M.X.TESHAYEV
G'.G'.YUNUSOV
Z.I.BOLTAYEV

OLIY MATEMATIKA II-QISM

M.X.TESHAYEV, G'.G'.YUNUSOV, Z.I.BOLTAYEV

OLIY MATEMATIKA
II-QISM

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan texnika yo'nalishi talabalari uchun o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etilgan

Buxoro – 2019

Oliy matematika: o'quv qo'llanma «Oliy matematika» kafedrasining 201__yil ___ _____ kungi №_ __ majlisida muhokama etilgan va institut o′quv-uslubiy kengashining 201__ yil ___ _____ kungi №_____-yig'ilishida tasdiqlanib, chop etishga tavsiya etilgan.

Tuzuvchilar:

BuxMTI «Oliy matematika» kafedrasi dotseni,
fizika-matematika fanlari nomzodi
Teshayev M.X**.**

BuxMTI «Oliy matematika» kafedrasi mudiri,
texnika fanlari nomzodi, dotsent
Yunusov G'.G'.

BuxMTI «Oliy matematika» kafedrasi dotseni,
fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori
Boltayev Z.I.

Taqrizchilar:

BuxDU "Matematika" kafedrasi mudiri,
fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent
Mamatova N.X.

BuxMTI «Oliy matematika» kafedrasi dotseni,
texnika fanlari nomzodi
Imatov H.B.

Ushbu o'quv qo'llanmada «Oliy matematika» fanining ko'p o'zgaruvchili funksiyalar, karali va egri chiziqli integrallar, qatorlar, differensial tenglamalar, kompleks sonlar va kompleks o'zgaruvchili funksiyalar, operatsion hisob elementlari, matematik fizika tenglamalari, ehtimollar nazariyasi, matematik statistika bo′limlari bo′yicha fanning ishchi o′quv dasturida ko′zda tutilgan mavzular yoritilgan.

KIRISH

Eng avvalo “Matematika” fani nimani o′rgatadi degan savolni quyamiz. Bu juda murakkab savol bo’lib, unga ta'lim darajasi turli bo’lgan odamlar turli javoblar beradilar. Masalan, boshlang’ich sinf uquvchilari matematika-narsalarni sanash qoidalarini o′rgatadi deb javob beradilar va bu javobni noto′gri deb bo′lmaydi. Chunki bu matematikaning muhim qismi bo′lmish arifmetikani mohiyatini tashkil etadi va u dastlabki tarixiy davrlarda matematikani to′lik o′z ichiga olgan. O′rta sinf o′quvchilari bu javobga matematikani chiziqlar, figuralar, jismlarni, ya'ni geometrik ob'ektlarni ham o′rganadi deb qushimcha qiladilar. Yuqori sinf uquvchilari esa bu savolga matematika funktsiyalarni o′rganishini ham ilova qiladilar. Talabalar oliy o′quv yurtlarida matematikaning differentsial tenglamalar, ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika kabi yangidan-yangi bo’limlarini o′rganadilar va shu sababli ularning javoblari o′quvchilar javobiga nisbatan kengroq va to′laroq bo′ladi.

Ammo barcha bu javoblar bir tomonlama xarakterga ega bo’lib, matematikaning u yoki bu yo′nalishlarini ifodalaydi. Bu savolga umumiy holda javob berish uchun juda ko’p matematiklar, faylasuflar harakat qilganlar. Hozircha bu savolga eng qoniqarli javob XX asrning buyuk matematigi ***A.N.Kolmogorov*** (1903-1987) tomonidan keltirilgan va quyidagicha ifodalanadi.

T A ' R I F : Matematika xaqiqiy olamning miqdoriy munosabatlari va fazoviy formalari haqidagi fandir.

Matematika so′zi grek tilidan olingan bo′lib, miqdorlar haqidagi fan degan ma'noni bildiradi.

Matematika boshqa tabiiy fanlardan shu bilan farq qiladiki, u real olamni, atrofimizdagi ob'ekt va jarayonlarni abstraktlashtirilgan holda o’rganadi va shu sababli uning natijalari umumiy xarakterga ega.

Masalan, biologiya tirik hayotni o’rganuvchi fan bo’lib, unda qo′llaniladigan usullar xususiy xarakterga va bu usullarni fizikaga yoki tilshunoslikga tadbiq etib bo′lmaydi. Xuddi shunday gaplarni fizika, ximiya, geologiya va boshqa fanlar to′g’risida aytish mumkin.

Ammo arifmetikaning qonun – qoidalarini biologiya ob'ektlariga ham, fizik-ximik tadbiqotlarga ham, iqtisodiy masalalarni echishda ham, qishloq xo′jaligida ham bir xil muvaffaqiyat bilan qo′llash mumkin. Shu sababdan ham XIX asrning buyuk matematigi ***Gauss*** «Arifmetika - matematikaning podshohidir, matematika esa barcha fanlarning podshohidir.» -deb bejiz aytmagan.

Albatta, matematika bunday ulkan bahoga erishishi uchun uzoq taraqqiyot yo′lini bosib o′tishga to′gri kelgan. ***A.N.Kolmogorov*** o’zining 1954 yilda qobusnoma uchun yozilgan va “Matematika“ deb atalgan maqolasida bu taraqqiyotni ushbu to′rt davrga ajratadi.

I Matematikaning shakllanish davri.

II Elementar matematika davri.

III O’zgaruvchi miqdorlar matematikasi davri. Bu davrni shartli ravishda “Oliy matematika “davri deb ham aytish mumkin.

IV Hozirgi zamon matematikasi davri.

Shuni ta'kidlab o′tish kerakki, har bir keyingi davrda elementar matematikani rivojlanishi to′xtab qolgan emas.

I. Matematikaning shakllanish davri eramizdan oldingi VI-V asrgacha davom etdi. Bu davrda insoniyat turli predmetlarni sanashni o′rgandi. Sanoq sistemalari oldin og’zaki holda ishlatilgan. Yozma sanoq sistemalarini kashf etilishi bilan natural sonlar ustida turli arifmetik amallar bajarish qonun-qoidalari topila boshlandi. Yo′llarni uzunligini o′lchash, daromadlarni va etishtirilgan hosilni taqsimlash kabi masalalar natijasida kasr sonlar tushunchasi va ular ustida arifmetik amallar bajarish qoidalari ishlab chiqildi.

Natijada, eng qadimiy matematik fan- arifmetikaga asos solindi. Maydonlarni o′lchash, jismlar hajmlarini hisoblash, turli ish qurollarini yaratishga ehtiyoj paydo bo′lishi bilan geometriyaning kurtaklari shakllana boshlandi. Shunisi qiziqki, bu jarayonlar turli xalqlarda bir-biriga bog’liqmas ravishda, parallel ko’rinishda amalga oshdi.

Ayniqsa bu jarayonlar Misr va Vavilon davlatlarida yaqqol namoyon bo’ldi.

II. Elementar matematika davri eramizdan oldingi V asrdan boshlab XVII asr boshlarigacha davom etdi. Oldingi davrdagi matematik bilimlar tarqoq, xususiy ko’rinishdagi natijalardan, qonun-qoidalardan iborat edi. Ularni birlashtirish, umumiy ko’rinishga keltirish kadimgi Gretsiyadan boshlandi va matematika fanini ilmiy poydevoriga asos solindi.

Evklidning “Negizlar” asarida elementar geometriya fani aksiomatik ravishda ifodalandi va bu asar 2 ming yil davomida boshqa matematik fanlarni asosini yaratishga misol, namuna sifatida xizmat qilib keldi. Qadimgi Gretsiyada matematikaning (asosan geometriyani) rivojlanishiga ***Pifagor***, ***Aristotel***, ***Arximed***, ***Geron***, ***Diofant***, ***Ptolomey*** kabi mutafakkirlar katta hissa qo’shdilar.Turli gidrotexnik qurilishlar (masalan, Arximed vinti), harbiy mashinalar, Arximedni tosh otuvchi qurilmalari, oynalar sistemasida kemalarni yondirib yuborish, dengizda suzish uchun kerakli bilimlar, geodeziya va kartografiya, astronomik kuzatishlar bilan bog’liq masalalar matematikani rivojlanishiga katta turtki bo’ldi.

Ko’rilayotgan davrning IX-XV asrlari davomida matematikaning rivojlanishiga O′rta Osiyo olimlarining hissasi katta bo′ldi. Bu vaqtda arablar juda ko′p erlarni bosib olib, arab xalifaligiga birlashtirdilar. Bu erlarda olimlar yagona arab tilidan foydalana boshladilar va bu ular orasidagi aloqalarni mustahkamlanishiga olib keldi. Bundan tashqari o’sha davrda katta ilmiy tadqiqodlar davlat tomonidan moliyalashtirila boshlandi. Bu omillar bu erda ilmni rivojlanishiga, katta kutubxonalar tashkil etilishiga, rasadxonalar qurilishiga olib keldi.

IX asrda yashab ijod etgan xorazmlik olim ***Muhammad ibn Muso al Xorazmiy*** birinchi bo’lib o’zining “Aljabr” asarida algebra faniga asos soldi. Evropalik olimlar bu kitob orqali kvadrat tenglamalarni echish usuli bilan tanishdilar. X asrda Beruniy $x^3+1=3x$ ko’rinishdagi kub tenglamani taqribiy echish usulini topdi. XI-XII asrda yashagan ***Umar Xayyom*** kub tenglamalarni umumiy holda tekshirdi, ularni sinflarga ajratdi va echilish shartlarini topdi. XIII asrda ijod etgan ozarbayjon matematigi ***Nasriddin Tusiy*** sferik trigonometriyani asos

solinishiga yakun yasadi va ***Evklidning*** “Negizlar” kitobini arab tiliga tarjima qildi. XV asrda buyuk astronom va matematik ***Mirzo Ulug’bek*** (1394-1449) ”Ziji Kuragoniy”asarida 1018 ta yulduzning koordinatalarini nihoyatda katta aniqlik bilan hisoblab berdi. Bu ishda rasadxonada eng zamonaviy aniq asboblardan foydalanilgani bilan bir qatorda yirik matematiklar ham ishlaganini ko′rsatib o′tish kerak. Ulardan eng mashhuri ***G’iyosiddin Jamshid ibn Masud ali Qushchi*** bo′lib hisoblanadi. U o′nli kasrlar ustida arifmetik amallar bajarish qonun–qoidalarini batafsil bayon qilib berdi (ungacha O′rta Osiyoda asosan oltmishlik sanoq sistemasi qo′llanilgan). Evropada bu natijalarga atigi XVI asrda erishildi. ***Ali Qushchi*** Nyuton binomi formulasini natural sonlar uchun og’zaki ko′rinishda ifodaladi, ”Aylana haqidagi risola” asarida (sonini 17 xona aniqlikda hisobladi, astronomik hisoblashlar uchun kerak bo’lgan sinuslar jadvalini tuzish uchun tenglamalarni iteratsion usulda sonli echish yo’lini ko’rsatdi.

Hindistonning matematikaga qo′shgan eng katta hissasi - o′nli sanoq sistemasi uchun raqamlar va nolni kashf etilishidir. Bu raqamlar evropaliklarga arab matematiklari asarlari orqali ma'lum bo’lgani uchun hozirgi paytda noto′g’ri ravishda «arab raqamlari» deb ataladi.

Elementar matematikaning rivojlanishiga Xitoy olimlarining ham katta ulushi bor. XII-XV asrlar davomida G’arbiy Evropa matematiklari asosan qadimgi Gretsiya va Sharq matematiklarining ishlarini o‘rganish bilan shug’ullanib kelganlar, matematik bilimlarni ommalashtirish maqsadida turli asarlar yozganlar, matematik simvollarni kashf etganlar. Ammo XVI asrdan boshlab bu erlik olimlar tomonidan yirik kashfiyotlar qilina boshlandi va yuksalish davri boshlandi. Masalan, polyak olimi ***Kopernikning*** astronomik kashfiyoti, italiyalik olim ***Galileyning*** mexanika bo’yicha qator kashfiyotlari matematikani rivojlanishiga turtki bo′ldi.

Italiyalik matematiklar ***Tartaliya***, ***Ferrari***, ***Kardano*** uchinchi va to’rtinchi tartibli algebraik tenglamalarni echish usullarini topdilar (oldin bu tenglamalar taqribiy echilar edi.). Frantsuz matematigi ***Viet*** n- darajali tenglama ildizlari bilan uning koeffitsientlari orasidagi munosobatlarni topdi.

III.Oliy matematika davri XVII asrdan boshlandi. Elementar matematikada kattaliklar va geometrik ob'ektlar qo’zg’almas, o’zgarmas miqdorlar kabi qaralar edi. Matematikada endi harakatlanuvchi va o’zgaruvchi miqdorlarni ko′rishga to′g’ri kela boshladi. Masalan, ***Boyl-Mariot*** (1662) gaz hajmi bilan uning bosimi o’rtasida o’zaro bog’lanish mavjud ekanligini, ***Guk*** (1660) esa qattiq jismning deformatsiyalanishi ε va kuchlanishi σ orasida $\sigma=\alpha\varepsilon$ ko’rinishdagi chiziqli bog’lanish mavjud ekanligini aniqladilar. Bu qonunlarda ikki o’zgaruvchi miqdor orasidagi o’zaro bog’lanishni o’rganishga to’g’ri keldi va bunday bog’lanishlar funktsiya tushunchasiga olib keldi. Elementar matematikada (arifmetikada) son qanday asosiy ahamiyatga ega bo’lsa, oliy matematikada funktsiya shunday asosiy ahamiyatga egadir. Funktsiyalarni o′rganish matematik tahlil degan fanga olib keldi. Bu fanda limit, hosila, integral kabi tushunchalar kiritildi. Nemis matematigi ***Leybnits*** 1682-1686 yillarda va ingliz matematigi, mexanigi ***Nyuton*** 1665-1666 yillarda differentsial va integral hisobni kashf etdilar.

Bu davrda matematikani rivojlanishiga ***Dekart***, ***Fure***, ***Paskal***, ***Ferma***, ***Gyuygents***, ***Bernulli***, ***Eyler***, ***Laqranj***, ***Dalamber***, ***Koshi*** kabi buyuk olimlar katta hissa qo'shdilar. Bu davrda matematik tahlilni rivojlantirish bilan bir qatorda analitik geometriya, differentsial tenglamalar, ehtimollar nazariyasi kabi yangi fanlarga asos solindi.

IV. Hozirgi zamon matematikasi davri XIX asr boshidan hisoblanadi. Oldingi davrlarda matematikaning rivojlanishi amaliy masalalarni echish natijasida amalga oshgan bo'lsa, endi matematika o′z ichki qonuniyatlari bo'yicha ham rivojlana boshladi. Bu rivojlanish oldin topilgan tushunchalarni, natijalarni umumlashtirish, ularni mantiqiy jihatdan tugallanganligiga erishish, oldingi natijalarni hozirgi zamon yu-tuqlari asosida qayta ko'rib chiqish, tahlil etish kabi yo'nalishlarda amalga oshadi. Masalan, $x^2-1=0$ kvadrat tenglama $x=\pm 1$ ildizga ega ekanligi ma'lum, ammo unga juda o′xshash $x^2+1=0$ tenglama xaqiqiy sonlar ichida ildizga ega emas. Shu sababli xaqiqiy sonlardan kengroq, umumiyroq bo′lgan kompleks sonlar tushunchasini kiritishga to'g'ri keldi. XIX asrda kompleks sonlar va ularning funktsiyalarini o′rganish natijasida «Kompleks tahlil» fani paydo bo'ldi. Bu nazariyaning amaliyotga tadbiqlari keyinchalik topildi.

Algebraik tenglamalarni echish masalalari bilan shug'ullanish natijasida ***Abel***, ***Galua*** (1830) tomonidan guruhlar nazariyasi yaratildi. XX asrdagina guruhlar nazariyasi kristallarni o'rganishda, kvant fizikasida o'z tadbig'ini topdi.

XIX asrda matematika fanining juda ko'p sohalarga qo'llanilishi, tarkibini juda kengayishi natijasida uning poydevorini ilmiy nuqtai-nazardan qayta ko'rib chiqish yoki yaratish masalalari muhim ahamiyatga ega bo'ldi. Matematik fanlarning asosiy poydevori sifatida to'plamlar nazariyasi va matematik mantiq olindi. XX asrda juda ko'p matematik fanlar poydevori to′plamlar nazariyasi asosida yaratildi. XIX-XX asrda yangi matematik fanlarga ham asos solindi va rivojlantirildi. Masalan, to′plamlar nazariyasi, matematik mantiq, xaqiqiy o′zgaruvchili funktsiyalar nazariyasi, funktsional tahlil, topologiya, matematik fizika masalalari.

O′zbekistonda matematika fanining rivojlanishiga to′xtalib o′taylik. O′zbekistonda matematika fani bo'yicha yutuqlar Toshkentda 1920 yilda universitet tashkil etilishi bilan bog'liq. O′zbekistonga kelgan rus olimlari ichida ***V.I.Romanovskiy*** ham bor edi. U matematik statistika bo'yicha ko'zga ko'ringan olim edi va u o'zbek matematika maktabini yaratishga katta hissa qo′shdi. O′zbek matematiklaridan birichi bo'lib akademik ***Kori-Niyoziyni*** ko'rsatish mumkin. U matematika bo'yicha katta ilmiy ishlar qilmagan bo′lsada, matematikani targ'ib qi-lish, o′zbek tilida darsliklar yozish bilan O′zbekistonda matematikani rivojlanishiga katta hissa qo′shdi. Dunyoga tanilgan matematiklarimizdan akademik T.A.S arimsoqov (1915-1995), akademik S.X. Sirojiddinov(1920-1988), M.S. Salohitdinov funktsional tahlil, matematik statistika, matematik fizika tenglamalari bo′yicha juda katta kashfiyotlar qilib, o'zbek matematika maktabini jahonga tanittirdilar.

Matematikaning amaliy tadbiqlari bo'yicha ba'zi bir misollarni keltiramiz.

1.1845 yilda frantsuz matematigi ***Levere*** Uran planetasi traektoriyasi tenglamasini tekshirib, bizga noma'lum osmon jismi borligini, uning traektoriyasini va massasini nazariy yo’l bilan, ya'ni “qalam uchida” hisoblab topdi. U ko′rsatgan koordinatalar bo′yicha 1846 yil 23 sentyabr kuni nemis astronomi ***Galle*** teleskopda Neptun planetasini kashf etdi. Xuddi shunday ravishda 9-planeta 1915 yilda qilingan matematik hisoblar asosida 1930 yili kashf etildi.

2. ***Neytron***, kvark kabi elementlar zarrachalarining mavjudligi va ularning xossalari tajribalar asosida emas, hisoblashlar asosida kashf etildi.

3. Samolyotlarning uchish uzoqligi kattalasha borishi bilan ularni avtomatik boshqa-rish masalasi paydo bo′ldi. Bu masalani ***L.S. Pontryagin*** (Rossiya) va ***Belman*** (AKSh) kabi matematiklar hal qilib, optimal boshqarish nazariyasi degan yangi fanga asos soldilar.

4.Telefon aloqasini rivojlanishi bilan aloqa bo′limlarida abonentlarni navbatda qancha kutib turish vaqtlari kabi masalalar natijasida amerikalik olim ***Erlang*** “Ommaviy xizmat ko’rsatish nazariyasi” nomli yangi matematik fanga asos soldi.

5.Kosmosni o′zlashtirish muammolarini echishda matematika roli benihoyat kattadir. Akademik ***Keldo`sh*** (Rossiya) rahbarlik qilgan ”Amaliy matematika” ilmiy-tekshirish institutida bu masalalarni echish usullari ishlab chiqildi va ular EXM lar yordamida amalga oshirildi.

6. Iqtisodiyotda xalq xo′jaligini boshqarish uchun amerikalik iqtisodchi-olim ***Leontev*** tomonidan tarmoqlararo muvozanatning matematik modellari ishlab chiqildi va uning tenglamalari echilib, ishlab chiqarishni oqilona boshqarishga erishildi.

7. Akademik ***Kantorovich*** (Rossiya) materiallardan andoza olishning kamchiqim yo′llarini axtarish bilan shug’ullandi va natijada chiziqli dasturlash nomli yangi matematik fanga asos soldi. Bu fan natijalari asosida xalq xo′jaligida juda katta iqtisodiy foydaga erishildi va shu sababli ***Kantorovich*** iqtisodiyot bo′yicha Nobel mukofotiga sazovor bo’ldi.

Bunday misollarni yana ko′plab keltirish mumkin.

VIII BOB. KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKTSIYALAR.

8.1. IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKTSIYa LIMITI VA UZLUKSIZLIGI.

***Tayanch iboralar*:** Ko'p o'zgaruvchili funktsiya, aniqlanish sohasi, funktsiyaning limiti, funktsiyaning uzluksizligi, funktsiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari.

Reja:

1. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyalar.
2. Ikki o'zgaruvchili funktsiya.
3. Bir necha o'zgaruvchili funktsiyaning limiti va uzluksizligi.

Adabiyotlar:

[**1**]. VII bob,§1-2 [**2**]. XIIbob, §1-3

1.Ko'p o'zgaruvchili funktsiyalar.

TA'RIF: Agar $x, y, z, \ldots u$, t , o'zgaruvchilarning har bir qiymatlar to'plamiga o'zgaruvchi w ning aniq qiymati mos kelsa, w ni $x, y, z, \ldots u, t,$ erkli o'zgaruvchilarning funktsiyasi deb aytiladi, va $w = f(x, y, z, \ldots u, t,)$ kurinishida yoziladi. Bu erda $x, y, z, \ldots u, t$, erkli o'zgaruvchilar

M i s o l:

$$\omega = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2}$$

erkli o'zgaruvchilar soni to'rtta, ya'ni x, y, z, u, shuning uchun u to'rt o'zgaruvchili funktsiya deb aytiladi.

$1-x^2-y^2-z^2-u^2>0$ munosabatni qanoatlantiruvchi qiymatlarda aniqlangan.

2. Ikki o'zgaruvchili funktsiya

TA'RIF: Agar bir-biriga bog'lik bo'lmagan ikki o'zgaruvchi x va y biror D o'zgarish sohasidagi har bir kush (x, y) qiymatiga z miqdorning aniq bir qiymati mos kelsa, z ikki erkli o'zgaruvchi x va y ning D sohada aniqlangan funktsiyasi deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$Z=f(x,y) \quad Z=\Phi(x, y) \quad \text{va} \quad \text{h.k.}$$

TA'RIF: $Z=f(x,y)$ funktsiya aniqlangan x va y ko'sh (x,y) qiymatlarning to'plami funktsiyaning aniqlanish sohasi yoki mavjudlik sohasi deb aytiladi.

Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning aniqlanish sohasi geometrik tarzda ko'rgazmali tasvirlanadi.Agar x va y ning har bir ko'sh qiymatini OXУ tekislikda $M(x,y)$ nuqta bilan tasvirlasak, funktsiyaning aniqlanish sohasi tekislikdagi nuqtalarning biror to'plami ko'rinishida tasvirlanadi. Funktsiyaning aniqlanish sohasi, jumladan, butun tekislik bo'lishi ham mumkin. Bundan buyon asosan

tekislikning chiziqlar chegaralangan qismidan iborat bo'lgan sohalar bilan ish ko'ramiz. Berilgan sohani chegaralovchi chiziqni sohaning chegarasi deb aytamiz. Sohaning chegarada etmagan nuqtalarini sohaning ichki nuqtalari deb aytamiz. Faqat ichki nuqtalardan iborat bo'lgan soha ochiq soha deyiladi.Agar sohaga chegaraning nuqtalari ham kirsa , soha yopiq deb aytiladi.

Misol: Ushbu $Z = \dfrac{1}{R^2 - x^2 - y^2}$ funktsiyaning aniqlanish sohasini toping.

Echimi: Funktsiyaning aniqlanish sohasi $\dfrac{1}{R^2 - x^2 - y^2}$ ifoda aniqlangan nuqtalar to'plami, ya'ni $R^2 - x^2 - y^2 \neq 0$ yoki $x^2 + y^2 \neq R^2$ bajariladigan nuqtalar to'plami bo'ladi. Bu to'plamga tekislikning aylana nuqtalaridan tashqari hamma nuqtalari tegishli bo'ladi.

M i s o l : Ushbu $Z=\ln(y^2-4x+1)$ funktsiyaning aniqlanish sohasini toping.

Echimi: Funktsiya $y^2-4x+8>0$ da aniqlangan.Tengsizlikni $y^2>4(x-2)$ko'rinishda yozamiz. aniqlanish soha parabola va uning ichki kismida yotmagan barcha nuqtalari to'plami bo'ladi.

M i s o l: $Z = \sqrt{x+y}$ funktsiyaning aniqlanish sohasini toping.

Echimi: Kvadratik ildiz nol va musbat sonlar uchun aniqlangan bo'ladi , shuning uchun ushbu tengsizlik qanoatlanishi kerak: $x+y>0, y>-x$

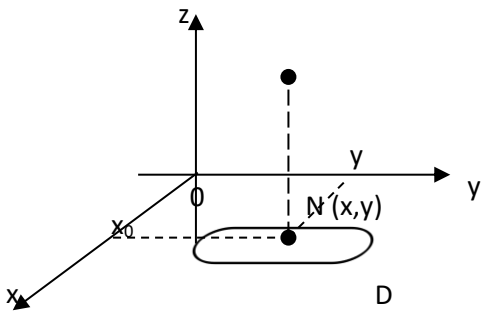
aniqlanish soha $y=-x$ to'g'ri chiziqda va undan yuqoridagi yarim tekislikda yotgan nuqtalar to'plamidan iborat

Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning geometrik tasvirlash quyidagicha bo'ladi: OXU tekislikdagi D sohada aniqlangan.

$$Z = f(x, y) \qquad (1)$$

funktsiyani va XOУZ to'g'ri burchakli Dekart koordinatalari sistemasini qaraymiz. D sohasining har bir (x,y) nuqtasidan OXУ tekislikka perpendikulyar o'tkazamiz, va unda $f(x,y)$ ga teng kesma ajratamiz. (1-rasm)

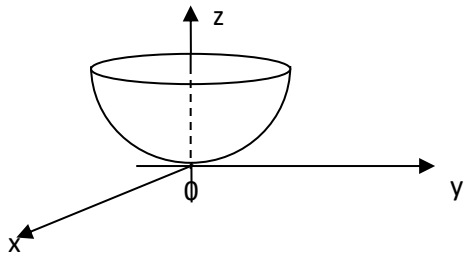
U holda fazoda koordinatalari x, y, $f(x,y)$ bo'lgan P nuqtani hosil qilamiz. Koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantiradigan P nuqtalarning geometrik o'rni ikki o'zgaruvchi funktsiyaning grafigi deb ataladi.



1-расм

M i s o l : $Z=x^2+y^2$ funktsiyaning grafigini chizing.

Echimi: Analitik geometriyadan ma'lumki $Z=x^2+y^2$ funktsiyaning grafigi aylanish parabolasidan iborat. (2-rasm)



2-расм

I z o h. Uch va undan ortiq o'zgaruvchining funktsiyasini fazoda grafik yordamida tasvirlash mumkin emas.

2. Bir necha o'zgaruvchili funktsiyaning limiti va uzluksizligi .

Berilgan nuqta atrofi tushunchasini kiritamiz. $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning r radiusli atrofi deb $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r$ tengsizlikni kanoatlantiradigan (x,y) nuqtalar to'plamiga aytiladi.

TA'RIF: Agar har qanday musbat ε son uchun shunday r>0 son topilsaki, $\overline{MM}_0<r$ tengsizlik qanoatlanadigan barcha $M(x,y)$ nuqtalar uchun

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

tengsizlik qanoatlansa, o'zgaruvchi $M(x,y)$ nuqta $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaga intilganda $f(x,y)$ funktsiya A limitga intiladi deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

TA'RIF: $M_0(x_0,y_0)$ nuqta $f(x,y)$ funktsiyaning aniqlanish sohasidagi nuqta bo'lsin. Agar $M(x,y)$ nuqta funktsiyaning aniqlanish sohasida qolgan holda $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaga ixtiyoriy usulda intilganda ushbu tenglik

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0) \qquad (2)$$

mavjud bo'lsa, $Z=f(x\ y)$ funktsiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada uzluksiz deyiladi.
Biror sohaning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lgan funktsiya shu sohada uzluksiz deyiladi.

Agar biror $N(x,y)$ nuqtada yoki nuqtalar to'plamida (2) tenglik bajarilmasa, $N(x,y)$ nuqta (yoki nuqtalar to'plami) $Z=f(x,y)$ funktsiyaning uzilish nuqtasi (yoki uzilish nuqtalari to'plami) deyiladi.

M i s o l: $Z=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ funktsiyaning uzilish nuqtalarini aniqlang.

Echimi: Berilgan funktsiya $y=\pm x$ to'g'ri chiziqda yotgan nuqtalarda uzilishga ega , chunki bu nuqtalar uchun (47) tenglik bajarilmaydi.

M i s o l: $z^2=x^2+y^2$ funktsiyani uzluksizlikka tekshiring.

Echimi: Berilgan funktsiya uchun x va y ning har qanday qiymatlarida (2) tenglik bajariladi.Funktsiya OXУ tekislikda uzluksizdir.

Yopiq va chegaralangan sohada uzluksiz bo'lgan ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning bir necha muhim xossalarini isbotsiz aytib o'tamiz.

1-x o s s a : Agar $f(x,y)$ funktsiya yopiq va chegaralangan D sohada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, shu D sohadan kamida bitta shunday $N(x_0,y_0,\ldots)$ nuqta topiladiki, sohaning boshqa hamma nuqtalari uchun ushbu

$$f(x_0,y_0\ldots)\ge f(x,y,\ldots)$$

munosabat bajariladi va kamida bitta shunday $M(\overline{x_0},\overline{y_0},\ldots)$ nuqta topiladiki, sohaning boshqa hamma nuqtalari uchun $f(\overline{x_0},\overline{y_0},\ldots)\le f(x,y,\ldots)$ munosabat bajariladi . Funktsiyaning $f(x_0,y_0,\ldots)=A$ qiymati $f(x,y,\ldots)$ funktsiyaning D sohadagi eng katta qiymati deb, $f(\overline{x_0},\overline{y_0},\ldots)=a$ qiymatini esa eng kichik qiymati

deb aytiladi.
2- x o s s a: Agar $f(x, y\ldots)$ funktsiya yopiq va chegaralangan sohada uzluksiz bo'lib, musbat va manfiy qiymatlarga ega bo'lsa, u holda shu soha ichida berilgan $f(x,y\ldots)$ funktsiya nolga aylanadigan nuqtalar topiladi.

S a v o l l a r :

1.Ko'p o'zgaruvchili funktsiyalarni ta'riflang.
2.Aniqlanish sohasi nima?
3.Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning grafigiga misol keltiring.
4.Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning limiti va uzluksizligi nima?

8.2. IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKTSIYANING HOSILALARI.

Tayanch iboralar: Xususiy orttirma, to'la orttirma, xususiy hosila, to'la hosila, murakkab funktsiyaning hosilasi.

Reja:

1.Funktsiyaning xususiy va to'la orttirmasi.
2.Bir necha o'zgaruvchili funktsiyaning xususiy hosilasi.
3.Murakkab funktsiyaning hosilasi. To'la hosila.
4.Xar xil tartibdagi xususiy hosilalar.

Adabiyotlar:

[**1**]. VII bob, §3-6, 11 [**2**]. XII bob, §4,6,10

1.Funktsiyaning xususiy va to'la orttirmasi.

Ushbu $Z=f(x, y)$ funktsiya D sohada uzluksiz bo'lsin.

Erkli o'zgaruvchi x ga Δx orttirma beramiz , unda Z orttirma oladi bu orttirma Z ning X bo'yicha xususiy orttirmasi deb ataladi va $\Delta_x Z$ bilan belgilanadi , ya'ni

$$\Delta_x Z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$$

Shunga o'xshash agar x o'zgarmas qiymatni saqlab, y ga Δy orttirma bersak, Z ham orttirma oladi, bu orttirma Z ning y bo'yichi xususiy orttirmasi deb aytiladi va ΔyZ bilan belgilanadi.:

$$\Delta_y Z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

Nihoyat argument x ga Δx orttirma va argument y ga Δy orttirma berib, Z uchun yangi orttirma qilsak bu orttirma Z ning to'la orttirmasi deb aytiladi:

$$\Delta Z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

Ikkitadan ortiq o'zgaruvchilar funktsiyasining xususiy va to'la orttirmalari shu kabi ta'riflanadi. Chunonchi, $u=f(x, y, z)$ uchun :

$$\Delta_x u = f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z),$$
$$\Delta_y u = f(x, y+\Delta y, z) - f(x, y, z),$$
$$\Delta_z u = f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z),$$
$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, Z+\Delta Z) - f(x, y, z).$$

M i s o l : $Z = x-y$ funktsiyaning xususiy va to'la orttirmalarini toping.

Echimi:
$$\Delta_x Z = (x+\Delta x)\, y - xy = y\Delta x$$
$$\Delta_y Z = x(y+\Delta y) - xy = x\Delta y$$
$$\Delta Z = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.$$

2.Bir necha o'zgaruvchili funktsiyaning xususiy hosilasi.

TA'RIF: $Z=f(x,y)$ funktsiyaning x bo'yicha xususiy hosilasi. deb,xususiy orttirma $\Delta_x Z$ ning Δx orttirmaga nisbati Δx nolga intilishidagi limitiga aytiladi. $Z = f(x,y)$ funktsiyaning x bo'yicha xususiy hosilasi quyidagi simvollar bilan belgilanadi:

$$Z'_x,\ f'_x(x,y),\ \frac{\partial Z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x}$$

Ta'rifga kura

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x Z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Shunga uxshash $Z = f(x,y)$ funktsiyaning y bo'yicha xususiy hosilasi ta'riflanadi:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y Z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

M i s o l: $Z+x^3 \sin y$ funktsiyaning xususiy hosilalarini xisoblang.

Echimi: y o'zgaruvchini o'zgarmas deb turib x ga nisbatan xususiy hosilani topamiz:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = (x^3 \sin y)'_x = 3x^2 \sin y$$

x o'zgaruvchini o'zgarmas deb turib y ga nisbatan xususiy hosilani hisoblaymiz:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = (x^3 \sin y)'_y = x^3 \cos y$$

Xar qancha o'zgaruvchili funktsiyalarning xususiy hosilalari ham shunga o'xshash topiladiki: $u = f(x, y, z, t)$,

$$\frac{\partial u}{\partial Z} = \lim_{\Delta Z\to 0}\frac{\Delta_z u}{\Delta z} = \lim_{\Delta Z\to 0}\frac{f(x,y,z+\Delta z,t) - f(x,y,z,t)}{\Delta z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta_t u}{\Delta t} = \lim_{\Delta Z\to 0}\frac{f(x,y,z,t+\Delta t) - f(x,y,z,t)}{\Delta t}$$

M i s o l: $u = x^3+y^3+x\cdot t\cdot z$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial z} = ?$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+t\cdot z,\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2,\frac{\partial u}{\partial z}=xt,\frac{\partial u}{\partial t}=xz$$

Bir o'zgaruvchili funktsiya hosilasining geometrik mazmuniga o'xshash ikki o'zgaruvchili funktsiyaning xususiy hosilalarining geometrik mazmuni mavjud: $\frac{\partial z}{\partial y}$ hosilaning son qiymati Z=f (x , y) sirtni x=const tekislik bilan kesganda hosil bo'lgan egri chiziqqa urinma og'ish burchagining tangensiga teng.

Shuningdek $\frac{\partial z}{\partial x}$ xususiy hosilaning son qiymati Z=f (x ,y) sirtning y=const tekislik bilan kesimiga urinmaning og'ish burchagi tangensiga teng.

3. Murakkab funktsiyaning hosilasi.To'la hosila.

Ushbu Z= f (u v) tenglamada u va v miqdorlar x,y erkli o'zgaruvchilarning funktsiyalari $u=\varphi(x,y), V=\psi(x,y)$ bo'lsin. Bu holda Z funktsiya x va y teng murakkab funktsiyasi deyiladi.

M i s o l: Z=$u^2\cdot v^2+u+v+4$, $u=x+y$,$v=e^{xy}$

Murakkab funktsiyaning x va y bo'yicha xususiy hosilalari quyidagi formulalar orqali hisoblanadi:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

Murakkab funktsiya quyidagicha berilgan bo'lsin:

$$Z=f(u;v),u=\varphi(x),v=\psi(x)$$

Bunday holda Z dan x bo'yicha hosila to'la hosila deyiladi va quyidagicha hisoblanadi:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

4.Har xil tartibdagi xususiy hosilalar.

Z=f(x,y) funktsiya berilgan bo'lsin. Unda $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ xususiy hosilalar x va y o'zgaruvchilarning funktsiyalaridir. Shuning uchun ulardan yana hosila topish mumkin. Ikkinchi tartibli hosilalar quyidagicha belgilanadi:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Uchinchi tartibli xususiy hosilalar bunday belgilanadi:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y^2},\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x},\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x},\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2},\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

Umuman. n - tartibli xususiy hosila (n-1) tartibli xususiy hosilaning birinchi tartibli xususiy hosilasidir.

