\int \frac{dx}{x+2} =$$
$$= -\frac{3}{2}\ln|x| + \frac{4}{3}\ln|x-1| + \frac{7}{6}\ln|x+2| + c.$$

<u>O′z-o′zini nazorat etish savollari:</u>

1. Ratsional kasr deb nimaga aytiladi?
2. To′gri va noto′gri ratsional kasrlarga ta'rif bering.
3. Ratsional kasrni eng sodda ratsional kasrlar yig′indisi ko′rinishida keltirish tartibi nimadan iborat?
4. Ratsional kasrlarni integrallash tartibini ko′rsating.

7.5. IRRATSIONAL FUNKTSIYALARNING INTEGRALI . EYLERNING BIRINCHI ALMASHTIRMASI.

<u>Tayanch iboralar:</u> Irratsional funktsiya, ratsional amallar, Eyler almashtirishi.

<u>Reja:</u>

1. Irratsional funktsiyalar.
2. Ba′zi irratsional funktsiyani integrallash.
3. Eylerning birinchi almashtirmasi.

<u>Adabiyotlar:</u>

[**1**]. VI bob, §11 [**2**]. IX bob, §6.

a) Irratsional funktsiyalarning integrali.

Har qanday irratsional funktsiyalardan olingan integral elementar funktsiyalar orqali ifodalanavermaydi. O′zgaruvchilarni almashtirish yordamida ratsional funktsiyaning integrallariga keltiriladigan irratsional funktsiyalarning ayrimlarini qaraymiz.

1) $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, ..., x^{\frac{r}{s}})dx$ ko′rinishdagi integralni qaraymiz. Bunda R o′zgaruvchilarga nisbatan faqat ratsional amallar bajarilishini ko′rsatadi va *m, n, r, s,…* -natural sonlardir.

Integral ostidagi funktsiyani ratsional funktsiyaga keltirish uchun $\frac{m}{n}, ..., \frac{r}{s}$ kasrlarning umumiy maxraji k ni topish va $x = t^k, dx = kt^{k-1}dt$ almashtirish bajarish maqsadga muvofiqdir.

<u>M i s o l :</u> Ushbu integral hisoblansin:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$$

Echimi: $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}. = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{3}{4}}+1}.$

$\frac{1}{2},\frac{3}{4}$ kasrlarning umumiy maxraji 4 bo′ladi, shuning uchun $x = t^4$, $dx=4t^3dt$ almashtirishni bajaramiz :

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{3}{4}}+1}. = 4\int \frac{t^2}{t^3+1}t^3dt = 4\int (t^2 - \frac{t^2}{t^3+1})dt =$$

$$= 4\int t^2dt - 4\int \frac{t^2}{t^3+1}dt = 4\cdot\frac{t^3}{3} - \frac{4}{3}\ln\left|t^3+1\right| + C =$$

$$= \frac{4}{3}\left[x^{\frac{3}{4}} - \ln\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right|\right] + C$$

2) $\int R\left[x, (\frac{ax+в}{cx+d})^{\frac{m}{n}}, ..., (\frac{ax+в}{cx+d})^{\frac{r}{s}}\right]dx$ ko′rinishdagi integralni qaraymiz R,m,n,s,r,… larga yuqorida qo′yilgan shartlar saqlanadi. Agar k son $\frac{m}{n},...,\frac{n}{s}$ kasrlarning umumiy maxraji bo′lsa, bu integral

$$\frac{ax+в}{cx+d} = t^к$$

almashtirish yordamida ratsional funktsiyaning integraliga olib keladi. (a,$в$,c,d bir vaqtda nolga aylanmaydigan butun sonlar).

M i s o l : Integralni hisoblang :

$$\int \frac{\sqrt{2x-3}dx}{\sqrt[3]{2x-3}+1}$$

Echimi: Bu erda a =2, $в$ = -3, c =0 , d =1 ekanligini va $\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ kasrlarning umumiy maxraji 6 ekanligini nazarga olib

$$2x-3 = t^6 \ , \ t = \sqrt[6]{2x-3}, \ dx = 3t^5dt$$

almashtirish bajaramiz. Natijada :

$$\int \frac{\sqrt{2x-3}dx}{\sqrt[3]{2x-3}+1} = 3\int \frac{t^3\cdot t^5dt}{t^2+1} = 3\int \frac{t^8dt}{t^2+1} = 3\int (t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1})dt =$$

$$= 3(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + arctgt) + C = \frac{3}{7}\sqrt[6]{(2x-3)^7} - \frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x-5)^5} +$$

$$+\sqrt{2x-3}-3\sqrt[6]{2x-3}+3arctg\sqrt[6]{2x-3}+C$$

b) Eylerning birinchi almashtirishi.

Ushbu

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+вx+c})dx \qquad (1)$$

ko′rinishdagi integralni qaraymiz, bunda $a\neq 0$. Agar (1) integralda $a>0$ bo′lsa, u holda Eylerning birinchi alshmashtirishi deb atalmish

$$\sqrt{ax^2+вx+c}=\pm\sqrt{a}x+t$$

almashtirish bajarib integral ostidagi funktsiyani ratsional funktsiyaga keltiramiz:

$$ax^2+вx+c=ax^2+2\sqrt{a}xt+t^2, \qquad x=\frac{t^2-c}{в-2\sqrt{a}t},$$

$$\sqrt{ax^2+вx+c}=\sqrt{a}x+t=\sqrt{a}\cdot\frac{t^2-c}{в-2+\sqrt{a}}+t,$$

$$dx=\frac{-6\sqrt{a}t^2+2вt+2\sqrt{ac}}{(в-2\sqrt{a}t)^2}dt$$

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+вx+c})dx=$$

$$=\int R\left(\frac{t^2-c}{в-2\sqrt{a}t},\frac{\sqrt{a}(t^2-c)}{в-2t\sqrt{a}}+t\right)\frac{-6\sqrt{a}t^2+2вt+2\sqrt{ac}}{(в-2\sqrt{a}t)^2}dt$$

Shunday qilib (1) integral ostidagi funktsiya t ning ratsional funktsiyasiga aylandi.

<u>**M i s o l :**</u> Ushbu integral hisoblansin :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}$$

<u>**Echimi:**</u> Bu erda $a=1>0$ bo′lgani uchun

$$\sqrt{x^2+c}=-x+t$$

almashtirish bajaramiz, bu holda

$$x^2+c=x^2-2xt+t^2,$$

$$x=\frac{t^2-c}{2t},\ \sqrt{x^2+c}=-x+t=-\frac{t^2-c}{2t}+t=\frac{t^2+c}{2t},\ dx=\frac{t^2+c}{2t^2}dt$$

Dastlabki integralga qaytamiz:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}=\int\frac{\frac{t^2+c}{2t^2}dt}{\frac{t^2+c}{2t}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+c}\right|+C.$$

<u>O′z-o′zini nazorat etish savollari:</u>

1. $\int R(x,x^{\frac{m}{n}},...,x^{\frac{r}{s}})dx$ ko′rinishdagi integrallar qanday integrallanadi?

2. $\int R\left[x,(\frac{ax+в}{cx+d})^{\frac{m}{n}},...,(\frac{ax+в}{cx+d})^{\frac{r}{s}}\right]dx$ ko′rinishdagi integrallar qanday integrallanadi?

3. $\int R(x,\sqrt{ax^2+вx+c})dx$ ko′rinishdagi integral uchun Eylerning birinchi almashtirishi qanday ko′riishda bo′ladi ?

4. $\int R(x,\sqrt{ax^2+вx+c})dx$ ko′rinishdagi integral Eylerning birinchi almashtirishi orqali qanday integrallanadi?

7.6. EYLERNING IKKINCHI VA UCHINCHI ALMASHTIRMALARI.

Tayanch iboralar: Eylerning almashtirmalari.

Reja:

1. Eylerning ikkinchi almashtirmasi.
2. Eylerning uchinchi almashtirmasi.

Adabiyotlar:

[**1**]. VI bob, §11 [**2**]. IX bob, §6

a) Eylerning ikkinchi almashtirishi.

Ushbu

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+вx+c})dx \qquad (1)$$

ko′rinishdagi integralni qaraymiz, bunda $a\neq 0$.

Agar c>0 bo′lsa, bu holda (1) integral ostidagi funktsiyani ratsional funktsiyaga keltirish uchun Eylerning II almashtirishi, ya'ni

$$\sqrt{ax^2+вx+c}=xt\pm\sqrt{c}$$

almashtirish maqsadga muvofiqdir. Bu tenglik orqali quyidagilarni topamiz (aniqlik uchun $\sqrt{c}$ oldida qo′shish ishorani olamiz):

$$ax^2+вx+c=x^2t^2+2xt\sqrt{c}+c,$$

$$x=\frac{2\sqrt{c}t-в}{a-t^2},$$

$$\sqrt{ax^2+вx+c}=\frac{t(2\sqrt{c}t-в)}{a-t^2}+\sqrt{c}=\frac{\sqrt{c}t^2-вt+a\sqrt{c}}{a-t^2},$$

$$dx=\left(\frac{2\sqrt{c}t-в}{a-t^2}\right)'dt=\frac{2\sqrt{c}(a-t^2)+2t(2\sqrt{c}t-в)}{(a-t^2)}dt=$$

$$=\frac{2\sqrt{c}a+2\sqrt{c}t^2-2вt}{(a-t^2)}dt$$

Natijada (1) integral quyidagi ko′rinishga keladi :

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+вx+c})dx=$$

$$=\int R\left(\frac{2\sqrt{c}t-в}{a-t^2},\frac{\sqrt{c}t^2-вt+a\sqrt{c}}{a-t^2}\right)\frac{2\sqrt{c}a+2\sqrt{c}t^2-2вt}{(a-t^2)^2}dt.$$

<u>M i s o l :</u> Integralni hisoblang:

$$\int\frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx$$

<u>Echimi:</u> $\sqrt{1+x+x^2}=xt+1$ deb olamiz, u holda

$$1+x+x^2=x^2t^2+2xt+1,\qquad x=\frac{2t-1}{1-t^2},$$

$$\sqrt{1+x+x^2}=xt+1=\frac{t^2-t+1}{1-t^2}$$

$$1-\sqrt{1+x+x^2}=\frac{-2t^2+t}{1-t^2},\quad dx=\frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}dt$$

Hosil qilingan ifodalarni dastlabki integralga qo′yamiz:

$$\int\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx=\int\frac{(-2t^2+t)^2(1-t^2)^2(1-t^2)(2t^2-2t+2)}{(1-t^2)^2(2t-1)^2(t^2-1)^2(t^2-t+1)}dt=$$

$$=2\int\frac{t^2}{1-t^2}dt=-2t+\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=-\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x}+$$

$$+\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}-1}{x-\sqrt{1+x+x^2}+1}\right|+C=-\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x}+\ln\left|2x+2\sqrt{1+x+x^2}+1\right|+C$$

<u>b) Eylerning uchinchi almashtirishi.</u>

Agar (1) integralda $ax^2+вx+c$ uchhadning haqiqiy ildizlari α va β bo′lsa, u holda Eylerning III almashtirish deb ataluvchi ushbu

$$\sqrt{ax^2+вx+c}=(x-\alpha)t$$

almashtirishni bajaramiz. Bu holda

$$ax^2+вx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

bo′lgani sababli

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)t\ ,\quad a(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)^2t^2\ ,$$

$$a(x-\beta)=(x-\alpha)t^2\ ,\quad x=\frac{\alpha\beta-at^2}{a-t^2}\ ,$$

$$\sqrt{ax^2+ex+c}=\left(\frac{\alpha\beta-at^2}{a-t^2}-\alpha\right)\cdot t=\frac{(\alpha\beta-\alpha a-at^2+\alpha t^2)t}{a-t^2}$$

$$dx=\left(\frac{\alpha\beta-at^2}{a-t^2}\right)' dt=\frac{-2at(a-t^2)+2t(\alpha\beta-at^2)}{(a-t^2)^2}dt=$$

$$=\frac{(-2a^2t+2\alpha\beta t)dt}{(a-t^2)^2}=\frac{2t(\alpha\beta-a^2)}{(a-t^2)^2}dt$$

Hosil qilingan ifodalarni (1) integralga qo′yib, integral ostidagi funktsiyani ratsional funktsiyaga almashtiramiz:

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+ex+c})dx=$$

$$=\int R\left(\frac{\alpha\beta-at^2}{a-t^2},\frac{(\alpha\beta-\alpha a-at^2+\alpha t^2)t}{a-t^2}\right)\frac{2t(\alpha\beta-a^2)}{(a-t^2)^2}dt$$

M i s o l: Integralni hisoblang:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$$

Echimi: $2+x-x^2=(x+1)(x-2)$ bo′lganligi sababli,

$$\sqrt{2+x-x^2}=t(x+1)$$

deb olamiz, u holda

$$\sqrt{2-x}=t\sqrt{x+1}\ ,\quad x=\frac{2-t^2}{t^2+1}$$

$$dx=-\frac{6tdt}{(t^2+1)^2},\qquad \sqrt{2+x-x^2}=t\left(\frac{2-t^2}{t^2+1}+1\right).$$

Dastlabki integralga qaytamiz:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}=-6\int\frac{tdt}{\frac{2-t^2}{t^2+1}\cdot t\left(\frac{2-t^2}{t^2+1}+1\right)(t^2+1)^2}=$$

$$=-2\int\frac{dt}{2-t^2}=-\frac{1}{\sqrt2}\ln\left|\frac{\sqrt2+t}{\sqrt2-t}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt2}\ln\left|\frac{(t+\sqrt2)^2}{2-t^2}\right|+C=-\frac{1}{\sqrt2}\ln\left|\frac{2\sqrt2\sqrt{2+x-x^2}+x+4}{3x}\right|+C$$

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. Eylerning ikkinchi almashtirmasini yozing va u orqali integrallash tartibini ko′rsating.
2. Eylerning uchinchi almashtirmasini yozing va u orqali integrallash tartibini keltiring.

7.7. TRIGONOMETRIK FUNKTSIYALAR QATNASHGAN BA'ZI IFODALARNI INTEGRALLASH.

Tayanch iboralar: Universal almashtirma, ratsional funktsiya.

R e j a :

1. Universal almashtirma.
2. Trigonometrik funktsiyaning ratsional ifodalarini integrallash.
3. Ba′zi bir trigonometrik ifodalarni integrallash.

Adabiyotlar:

[**1**]. VI боб, §10 [**2**]. IX боб, §7

a) Universal almashtirish.

Ushbu $\int R(\sin x, \cos x)dx$ integral berilgan bo′lib, unda R(·) biror ratsional funktsiyani ifodalasin. Bu integral $tg\frac{x}{2} = t$ almashtirma yordami bilan hamma vaqt ratsional funktsiyaning integraliga keltirilishi mumkinligini ko′rsatamiz. Buning uchun sin$x$ va cos$x$ funktsiyalarni $tg\frac{x}{2}$ = t orqali ifodalaymiz:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

So′ngra, $x = 2arctgt$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

Shunday qilib*, sinx, cosx, x, dx* kiritilgan *t* orqali ratsional ifodalanadi va universal almashtirish deb ataladi.

Demak ,

$$\int R(\sin,\cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

M i s o l : Integralni hisoblang :

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

Echimi: Yuqorida yozilgan formulalarga asosan :

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

b) Aniqmas integral

$$\int R(\sin x)\cos x dx$$

ko′rinishda bo′lsin. U holda

$$t = \sin x \ , \ \mathrm{cosxdx} = \mathrm{dt}$$

M i s o l : Integralni hisoblang :

$$\int \sin^5 x \cos dx$$

Echimi: $\int \sin^5 x \cos dx = \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{bmatrix} = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^6 t}{6} + C$

v) Agar integral

$$\int R(\cos x)\sin x dx$$

ko′rinishda berilgan bo′lsa, u holda

$$\cos x = t \ , \ sinxdx = - dt$$

almashtirish maqsadga muvofiqdir :

$$\int R(\cos x)\cdot \sin x dx = -\int R(t)dt$$

M i s o l : Integralni hisoblang **:**

$$\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx$$

Echimi:

$$\int \frac{\sin xdx}{\cos^4 x} = \begin{bmatrix} \cos x = t \\ \sin dx = -dt \end{bmatrix} = -\int \frac{dt}{t^4} = -\int t^{-4}dt = \frac{1}{3t^3} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} + C$$

g) Agar integral ostidagi funktsiya faqat tg*x* ga bog′lik bo′lsa, u holda tg*x*=t , *x*=arctg*x*, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ almashtirish yordamida bu integral ratsional funktsiyaning integraliga keltiriladi:

$$\int R(tgx)dx = \int R(t) \cdot \frac{dt}{1+t^2}$$

M i s o l : Integralni hisoblang :

$$\int tgxdx$$

Echimi: $\int tgxdx$ = $\begin{bmatrix} tgx = t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{tdt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+t^2)}{1+t^2} = \frac{1}{2}\left|1+t^2\right| + C =$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|1+tg^2x\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) + C \ .$$

d) Agar integral ostidagi funktsiya R(sin*x*,cos*x*) ko′rinishda bo′lsa, ammo sin*x*,cos*x* funktsiyalar faqat juft darajalarda kirsa, u holda tg=t almashtirish tadbiq etiladi, chunki

$$cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2} \ , \ dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

M i s o l : Integralni hisoblang :

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$$

Echimi: $\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \begin{bmatrix} tgx = t \ , \ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{bmatrix} =$

$$=\int \frac{dt}{\left(2-\frac{t^2}{1+t^2}\right)\left(1+t^2\right)}=\int \frac{dt}{2+t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}} arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right)+C$$

e) Endi $\int \sin^m x \cos^n x dx$ ko′rinishdagi integral berilgan bo′lsin.

Bunda uch holni qaraymiz:

1) m va n дан kamida bittasi toq son. Aniqlik uchun n toq bo′lsin. n=2p+1 deb olib integralni almashtiramiz :

$$\int sin^m x\, cos^{2p+1} xdx=\int sin^m x\, cos^{2p} x\cdot cos\, xdx=$$

$$=\int sin^m x\left(1-sin^2 x\right)^p cos\, xdx=\begin{bmatrix} sin\, x=t \\ cos\, xdx=dt \end{bmatrix}=\int t^m\left(1-t^2\right)^p dt.$$

Bu esa ratsional funktsiyaning integrali.

2) m va n manfiy bo′lmagan juft son. m=2p, n=2q deb faraz qilamiz:

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2} cos\, 2x, \qquad cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2} cos\, 2x \qquad (1)$$

Bularni integralga qo′yamiz:

$$\int sin^{2p} x\, cos^{2q} xdx=\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2} cos\, 2x\right)^p\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2} cos\, 2x\right)^q dx.$$

Darajalarni ko′tarib, qavslarni ochib, cos2x ning juft va toq darajalarini o′z ichiga olgan hadlarni hosil qilamiz, birinchi punktda ko′rsatilgan usuldan yoki (1) formuladan foydalanamiz.