TEOREMA: Agar $Z=f(x,y)$ funktsiya va uning Z'_x, Z'_y, Z'_{xy}, Z'_{yx} hosilalari $M(x,y)$ nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan va uzluksiz bo'lsa. Bu nuqtada $f_{xy} = f_{yx}$ bo'ladi.

Teoremani isbotsiz qabo'l qilamiz.

S a v o l l a r :

1.Xususiy va to'la orttirmalarni ta'riflang.
2.Xususiy hosilalarni ta'riflang.
3.Murakkab funktsiyaning hosilasini ta'riflang.
4.To'la hosila nima?

8.3. TO'LA ORTTIRMA VA TO'LA DIFFERENTSIAL, GRADIENT. YUNALISH BO'YICHA HOSILA.

Tayanch iboralar: To'la orttirma, to'la diferentsial, gradient, yunalish bo'yicha hosilasi.

Reja:

1. To'la orttirma va to'la differentsial.
2. Yunalish bo'yicha hosila. Gradient.

Adabiyotlar:

[**1**]. VII bob, §4; XII bob, §2-3 [**2**]. XII bob, §5, 12-13

1.To'la orttirma va to'la differentsial.

$Z=f(x,y)$ funktsiya to'la orttirmasining ta'rifiga ko'ra

$$\Delta Z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) \qquad (1)$$

$f(x,y)$ funktsiya qaralayotgan (x,y) nuqtada uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsin.(48) tenglikni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\Delta Z = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)] \qquad (2)$$

Qavslardagi ayirmalarga Lagranj teoremasini qo'llab

$$f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}\Delta y \qquad (3)$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x}\Delta x \qquad (4)$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bunda $x < \bar{x} < x+\Delta x, y < \bar{y} < y+\Delta y$ bo'ladi.

Farazimizga ko'ra xususiy hosilalar uzluksiz bo'lgani uchun

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \qquad (5)$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \Delta x \to 0, \Delta y \to 0 \Rightarrow \bar{x} \to x, \bar{y} \to y \qquad (6)$$

(5), (6) larni limitlar xossasidan foydalanib, quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \gamma_1 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \gamma_2 \qquad (8)$$

Bu erda γ_1 va γ_2 lar Δx, Δy lar nolga intilganda nolga intiladi .Ketma-ket (7),(8) larni (3),(4) ga va (3), (4)larni (2)- tenglikka qo'ysak, funktsiyaning orttirmasi ushbu ko'rinishga keladi:

$$\Delta Z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y \qquad (9)$$

(9) dagi $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$ ifoda funktsiya orttirmasining bosh bo'lagini tashkil etadi. dz ёки df bilan belgilanadi va Z = f (x , y) funktsiyaning berilgan (x,y) nuqtadagi differentsiali deb aytiladi. Agar Δx =dx va Δy =dy deb olinsa, funktsiyaning differentsiali quyidagi ko'rinishga keladi :

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy \qquad (10)$$

Natijada (9) – tenglik $\Delta z = dz + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$ ko'rinishga keladi.

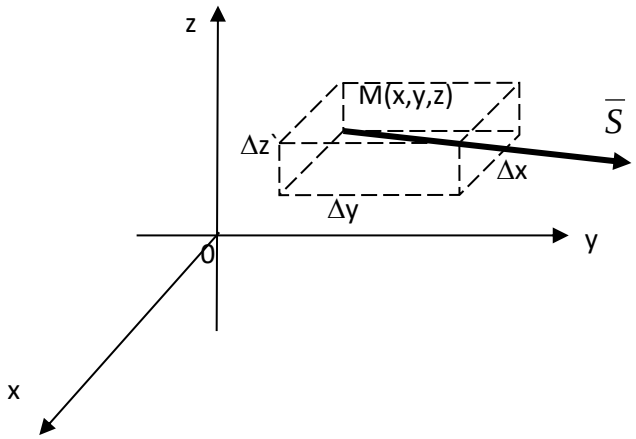
Δx, Δy nolga intilganda γ_1 Δx + γ_2 Δy nolga intiladi.Bu yig'indini e'tiborga olmasak katta xato qilmaymiz, ya'ni oxirgi tenglikdan $\Delta z \approx dz$ va

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy \qquad (11)$$

formulani olamiz .(11) dan taqribiy hisoblashlarda foydalanish mumkin.

2.Yunalish bo'yicha hosila.Gradient.

D sohada u=f(x,y,z) funktsiyani va M(x,y,z) nuqtani qaraymiz. M nuqtadan yunaltiruvchi kosinuslari $\cos a, \cos\beta, \cos\gamma$ bo'lgan $\bar{S}$ vektorni (1-rasm) va



1-rasm

$M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ nuqtani qaraymiz. $f(x,y,z)$ funktsiya D sohada uzluksiz hosilalarga ega deb faraz qilamiz. Bu funktsiya uchun (9) tenglik quyidagicha yoziladi:

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y + \gamma_3 \Delta z \qquad (12)$$

Tabiiyki $\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ nolga intilganda $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$,lar nolga intiladi. (12) tenglikni ikkala tomonini ΔS ga bo'lib $\Delta S \to 0$ intilgandagi limitni qaraymiz:

$$\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta S} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta S} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta S} + \gamma_1\frac{\Delta x}{\Delta S} + \gamma_2\frac{\Delta y}{\Delta S} + \gamma_3\frac{\Delta z}{\Delta S}; \qquad (13)$$

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial S};\ \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos a,\ \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta S} = \cos\beta,$$

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta S} = \cos\gamma,\ \lim_{\Delta S\to 0}\gamma_1\frac{\Delta x}{\Delta S}\ \lim_{\Delta S\to 0}\gamma_2\frac{\Delta y}{\Delta S} = \lim_{\Delta S\to 0}\gamma_3\frac{\Delta z}{\Delta S} = 0$$

ekanliklarini nazarga olib (60) – dan

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cos a + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(x,y)}{\partial z}\cos\gamma \qquad (14)$$

tenglikni olamiz. Bu erdagi $\frac{\partial u}{\partial S}$ hosila. $u = f(x,y,z)$ funktsiyasining $\vec{S}$ yunalishi bo'yicha hosilasi deb aytiladi.

Xususiy hosilalar yunalish bo'yicha hosilaning xususiy holidir.Masalan,

$\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = \frac{\pi}{2}$ bo'lganda

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{du}{dz}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

M i s o l: $u = x^3 + y^3 + z^3$ berilgan M(I; I; I) nuqtada $\vec{S} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ vektor yunalishi bo'yicha hosila topilsin.

Echimi:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{2}{\sqrt{14}}; \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{14}}; \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2, \frac{\partial u(M)}{\partial x} = 3, \frac{\partial u(M)}{\partial y} = 3, \frac{\partial u(M)}{\partial z} = 3.$$

Demak,

$$\frac{\partial u}{\partial S} = 3\cdot\frac{2}{\sqrt{14}} + 3\cdot\frac{1}{\sqrt{14}} + 3\cdot\frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{18}{\sqrt{14}}$$

TA'RIF: $u=f(x,y,z)$ funktsiya aniqlangan D sohaning har bir nuqtasiga koordinata o'qlaridagi proektsiyalari xususiy hosilalar $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ ning tegishli nuqtadagi qiymatlariga teng bo'lgan vektor,

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

$f(x, y, z)$ funktsiyaning gradienti deb ataladi.

TEOREMA: $u = f(x,y,z)$ skalyar maydon berilgan va shu skalyar maydonda

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

gradientlar maydoni aniqlangan bo'lsin. Biror $\vec{S}$ vektor yunalishishi bo'yicha olingan $\frac{\partial u}{\partial S}$ hosila grad$u$ vektorning $\vec{S}$ vektordagi proektsiyasiga teng bo'ladi.Teoremani isbotsiz qabo'l qilamiz.

Gradientning ba'zi xossalarini keltiramiz.

a)Agar $\vec{S}$ vektorning yo'nalishi gradient yo'nalishi bilan bir xil bo'lsa, berilgan nuqtada $\vec{S}$ vektor yo'nalishi bo'yicha olingan hosila eng katta qiymatga ega bo'uladi va u $|gradu|$ ga teng.

b) grad$u$ vektorga perpendikulyar vektor yo'nalishi bo'yicha hosila, nolga teng

M i s o l: $u = x^3+y^3+z^3$, M(1 :1 :1), grad u (M) ni toping.

Echimi: $gradu(M) = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$

S a v o l l a r:

1.To'la orttirma va to'la differentsial nima?
2.Gradient nima?
3.Yo'nalish bo'yicha hosila nima?

8.4. IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKTsIYaNING EKSTREMUMI. ShARTLI EKSTREMUM.

Tayanch iboralar: Funktsiyaning maksimumi, funktsiyaning minimumi, ekstremum, ekstremumning zaruriy sharti, ekstremumning etarli sharti, shartli ekstremum.

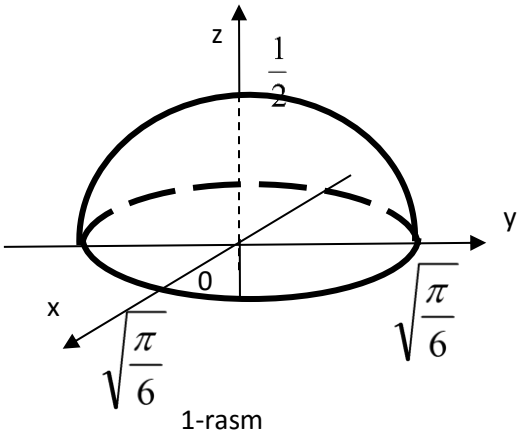
Reja:

1. Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning ekstremumi.
2. Shartli ekstremum.

Adabiyotlar:

[**1**]. VII bob, §14-19 [**2**]. XIIbob, §16-18

TA'RIF: Agar $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaga etarli darajada yaqin bo'lib, undan farqli hamma (x,y) nuqtalar uchun $f(x_0, y_0) > f(x,y)$ bo'lsa, $Z=f(x,y)$ funktsiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada maksimumga ega deymiz.



1-rasm

Xuddi shunga o'xshash, agar $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan boshqa va unga etarli yaqin turgan hamma (x,y) nuqtalar uchun $f(x_0, y_0) < f(x,y)$ bo'lsa, $Z=f(x,y)$ funktsiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada minimumga ega deymiz.

Funktsiyaning maksimumi va minimumi funktsiyaning ekstremumlari deyiladi.

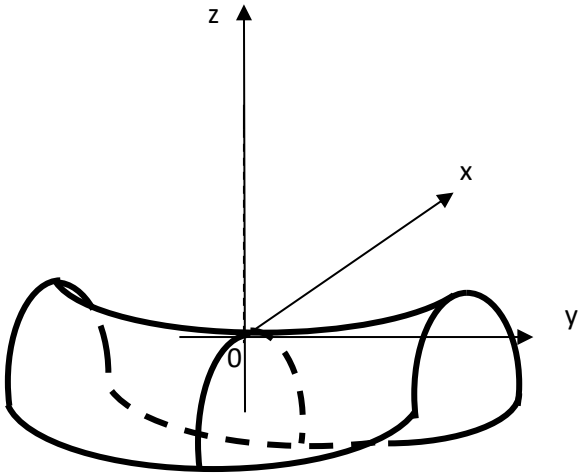
Misol: 1-rasmdan ma'lumki funktsiya, $Z = \frac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2)$, $x=0$, $y=0$ nuqtada maksimumga erishadi,

$$\max f(x,y) = f(0;0) = \frac{1}{2}$$

Funktsiya ekstrimumining zaruriy shartini beruvchi quyidagi teoremani isbotsiz qabo'l qilamiz.

TEOREMA: Agar funktsiya (x,y)da ekstremumga erishsa, y holda Z ning xar bir birinchi tartibli xususiy hosilasi argumentlarininng shu qiymatlarida yo nolga teng bo'ladi, yo mavjud bo'lmaydi.

Bu teorema funktsiyaning ekstremal qiymatlari xaqidagi masalani tekshirish uchun etarli bo'lmasa ham, lekin maksimum yoki minimumning mavjudligiga oldindan ishonchimiz bo'lgan hollarda bu qiymatlarni topishga imkon beradi.Aks holda qo'shimcha tekshirish zarur bo'ladi.



2 – rasm

M i s o l : $Z=x^2-y^2$ funktsiyaning hosilalari $\frac{\partial z}{\partial x}=2x, \frac{\partial z}{\partial y}=-2y$ bo'lib, ular (0:0) nuqtada nolga aylanadi. Lekin bu funktsiya shu qiymatlarda (2-rasmga qarang) maksimumga ham, minimumga ham erishmaydi. $Z=f(x,y)$ funktsiyaning $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ (yoki mavjud bo'lmagan) va $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ (yoki mavjud bo'lmagan) nuqtalari uning kritik nuqtalari deb ataladi.

Agar funktsiya biror nuqtada ekstremumga erishsa, bu hol faqat kritik nuqtalardagina yuz berishi mumkin. (2-rasm)

TEOREMA: (Ekstremumning etarli shartlari). $Z=f(x,y)$ funktsiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtani uz ichiga olgan biror sohada ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsin: undan tashqari $M_0(x_0, y_0)$ nuqta $f(x,y)$ funktsiyaning kritik nuqtasi, ya'ni $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}=0, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}=0$ bo'lsin.U vaqtda (x_0, y_0) nuqtada:

a) agar $$\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}-(\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x\partial y})^2>0$$

va $\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}<0$ bo'lsa, $f(x,y)$ funktsiya M_0 nuqtada maksimumga ega bo'ladi;

b) agar $$\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}-(\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x\partial y})^2>0$$

va $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}>0$ bo'lsa, $f(x,y)$ funktsiya minimumga ega bo'ladi;

v) agar $$\frac{\partial^2 f(M_0)\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2\partial y^2}-(\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x\partial y})^2<0$$

bo'lsa, $f(x,y)$ funktsiya maksimumga ham, minimumga ham ega bo'lmaydi;

g) agar $$\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}-(\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x\partial y})^2=0$$

bo'lsa, $f(x,y)$ funktsiya ekstrimumga ega bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin.Bu holda tekshirishni davom ettirish kerak.

Teoremani isbotsiz qabo'l qilamiz va uning qo'llanilishiga misol qaraymiz.

M i s o l: $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ funktsiyani ekstremumga tekshiring.

Echimi:

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=3x^2-3y,\ \frac{\partial Z}{\partial y}=3y^2-3x,$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Z}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial Z}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x^2-3y=0\\ 3y^2-3x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P_0(0;0)\\ P_1(1;1)\end{cases}$$

P_0 (0,0) kritik nuqtani tekshiramiz

$$\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x^2}=6x\Big/\begin{matrix}=0\\ x=0\end{matrix},\ \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial y^2}=6y\Big/\begin{matrix}=0\\ y=0\end{matrix},$$

$$\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x\partial y}=-3,$$

demak

$$\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x\partial y}\right)^2=-9<0,$$

funktsiya P_0 (0,0) nuqtada ekstrimumga ega emas, ya'ni teoremadagi v) holi,
2) P_1 (I ,I) kritik nuqtani tekshiramiz

$$\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x^2}=6,\ \frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial y^2}=6,\ \frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x\partial y}=-3,$$

Demak,

$$\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x\partial y}\right)^2=27>0$$

$\dfrac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x^2}>0$ teoremaning b) holiga asosan funktsiya R(I,I) nuqtada minimumga erishadi, min$f$ (x,y) = f (1;1)=-1

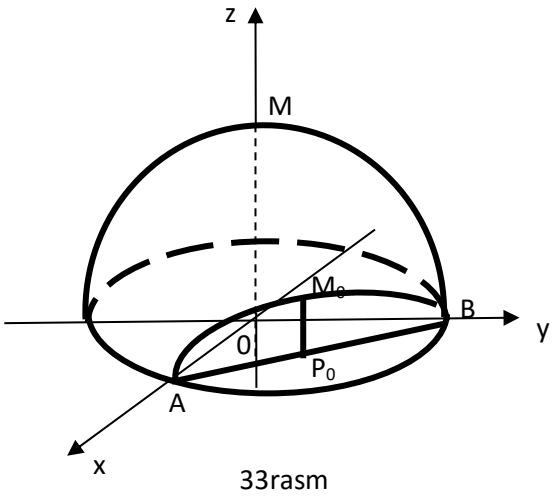
2.Shartli ekstremum.

TA'RIF: Z = f (x,y) funktsiyaning shartli ekstremumi deb, bu funktsiyaning x va y o'zgaruvchilarini bog'lash deb ataluvchi $\varphi(x,y)=0$ tenglama bilan bog'langanlik shartida erishadigan ekstremumga aytiladi.

Agar Z=f (x,y) funktsiya va OXУ tekislikda $\varphi(x,y)=0$ tenglama bilan L chiziq berilgan bo'lsa, y holda Z=$f(x,y)$ funktsiyaning L chiziqning $P_0(x_0,y_0)$ nuqtaga yaqin nuqtalardagi qiymatlariga nisbatan eng katta yoki eng kichik bo'ladigan L chiziqqa tegishli $P_0(x_0,y_0)$ nuqta shartli ekstremum bo'lishi mumkin va aksincha, shartli ekstremum shartsiz ekstremum bo'lmasligi mumkin.

M i s o l: $Z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ funktsiya grafigi yukori yarim sfera bo'ladi, ravshanki, bu funktsiya koordinata boshida maksimumga ega va unga yarim sferada M(0;0;1) nuqta mos keladi. L chiziq A(1;0) va V(0;1) nuqtalardan utuvchi to'g'ri chiziq bo'lsin, uning tenglamasi: x+y-1=0. Geometrik nuqtai nazardan, bu chiziqning

nuqtalari uchun Z ning eng katta qiymat A va V orasidagi $P_0(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ nuqtada erishadi



33rasm

Bu nuqtaga esa sirtda M_0 nuqta mos keladi.

Amalda shartli ekkstremum nuqtalarini topish uchun oldin boglash tenglamasida *y* va *x* orkali oshkor ifodalash kerak: *y*=*y*(*x*) keyin Z=*f* (*x*,*y*) funktsiyaning ifodasida urniga *y*(*x*) funktsiyani kuyib bir o'zgaruvchili funktsiya xosil kilinadi:

Z=*f* (*x*,*y*(*x*))

keyin funktsiya ekstremumga tekshiriladi. Karalayotgan misolda *y*=1-*x*, $Z=\sqrt{2x-2x^2}$ .Bu funktsiya $x=\frac{1}{2}$ da maksimumga erishadi. Boglash tenglamasidan $y=\frac{1}{2}$ ekanligi kelib chikadi. $P_0(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ shartli ekstremum nuqtasi aniqlandi.

S a v o l l a r.

1. Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning maksimumi va minimumiga ta'rif bering.
2. Ekstremumning zaruriy va etarli shartlarini keltiring.
3. Shartli ekstremum nima?

IX BOB. KARALI VA EGRI CHIZIQLI INTEGRALL .

9.1. IKKI KARRALI INTEGRAL TA'RIFI VA XOSSALARI.

Tayanch iboralar: Integral yig'indi, ikki karrali integral, ikki karrali integral geometrik ma'nosi, o'rta qiymat haqidagi teorema.

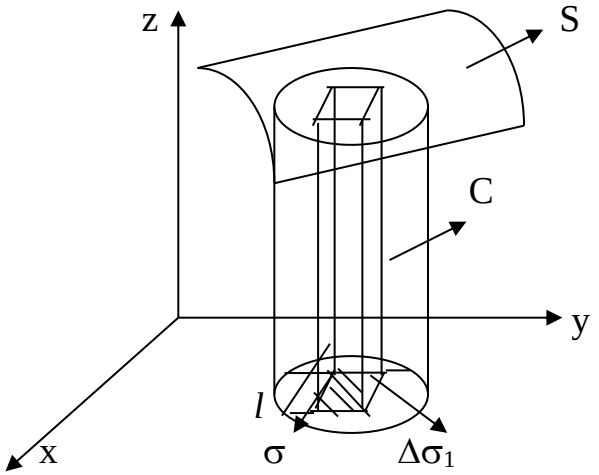
Reja:

1. Yopiq kontur bilan chegaralangan soxa.
2. Tsilindrik sirt.
3. Integral yig'indi.
4. Ikki karrali integral ta'rifi.
5. Geometrik ma'nosi.
6. Ikki karrali integralning mavjudlik teoremasi.
7. Ikki karrali integralning xossalari.
8. O'rta qiymat haqidagi teorema.

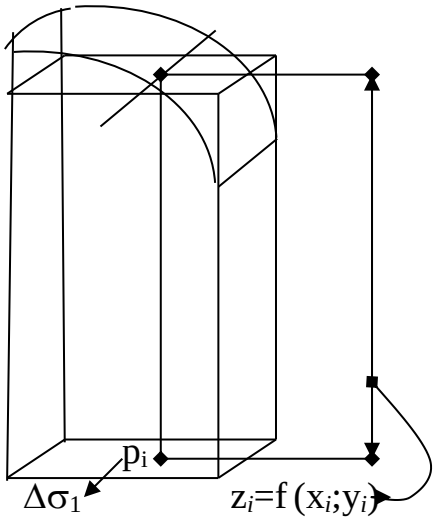
Adabiyotlar:

1. Shneyder V.E. Oliy matematika qisqa kursi. 47-52 betlar.
2. Yo.U. Soatov. "Oliy matematika" II qism. Toshkent. O'qituvchi nashriyoti 1994 y. 10 bob, § 1, 88-94 betlar.

OXY tekislikda l yopiq kontur bilan chegaralangan σ soxa berilgan bo'lsin. σ soxa, yunaltiruvchisi l va yasovchilari Oz o'qqa parallelbo'lgan C tsilindrik sirt, hamda, tenglamasi $z=f(x;y)$ bo'lgan S sirtning bo'lagi bilan chegaralangan jismni qaraymiz. (1-rasm)



1-rasm



2-rasm

Bunda $z=f(x;y)$ funktsiya σ sohada aniqlangan, uzluksiz va manfiy emas deb faraz qilamiz. Bunday jismni silindrik jism deb ataymiz. Shu silindrik jismning hajmini hisoblash haqidagi masalani ko'raylik.

Buning uchun σ soxani n ta kichik $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$ yuzalarga bo'lamiz, bunda $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i$. Har bir $\Delta\sigma_i$ kichik yuzlarning ustida S sirtning $\Delta\sigma_i$ yuzga proektsiyalanuvchi bo'lagi bilan chegaralangan kichik silindrik sirt (ustuncha) yasaymiz. Shu bilan σ asosli silindrik jism asoslari $\Delta\sigma_i$ bo'lgan n ta ustunchaga ajraladi. Asosi $\Delta\sigma_i$ bo'lgan ustuncha hajmini Δv_i bilan belgilaymiz. U holda silindrik jismning v hajmi bu ustunchalar xajmlarining yig'indisiga teng: $v = \sum_{i=1}^{n} v_i$. Endi $\Delta\sigma_i$ asosli silindrni qaraymiz. Silindrning balandligi sifatida S sirtning $\Delta\sigma_i$ yuzaning ixtiyoriy $p_i(x_i;y_i)$ nuqtasidagi z_i applikatasini olamiz. Bu silindrchaning hajmi $\Delta\sigma_i$ asos yo'zini $z_i=f(x_i;y_i)$ balandlikka ko'paytmasiga teng bo'lib, uni $\Delta\sigma_i$ asosli ustuncha Δv_i hajmining taqribiy qiymati sifatida olamiz.

$\Delta v_i \approx f(x_i;y_i)\Delta\sigma_i$

Barcha shunday xajmlarning yig'indisini olsak, silindrik jism v hajmining taqribiy qiymatini hosil qilamiz:

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta\sigma_i$$

v xajmning aniq qiymati sifatida $\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta\sigma_i$ yig'indining $\Delta\sigma_i$ kichik yuzachalar soni cheksiz ortadi, har bir yuzacha esa nuqtaga aylanadi degan shartdagi limitini olamiz. (2-rasm).

$$v = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta\sigma_i \qquad (1)$$

Shunday qilib, silindrik jismning v hajmini hisoblash haqidagi masala biror limitni topishga keltiriladi. (1) yig'indi to'zish Oxy tekislikdagi biror σ soxa va unda berilgan uzluksiz funktsiya bilan bog'liq buldi. Fizika va texnikaning kupchilik masalalari ana shunday yig'indilarning limitini topishga keltiriladi. Shu sababli bunday yig'indilarning limitlarini umumiy holda u yoki bu konkret fizik masalaga boglamasdan urganish maksadga muvofikdir.

OXY tekislikning chekli nuqtaga ega σ soxasida $z=z(p)=f(x;y)$ funktsiya berilgan bo'lsin

Ushbu ishlarni bajaramiz:

1. σ soxani n ta $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_1, \ldots, \Delta\sigma_n$, kichik yuzachalarga shunday bo'lamizki, bu kichik yuzchalar yuzlarning yig'indisi butun σ soxaning yo'ziga teng bo'lsin :

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i$$

2. Har bir $\Delta\sigma_i$, kichik yuzchada ixtiyoriy $p_i(x_i;y_i)$ nuqtani tanlaymiz. $z=f(p)=f(x;y)$ funktsiyaning p_i nuqtadagi qiymatini $\Delta\sigma_i$ ga ko'paytiramiz:

$$f(p_i)\Delta\sigma_i = f(x_i;y_i)\,\Delta\sigma_i$$

3. Barcha shunday ko'paytmalar yig'indisini tuzamiz :

$$\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i \qquad (2)$$

(2) yig'indi ikki o'zgaruvchining $z=z(p)=f(x;y)$ funktsiyasi uchun tuzilgan integral yig'indi deb ataladi.

4. (2) integral yig'indining kichik yuzchalar soni n cheksiz ortganda va bu yuzchalarning nuqtaga tortilgandagi limitini topamiz. Agar bu limit mavjud va u σ soxani $\Delta\sigma_i$ kichik yuzchalarga bulish usuliga ham, ularning har birida $p_i(x_i;y_i)$ nuqtaning tanlanishiga ham bog'liq bo'lmasa, u holda bu limit $z=z(p)=f(x;y)$ funktsiyadan σ soxa bo'yicha olingan ikki karrali integral deb ataladi va

$$\iint_{\sigma} f(p)d\sigma \quad \text{yoki} \quad \iint_{\sigma} f(x;y)d\sigma \quad \text{kabi belgilanadi.}$$

Shunday qilib

$$\iint_{\sigma} f(x;y)d\sigma = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x;y)\Delta\sigma$$

Bu erda $n\to\infty$ da $\Delta\sigma_i$ kichik yuzchalarning har biri nuqtaga tortiladi deb tushuniladi; σ - integrallash soxasi, $f(x;y)$ - integral ostidagi funktsiya, $f(x;y)d\sigma$ - integral ostidagi ifoda, $d\sigma$ - yuza elementi deyiladi.

Shunday qilib biz, ushbu ta'rifga keldik :

<u>T A ' R I F :</u> $f(x;y)$ funktsiyadan σ soxa bo'yicha olingan *ikki karrali integral* deb, (2) integral yig'indining $n\to\infty$ bo'lgandagi chekli limitiga aytiladi. Bunda bu limitning qiymati $\Delta\sigma_i$ kichik yuzchalarning har birida p_i nuqtalarning tanlanishiga bog'liq emas va $n\to\infty$ bo'lganda $\max \Delta\sigma_i\to 0$ deb faraz kilinadi.

Endi xajm haqidagi masalaga kaytsak, quyidagilarni ko'ramiz: Silindrik jismning hajmi son jixatdan $z=f(x;y)\geq 0$ aplikatadan σ soxa bo'yicha olingan ikki karrali integralga teng:

$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} f(x;y)d\sigma$$

Oxirgi muloxazaga *ikki karrali integralning geometrik ma'nosi* ham deyiladi.

Zichligi $\gamma=\gamma(x;y)$ bo'lgan yassi plastinka σ ning massasi zichlikdan olingan ikki karrali integralga teng?

$$m = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\gamma(x_i,y_i)\Delta\sigma_i = \iint_{\sigma}\gamma(x;y)d\sigma.$$

Bu *ikki karrali integralning mexaniq ma'nosini* ifodalaydi.

Endi ikki karrali integralning mavjudlik teoremasini ko'ramiz.

<u>TEOREMA.</u> σ yuzga ega bo'lgan, chegaralangan yopiq sohada uzluksiz har qanday $z=f(x;y)$ funktsiya uchun ikki karrali integral mavjud.

Bu teoremaning isbotiga tuxtalib utirmaymiz.

Ikki karrali integral xossalari.

1. O'zgarmas kupaytuvchini ikki karrali integral belgisidan tashqariga chikarish mumkin.
$$\iint_{\sigma} kf(x;y)d\sigma = k\iint_{\sigma} f(x;y)d\sigma$$
2. Bir necha funktsiya yig'indisidan olingan ikki karrali integral kushiluvchi funktsiyalardan olingan ikki karrali integrallar yig'indisiga teng.
$$\iint_{\sigma}[f(x;y)+g(x;y)]d\sigma = \iint_{\sigma} f(x;y)d\sigma + \iint_{\sigma} g(x;y)d\sigma$$
3. Agar σ integrallash soxasida f(x;y)≥0 uzluksiz funktsiya bo'lsa, u holda
$$\iint_{\sigma} f(x;y)d\sigma \geq 0$$
bo'ladi.
4. Agar integrallash soxasida f(x;y) va g(x;y) funktsiyalar f(x;y)≥ g(x;y) tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda
$$\iint_{\sigma} f(x;y)d\sigma \geq \iint_{\sigma} f(x;y)d\sigma$$
bo'ladi.
5. Agar integrallash soxasi bir necha σ_1, σ_2, σ_3,… σ_n bo'laklarga bulingan bo'lsa, u holda
$$\iint_{\sigma} f(x;y)d\sigma = \iint_{\sigma_1} f(x;y)d\sigma_1 + \iint_{\sigma_2} f(x;y)d\sigma_2 + ... + \iint_{\sigma_n} f(x;y)d\sigma_n$$

bo'ladi. Bu *integralning additivlik xossasi* deyiladi.

O'rta qiymat haqidagi teorema.

f(x;y) funktsiya yopiq chegaralangan σ sohada uzluksiz bo'lsa, u holda σ sohada shunday $p_0(x_0,y_0)$ nuqta topiladiki, unda
$$\iint_{\sigma} f(x;y)d\sigma = f(x_0;y_0)S(\sigma) \qquad (3)$$

Bunda $S(\sigma)$ orqali σ soxaning yuzasi belgilangan.

Agar σ sohada f(x;y)≥0 bo'lsa, u holda bu teorema bunday geometrik mazmunga ega :

Tsilindrik jismning hajmi asosi shu silindrik jismning asosi σ dan iborat va balandligi funktsiyaning σ soxaning biror $p_0(x_0,y_0)$ nuqtasidagi qiymatiga teng bo'lgan silindrning hajmiga teng.

Funktsiyaning (3) tenglik bilan aniqlanadigan $f(x_0,y_0)$ qiymati f(x;y) *funktsiyaning σ sohadagi o'rta qiymati* deb ataladi.

Takrorlash uchun savollar.

1. Tsilindrik jismga ta'rif bering.
2. Integral yig’indi ta'rifini ayting.
3. Ikki karrali integral ta'rifini ayting.
4. Ikki karrali integralning geometrik ma'nosi nima ?
5. Ikki karrali integralning mexaniq ma'nosi nima ?
6. Ikki karrali integralning mavjudligi haqidagi teoremani tushuntiring.
7. O’rta qiymat haqidagi teoremani ayting.
8. Ikki karrali integral xossalarini ayting.

9.2. IKKI KARRALI INTEGRALNI HISOBLASH.

Tayanch iboralar: Ikki karrali integralni dekart koordinatalarida hisoblash, ikki karrali integrallarni kutb koordinatalarida hisoblash.

Reja:

1. To'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasi.
2. Muntazam soxa.
3. Nomuntazam sohada ikki karrali integral.
4. Ikki karrali integralni Dekart koordinatalar sistemasida hisoblash.
5. Ikki karrali integralda o'zgaruvchilarni almashtirish.
6. Yakobian.
7. Ikki karrali integralni kutb koordinatalar sistemasida hisoblash.

Adabiyotlar:

1. Shneyder V.E. Oliy matematika qisqa kursi. 53-64 betlar.
2. Yo.U. Soatov. "Oliy matematika" II qism. Toshkent. O'qituvchi nashriyoti 1994 y. 10 bob, § 3, 98-105 betlar.

Ikki karrali integralni yig'indining limiti sifatida hisoblash aniq integral bo'lgan holdagi kabi katta qiyinchiliklar bilan bog'liq. Ana shundan kutilish maqsadida, ikki karrali integralni hisoblashni ikkita aniq integralni ketma-ket hisoblashga keltiriladi. Bu qanday bajarilishini integral ostidagi funktsiya f(x;y)≥0 bo'lgan hol bilan cheklanamiz. Bu farazimiz ikki karrali integralni silindrik jismning hajmi sifatida qarashimizga imkon beradi.

M a s a la : f (x;y) uzluksiz funktsiyadan olingan $\iint\limits_{\sigma} f(x;y)d\sigma$ ikki karrali integral xisoblansin.

E ch i sh: 1) σ integrallash soxasi ikkita $y=\varphi_1(x)$ va $y=\varphi_2(x)$ egri chiziq hamda ikkita $x=a$, $x=в$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan, shu bilan birga x ning a va $в$ orasida yotadigan barcha qiymatlari uchun $\varphi_2(x)\geq \varphi_1(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. (1-rasm).

OX o'qdagi (x;0) nuqta OY o'qqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq soxani chegaralab turgan egri chiziqlar bilan c_1 va c_2 nuqtalarda uchrashadi. c_1 nuqtani kirish nuqtasi, c_2 nuqtani esa chiqish nuqtasi deb ataymiz. Ularning ordinatalarini mos ravishda $y_{кир.}$ va $y_{чик.}$ bilan belgilaymiz. Kirish nuqtasining ordinatasi $y_{кир.}=\varphi_1(x)$ va chiqish nuqtasining ordinatasi $y_{чик.}= \varphi_2(x)$ bo'ladi. Ma'lumki, $\iint\limits_{\sigma} f(x;y)d\sigma$ ikki karrali integral son jixatdan z=f(x;y) sirtning σ yuzchaga proektsiyalanadigan bo'lagi bilan chegaralangan silindrik sirtning V hajmiga teng.

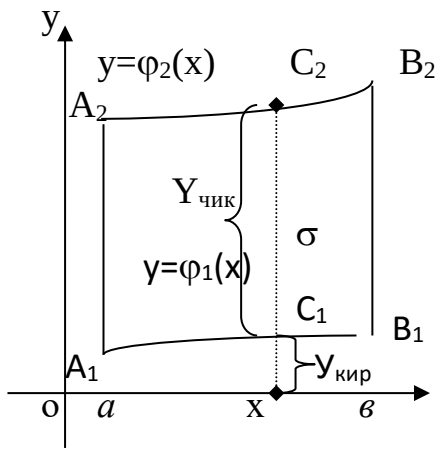
$$V=\iint\limits_{\sigma} f(x;y)d\sigma \qquad (1)$$

Endi silindrik jismning V hajmini boshqacha yo'l bilan ko'ndalang kesimlar usuli yordamida hisoblaymiz.

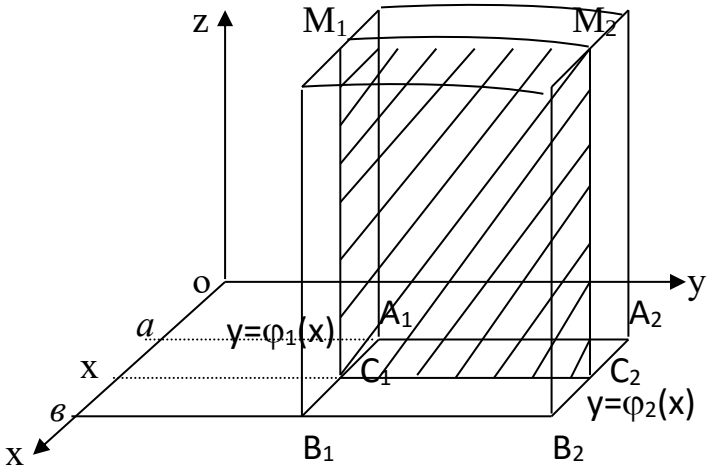
Biz bilamizki, agar jismning OX o'qqa perpendikulyar va x abstsissasi nuqta orqali o'tuvchi tekislik bilan kesimi S(x) yuzga ega bo'lsa, u holda V hajmi

$$V=\int_a^b S(x)dx \qquad (2)$$

Formula bilan ifodalanadi. Bu formulani silindrik jism hajmini hisoblashga tatbiq etamiz. (2-rasm).