M i s o l : Integralni hisoblang :

$$\int sin^4 xdx$$

Echimi:

$$\int \sin^4 xdx=\frac{1}{4}\int\left(1-\cos 2x\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left[1-\sin 2x+\frac{1}{2}\int\left(1+\cos 4x\right)dx\right]==\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x-\sin 2x+\frac{\sin 4x}{8}\right]+c$$

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ ko′rinishdagi integralni universal almashtirish usuli orqali qanday integrallash mumkin ?
2. $\int R(\sin x)\cos x dx$ ko′rinishdagi integrallar qanday integrallanadi?
3. $\int R(tgx)dx$ ko′rinishdagi integrallar qanday integrallanadi?
4. $\int R(\sin^m x, \cos^n x)dx$ ko′rinishdagi integrallar qanday integrallanadi?

7.8. ANIQ INTEGRAL TUSHUNCHASIGA OLIB KELUVCHI MASALALAR. ANIQ INTEGRALNING TA′RIFI VA XOSSALARI.

Tayanch iboralar: Egri chiziqli trapetsiya, integral yigindi, aniq integral, aniq integralning geometrik ma′nosi, aniq integralning mexanik ma′nosi.

R e j a :

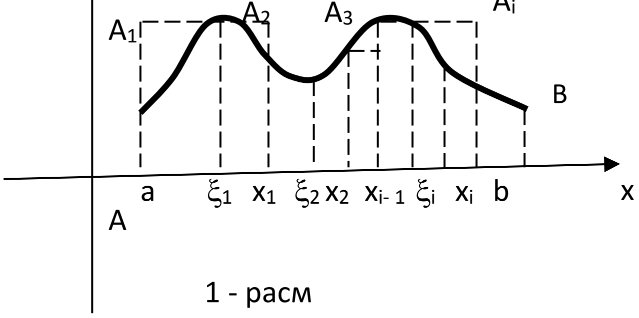
1. Egri chizikli trapetsiyaning yuzini xisoblash masalasi.
2. Uzgaruvchi kuch bajaradigan ish xakidagi masala.
3. Anik integralning ta'rifi.
4. Anik integralning asosiy xossalari.

Adabiyotlar:

[**1**]. VI боб, §12-13 [**2**]. X боб, §1-3

1.Egri chiziqli trapetsiya yuzini hisoblash masalasi.

$y=f(x)$ yzluksiz funktsiya, $x=a$, $x=$b, $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraga egri chiziqli trapetsiya deb aytamiz.



1 - расм

Shu figura yuzini hisoblash masalasini ko′raylik.

[a; b] segmentni abtsissalari $x_1<x_2<\ldots<x_i<\ldots<x_{n-1}$ bo′lgan n-1 ta nuqta yordamida bo′laklarga bo′lamiz. Bunda a=x_o va b=x_n deymiz.

Bo′lish nuqtalari [a; b] segmentnin ta kichik segmentlarga bo′ladi:

$[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2]$,… $[x_{i-1};x_i]$,…. $[x_{n-1};x_n]$

Bo′linish nuqtalaridan OY o′qiga parallel to′gri chiziqlar o′tqazib, egri chiziqli trapetsiyani n ta kichik egri chiziqli trapetsiyalarga ajratamiz, (1-rasm). Ravshanki egri chiziqli trapetsiya ABba ning yuzi n ta kichik egri chiziqli trapetsiyalarning yuzalari yigindisiga teng. Agar ABba shaqlning yuzi S, asosi $[x_{i-1}; x_i]$, (i=1,2,3,…,n) bo′lgan egri chiziqli kichik trapetsiyalarning yuzalari ΔS_i bilan belgilansa, quyidagi tenglik o′rinli bo′ladi:

$$S=\Delta S_1+\Delta S_2+\ldots+\Delta S_i+\ldots+\Delta S_n \qquad \text{ёки} \qquad S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i \qquad (1)$$

ΔS_i larning aniq qiymatini topib bo′lmaydi, takribiy qiymatlarni aniqlash uchun esa $[x_{i-1}; x_i]$ segmentlarning har birida ixtiyoriy ξ_i nuqtadan tanlab olamiz va bu nuqtalarda $f(\xi_i)$ ordinatalarini yasaymiz.1-rasmdan quyidagilar ko′rinadi:

$$\Delta S_1\approx f(\xi_1)(x_1-x_0),\ \Delta S_2\approx f(\xi_2)(x_2-x_1),\ldots,\ \Delta S_i\approx f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),\ldots,\ \Delta S_n\approx f(\xi_n)(x_n-x_{n-1}) \qquad (2)$$

Agar $x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$ belgini kiritib (2) larni (1) ga qo′ysak ABba egri chiziqli trapetsiya yuzining taqribiy qiymatini topgan bo′lamiz:

$$S\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (3)$$

(3) ifodaga f (x) funktsiyaning $[a; b]$ kesmadagi integral yig′indisi deb aytiladi.

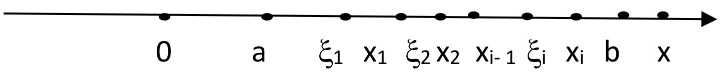
2.O′zgaruvchi kuch bajargan ish haqidagi masala.

Mexanikadan ma'lumki, agar F kuch ta′sirida moddiy nuqta λ masofada siljigan bo′lsa, bajarilgan ish A quyidagiga teng:

$$A= F\cdot\lambda \qquad (4)$$

Bu erda F kuch kattaligi bilan ham, yo′nalishi bilan ham o′zgarmas. Endi F kuch o′zgarmas yo′nalishni saqlasa ham, sonli kattaligi bo′yicha o′zgargan holni qaraymiz. Aytaylik, bu kuch ta′sirida moddiy nuqta kuchning ta′sir chizig′i yo′nalishi bo′ylab yo′nalgan to′gri chiziq bo′ylab harakat qilsin. Bunda F kuch bajargan ishni hisoblash masalasini qaraymiz.

Moddiy nuqta harakat qilayotgan chiziqni OX o′qi deb qabul qilamiz:



2 - расм

Yo′lning boshlangich va oxirgi nuqtalari mos ravishda a va b, $(a<b)$ abtsissalarga ega bo′lsin.$[a;b]$ segmentning har bir nuqtasida kuchning kattaligi ma′lum qiymatga, ya'ni $F=f(x)$ funktsiya kabi bo′ladi. Bu funktsiyani uzluksiz deb hisoblaymiz. $[a; b]$ segmentni n ta kichik segmentlarga bo′lamiz.(2- rasm).

$$[x_0; x_1],\ [x_1; x_2],\ \ldots\ [x_{i-1}; x_i]\ldots\ [x_{n-1}; x_n].$$

$$(a=x_o,\ b=x_n)$$

Ularning uzunligi mos ravishda

$$\Delta x_1= x_1-x_0,\ \Delta x_2= x_2-x_1,\ldots,\ \Delta x_i=x_i-x_{i-1},\ldots,\ \Delta x_n=x_n-x_{n-1} \qquad \text{bo′ladi.}$$

[x_{i-1}; x_i] segmentda F kuchning bajargan ishi ΔA_i bo′lsin, u holda [a; b] kesmada bajarilgan ish quyidagiga teng:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \qquad (5)$$

ΔA_i larning aniq qiymatini hisoblab bo′lmaydi. Ularning taqribiy qiymatlarini hisoblash uchun [x_{i-1}; x_i] larning xar birida ixtiyoriy ξ_i nuqta tanlab olamiz va shu nuqtalardagi F=$f(x)$ funktsiyaning $f(\xi_i)$ qiymatlarini hisoblaymiz. (4) formulaga ko′ra

$$\Delta A_1 \approx f(\xi_1)\,\Delta x_1,\ \Delta A_2 \approx f(\xi_2)\,\Delta x_2, \ldots, \Delta A_i \approx f(\xi_i)\,\Delta x_i, \ldots, \Delta A_n \approx f(\xi_n)\,\Delta x_n$$

Bularni (5) tenglikka qo′yib izlanayotgan ishning taqribiy qiymatini integral yig′indi ko′rinishida topamiz:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

<u>3.Aniq integralning ta′rifi.</u>

y=f(x) funktsiya [a; b] kesmada uzluksiz bo′lsin. $x_0=x_1< x_2 <\ldots< x_i < \ldots < b=x_n$ bo′linish nuqtalari yordamida [a;b] kesmani n ta kichik segmentlarga ajratamiz. (1-rasm).

$$[x_0; x_1],\ [x_1; x_2],\ \ldots\ [x_{i-1}; x_i] \ldots\ [x_{n-1}; x_n].$$

[x_{i-1}; x_i], i=1,2,3,…,n kichik segmentlarning har birida ixtiyoriy ξ_I nuqtani tanlaymiz. $f(x)$ funktsiyaning ξ_i nuqtadagi qiymatini mos segmentning x_i-x_{i-1}=Δx_i uzunligiga ko′paytirib (3) kabi integral yig′indi tuzamiz.

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (6)$$

TA'RIF: Agar S integral yig′indi [a; b] kesmani [x_{i-1}; x_i] segmentlarga ajratish usuliga va ularning har birida ξ_i nuqtaning tanlashiga bog′lik bo′lmaydigan I limitga ega bo′lsak, u holda bu I son [a; b] kesmada f(x) funktsiyadan olingan aniq integral deyiladi.va $\int_a^{в} f(x)dx$ kabi belgilanadi:

$$I = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Bu erda a –quyi chegara, b –yukori chegara, $f(x)$ –integral ostidagi funktsiya, $f(x)dx$ –integral ostidagi ifoda deyiladi.