1-rasm



2-rasm

(x;0;0) nuqta orqali OX o'qqa perpendikulyar tekislik utkazsak, kesimda $c_1м_1$ $м_2c_2$ egri chiziqli trapetsiyani hosil qilamiz. $м_1$ $м_2$ chiziqning z=f(x;y) applikatasi *x* o'zgarmas bo'lganda faqat *y* ning funktsiyasi bo'ladi, shu bilan birga, *y* argument $y_{кир.}=\varphi_1(x)$ dan $y_{чик.}=\varphi_2(x)$ gacha chegaralarda o'zgaradi. $c_1м_1$ $м_2c_2$ trapetsiyaning S(x) yo'zi, ravshanki ushbu aniq integralga teng:

$$S(x)=\int_{y_{кир}}^{y_{чик}} zdy=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy \qquad (3)$$

Shunday qilib, (3) formula silindrik jism ko'ndalang kesimi yo'zini aniqlaydi. Buni (1) tenglamaga qo'yib ushbuni hosil qilamiz:

$$V=\int_a^b S(x)dx=\int_a^b\left\{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy\right\}dx \qquad (4)$$

lekin (1) formulani e'tiborga oladigan bo'lsak,

$$\iint_{\sigma} f(x;y)d\sigma = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy \right\} dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy$$

bo'ladi.

Xullas $\iint_{\sigma} f(x;y)d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy$ (5) ega bo'lamiz.

(5) formulani hisoblashda avval $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy$ xisoblanadi va bunda x o'zgarmas, u o'zgaruvchi sifatida karaladi, natija x ga bog'liq funktsiya bilan tugaydi, keyin esa $\int_a^b S(x)dx$ ni hisoblashga keladi.

Agar σ soxa $x=\varphi_1(y)$, $x=\varphi_2(y)$, $\varphi_2(y)\geq \varphi_1(y)$ hamda y=c, y=d, (c<d) to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan bo'lsa, ushbu tenglik (1-rasm)

$$\iint_{\sigma} f(x;y)d\sigma = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dx$$

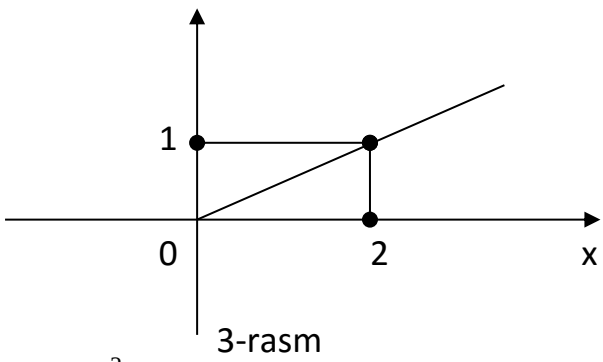
bo'ladi.

Agar σ soxa x=*a* , x=*b* (*a*<*b*) hamda y=c, y=d, (c<d) to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to'g'ri to'rtburchak bo'lsa

$$\iint_{\sigma} f(x;y)d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x;y)dx = \int_c^d dy \int_a^b f(x;y)dx$$

bo'ladi.

Misol. Agar $\iint_{\sigma} \left(x^2+y^2\right)d\sigma$ ikki karrali integralning integrallash soxasi y=0, x=2, $y=\frac{x}{2}$ chiziqlar bilan chegaralangan uchburchak bo'lsa, bu integralni xisoblang. (3-rasm).



3-rasm

Echish. $y_{кир.}=\varphi_1(x)=0$, $y_{чик.}=\varphi_2(x)=\frac{x}{2}$

a=0, *в*=2 bo'ladi.

$$\iint_{\sigma} \left(x^2+y^2\right)d\sigma = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{x}{2}} \left(x^2+y^2\right)dy =$$

$$= \int_0^2 \left\{ x^2 y \cdot \frac{y^3}{3} \Bigg|_0^{\frac{x}{2}} \right\} dx = \int_0^2 \left\{ \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{24} \right\} dx = \frac{x^4}{8} + \frac{x^4}{96} \Bigg|_0^2 = \frac{16}{8} + \frac{16}{96} = \frac{13}{6}$$

Ikki karrali integrallarni kutb koordinatasida hisoblash.

Aniq integralni hisoblashni osonlashtirish usullaridan biri o'zgaruvchini almashtirish usulidir. Ikki karrali integralda yangi o'zgaruvchilarni ana shunday kiritish kupgina hisoblashlarni tezlashtirishga olib keladi. Biz bu erda o'zgaruvchilarni almashtirishning amaliy tatbiqlar uchun eng muxim bo'lgan xususiy holi, chunonchi, x va y dekart koordinatalarini r va φ kutb koordinatalariga almashtirish bilan cheklanamiz. z=f(x;y) uzluksiz funktsiyadan σ soxa bo'yicha olingan $\iint\limits_{\sigma} f(x;y)d\sigma$ ikki karrali integralni hisoblash lozim bo'lsin (1-rasm).

Ikki karrali integral yig'indining limiti ekanini bilamiz:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x;y)d\sigma = \lim_{n\to\infty} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$$

shu bilan birga bu limit σ soxani bo'laklarga bulish usuliga ham, har bir $\Delta\sigma_i$ kichik yuzchada p_i nuqtaning qanday tanlanishiga ham bog'liq emas. σ soxani kutbi koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushuvchi, kutb o'qi esa OX ukdan iborat bo'lgan kutb koordinatalar sistemasida qaraymiz. σ integrallash soxasini kutbdan chikuvchi nurlar va umumiy markazi kutbda bo'lgan aylanalar yordamida $\Delta\sigma_i$ kichik yuzchalarga bo'lamiz. Kutbdan chiqqan uzaro $\Delta\varphi_i$ burchak tashkil kilgan ikkita nur hamda r_i va $r_i+\Delta r_i$ radiusli ikkita aylana bilan chegaralangan $\Delta\sigma_i$ yuzachani karaylik. Bu egri chiziqli to'rtburchakning yo'zini ikkita doiraviy sektor yuzlarining ayirmasi sifatida topamiz (2-rasm).

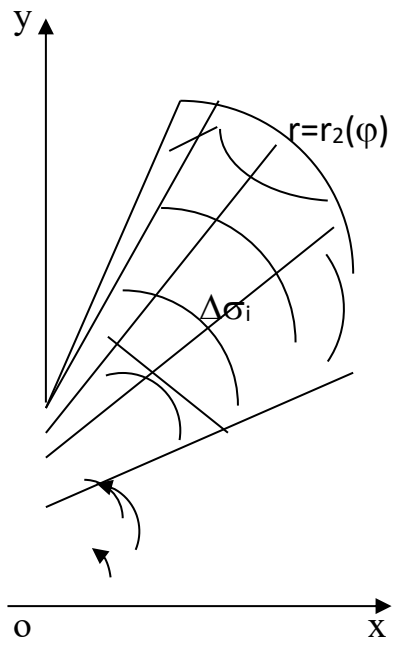
$$\Delta\sigma_i = OM_1M_2 - OM_3M_4 = \frac{1}{2}(r_i + \Delta r_1)^2\Delta\varphi_i - \frac{1}{2}r_i^2\Delta\varphi_i = r_i\Delta r_i\Delta\varphi_i +$$

$$+\frac{1}{2}(\Delta r_1)^2\Delta\varphi_i = (r_i + \frac{\Delta r_1}{2})^2\Delta r_1\Delta\varphi_i$$

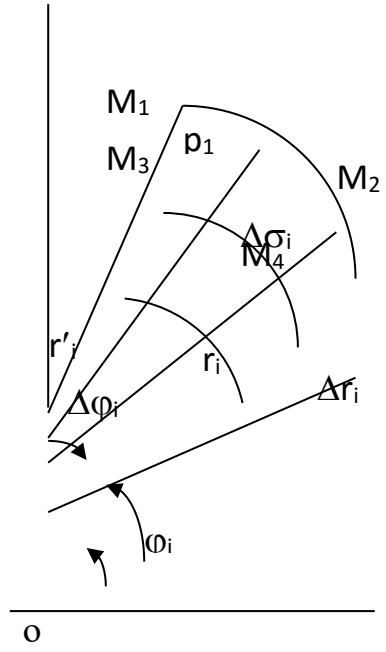
r_i' orqali r_i va $r_i+\Delta r_i$ orasidagi o'rta radiusni belgilaymiz, ya'ni $r_i' = r_i + \frac{\Delta r_i}{2}$. U holda $\Delta\sigma_i = r_i' \cdot \Delta r_i\Delta\varphi_i$. Har bir $\Delta\sigma_i$ kichik yuzchada $p_i(x_i;y_i)$ nuqtani tanlaymiz. Bunda p_i nuqtani r_i' radiusli aylanada yotadigan qilib tanlaymiz. p_i nuqtaning kutb burchagini φ_I bilan belgilaymiz. p_i nuqtaning $(x_i;y_i)$ koordinatalari bilan uning $(r_i'$,$\varphi_i)$ kutb koordinatalari $x_i=r_i'\cos\varphi_i$, $y_i=r_i'\sin\varphi_I$ munosabatlar orqali bog'langanini xisobga olsak, quyidagini hosil qilamiz:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x;y)d\sigma = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x;y)\Delta\sigma_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(r_i'\cos\varphi_i; r_i'\sin\varphi_i)r_i'\cdot r_i\Delta\varphi_i$$

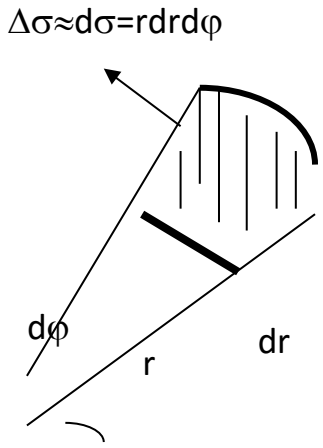
Shuni aytish kerakki, integral yig'indini tuzayotganda σ soxaning chegarasiga yopishgan $\Delta\sigma_i$ yuzchalar kesilgan va ular $r_i'\cdot\Delta r_i\Delta\varphi_i$ dan kichik yuzlarga ega bo'lishi mumkin.



1-rasm



2-rasm



3-rasm

Birok bunday yuzchalarni biz ko'rayotgan shakldagi yuzchalar bilan almashtirganda yo'l kuyiladigan xatoning limitga o'tilganda nolga aylanishini isbotlash mumkin.

Sunggi tenglikning ung tomonida f(r_i cosφ, r_i sinφ) funktsiya uchun r va φ o'zgaruvchilar bo'yicha integral yig'indining limiti turibdi. Shuning uchun

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(r_i'\cos\varphi_i; r_i'\sin\varphi_i)r_i'\cdot r_i\Delta\varphi_i = \iint\limits_{\sigma} f(r\ \cos\varphi; r\ \sin\varphi)rdrd\varphi$$

Shunday qilib ushbu formula o'rinli:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x;y)d\sigma = \iint\limits_{\sigma} f(r\ \cos\varphi; r\ \sin\varphi)rdrd\varphi \qquad (5)$$

dσ=rdrdφ ifoda kutb koordinatlarida yuz elementi deb ataladi. (5) tenglik ikki karrali integralni kutb koordinatlariga almashtirish formulasi deb ataladi (3-rasm).

$\iint\limits_{\sigma} f(r\ \cos\varphi; r\ \sin\varphi) r dr d\varphi$ ikki karrali integralni hisoblash ham takroriy integralni hisoblashga keltiriladi, bunda *x* va *y* o'zgaruvchilar rolini r va φ bajaradi. Buni qanday bajarishni kursatamiz: σ soxa kutbdan α va β (α<β) ostida chiqqan ikkita nur va kutb koordinatlardagi tenglamalari $r=r_1(\varphi)$ va $r=r_2(\varphi)$ ($r_1<r_2$) bo'lgan ikkita egri chiziq bilan chegaralangan bo'lsin. U holda (1-rasm)

$$\iint\limits_{\sigma} f(r\ \cos\varphi; r\ \sin\varphi) r dr d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\ \cos\varphi; r\ \sin\varphi) r dr$$

bo'ladi.

Misol. $\iint\limits_{\sigma} \sqrt{4-x^2-y^2}\, d\sigma$ ikki karrali integralni xisoblang, agar σ- markazi koordinatalar boshida va radiusi 2 ga teng aylana bo'lsa.

Echish. x=cosφ; y=sinφ, 0≤r≤2, 0≤φ≤2π, bo'lgani uchun

$$\iint\limits_{\sigma} \sqrt{4-x^2-y^2}\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{4-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2}\, r dr d\varphi = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{4-r^2}\, r dr d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \sqrt{4-r^2}\, r dr = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 (4-r^2)^{\frac{1}{2}} d(4-r^2) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left.\frac{(4-r^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_0^2 d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\int\limits_0^{2\pi} \left.(4-r^2)^{\frac{3}{2}}\right|_0^2 d\varphi = -\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} (0-8) d\varphi = \frac{8}{3}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{16\pi}{3}$$

Agar shu integralni dekart koordinatalarida xisoblaganimizda kupdan-kup hisoblashlarni amalga oshirishga to'g'ri kelar edi. Demak, σ soxa markazi koordinatalar boshida bo'lgan R radiusli aylana bo'lsa, u holda

$$\iint\limits_{\sigma} f(r\ \cos\varphi; r\ \sin\varphi) r dr d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} f(r\ \cos\varphi; r\ \sin\varphi) r dr$$ bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar :

1. Ikki karrali integralni hisoblashda f(x;y) funktsiyaga qanday shart kuyiladi?
2. Kirish va chiqish nuqtalarini izoxlab bering.
3. Tsilindrik jismning hajmi nimaga teng bo'ladi?
4. Ikki karrali integralning takroriy integrallar ko'rinishiga keltirilganini yozing.
5. σ soxa to'g'ri to'rtburchakdan iborat bo'lsa, ikki karrali integralni qanday takroriy integral ko'rinishida yozish mumkin?

6. Ikki karrali integralning kutb koordinatalar sistemasida ko'rinishi qanday bo'ladi?
7. Agar σ soxa markazi koordinatalar boshida radiusi R ga teng aylana bo'lsa, ikki karrali integral qanday ko'rinishga keltiriladi?

9.3. IKKI KARRALI INTEGRALNING TATBIQLARI.

Tayanch iboralar: Ikki ulchovli integral yordamida yuzani hisoblash, ikki ulchovli integral yordamida xajmni hisoblash, ikki ulchovli integral sirtni hisoblash, ikki ulchovli integral yordamida statik momentini hisoblash, og'irlik markazini hisoblash.

Reja :
1. Ikki karrali integral yordamida yuzani hisoblash.
2. Ikki karrali integral yordmida xajmni hisoblash.
3. Ikki karrali integral yordamida statik momentlar va og'irlik markazini hisoblash.
4. Ikki karrali integral yordamida inertsiya momentini hisoblash.
5. Ikki karrali integral yordamida sirtning yo'zini hisoblash.

Adabiyotlar:

1. Shneyder V.E. Oliy matematika qisqa kursi. 66-73 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral xisob, II tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1974 yil, XIV bob,§4, §7-10, 181-183, 200-208 betlar.

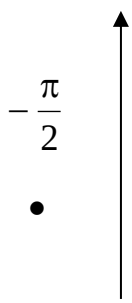
1) Agar f(x;y)=1 bo'lsa, ikki karrali integral

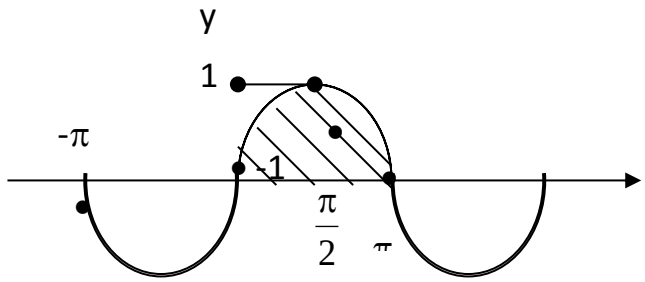
$$\iint_{\sigma} f(x;y)d\sigma = \iint_{\sigma} d\sigma = S_{\sigma}$$

kurinishni oladi va u σ soxaning yo'zini ifodalaydi.

Misol 1. Agar σ- soxa y=sinx, y=0, x=0, x=π chiziqlar bilan chegaralangan bo'lsa, uning yuzini ikki karrali integral yordamida toping.

σ={0≤x≤π, 0≤y≤sinx}, u holda





$$\iint_{\sigma} d\sigma = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} dy =$$

$$= \int_0^{\pi} (y|_0^{\sin x})dx = \int_0^{\pi} \sin x dx =$$

$$= -\cos x|_0^{\pi} = 2$$

$S_{\sigma} = 2$ кv birlik

2) Agar f(x;y)≥0 bo'lsa, $\iint_{\sigma} f(x;y)d\sigma$ ikki karrali integral σ sohada silindrik jism hajmini ifodalaydi.

M i s o l 2. $z=x^2+y^2$, $x+y=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ sirtlar bilan chegaralangan jism hajmini xisoblang.

$$\iint_{\sigma} f(x;y)d\sigma = \iint_{\sigma} \left(x^2 + y^2\right)d\sigma = \begin{bmatrix} x=0 & \mathrm{x}+\mathrm{y}=4 \\ \mathrm{y}=0 & 0 \le \mathrm{x} \le 4 \\ & 0 \le \mathrm{y} \le 4-\mathrm{x} \end{bmatrix} = \int_0^4 dx \int_0^{4-x} (x^2 + y^2)dy =$$

$$\int_0^4 \left\{ x^2 y + \frac{y^3}{3} \right\}\Bigg|_0^{4-x} dx = \int_0^4 \left\{ x^2(4-x) + \frac{(4-x)^3}{3} \right\} dx = \int_0^4 \left\{ 4x^2 - x^3 + \frac{(4-x)^3}{3} \right\} dx =$$

$$= \frac{4}{3}x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{(4-x)^4}{12}\Bigg|_0^4 = \frac{4}{3}(64-0) - \frac{4}{4}(64-0) - \left(\frac{4-4}{12} - \frac{4^4}{12} \right) =$$

$$= \frac{256}{3} - 64 + \frac{64}{3} = \frac{256 - 3\cdot 64 + 64}{3} = \frac{2\cdot 64}{3} = \frac{128}{3} = 42\frac{2}{3} \text{ куб.бирлик } = \mathrm{V}.$$

3) <u>*T A ' R I F :*</u> OXУ tekislikda yotuvchi va m massaga ega bo'lgan P(x;u) moddiy nuqtaning OX o'qqa nisbatan S_x *statik momenti* deb, bu nuqta massasining uning ordinatasiga ko'paytmasiga aytiladi.

Demak, S_x=my. OY o'qqa nisbatan S_y statik moment ham xuddi shu kabi aniqlanadi va S_y=mx kabi topiladi..

Aytaylik XOY tekislikda σ moddiy yuza berilgan bo'lib, uning istalgan nuqtadagi γ sirt zichligi o'zgaruvchan va bu nuqta koordinatalarining funktsiyasi, ya'ni γ = γ(x;y) bo'lsin.

Bu yuzaning S_x va S_y statik momentlarini topish uchun quyidagicha yo'l tutamiz: σ yuzani n ta kichik σ_i (i=1,2,3,…., n) yuzachalarga bo'lamiz. Har bir kichik σ_i yuzachada ixtiyoriy $p_i(x_i ; y_i)$ nuqtani olamiz. Har bir yuzchada zichlikni o'zgarmas va tanlangan p_i nuqtadagi zichlikka teng deb hisoblab, bu yuzchaning Δm_i massasi uchun ushbu taqribiy ifodani hosil qilamiz:

$$\Delta m_i \approx \gamma(x_i ; y_i) \Delta\sigma_i \qquad (1)$$

Har bir $\Delta\sigma_i$ kichik yuzchani Δm_i massasi $p_i(x_i ; y_i)$ nuqta bilan almashtiramiz. Bu nuqtaning o'qlarga nisbatan statik momentlari $\Delta\sigma_i$ yuzchaning

$$\Delta S'_x \approx y_i \Delta m_i \approx y_i \gamma(x_i y_i)\Delta\sigma_i$$

$$\Delta S'_y \approx x_i \Delta m_i \approx x_i \gamma(x_i y_i)\Delta\sigma_i$$

Butun σ yuzchaning statik momenti $\Delta\sigma_i$ kichik yuzchalar statik momentlarining yig'indisiga teng bo'lganligi sababli S_x va S_y uchun ushbu taqribiy tengliklarni hosil qilamiz:

$$S'_x \approx \sum_{i=1}^{n} y_i \gamma(x_i y_i)\Delta\sigma_i \ , \ S'_y \approx \sum_{i=1}^{n} x_i \gamma(x_i y_i)\Delta\sigma_i$$

Statik momentlarning aniq qiymati sifatida mos integral yig'indining barcha kichik yuzchalar nolga intilgandagi limitini qabul qilamiz.

$$\left.\begin{aligned} S_x &\approx \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} y_i \gamma(x_i y_i)\Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} y\gamma(x;y)\Delta\sigma \\ S_y &\approx \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i \gamma(x_i y_i)\Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} x\gamma(x;y)\Delta\sigma \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Oxirgi ikki formula moddiy nuqtaning o'qqa nisbatan statik momentlari formulasi bo'ladi.

2) Mexaniqadan ma'lumki, yassi moddiy sistema og'irlik markazining $\bar{x}$ va $\bar{y}$ koordinatalari

$$\bar{x} = \frac{S_y}{m} \ , \ \bar{y} = \frac{S_x}{m}$$

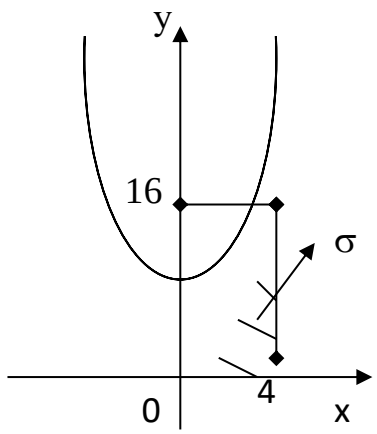
formulalar bilan aniqlanadi yoki boshqacha qilib yozadigan bo'lsak

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{\sigma} x\gamma(x;y)d\sigma}{\iint\limits_{\sigma}\gamma(x;y)d\sigma}\ ,\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_{\sigma} y\gamma(x;y)d\sigma}{\iint\limits_{\sigma}\gamma(x;y)d\sigma}.$$

Yassi plastinka bir jinsli bo'lsa ($\gamma=\gamma_0$)

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{\sigma} xd\sigma}{\iint\limits_{\sigma} d\sigma}=\frac{\iint\limits_{\sigma} xd\sigma}{S_\sigma}\ ,\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_{\sigma} yd\sigma}{\iint\limits_{\sigma} d\sigma}=\frac{\iint\limits_{\sigma} yd\sigma}{S_\sigma}.$$

M i s o l 3. $y=x^2$, $x=4$, $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzaning og'irlik markazini aniqlang.



$$S=\iint\limits_{\sigma} d\sigma=\int_0^4 dx\int_0^{x^2} dy=\int_0^4 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^4=\frac{64}{3}$$

$$\iint\limits_{\sigma} xd\sigma=\int_0^4 dx\int_0^{x^2} xdy=\int_0^4 x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^4=64$$

$$\iint\limits_{\sigma} yd\sigma=\int_0^4 dx\int_0^{x^2} ydy=\int_0^4 \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{x^2} dx=\int_0^4 \frac{x^4}{2}dx=\left.\frac{x^5}{10}\right|_0^4=\frac{4^5}{10}$$

Demak, $\bar{x}=\frac{64}{64}=3$, $\bar{y}=\frac{4^5}{10}:\frac{64}{3}=\frac{4^5}{10}\cdot\frac{3}{64}=\frac{16\cdot 3}{10}=4{,}8.$ $M(3;4{,}8)$ nuqta og'irlik markazi bular ekan.

4) Inertsiya momenti. m massali moddiy nuqtaning o'qqa nisbatan *inertsiya momenti* deb, bu nuqtaning massasini undan o'qqacha bo'lgan masofaning kvadratiga ko'paytmasiga aytiladi.

Moddiy nuqtalar sistemasining inertsiya momenti deb bu nuqtalarning inertsiya momentlari yig'indisiga aytiladi.

Endi σ yassi moddiy yuzcha berilgan bo'lib, uning γ zichligi koordinatalarining berilgan funktsiyasi bo'lsin. $\gamma=\gamma(x;y)$. Bu yuzchaning Ox va Oy o'qlarga nisbatan inertsiya momentlarini topamiz, dσ kichik yuzchani ajratib, uning koordinata o'qlariga nisbatan inertsiya momentlari elementlarini topamiz:

$$dI_x = y^2 dm = y^2\gamma(x;y)\Delta\sigma\,,\ dI_y = x^2 dm = x^2\gamma(x;y)\Delta\sigma$$

dI_x ва dI_y dan σ yuzcha bo'yicha ikki karrali integral olib izlanayotgan inertsiya momentlarini topamiz.

$$dI_x = y^2 dm = y^2\gamma(x;y)\Delta\sigma\,,\ dI_y = x^2 dm = x^2\gamma(x;y)\Delta\sigma$$

$$I_x = \iint\limits_{\sigma} y^2\gamma(x;y)\Delta\sigma\,,\ dI_y = \iint\limits_{\sigma} x^2\gamma(x;y)\Delta\sigma$$

M i s o l 4. 3-misoldagi bir jinsli yuzchaning zichligi γ=1 deb hisoblab uning Ox va Oy o'qqa nisbatan inertsiya momentlarini toping.

Echish.

$$I_x = \iint\limits_{\sigma} y^2\gamma(x;y)\Delta\sigma = \int_0^4 dx\int_0^{x^2} y^2 dy = \frac{1}{3}\int_0^4 y^3\Big|_0^{x^2} dx = \frac{1}{3}\int_0^4 x^6 dx = \frac{x^7}{21}\Bigg|_0^4 = \frac{4^7}{21}$$

$$I_y = \iint\limits_{\sigma} x^2\gamma(x;y)\Delta\sigma = \int_0^4 dx\int_0^{x^2} x^2 dy = \frac{1}{3}\int_0^4 x^2 y\Big|_0^{x^2} dx = \int_0^4 x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Bigg|_0^4 = \frac{4^5}{5}$$

Demak, $I_x = \dfrac{4^7}{21}$, $I_y = \dfrac{4^5}{5}$.

5) Sirtning yo'zi. yo'zi Ω bo'lgan yassi figuraning biror tekislikka proektsiyasining yo'zi σ bo'lsin, u holda

$$\sigma = \Omega\cdot\cos\varphi$$

bu erda φ - proektsiya tekisligi va figura tekisligi orasidagi burchak.

Endi z= φ(x;y) tenglama bilan berilgan sirtning s yo'zini hisoblashga utamiz. Uni keltirib chikarib utirmaymiz. (Kizikuvchilar uchun V.E. Shneyder. «Oliy matematika» qisqa kursi, 68-71 bet).

$$S = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + \left(\varphi'_x(x;y)\right)^2 + 1 + \left(\varphi'_y(x;y)\right)^2}\, d\sigma$$ bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar :

1. Ikki karrali integral yordamida egri chiziqlar bilan chegaralangan yuza qanday xisoblanadi ?
2. Egri chiziqlar bilan chegaralangan figura hajmi qanday xisoblanadi ?
3. Statik momentga ta'rif bering.
4. Og’irlik markazini topish formulalarini yozing.
5. Inertsiya momentiga ta'rif bering.
6. Jism sirtining yo’zi qanday xisoblanadi?
7. Bir jinsli yupka plastinkaga ta'rif bering.

9.4. UCH KARRALI INTEGRAL VA UNING XOSSALARI. UCH KARRALI INTEGRALNI HISOBLASH.

Tayanch iboralar: Integral yig'indi, uch karrali integral, uch karrali integralning mavjudlik teoremasi, xossalari, o'rta qiymat haqidagi teorema, uch karrali integralni dekart koordinatalarida hisoblash.

Reja :

1. Massa haqidagi masala.
2. Integral yig'indi.
3. Uch karrali integral ta'rifi.
4. Uch karrali integralning mavjudlik teoremasi.
5. Uch karrali integral xossalari.
6. Uch karrali integralni Dekart koordinatalarida hisoblash.

Adabiyotlar:

1. Shneyder V.E. Oliy matematika qisqa kursi. 73-78 betlar.
2. Yo.U. Soatov. "Oliy matematika" II qism. Toshkent. O'qituvchi nashriyoti 1994 y. 10 bob, § 2-5, 94-116 betlar.

Fazoda hajmi V ga teng jism berilgan bo'lsin. Bu jismning har bir P nuqtasida u=f (p)=f (x;y;z) funktsiya aniqlangan bo'lsin. Endi ushbu ishlarni bajaramiz.

1. Jismni n ta ΔV_1 , ΔV_1 ,…ΔV_n kichik jismlarga bo'lamiz, bunda $\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = V$.

2. ΔV_i kichik jismlarning har birida ixtiyoriy $p_i(x_i, y_i, z_i)$ nuqtani tanlaymiz. u=f(p) funktsiyaning nuqtadagi qiymatini shu p_i nuqta tegishli bo'lgan kichik jismning ΔV_i hajmiga ko'paytiramiz:

$$f(p_i)=f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i$$

3. Barcha bunday ko'paytmalarning yig'indisini tuzamiz.

$$\sum_{i=1}^{n} f(p_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i)\Delta V_i \qquad (1)$$

4. (1) integral yig'indining ΔV_i kichik jismlar soni n ning cheksiz ortgandagi va ularning har biri nuqtaga tortilgandagi limitini qaraymiz.

Agar bu limit mavjud va u V xajmni ΔV_i kichik jismlarga bulish usuliga ham, ularning har birida $p_i(x_i, y_i, z_i)$ nuqtalarning tanlanishiga ham bog'liq bo'lmasa, u holda bu limitni u=f(p)=f(x;y;z) funktsiyadan V soxa bo'yicha olingan uch karrali integral deb ataladi va bunday belgilanadi :

$$\iiint_V f(p)dV = \iiint_V f(x;y;z)dV$$

Shunday qilib,

$$\iiint_V f(p)dV = \iiint_V f(x;y;z)dV = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i; z_i)\Delta V_i \qquad (2)$$

deb yozish mumkin bo'ladi.

V jismning m massasi γ=γ(x;y;z) zichlikdan olingan uch karrali integralga teng:

$$m = \iiint_V \gamma(x;y;z)dV$$

Uch karrali integralning mavjudlik teoremasi.

TEOREMA. Fazoning V xajmli chegaralangan yopiq soxasida uzluksiz bo'lgan har qanday u=f(x;y;z) funktsiya uchun uch karrali integral mavjud.

Uch karrali integral xossalari.

1. O'zgarmas kupaytuvchi uch karrali integral ostidan tashqariga chiqishi mumkin, ya'ni

$$\iiint_V kf(x;y;z)dV = k\iiint_V f(x;y;z)dV$$

2. Bir necha funktsiyalar yig'indisidan olingan uch karrali integral kushiluvchilardan olingan uch karrali integrallar yig'indisiga teng, ya'ni

$$\iiint_V [f_1(x;y;z) + f_2(x;y;z)]dV = \iiint_V f_1(x;y;z)dV + \iiint_V f_2(x;y;z)dV$$

3. Agar integrallash soxasida f(x;y;z)≥0 bo'lsa, u holda

$$\iiint_V f(x;y;z)dV \geq 0$$

bo'ladi.

4. Agar integrallash soxasida f(x;y;z)≥φ(x;y;z) bo'lsa, u holda

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dV \geq \iiint\limits_V \varphi(x;y;z)dV$$

bo'ladi.

5. <u>Additivlik xossasi</u>.

Agar V integrallash soxasi k ta V_1, V_2, V_3,…, V_k bo'lakka bulingan bo'lsa, u holda

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dV = \iiint\limits_{V_1} \varphi(x;y;z)dV_1 + \iiint\limits_{V_2} \varphi(x;y;z)dV_2 ,+... + \iiint\limits_{V_n} \varphi(x;y;z)dV_n$$

<u>O'rta qiymat haqidagi teorema.</u>

TEOREMA. Agar f(x;y;z) funktsiya yopiq chegaralangan V sohada uzluksiz bo'lsa, u holda bu sohada shunday $p_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta mavjudki,

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dV = f(x_0;y_0;z_0)V$$

bo'ladi.

Uch karrali integralni hisoblash.

Uch karrali integralni hisoblash uchta aniq integralni ketma-ket hisoblashga keltiriladi. V integrallash soxasi pastdan z=g(x;u) cirt bilan, yuqoridan esa z=h(x;u) sirt bilan chegaralangan jism deb faraz qilamiz. Bu jism OX(tekislikda $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ $(\varphi_1(x)\leq\varphi_2(x))$ egri chiziqlr va $x=a$, $x=в$ $(a<в)$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan σ yuzchaga proektsiyalansin. σ yuzchaning r(x;y;0) nuqtasi orqali Oz o'qqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq pastki zqg(x;u) cirt bilan biror M nuqtada va ustki z=h(x;y) cirt bilan biror N nuqtada uchrashadi. M nuqtani kirish, N nuqtani chiqish nuqtasi deb ataymiz va ularning applikatalarini mos ravishda $z_{кир.}$, $z_{чик.}$ bilan belgilaymiz. (1-rasm). Bunda, agar f(x;y;z) karalayotgan V sohada uzluksiz funktsiya bo'lsa, u holda

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dV = \iint\limits_\sigma \left\{ \int\limits_{z_{кир.}}^{z_{чик.}} f(x;y;z)dz \right\} d\sigma \qquad (1)$$

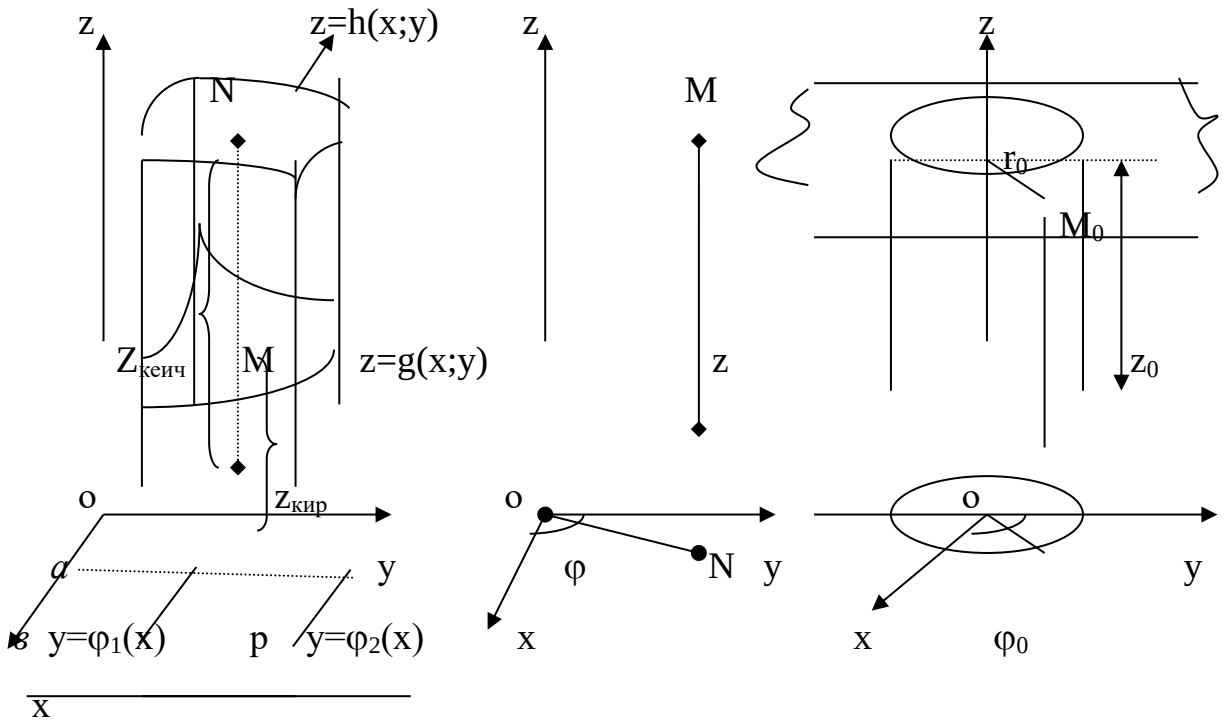
bo'ladi. Oxirgi tenglikni isbotlab utirmaymiz. Uz navbatida yana quyidagini yozish mumkin, ya'ni

$$\iint\limits_{\sigma}\left\{\int\limits_{g(x;y)}^{h(x;y)} f(x;y;z)dz\right\}d\sigma=\int\limits_{a}^{b}dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left\{\int\limits_{g(x;y)}^{h(x;y)} f(x;y;z)dz\right\}dy$$

deb yozish mumkin.

Nixoyat, (1) ifoda

$$\iiint\limits_{V} f(x;y;z)=\int\limits_{a}^{b}dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left\{\int\limits_{g(x;y)}^{h(x;y)} f(x;y;z)dz\right\}dy \text{ deb yoziladi.}$$



1-rasm 2-rasm 3-rasm

M i s o l. Agar V integrallash soxasi x=0, y=0, x+y+z=1 tekisliklar bilan chegaralangan piramida bo'lsa, $\iiint\limits_{V} zdv$ uch karrali integralni xisoblang.