[a; b] kesmada $\int_a^b f(x)dx$ integrali mavjud bo′lgan f (x) funktsiya bu kesmada integrallanuvchi funktsiya deb aytiladi.

Oldin ko′rilganlarga asosan egri chiziqli trapetsiyaning aniq yuzasi S va o′zgaruvchi kuch bajargan ishning aniq miqdori

$$S = \int_a^b f(x)dx, \quad A = \int_a^b f(x)dx$$

kabi topilishi kelib chiqadi. Bu aniq integralning geometrik va mexanik ma′nolarini ifodalaydi.

Funktsiya integralining iktisodiy ma'nosi.

z=f(t) funktsiya vaqt o′tishi bilan qaysidir ishlab chiqarishning unumdorligini ifodalasin. [0,T] vaqt oraligida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori u ning qiymatini topamiz. U holda, Δt vaqt ichida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori $\Delta u=f(t)\cdot\Delta t$ bilan aniqlanadi yoki $\Delta u\approx f(\xi)\cdot\Delta t$, $\xi\in[t, t+\Delta t]$

[0,T] oraliqni $0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=T$ nuqtalar yordamida oraliqlarga bo′lamiz, u holda $\Delta u_i\approx f(\xi_i)\cdot\Delta t_i$, $\xi_i\in[t_i, t_{i-1}+\Delta t_i]$ ва $u=\sum_{i=1}^{n}\Delta u_i=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta t_i$, $u=\lim_{\max\Delta t_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta t_i=\int_0^T f(t)dt$ hosil bo′ladi. Demak, agar f(t) mehnat unumdorligi bo′lsa, u holda $\int_0^T f(t)dt$ integral [0,T] davr oralig′ida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorini ifodalaydi.

<u>4.Aniq integral xossalari.</u>

а) $\int_a^a f(x)dx=0$ б) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$

в) $\int_a^b (f+\varphi)dx=\int_a^b fdx+\int_a^b \varphi dx$

г) $a<c<b$ учун $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

d) Agar [*a*; b] kesmada *f(x)≥0* bo′lsa $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

e) Agar [*a*; b] kesmada *f(x)≥ φ(x)* bo′lsa $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b\varphi(x)dx$

j) Agar *f(x)* funktsiya [*a*; *b*] kesmada uzluksiz bo′lsa, u holda bu kesmada shunday ξ nuqta topiladiki, bunda $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$ bo′ladi.

<u>O′z-o′zini nazorat etish savollari:</u>

1. Aniq integral ta'rifini keltiring.
2. Aniq integralning qanday xossalari bor?
3. Aniq integralning geometrik ma′nosi nimadan iborat?
4. Aniq integralning mexanik ma′nosi nimadan iborat?
5. Aniq integralning iqtisodiy ma′nosi nimadan iborat?

7.9. NYUTON – LEYBNITS FORMULASI VA ANIQ INTEGRALNI XISOBLASH USULLARI.

Tayanch iboralar: yuqori chegarasi o′zgaruvchan bo′lgan integral, Nyuton-Leybnits formulasi, bo′laklab integrallash, o′zgaruvchilarni almashtirish.

R e j a :

1.Integralning yuqori chegarasi bo′yicha hosilasi.
2.Aniq integral uchun Nyuton-Leybnits formulasi.
3.Aniq integralni bo′laklab integrallash.
4.Aniq integralda o′zgaruvchini almashtirish.

Adabiyotlar:

[**1**]. VI bob, §15-18 [**2**]. X bob, §4-5

1.Integralning o′zgaruvchi yuqori chegarasi bo′yicha hosilasi.

$y=f(x)$ funktsiya $[a;b]$kesmada uzluksiz bo′lsin. $\int\limits_a^b f(x)dx$ integralni qaraymiz. Agar b yuqori chegara o′zgaruvchan x bo′lsa, unda yuqori chegarasi o′zgaruvchan bo′lgan integral hosil bo′ladi:

$$I(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$$

1-TEOREMA : Agar f (x) uzluksiz funktsiya bo′lsa ,

$$I'(x)=(\int\limits_a^x f(t)dt)'=f(x)$$

tenglik o′rinli bo′ladi.

Isbot : x argumentga Δx orttirma beramiz. U holda aniq integralning xossasiga asosan

$$I(x+\Delta x)=\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt=\int\limits_a^x f(t)dt+\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

I(x) funktsiyaning ortirmasini yozamiz:

$$\Delta \mathrm{I}(x)=\mathrm{I}(x+\Delta x)-\mathrm{I}(x)=\int\limits_a^x f(t)dt+\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int\limits_a^x f(t)dt$$

ya'ni

$$\Delta \mathrm{I}(x)=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt \qquad (1)$$

Aniq integralning oldingi ma′ruzadagi j) xossasiga asosan (1) integral

$$\Delta I=\int\limits_x^{X+\Delta X} f(t)dt=f(\xi)(x+\Delta x-x)=f(\xi)\Delta x$$

ko′rinishga keladi, bunda ξ ning qiymati x bilan $x+\Delta x$ orasida yotadi. Hosilaning ta′rifiga asosan

$$\mathrm{I}'(\mathrm{x})=\lim_{\Delta X\to 0}\frac{\Delta \mathrm{I}(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta X\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=f(x)$$

($\Delta x\to 0$ intilganda $\xi\to x$ nazarga tutiladi.)

Teorema isbotlandi.

2. Nyuton – Leybnits teoremasi.

TEOREMA: Agar F(x) uzluksiz f (x) funktsiyaning biror boshlang′ich funktsiyasi bo′lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = \mathrm{F(b)-F}(a)$$

tenglik o′rinlidir. Bu tenglik ***N'yuton-Leybnits formulasi*** deyiladi.

Isbot: F(x) funktsiya uzluksiz f(x) funktsiyaning biror boshlang′ich funktsiyasi bo′lsin. I-teoremaga asosan $\int_a^x f(t)dt$ funktsiya ham f(x) funktsiyaning boshlang′ich funktsiyasi bo′ladi.Ammo, har qanday ikkita boshlangich funktsiya bir-biridan o′zgarmas $\vec{C}$ qo′shiluvchi bilan farq qiladi:

$$\int_a^x f(t)dt = \mathrm{F}(x)+\vec{C} \qquad (2)$$

Bu tenglamada $x=a$ deb olsak, aniq integralning oldingi ma′ruzadagi a) xossasiga asosan

$$0=\mathrm{F}(a)+\vec{C}$$

bo′ladi.

Demak, $\vec{C}$ =- F (a) bo′ladi.

$\vec{C}$ qiymatini (2) ga qo′yamiz.

$$\int_a^x f(t)dt = \mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(a)$$

Endi bu tenglikda $x=b$ desak Nyuton-Leybnits formulasi hosil bo′ladi.

$$\int_a^x f(t)dt = \mathrm{F}\,(x)\Big| = \mathrm{F}(в) - \mathrm{F}(a) \qquad (3)$$

Teorema isbotlandi.

Bevosita integrallash, differentsial ostiga kiritish usullari xuddi aniqmas integraldagi singari bo′ladi va shu sababli ularni misollar orqali ko′rsatamiz:

1-M i s o l : $$\int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

2-M i s o l : $$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}, \quad n\neq -1$$

3-M i s o l : $$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^e \ln x d\ln x = \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^e = \frac{\ln^2 e - \ln^2 1}{2} = \frac{1}{2}\ln^2 e = \frac{1}{2}$$

4-M i s o l : $\int\limits_{a}^{в} e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x}\Big|_a^b = \frac{e^{4в} - e^{4a}}{4}$

5-M i s o l : $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

6-M i s o l : $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = arctgx\Big|_0^1 = arctg1 = \frac{\pi}{4}$

7-M i s o l :

$$\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot d(1+x^2) = \sqrt{1+x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}} = 2-1=1$$

8-M i s o l :

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2xdx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2xd2x = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\cos\pi + \frac{1}{2}\cos 0 = 1$$

<u>3.Bo′laklab integrallash usuli.</u>

u va v funktsiyalar x ning differentsiallanuvchi funktsiyalari bo′lsin. U holda:

$$d(u\,v)=vdu+udv$$

Bu ayniyatning ikkala tomonini a dan b gacha integrallaymiz:

$$\int\limits_a^b d(u,v) = \int\limits_a^b vdu + \int\limits_a^b udv$$

chap tomoniga Nyuton-Leybnits formulasini qo′llagandan keyin oxirgi tenglikni quyidagi qo′rinishda yozish mumkin:

$$\int\limits_a^b udv = (u,v)\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu \qquad (4)$$

(4)- tenglik aniq integralni bo′laklab integrallash formulasi deyiladi.