Echish. Piramida proektsiyalanadigan σ yuzcha OXY tekislikda x=0, y=0, z=0, x+y=1 to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan uchburchakdir.

$$\iiint_V z dv = \iint_\sigma d\sigma \int_0^{1-x-y} z dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left\{ \frac{z^2}{2} \Big|_0^{1-x-y} \right\} dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-x-y)^3}{2} \Big|_0^{1-x} dx =$$

$$= -\frac{1}{6} \int_0^1 \left[[1-x-(1-x)]^3 - (1-x)^3 - 0 \right] dx = -\frac{1}{6} \int_0^1 (1-x)^3 dx = -\frac{1}{6} \frac{(1-x)^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{24}$$

$$V = \frac{1}{24} \text{ kub.birlik.}$$

Takrorlash uchun savollar :

1. Integral yig'indi qanday to'ziladi ?
2. Integral yig'indi uchun qanday shart kuyiladi ?
3. Uch karrali integral ta'rifini ayting.
4. Uch karrali integral xossalarini ayting.
5. O'rta qiymat haqidagi teoremani aytib bering.
6. Uch karrali integralning mavjudlik teoremasini ayting.

9.5. UCH KARRALI INTEGRALDA O'ZGARUVCHILARNI ALMASHTIRISH. SILINDRIK VA SFERIK KOORDINATALAR.

Tayanch iboralar: silindrik koordinatalar, sferik koordinatalar, uch karrali integralda o'zgaruvchilarni almashtirish, yakobian.

Reja :

1. Uch karrali integralda o'zgaruvchilarni almashtirish.
2. Koordinatalarni almashtirish formulalari.
3. Yakobian.
4. Tsilindrik koordinatalar.
5. Uch karrali integralni silindrik koordinatalarda hisoblash.
6. Sferik koordinatalar.

Adabiyotlar:

1. Shneyder V.E. Oliy matematika qisqa kursi. 78-80 betlar.
2. Yo.U. Soatov. “Oliy matematika” II qism. Toshkent. O’qituvchi nashriyoti 1994 y. 10 bob, § 2-5, 94-116 betlar.
3. Piskunov N.S. Differentsial va integral xisob, II tom, Toshkent, «O’qituvchi», 1974 yil, XIV bob,§11-15, 208-220 betlar.

Uch karrali integralni silindrik koordinatalarda hisoblash.

Dekart koordinatalari bilan bir qatorda ko’pincha silindrik koordinatalar ham qo’llaniladi. OXY koordinatalar sistemasida M nuqtaning OXY tekislikka proektsiyasi N bo’lsin. M nuqtaning fazodagi vaziyatini OXY tekislikdagi N nuqtaning r va φ kutb koordinatalarini hamda M nuqtaning z applikatasini berish bilan aniqlash mumkin. (2-rasm). Bu uchta r, φ va z son M nuqtaning silindrik koordinatalari deb ataladi. Nuqtaning silindrik koordinatalari o’zining x,y,z dekart koordinatalari bilan ushbu munosabatlar orqali bog’langan.

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ z = z_0 \qquad (3)$$

Dekart koordinatalar sistemasida (x_0, y_0, z_0) koordinatali M_0 nuqta $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ tekisliklarning kesishish nuqtasidan iborat bo’ladi. Uch karrali integralni hisoblash dekart koordinatalaridan silindrik koordinatalarga o’tilganda ko’pincha juda osonlashadi. Shu uchun quyidagi formulani keltiramiz:

$$\iiint\limits_{v} f(x;y;z)dV = \iint\limits_{\sigma} d\sigma \int\limits_{g(x;y)}^{h(x;y)} f(x;y;z)dz = \iint\limits_{\sigma} d\sigma \int\limits_{g(r\cos\varphi;r\sin\varphi)}^{h(r\cos\varphi;r\sin\varphi)} f(r\cos\varphi;r\sin\varphi)dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} rdr \int\limits_{g(r\cos\varphi;r\sin\varphi)}^{h(r\cos\varphi;r\sin\varphi)} f(r\cos\varphi;r\sin\varphi)dz \qquad (4)$$

(4) formula uch karrali integralni silindrik koordinatalarda hisoblash formulasidir.

Misol. Balandligi H va asosining radiusi R bo’lgan to’g’ri doiraviy silindrning istalgan nuqtasidagi zichligi bu nuqtadan silindr o’qigacha bo’lgan r masofaga teng bo’lsa, bu silindrning m massasini toping.

Echilishi. V silindrning m massasi γ(x;y;z) zichlikdan olingan uch karrali integralga teng.

$m = \iiint\limits_{V} \gamma(x;y;z)dV = \iiint\limits_{V} rdV$ bu erda integrallash soxasi V silindrdir. Bu silindrni silindrik koordinatalarda hisoblaymiz. Silindrning Oxu tekislikka proektsiyasi radiusi R va markazi koordinalar boshida bo’lgan doiradir.

$Z_{кир}=0$, $Z_{чик}=H$. Yuqoridagilardan foydalanib,

$$m=\iiint\limits_V rdV=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R rdr\int\limits_0^H rdz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R r^2z\Big|_0^H dr=H\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R r^2dr=\frac{H}{3}\int\limits_0^{2\pi}r^3\Big|_0^R d\varphi=$$

$$\frac{H}{3}\int\limits_0^{2\pi}R^3d\varphi=\frac{HR^3}{3}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{2\cdot\pi R^3H}{3}.$$

Jismning massasi $m=\dfrac{2\cdot\pi R^3H}{3}$ ga teng ekan.

Sferik koordinatalarda fazodagi R nuqta uchta θ, r, φ kattaliklar bilan aniqlanadi. Bu erda:

r-nuqtadan koordinatalar boshigacha bo'lgan masofa yoki radius vektor;

φ-radius vektor va Oz o'qi orasidagi burchak;

θ-radius vektorning Oxu tekislikdagi proektsiyasi bilan Ox o'qi orasidagi burchak. Fazoning ixtiyoriy nuqtasi uchun $0\le r\le+\infty$, $0\le\varphi\le\pi$, $0\le\theta<2\pi$ shartlar o'rinli bo'ladi. Berilgan V soxani r=const (sfera), φ=const (uchi koordinatalar boshida bo'lgan konik sirt, oz o'qi orqali o'tadi) koordinata sirtlari bilan (V elementar bo'lakchalarga ajratamiz.

Elementar bo'lakchani qirralari Δr, rΔφ, rsinφΔθ ga teng parallelopiped deb qabul qilish mumkin. U holda bu bo'lakcha hajmi $\Delta V=r^2\sin\varphi\Delta r\Delta\theta\Delta\varphi$ ga teng bo'ladi. U holda V soxa F(θ, r, φ) funktsiyadan V soxa bo'yicha olingan boshlangan uch karrali integral $I=\iiint\limits_V F(\theta,r,\varphi)r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$ ga teng bo'ladi. Integrallash chegaralari V soxaning berilishi orqali aniqlanadi.

Dekart koordinatalari sferik koordinatalar orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y=\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\varphi$$

Shuning uchun uch karrali integralning dekart koordinatlaridagi ko'rinishi sferik koordinatlarda quyidagicha bo'ladi:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dzdydz=\iiint\limits_V f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$$

Uch karrali integralda o'zgaruvchini almashtirishning umumiy ko'rinishi.

Uch karrali intergralda dekart koordinatlaridan silindrik va sferik koordinatlarga utish fazoda koordinatalar aomashtirishning xususiy holi xisoblanadi.

Aytaylik x=φ(u,t,w), y=ψ(u,t,w), z=θ(u,t,w) funktsiyalar dekart koordinatlarida berilgan V soxani, egri chiziqli koordinatlar u, t, w da berilgan V′ soxaga bir qiymatli akslantirsin. Bunda (V bo'lakcha, V′ soxaning ΔV′ bo'lagiga utsin va $\lim\limits_{\Delta V'\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta V'}=|I|$ bo'lsin. U holda

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dzdydz=\iiint\limits_V f(\varphi(u,t,w),\psi(u,t,w),\theta(u,t,w))|I|dudtdw$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu erda, *I*-yakobian deb ataladi. Bu erda yakobian

$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$ ga teng bo'ladi. Masalan silindrik koordinatalar uchun yakobian

x=rcosθ, y=sinθ, z=z bo'lganda va (u=r, t=θ, w=z) uchun

$I=\begin{vmatrix}cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r$ bo'ladi. *I*=r;

Sferik koordinatalar uchun $x=r\sin\varphi\cos\theta$, $y=\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\varphi$, *r*=*u*, φ=*t*, θ=w.

$$I=\begin{vmatrix}\sin\varphi cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\end{vmatrix}=r^2\sin^2\varphi$$

Takrorlash uchun savollar:

1. Tsilindrik koordinatalarni tushuntiring.
2. Dekart koordinatlaridan silindrik koordinatlarga utish qanday bo'ladi?
3. Tsilindrik koordinatalar sistemasi deganda nimani tushunasiz?
4. Dekart koordinatalar sistemasidan sferik koordinatalar sistemasiga utish qanday bo'ladi?
5. Sferik koordinatalar sistemasini tushuntiring.
6. Uch karrali integralda o'zgaruvchilarni almashtirishning umumiy ko'rinishi qanday bo'ladi?
7. Yakobian nima?

9.6. UCH KARRALI INTEGRAL TADBIKLARI.

Tayanch iboralar: statik momentlar, og'irlik markazi, inertsiya momenti, massa va xajm.

Reja:

1. Uch karrali integral yordamida statik momentlarni hisoblash.
2. Uch karrali integral yordamida og'irlik markazini hisoblash.
3. Uch karrali integral yordamida inertsiya momentini hisoblash.
4. Uch karrali integral yordamida massani hisoblash.
5. Uch karrali integral yordamida jism hajmini hisoblash.

Adabiyotlar:

1. Shneyder V.E. Oliy matematika qisqa kursi. 183-186 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral xisob, II tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1974 yil, XIV bob,§11-15, 208-220 betlar.

Uch karrali integralni geometrik va fizik masalalarni echishga kullanilishining asosida ikki karrali integral kullanilishi printsiplari yotadi.

1. Agar V sohada integral ostidagi funktsiya f (x;y,z)=1 bo'lsa, u holda uch karrali integral son jixatdan soxaning hajmiga teng, ya'ni $\iiint\limits_V dV = V$.

M i s o l. Ushbu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidning hajmini xisoblang.

Echilishi. Ellipsoid pastdan $z=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$, yuqoridan $z=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ sirtlar bilan chegaralangan (1-rasm). Ellipsoidning OXY tekisligiga proektsiyasi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellips bo'ladi. ellips chapdan $y=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, ungdan $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ egri chiziqlar bilan chegaralangan, o'z navbatida $-a\le x\le a$ bo'ladi. U holda

$$V=\int_{-a}^{a}\left[\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dz\right)dy\right]dx=2c\int_{-a}^{a}\left[\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dy\right]dx$$

$$y=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot\sin t,\quad dy=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot\cos t dt$$

almashtirish bajaramiz. $-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \le y \le b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, bo'lgani uchun $-1 \le \sin t \le 1$ va $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ bo'ladi. Natijada yuqoridagilar yordamida

$$V = 2c\int_{-a}^{a}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sin^2 t} \cdot b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cos t dt\right]dx =$$

$$= 2bc\int_{-a}^{a}\left[\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt\right]dx = \frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx = \frac{4\pi abc}{3}$$

formulani hosil qilamiz.

Demak, ellipsoid hajmi $V = \frac{4\pi abc}{3}$ ekan.

II. ***V jismning m massasi*** $\gamma=\gamma(x;y;z)$ zichlikdan olingan uch karrali integralga teng

$$m = \iiint_V \gamma(x;y;z)dV$$

Bu masala oldingi ma'ruzada keltirilgan.

III. m massali nuqtaning Oxy tekislikka nisbatan S_{xy} ***statik momenti*** deb, nuqtaning massasini uning applikatasiga ko'paytmasi $S_{xy}=mz$ atalishi ma'lum. Oxz va Oyz tekisliklarga nisbatan S_{xz} va S_{yz} statik momentlar ham shu kabi bo'ladi. Demak, Oxy tekislikka nisbatan statik moment

$S_{xy} = \iiint_V zy(x;y;z)dV$ ga teng, kolganlari ham

$S_{xz} = \iiint_V y\gamma(x;y;z)dV$, $S_{yz} = \iiint_V xy(x;y;z)dV$ bo'ladi.

IV. V jism ***og'irlik markazining koordinatalari***

$\vec{x} = \frac{S_{yz}}{m}$, $\vec{y} = \frac{S_{xz}}{m}$, $\vec{z} = \frac{S_{xy}}{m}$ formulalar bilan aniqlanadi.

M i s o l . $2z=4-x^2-y^2$ aylanish paraboloidi va $z=0$ tekislik bilan chegaralangan jismning og'irlik markazini toping.

Echilishi. Jismning Oxz va Oyz koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrikligiga asoslanib, uning og'irlik markazi Oz ukda yotadi degan xulosa qilamiz, demak $\vec{x}=0$, $\vec{y}=0$. Endi $\vec{z}$ ni topish kerak. Uni $z = \frac{S_{xy}}{m}$ formula bilan topamiz. Avval S_{xy} statik momentni hisoblaymiz. Jismning zichligi berilmagani uchun $\gamma(x;y;z)=1$ deb olamiz va $m=V$ bo'ladi.

Hisoblashlarni silindrik koordinatalarda bajaramiz.

$z_{кир.}=0$, $z_{чик.}=(4-x^2-y^2)=\dfrac{4-r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi}{2}=\dfrac{4-r^2}{2}$.

Oxy tekislikdagi σ yuzcha radiusi r=2 va markazi koordinatalar boshida bo'lgan doiradir. Shu sababli

$$S_{xy}=\iiint\limits_V zdV=\iint\limits_\sigma d\sigma\int\limits_0^{\frac{4-r^2}{2}}zdz=\iint\limits_\sigma\left[\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{4-r^2}{2}}\right]d\sigma=\frac{1}{8}\iint\limits_\sigma\left(4-r^2\right)^2d\sigma=$$

$$=\frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2(4-r^2)^2rdr=\frac{8}{3}\pi$$

$$\iiint\limits_V dV=\iint\limits_\sigma d\sigma\int\limits_0^{\frac{4-r^2}{2}}dz=\iint\limits_\sigma\frac{4-r^2}{2}d\sigma=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2(4-r^2)rdr=$$

$$=-\frac{1}{4}\pi\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{\left(4-r^2\right)^2}{2}\Bigg|_0^2\right]d\varphi=\frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi}16d\varphi=2\varphi\Big|_0^2=4\pi;\quad V=4\pi;$$

U holda $\bar{z}=\dfrac{S_{xy}}{m}=\dfrac{8\pi}{3}\cdot\dfrac{1}{4\pi}=\dfrac{2}{3}$. Demak, jism og'irlik markazining koordinatalari $\bar{x}=0,\ \bar{y}=0,\ \bar{z}=\dfrac{2}{3}$.

V. *Inertsiya momenti.* m massali moddiy nuqtaning Ox o'qqa nisbatan I_x inertsiya momenti deb, bu nuqta massasini undan Ox o'qqa bo'lgan masofa kvadratiga ko'paytmasiga aytiladi. P(x;y;z) nuqtadan Ox o'qqacha bo'lgan masofaning kvadrati y^2+x^2 teng bo'lgani uchun

$$I_x=(y^2+x^2)m.$$

Oy va Oz o'qlarga nisbatan inertsiya momentlar ham shunga o'xshash aniqlanadi :

$$I_y=(y^2+x^2)m,\ I_z=(y^2+x^2)m.$$

V jism berilgan bo'lib, uning istalgan nuqtasidagi zichligi γ bu nuqta koordinatalarining funktsiyasi, ya'ni γ=γ(x;y;z) bo'lsin. Bu jismning koordinata o'qlariga nisbatan inertsiya momentlarini topamiz. ΔV_i kichik jismni ajratib, uning Ox o'qqa nisbatan ΔI_x^i inertsiya momentini takriban topamiz:

$$\Delta I_x^i\approx\left(y_i^2+z_i^2\right)\gamma(x_i;y_i;z_i)\Delta V_i.$$

Inertsiya momentining additivlik xossasidan foydalanib V jismning inertsiya momentini taqribiy hisoblaymiz.

$$I_x\approx\sum_{i=1}^n\left(y_i^2+z_i^2\right)\gamma(x_i;y_i;z_i)\Delta V_i.$$

ΔV_i kichik jismlarning har biri nuqtaga tortiladi degan shartda limitga utib, inertsiya momentining aniq qiymatini topamiz:

$$I_x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i^2 + z_i^2\right)\gamma(x_i; y_i; z_i)\Delta V_i = \iiint_V \left(y^2 + z^2\right)\gamma(x; y; z)dV.$$

Shunday qilib V jismning inertsiya momentlari

$$I_x = \iiint_V \left(y_i^2 + z^2\right)\gamma(x; y; z)dV, \qquad I_y = \iiint_V \left(x^2 + z^2\right)\gamma(x; y; z)dV,$$

$$I_z = \iiint_V \left(y^2 + x^2\right)\gamma(x; y; z)dV$$ bo'ladi.

M i s o l. x=0, y=0, z=0, x+y+z=1 tekisliklar bilan chegaralangan va zichligi γ(x;y;z)=3 bo'lgan bir jinsli V piramidaning Oz o'qqa nisbatan inertsiya momentini toping.

Echilishi. V soxani belgilab olamiz 0≤ z ≤1- x-y.

V soxaning Oxy tekislikdagi proektsiyasi x+y=1, x=0, y=0 uchburchakdan iborat bo'lgani uchun 0≤ x ≤1 , 0≤ y ≤1-x bo'ladi. U holda

$$I_z = \iiint_V \left(y^2 + z^2\right)\gamma(x; y; z)dV = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y}\left(x^2 + y^2\right)3dz =$$

$$= 3\int_0^1 dx \int_0^{1-x}\left(x^2 + y^2\right)(1 - x - y)dy = 3\left\{\int_0^1 dx \int_0^{1-x}\left(x^2 + y^2\right)dy - \int_0^1 dx \int_0^{1-x}\left(x^2 + y^2\right)xdy -\right.$$

$$\left. - \int_0^1 dx \int_0^{1-x}\left(x^2 + y^2\right)ydy\right\} = 3\int_0^1\left[\frac{x^2(1-x)^2}{2} + \frac{(1-x)^4}{12}\right]dx = \frac{1}{10}. \quad I_z = \frac{1}{10}.$$

Takrorlash uchun savollar :

1. Statik momentlarga ta'rif bering.
2. Uch karrali integrallar qanday paytda V soxa hajmini xisoblaydi ?
3. V jism massasi uch karrali integral yordamida qanday xisoblanadi ?
4. V jismning og'irlik markazi koordinatalari qanday formulalar yordamida topiladi ?
5. V jismning inertsiya momenti deb nimaga aytiladi ?
6. Uch karrali integral yordamida inertsiya momentlarini hisoblash formulalarini yozing.
7. Statik moment va og'irlik markazi bog'liq formulalarni kursating.

9.7. EGRI CHIZIQLI INTEGRAL TA'RIFI VA XOSSALARI.

Tayanch iboralar: Vektor maydon, ish haqidagi masala, integral yig'indi, egri chiziqli integral, mavjudlik teoremasi.

Reja:

1. Vektor maydon tushunchasi.
2. Ish haqidagi masala.
3. Integral yig'indi.
4. Egri chiziqli integral ta'rifi.
5. Egri chiziqli integralning mavjudlik teoremasi.
6. Egri chiziqli integralning xossalari.

Adabiyotlar:

1. Shneyder V.E. Oliy matematika qisqa kursi. 84-92 betlar.
2. Yo.U. Soatov. "Oliy matematika" II qism. Toshkent. O'qituvchi nashriyoti 1994 yil. 11 bob, § 1-2, 119-121 betlar, 12 bob, § 4, 155-157 betlar.

T A ' R I F: Fazoning biror soxasida uning har bir M(x,y,z) nuqtasiga biror $\overline{\phi}$ vektor mos qo'yilgan bo'lsa, unga *vektor maydon* deyiladi.

$$\overline{\phi} = \overline{\phi}(M) = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$$

ga vektor maydonning fazoda berilishi,

$$\overline{\phi} = \overline{\phi}(M) = P(x,y)\overline{i} + Q(x,y)\overline{j}$$

ga esa, vektor maydonning tekislikda berilishi deyiladi.

Vektor maydonga misol sifatida tortishish kuchlari maydonini olish mumkin. Agar O(0;0;0) nuqtaga m massa joylashtirilgan bo'lsa, u holda bu massa tortishish kuchlari maydonini hosil kiladi. Chunki fazoning har bir nuqtasiga joylashtirilgan birlik massaga Nyuton konuniga asosan, kattaligi $\frac{\gamma \cdot m}{|r|^2}$ ga teng va koordinatalar boshiga yunalgan kuch ta'sir kiladi, bu erda $\overline{r} = \overline{OM}$, γ -tortishish doimiysi. Demak,

$$\overline{F} = -\frac{\gamma \cdot m}{|r|^2} \cdot \overline{r_0}\,, \text{ bu erda } \overline{r_0} = \frac{\overline{OM}}{|\overline{OM}|} = \frac{\overline{r}}{|\overline{r^0}|} \quad \text{birlik vektor.}$$

Endi mavzuga yakinrok kelamiz.

M a s a la : $\overline{F} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$ kuchlar maydonida joylashgan biror L egri chiziq buylab biror moddiy nuqta harakatlanadi. Bu massa A nuqtadan B nuqtaga kuchganda maydon kuchlari bajargan ishni xisoblang.

Fizikadan ma'lumki, agar moddiy nuqta $\overline{F}$ o'zgarmas kuch ta'sirida $\overline{J}$ vektor bilan ifodalanadigan to'g'ri chiziqli kuchgan bo'lsa, u holda bu kuchning bajargan ishi $\overline{F}$ vektorning $\overline{J}$ vektorga skalyar ko'paytmasiga teng bo'ladi:

$$E = \overline{F} \cdot \overline{J} \qquad (1)$$

Biz karayotgan vaziyatda $\overline{F}$ kuch kattaligi bo'yicha ham, yunalishi bo'yicha ham o'zgaradi. L egri chiziq buylab kuchish esa , to'g'ri chiziqli emas, shu sababli unga (1) formulani kullab bo'lmaydi. Shuning uchun boshqacha yo'l tutamiz : L egri chiziqdagi A va B nuqtalar orasidagi bo'lakni $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ nuqtalar yordamida bo'lakchalarga ajratamiz. A ni A_0 bilan, B ni esa A_n bilan almashtiramiz. A_0,A_1 va A_1,A_2 va A_2,A_3 va …, A_{n-1},A_n nuqtalarni to'g'ri chiziq bilan tutashtiramiz. Har bir A_0A_1 yoychalarda $M_i(x_0, y_0, z_0)$ nuqtani tanlaymiz.

L egri chiziqni $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$ sinik chiziq bilan almashtiramiz va yoyda bajarilgan ish taxminan A_{i-1} A_i kesmada bajarilgan ishga teng deb hisoblaymiz. Bu oraliqda kuchni o'zgarmas, ya'ni

$$F(M_i) = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$$

deb oalmiz. U holda $\overline{F}$ kuchning A_{i-1} A_i buginda bajargan ishi

$$E_i = \overline{F}(M_i)\,\overline{A_{i-1}A_i}$$

$\overline{A_{i-1}A_i}$ vektorning koordinata o'qlariga proektsiyalari

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\,,\ \Delta y_i = y_i - y_{i-1}\,,\ \Delta z_i = z_i - z_{i-1}$$

bo'lgani uchun

$$E_i = P(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i)\Delta y_j + R(x_i, y_i, z_i)\Delta z_i$$

bo'ladi.

Hamma bajarilgan ishlarni jamlaymiz.

$$E \approx \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i)\Delta y_j + R(x_i, y_i, z_i)\Delta z_i \qquad (2)$$

A ishning aniq qiymati sifatida bu yig'indining $\left|\overline{A_{i-1}A_i}\right| \to 0$ dagi limitini olamiz.

$$E = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i)\Delta y_j + R(x_i, y_i, z_i)\Delta z_i \right] \quad (3)$$

Demak, yuqoridagi masalani echish, ya'ni ishni hisoblash ma'lum ko'rinishdagi yig'indini hisoblashga olib keldi. Endi asosiy maksadga utamiz.

Uch ulchovli fazoning har bir soxasida L egri chiziq va shu L egri chiziqning har bir nuqtasida aniqlangan.

$$\overline{\phi} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$$

vektor funktsiya berilgan bo'lsin.

1) $\overset{\smile}{AB} \in L$ ni A nuqtadan B nuqta tomon A_1, A_2, A_3, …, A_{n-1} nuqtalar bilan n ta $\overset{\smile}{A_0A_1}, \overset{\smile}{A_1A_2}, \overset{\smile}{A_2A_3}, ..., \overset{\smile}{A_{n-1}A_n}$ yoychalarga bo'lamiz.

2) Har bir $\overset{\smile}{A_{i-1}A_i}$ yoyda $M_i(x_i, y_i, z_i)$ nuqtani tanlaymiz va bu nuqtada

$\overline{\phi} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$ vektorning

$\overline{A_{i-1}A_i} = \Delta x_i\,\bar{i} + \Delta y_i\,\bar{j} + \Delta z_i\,\bar{k}$ vektorga skalyar ko'paytmasini topamiz.

$$\overline{\phi}(M_i)\cdot\overline{A_{i-1}A_i} = P(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i)\Delta y_j + R(x_i, y_i, z_i)\Delta z_i$$

3) Barcha ko'paytmalar yig'indisini topamiz

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{\phi(M_i)}\cdot\overline{A_{i-1}A_i} = \sum_{i=1}^{n}\left[P(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i)\Delta y_j + R(x_i, y_i, z_i)\Delta z_i\right] \quad (4)$$

(4) ga integral yig'indi deyiladi.

4) Agar (4) integral yig'indining barcha $\overline{A_{i-1}A_i}$ yoychalarning uzunliklari nolga intiladi degan shartda limiti mavjud bo'lib, u AB ni $\overline{A_{i-1}A_i}$ yoychalarga bulish usuliga ham, ularning har birida M_i nuqtaning tanlanishiga ham bog'liq bo'lmasa, u holda bu limit $\overline{\phi} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$ vektor funktsiyadan L egri chiziq buylab A dan B ga yunalishda olingan egri chiziqli integral deyiladi va

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

yoki

$$\int_{L} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

Oxirgi integralni vektor yordamida $\int\limits_n \overline{\phi} \cdot dr$ ko'rinishda yozish mumkin.

Egri chiziqli integralning mavjudlik teoremasi.

TEOREMA. L egri chiziq x = x (t), y = y (t), z = z (t) tenglamalar orqali parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsin, bu erda x (t), y (t), z (t) funktsiyalar $t \in [\alpha, \beta]$ da uzluksiz birinchi tartibli hosilalarga ega bo'lsin. U holda bu egri chiziq buylab uzluksiz bo'lgan har qanday $\overline{\phi} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$ vektor – funktsiya uchun integral yig'indining L egri chiziq bulingan yoylar soni cheksiz ortganda va ularning har birining uzunligi nolga intilgandagi limiti mavjud bo'ladi.

X o s s a l a r i :

<u>*1 – xossa.*</u> Egri chiziqli integralning qiymati L egri chiziqni bosib utiladigan yunalishga bog'liq. Agar shu egri chiziqni A nuqtadan B nuqtaga tomon emas, balki teskari yunalishda B dan A tomon utilsa, integralning ishorasi karama-karshisiga almashinadi , ya'ni

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= -\int\limits_{BA} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

<u>*2 –xossa.*</u> Agar L egri chiziq bir necha L_1 , L_2 , L_3 ,…, L_s egri chiziqlardan iborat va bu egri chiziqlarning har birida egri chiziqli integrallar mavjud bo'lsa, u holda butun L egri chiziq buylab ham integral mavjud va bu bo'laklarning har biri buylab integrallar yig'indisiga teng , ya'ni

$$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{L_1} Pdx + Qdy + Rdz + \int\limits_{L_2} Pdx + Qdy + Rdz +$$

$$... + \int\limits_{L_n} Pdx + Qdy + Rdz$$

Takrorlash uchun savollar :

1. Vektor maydonga ta'rif bering.
2. Moddiy nuqtaning $\overrightarrow{F}$ kuch ostida to'g'ri chiziqli kuchgan bo'lsa, bajarilgan ish nimaga teng bo'ladi ?
3. Integral yig'indi qanday to'ziladi.
4. Egri chiziqli integralga ta'rif bering.
5. Egri chiziqli integral mavjudligi haqidagi teoremani ayting.
6. Egri chiziqli integral xossalarini ayting.

9.8. EGRI CHIZIQLI INTEGRALNI HISOBLASH.

Tayanch iboralar : I tur egri chiziqli integral, II tur egri chiziqli integral.

Reja:

1. Egri chiziqli integrallarni hisoblash.
2. Birinchi tur integral yig'indi.
3. Birinchi tur integral yig'indi limiti.
4. Birinchi tur egri chiziqli integralni hisoblash.
5. Ikkinchi tur integral yig'indi.
6. Ikkinchi tur integral yig'indi limiti.
7. Ikkinchi tur egri chiziqli integralni hisoblash.

Adabiyotlar:

1. Shneyder V.E. Oliy matematika qisqa kursi. 99-105 betlar.
2. Yo.U. Soatov. "Oliy matematika" II qism. Toshkent. O'qituvchi nashriyoti 1994 y. 11 bob, § 1-3, 119-125 betlar.

Egri chiziqli integral ikkiga bo'lib urganiladi: I tur egri chiziqli integral va II tur egri chiziqli integral. I tur egri chiziqli integralni urganishda berilgan ρ zichlikka ega bo'lgan yopiq bulmagan AB moddiy egri chiziq olinadi. Agar M nuqtani AB egri chiziqka tegishli deb karaydigan bo'lsak, u holda AB moddiy egri chiziqning M(x;y) nuqtadagi zichligi $\rho=\rho(x;y)$ bo'ladi. Fizikadan ma'lumki etarlicha kichik uzunlikdagi moddiy egri chiziq bo'lagini ΔS deb oladigan bo'lsak va unga M nuqta tegishli bo'lsa, u holda

$$\rho(x;y) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta S}$$

bo'ladi, ya'ni ΔS uzunlik M(x;y) nuqtaga tortilgandagi limitiga teng bo'ladi.

AB moddiy egri chiziqni bo'laklarga ajratamiz. M_0 , M_1 , M_1 , M_2, M_2 , M_3 ,…, $M_{n-1}M_n$ ularning massalarini Δm_1 , Δm_2 , Δm_3 ,…, Δm_k bilan belgilaymiz. Bu erda zichlik AB ning hamma nuqtasida har xil deb karaladi. Har bir bo'lakda zichlik $\rho_k = \rho(M_k)$ bo'ladi. U holda bo'lak massasi

$$m_k \approx \rho(M_k)\Delta S_k \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} m_k = \sum_{k=0}^{n-1} \rho(m_k)\Delta S_k \quad , \rho(M_k) = \rho(x_k,y_k)$$

$$m \approx \sum_{k=0}^{\infty} \rho(x_k, y_k)\Delta S_k$$, agar bo'linishlar soni cheksiz orttirilsa

m = $\lim\limits_{\Delta S_k \to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \rho(x_k, y_k)\Delta S_k$ tanish yig'indining limiti hosil bo'ladi. Unga yoy bo'yicha egri chiziqli integral deyiladi va $\int\limits_{(AB)} \rho(x; y)ds$ bilan belgilanadi. Demak,

$$\int\limits_{(AB)} \rho(x; y)ds = \lim_{\Delta S_k \to 0} \rho(x_k, y_k)\Delta S_k .$$

Umumiy holda bu integral

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)dS$$

deb yoziladi. Ana shu integralga I tur egri chiziqli integral deyiladi.

Xush bu integral qanday xisoblanadi ?

I. Aytaylik (AB) yoy parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsin.

(AB)=$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, u holda $f(x(t), y(t)) = F(t)$

$$\Delta S_k \approx \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sqrt{(\Delta x_k')^2 + (\Delta y_k')^2} \cdot \Delta t_k \text{ yoki } dS = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt$$

bo'lib,

$$\int\limits_{(AB)} f(x; y)dS = \int\limits_{\alpha}^{\beta} F(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt.$$

M i s o l: $\int\limits_{(AB)} xydS$ ni xisoblang, agar (AB)- $x^2 + y^2 = a^2$ aylananing I chorakda yotgan qismi bo'lsa. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ bo'ladi.

$$dS = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}dt = a\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}dt = adt :$$

U holda

$$\int\limits_{(AB)} xydS = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot a\sin t \cdot adt = a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \sin tdt = \frac{a^3}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2tdt =$$

$$= \frac{a^3}{2}\left(-\frac{\cos 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^4}{2}(+1+1) = \frac{a^3}{2} :$$

II tur egri chiziqli integrali bilan biz egri chiziqli integral mavzusini utganimizda deyarli tanishgan edik. U erda biz

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{\Phi(M_i)}\cdot\overline{A_{i-1}A_i}=\sum_{i=1}^{n}\left[P(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i+Q(x_i,y_i,z_i)\Delta y_i+R(x_i,y_i,z_i)\Delta z_i\right]$$

integral yig'indini tuzgan edik va $A_{i-1}A_i$ yoychalarning uzunliklari nolga intiladi degan shartda ta'rif bergan edik. $A_{i-1}A_i$ bo'lak nolga intiladi degan so'zi $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\Rightarrow 0,\ \Delta y_i\to 0,\ \Delta z_i\to 0$ degan so'z bilan teng kuchlidir.

U holda $\lim\limits_{\substack{\Delta x_i\to 0\\ \Delta y_i\to 0\\ \Delta z_i\to 0}}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[P(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i+Q(x_i,y_i,z_i)\Delta y_i+R(x_i,y_i,z_i)\Delta z_i\right]$

limitga koordinatalar bo'yicha egri chiziqli integral yoki II tur egri chiziqli integral deyishadi va $\int\limits_{(AB)}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$ bilan belgilanadi.

Aytaylik (AB) egri chiziq parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsin.

$$(AB)=\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases},\ \alpha\le t\le\beta,\quad \text{u holda}$$

$$\int\limits_{(AB)\alpha}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\int^{\beta}\left[P(x(t),y(t),z(t))\cdot x'(t)+\right.$$
$$\left.+Q(x(t),y(t),z(t))\cdot y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))\cdot z'(t)\right]dt$$

bo'ladi.

M i s o l: $\int\limits_{(AB)}xydx+(y-x)dy$ egri chiziqli integral qiymatini A(0; 0) va B(1; 1) nuqtalarni tutashtiruvchi chiziq bo'yicha xisoblang.

(AB) chizma $y=x$ bo'lishi, $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ bo'lishi ham mumkin. Har biri bo'yicha hisoblaymiz.

1) $y=x\Rightarrow dy=dx, 0\le x\le 1,\quad \int\limits_{(AB)}xydx+(y-x)dy=\int\limits_0^1 x^2dx=\left.\frac{x_3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$

2) $y = x^2 \Rightarrow dy = 2xdx, 0 \le x \le 1,$

$$\int_{(AB)} xydx + (y - x)dy = \int_0^1 ((x^3 + (x^2 - x)2x)dx =$$

$$\int_0^1 (x^3 + 2x^3 - 2x^2)dx = \left(\frac{3x^3}{4} - \frac{3x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12};$$

3) $y = \sqrt{x} \Rightarrow dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx, 0 \le x \le 1, \quad \int_0^1 (x \cdot \sqrt{x} + (\sqrt{x} - x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}})dx =$

$$\int_0^1 (x \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{x}}{2})dx = \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}})dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{5}(1-0) + \frac{1}{2}(1-0) - \frac{1}{3}(1-0) = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{17}{30};$$

Bu misolning echilishi yana bir marta 1-xossaning to’g’riligini isbotlaydi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Egri chiziqli integral turlarini ayting.
2. I tur egri chiziqli integral mavzusidagi asosiy ibora nima ?
3. I tur egri chiziqli integralning mexaniq ma'nosini ayting.
4. I tur egri chiziqli integralning ta'rifini ayting.
5. I tur egri chiziqli integral qanday xisoblanadi.
6. II tur egri chiziqli integral ta'rifini ayting.
7. II tur egri chiziqli integral qanday xisoblanadi ?

9.9. EGRI CHIZIQLI INTEGRAL TADBIKQLARI

Tayanch iboralar: To’g’ri soxa,soxa yuzasi, ishni hisoblash.

Reja:
1. To’g’ri soxaga ta'rif.
2. D to’g’ri soxaning Ox va Oy o’qlardagi proektsiyasi.

3. Egri chiziq bilan chegaralangan soxani egri chiziqli integral yordamida hisoblash.
4. Biror yo'l bo'yicha $\overline{F}$ kuchning bajargan ishi.
5. Egri chiziqli integral yordamida bajarilgan ishni hisoblash.
6. Egri chiziqli integral yordamida yoy massasini hisoblash.

Adabiyotlar:

1. Shneyder V.E. Oliy matematika qisqa kursi. 94-95 ,103-104 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral xisob, II tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1974 yil, XIV bob,§1-2, 226-231 betlar.

Egri chiziq bilan chegaralangan soxa yo'zini egri chiziqli integral yordamida hisoblash uchun dastlab ushbu ta'riflarni beramiz.

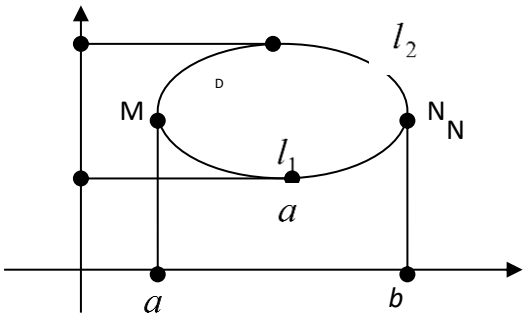
T A ' R I F : D soxaga *to'g'ri soxa* deyiladi, agar ixtiyoriy to'g'ri chiziq bu soxa chegarasini faqat ikkita nuqtada kesib utsa.

To'g'ri soxaga misol qilib doira, to'g'ri to'rtburchak, kvadrat, trapetsiya, uchburchaklarni aytish mumkin. Botik kupburchak esa to'g'ri soxa bula olmaydi. Demak, bizga OXY tekisligida L egri chiziq bilan chegaralangan D to'g'ri soxa berilgan bo'lsin (1-rasm).

Faraz qilamiz $D = \left\{ \begin{matrix} y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ a \le x \le b \end{matrix} \right\}$ bo'lsin. U holda, biz bilamizki

$$S_D = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]dx = \int_a^b y_2(x)dx - \int_a^b y_1(x)dx.$$

Lekin $\int_a^b y_2(x)dx$-bu $l_2(MPN)$ bo'yicha olingan egri chiziqli integral xisoblanadi, chunki $y = y_2(x)$ tenglama l_2 egri chiziqning tenglamasi.



1-rasm

Demak $\int_a^b y_2(x)dx = \int_{MPN} ydx = \int_{(l_2)} ydx$-

Ikkinchi integral esa $l_1(MQN)$ bo'yicha olingan egri chiziqli integral bo'ladi.

$$\int_a^b y_1(x)dx = \int_{MQN} ydx = \int_{(l_1)} ydx$$

U holda 1-xossaga asosan $\int\limits_{MPN} ydx = -\int\limits_{NPM} ydx$ ligini xisobga oladigan bo'lsak.

$$S_D = \int\limits_a^b y_2(x)dx - \int\limits_a^b y_1(x)dx = -\int\limits_{MPN} ydx - \int\limits_{MQN} ydx = -(\int\limits_{MPN} ydx + \int\limits_{MQN} ydx) == -\oint\limits_{L} ydx$$

bo'ladi.

Bu erda L bo'yicha yurish soat mili yurishiga teskari yunalishda bo'ladi.

<u>N a t i j a :</u> Agar L yopiq egri chiziqning biror bo'lagi M_1M_2 kesmadan iborat va u OY o'qiga parallel bo'lsa, u holda

$$\int\limits_{(M_1M_2)} ydx = 0$$

Xuddi shunday $S_D = \oint\limits_L ydx$ (2) ni ham ko'rsatish mumkin. (1) va (2) formulalarni hadma-had kushib

$$2S_D = \oint\limits_L xdy - \oint\limits_L ydx = \oint\limits_L xdy - ydx \qquad \text{yoki}$$

$S_D = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx$ ni hosil qilamiz. Ana shu formula egri chiziqli integral yordamida L egri chiziq bilan chegaralangan D to'g'ri soxa yo'zini hisoblash formulasi bo'ladi.

M i s o l: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsning yo'zini xisoblang.

1) Ellips to'g'ri soxa bo'ladi.
2) Ellipsning yo'zini aniq integral yoki ikki karrali integral yordamida hisoblashni ko'rib utgan edik.
3) Ellips tenglamasini parametrik ko'rinishda yozib olamiz:
$x = a\cos t,\ y = b\sin t.\ 0 \le t \le 2\pi$

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_L xdy - ydx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(a\cos t \cdot b\sin t - b\sin t \cdot (-a\sin t))dt =$$

$$\frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi}(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \frac{ab}{2}\cdot t\Big|_0^{2\pi} = \pi ab; \qquad S = \pi ab.$$

Egri chiziqli L yo'lda $\overline{F}$ kuchning bajargan ishini egri chiziqli integral yordamida hisoblash.

Biz bilamizki, L egri chiziq bo'yicha $\overline{F}$ kuchning bajargan ishi

A= $\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ bilan ifodalanadi.

M a s a l a: m massani L egri chiziqdagi A (a_1, $в_1$, c_1) nuqtadan B (a_2, $в_2$, c_2) nuqtaga kuchirishda $\overline{F}$ kuchning bajargan ishini xisoblang.

$\overline{F}$ kuchning OX, OY va OZ o'qlardagi proektsiyalarini topamiz.

$$P(x,y,z)=0, \qquad Q(x,y,z)=0, \qquad R(x,y,z)=-mg$$

U holda

$$A= \int\limits_{(M_1M_2)} R(x,y,z)dz = -mg\int\limits_{c_1}^{c_2} dz = -mg\cdot z\Big|_{c_1}^{c_2} = -mg(c_2-c_1) = mg(c_1-c_2):$$

Takrorlash uchun savollar :

1. To'g'ri soxaga ta'rif bering.
2. Uchburchak, doira, botik kupburchak to'g'ri soxa bo'ladimi ?
3. Chegaralangan to'g'ri soxaga ta'rif bering.
4. Egri chiziqli integral yordamida yuzani hisoblash formulasini ayting.
5. Egri chiziqli integral yordamida bajarilgan ish qanday xisoblanadi?

9.10. GRIN FORMULASI VA UNING TADBIQLARI .

<u>Tayanch iboralar:</u> Grin formulasi.

Reja:

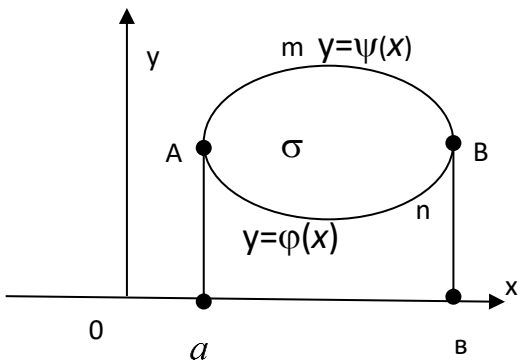
1. Yopiq kontur bo'yicha chegaralangan soxa.
2. Yopiq kontur bo'yicha egri chiziqli integral.
3. Yopiq kontur bo'yicha olingan ikkinchi tur egri chiziqli integral.

4. Yopiq kontur bilan chegaralangan soxa bo'yicha olingan ikki ulchovli integral.
5. D sohada berilgan ikki karrali integral hamda shu soxa chegarasi bo'yicha olingan egri chiziqli integral orasidagi boglanish.
6. Grin formulasi.

Adabiyotlar:

1. Shneyder V.E. Oliy matematika qisqa kursi. 92-97 betlar.
2. Yo.U. Soatov. "Oliy matematika" II qism. Toshkent. O'qituvchi nashriyoti 1994 y. 11 bob, § 4, 131-133 betlar.
3. Piskunov N.S. Differentsial va integral xisob, II tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1974 yil, XV bob,§1-3, 226-237 betlar.

OXY tekislikda σ to'g'ri soxa va uni chegaralovchi L yopiq egri chiziq berilgan bo'lsin. P (x, y) va Q (x, y) funktsiyalar o'zlarining $\frac{\partial P}{\partial y}$ ва $\frac{\partial Q}{\partial y}$ xususiy hosilalari bilan birgalikda σ sohada uzluksiz funktsiyalar bo'lsin. U holda ushbu Grin formulasi deb ataluvchi formula o'rinli:



1-расм

Bu formulani keltirib chikaramiz:

$\iint\limits_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma$ ikki karrali integralni qaraymiz.

AnB yoy tenglamasi $y = \varphi(x)$, BmA yoy tenglamasi y=ψ(x) bo'lsin.

U holda

$$\iint\limits_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\phi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b P(x;y)\Big|_{\varphi(x)}^{\phi(x)} dx =$$

$$\int_a^b \left[P(x;\phi(x)) - P(x;\varphi(x))\right]dx = \int_a^b P(x;\phi(x))dx - \int_a^b P(x;\varphi(x))dx$$

bu erda $\int_a^b P(x;\varphi(x))dx$ integral, AnB yoy bo'yicha olingan $\int\limits_{AnB} P(x;y)dx$ egri chiziqli integralga teng.

$\int\limits_a^b P(x;\varphi(x))dx = \int\limits_{AnB} P(x;y)dx$, shunga o'xshash

$$\int\limits_a^b P(x;\phi(x))dx = \int\limits_{AmB} P(x;y)dx$$

U holda $\iint\limits_\sigma \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = \int\limits_a^b P(x;\phi(x))dx - \int\limits_a^b P(x;\varphi(x))dx$ dan

$$\iint\limits_\sigma \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = \int\limits_{AmB} P(x;y)dx - \int\limits_{AnB} P(x;y)dx = -\int\limits_{BmA} P(x;y)dx - \int\limits_{AnB} P(x;y)dx =$$

$= -\left(\int\limits_{AmB} P(x;y)dx + \int\limits_{AnB} P(x;y)dx \right) = -\oint\limits_L P(x;y)dx$ yoki

$\iint\limits_\sigma \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = -\oint\limits_L P(x;y)dx$, xuddi shu tarzda

$\iint\limits_\sigma \frac{\partial Q}{\partial y} d\sigma = \oint\limits_L Q(x;y)dy$ ni ham isbotlash mumkin.

Demak, oxirgi ikkala tenglikni hadma-had ayirsak

$$\iint\limits_\sigma \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma - \iint\limits_\sigma \frac{\partial Q}{\partial y} d\sigma = -\oint\limits_L P(x;y)dx - \oint\limits_L Q(x;y)dy$$

yoki

$$\iint\limits_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = `\oint\limits_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy$$

<u>Grin formulasi.</u>

<u>T A ' R I F:</u> A va B nuqtalar σ to'g'ri soxaga tegishli bo'lib, ularni tutuashtiruvchi turli egri chiziqlar bo'yicha olingan $\int\limits_{L_i} P(x,y)dx + Q(x,y)dx$ lar bir xil qiymatlar qabul kilsa, u integrallash yo'liga bog'liqmas deyiladi.

TEOREMA : Biror D soxa bo'yicha olingan $\int\limits_e P(x,y)dx + Q(x,y)dx$ egri chiziqli integral integrallash yo'liga bog'liq bo'lmasligi uchun bu sohada

yotuvchi istalgan yopiq egri chiziq bo'yicha olingan integral nolga teng bo'lishi zarur va etarlidir.

Bu teoremaning tadbikini misolda ko'rib chiqamiz.

$D=\begin{Bmatrix} o\le x\le 1 \\ x^2\le y\le\sqrt{x}\end{Bmatrix}$ bo'lsin va $\int\limits_L xydx+ydy$ ni hisoblash talab qilinsin.

U holda

1) $\int\limits_{L_1} xydx+ydy = \int\limits_0^1 (x\cdot x^2+x^2\cdot 2x)dx=\int\limits_0^1 3x^3dx=\frac{3}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{3}{4}$

2) $\int\limits_{L_2} xydx+ydy=$

$$=\int\limits_0^1 (x\cdot\sqrt{x}+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}})dx=\int\limits_0^1\left(x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}x\Big|_0^1=\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=\frac{9}{10};$$

Bu erda ikki xil qiymat chiqdi, demak egri chiziqli integral qiymati integrallash yo'liga bog'liq ekan. Endi uning yopiq chiziq bo'yicha olingan integrali nolga teng bo'lmasligini kursatamiz, bu uchun Grin formulasidan foydalanamiz.

$$\iint\limits_\sigma\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=\int\limits_L Pdx+Qdy$$

$$Q(x;y)=y \quad , \quad P(x;y)=xy \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=0 \quad , \quad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}=x\,.$$

U holda

$$\iint\limits_\sigma\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}}(0-x)dy=$$

$$=-\int\limits_0^1 xy\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=-\int\limits_0^1(x\sqrt{x}-x^3)dx=-\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=-\frac{2}{5}+\frac{1}{4}=-\frac{3}{20}$$

$$-\frac{3}{20}\ne 0\,.$$

Teorema to'g'ri ekanligini tasdiqlaydi.

TEOREMA : Egri chiziqli integral (to'g'ri sohada integrallash yo'liga bog'liq bo'lmasligi uchun, bu soxaning har bir nuqtasida $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ shartning bajarilishi zarur va kifoyadir.

Bu teorema shartlarining bajarilishini ham misolda ko'rib chiqamiz.

$\int\limits_{L_1} (x^2 + y^2)dx + 2xydy$ integralning integrallish yo'liga bog'liqmasligini kursatamiz, bu uchun yana Grin formulasigi yoki yuqoridagi shartga murojaat qilamiz.

1) $\iint\limits_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma = \iint\limits_{\sigma} \left((2xy)'_x - (x^2 + y^2)'_y\right)d\sigma = \iint\limits_{\sigma} (2y - 2y)d\sigma = \iint\limits_{\sigma} 0d\sigma = 0$

2) $\frac{\partial Q}{\partial x} = (2xy)'_x = 2y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = (x^2 + y^2)'_y = 2y. \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2y.$

3) Endi biror L_1 va L_2 chiziqlar bo'yicha egri chiziqli integrallarni hisoblab ko'ramiz

$a)\ \int\limits_0^1 (x^2 + x^4 + 2x \cdot x^2 \cdot 2x)dx = \int\limits_0^1 (x^2 + x^4 + 4x^4)dx = \frac{x^3}{3} + x^5\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$

б) $\int\limits_0^1 (x^2 + x + 2x \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}})dx = \int\limits_0^1 (x^2 + 2x)dx = \frac{x^3}{3} + x^2\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$

Haqiqatan ham $y = x^2$ va $y = \sqrt{x}$ yo'llar bo'yicha olingan integrallar teng bular ekan.

Takrorlash uchun savollar :

1. σ sohada P(x;y) va Q(x;y) funktsiyalar qanday shartlarni qanoatlantirishi kerak.

2. Grin formulasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

3. D soxa bo'yicha olingan egri chiziqli integral integrallash yo'liga bog'liq bo'lmasligi uchun qanday shart bajarilishi kerak?

4. Agar L(A,B) egri chiziq σ soxaga tegishli bo'lsa, egri chiziqli integralning qiymati qachon integral yo'liga bog'liq bo'lmaydi ?

5. Grin formulasi qaysi paytlarda ko'proq qo'llaniladi ?

X BOB. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR.

10.1. DIFFERENTsIAL TENGLAMALARGA KELUVChI MASALALAR. UMUMIY VA XUSUSIY EChIMLAR. O'ZGARUVChILARI AJRALADIGAN VA ChIZIQLI BIRINChI TARTIBLI TENGLAMALAR.

Tayanch iboralar: Differentsial tenglama, umumiy echim, xususiy echim differentsial tenglamaning tartibi, o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama, chiziqli birinchi tartibli differentsial tenglama.

Reja:

1.Differentsial tenglamaga olib keluvchi masala. Umumiy va xususiy echimlar.
2.O'zgaruvchilari ajraladigan differentsial tenglamalar.
3.Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar

Adabiyotlar:

[**1**]. VIII bob, §1-3 [**4**]. XIII bob, §1-7

1. Differentsial tenglamaga olib keluvchi masala. Umumiy va xususiy echimlar.

M i s o l: Massasi m bo'lgan jism biror balandlikdan tashlab yuborilgan. Agar jismga og'irlik kuchidan tashqari xavoning tezlikka proportsional bo'lgan (proportsionallik koeffitsienti k) qarshilik kuchi ta'sir etsa, bu jismning tushish tezligi v qanday qonun bilan o'zgarishini bilish, ya'ni v=f(t) munosabatni topish talab etiladi.

Echimi. Nyutonning ikkinchi qonuniga muvofiq

$$\mathrm{m}\cdot\frac{dv}{dt}=F,$$

bunda $\frac{dv}{dt}$ harakatdagi jismning tezlanishi, F esa jismga harakat yunalishida ta'sir etuvchi kuch bo'lib, u og'irlik kuchi mg dan va havoning qarshilik kuchi –kv dan tashkil topadi. Demak,

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

Biz noma'lum v funktsiya bilan $\frac{dv}{dt}$ hosilasi orasidagi bog'lanishni ifodalovchi tenglamasini topdik. Uning echimi

$$v = ce^{\frac{-kt}{m}} + \frac{mg}{k}$$

bo'ladi.

TA'RIF: Differentsial tenglama deb erkli o'zgaruvchi x, noma'lum $y=f(x)$ funktsiya va uning $y', y'', ..., y^{(n)}$ hosilalari orasidagi bog'lanishni ifodalaydigan tenglamaga aytiladi:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)})=0$$

Agar bu tenglikni $y^{(n)}$ hosilaga nisbatan echsak u quyidagi ko'rinishga keladi:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}).$$

Izlangan funktsiya $y=f(x)$ bitta erkli o'zgaruvchiga bog'lik, shuning uchun uni oddiy differentsial tenglama deb ataymiz. Keyingi ma'ruzalarimizda faqat oddiy differentsial tenglamalarni qaraymiz.

TA'RIF: Differentsial tenglamaning tartibi deb tenglamaga kirgan hosilaning eng yuqori tartibiga aytiladi. Masalan,

$$y'-4xy+7=0$$

birinchi tartibli differentsial tenglama,

$$y''+8y'-xy-tg=0$$

ikkinchi tartibli differentsial tenglamadir.

TA'RIF: Birinchi tartibli differentsial tenglamaning,

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

umumiy echimi deb bitta ixtiyoriy S o'zgarmas miqdorga bog'lik bo'lgan va (1) tenglamaga qanoatlantiradigan $y=\varphi(x,C)$ funktsiyaga aytiladi.

TA'RIF: Ixtiyoriy C o'zgarmas miqdorga ma'lum $C=C_0$ qiymat berish natijasida $y=\varphi(x,C)$ umumiy echimdan hosil bo'ladigan har qanday $y=\varphi(x,C_0)$ funktsiyaga xususiy echim deb aytiladi.

M i s o l: Birinchi tartibli

$$y' = -\frac{y}{x}$$

tenglama uchun $y=\frac{C}{x}$ funktsiyalar umumiy echim bo'ladi, ularning grafiklari esa integral chiziqlar deb aytiladi. Umumiy echimda C=1 deb olib $y=\frac{1}{x}$ xususiy echimni hosil qilamiz.

Endi birinchi tartibli differentsial tenglama echimining mavjudligi haqidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

TEOREMA: Agar

$$y'=f(x,y)$$

tenglamada $f(x,y)$ funktsiya va undan y bo'yicha olingan $\frac{\partial f}{\partial y}$ xususiy hosila XOY tekislikdagi (x_0,y_0) nuqtani uz ichiga oluvchi biror sohada uzluksiz funktsiyalar bo'lsa, u holda berilgan tenglamaning $x=x_0$ bo'lganda $y=y_0$ shartni qanoatlantiruvchi birgina $y=u(x)$ echimi mavjuddir. $x=x_0$ bo'lganda y funktsiya berilgan y_0 songa teng bo'lishi kerak degan shart boshlang'ich shart deyiladi va ko'pincha $y\big|_{x=x_0}=y_0$ ko'rinishda yoziladi.

2. O'zgaruvchilari ajraladigan differentsial tenglamalar.

Ushbu

$$M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0$$

ko'rinishdagi tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama deyiladi. Bu tenglamaning ikkala tomonini $N_1(y)$ $M_2(x)$ ifodaga bo'lish yo'li bilan uni o'zgaruvchilari ajralgan tenglamaga keltirish mumkin:

$$\frac{M_1(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)}dx=-\frac{M_2(x)N_2(y)}{N_1(y)M_2(x)}dy, \qquad \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx=-\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy,$$

Oxirgi tenglikni ikkala tomonini integrallab $y=\varphi(x,c)$ umumiy echimni hosil qilamiz.

M i s o l: Tenglamani eching:

$$(1+x)ydx+(1-y)dy=0$$

Echimi. O'zgaruvchilarini ajratamiz:

$$\frac{(1+x)ydx}{xy}+\frac{(1-y)xdy}{xy}=0\ , \qquad \frac{(1+x)dx}{x}+\frac{(1-y)dy}{y}=0\ ,$$

$$\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\int\left(\frac{1}{y}-1\right)dy, \qquad ln|x|+x+ln|y|-y+c,$$

$$ln|xy| + x - y = c.$$

Keyingi munosabat berilgan integralning umumiy integrali deyiladi.

3. Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar.

Birinchi tartibli chiziqli tenglama deb

$$y'+P(x)y=Q(x) \qquad (2)$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi, bunda P(x), Q(x) lar x ning berilgan uzluksiz funktsiyalari (yoki o'zgarmas sonlar). (2) tenglamaning echimini x ning ikkita funktsiyasining ko'paytmasi shaklida izlaymiz:

$$y=u(x)v(x)$$

Bu tenglikning ikkala tomonini differentsiallaymiz.

$$y' = u'v + uv'$$

va y bilan y' qiymatlarini (2) tenglamaga qo'yamiz:

$$u'v + uv' + puv = Q \quad ,$$

yoki

$$uv' + u(v' + pv) = Q \qquad (3)$$

v funktsiyani

$$v' + pv = 0$$

tenglamadan topamiz. Buning uchun uning o'zgaruvchilarini ajratamiz:

$$\frac{dv}{v} = pdx \quad ,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int pdx \quad , \ \ln \cdot |v| = -\int p(x)dx \quad , \ v = e^{-\int pdx}$$

aniqlangan v funktsiya qiymatini (3) tenglamaga qo'yib noma'lum u funktsiyani topishimiz mumkin:

$$u'e^{-\int pdx} = Q \ , \ du = e^{-\int pdx}Q(x)dx \ , u = \int e^{-\int pdx}Q(x)dx + C$$

Demak, chiziqli birinchi tartibli differentsial tenglamaning umumiy echimi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$y = e^{-\int pdx}(\int e^{-\int pdx} \cdot Q(x)dx + C)$$

M i s o l : Ushbu tenglamani eching:

$$y' - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^3$$

Echimi. Umumiy echimni $y=u\cdot v$ ko'rinishda qidiramiz.

$y=u\cdot v$ va $y' = u'v + uv'$ hosilaning ifodalarini dastlabki tenglamaga qo'ysak, u

$$u'v + uv' - \frac{2}{x+1} u \cdot v = (x+1)^3 \quad ,$$

$$u'v + u(v' - \frac{2}{x+1} v) = (x+1)^3 \qquad (4)$$

ko'rinishga keladi.

v ni aniqlash uchun

$$v' - \frac{2}{x+1} v = 0$$

tenglamani echamiz:

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1} \quad , \int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|v| = 2\ln|x+1| \quad , v = (x+1)^2$$

Berilgan v funktsiyaning qiymatini (4) tenglamaga qo'yib u funktsiyani aniqlaymiz:

$$u'(x+1)^2 = (x+1)^3 \ , \ u' = x+1$$

$$du = (x+1)dx \quad , \quad \int du = \int (x+1)dx \quad , \quad u = \frac{(x+1)^2}{2} + C$$

Endi dastlabki tenglamaning umumiy echimini yozishimiz mumkin:

$$y = (x+1)^2 \left(\frac{(x+1)^2}{2} + C \right) \ .$$

S a v o l l a r :

1.Oddiy differentsial tenglamaga ta'rif bering.
2.Umumiy va xususiy echimlar nima?
3.O'zgaruvchilari ajraladigan differentsial tenglamalarni ta'riflang va umumiy echimini aniqlash tartibini keltiring.
4.Chiziqli birinchi tartibli differentsial tenglamalarni ta'riflang va umumiy echimni aniqlash tartibini keltiring.

10.2. BIR JINSLI VA TO'LA DIFFERENTsIALLI TENGLAMALAR. YuQORI TARTIBLI DIFFERENTsIAL TENGLAMALAR. $y^{(n)}=f(x)$ KO'RINISHDAGI TENGLAMALAR.

Tayanch iboralar: Birjinsli tenglama, to'la differentsialli tenglama, birjinsli funktsiya.

Reja:

1. Bir jinsli differentsial tenglamalar.
2. To'la differentsialli tenglamalar.
3. Yuqori tartibli differentsial tenglamalar.
4. $y^{(n)}=f(x)$ ko'rinishdagi tenglamalar.

Adabiyotlar:

[**1**]. VIII bob, §3, 9-10 [**4**]. XIII bob,§5, 9, 16-17

1) Bir jinsli differentsial tenglamalar.

TA'RIF: Agar λ ning har qanday qiymatida

$$f(\lambda x,\lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

ayniyat to'g'ri bo'lsa, $f(x,y)$ funktsiya x va y o'zgaruvchilarga nisbatan n o'lchovli bir jinsli funktsiya deb ataladi.

M i s o l : $f(x, y) = x^4 - y^4$,

$$f(\lambda x,\lambda y) = (\lambda x)^4 - (\lambda y)^4 = \lambda^4 (x^4 - y^4)$$

Demak , berilgan funktsiya 4 o'lchovli bir jinsli funktsiya ekan.

TA'RIF: Agar birinchi tartibli

$$y' = f(x, y)$$

$f(x,y)$ funktsiya x va y ga nisbatan nol o'lchovli bir jinsli funktsiya bo'lsa, bunday tenglama bir jinsli birinchi tartibli tenglama deyiladi. Uni, yana

$$y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bundan umumiy echimni $\frac{y}{x}=t(x)$ ko'rinishda izlash mumkinligi kelib chiqadi.

Darhaqiqat $y=t\cdot x$; $y'=t+xt'$ ekanligi uchun dastlabki bir jinsli birinchi tartibli tenglama

$$t+xt' = f(1,t)$$

ko'rinishga keladi. Bu erda o'zgaruvchilarni ajratib va kelib chiqqan tenglikning ikkala tomonini integrallab $t(x)$ funktsiyani aniqlaymiz:

$$x\frac{dt}{dx} = f(1,t)\text{-}t$$

$$\frac{dt}{f(1,t)-t} = \frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{dt}{f(1,t)-t} = \int \frac{dx}{x}.$$

Oxirgi tenglikdan t(x) ni topib $y=t\cdot x$ ga qo'ysak izlangan umumiy echimni topgan bo'lamiz.

M i s o l: Tenglamani eching:

$$y' = \frac{x+y}{x}$$

Echimi. $f(x\,,y)= \dfrac{x+y}{x}$, $\qquad f(\lambda x,\lambda y)= \dfrac{\lambda x+\lambda y}{\lambda x} = \dfrac{x+y}{x}$.

Berilgan tenglama bir jinsli ekan. Umumiy echimni

$$y=t\cdot x,\ y' = t+xt'$$

ko'rinishda qidiramiz:

$$t+xt' = \frac{x+tx}{x}, \qquad xt' = 1+t\text{-}t\ , \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x},$$

$$dt = \frac{dx}{x}, \qquad \int dt = \int \frac{dx}{x}, \qquad t = ln|\,x\,| + C,$$

$$y=t\cdot x=(\,ln|\,x\,|+C)\cdot x.$$

<u>2)To'la differentsialli tenglamalar</u>.

<u>TA'RIF:</u> Agar

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

tenglamada M(x,y) va N(x,y) funktsiyalar uzluksiz, differentsiallanuvchi bo'lib, ular uchun

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

munosobat bajarilsa, (1) tenglama to'la differentsial tenglama deyiladi. Agar (1) tenglamaning chap tomoni to'la differentsial bo'lsa, u holda (2) shartning bajarilishini va aksincha, (2) shart bajarilsa, (1) tenglamaning chap tomoni biror u(x,y) funktsiyaning to'la differentsiali bo'lishini isbotlaymiz, ya'ni (L) tenglamani kurinishi

$$d\,u(x,y)=0$$

bo'ladi, demak, uning umumiy integrali u(x,y)=c.

Dastlab, (1) tenglamaning chap tomonini biror u(x,y) funktsiyaning to'la differentsiali deb faraz qilamiz, ya'ni

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \qquad (3)$$

bu holda

$$M=\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad N=\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Birinchi munosobatni y bo'yicha, ikkinchi munosobatni esa x bo'yicha differentsiallab

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

tengliklarni hosil qilamiz.
Ikkinchi tartibli hosilalar uzluksiz deb faraz qilsak,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

bo'ladi. (2) tenglikning to'g'riligi isbotlandi.
(3) tenglamadan

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$$

ekanligi kelib chiqadi. Bundan

$$u=\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\varphi(y)$$

munosabatni topamiz, bu erda x_0 echim mavjud bo'lgan sohadagi ixtiyoriy nuqtaning abstsissasi, $\varphi(y)$ esa aniqlanishi kerak bo'lgan funktsiya.Oxirgi tenglikning ikkala tomonini y bo'yicha differentsiallaymiz va natijani $N(x,y)$ ga tenglaymiz:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}dx+\varphi'(x)=N(x,y) \quad ,$$

ammo $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ bo'lganligi uchun

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x}dx+\varphi'(y)=N \qquad , \qquad N(x,y)\Big|_{x_0}^{x}+\varphi'(y)=N(x,y) \quad ,$$

$$N(x,y)-N(x_0,y)+\varphi'(y)=N(x,y) \ , \ \varphi'(y)=N(x_0,y)$$

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy$$

Shunday qilib, to'la differentsialli tenglamaning umumiy echimi

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy=C$$

bo'lar ekan.

<u>3) Yuqori tartibli differentsial tenglamalar.</u>

n –tartibli differentsial tenglama berilgan bo'lsin:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ... y^{(n-1)}) \quad . \qquad (4)$$

TA'RIF: n–tartibli differentsial tenglamaning umumiy echimi deb n ta c_1 , c_2 ,…,c_n ixtiyoriy o'zgarmas miqdorga bog'lik bo'lgan va (4) tenglamaga qanoatlantiradigan

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

funktsiyaga aytiladi.

Umumiy echimdan c_1 , c_2 ,…,c_n o'zgarmas miqdorlarning tayin qiymatlarida hosil bo'ladigan har qanday funktsiya xususiy echim deb ataladi.

4) $y^{(n)} = f(x)$ ko'rinishdagi tenglamalar.

Eng sodda n-tartibli tenglama

$$y^{(n)} = f(x)$$

ko'rinishdagi tenglama bo'ladi. Uning har ikkala tomonini n marta integrallab umumiy echimini quyidagi ko'rinishda olamiz:

$$y = \int_{x_0}^{x} ... \int_{x_0}^{x} f(x)dx....dx + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}C_1 + \frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}C_2 + ... + C_n$$

M i s o l: Ushbu

$$y'' = \sin x$$

tenglamaning umumiy echimini toping.

Echimi. $$y' = \int_0^x \sin dx + C_1 = -\cos x + 1 + C_1$$

$$y = -\int_0^x (cosx - 1)dx + \int_0^x c_1 dx + c_2 \ , \ e = -\sin x + xc_1 + c_2 .$$

S a v o l l a r.

1.Bir jinsli birinchi tartibli tenglamalarni ta'riflang. Ularning umumiy echimlari qanday aniqlanadi?

2.To'la differentsial tenglamalarni ta'riflang. Ularning umumiy echimlari qanday aniqlanadi?

3.Yuqori tartibli differentsial tenglamalarni ta'riflang.

4.$y^{(n)}=f(x)$ ko'rinishdagi tenglamalarning umumiy echimini keltiring.

10.3. TARTIBI PASAYuVChI DIFFERENTsIAL TENGLAMALAR .

Tayanch iboralar: Tartibi pasayuvchi tenglamalar, umumiy integral, zanjir chiziq tenglamasi.

Reja:

1. Tartibi pasayuvchi differentsial tenglama.
2. Umumiy integral tushunchasi.
3. Zanjir chiziq tenglamasi.

Adabiyotlar:

[**1**]. VIII bob, §9-10 [**4**]. XIIIbob, §18

a) Ushbu

$$y''=f(x,y')$$

ko'rinishdagi tenglama noma'lum y funktsiyani oshkor holda o'z ichiga olmaydi. Umumiy echimni topish uchun

$$y' = \mathrm{p}(x)$$

belgi kiritamiz. Bu holda

$$y''= \mathrm{p}'$$

bo'ladi.

y' va y'' larni dastlabki tenglamaga qo'yib x ning noma'lum r funktsiyaga nisbatan birinchi tartibli

$$\mathrm{p}'= f(x,,\mathrm{p})$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani integrallab, uning

$$\mathrm{p}=\mathrm{p}(x,C_1)$$

umumiy echimni topamiz, undan keyin y'=p munosobatdan

$$y=\int p(x,C_1)dx + C_2$$

umumiy echimni topamiz.

M i s o l : Zanjir chiziqning

$$y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+y'}$$

differentsial tenglamasini qaraymiz.

$$y' = \mathrm{p}$$

deb olamiz, u holda

$$y'' = \mathrm{p}'$$

demak, x ning yordamchi P funktsiyasiga nisbatan birinchi tartibli

$$\mathrm{p}' = \frac{1}{a}\sqrt{1+y'}$$

differentsial tenglama hosil bo'ladi.

O'zgaruvchilarini ajratsak,

$$\frac{dP}{\sqrt{1+P^2}} = \frac{dx}{a},$$

$$\ln(P+\sqrt{1+P^2}) = \frac{x}{a} + C_1$$

$$P = sh\frac{x}{a} + C_1$$

Ammo y'=p bo'lgani uchun, keyingi munosobat izlanayotgan y funktsiyaga nisbatan differentsial tenglamani ifodalaydi. Uni integrallasak, zanjir chiziqning tenglamasi hosil bo'ladi:

$$y = a\,ch\frac{x}{a} + C_1x + C_2$$

Ushbu

$$y\big|_{x=0}=a, \qquad y'\big|_{x=0}=0$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy echimni topamiz. Birinchi shart C_2=0 va ikkinchi shart C_1=0 ni beradi.

Natijada

$$y = a\,ch(\frac{x}{a})$$

ifodani hosil qilamiz.

I z o x: Shunday usul bilan

$$y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)})$$

tenglamani ham integrallash mumkin.

$y^{(n-1)}$= p deb olib p ni aniqlash uchun

$$p' = f(x,,p)$$

tenglamani hosil qilamiz.

Bundan p ni x ning funktsiyasi kabi aniqlab, $y^{(n-1)}$= p munosobatdan y ni topamiz.

b) x erkla o'zgaruvchini oshkor holda o'z ichiga olmagan

$$y'' = f(y\,;\,y')$$

ko'rinishdagi tenglamani qaraymiz. Bu tenglamani echish uchun yana

$$y' = p(y)$$

deb olamiz. Ammo endi p ni y ning funktsiyasi deb hisoblaymiz. Bu holda

$$y'' = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p'\cdot p.$$

y' va y'' hosilalarning ifodalarini

$$y'' = f(y\,;\,y')$$

tenglamaga qo'yib, yordamchi p funktsiyaga nisbatan birinchi tartibli

$$pp' = f(y,p)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bunda p ni y va ixtiyoriy C_1 o'zgarmas miqdorning funktsiyasi kabi aniqlaymiz:

$$p = p(y, C_1)$$

Bu qiymatni

$$y' = p$$

munosobatga qo'ysak,x ning u funktsiyasi uchun

$$y' = p(y, C_1)$$

differentsial tenglama hosil bo'ladi. O'zgaruvchilarni ajratib,

$$\frac{dy}{p(y,C_1)}=dx$$

tenglamani hosil qilamiz.

Oxirgi tenglamani integrallab, dastlabki tenglamaning

$$\Phi(x,y,C_1,C_2)=0$$

umumiy integralni topamiz.

M i s o l: Ushbu

$$3y''=y^{-\frac{5}{3}}$$

tenglamaning umumiy integralini toping.