1-M i s o l :

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx = \begin{bmatrix} x=u, & \cos xdx = dv \\ dx = du, & \sin x = v \end{bmatrix} = x\cdot\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi-2}{2}$$

2- M i s o l :

$$\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\begin{bmatrix}\ln x=u, & \dfrac{dx}{\sqrt{x}}=dv\\ \dfrac{dx}{x}=du, & 2\sqrt{x}=v\end{bmatrix}=(2\sqrt{x}\ln x)\Big|_1^{e^2}-2\int_1^{\lambda^2}\sqrt{x}\frac{dx}{x}=4e-(4\sqrt{x})\Big|_1^{\lambda^2}=$$

=4e-4e+4=4

3-Misol: -

$$\int_0^{\sqrt{3}}arctgxdx=\begin{bmatrix}arctgx=u, & dx=dv\\ \dfrac{dx}{1+x^2}=du, & x=v\end{bmatrix}=x\cdot arctgx\Big|_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{1+x^2}=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\Big\|_0^{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}-\frac{1}{2}\ln 4=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}-\ln 2.$$

4. Aniq integralda o′zgaruvchini almashtirish.

3-TEOREMA*:* $\int_a^b f(x)dx$ integralda $x=\varphi(t)$ tenglik orqali yangi t o′zgaruvchi kiritilgan bo′lsin.

Agar 1) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, 2) $\varphi(t)$ va $\varphi'(t)$lar $[\alpha,\beta]$ da uzluksiz funktsiyalar bo′lsa, 3) $f[\varphi(t)]$ funktsiya $[\alpha,\beta]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo′lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (5)$$

bo′ladi.

Bu tenglik aniq integralda o′zgaruvchilarni almashtirish formulasi deb ataladi.

Isbot: F(x) funktsiya f (x)funktsiyaning boshlangich funktsiyasi bo′lsin.
Unda quyidagi tengliklarni yozish mumkin:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta=F((\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a)$$

Teorema isbotlandi.

4-M i s o l :

$$\int_0^3\frac{xdx}{\sqrt{x+1}}=\begin{bmatrix}\sqrt{x+1}=t, & x=t^2-1\\ dx=2tdt, & \alpha=1,\beta=2\end{bmatrix}=\int_1^2\frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{t}=$$

$$=2\int_1^2(t^2-1)dt=\left(\frac{2x^3}{3}-2t\right)\Big|_1^2=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}=0$$

5-M i s o l :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} x=\sin t; dx=\cos t dt, 1-x^2=\cos^2 t \\ \alpha=0, \beta=\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

O’z-o’zini nazorat etish savollari:

1. Yuqori chegarasi o′zgaruvchan integralning hosilasi nimaga teng?
2. Nyuton-Leybnits formulasini keltirib chiqaring.
3. Aniq integralni bo′laklab integrallash uchun formulani keltirib chikaring.
4. Aniq integralda o′zgaruvchilarni almashtirish formulasini keltiring.

7.10. XOSMAS INTEGRALLAR XAKIDA TUSHUNCHALAR. XOSMAS INTEGRALLARNI XISOBLASH.

Tayanch iboralar: Xosmas integral, yaqinlashuvchi xosmas integral, uzoqlashuvchi xosmas integral.

R e j a :
1. Chegarasi cheksiz xosmas integral.
2. Cheksiz funktsiyalarning xosmas integrallari**.**

Adabiyotlar:
[**1**]. VI bob, § 24 [**2**]. X bob, §6

1.Chegarasi cheksiz xosmas integrallar.

TA'RIF: [a;∞) intervalda uzluksiz bo′lgan *f(x)* funktsiyaning xosmas integrali deb

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

limitga aytiladi va

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

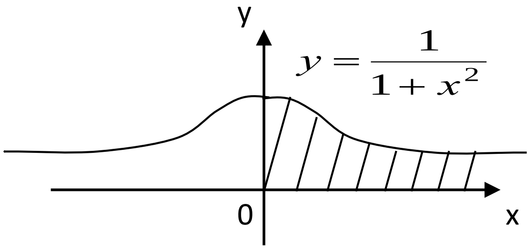
kabi belgilanadi, ya′ni

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^в f(x)dx.$$

Agar (1) limit mavjud bo′lsa, u holda xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi; agarda ko′rsatilgan limit mavjud bo′lmasa, xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi. (-∞;b], (-∞;∞) intervallarda xosmas integral shunga o′xshash aniqlanadi.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx \quad .$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx \,.$$



1- расм

M i s o l : $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ integralni hisoblaymiz.

Echimi: $\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{в}\frac{dx}{1+x^2} =$

$$= \lim_{b\to\infty} arctg\Big|_{0}^{в} = \lim_{b\to\infty}(arctgb - arctg0) = \frac{\pi}{2}$$

Qaralgan integral 1-rasmda shtrixlangan cheksiz egri chiziqli trapetsiyaning yuzini ifodalaydi.

Ba′zi bir hollarda berilgan integralning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanini bilish va uning qiymatini baholash etarli bo′ladi. Quyidagi teoremalar isbotsiz keltiriladi.

TEOREMA: Agar barcha $x(x\geq a)$ lar uchun $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ –tengsizliklar bajarilsa va $\int_{a}^{\infty}\varphi(x)dx$ yaqinlashuvchi bo′lsa, u holda $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ ham yaqinlashuvchi va $\int_{a}^{\infty} f(x)dx \leq \int_{a}^{\infty}\varphi(x)dx$ bo′ladi.

M i s o l: $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2(1+e^2)}$ integral yaqinlashuvchi ekanligi tekshirilsin.

Echimi: $x\geq 1$ bo′lganda $\frac{1}{x^2(1+e^2)} < \frac{1}{x^2}$

$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{x})\Big|_{1}^{b} = \lim_{b\to\infty}(-\frac{!}{b}+1) = 1$. Demak, $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2(1+e^2)}$ teoremaga asosan yaqinlashuvchi ekan.

TEOREMA: Agar barcha $x(x\geq a)$ lar uchun $0\leq\varphi(x)\leq f(x)$ tengsizliklar bajarilsa va shu bilan birga $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ uzoqlashuvchi bo′lsa, u holda $\int_a^\infty f(x)dx$ integral ham uzoqlashuvchi bo′ladi.

M i s o l: $\int_1^\infty \frac{x+4}{\sqrt{x^3}}dx$ tekshirilsin.

Echimi: $\frac{x+4}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$,

ammo

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}(2\sqrt{b}\text{ - }2) = \infty$$

Teoremaga asosan berilgan integral uzoklashuvchi buladi.

TEOREMA: Agar $\int_a^\infty |f(x)|dx$ integral yaqinlashuvchi bo′lsa, $\int_a^\infty f(x)dx$ integral ham yaqinlashuvchi bo′ladi. Bu holda $\int_a^\infty f(x)dx$ integral absolyut yaqinlashuvchi integral deyiladi.

M i s o l: $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^3}dx$ integralning yaqinlashishini tekshiring.

Echimi: $\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \leq \left|\frac{1}{x^3}\right|$ **bo′lishi ma′lum.**

Ammo $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx = \lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{2x^2})\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}(-\frac{!}{2b^2}+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

Demak yuqoridagi teoremalarga asosan $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^3}\right|dx$ integral yaqinlashuvchi va u bilan birga $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^3}dx$ integral ham yaqinlashuvchidir.

2. Cheksiz funktsiyalarning xosmas integrallari.

TA'RIF: **(*a*;b] intervalda uzluksiz va *x*=*a* da aniqlanmagan yoki uzilishga ega bo′lgan f(x) funktsiyaning xosmas integrali deb**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \qquad \textbf{(2)}$$

limitga aytiladi. Agar (2) limit mavjud bo′lsa, u holda xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi. Aks holda xosmas integral uzoqlashuvchi deb aytiladi.

[*a*;b) intervalda uzluksiz va *x*=*b* da aniqlanmagan f(x) funktsiyaning xosmas integrali xam shunga o′xshash ta′riflanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

M i s o l: $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ integralni tekshiring.

Echimi: *x*=0 da funktsiya aniqlanmagan.

Quyidagilar o′rinli bo′ladi:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2} + \int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2},$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}\ \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{0-\varepsilon} = -\infty$$

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}\ \int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{0+\varepsilon}^{1} = \infty.$$

Demak ko′rsatilgan xosmas integral uzoqlashuvchi ekan.

<u>O′z-o′zini nazorat etish savollari</u>:

1. Cheksiz chegarali xosmas integralni ta′riflang.
2. Qachon xosmas integral yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) deyiladi?
3. Xosmas integralning xossalarini keltiring.
4. Cheksiz funktsiyalarning xosmas integrallarini ta'riflang.

7.11. ANIQ INTEGRALNI TAQRIBIY XISOBLASH.

Tayanch iboralar: Taqribiy hisoblash, to′gri to′rtburchak formulasi, trapetsiya formulasi, Simpson formulasi**.**

R e j a:

1. To′gri to′rtburchaklar formulasi va uning xatoligi.
2. Trapetsiyalar formulasi va uning xatoligi.
3. Simpson formulasi va uning xatoligi.

Adabiyotlar:

[**1**]. VI bob, §19 [**2**]. XI bob, §5

1) To′gri to′rtburchaklar formulasi.

$\int_a^{в} f(x)dx$ ***aniq integralni taqribiy hisoblash talab qilinsin. Bunda* f (x*) berilgan [*a; b*] kesmada uzluksiz funktsiyadir.***

[a; b] kesmani $a=x_0$, x_1, $x_2,\ldots$, $x_n=в$ nuqtalar bilan uzunligi Δx bo′lgan nta teng bo′laklarga ajratamiz:

$$\Delta x=\frac{в-\alpha}{n}$$

So′ngra $f(x)$ funktsiyaning $x_0, x_1, x_2,\ldots, x_n$ nuqtalardagi qiymatlarini y_0, $y_1, y_2,\ldots, y_{n-1}, y_n$, orqali belgilaymiz, ya′ni

$$y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),\ldots,\ y_n=f(x_n)$$

Ushbu yig′indilarni tuzamiz:

$$y_0\cdot\Delta x+y_1\cdot\Delta x+\ldots+y_{n-1}\cdot\Delta x$$

$$y_1\cdot\Delta x+y_2\cdot\Delta x+\ldots+y_n\cdot\Delta x$$

Bu yig′indilarning har biri $f(x)$ uchun [a; b] kesmada integral yig′indi bo′ladi va shuning uchun $\int_a^{в} f(x)dx$ integralning taqribiy ifoda etadi:

$$\int_a^{в} f(x)dx\approx\frac{в-a}{n}(y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})$$

$$\int_a^{в} f(x)dx\approx\frac{в-a}{n}(y_1+y_2+\ldots+y_n)$$

Bular to′gri to′rtburchaklar formulasi deb aytiladilar.

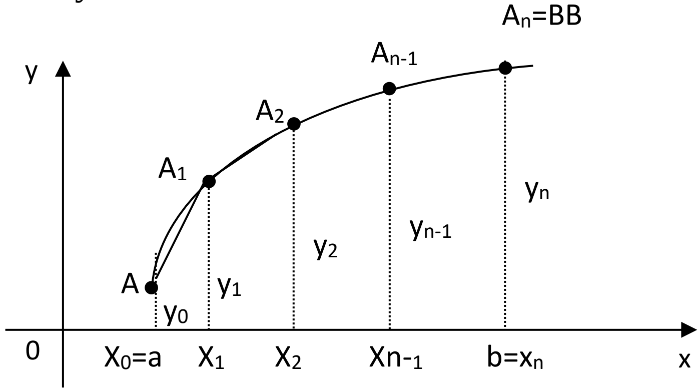
To′gri to′rtburchaklar formulasining xatoligi

$$\Delta\le M_1\frac{(b-a)^2}{4n}$$

formula bilan baholanadi. Bunda M_1 integral ostidagi funktsiya hosilasi absolyut qiymatining integrallash oraligidagi eng katta qiymatini ifodalaydi.

2) Trapetsiyalar formulasi.

Agar berilgan $y=f(x)$ egri chiziqni to′gri to′rtburchaklar formulasida bo′lgandek zinapoyasimon chiziq bilan almashtirmasdan, balki ichki chizilgan siniq chiziq (vatar) bilan almashtirsak, u holda aniq integralning ancha aniqroq qiymati hosil bo′lishini kutish tabiiydir.



Bu holda egri chiziqli aAB$в$ trapetsiyaning yuzi yuqoridan

$$A\,A_1,\ A_1\,A_2,\ldots,\ A_{n-1}\,B$$

vatarlar bilan chegaralangan to′gri chiziqli trapetsiyalar yuzlarining yig′indisiga teng bo′ladi.

Ammo bu trapetsiyalardan birinchisining yuzi $\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x$, ikkinchining yuzi $\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x$ va hakozo bo′lgani sababli

$$\int_a^в f(x)dx \approx \left(\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x+\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x+\ldots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x\right)$$

yoki

$$\int_a^в f(x)dx \approx \frac{в-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)$$

Bu esa trapetsiyalar formulasidir.

Trapetsiyalar formulasining xatoligi

$$\Delta \le M_2\,\frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

formula bilan baholanadi. Bunda M_2 integral ostidagi funktsiyaning II tartibli hosilasi absolyut qiymatining integrallash oraligidagi eng katta qiymatini ifodalaydi.

3) Simpson formulasi.

Bu erda $[a;\,b]$ kesmani $a=x_0, x_1, x_2,\ldots, x_n=b$ nuqtalar bilan uzunligi Δx bo′lgan n ta teng bo′laklarga ajratamiz:

$$\Delta x=\frac{b-\alpha}{n}$$

So′ngra funktsiyaning bu nuqtalardagi $y_0=f(x_0), y_1=f(x_1),\ldots, y_n=f(x_n)$ qiymatlarini hisoblaymiz. Bunda bo′linish nuqtalarning soni n juft bo′lsin deb talab qilamiz. y=f(x) egri chiziqning x_{i-1}, x_i, x_{i+1} abstsisssali A_{i-1}, A_i, A_{i+1} nuqtalari orasidagi yoyini shu nuqtalardan o′tuvchi parabola bilan almashtiramiz. Unda quyidagi munosabat o′rinli bo′ladi:

$$\int_a^в f(x)dx \approx \frac{в-a}{3n}(y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2}) + 4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})).$$

Bu formula Simpson formulasi bo′lib, uni isbotsiz qabul qilamiz.

Simpson formulasining xatoligi

$$\Delta \le M_4 \frac{(b-a)^5}{2880n^4}$$

formula bilan baholanadi. Bunda M_4 integral ostidagi funktsiyaning IV tartibli hosilasi absolyut qiymatining integrallash oraligidagi eng katta qiymatini ifodalaydi.

Ko′rib utilgan formulalar matematikada kvadratur formulalar deb ataladigan umumiy formulalarning xususiy xollari bo′lib hisoblanadi. Kvadratur formulalar sohasida matematika bo′yicha buxorolik birinchi fan doktori Salixov G.N. katta ilmiy natijalarga erishgan.

M i s o l : Ushbu

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

integralni to′gri to′rtburchaklar, trapetsiyalar va Simpson formulalari orqali hisoblang.

Echimi: [1; 2] kesmani 10 ta teng bo′lakka ajratamiz.

$$\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0{,}1$$

deb olib, integral ostidagi funktsiya qiymatlari jadvalini tuzamiz:

x_0=1 , y_0=1,00000 , x_1=1,1 , y_1=0,90909
x_2=1,2 , y_2=0,83333 , x_3=1,3 , y_3=0,76923
x_4=1,4 , y_4=0,71429 , x_5=1,5 , y_5=0,66667
x_6=1,6 , y_6=0,62500 , x_7=1,7 , y_7=0,58824
x_8=1,8 , y_8=0,55556 , x_9=1,9 , y_9=0,52632
x_{10}=2 , y_{10}=0,50000 .

1) To′gri to′rtburchaklar formulasini tatbik etamiz:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}1(1+0{,}90909+0{,}83333+0{,}76923+0{,}71429+0{,}66667+0{,}625+$$

$$+0{,}58824+0{,}55556+0{,}52632)=0{,}1\cdot 7{,}18773=0{,}71877$$

2) Trapetsiyalar formulasini tatbik etamiz:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}1\left(\frac{1+0{,}5}{2} + 0{,}83333 + 0{,}76923 + 0{,}71429 + 0{,}66667 + 0{,}625 + \right.$$

$$\left. + 0{,}58824 + 0{,}55556 + 0{,}52632 \right) = 0{,}69377.$$

3) Simpson formulasini tadbik etamiz:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{0,1}{3}(1+0,5+2\cdot 2,72818+4\cdot 3,45955)=0,69315\ .$$

Haqiqatda

$$\ln 2=\int_1^2 \frac{dx}{x}=0,6931472 \quad ,$$

ettinchi kasr xona birligigacha aniqlikda.

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. To′gri to′rtburchaklar formulasini keltirib chiqaring.
2. To′gri to′rtburchaklar formulasi xatoligi qanday baholanadi?
3. Trapetsiyalar formulasini keltirib chiqaring va uning xatoligini ko′rsating.
4. Simpson formulasini keltiring va uning xatoligini ko′rsating.

7.12. ANIQ INTEGRAL YORDAMIDA YUZALARNI, XAJMLARNI, YOY UZUNLIKLARINI XISOBLASH.

Tayanch iboralar: Kutb koordinatalar sistemasi, shakl yuzasi, jismning ko′ndalang kesimi, aylanma jism, jism hajmi, yoy uzunligi.

R e j a:
1. Yassi figuralar yuzalarini hisoblash.
2. Aniq integralning jismlar hajmini hisoblashga tatbiki.
3. Yassi egri chiziq yoyi uzunligini aniq integral yordamida topish.

Adabiyotlar:

[**1**]. VI bob, §20-21 [**2**]. XI bob, §1-3

1.Yassi figuralar yuzalarini hisoblash.

a) Aniq integralning ta′rifidan, agar [*a;b*] kesmada funktsiya f(*x*)≥0 bo′lsa, u holda *y*=f (*x*) egri chiziq, OX o′qi va *x*=*a* hamda *x*=*b* to′gri chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi

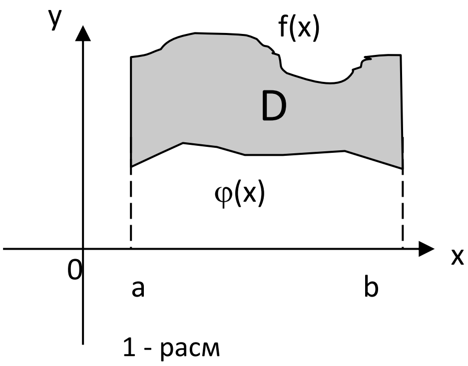
$$S=\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

ga teng. Agar [*a*;*b*] kesmada f(*x*)≤0 bo′lsa, tegishli trapetsiyaning yuzi

$$S=\left|\int_a^в f(x)dx\right| \qquad (2)$$

ga teng bo′ladi.

y_1=f(x) va y_2=u (x) egri chiziqlar hamda x=a va x=b to′gri chiziqlar bilan chegaralangan D figuraning yuzini hisoblash kerak bo′lsin. (1-rasm)