Echimi. p ni y ning funktsiyasi ekanini bilgan holda y'=p deb olamiz. Bu holda y''=p′·p bo'ladi va biz yordamchi p funktsiya uchun birinchi tartibli tenglama hosil qilamiz:

$$3pp'=y^{-\frac{5}{3}}$$

Bu tenglamani integrallaymiz:

$$p^2=C_1y^{-\frac{2}{3}}, \qquad p=\pm\sqrt{C_1-y^{-\frac{2}{3}}}$$

Ammo y'=p , demak, y ni aniqlash uchun

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1-y^{-\frac{2}{3}}}}=dx \quad , \quad \frac{y^{\frac{1}{3}}dy}{\pm\sqrt{C_1y^{\frac{2}{3}}-1}}=dx$$

tenglamani hosil qilamiz, bundan

$$x+C_2=\pm\int\frac{y^{\frac{1}{3}}dy}{\sqrt{C_1y^{\frac{2}{3}}-1}}$$

keyingi integralni hisoblash uchun

$$C_1y^{\frac{2}{3}}-1=t^2$$

almashtirish bajaramiz. Bu holda

$$y^{\frac{1}{3}}=(t^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{C_1^{\frac{1}{2}}} \quad , \quad dy=3t(t^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{C_1^{\frac{1}{2}}}dt$$

Demak

$$\int \frac{y^{\frac{1}{2}}dy}{\sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1}} = \frac{1}{C_1^2}\int \frac{3t(t^2+1)}{t}dt = \frac{3}{C_1^2} = \left(\frac{t^3}{3} + t\right) =$$

$$= \frac{1}{C_1^2}\sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1}\cdot(C_1 y^{\frac{2}{3}} + 2) \quad .$$

Oxirgi natijadan

$$x + C_2 = \pm\frac{1}{C_1^2}\sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1}\cdot(C_1 y^{\frac{2}{3}} + 2)$$

ekanini topamiz.

S a v o l l a r.

1.Tartibi pasayuvchi ikkinchi tartibli differentsial tenglamalar turlarini keltiring.
2.Tartibi pasayuvchi ikkinchi tartibli differentsial tenglamalarning umumiy echimlari qanday aniqlanadi?

10.4. YUQORI TARTIBLI CHIIZIQLI O'ZGARMAS KOEFFITSENTLI BIR JINSLI DIFFERENTSIAL TENGLAMALAR.

Tayanch iboralar: Chiziqli erkli funktsiyalar, Vronskiy determinanti, xarakteristik tenglama.

Reja:

1. Bir jinsli chiziqli tenglamalar.
2. O'zgarmas koeffitsentli 2-tartibli bir jinsli chiziqli tenglamalar.
3. O'zgarmas koeffitsentli n-tartibli bir jinsli tenglamalar.

Adabiyotlar:

[**1**]. VIII bob, §11-19 [**4**]. XIIIbob, §20-22

1) Bir jinsli chiziiqli tenglamalar.

TA'RIF: Agar n-tartibli differrentsial tenglama noma'lum y funktsiya va uning y', y'',…, $y^{(n-1)}$ hosilalariga nisbatan birinchi darajali bo'lsa, bunday tenglama chiziqli differentsial tenglama deyiladi:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \qquad (1)$$

bunda a_0,, a_1, a_2,…, a_n va $f(x)$ lar x ning ma'lum funktsiyalari yoki o'zgarmas sonlar. Bundan keyin a_0,, a_1, a_2,…, a_n va $f(x)$ funktsiyalarning x ning barcha qiymatlarida

uzluksiz funktsiya va a_0 koeffitsent birga teng deb faraz qilamiz. (1) tenglamaning o'ng tomonida turgan $f(x)$ funktsiya tenglamaning o'ng tomoni deb ataladi.

Agar $f(x)\neq 0$ bo'lsa, bu holda tenglama bir jinslimas chiziqli tenglama deyiladi.

Agar $f(x)=0$ bo'lsa, bu holda tenglama

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0 \qquad (2)$$

ko'rinishda bo'ladi va bir jinsli chiziqli tenglama deb aytiladi.

Bir jinsli chiziqli tenglamalarning ba'zi xossalarini 2-tartibli tenglamalar misolida kursatamiz.

TEOREMA: Agar y_1 va y_2 2- tartibli bir jinsli chiziqli

$$y''+a_1y'+a_2y=0 \qquad (3)$$

tenglamaning ikkita xususiy echimi bo'lsa , u holda y_1+y_2 ham bu tenglamaning echimi bo'ladi.

I s b o t : Teoremaning shartlari bajarilgan bo'lsin, quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi:

$$(y_1+y_2)''+a_1(y_1+y_2)'+a_2(y_1+y_2)=(y_1''+a_1y_1'+a_2y_1)+y_2''+a_1y_2'+a_2y=0$$

Teorema isbotlandi.

TEOREMA: Agar y_1 funktsiya (3) ning echimi bo'lsa , u holda $C\cdot y_1$ ham (3) tenglamaning echimi bo'ladi.

I s b o t: Teoremaning sharti bajarilgan bo'lsin, unda uning isboti quyidagi tengliklardan kelib chiqadi:

$$(C\cdot y_1)''+a_1(C\cdot y_1)'+a_2(C\cdot y_1)=C(y''+a_1y'+a_2y=0)=C\cdot 0=0.$$

<u>TA'RIF:</u> Agar [a;в] kesmada (3) tenglama ikkita y_1 va y_2 echimining nisbati o'zgarmas miqdorga teng bo'lmasa, ya'ni $\frac{y_1}{y_2}\neq const$ bo'lsa, y_1 va y_2 echimlar [a;в] kesmada chiziqli bog'lik bo'lmagan echimlar deyiladi.

<u>TA'RIF</u>: Agar y_1 va y_2 larning funktsiyasi bo'lsa, u holda

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

determinant Vronskiy determinanti deyiladi.

TEOREMA: Agar y_1 va y_2 funktsiyalar [a;в] kesmada chiziqli bog'lik bo'lsa, u holda bu kesmada Vronskiy determinanti aynan nolga teng bo'ladi.

I s b o t: $y_2=\lambda y_1$ bo'lsa , u holda $y'_2=\lambda y'_1$ bo'ladi va

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_2 \\ y_1' & \lambda y_2' \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=0$$

TEOREMA: Agar (3) tenglamaning y_1 va y_2 echimlari [a;в] kesmada chiziqli erkli bo'lsa, bu echimlardan tuzilgan Vronskiy determinanti ko'rsatilgan kesmaning hech bir nuqtasida nolga aylanmaydi.

Bu va keyingi teoremani isbotsiz qabo'l qilamiz.

TEOREMA: Agar y_1 va y_2 funktsiyalar (3) tenglamaning ikkita chiziqli erkli echimi bo'lsa, u holda

$$y=C_1y_1+C_2y_2$$

(bunda C_1 va C_2-ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlar), (3) tenglamaning umumiy echimi bo'ladi. Bunda y_1 va y_2 echimlar (3) tenglamaning asosiy echimlari deb aytiladi.

2) O'zgarmas koeffitsientli 2-tartibli bir jinsli chiziqli tenglamalar.

Ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglama

$$y''+p\,y'+q\,y=0 \qquad (4)$$

berilgan bo'lsin, bunda p va q o'zgarmas xaqiqiy sonlar.

Bu tenglamaning ikkita chiziqli erkli xususiy echimini $y=e^{kx}$ ko'rinishda izlaymiz, (k=const). Bu holda $y'=k\,e^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$. y, y', y'' lar qiymatlarini (4) tenglamaga qo'ysak.

$$e^{kx}\cdot(k^2+pk+q)=0$$

munosobat hosil bo'ladi. Ammo $e^{kx}\neq 0$, demak

$$k^2+pk+q=0$$

tenglik hosil bo'ladi. Bu tenglama (4) tenglamaning xarakteristik tenglamasi deb aytiladi.

Bunda

$$k_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,, \qquad k_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,.$$

quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

1) k_1 va k_2 xaqiqiy va bir-biriga teng bo'lmagan sonlar, ($k_1\neq k_2$). Bu holda

$$y_1=e^{k_1x}\,, \qquad y_2=e^{k_2x}$$

funktsiyalar xususiy echimlar bo'ladi.

Bu echimlar

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{e^{k_2x}}{e^{k_1x}}=e^{(k_2-k_1)x}\neq 0$$

bo'lgani uchun chiziqli erkli bo'ladi. Demak umumiy echim

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$$

ko'rinishda bo'ladi.

2) Xarakteristik tenglamaning ildizlari xaqiqiy va teng bo'lganda, ya'ni $k_1=k_2$ umumiy echim

$$y=(C_1+C_2x)\,e^{k_1x} \qquad (5)$$

ko'rinishda bo'ladi.

3) Xarakteristik tenglamaning ildizlari kompleks sonlar bo'lgan holda, ya'ni $k_1=\alpha-i\beta$ va $k_2=\alpha+i\beta$ bo'lganda umumiy echim

$$y=e^{\alpha k}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x) \qquad (6)$$

ko'rinishda bo'ladi.

(5) va (6)munosobatlarni isbotsiz qabo'l qilamiz.

3) O'zgarmas koeffitsientli n-tartibli bir jinsli tenglamalar.

n-tartibli bir jinsli chiziqli

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=0 \qquad (7)$$

tenglamani qaraymiz. $a_1, a_2,\ldots, a_n$ larni o'zgarmas sonlar deb faraz qilamiz.

TA'RIF: Agar [a;в] kesmada x ning barcha qiymatlari uchun

$$\varphi_n(x)=A_1\varphi_1(x)+ A_2\varphi_2(x)+\ldots +A_{n-1}\varphi_{n-1}(x)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, bunda A_1, A_2,…, A_n hammasi bir vaqtda nolga teng bo'lmaydigan o'zgarmas sonlar, u holda $\varphi_n(x)$ funktsiya $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …,$\varphi_{n-1}(x)$ funktsiyalar orqali chiziqli ifoda etiladi deyiladi. Agar n ta $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,…, $\varphi_{n-1}(x)$, $\varphi_n(x)$ funktsiyalarning hech biri qolganlari orqali chiziqli ifoda etilmasa, u funktsiyalar chiziqli erkli funktsiyalar deb ataladi.

TEOREMA: Agar y_1 , y_2 ,…, y_n funktsiyalar (7) tenglamaning chiziqli erkli echimlari bo'lsa, u holda

$$y = C_1y_1 + C_2y_2+\ldots+ C_ny_n)$$

uning umumiy echimi bo'ladi, bunda C_1, C_2,…C_n ixtiyoriy o'zgarmas sonlar. Umumiy echim quyidagicha topiladi:

1) Xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$k^n +a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} +\ldots+ a_n =0.$$

2) Xarakteristik tenglamaning k_1 , k_2 ,…,k_n ildizlarini topamiz.
3) Har bir karrali k ildizga e^{kx} xususiy echim mos keladi.
4) Xar bir juft $k^{(1)} =\alpha-i\beta$, $k^{(2)} =\alpha+i\beta$ qo'shma kompleks bir karrali ildizlarga ikkita $e^{\alpha x}\cos\beta x$ va $e^{\alpha x}\sin\beta x$ xususiy echimlar to'g'ri keladi.
5) Xar bir r karrali xaqiqiy ildizga r ta chiziqli erkli

$$e^{kx} , x e^{kx} , \ldots, x^{2-1} e^{kx}$$

xususiy echimlar to'g'ri keladi.

6) Xar bir μ karrali juft $k^{(1)} =\alpha-i\beta$, $k^{(2)} =\alpha+i\beta$ qo'shma kompleks ildizga 2μ ta

$$e^{\alpha x}\cos\beta x ,x e^{\alpha x}\cos\beta x ,\ldots, x^{\mu-1} e^{\alpha x}\cos\beta x ,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x , x e^{\alpha x}\sin\beta x ,\ldots, x^{\mu-1} e^{\alpha x}\sin\beta x$$

xususiy echimlar to'g'ri keladi.

7) n ta chiziqli erkli y_1 , y_2 ,…, y_n xususiy echimlarni topgandan so'ng (7) tenglamaning umumiy echimi tuziladi:

$$y = C_1 y_1 +C_2 y_2 +\ldots+C_ny_n$$

M i s o l : Tenglamaning umumiy echimini toping :

u(4)-u q0

Echimi. Xarakteristik tenglamani tuzib ildizlarini aniqlaymiz:

$$k^4 –1=0 , k_1=1, k_2= -1 , k_3 = i , k_4= - i$$

Endi umumiy echimni yozishimiz mumkin:

$$y =C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x +C_4\sin x .$$

S a v o l l a r.

1. Yuqori tartibli chiziqli o'zgarmas koeffitsientli birjinsli differentsial tenglamalarni ta'riflang va xossalarini keltiring.

10.5. O'ZGARMAS KOEFFITsENTLI IKKINChI TARTIBLI BIR JINSLIMAS ChiziqLI TENGLAMALAR.

Tayanch iboralar: Variatsiyalash usuli, noma'lum koeffitsientlar usuli.

Reja:

1. Bir jinslimas II tartibli chiziqli tenglamalar.
2. Ixtiyoriy o'zgarmaslarni variatsiyalash usuli.
3. O'zgarmas koeffitsentli ikkinchi tartibli bir jinslimas chiziqli tenglamalar.

Adabiyotlar:

[**1**]. VIII bob, §20-21 [**4**]. XIII bob, §23-25

1)Bir jinslimas ikkinchi tartibli chiziqli tenglamalar.

Bir jinslimas ikkinchi tartibli chiziqli tenglamalar deb

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \qquad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi. Bunda a_1, a_2,, f bir o'zgaruvchili funktsiyalar yoki o'zgarmaslar.

TEOREMA: Bir jinslimas (1) tenglama umumiy echimi bu tenglamaning biror $y*$ xususiy echimi bilan mos bir jinsli

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (2)$$

tenglamaning $\bar{y}$ umumiy echimi yig'indisi kabi ifodalanadi, ya'ni

$$y = \bar{y} + y*$$

Teoremani isbotsiz qabo'l qilamiz.

2) Ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlarni variatsiyalash usuli.

Bir jinsli (2) tenglamaning umumiy echimi topildi deb faraz qilamiz:

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad (3)$$

Bu erda C_1 va C_2 lar o'zgarmas miqdorlar.

(1) tenglamaning xususiy echimi $y*$ ni aniqlash uchun (3) munosobatda C_1 va C_2 lar o'zgarmas miqdorlarni x ning funktsiyasi deb olib $y*$ ni

$$y* = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 \qquad (4)$$

ko'rinishda qidiramiz. Bunda $C_1(x)$ va $C_2(x)$ funktsiyalar aniqlash kerak bo'lgan noma'lum funktsiyalar.

(4) tenglikni differentsiallaymiz:

$$y*' = C_1(x) y_1' + C_2(x) y_2' + C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2$$

$C_1(x)$ ва $C_2(x)$ funktsiyalarni

$$C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \qquad (5)$$

tenglik bajariladigan qilib tanlab olamiz. Unda birinchi tartibli $(y*)'$ hosila

$$y^{*\prime}=C_1(x)\,y_1'+C_2(x)\,y_2' \qquad (6)$$

ko'rinishga keladi. Endi bu ifodani differentsiallab, $(y^*)''$ ni topamiz:

$$y^{*\prime\prime}=C_1(x)\,y_1''+C_2(x)\,y_2''+C_1'(x)\,y_1'+C_2'(x)\,y_2' \qquad (7)$$

(4), (6), (7) lardagi y^*, $(y^*)'$,$(y^*)''$ qiymatlarini (1) tenglamaga qo'yib

$$C_1(x)\,y_1''+C_2(x)\,y_2''+C_1'(x)\,y_1'+C_2'(x)\,y_2'+$$
$$+a_1(C_1(x)\,y_1'+C_2(x)\,y_2')+a_2(C_1(x)\,y_1+C_2(x)\,y_2)=f(x)$$

yoki

$$C_1(x)(y_1''+a_1y_1'+a_2y_1)+C_2(x)(y_2''+a_1y_2'+a_2y_2)+$$
$$+C_1'(x)y_1'+C_2'(x)\,y_2'=f(x)$$

tenglikni hosil qilamiz. Agar y_1 va y_2 funktsiyalar (2) tenglamaning echimlari ekanligini nazarga olsak, oxirgi tenglik

$$C_1'(x)y_1'+C_2'(x)\,y_2'=f(x) \qquad (8)$$

ko'rinishni oladi.Shunday kilib, noma'lum $C_1(x)$ va $C_2(x)$ funktsiyalarni aniqlash uchun (5) va (8) tengliklardan tuzilgan tenglamalar sistemasini echish kerak. Aniqlangan $C_1(x)$ va $C_2(x)$ funktsiyalarni (4) ga qo'yib y^* xususiy echimni topamiz.

M i s o l: Ushbu

$$y''-\frac{1}{x}y'=x$$

tenglamaning umumiy echimini toping.

Echimi. Umumiy echimni

$$y=\bar{y}+y^*$$

ko'rinishda qidiramiz. $\bar{y}$ umumiy echimni

$$\bar{y}''-\frac{1}{x}\bar{y}'=0$$

tenglamadan topamiz:

$$\frac{\bar{y}''}{\bar{y}'}=\frac{1}{x}, \qquad \frac{d\bar{y}'}{\bar{y}'}=\frac{dx}{x},$$

$$\ln\bar{y}'=\ln x+\ln C, \qquad \bar{y}'=C_1x.$$

demak

$$\bar{y}=C_1x^2+C_2.$$

Xususiy y^* echimni

$$y^*=C_1(x)\cdot x^2+C_2(x)$$

ko'rinishda qidiramiz. Buning uchun (5) va (8) tenglamalar sistemasini tuzib $C_1(x)$ va $C_2(x)$ noma'lum funktsiyalarni topamiz:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot x^2+C_2'(x)=0 \\ 2C_1'(x)\cdot x^2+C_2'(x)\cdot 0=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x)=\dfrac{1}{2} \\ C_2'(x)=-\dfrac{1}{2}x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x)=\dfrac{x}{2}+\overline{C}_1 \\ C_2(x)=-\dfrac{x^3}{2}+\overline{C}_2 \end{cases}.$$

$y*$ xususiy echim

$$y*=\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}=\frac{x^3}{3}$$

ko'rinishda ekan.

Demak, dastlabki tenglamaning umumiy echimi

$$y=C_1x^2+C_2+\frac{x^3}{3}$$

bo'ladi.

3) O'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinslimas chiziqli tenglamalar.

Ushbu

$$y''+p\,y'+q\;y=f(x) \qquad (9)$$

tenglama berilgan bo'lsin, bunda p, q lar haqiqiy sonlar.

(9) tenglamaning umumiy echimini

$$y=\bar{y}+y*$$

ko'rinishda izlaymiz. Bunda $\bar{y}$ (9) tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy echimi, $y*$ esa (9) tenglamaning xususiy echimi.

$\bar{y}$ ni topish uchun

$$k^2+p\,k+q=0$$

xarakteristik tenglamani echib

$$\bar{y}=C_1\,y_1+C_2\,y_2$$

umumiy echimni tuzamiz.

(9) tenglamaga o'zgarmas koeffitsientli tenglama ekanligi uchun, ba'zan, xususiy $y*$ echimni osonroq topiladi. (9) tenglamaning ung tomoni ko'rsatkichli funktsiya bilan ko'phad ko'paytmasidan iborat

$$f(x)=P_n(x)\,e^{\alpha k}$$

ko'rinishda bo'lsin, bunda $P_n(x)$ n-darajali ko'phad. U holda quyidagi xususiy hollar bo'lishi mumkin:

1) α soni $\qquad k^2+p\,k+q=0$

xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lmagan hol.

Bu holda xususiy ечим

$$y*=x(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n)\,e^{\alpha k}.$$

ko'rinishda izlash kerak. Bu erdagi $y*$ ni (9) tenglamaga qo'yib, tenglamaning ikkala tomonidagi $e^{\alpha k}x$ lar oldidagi koeffitsientlarni bir-biriga tenglab olsak, noma'lum $A_0, A_1,\ldots, A_n$ koeffitsientlarni topish uchun $(n+1)$ noma'lumli $(n+1)$ tenglamali chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bunday usul noma'lum koeffitsientlar usuli deb aytiladi. Agar shu sistemadan$A_0, A_1,\ldots, A_n$ larni topsak, $y*$ ni yozishimiz mumkin bo'ladi.

2) α xarakteristik tenglamaning bir karrali ildizi bo'lgan hol. Bunday holda xususiy echimni

$$y*=(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n)x\,e^{\alpha k}.$$

ko'rinishda qidirish maqsadga muvofiq. A_0, A_1,…, A_n lar yuqorida ko'rsatilgan noma'lum koeffitsientlar usuli orqali aniqlanadi.

v) α son xarakteristik tenglamaning ikki karrali ildizi bo'lgan holda xususiy $y*$ echimni

$$y*=x^2(A_0 x^n + A_1 x^{n-1}+\ldots+A_n)\, e^{\alpha k}.$$

ko'rinishda izlab, A_0, A_1,…,A_n larni noma'lum koeffitsientlar usuli orqali aniqlaymiz.

M i s o l: Ushbu tenglama echilsin

$$y''-7y'+6y=(x-2)\, e^x.$$

Echimi. Umumiy echimni

$$y=\bar{y}+y*$$

ko'rinishda qidiramiz. $\bar{y}$ mos bir jinsli tenglamaning umumiy echimidir. Uni yozish uchun

$$k^2-7k+6=0$$

xarakteristik tenglamaning ildizlarini topamiz: $k_1=1$, $k_2=6$

Demak, $\bar{y}=C_1 e^x+C_2 e^{6x}$

$y*$ xususiy echimni ($\alpha=k_1=1$)

$$y*=x(Ax+B)\, e^x$$

ko'rinishda qidiramiz. A va V larni topish uchun noma'lum koeffitsientlar usulidan foydalanamiz:

$$y*''-7y*'+6y*=[(Ax^2+Bx)+(4Ax+2B)+2A-7(Ax^2+Bx)-7(2Ax+2B)+$$
$$+6(Ax^2+Bx)]\, e^x=(x-2)\, e^x,$$

yoki $$(-10Ax-5B+2A)\, e^x=(x-2)\, e^x,$$

$$-10A=1, \quad -5B+2A=-2, \quad A=-\frac{1}{10}, \quad B=\frac{9}{25},$$

Shunday qilib xususiy echim

$$y*=x(-\frac{1}{10}x+\frac{9}{25})\, e^x$$

va umumiy echim

$$y=C_1 e^x+C_2 e^{6x}+x\,(-\frac{1}{10}x+\frac{9}{25})\, e^x$$

bo'ladi.

S a v o l l a r:

1. O'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinslimas chiziqli tenglamalarni ta'riflang.
2. Ixtiyoriy o'zgarmaslarni variatsiyalash usulini keltiring.

10.6. O'ZGARMAS KOEFFITsIENTLI ChIZIQLI DIFFERENTsIAL TENGLAMALAR SISTEMASI.

Tayanch iboralar: Differentsial tenglamalar sistemasi, sistemaning xususiy echimlari, sistemaning umumiy echimlari, sistemaning determinanti, xarakteristik tenglama.

Reja:

1. Differentsial tenglamalar sistemasi.
2. Sistemaning xususiy echimlari.
3. Sistemaning umumiy echimlari.
4. Sistemaning determinanti.
5. Xarakteristik tenglama.

Adabiyotlar:

[**1**]. VIII bob, §22 [**4**]. XIII bob, §29-30

Ushbu

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \frac{dy_2}{dx} &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

differentsial tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin, bunda a_{ij} koeffitsientlar o'zgarmas sonlar, x argument, $y_1(x)$, $y_2(x)$,…,$y_n(x)$ izlanayotgan funktsiyalar. (1) sistema o'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli differentsial tenglamalar sistemasi deyiladi. Uning xususiy echimini quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$y_1 = \alpha_1 e^{\kappa x},\ y_2 = \alpha_2 e^{\kappa x},\ldots,\ y_n = \alpha_n e^{\kappa x} \qquad (2)$$

$\alpha_1 e^{\kappa x}$, $\alpha_2 e^{\kappa x}$,…, $\alpha_n e^{\kappa x}$ funktsiyalar (1) tenglamalar sistemasini qanoatlantiradigan o'zgarmas α_1 , α_2 ,…, α_n va k sonlarni aniqlash talab qilinadi. Ularni (1) sistemaga qo'yib ushbo'larni hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned} \kappa\alpha_1 e^{\kappa x} &= (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n)e^{\kappa x} \\ \kappa\alpha_2 e^{\kappa x} &= (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n)e^{\kappa x} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \kappa\alpha_n e^{\kappa x} &= (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n)e^{\kappa x} \end{aligned}\right\}$$

$e^{\kappa x}$ ga qisqartiramiz. Barcha hadlarini bir tomonga o'tkazib va α_1 , α_2 , …,α_n oldidagi koeffitsientlarni to'plab, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11}-\kappa)\alpha_1+a_{12}\alpha_2+...+a_{1n}\alpha_n=0\\ a_{21}\alpha_1+(a_{22}-\kappa)\alpha_2+...+a_{2n}\alpha_n=0\\ .....\\ a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+...+(a_{nn}-\kappa)\alpha_n=0\end{array}\right\} \qquad (3)$$

α_1, α_2, … ,α_n , va k larni (3) sistemani qanoatlantiradigan qilib tanlab olamiz. Bu tenglama α_1, α_2, … ,α_n, ga nisbatan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasidir. (3) sistemaning determinantini tuzamiz:

$$\Delta(\kappa)=\begin{vmatrix}a_{11}-\kappa & a_{12}...a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\kappa...a_{2n}\\ ..... & \\ a_{n1} & a_{n2}.....(a_{nn}-\kappa)\end{vmatrix} \qquad (4)$$

Agar k shunday bo'lsaki, $\Delta\neq0$ bo'lsa, u holda (3) sistema faqat

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$$

echimga ega bo'ladi va (2)dan

$$y_1=y_2=\ldots=y_n=0$$

(1)sistemaning echimi kelib chiqadi. Bunday echimlar bizni kiziqtirmaydi. (1) tenglamalar sistemasining noldan farqli (2) ko'rinishdagi echimlarni k ning shunday qiymatlarida hosil qilamizki, bu qiymatlarda (4) determinant nolga aylanadi. Demak, k ni aniqlash uchun quyidagi tenglamaga kelamiz:

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\kappa & a_{12} & ...a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\kappa & ...a_{2n}\\ ..... & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ...\ a_{nn}-\kappa\end{vmatrix}=0 \qquad (5)$$

Bu tenglama (1) cistemaning xarakteristik tenglamasi deyiladi, uning ildizlari xarakteristik tenglamaning ildizlari deyiladi. Bir necha holni ko'rib chiqamiz.

1) Xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va har xil.

Xarakteristik tenglamaning ildizlarini k_1, k_2 ,…, k_n bilan belgilaymiz. Har bir k ildiz uchun (3) cistemani yozamiz va

$$\alpha_1^{(i)},\alpha_2^{(i)},...,\alpha_n^{(i)}$$

koeffitsientlarni aniqlaymiz. Shunday qilib, quyidagilarni hosil qilamiz:

κ_1 ildiz uchun (1) sistemaning echimi

$$y_1^{(1)}=\alpha_1^{(1)}e^{\kappa_1 x},\quad y_2^{(1)}=\alpha_2^{(1)}e^{\kappa_1 x},\quad \ldots,\ y_n^{(1)}=\alpha_n^{(1)}e^{\kappa_1 x},$$

κ_2 ildiz uchun (1) sistemaning echimi

$$y_1^{(2)}=\alpha_1^{(2)}e^{\kappa_2 x},\quad y_2^{(2)}=\alpha_2^{(2)}e^{\kappa_2 x},\quad \ldots,\ y_n^{(2)}=\alpha_n^{(2)}e^{\kappa_2 x};$$

. . . . . .

κ_n ildiz uchun (1) sistemaning echimi

$$y_1^{(n)}=\alpha_1^{(n)} e^{\kappa_n x}, \quad y_2^{(n)}=\alpha_2^{(n)} e^{\kappa_n x}, \quad \ldots, y_n^{(n)}=\alpha_n^{(n)} e^{\kappa_n x}.`$$

Bevosita (1) tenglamaga qo'yish yuli bilan

$$\begin{cases} y_1 = C_1\alpha_1^{(1)}e^{л_1 x} + C_2\alpha_1^{(2)}e^{л_2 x} + \ldots + C_n\alpha_1^{(n)}e^{л_n x} \\ y_2 = C_1\alpha_2^{(1)}e^{л_1 x} + C_2\alpha_2^{(2)}e^{л_2 x} + \ldots + C_n\alpha_2^{(n)}e^{л_n x} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_1 = C_1\alpha_n^{(1)}e^{л_1 x} + C_2\alpha_n^{(2)}e^{л_2 x} + \ldots + C_n\alpha_n^{(n)}e^{л_n x} \end{cases}$$

funktsiyalar sistemasi ham , bunda C_1, C_2, …,C_n ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlar, (1) differentsial tenglamalar sistemasining echimi bo'lishiga ishonch hosil qilish mumkin. Bu (1) sistemaning umumiy echimidir. O'zgarmas miqdorlarning shunday qiymatlarini topish mumkinki, bu qiymatlarda echimning berilgan boshlang'ich

$$y_1 \big| x = x_0 = y_{10}, \qquad y_2 \big| x = x_0 = y_{20}, \ \ldots, \quad y_n \big| x = x_0 = y_{n0};$$

shartlarni qanoatlantirishini ko'rsatish mumkin, bunda x_0, y_{10}, y_{20}, … , y_{n0} oldindan ma'lum sonlar.

M i s o l: Ushbu

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 + 2y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiningumumiy echimini toping.

Echimi. Xarakteristik tenglama tuzamiz :

$$\begin{vmatrix} 2-\kappa & 2 \\ 1 & 3-\kappa \end{vmatrix} = 0$$

yoki $k^2-5k+4=0$, $k_1=1$, $k_2=4$.

Sistema echimini bunday ko'rinishda izlaymiz:

$$y_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)}e^{x}, \qquad y_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)}e^{x},$$

$$y_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)}e^{4x}, \qquad y_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)}e^{4x},$$

$k_1=1$ ildiz uchun (3) sistemani tuzamiz:

va $\alpha_1^{(1)}$ в $\alpha_2^{(1)}$ ni aniqlaymiz·

$$\begin{cases} (2-1)\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0 \\ \alpha_1^{(1)} + (3-2)\alpha_2^{(1)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0 \\ \alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0 \end{cases}$$

Bu tengliklardan $\alpha_2^{(1)} = -\dfrac{1}{2}\alpha_1^{(1)}$ ni topamiz. $\alpha_1^{(1)} = 1$desak, $\alpha_2^{(1)} = -\dfrac{1}{2}$ ni hosil qilamiz. Shunday qilib, sistemaning echimini hosil qildik:

$$y_1^{(1)} = e^x, \qquad y_2^{(1)} = -\frac{1}{2}e^x.$$

Endi k_2=4 ildiz uchun (3) sistemani tuzamiz va $\alpha_1^{(2)}$ va $\alpha_2^{(2)}$ ni aniqlaymiz:

$$\begin{cases} -2\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} = 0 \\ \alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \{\alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)}.$$

$\alpha_1^{(2)} = 1$ desak $\alpha_2^{(2)} = 1$ bo'ladi. Sistemaning ikkinchi echimini hosil qildik:

$$y_1^{(2)} = e^{4x}, \qquad y_2^{(2)} = e^{4x}.$$

Endi sistemaning umumiy echimini yozamiz:

$$y_1 = C_1e^x + C_2e^{4x}$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}C_1e^x + C_2e^{4x}$$

2) Xarakteristik tenglamaning ildizlari har xil, ammo ular orasida kompleks ildizlar ham bor.

Xarakteristik tenglamaning ildizlari orasida ikkita ko'shma kompleks ildiz bo'lsin:

$$\kappa_1 = \alpha + i\beta \ , \quad \kappa_2 = \alpha - i\beta$$

Bu ildizlarga ushbu echimlar mos bo'ladi:

$$y_j^{(1)} = \alpha_j^{(1)} e^{(\alpha + i\beta)}, \qquad j = 1,2,...,n.$$

$$y_j^{(2)} = \alpha_j^{(2)} e^{(\alpha - i\beta)}, \qquad j = 1,2,...,n.$$

$\alpha_j^{(1)}$ va $\alpha_j^{(2)}$ koeffitsientlar (3) tenglamalar sistemasidan aniqlanadi.

Dastlabki sistemaning kompleks echimining haqiqiy qismlari yana echim bo'lishidan foydalanib quyidagilarni yozishimiz mumkin:

$$\begin{cases} \bar{y}_j^{(1)} = e^{\alpha x}(\lambda_j^{(1)} \cos\beta x + \lambda_j^{(2)} \sin\beta x) \\ \bar{y}_j^{(2)} = e^{\alpha x}(\bar{\lambda}_j^{(1)} \sin\beta x + \bar{\lambda}_j^{(2)} \cos\beta x) \end{cases}$$

bunda $\lambda_j^{(1)}$, $\lambda_j^{(2)}$, $\bar{\lambda}_j^{(1)}$, $\bar{\lambda}_j^{(2)}$, lar $\alpha_j^{(1)}$ va $\alpha_j^{(2)}$ orqali aniqlanadigan haqiqiy sonlar. Oxirgi funktsiyalarning mos kombinatsiyalari sistemaning umumiy echimini tashkil etadi.

M i s o l: Ushbu

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -7y_1 + y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -2y_1 - 5y_2 \end{cases}$$

sistemaning umumiy echimini toping.

Echimi. Xarakteristik tenglamaning ildizlarini topamiz:

$$\begin{vmatrix} -7-\kappa & 1 \\ -2 & -5-\kappa \end{vmatrix} = 0 \qquad \kappa^2 + 12\kappa + 37 = 0, \quad \kappa_1 = -6 + i, \quad \kappa_2 = -6 - i$$

$\kappa_1 = -6 + i$ ni (3) sistemaga qo'yib, ushbuni topamiz:

$$\alpha_1^{(1)}=1, \quad \alpha_2^{(1)}=1+i$$

Demak, $y_1^{(1)} = e^{(-6+i)x}$, $y_2^{(1)} = (1+i)e^{(-6+i)x}$.

κ_1 = -6-i ni (3) sistemaga qo'yib, ushbuni topamiz:

$$\alpha_1^{(1)}=1, \quad \alpha_2^{(1)}=1-i$$

Demak, $y_1^{(1)} = e^{(-6-i)x}$, $y_2^{(1)} = (1-i)e^{(-6-i)x}$.

Eyler belgisidan foydalanib quyidagilarni chiqarib yozamiz:

$$y_1^{(1)} = e^{-6x}\cos x + ie^{-6x}\sin x$$

$$y_2^{(1)} = e^{-6x}(\cos x - \sin x) + ie^{-6x}(\cos x + \sin x)$$

$$y_1^{(2)} = e^{-6x}\cos x - ie^{-6x}\sin x$$

$$y_2^{(2)} = e^{-6x}(\cos x - \sin x) - ie^{-6x}(\cos x + \sin x)$$

Haqiqiy qismlarni ayirib olib dastlabki tenglamalar sistemasining umumiy echimini

$$y_1 = C_1e^{-6x}\cos x + C_2e^{-6x}\sin x$$

$$y_2 = C_1e^{-6x}(\cos x - \sin x) + C_2e^{-6x}(\cos x + \sin x).$$

ko'rinishda olamiz.

S a v o l l a r:

1.O'zgarmas koeffitsientli chiziqli differentsial tenglamalar sistemasini ta'riflang.

2.Differentsial tenglamalar sistemasining umumiy echimi qanday aniqlanadi?

XI BOB. QATORLAR.

11.1. SONLI QATORLAR VA ULARNING ASOSIY XOSSALARI.

Tayanch iboralar: Sonli qatorlar, xususiy yig'indi, yaqinlashuvchi qator, uzoqlashuvchi qator, yaqinlashishining zaruriy sharti.

Reja:
1. Sonli qator ta'rifi. n-xususiy yig'indi.
2. Geometrik progressiya.
3. Sonli qatorning xossalari.
4. Sonli qatorning taqqoslash alomatlari.
5. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti.

Adabiyotlar:

[**1**]. IX bob, §1-6 [**4**]. XVIbob, §1-3

I. Conli qator ta'rifi. *n*- xususiy yig'indi.

TA'RIF: $u_1, u_2, u_3, \ldots\ u_n, \ldots$ cheksiz sonli ketma – ketligi berilgan bo'lsin. Ushbu

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

ifoda sonli qator deyiladi. (u_1 birinchi, u_n n-chi hadlari)

TA'RIF: (1)-qatorning n ta chekli hadlarining yig'indisi

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{i=1}^{n} u_n$$

qatorning n – xususiy yig'indisi deyiladi.
n – xususiy yig'indilar ketma-ketligini tuzamiz:

$$S_1 = u_1$$
$$S_2 = u_1 + u_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

TA'RIF: Agar $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ mavjud bo'lsa, unga (1) qatorning yig'indisi deb aytiladi va qator yaqinlashadi deyiladi (S chegaralangan son).
Agar $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ mavjud bo'lmasa, yoki $\pm\infty$ ga teng bo'lsa (1) qator uzoqlashuvchi deb aytiladi.

M i s o l: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ qatorning yig'indisini toping.

Echimi: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1})=1-\frac{1}{n+1},\qquad S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$$

qator yig'indisi 1 ga teng, u yaqinlashuvchi ekan.

M i s o l : Ushbu

$$a+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots \qquad (2)$$

qatorni tekshiring.

Echimi: (2)–qator geometrik progressiya hadlaridan tuzilgan qatordir *a* birinchi hadi, q uning maxraji. Geometrik progressiyaning oldingi n ta hadining yig'indisi

$$(q\neq 1),\quad S_n=\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}$$

1) Agar |q|<1 bo'lsa, $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q})=\frac{a}{1-q}$

Demak, |q|<1 da qator yaqinlashuvchi.

g) Agar |q|>1 bo'lsa, $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q})=\infty$

Demak, |q|>1 da qator uzoqlashuvchi.