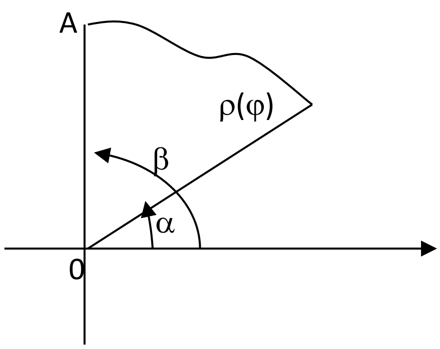
1 - расм

U holda (1) –formuladan ikki marta foydalanib quyidagini hosil qilamiz:

$$S = \int_a^b \left(f(x) - \varphi(x) \right) dx$$

b) Kutb koordinatalar sistemasida yassi figura ρ=ρ(φ) egri chiziq va kutb markazidan chiquvch φ = α , φ = β nurlar bilan chegaralangan bo′lsin. (2- rasm). U holda ABO egri chiziqli uchburchak yuzi quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

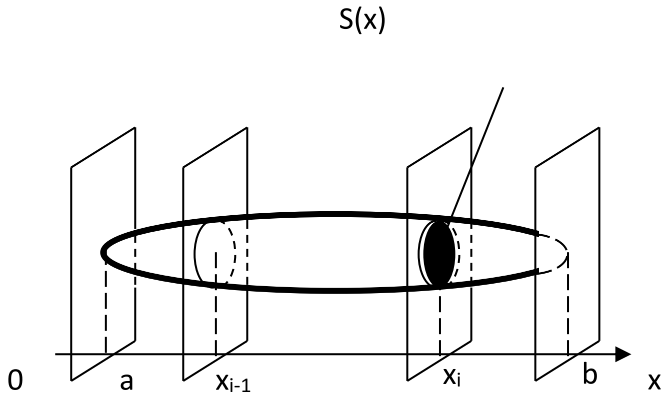


2 – rasm

2. Aniq integralning jismlar hajmini hisoblashga tadbiki.

a) Jismning hajmini ko′ndalang kesimning yuzi bo′yicha hisoblash.

Biror-bir jismning V hajmini hisoblash talab etilsin. Bu jismning OX o′qiga perpendikulyar tekislik bilan kesimining yuzi S(x) ma′lum bo′lsin. (3-rasm).



3 – rasm

$[a;b]$ kesmani $a_0=x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n=b$ nuqtalar bilan ixtiyoriy bo′lakka bo′lamiz va bu nuqtalar orqali OX o′qiga perpendikulyar tekisliklar o′tkazamiz.(3-rasm). Bu tekisliklar jismni n ta katlamga ajratadi, ularning hajmlarini ΔV_1, $\Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$, bilan belgilaymiz. U holda

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i$$

i- chi silindrning hajmi $\Delta V_i \approx S(\xi_i)\Delta x_i$ ekanligini nazarga olsak,

$$V=\lim_{\max\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}S(\xi_i)\Delta x_i=\int_b^a S(x)dx$$

va hajmni hisoblash uchun quyidagi formula kelib chiqadi:

$$V=\int_a^в S(x)dx$$

b) Aylanma jismlarining hajmini hisoblash.

Agar jism $y=f(x)$ chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning OX o′q atrofida aylanishdan hosil bo′lsa, OX o′qiga perpendikulyar abtsissali kesim doiradan iborat bo′lib $S(x)=\pi y^2$ yuzaga teng bo′ladi. Demak, bu holda

$$V=\pi\int_a^в (f(x))^2dx$$

3. Yassi egri chiziq yoyi uzunligini aniq integral yordamida hisoblash.

a) $y=f(x)$ chiziqning $x=a$ va $x=b$ chiziqlar orasida joylashgan qismi uzunligini quyidagi formula orqali hisoblaymiz:

$$I=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

b) Agar egri chiziq parametrik tenglamalar orqali berilgan bo′lsa.ya′ni

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\phi(t) \end{cases} \qquad \theta_1 \le t \le \theta_2$$

bo′lsa, u holda

$$I = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\varphi'(t))^2}\, dt$$

bo′ladi.

g) Agar egri chiziq kutb koordinatalarda berilgan bo′lsa,ya′ni

$$\rho=\rho(\varphi), \qquad \alpha \le t \le \beta.,$$

bo′lsa, u holda,

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi$$

bo′ladi.

<u>O′z-o′zini nazorat etish savollari</u>:

1. Yassi figuralar yuzini aniq integral orqali hisoblash formulalarini keltiring.
2. Jismning hajmini ko′ndalang kesim yuzasi orqali hisoblash formulasini yozirg.
3. Aylanma jism hajmi integral yordamida qanday hisoblanadi?
4. Yassi egri yoy uzunligi aniq integral orqali qanday hisoblanadi?

7.13. ANIQ INTEGRAL YORDAMIDA FIZIK VA MEXANIK MASALALARNI ECHISH.

Tayanch iboralar: ish, masofa, statik moment, ogirlik markazi**.**

<u>R e j a:</u>

1. O′zgaruvchi kuch bajargan ishni hisoblash.
2. Notekis harakatda masofani hisoblash.
3. Yassi egri chiziq yoyininig statik momenti va uni aniq integral yordamida topish.
4. Yassi shaklning statik momenti va uni hisoblash.
5. Yassi egri chiziq yoyininig ogirlik markazi va uni aniq integral yordamida topish.
6. Yassi shaklning ogirlik markazi va uni topish**.**

<u>Adabiyotlar</u>:

[**1**]. VI bob, §23 [**2**]. XI bob, §4

<u>1.O′zgaruvchan kuch bajargan ishni hisoblash.</u>

Biz oldingi 17-ma′ruzada o′zgaruvchan F=*f(x)* kuch moddiy nuqtani [*a*,*b*] kesma bo′yicha harakatlantirganda bajarilgan A ish aniq integral orqali

$$A = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

formula bilan hisoblanishini ko′rsatgan edik. Shunga doir bir misol ko′rsatamiz.

Masala: Prujina 2 H kuch ta′siri ostida 4sm chuzilishi ma′lum. Shu prujinani 6 sm chuzish uchun bajariladigan ish miqdorini hisoblang.

Echish: Prujinani *x* metrga chuzish uchun kerak bo′ladigan kuch kattaligi F=*f(x)*=*kx* bilan aniqlanadi. Bu formuladagi *k* proportsianallik koeffitsientini masala shartiga asosan topamiz. Unga asosan x=0.04 м bo′lganda F=2H bo′lgan. Demak,

$$k = \frac{F}{x} = \frac{2H}{0.04} = 50.$$

Unda prujinani 6 sm chuzish uchun bajarilgan ish, (1) formulaga asosan,

$$A = \int_0^6 50x dx = 25x^2 \Big|_0^6 = 25(6^2 - 0^2) = 900\,(\text{Ж})$$

bo′ladi.

2.Notekis harakatda bosib o′tilgan masofani hisoblash.

Ma′lumki, o′zgarmas *v* tezlik bilan to′gri chiziq bo′ylab tekis harakatdagi moddiy nuqtaning [*a*,*b*] vaqt oralig′ida bosib o′tgan s masofasi *s*=*v*(*b*-*a*) formula bilan hisoblanadi. Endi tezligi o′zgaruvchan va v=v(t) funktsiya bilan aniqlanadigan notekis harakatda moddiy nuqtaning [*a*,*b*] vaqt oralig′ida bosib o′tadigan *s* masofasini hisoblash masalasini ko′ramiz. Buning uchun [*a*,*b*] vaqt oraligini $a=t_0$, t_1, t_2, ….. , t_{n-1}, $t_n=b$ nuqtalar bilan ixtiyoriy n bo′lakka ajratamiz. Har bir (t_{i-1}, t_i) vaqt oraliqchalari uzunliklarini Δt_i kabi belgilaymiz va undan ixtyoriy bir $\tilde{t}_i$ nuqtani tanlaymiz. Moddiy nuqtaning (t_{i-1}, t_i) vaqt oraliqchalarida bosib o′tgan masofasini s_i kabi belgilab, bu vaqtda uning tezligi taqriban o′zgarmas va $v_i=v(\tilde{t}_i)$ga teng deb olamiz. Bu holda $s_i \approx v_i \Delta t_i = v(\tilde{t}_i)\Delta t_i$ bo′lib, bosib o′tilgan s masofa uchun

$$s = \sum_{i=1}^n s_i \approx \sum_{i=1}^n v_i \Delta t_i = \sum_{i=1}^n v(\tilde{t}_i)\Delta t_i$$

takribiy tenglikni hosil qilamiz. Bu masofa uchun aniq formulani hosil etish maqsadida bo′lakchalar soni n ni cheksiz oshirib boramiz. Natijada

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n v(\tilde{t}_i)\Delta t_i = \int_a^b v(t)dt \qquad (2)$$

formulaga ega bo′lamiz.

Masala: Tezligi $v(t)=t^2+3t$ qonun bo′yicha o′zgaradigan haraktda [3,8] vaqt oralig′ida bosib o′tilgan masofani toping.

Echish: Ko′rsatilgan (2) formulaga asosan

$$s = \int_3^8 (3t^2 + 4t)dt = (t^3 + 2t^2)\Big|_3^8 = (8^3 + 2\cdot 8^2) - (3^3 + 2\cdot 3^2) = 640 - 45 = 595.$$

3 . Egri chiziq yoyining statik momentlarini hisoblash.

TA'RIF: Biror l o′qdan r masofada joylashgan m massali moddiy nuqtaning bu o′qqa nisbatan ***statik momenti*** deb $M_l = mr$ formula bilan aniqlanadigan songa aytiladi.