3) Agar q=1 bo'lsa, (2) – dan

$$a+a+\ldots+a+\ldots$$

qator hosil bo'ladi.

$$S_n=na,\quad \lim_{n\to\infty}n\,a=\infty$$

bo'lib, qatorning uzoqlashuvchanligi kelib chiqadi.

4) q=-1 bo'lsa, (2)-dan $a - a + a - a + \ldots$ qator hosil bo'ladi.

Bu holda n juft bo'lganda

$$\left.\begin{array}{l} S_n = 0 \\ \\ S_n = a \end{array}\right\}$$

n toq bo'lganda bo'ladi.

Demak, S_n ning limiti mavjud bo'lmaydi qator uzoqlashuvchidir.

2.Sonli qatorning xossalari.

Quyidagi teoremani isbotsiz qabo'l qilamiz.

TEOREMA: Agar berilgan (2) qatorning bir qancha hadlarini tashlash bilan hosil qilingan qator yaqinlashsa, berilgan qatorning o'zi ham yaqinlashadi. Aksincha, agar berilgan qator yaqinlashsa, uning bir qancha hadlarini tashlash bilan hosil qilingan qator ham yaqinlashadi.

TEOREMA: Agar $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ (3)

qator yaqinlashsa va yig'indisi S ga teng bo'lsa,

$$ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots \qquad (4)$$

qator ham yaqinlashadi va yig'indisi S ga teng bo'ladi, bunda s o'zgarmas son.

Isbot: Agar (3) qatorning n- xususiy yig'indisi Sn bo'lsa, (4) qatorning n – xususiy yig'indisi S_n bo'ladi.

Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot S_n = c \lim\limits_{n\to\infty} S_n = c \cdot S$

Teorema isbotlandi.

TEOREMA: Agar $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ (5)

$$в_1 + в_2 + \ldots + в_n + \ldots \qquad (6)$$

qatorlar yaqinlashsa va ularning yig'indilari mos ravishda S_1 va S_2 bo'lsa, u holda

$$a_1 \pm в_1 + a_2 \pm в_2 + \ldots + a_n \pm в_n + \ldots \qquad (7)$$

qator yaqinlashuvchi bo'ladi va yig'indisi $S_1 \pm S_2$ ga teng bo'ladi.

Isbot: S_n (7) –qatorning n- xususiy yig'indisi bo'lsin. Demak,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} ((\bar{S}_1 + \bar{S}_2) = S_1 \pm S_2$$

Bu erda $\bar{S}_1$ *ва* $\bar{S}_2$ mos ravishda (5) va (6) qatorlarning n-xususiy yig'indilari.

3.Sonli qatorlarni taqqoslash alomatlari.

TEOREMA: $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ (8)

va $V_1 + V_2 + \ldots + V_n + \ldots$ (9)

musbat hadli sonli qatorlar bo'lsin. (8)–qatorning hadlari (9)-qatorning mos hadlardan ortiq bo'lmasin :

$$u_1 \le V_1 \,, u_2 \le V_2 \,, \ \ldots, u_n \le V_n \,, \ldots$$

va (9)- qator yaqinlashuvchi bo'lsin. Bunday holda (8) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi va uning yig'indisi (9) qator yig'indisidan ortmaydi.

TEOREMA: Agar (8) – qatorning hadlari (9) – qatorning mos hadlaridan kichik bo'lmasa:

$$u_1 \ge V_1 \,, u_2 \ge V_2 \,, \ \ldots, u_n \ge V_n \,, \ldots$$

va (9) – qator uzoqlashuvchi bo'lsin. Bu holda (8) qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Bu teoremalarni isbotsiz kabo'l kilamiz.

M i s o l : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ qatorni tekshiring.

Echimi: Yordamchi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^{n+1}}$ qatorni qaraymiz.

Bu qator geometrik progressiya hadlaridan tuzilgan ($q = {}^1/_2$) qator va u yaqinlashuvchidir.

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}} \le \frac{2}{2^{n+1}}$$

Demak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ qator yaqinlashuvchi ekan.

4.Qator yaqinlashishining zaruriy sharti.

TEOREMA. Agar $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$n\to\infty$ da uning u_n umumiy hadi nolga intiladi.

Isbot. $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ va $S_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1}$ n–xususiy yig'indilarni qaraymiz.

Demak,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0$$

Teorema isbotlandi.

S a v o l l a r :

1.Sonli qatorni ta'riflang.
2.Sonli qatorning xossalarini keltiring.
3.Qator yaqinlashishining zaruriy shartini keltiring.

11.2. MUSBAT HADLI SONLI QATORLAR YAQINLAShISHINING ETARLI ShARTLARI.

Tayanch iboralar: Sonli qatorlar yaqinlashishining etarli shartlari, Dalamber alomati, Koshi alomati, integral alomati.

Reja:

1. Dalamber alomati.
2. Koshi alomati.
3. Qator yaqinlashishining integral alomati.

Adabiyotlar:

[**1**]. IX bob, §7-8 [**4**]. XVI bob, §4-6

Agar sonli qator uchun yaqinlashishning zaruriy sharti bajarilsa, uning yaqinlashuvchanligiga ishonch paydo bo'ladi. Bunday holda qatorning tekshirilishi davom ettiriladi.

TEOREMA:(Dalamber alomati)

Agar musbat hadli $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ (1)

qator (n+1) – hadining n –hadiga nisbati $n\to\infty$ l chekli limitga ega bo'lsa, ya'ni,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$ bo'lsa, u vaqtda:

1) $l<1$ bo'lganda qator yaqinlashadi;
2) $l>1$ bo'lganda qator uzoqlashadi;
$l=1$ bo'lganda qator tekshirilishini davom ettirish kerak.
Teorema isbotsiz qabo'l qilinadi.

M i s o l : $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ qatorni tekshiring.

Echimi: $u_n={}^1/4^n$, $u_{n+1}={}^1/4^{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4^{n+1}}:\frac{1}{4^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{4*4^n}=\frac{1}{4}<1$$

Qator yaqinlashuvchi ekan.

TEOREMA: (Koshi alomati) Agar musbat hadli (1) – qator uchun $\sqrt[n]{u_n}$ miqdor $n\to\infty$ l chekli limitga ega , ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$ bo'lsa,

3) $l<1$ bo'lganda qator yaqinlashadi;
4) $l>1$ bo'lganda qator uzoqlashadi;
$l=1$ bo'lganda qator tekshirilishi davom etiladi.
Teorema isbotsiz qabo'l qilinadi.

M i s o l: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4n+3}\right)^n$ qatorni tekshiring.

Echimi: Koshi alomatiga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{4n+3}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4n+3}=\frac{1}{4}<1$$

qator yaqinlashuvchi.

TEOREMA: (Qator yaqinlashishining integral alomati). Ushbu

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \qquad (2)$$

qatorning hadlari musbat, lekin usuvchi bo'lmasin, ya'ni $u_1\geq u_2\geq\ldots\geq u_n\geq\ldots$

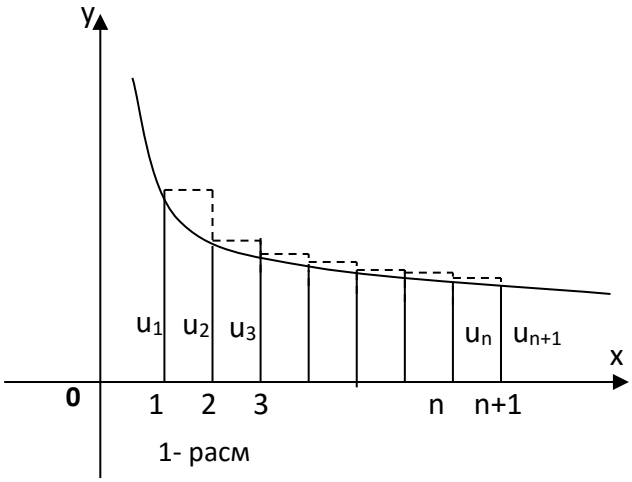
va f(x) shunday o'smaydigan uzluksiz funktsiya bo'lib

$$f(1)=u_1,\quad f(2)=u_2,\ \ldots\ ,\ f(n)=u_n,\ldots.$$

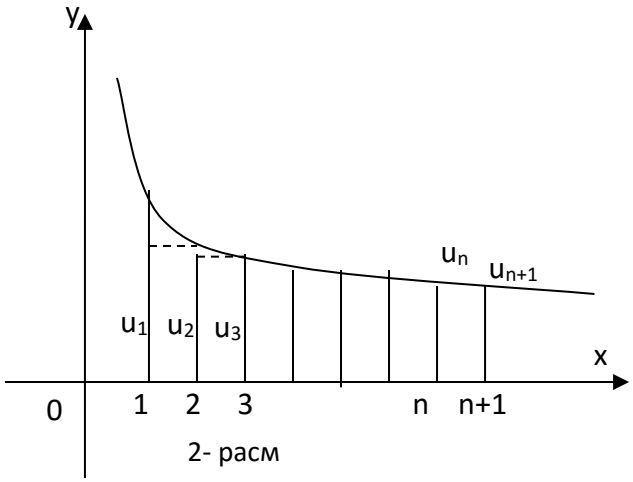
bo'lsin. Bu holda quyidagilar o'rinlidir:

a) agar $\int_1^{\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashsa, (2) qator ham yaqinlashadi;

b) agar bu xosmas integral uzoqlashsa, (2) qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.



1- расм



2- расм

0

***Isbot*:** Teoremaning shartlariga asosan y=f(x) mavjud bo'lsin.

1-rasmga asosan $S_n > \int_1^{n+1} f(x)dx$ (3)

2-rasmga ko'ra $S_{n+1} < \int_1^{n+1} f(x)dx + u_1$ (4)

g) $\int_1^{\infty} f(x)dx$ - yaqinlashsa, u holda $\int_1^{n+1} f(x)dx < \int_1^{\infty} f(x)dx$ bo'ladi, (24) tenglikdan $S_{n+1} < S_n < \int_1^{\infty} f(x)dx$. Lekin $\int_1^{\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchi, shuning uchun $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ tenglikdan berilgan (2) qatorning yaqinlashuvchanligi kelib chiqadi.

d) $\int_1^{\infty} f(x)dx$ uzoqlashsin, u holda (3) tenglikdan

$$S_n > \int_1^{n+1} f(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n > \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx = \infty$$

kelib chiqadi.
Bundan berilgan (2) qatorning uzoqlashuvchanligi kelib chiqadi.

Teorema isbotlandi.

M i s o l: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+5}$

Echimi: Integral belgisiga asosan

$$f(x)=\frac{1}{2n+5}$$

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{2x+5}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{в}\frac{dx}{2x+5}=\frac{1}{2}\lim_{b\leftarrow\infty}\int_1^{в}\frac{d(2x+5)}{2x+5}=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\ln|2x+5|\Big|_1^{в}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}(\ln(2b+5)-\ln 7)=\infty$$

Xosmas integral uzoqlashuvchi, demak $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+5}$ qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

S a v o l l a r:

1.Musbat hadli sonli qatorlar yaqinlashishining Dalamber alomatini keltiring.
2.Musbat hadli sonli qatorlar yaqinlashishining Koshi alomatini keltiring.
3.Musbat hadli sonli qatorlar yaqinlashishining integral alomatini keltiring.

11.3. ISHORALARI NAVBATLASHUVCHI QATORLAR , O'ZGARUVCHAN ISHORALI QATORLAR, SHARTLI VA ABSOLYUT YAQINLASHISHLAR.

Tayanch iboralar: Ishoralari navbatlashuvchi, o'zgaruvchan ishorali, shartli yaqinlashish ,absolyut yaqinlashish, Leybnits teoremasi.

Reja:

1. Ishoralari navbatlashuvchi qatorlar.
2. O'zgaruvchan ishorali qatorlar. Absolyut va shartli yaqinlashish.

Adabiyotlar:

[**1**]. IX bob, §10-11 [**4**]. XVI bob, §7-8

1.Ishoralari navbatlashuvchi qatorlar.

TA'RIF: $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$musbat hadli sonli ketma-ketlik hadlaridan tuzilgan

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n+1}u_n + \ldots \qquad (1)$$

qatorga ishoralari navbatlashuvchi qator deb aytiladi.

TEOREMA: (Leybnits). Agar (1) – ishoralari navbatlashuvchi qatorning hadlari uchun

$$u_1 > u_2 > u_2 > \ldots u_n > \ldots \qquad (2)$$

va

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \qquad (3)$$

bo'lsa, (1) qator yaqinlashadi, uning yig'indisi musbat bo'ladi va birinchi haddan katta bo'lmaydi.

Teorema isbotsiz qabul qilinadi.

M i s o l: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ qatorni tekshiring.

Echimi. Qator hadlarini yoyib yozamiz:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$$

Ishoralari navbatlanuvchi qator ekan .

Leybnits teoremasidagi shartlarni tekshiramiz:

a) $1 > \frac{1}{2} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots$ (2) – shart bajarildi.

b) $\lim_{n\to} \frac{1}{n} = 0$ (3) – shart bajarildi.

Demak, berilgan qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi birdan oshmaydi.

2. O'zgaruvchan ishorali qatorlar.Absolyut va shartli yaqinlashish.

TA'RIF: Agar sonli qatorning hadlari orasida musbatlari ham, manfiylari ham bo'lsa, qator o'zgaruvchan ishorali qator deb aytiladi.

Shuni izohlab aytish mumkinki, ishoralari navbatlashuvchi qatorlar o'zgaruvchan ishorali qatorlarning xususiy holidir.

$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ conlar musbat ham, manfiy ham bo'lishi mumkin bo'lgan sonli ketma-ketlikdan tuzilgan qatorni karaymiz

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (4)$$

TEOREMA: (O'zgaruvchan ishorali qator yaqinlashishining etarli sharti).
(28) – qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan

$$|u_1|+|u_2|+...+|u_n|...=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \qquad (5)$$

qator yaqinlashsa, berilgan o'zgaruvchan ishorali (4) – qator ham yaqinlashadi.

M i s o l: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{4^n}$ qatorni tekshiring.

Echimi: Berilgan qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan qatorni qaraymiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n+1}\frac{1}{4^n}|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n} \qquad (6)$$

Dalamber belgisiga asosan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{4^{n+1}}:\frac{1}{4^n})=\frac{1}{4}<1.$$

(6)- qator yaqinlashuvchi ekan, demak teoremaga asosan berilgan qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

<u>TA'RIF:</u> Agar (4)–o'zgaruvchan ishorali qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan (5)- qator yaqinlashsa, berilgan

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+...+u_n+...$$

qator absolyut yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar (4) – o'zgaruvchan ishorali qator yaqinlashsa, lekin uning hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan (5)- qator uzoqlashsa, berilgan (4)- qator shartli yaqinlashuvchi qator deb aytiladi.

M i s o l : $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ qatorni tekshiring.

Echimi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+... \qquad (7)$$

Oxirgi qator yaqinlashishini integral belgisi orqali tekshiramiz.

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln x\,|_1^b=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln 1)=\infty$$

Xosmas integral uzoqlashuvchi, demak $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ zaruriy shart bajarilgan bo'lsa ham, garmonik qator deb atalmish (7) qator uzoqlashuvchi ekan. Lekin ma'ruzamizni 1-punktida

$$.\ \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} \qquad (8)$$

qator yaqinlashuvchanligi ko'rsatilgan edi. Bundan, (8) qator shartli yaqinlashishi

kelib chiqadi.

TEOREMA: Agar (4) – qator absolyut yaqinlashsa, uning hadlarining o'rinlari ixtiyoriy ravishda almashtirilganda ham y absolyut yaqinlashuvchanligicha qoladi.

Bu va yuqorida ta'riflangan teoremalar isbotsiz qabul qilinadi.

S a v o l l a r:

1.Leybnits teoremasini ta'riflang.
2.O'zgaruvchan ishorali qatorlarni ta'riflang.
3.Absolyut va shartli yaqinlashishlar nima?

11.4. FUNKTSIONAL QATORLAR . DARAJALI QATORLAR VA ULARNING YAQINLASH ORALIQLARI.

Tayanch iboralar: Funktsional qator, yaqinlashish soha, darajali qator, yaqinlashish radius, Abel teoremasi, kuchaytirilgan qator.

Reja:

1. Funktsional qatorlar.
2. Kuchaytirilgan qatorlar.
3. Darajali qatorlar.

Adabiyotlar:

[**1**]. IX bob, §13-15 [**4**]. XVI bob, §9-13

1.Funktsional qatorlar.

TA'RIF: Agar qator hadlari x o'zgaruvchining funktsiyasi bo'lsa , bu qator funktsional qator deyiladi:

$$U_1(x)+U_2(x)+\ldots+U_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x) \qquad (1)$$

x ning funktsional qator yaqinlashadigan qiymatlari to'plami shu qatorning yaqinlashish sohasi deyiladi.

Bu erda $U_1(x)$ qatorning birinchi, $U_2(x)$ ikkinchi va $Un(x)$ n-chi hadi deb aytiladi.

Tabiiyki, qatorning yaqinlashish sohasidagi yig'indisi x ning biror funktsiyasidir va uni S(x) bilan belgilaymiz:

$$U_1(x)+U_2(x)+\ldots+U_n(x)+\ldots=S(x)$$

M i s o l : $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$

funktsional qatorning aniqlanish sohasi D va hadlar yig'indisi S(x) funktsiyani toping.

Echimi: Aniqlanish sohasi D(-1;1) oraliqdagi qiymatlardan iborat, chunki bu qiymatlar uchun berilgan funktsional qator un uchinchi ma'ruzadagi misolda o'rganilgan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaga teng. Uning birinchi hadi b=1 ga va maxraji q = x ga teng. Demak,

$$S(x) = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-x} \quad , \qquad x \in (-1,1)$$

bo'ladi.

TA'RIF: (1) qatorning birinchi n ta hadlarining yig'indisi $S_n(x)$ bilan belgilanadi va unga n - xususiy yig'indi deb aytiladi.

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

esa funktsional qatorning qoldig'i deb aytiladi.

Qatorning yaqinlashish sohasidagi x ning barcha qiymatlari uchun

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$$

munosabat o'rinlidir. Shuning uchun

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} (S(x) - S_n(x)) = 0$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

2.Kuchaytirilgan qatorlar.

TA'RIF: Agar hadlari musbat bo'lgan shunday

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

sonli yaqinlashuvchi qator mavjud bo'lib, x o'zgaruvchining berilgan sohadagi barcha qiymatlari uchun

$$|U_1(x)| \le a_1, |U_2(x)| \le a_2, ..., |U_n(x)| \le a_n, ...$$

munosabat bajarilsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + ... + U_n(x) + ...$$

funktsional qator x o'zgaruvchining o'zgarish sohasida kuchaytirilgan qator deb aytiladi.

M i s o l : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ va $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ yaqinlashuvchi qator uchun $x \in (-\infty;\infty)$ da $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}, n = 1,2,...$ bajariladi.

Demak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ qator $(-\infty;\infty)$ da kuchaytirilgan qatordir.

Quyidagi teoremalarni isbotsiz qabul qilamiz.

TEOREMA: Biror $[a;b]$ kesmada kuchaytirilgan bo'lgan va uzluksiz

funktsiyalardan tuzilgan funktsional qatorning yig'indisi shu kesmada uzluksiz funktsiyadir.

TEOREMA: [a;b] kesmada kuchaytirilgan bo'lgan uzluksiz funktsiyalarning quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty} Un(x) = U_1(x) + U_2(x) + ... + U_n(x) + ...$$

qatori berilgan va S (x) shu qatorning yig'indisi bo'lsin. Bu holda quyidagi tenglik urinli bo'ladi:

$$\int_a^x S(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x U_n(t)dt .$$

Bu funktsional qatorni hadlab integrallash qoidasi deyiladi.

TEOREMA: Agar [a;b] kesmada hosilalari uzluksiz bo'lgan funktsiyalardan tuzilgan

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + ... + U_n(x) + ...$$

qator shu kesmada S(x) yig'indiga ega bo'lsa va uning hadlarining hosilalaridan tuzilgan.

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n^{'}(x) = U_1^{'}(x) + U_2^{'}(x) + ... + U_n^{'}(x) + ...$$

qator shu kesmada kuchaytirilgan bo'lsa, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n'(x)$$

Bu funktsional qatorni hadlab differentsiallash qoidasi deyiladi.

3.Darajali qatorlar.

TA'RIF: Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... \qquad (2)$$

ko'rinishdagi funktsional qator darajali qator deb aytiladi. Bunda $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ozgarmaslar bo'lib, qatorning koeffitsientlari deyiladi.

TEOREMA: (Abel). *a*) Agar darajali qator noldan farqli biror x_0, qiymatda yaqinlashsa, x o′zgaruvchining$|x| < |x_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday qiymatlarida qator absolyut yaqinlashadi.

b) agar (2) qator biror x_0 qiymatda uzoqlashsa, x ning $|x| > |x_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi har bir qiymatida qator uzoqlashadi.

Natija: Darajali qatorning yaqinlashish sohasi markazi koordinatalar boshida bo'lgan simmetrik intervaldan iboratdir.

TA'RIF: Darajali qatorning yaqinlashish intervali deb, shunday (-R,R) intervalga aytiladiki, bu interval ichida yotgan har qanday x nuqtada qator yaqinglashadi, uning tashqarisidagi x larda esa qator uzoqlashadi. Bu erda R soni darajali qatorning yaqinlashish radiusi deb aytiladi.

Darajali qatorning yaqinlashish radiusini hisoblash formulalarini keltiramiz:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_n + 1} \right|, R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Bu formulalar Dalamber va Koshi alomatlaridan kelib chiqadi.

M i s o l: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$

qatorning yaqinlashish radiusini toping.

Echimi:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n!} : \frac{1}{(n+1)!}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{1} = \infty$$

Demak yaqinlashish intervali $(-\infty;\infty)$ bo'ladi.

S a v o l l a r:

1.Funktsionil qatorlarni ta'riflang.
2.Yaqinlashish soha nima?
3.Kuchaytirilgan qatorni ta'riflang.
4.Darajali qatorlarni ta'riflang va ularning yaqinlashish radiuslarini hisoblash uchun formulalarini keltiring.

11.5. DARAJALI QATORNI INTEGRALLASH VA DIFFERENTSIALLASH. TEYLOR VA MAKLOREN QATORLARI.

Tayanch iboralar: Darajali qatorni integrallash, darajali qatorni differentsiallash, Teylor qatori, Makleron qatori, binomial qator.

Reja:

1. Darajali qatorni integrallash va differentsiallash.
2. Teylor va Makleron qatorlari.
3. Binomial qatorlar.

Adabiyotlar:

[**1**]. IX bob, §16-18 [**4**]. XVI bob, §14-20

1.Darajali qatorni integrallash va differentsiallash.

TEOREMA: $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$ (1)
darajali qator butunlay yaqinlashishi intervali ichida yotuvchi istalgan $[-\rho;\rho]$ kesmada kuchaytirilgandir.

I s b o t: Teoremaning shartiga ko'ra p<R, shuning uchun sonli qator

$$|a_0|+|a_1|p+|a_2|p^2+\ldots+|a_n|p^n+\ldots$$

yaqinlashadi. Ammo $|x|<p$ bo'lganda

$$|a_nx^n|\leq|a_n|p^n$$

tengsizlik bajariladi.Demak (1) qator kuchaytirilgan bo'ladi .Teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1-Natija: Yaqinlashish intervali ichida butunlay yotuvchi har qanday kesmada darajali qatorning yig'indisi uzluksiz funktsiyadir.

2-Natija: Agar integrallash chegeralari α,β darajali qatorning yaqinlashish intervali ichida yotsa, qator yig'indisining integrali qator hadlaridan olingan integrallar yig'indisiga teng.

3-Natija:

$$S(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (2)$$

darajali qatorning yaqinlashish intervali (-R;R) bo'lsa, (2) qatorni hadlab differentsiallashdan hosil qilingan

$$\varphi(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$$

qatorning ham yaqinlashish intervali (-R;R) bo'ladi va $\varphi(x)=S'(x)$ tenglik bajariladi.

2.Teylor va Makrolen qatorlari.

$y=f(x)$ funktsiya xqa nuqta atrofida n+1ta hosilaga ega bo'lsin. Quyidagi tenglik

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x)$$

(3)

Teylor formulasi va a=0 da Makrolen formulasi deb aytiladi. Bu erda $R_n(x)$shu formulaning qoldiq hadi deyiladi.

Agar $n\to\infty$ (3) formula darajali qatorga aylanadi va yaqinlashish sohasidagi x lar uchun $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ bo'ladi.

Bunday hollarda Teylor va Makloren formulalari quyidagi yaqinlashuvchi darajali qatorlarga aylanadi:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots$$

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots \qquad (4)$$

M i s o l: $f(x)=\sin x$ funktsiyaning Makloren qatorini yozing.

Echimi: Berilgan funktsiyaning n ta hosilasini topib, x=0 dagi qiymatini

hisoblaymiz.(4) – tenglikdan quyidagi darajali qator kelib chiqadi:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...$$

M i s o l: $y=\cos x$, $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $y=\mathrm{sh}x$, $y=\mathrm{ch}x$ funktsiyalarning Makloren qatorlari yozilsin .

Echimi: Oldingi misolda ko'rsatilgan usulga ko'ra

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + ...,$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...,$$

$$shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + ...,$$

$$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ...$$

3.Binomial qatorlar.

Quyidagi tenglikkka binomial qator deb aytiladi:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1*2*3}x^3 ... \qquad (5)$$

m ning ma'lum qiymatlarida bir qator funktsiyalarning darajali qatorlarini keltirib chiqarish mumkin.

$a)\ m = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2*4}x^2 + \frac{1*3}{2*4*6}x^3 - \frac{1*3*5}{2*4*6*8}x^4 + ... \qquad (6)$$

$б)\ m = -\frac{1}{2},$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1*3}{2*4}x^2 - \frac{1*3*5}{2*4*6}x^3 + \frac{1*3*5*7}{2*4*6*8}x^4 - ... \qquad (7)$$

b) (7) – tenglikning har ikkala tomonidagi x lar o'rniga $-x^2$ qo'yilsa , quyidagi darajali qator kelib chiqadi:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1*3}{2*4}x^4 + \frac{1*3*5}{2*4*6}x^6 + ... \qquad (8)$$

g) Darajali qatorni integrallash mumkinligi yuqorida aytildi. Shuning uchun (8) ni ikkala tomonini integrallaymiz:

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x (1+\frac{1}{2}t^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^6 + ...)dt$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + ... \qquad (9)$$

d) m = -1 bo'lganda (5) dan

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + ... \qquad (10)$$

darajali qator kelib chiqadi.

e) (10)- tenglikni ikkala tomonini integrallab, $f(x)=\ln(1+x)$ funktsiyaning darajali qatorini chiqaramiz:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + ...)dt$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + ... \qquad (11)$$

Bu tenglik (-1;1) intervalda o'rinlidir.

j) (11)- tenglikda x ning o'rniga $-x$ qo'yamiz.

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - ... \qquad (12)$$

z) (11)va (12) larning ayirmasidan esa keyingi darajali qatorni chiqarishimiz mumkin:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + ...\right] \qquad (13)$$

Bu erda $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$ bo'lsin , bunda $x = \frac{1}{2n+1}$ kelib chiqadi.

Har qanday $n>0$ va $0<x<1$ uchun (13)- dan

$$\ln\frac{n+1}{n} = 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + ...\right]$$

tenglik to'g'ri bo'ladi.

Bu erda $n=1$ deb olsak

$$\ln 2 = 2\left[\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + ...\right]$$

va lnx funktsiyaning $x=2$ nuqtadagi qiymati kelib chiqadi.

i) (9) – tenglikdan esa x ning o'rniga 1 yozib $arcsin\ x$ ning $x=1$ nuqtadagi qiymati chiqadi:

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7} + ...$$

S a v o l l a r.

1.Darajali qatorlarni differentsiallash va integrallash mumkinligi xaqidagi teoremalarni keltiring.
2.Teylor va Makleron qatorlarga misol keltiring.

XII BOB. KOMPLEKS SONLAR VA KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR.

12.1. KOMPLEKS SONLARNING ALGEBRAIK, TRIGONOMETRIK KO'RINISHLARI VA ULAR USTIDA ARIFMETIK AMALLAR.

Tayanch iboralar: Mavhum birlik, kompleks sonlar algebraik ko'rinishdagi kompleks sonlar, trigonometrik ko'rinishdagi kompleks sonlar.

Reja:

1. Kompleks sonning algebraik ko'rinishi.
2. Algebraik ko'rinishda berilgan kompleks sonlar ustida amallar.
3. Kompleks sonlarning trigonometrik shakli.
4. Trigonometrik ko'rinishda berilgan kompleks sonlar ustida amallar.

Adabiyotlar:

1. Yo.U. Soatov. "Oliy matematika", I qism. Toshkent. "O'qituvchi" nashriyoti , 1992 y. V bob, § 7,8,9 ; 256-264 betlar.

1. Kompleks sonning algebraik ko'rinishi.

Kompleks son deb $z=a+ib$ ifodaga aytiladi. Bu yerda a va b haqiqiy sonlar bo'lib, i - ***mavhum birlik*** deyiladi va quyidagicha aniqlanadi:

$$i=\sqrt{-1}, \quad i^2=-1.$$

$z=a+ib$ kompleks sonning ***algebraik ko'rinishi*** deb ataladi. Bunda a -z kompleks sonning ***haqiqiy qismi*** , b - ***mavhum qismi*** deyiladi va a=Rez, b=Imz kabi belgilanadi.

Agar a=0 bo'lsa 0+ib=ib ***sof mavhum son*** deyiladi. Agar b=0 bo'lsa $a+i\cdot 0=a$ haqiqiy son hosil bo'ladi, ya'ni haqiqiy sonlar kompleks sonlarning xususiy holi bo'ladi.

Faqat mavhum qismining ishorasi bilan farq qiladigan ikki kompleks son $Z=a+ib$ va $\overline{Z}=a-ib$ bir-biriga ***qo'shma kompleks sonlar*** deyiladi.

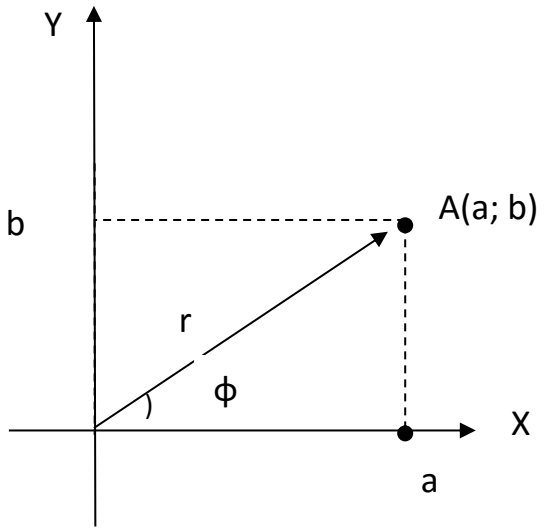
Quyidagi ikkita qoidani aytib o'tamiz:

a) Agar $z_1 = a_1 + i\,b_1$ va $z_2 = a_2 + i\,b_2$ ikki kompleks son uchun $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ bo'lsa, bu kompleks sonlar ***teng*** deyiladi.

b) Agar a=0, b=0 bo'lsa va faqat shundagina kompleks son z nolga teng bo'ladi.

Har qanday kompleks sonni z=*a*+*ib* OXY tekisligida koordinatalari *a* va *b*

1-rasm



bo'lgan A(*a*,*b*) nuqta shaklida tasvirlash mumkin. Aksincha, OXY tekislikdagi har qanday A(*a*,*b*) nuqta z=*a*+ib kompleks songa mos keladi (1-rasm).

Kompleks son tasvirlanadigan tekislik o'zgaruvchi Z ning kompleks tekisligi deyiladi

OA=r kesma kompleks sonning ***moduli*** deb aytiladi, va quyidagicha hisoblanadi:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2.Algebraik ko'rinishda berilgan kompleks sonlar ustida amallar.

1)Kompleks sonlarni qo'shish va ayirish.

Ikki $Z_1=a_1+ib_1$ va $Z_2=a_2+ib_2$ kompleks sonning ***yig'indisi va ayirmasi*** deb, ushbu

$$Z_1 \pm Z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$$

tenglik bilan aniqlangan kompleks songa aytiladi.

M i s o l:

Z_1=4-2i, Z_2=6+3i uchun Z_1+Z_2=4-2i+6+3i=10+i, Z_1-Z_2=(4-2i)-(6+3i)=-2-5i

2)Kompleks sonlarni ko'paytirish.

k son butun bo'lganda

$$i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k-2}=-1,\ i^{4k+3}=-i,$$

tengliklar to'g'ri ekanligini tekshirish qiyin emas.

$Z_1=a_1+ib_1$ va $Z_2=a_2+ib_2$ kompleks sonlar ko'paytmasi deb, ularni ikki hadlar singari algebra qoidasiga muvofik ko'paytirilganda hosil bo'lgan kompleks songa aytiladi:

$$Z_1 \cdot Z_2 = (a_1 + ib_1)(a_1 + ib_1) = a_1a_2 - b_1b_2 + i(b_1a_2 + a_1b_2)$$

M i s o l:

$Z_1 = 4 - 2i$, $Z_2 = 6 + 3i \Rightarrow Z_1 \cdot Z_2 = (4 - 2i)(6 + 3i) = 24 + 12i - 12i - 6i^2 = 30$

3)Kompleks sonlarni bo'lish.

Kompleks sonlarni bo'lish ko'paytirishga teskari amal kabi ta'riflanadi;

$$Z_1 = a_1 + ib_1, Z_2 = a_2 + ib_2, |Z_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \neq 0$$

deb faraz qilamiz.U holda $\frac{Z_1}{Z_2} = Z$ shunday kompleks sonki, unda $Z_1 = Z_2 \cdot Z$ bo'ladi.

Agar $\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$ bo'lsa, u holda $\begin{array}{l} a_1 + ib_1 = (a_2 + ib_2)(x + iy), \\ a_1 + ib_1 = (a_2 x - b_2 y) + i(a_2 y + b_2 x) \end{array}$

x va u ushbu

$$a_1 = a_2 x - b_2 y,\ b_1 = b_2 x + a_2 y$$

tenglamalar sistemasidan aniqlanadi:

$$x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2},\ y = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Nihoyatda, quyidagi natijani olamiz:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

3.Kompleks sonlarning trigonometrik shakli.

Koordinatalar boshini kutb, OX o'qining musbat yo'nalishini kutb o'qi deb olib, A(a;b) nuqtasining kutb koordinatalarini φ va r (r≥0) bilan belgilaymiz. Unda ushbu tengliklarni yozish mumkin (18-rasm):

$$a = r\cos\varphi,\ b = r\sin\varphi,$$

demak kompleks sonni quyidagicha tasvirlash mumkin:

$$a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$$

yoki

$$Z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Bu kompleks sonning ***trigonometrik shakl*** deb aytiladi. r- kompleks son Z ning moduli va φ kompleks Z sonning argumenti deb aytiladi:

$$r = |Z|,\ \varphi = \arg Z$$

r va φ miqdorlar a va v orqali bunday ifodalanadi:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2};\varphi = arctg\frac{b}{a}$$

Kompleks sonning argumenti φ burchak OX o'qining musbat yo'nalishidan soat strelkasi harakatiga teskari yo'nalishda hisoblansa, musbat, qarama-qarshi yo'nalishda hisoblansa, manfiy bo'ladi. Ravshanki, argument bir qiymatli bo'lmaydi, balki $2k\pi$ qo'shiluvchigacha (k butun) aniqlikda belgilanadi.

a) Trigonometrik shaklda berilgan kompleks sonlarni ko'paytirish.

$$Z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ Z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Kompleks sonlar berilgan bo'lsin.

Bu sonlar ko'paytmasini topamiz:

$Z_1 Z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$

$=r_1r_2[\cos\varphi_1 \cos\varphi_2+i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2+ + i\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2] =$
$= r_1r_2 [(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 -\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+ +i^2\cos\varphi_1\sin\varphi_2]=$
$=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$

Shunday qilib, $Z_1Z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$

M i s o l :

$$Z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}),$$
$$Z_2 = 4(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

bo'lsin, unda

$$Z_1Z_2 = 2\cdot 4[\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2})] =$$
$$8(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$$

bo'ladi.

b) Trigonometrik shaklda berilgan kompleks sonlarni bo'lish.

Ketma-ket quyidagi tengliklarni ko'ramiz:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_{21})} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_{21})}\frac{(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_{21})}{(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\frac{[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 - \varphi_2)]}{1}$$

Demak,

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)] \qquad (62)$$

tenglik hosil bo'ladi.