Tekislikdagi l o′qdan $r_1, r_2, r_3, \dots , r_n$ masofalarda joylashgan $m_1, m_2, m_3, \dots , m_n$ massali moddiy nuqtalarning bu o′qqa nisbatan statik momenti deb

$$M_l = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i$$

formula bilan aniqlanadigan songa aytiladi.

Endi tekislikda tenglamasi $y=f(x)$, $a \le x \le b$, bo′lgan L=AB egri chiziq yoyi berilgan bo′lsin. Bu egri chiziqning har bir x nuqtasidagi chiziqli zichligi $\Upsilon=\Upsilon(x)$ uzluksiz funktsiya bilan aniqlangan deb hisoblaymiz. Dastlab L=AB egri chiziq yoyining m massasini topamiz. Buning uchun uni ixtiyoriy tarzda $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3, \dots , \Delta l_n$ kichik yoychalarga bo′laklaymiz. Har bir Δl_i yoychadan ixtiyoriy bir $P(x_i, y_i)$ $(i=1,2,3, \dots , n)$ nuqtani tanlab olib, bu erda chiziqli zichlik taqriban o′zgarmas va $\Upsilon(x_i)$ga teng deb olamiz. Unda Δl_i yoychaning massasi $m_i \approx \Upsilon(x_i)\, \Delta l_i$ bo′lib, izlanayotgan m massa uchun

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i)\Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i)\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i$$

taqribiy tenglikni hosil qilamiz. Unda massaning aniq qiymati

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i)\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \gamma(x)dl = \int_a^b \gamma(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \quad (3)$$

formula bilan aniqlanishini topamiz.

Endi AB egri chiziq yoyining OX koordinata o′qiga nisbatan M_x statik momentini aniqlaymiz va uni hisoblash formulasini topamiz. Buning uchun uning Δl_i yoychalarini massasi Δm_i bo′lgan $P_i(x_i, y_i)$ nuqtalar bilan almashtiramiz. Bu nuqtalardan OX o′qigacha bo′lgan masofa $r_i = y_i$ bo′lgani uchun ularning statik momentlari $(M_x)_I$ uchun

$$(M_x)_i = y_i \Delta m_i \approx f(x_i)\gamma(x_i)\Delta l_i$$

taqribiy tenglik o′rinli bo′ladi. Unda izlanayotgan statik momen t takribiy tenglik bilan aniqlanib, uning aniq qiymati

$$M_x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\gamma(x_i)\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\gamma(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \quad (4)$$

formula bilan hisoblanadi.

Xuddi shunday tarzda bu egri chiziq yoyining OY koordinata o′qiga nisbatan statik momenti M_y

$$M_y == \int_a^b x\gamma(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \quad (5)$$

formula bilan hisoblanishini ko′rsatish mumkin.

Agarda egri chiziq yoyi bir jinsli bo′lsa, unda chiziqli zichlik o′zgarmas, ya′ni $\gamma(x)=\gamma$ bo′lib, statik momentlar

$$M_x == \gamma\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx, \quad M_y == \gamma\int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \quad (6)$$

formulalar orqali topiladi.

4 . Tekis shaklning statik momentlarini hisoblash.

XOY koordinata tekisligida *y=f(x)* tenglamali egri chiziq, OX o′qi va *x=a* , *x=b* vertikal to′gri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya berilgan bo′lsin. Uning har bir P(*x,y*) nuqtasidagi zichligi biror $\gamma(x)$ uzluksiz funktsiyadan iborat deb qaraymiz. Bu holda egri chiziqli trapetsiyaning massasim, OX va OY koordinata o′qlariga nisbatan statik momentlari aniq integral yordamida

$$m=\int_a^b \gamma(x)f(x)dx, \quad M_x=\frac{1}{2}\int_a^b \gamma(x)f^2(x)dx, \quad M_y=\int_a^b \gamma(x)xf(x)dx \quad (7)$$

formulalar bilan hisoblanishini yuqorida ko′rilgan kabi mulohazalar orqali keltirib chiqarish mumkin.

Agar egri chiziqli trapetsiya bir jinsli, ya'ni zichlik $\gamma(x)=\gamma$ o′zgarmas bo′lsa, unda massa va statik momentlar

$$m=\gamma\int_a^b f(x)dx, \quad M_x=\frac{\gamma}{2}\int_a^b f^2(x)dx, \quad M_y=\gamma\int_a^b xf(x)dx \qquad (8)$$

formulalar bilan hisoblanadi.

5 . Egri chizik yoyining og′irlik markazini hisoblash.

TA'RIF: Egri chiziq ***yoyining ogirlik markazi*** deb shunday P(x_0, y_0) nuqtaga aytiladiki, bu nuqtaga egri chiziq yoyining m massasini joylashtirsak, unda uning va egri chiziq yoyining o′qqa nisbatan statik momentlari o′zaro teng bo′ladi, ya′ni

$$M_x=y_0\cdot m, \quad M_y=x_0\cdot m \qquad (9)$$

tengliklar o′rinli bo′ladi.

Ta′rifdagi (9) tengliklardagi M_x va M_y statik momentlar o′rniga ularning (4) va (5) ifodalarini, m massa o′rniga uning (3) ifodasini qo′yib, og′irlik markazi koordinatalari uchun ushbu formulalarni hosil etamiz:

$$x_0=\frac{M_y}{m}=\frac{\int_a^b x\gamma(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \gamma(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx}, \qquad y_0=\frac{M_x}{m}=\frac{\int_a^b f(x)\gamma(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \gamma(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx}.$$

Agar egri chiziq yoyi bir jinsli bo′lsa , unda zichlik $\gamma(x)=\gamma$ o′zgarmas bo′lib, og′irlik markazi koordinatalari aniq integral yordamida quyidagi formulalar bilan hisoblanadi:

$$x_0 = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}, \quad y_0 = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}.$$

6 . Egri chiziqli trapetsiyaning og′irlik markazini hisoblash.

Egri chiziqli trapetsiyaning ham og'irlik markazi (9) tengliklar bilan aniqlanadi va bir jinsli bo′lmagan holda (7) formulaga asosan

$$x_0 = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b x\gamma(x)f(x)dx}{\int_a^b \gamma(x)f(x)dx}, \quad y_0 = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \gamma(x)f^2(x)dx}{\int_a^b \gamma(x)f(x)dx}$$

formulalar bilan topiladi.

Egri chiziqli trapetsiya bir jinsli, ya′ni zichlik $\gamma(x)=\gamma$ o′zgarmas bo′lsa, uning og′irlik markazi koordinatalari aniq integral yordamida quyidagi formulalar bilan hisoblanadi:

$$x_0 = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}, \qquad y_0 = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}.$$

O′z-o′zini nazorat etish savollari:

1. O′zgaruvchi kuch bajargan ish qanday hisoblanadi?
2. Notekis harakatda masofani hisoblash formulasini yozing.
3. Yassi egri chiziq yoyning massasi aniq integral orqali qanday hisoblanadi?
4. Yassi egri chiziq yoyining statik momenti qanday formula bilan hisoblanadi?
5. Egri chiziqli trapetsiyaning massasi aniq integral orqali qanday hisoblanadi?
6. Egri chiziqli trapetsiyaning statik momentini hisoblash formulasini yozing.
7. Yassi egri chiziq yoyining og′irlik markazi qanday ta′riflanadi?
8. Yassi egri chiziq yoyining og′irlik markazi qanday hisoblanadi?
9. Egri chiziqli trapetsiyaning og′irlik markazi qanday ta′riflanadi va hisoblanadi?

ADABIYOTLAR.

6. **СОАТОВ Ё.У.** «Олий математика», I жилд, Тошкент, Укитувчи, 1992 й.

7. **ПИСКУНОВ Н.С.** «Дифференциал ва интеграл хисоб», 1-том, Тошкент, Укитувчи, 1972 й.

8. **МАДРАХИМОВ Х.С., ГАНИЕВ А.Г., МУМИНОВ Н.С.** «Аналитик геометрия ва чизикли алгебра», Тошкент, Укитувчи, 1988 й.

9. **САРИМСОКОВ Т.А.** «Хакикий узгарувчининг функциялари назарияси» Тошкент, Укитувчи, 1968 й.

10. **Т. ЁКУБОВ** «Математик логика элементлари», Тошкент, Укитувчи, 1983й.

11. **РАЖАБОВ Ф., НУРМЕТОВ А.** «Аналитик геометрия ва чизикли алгебра», Тошкент, Укитувчи, 1990 й.

12. **ШНЕЙДЕР В.Е., СЛУЦКИЙ А.И., ШУМОВ А.С.** «Олий математика киска курси», I том, Тошкент, Укитувчи, 1983 й.

13. **НАЗАРОВ Р.Н., ТОШПУЛАТОВ Б.Т., ДУСУМБЕТОВ А.Д.** «Алгебра ва сонлар назарияси», I кисм, Тошкент, Укитувчи, 1993 й.

14. **НАЗАРОВ Х., ОСТОНОВ К.** «Математика тарихи», Тошкент, Укитувчи, 1996 й.

15. **ИБРОХИМОВ Р**., «Математикадан масалалар туплами», Тошкент, Укитувчи, 1990 й.

16. **АЗЛАРОВ Т., МАНСУРОВ Х.** «Математик анализ», I кисм, Тошкент, Укитувчи, 1994 й.

17. **ТУЛАГАНОВ Т., НОРМАТОВ А.** «Математикадан практикум», Тошкент, Укитувчи, 1983 й.

18. **ТОЖИЕВ Ш.** «Олий математикадан масалалар туплами», Тошкент, Укитувчи, 2003 й.