M i s o l:

$$Z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}), Z_2 = 4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}),$$
$$\frac{Z_1}{Z_2} = ?$$

Echimi: (62) – formuladan foydalanamiz:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})}{4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})} = \frac{1}{2}[\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})] =$$
$$= \frac{1}{2}[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}]$$

Takrorlash uchun savollar:

1. Kompleks sonni ta'riflang.
2. Kompleks sonlar ustida arifmetik amallar bajarish qoidalarini keltiring.
3. Kompleks sonning trigonometrik ko'rinishini keltiring.

12.2. KOMPLEKS SONNING KO'RSATGICHLI SHAKLI. IKKI HADLI TENGLAMALAR.

Tayanch iboralar: Kompleks sonni ko'rsatgichli ko'rinishi, Muavr formulasi, ikki hadli tenglamalar.

Reja:

1. Kompleks sonning ko'rsatgichli shakli.
2. Muavr formulasi.
3. Kompleks sondan ildiz chiqarish.
3. Ikki hadli tenglamalar.

Adabiyotlar:

1. Yo.U. Soatov. "Oliy matematika" I qism. Toshkent. O'qituvchi nashriyoti 1992 y. V bob, § 8,9 ; 259-265, 270-271 betlar.

1.Kompleks sonning ko'rsatgichli shakli.

Kompleks sonni trigonometrik shaklda tasvirlaymiz:

$$Z = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\, r$$

Eyler formulasiga ko'ra: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Demak, har qanday kompleks sonni ushbu ko'rsatgichli shaklda tasvirlash mumkin:

$$Z = r \cdot e^{i\varphi}$$

M i s o l :

$$Z = 5(\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7})$$

Bu kompleks son quyidagi ko'rsatgichli shaklda yozilishi mumkin.

$$Z = 5e^{\frac{\pi}{7}i}$$

1) $Z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ va $Z_2 = r_2\, e^{i\varphi_2}$ kompleks sonlarning ko'paytmasi va bo'linmasini aniqlaymiz:

$$Z_1 Z_2 = r_1\, e^{i\varphi_1}\, r_2\, e^{i\varphi_2} = r_1 r_2\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

M i s o l: $Z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}, Z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

Bu sonlarning ko'paytmasini va bo'linmasini topamiz:

$$Z_1 Z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 8e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})} = 8e^{i\frac{3\pi}{4})}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{4e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{2}e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

2) Kompleks sonni n – darajaga ko'tarish amalini qaraymiz:

$$Z = re^{i\varphi}, Z^2 = re^{i\varphi} re^{i\varphi} = r^2 e^{2i\varphi}$$

Shu kabi $Z^n = r^n e^{in\varphi}, n = 1,2,...$

Oxirgi formula ***Muavr formulasi*** deb ham ishlatiladi.

M i s o l : $Z = 2e^{i\frac{\pi}{60}}$ kompleks son berilgan bo'lsin. Bu holda Muavr formulasiga asosan n=6 bo'lganda

$$Z^6 = 2^6 e^{\frac{i6\pi}{60}} = 64e^{\frac{i\pi}{10}}$$

bo'ladi.

3) Kompleks sondan n – darajali ildiz chiqarish.

$Z = re^{i\varphi}$ berilgan bo'lsin. Bu kompleks sondan n – tartibli ildiz olamiz (k=1,2,…):

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = (re^{i\varphi})^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$$

Demak $$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, (k = 1,2,...) \qquad (1)$$

Eyler formulasidan foydalanib (1) formulani trigonometrik ko'rinishda yozish mumkin:

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}), \quad (k = 1,2,...) \qquad (2)$$

2. Ikki hadli tenglamalarni echish.

$z^n = A$ shakldagi tenglama ***ikki hadli tenglama*** deyiladi. Bu tenglamaning ildizlarini topamiz.

1) A haqiqiy musbat son bo'lsin.

$$z = \sqrt[n]{A}(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}), \quad (k = 0,1,2,..., n-1)$$

Qavs ichidagi ifoda 1 sonning n – darajali ildizining hamma qiymatlarini beradi.

2) A haqiqiy manfiy son bo'lsa,

$$z = \sqrt[n]{|A|}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{n}), (k = 0,1,2,...n-1)$$

Kavs ichidagi ifoda – 1 sonning n – darajali ildizining hamma qiymatlarini beradi.

3) A son komplleks son bo'lsa, z ning qiymatlari (2) formula orqali

hisoblanadi.

M i s o l : $z^4=1$ tenglamani eching.

$$z=\sqrt[4]{\cos 2\pi k+i\sin 2\pi k}=\cos\frac{2\pi k}{4}+i\sin\frac{2\pi k}{4}$$

K ga 0,1,2,3, qiymatlar berib ildizlarni aniqlaymiz:

$$z_1=\cos 0+i\sin 0=1$$

$$z_2=\cos\frac{2\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi}{4}=1$$

$$z_3=\cos\frac{4\pi}{4}+i\sin\frac{4\pi}{4}=-1$$

$$z_4=\cos\frac{6\pi}{4}+i\sin\frac{6\pi}{4}=-i$$

M i s o l: $z^3+Z=0$ tenglamani eching, bu erda

$$Z=2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

Echimi:

$$z=\sqrt[3]{-Z}=\sqrt[3]{2(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})}=\sqrt[3]{2}(\cos\frac{225^0+2k\pi}{3}+i\sin\frac{225^0+2k\pi}{3}$$

k o'rniga 0,1,2,larni qo'yib, barcha ildizlarni topamiz

$$z_1=\sqrt[3]{2}(\cos 75^0+i\sin 75^0)$$

$$z_2=\sqrt[3]{2}(\cos 195^0+i\sin 195^0)$$

$$z_3=\sqrt[3]{2}(\cos 315^0+i\sin 315^0)$$

Takrorlash uchun savollar:

1. Muavr formulasini yozing.
2. Kompleks sondan ildiz chiqarish tartibi qanday?
3. Ikki hadli tenglama deb qanday tenglamalarga aytiladi va ular qanday echiladi.

12.3. KOMPLEKS ARGUMENTLI FUNKTSIYALAR VA ULARNING HOSILALARI. KOSHI-RIMAN SHARTLARI.

Tayanch iboralar: kompleks o'zgaruvchi, kompleks funktsiya, kompleks funktsiya limiti, kompleks funktsiya uzluksizligi, kompleks funktsiya hosilasi, analitik funktsiya, Koshi-Riman shartlari.

Reja:

1. Kompleks o'zgaruvchili funktsiya ta'rifi.
2. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyaning nuqtadagi limiti.
3. Uzluksiz kompleks o'zgaruvchili funktsiya.
4. Analitik funktsiya ta'rifi
5. Koshi – Riman shartlari.

Adabiyotlar:

1. Sh.Maksudov, M. Saloxiddinov, S.Sirojiddinov. Kompleks o'zgaruvchining funktsiyalari nazariyasi. Toshkent, «O'qituvchi», 1970yil.
II bob, §1-5, 36-53 betlar.

E-kompleks sonlar to'plami bo'lsin. z = $x + i\,y$ kompleks son shu to'plam ixtiyoriy elementi bo'lishi mumkin. U holda z = $x + i\,y$ ga kompleks o'zgaruvchi deyilib, E ga uning o'zgarish soxasi deyiladi.

T A ' R I F: Erkli kompleks o'zgaruvchi z = $x + i\,y$ ning funktsiyasi deb shunday ω ga aytiladiki, agar E to'plamning har bir z elementiga aniq bir $\omega = u + vi$ komleks son mos qo'yilgan bo'lsa.

Kompleks o'zgaruvchili funktsiya ω=f(z) ko'rinishida belgilanadi. E to'plamning har bir nuqtasiga aniq bir ω kompleks son mos keladi. Ana shu mos kompleks sonlarni E' to'plam bilan belgilaymiz.

Demak, ω ning berilishi E va E' kompleks sonlar to'plamlari orasida moslik o'rnatishdegan so'zdir yoki E to'plam elementlarining E' to'plam elementlariga akslantirilishi ham deyiladi. Agar z ning har xil qiymatlariga, ω ning har xil qiymatlari mos keltirilsa, u holda akslantirish bir qiymatli bo'ladi va ω = f (z) funktsiya ham bir qiymatli bo'ladi.

T A ' R I F: A o'zgarmas soniga f(z) funktsiyaning $z \to z_0$ dagi limiti deyiladi, agar etarlicha kichik musbat son ε uchun, shunday $\delta = \delta(\varepsilon)$ topish mumkin bo'lsaki, $|z - z_0| < \delta$ shart bajarilganda $|f(z) - A| < \varepsilon$ shart bajarilsa.
f(z) funktsiyaning $z \to z_0$ dagi limitini $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ bilan belgilanadi.

T A ' R I F : Agar $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon)$ topish mumkin bo'lsaki, $|z - z_0| < \delta$ shart bajarilganda $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ shart bajarilsa, f(z) funktsiyaga z = z_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz funktsiya uchun $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ bo'ladi.

T A ' R I F: ω = f (z) funktsiya z $\in G$ nuqtada differentsiallanuvchi deyiladi, agar

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

nisbat $\Delta z \to 0$ da chekli aniq limitga ega bo'lsa. Bu limitni biz funktsiya hosilasi deb ataymiz va uni $f'(z)$ bilan belgilaymiz.

Hosila ta'rifini quyidagicha yozish mumkin:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z).$$

<u>T A ' R I F :</u> Agar G soxaning har bir nuqtasida bir qiymatli f(z) funktsiya hosilaga ega bo'lsa, u G sohada ***analitik funktsiya*** deyiladi.

M i s o l: f(z) =zRe(z) funktsiya z=0 nuqtada hosilaga ega va bu hosila nolga teng, chunki

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta z}=\frac{\Delta z\,\mathrm{Re}(\Delta z)}{\Delta z}=\mathrm{Re}(\Delta z)$$

nisbat $\Delta z\to 0$ bo'lganda 0 ga intiladi. Bu funktsiya z =0 da differentsiallanuvchi, lekin analitik emas. Chunki

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)\,\mathrm{Re}(z+\Delta z)-z\,\mathrm{Re}(z)}{\Delta z}=$$

$$=z\cdot\frac{\mathrm{Re}(z+\Delta z)-\mathrm{Re}(z)}{\Delta z}+\mathrm{Re}(z+\Delta z),$$

ifoda $z\neq 0$ va $\Delta z\to 0$ da aniq bir limitga intilmaydi. Haqiqatan ham agar $\Delta z=\Delta z_1+\Delta z_2 i$ deb olsak, u holda $\frac{\mathrm{Re}(z+\Delta z)-\mathrm{Re}(z)}{\Delta z}=\frac{\Delta z_1}{\Delta z_1+\Delta z_2 i}$ nisbat $\Delta z_2=0$, $\Delta z_1\to 0$ da aniq bir limitga, ya'ni 1 ga intiladi. Xuddi shu nisbat $\Delta z_1=0$, $\Delta z_2\to 0$ da 0 ga intiladi. Bu esa limit mavjud emasligini bildiradi.

Bu misolimizdan shu narsani aytish mumkinki, butun tekislikda uzluksiz funktsiya, z = 0 nuqtadan boshqa hamma nuqtalarda differentsiallanuvchi emas bo'lishi mumkin ekan.

Faraz qilaylik, z = *x* + *iu* kompleks o'zgaruvchining bir qiymatli funktsiyasi *w*= f(z) = *u* + *iv* qandaydir G sohada aniqlangan bo'lsin. Agar *u* va *v* funktsiyalar berilgan bo'lsa , f(z) funktsiya aniq bo'ladi. Agar *u*(*x*,*y*), *v*(*x*,*y*) funktsiyalar bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda berilgan va ularning *x* va *y* bo'yicha hususiy hosilalari mavjud bo'lsa ham f(z) funktsiya differentsiallanuvchi bo'lmasligi mumkin.

Masalan, $w=\bar{z}=x-iy$ funktsiya uzluksiz, lekin hech qaerda differentsiallanuvchi emasligini ko'rsatish mumkin. Bu yerda *u*(*x*,*y*) = *x* va *v*(*x*,*y*)=-*y* funktsiyalarning har biri *x* va *y* bo'yicha hususiy hosilalarga ega .

Aytaylik, f(z) funktsiya qandaydir z nuqtada aniq bir chekli hosilaga ega bo'lsin:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}=f'(z).$$

$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ ifoda ixtiyoriy qonun bo'yicha nolga intilishi mumkinligi uchun $\Delta y=0$, $\Delta x\to 0$ deb olish ham mumkin.

U holda

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x}=f'(z)\quad\text{yoki}\quad\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=f'(z)$$

Oxirgi ifodani

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=f'(z) \quad (1)$$

deb yozish mumkin.

Xuddi shunday tartibda $\Delta x=0$, $\Delta y\to 0$ bo'lgan holni ko'rib chiqamiz:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{i\Delta y}=-i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta y}=f'(z)$$

yoki $$-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=f'(z). \quad (2)$$

(1) va (2) ifodalarning ung taraflari teng bo'lgani uchun chap taraflari ham teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

Oxirgi ifodaning haqiqiy va mavhum qismlarini tenglashtiramiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y} \quad (3)$$

Demak w=u+iv funktsiya z nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda bu nuqtada u va v funktsiyalarning hususiy hosilalari mavjud bo'ladi va ular uchun (3) shartlar bajariladi. Bu shartlar ***Koshi-Riman shartlari*** deyiladi. Aksincha, w=u(x;y)+iv(x;y) funktsiya uchun (3) shartlar bajarilsa, unda f(z) funktsiya differentsiallanuvchi bular ekan va uning hosilasini (1) yoki (2) formula bilan topish mumkin.

M i s o l №1. $w=\bar{z}=x-iy, \qquad u(x;y)=x, \qquad v(x;y)=-y:$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(x)'_x=1, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=(-y)'_y=-1: \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$$

Demak (3) shart bajarilmadi va shu sabablii w=x-iy funktsiya hech qaerda differentsiallanuvchi emas.

Misol №2.

$w=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi: \quad u(x;y)=x^2-y^2, \quad v(x;y)=2xy:$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}=(x^2-y^2)'_x=2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=(2xy)'_y=2x\right]\Rightarrow 2x=2x\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial x}=(2xy)'_x=2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=(x^2-y^2)'_y=-2y\right]\Rightarrow 2y=-(-2y)\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Bu erdan ko'rinadiki, (3) shartlar bajarilmoqda. Demak, $w=z^2$ funktsiya hamma nuqtalarda differentsiallanuvchi. Uning hosilasi (1) yoki (2) formulaga asosan

$$w'=(z^2)'=2x-i(-2y)=2(x+iy)=2z$$

kabi hisoblanadi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyaga ta'rif bering.

2. Kompleks o’zgaruvchili funktsiyaning nuqtadagi limiti ta'rifini ayting.
3. w=f (z) funktsiyaga $z=z_0$ nuqtada qachon uzluksiz deyiladi ?
4. Qachon kompleks funktsiya differentsiallanuvchi deyiladi?
5. Qanday funktsiyaga analitik funktsiya deyiladi ?
6. Uzluksiz, lekin differentsiallanuvchi bo’lmagan kompleks o’zgaruvchili funktsiyaga misol keltiring.
7. Koshi-Riman sharti qanday ifodalanadi?
8. w=f (z) funktsiya hosilasi qanday hisoblanadi ?
9. $w=z^2+2z$ funktsiya hosilasining $z_0=1-2i$ nuqtadagi qiymatini toping.

12.4. KOMPLEKS O’ZGARUVCHILI FUNKTSIYANI INTEGRALI.

Tayanch iboralar: Silliq egri chiziq, kompleks o’zgaruvchili funktsiyadan olingan integral.

Reja:
1. Silliq egri chiziq
2. Silliq chiziq bo’yicha integral yig’ndi.
3. Integral yig’ndi limiti.
4. Silliq chiziq bo’yicha integral.
5. Kompleks o’zgaruvchili funktsiya integralini hisoblash.
6. Kompleks o’zgaruvchili funktsiya integralning xossalari.

Adabiyotlar:
1. Sh.Maksudov, M. Saloxiddinov, S.Sirojiddinov. Kompleks o’zgaruvchining funktsiyalari nazariyasi. Toshkent, «O’qituvchi», 1970yil.
IV bob, §1-3, 111-120 betlar.

T A ' R I F : Berilgan z=z(t) funktsiya grafigiga ***silliq chiziq*** deyiladi, agar $z'(t)$ hosila mavjud, noldan farqli va o’zaro bir qiymatli bo’lsa.

Aytaylik w=f(z) funktsiya qandaydir kompleks o’zgaruvchili G sohada uzluksiz ixtiyoriy funktsiya bo’lsin. S esa shu sohada butunlay yotuvchi silliq chiziq bo’lsin va uning boshlang’ch nuqtasi z_0 , oxirgi nuqtasi esa z bo’lsin. z_0z chiziqni n ta hususiy bo’laklarga z_0 , z_1 ,z_2 , …, z_n , z lar orqali ajratamiz va har bir bo’lakda funktsiyaning $f(z_k)$ (k=0, … , n-1) qiymatlarini hisoblaymiz. $\Delta z_k=z_{k+1}-z_k$ orqali bo’lakchalar uzunligini belgilab, ushbu yig’ndini tuzamiz:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)\Delta z_k \qquad (1)$$

Har bir hususiy bo’lakchalar uzunligini nolga intiltiramiz va bu holda (1) yig’ndining limitini qaraymiz. Agar

$z_k = x_k + iy_k$, $f(z_k) = u(x_k, y_k) + iv(x_k, y_k) = u_k + iv_k$, $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$
deb belgilab olsak

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)\Delta z_k = \sum_{k=0}^{n-1}(u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + +i\sum_{k=0}^{n-1}(v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k) \qquad (2)$$

bo'ladi. Agar bu ifodada $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$ bo'lsa, (2) ifodadagi yig'ndilar $\int_c udx - vdy$ ва $i\int_c vdx + udy$ egri chiziqli integrallarga intiladi.

(1) yig'ndining $\Delta x \to 0$ ва $\Delta y \to 0$ dagi limiti mavjud bo'lsa, uni berilgan funktsiyaning S chiziq bo'yicha integrali deb ataymiz va $\int_C f(z)dz$ kabi belgilaymiz.

U holda

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy \qquad (3)$$

Oxirgi ifoda kompleks o'zgaruvchili f(z) funktsiyadan olingan integralning ikkita egri chiziqli integral orqali ifodalanishini ko'rsatadi.
(3) ni eslab kolish oson bo'lishi uchun

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u + vi)(dx + idy)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin. Agar z=z(t) $t \in [\alpha;\beta]$ bo'lsa , u holda

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta \{u[z(t)]x'(t) - v[z(t)]y'(t)\}dt + i\int_\alpha^\beta \{v[z(t)]z'(t) + u[z(t)]z'(t)\}dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt \qquad (4)$$

yoki

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta R(t)dt + i\int_\alpha^\beta I(t)dt$$

bu erda R(t) va I(t) funktsiyalar $f|z(t)|z'(t)$ funktsiyaning haqiqiy va mavhum qismlarini ifodalaydi.

Misol. $\int_\Gamma z^n dz$, G={ z_0 va z ni tutashtiruvchi silliq chiziq}, integralni hisoblang.

$$\int_\Gamma z^n dz = \frac{1}{n+1}(z^{n+1} - z_0^{n+1}) \quad n \neq -1 \text{ butun son.}$$

Endi z=z(t) bo'lib $\alpha \le t \le \beta$ bo'lsin, u holda

$$\int_\Gamma z^n dz = \int_\alpha^\beta z^n z'(t)dt = \int_\alpha^\beta \frac{1}{n+1}\frac{t}{dt}[z(t)]^{n+1}dt = \frac{1}{n+1}(z^{n+1} - z_0^{n+1})$$

agar z_0=z bo'lsa $\int_\Gamma z^n dz = 0$ bo'ladi.

Kompleks o'zgaruvchili funktsiya integrallarining xossalari.

1 xossa: $\int\limits_{\Gamma^-} f(z)dz = -\int\limits_{\Gamma^+} f(z)dz$

2 xossa: $\int\limits_{\Gamma} af(z)dz = a\int\limits_{\Gamma} f(z)dz \qquad a = const.$

3 xossa: $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\Gamma_2} f(z)dz + ... + \int\limits_{\Gamma_n} f(z)dz$.

Bu erda $G=G_1+ G_2+ G_3+\ldots+ G_n$;

4 xossa:

$$\int\limits_{\Gamma} [f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + ... + f_n(z)]dz = \int\limits_{\Gamma} f_1(z)dz + \int\limits_{\Gamma} f_2(z)dz + ... + \int\limits_{\Gamma} f_n(z)dz.$$

5 xossa: Agar G silliq chiziqda $|f(z)| \le M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $\left|\int\limits_{\Gamma} f(z)dz\right| \le Ml$ bo'ladi. $l - G$ silliq chiziq uzunligi.

Bu xossalarning isbotlari bevosita integral ta'rifidan kelib chiqadi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Silliq egri chiziqqa ta'rif bering.
2. S silliq chiziqda f(z) funktsiya uchun integral yig'ndi qanday tuziladi?
3. f(z) funktsiyadan olingan integralga ta'rif bering.
4. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyadan olingan integral xossalarini ayting.
5. w=f(z) funktsiya integrallanuvchi bo'lishi uchun qanday shartlar bajarilishi kerak bo'ladi?

12.5. KOSHI FORMULASI. KOSHI INTEGRALI.

Tayanch iboralar : Koshi formulasi, Koshi integrali.

Reja:

1. Koshi teoremasi.
2. Koshining integral formulasi.
3. Koshi tipidagi integral.

Adabiyotlar:

1.Sh.Maksudov, M. Saloxiddinov, S.Sirojiddinov. Kompleks o'zgaruvchining funktsiyalari nazariyasi. Toshkent, «O'qituvchi», 1970yil.
IV bob, §4,7,9; 120-135, 145-149, 151-163 betlar.

Kompleks o'zgaruvchili funktsiyadan olingan $\int_C f(z)dz$ integral nafaqat f(z) funktsiyaga, balki integrallash yo'li S ga ham bog'liqligini ko'rib o'tdik. Unda z_0 va z_1 nuqtalarga G_1 va G_2 yo'llar bilan keladigan bo'lsak, $\int_{\Gamma_1} f(z)dz$ va $\int_{\Gamma_2} f(z)dz$ larning qiymati ham har xil bular edi. Shunday bir kizik savol tugiladi. f(z) funktsiya qanday bo'lganda $\int_{\Gamma} f(z)dz$ funktsiyaning qiymati G integrallash yo'liga bog'liq bulmay, faqat uning boshlang'ch z_0 va oxirgi z_1 nuqtalariga bog'liq bo'ladi?

Bu savolga javob berish uchun haqiqiy o'zgaruvchili funktsiyalar uchun egri chiziqli integralning integrallash yo'liga bog'liq bo'lmaslik sharti – «berilgan integralning ixtiyoriy yopiq kontur bo'yicha qiymati nolga teng bo'lishi kerak» ekanligini eslash kifoya.

Biz bilamizki kompleks o'zgaruvchili funktsiyadan olingan integral ikkita haqiqiy o'zgaruvchili funktsiyalardan olingan egri chiziqli integral bilan ifodalanadi.

Bir bog'lamli G soxaning har bir nuqtasida uzluksiz hosilaga ega bo'lgan f(z)=$u(x;y)+iv(x;y)$ funktsiya shu sohada analitik bo'ladi. Demak, $i(x;u)$ va $v(x;u)$ funktsiyalar o'zlarning hususiy hosilalari bilan G sohada uzluksiz bo'ladi va

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (1)$$

shartlarini kanoatlantiradi. G sohada to'la yotuvchi yopiq G konturni olamiz.

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=\int_{\Gamma} udx-vdy+i\int_{\Gamma} vdx+udy$$

U holda haqiqiy o'zgaruvchili funktsiyalar uchun Grin formulasiga asosan

$$\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=\oint_{L} Pdx+Qdy$$

tenglikni yoza olamiz. U holda

1) $$\int_{\Gamma} udx-vdy=\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=\iint_{\sigma}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)d\sigma=$$

$$=\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)d\sigma=0 \Leftrightarrow \int_{\Gamma} udx-vdy=0$$

2) $$\int_{\Gamma} vdx+udy=\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)d\sigma=\iint_{\sigma}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)d\sigma=0$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Gamma} vdx+udy=0$$

Demak, $\int_{\Gamma} f(z)dz=0$ va shu sababli quyidagi teorema isbotlandi.

KOShI TEOREMASI: Agar f(z) funktsiya G bir bog'lamli sohada bir qiymatli va uning har bir nuqtasida uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda G sohada to'la

yotuvchi G yopiq kontur bo'yicha f(z) funktsiyadan olingan integral nolga teng bo'ladi.

Bir bog'lamli G soxa G silliq chiziq bilan chegaralangan bo'lsin. f(z) funktsiya $\overline{G}$ cohada analitik bo'lsin. U holda quyidagi Koshi formulasi o'rinli bo'ladi:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}\text{ , bu erda } z\in G .$$

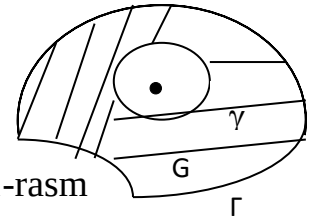
I s b o t : z nuqta G dagi ixtiyoriy nuqta bo'lsin. G sohada ξ=z dan tashkari hamma nuqtada analitik bo'lgan

$$\varphi(\xi)=\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\quad\text{funktsiyani qaraymiz.}$$

φ(ξ) funktsiya G va γ konturlar orasidagi barcha nuqtalarda ham analitik bo'ladi. Koshi teoremasiga asosan

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=0=\int_{\gamma} f(z)dz,\quad\text{u holda}$$

$$\int_{\Gamma} f(\xi)d\xi=\int_{\gamma}\varphi(\xi)d\xi$$



1-rasm

Bu tenglikdan shunday xulosa qilish mumkinki, $\int_{\gamma}\varphi(\xi)d\xi$ ning qiymati z nuqta yotgan kichik soxacha radiusiga bog'liq emas ekan.

$$\lim_{\xi\to z}\varphi(\xi)=\lim_{\xi\to z}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}=f'(z)$$

f(z) ni φ(ξ) funktsiyaning ξ=z nuqtadagi qiymati deb qabul qilsak, u holda φ(ξ) funktsiya $\overline{G}$ yopiq sohada butunlay uzluksiz bo'ladi.

$\int_{\Gamma}\varphi(\xi)d\xi=0$ ligini e'tiborga olgan holda

$$\int_{\Gamma}\varphi(\xi)d\xi=\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}d\xi=\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi-\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{\xi-z}dz=0$$

$$\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=f(z)\int_{\Gamma}\frac{dz}{\xi-z}=f(z)\cdot 2\pi i\Rightarrow f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

Teorema isbot bo'ldi.

Agar L yopiq yoki yopiq emas silliq chiziq bo'lsa va φ(z) funktsiya G bo'yicha uzluksiz bo'lsa, unda $\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi-z}$ integral L da yotmaydigan har bir z nuqta uchun aniq qiymatga ega bo'ladi. Demak, u qandaydir F(z) funktsiya hosil qiladi hamda bu funktsiya L da yotmaydigan z lar uchun bir qiymatli bo'ladi. Agar L yopiq va φ(z) funktsiya L ning ichida va tashkarisida analitik bo'lsa, u holda $\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi-z}$ =φ(z), agar z nuqta L ning ichida bo'lsa va

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi - z} = 0$$

bo'ladi, agar z nuqta L ning tashkarisida yotsa.

$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi - z}$ integralni Koshi integrali deb ataymiz. U holda φ(z) funktsiyaga nisbatan aytilgan shartlar bo'yicha $\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi - z}$ ni Koshi tipidagi integrallar deyiladi.

TEOREMA. Agar F(z) funktsiya Koshi tipidagi integral bilan aniqlangan bo'lsa, u L chiziqning biror nuqtasida yotmaydigan bir bog'lamli har qanday G sohada analitik bo'ladi va uning hosilasi uchun

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\xi)d\xi}{(\xi - z)^2}$$

formula o'rinli bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. f(x) funktsiyadan S chiziq bo'yicha olingan integral qiymati nimalarga bog'liq bo'ladi ?
2. f(x) funktsiya qanday bo'lganda $\int_L f(z)dz$ ning qiymati z_0 va z ga bog'liq bo'ladi?
3. Grin formulasi qanday ko'rinishda bo'ladi ?
4. Koshi teoremasini tushuntirib bering.
5. Koshi formulasini qanday ko'rinishda bo'ladi ?
6. Koshi integrali deb nimaga aytiladi?
7. Koshi tipidagi integral qanday xossaga ega?

XIII BOB. OPERATSION HISOB ELEMENTLARI.

13.1. BOSHLANG'ICH FUNKTSIYA VA UNING TASVIRI.

Tayanch iboralar: original, tasvir, Laplas operatori yoki almashti- rishi, mavjudlik teoremasi, yagonalik teoremasi, Xevisayd funktsiyasi.

Reja :

1. Operatsion hisobning maksadi.
2. Original funktsiyaga qo'yilgan talablar.
3. Original bo'lmagan funktsiya.
4. Usish ko'rsatgichi.
5. Original funktsiya va tasvir.
6. Laplas operatori yoki almashtirishi.
7. Tasvirning mavjudlik teoremasi.
8. Originalning yagonalik teoremasi.
9. Xevisayd funktsiyasi va uning tasviri.
10. Ko'rsatgichli funktsiya tasviri.

Adabiyotlar:
1. Shneyder V.E. Oliy matematika kiska kursi. II tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1987yil. XIV bob, §1, 319-320 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral hisob. 2-tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1974 yil. XIX bob, §1-2, 436-439 betlar.

Operatsion hisob amaliy matematik analiz metodlaridan biri hisoblanadi. Uning yordamida ko'p hollarda mexanika, elektronika, avtomatika hamda fan va texnikaning boshqa soxalarida uchraydigan masalalarni echish soddalashadi. Operatsion hisob avtomatik sistemalarni hisob qilish va loyixalashga doir bir qator injenerlik metodlarining nazariy asosini tashkil etadi.

Original va tasvir.

T A' R I F: Barcha $t \in R$ da aniqlangan va quyidagi xossalarga ega f(t) funktsiyani ***original*** deb ataymiz:

1. f(t) funktsiya sonlar o'qining istalgan chekli intervalida yo uzluksiz, yo chekli sondagi I tur uzilish nuqtalariga ega;
2. t<0 da f (t)=0 ;
3. Shunday M>0 va $S_0 \geq 0$ sonlar mavjudki, barcha t lar uchun $|f(t)| < Me^{S_0 t}$.

Har bir f (t) original funktsiyaga

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \qquad (1)$$

funktsiyani mos keltiramiz. Bunda p=S+$i\tau$ ($S \geq S_0$) kompleks son, F(p)-kompleks o'zgaruvchili funktsiya bo'ladi. Bu funktsiya boshqacha qilib

$$L\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

kabi yoziladi. F(p) funktsiya f(t) funktsiyaning ***tasviri***, f(t) ga esa F(p) funktsiyaning ***originali*** deyiladi. L ga esa ***Laplas operatori yoki Laplas almashtirishi*** deyiladi.

Lapl

as operatori originallar to'plamini tasvirlar to'plamiga akslantiradi.

L: f (t) $\rightarrow$ F(p) yoki $L\{f(t)\} = F(p)$ yoki f (t) $\leftrightarrow$ F(p).

Savol tugiladi. Har qanday funktsiya ham original bo'ladimi? Yo'q, faqat yuqoridagi ta'rifning uchala shartini kanoatlantirgan funktsiyalargina original bo'ladi. Masalan, tgt, $\frac{1}{t}$ funktsiyalar original bo'lmaydi, chunki ular t=0 da II tur uzilishga ega.

TEOREMA (Tasvirning mavjudlik teoremasi).Har qanday f(t) original uchun Rep=S>S_0 yarim tekislikda aniqlangan F(p) tasvir mavjuddir. Bu yarim tekislikning har bir nuqtasida F(p) funktsiya istalgan tartibli hosilaga ega. Bundan tashkari, agar Rep=S$\rightarrow\infty$ bo'lsa, u holda tasvir F(p)$\rightarrow$0.

TEOREMA (Originalning yagonalik teoremasi). Agar F(r) ikkita $f_1(t)$ va $f_2(t)$ originalning tasviri bo'lsa, u holda bu originallar, ular uzluksiz bo'lgan barcha nuqtalarda, o'zaro teng bo'ladilar.

Tasvir va originallar quyidagi xossalarga ega:

Xossa 1. Originalning songa ko'paytmasining tasviri, tasvirning bu songa ko'paytmasiga teng, ya'ni agar f (t) $\leftrightarrow$ F(p) bo'lsa, sf (t) $\leftrightarrow$ sF(p) bo'ladi.

Xossa 2. Bir nechta original algebraik yig'indisining tasviri bu originallar tasvirlarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni agar

f_1 (t) $\leftrightarrow$ F_1(p), f_2 (t) $\leftrightarrow$ F_2(p) bo'lsa, u holda

[f_1 (t)$\pm$ f_2 (t)] $\leftrightarrow$ F_1(p)$\pm$ F_2(p) bo'ladi.

Lemma: Agar z=x+iy kompleks son uchun Rez=x>0 va b haqiqiy o'zgaruvchi bo'lsa, u holda $\lim\limits_{b\to\infty} e^{-zb} = 0$ bo'ladi.

Ana shu lemmadan foydalanib Xevisayd funktsiyasi deb ataluvchi va σ_0(t)kabi belgshilanuvchi ushbu funktsiyaningg tasvirini topamiz:

$$\sigma_0(t) = f(t) = \begin{cases} 1, & \text{arap } t \geq 0 \\ 0, & \text{arap } t < 0 \end{cases}$$

Xevisayd funktsiya original funktsiya ta'rifini tula kanoatlantiradi.

$$L\{f(t)\} = L\{\sigma_0(t)\} = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b 1 \cdot e^{-pt}dt = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^b =$$

$$= -\frac{1}{p}\left(\lim_{b\to\infty} e^{-pb} - 1\right) = \frac{1}{p}. \text{ Демак } \sigma_0(t) \leftrightarrow \frac{1}{p} \quad \text{yoki} \quad 1 \leftrightarrow \frac{1}{p};$$

Endi ko'rsatgichli funktsiya $e^{\alpha t}$ ning tasvirini topamiz. Uni

$$f(t)=\begin{cases} 0, & \text{агар } t<0 \\ e^{\alpha t}, & \text{агар } t\geq 0 \end{cases}$$

original funktsiya ko'rinishida yozamiz.

$$L\{f(t)\}=L\{e^{\alpha t}\}=\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}\cdot e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty} e^{(\alpha-p)t}dt=\int_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)t}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-(p-\alpha)t}dt=$$

$$=\frac{\lim\limits_{b\to\infty}\left[e^{-(p-\alpha)t}\right]_0^b}{-(p-\alpha)}=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-(p-\alpha)b}}{-(p-\alpha)}+\frac{1}{p-\alpha}\right]=\frac{1}{p-\alpha}; \qquad (\mathrm{Re}(p-\alpha)>0).$$

Demak f (t)= $e^{\alpha t}\leftrightarrow\dfrac{1}{p-\alpha}$ ёки $e^{-\alpha t}\leftrightarrow\dfrac{1}{p+\alpha}$.

Ana shundan foydalanib *sinwt* va *coswt* funktsiyalar tasvirlarini topamiz. Buning uchun Eyler formulasini eslaymiz:

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y,\ e^{-iy}=\cos y-i\sin y.$$

Ularni hadma-had qushsak

$$e^{iy}+e^{-iy}=2\cos y,\ \ \cos y=\frac{1}{2}(e^{iy}+e^{-iy}).$$

$$e^{iy}-e^{-iy}=i2\sin y,\ \ \sin y=\frac{1}{2i}(e^{iy}-e^{-iy}).$$

bo'ladi. U holda

$$\mathrm{L}\{\sin wt\}=\frac{w}{P^2+w^2},\qquad \mathrm{L}\{\cos wt\}=\frac{P}{P^2+w^2}.$$

Takrorlash uchun savollar: :

1. Original funktsiya deb qanday funktsiyaga aytiladi?
2. Laplas operatori nima?
3. Original funktsiya tasviri deb nimaga aytiladi?
4. Tasvirning mavjudlik teoremasini ifodalang.
5. Originalning yagonalik teoremasini keltiring.
6. Xevisayd funktsiyasining grafik ko'rinishini tasvirlang.
7. f (t)=2,5 bo'lsa, uning tasviri nimaga teng?
8. sos2*t* ning tasvirini toping.
9. sin*wt* va sos*wt* larning tasvirlarini boshqacha topish usuli ham mavjudmi?

13.2. ORIGINAL FUNKTSIYA VA TASVIR XOSSALARI.

Tayanch iboralar: Tasvirning chiziqlilik xossasi, Dirak funktsiyasi, o'xshashlik teoremasi, siljish teoremasi, kechiqish teoremasi.

Reja:

1. Tasvirning chiziqlilik xossasi.
2. Dirakning impuls funktsiyasi va uning tasviri.
3. O'xshashlik teoremasi.
4. Darajali funktsiya tasviri.
5. Siljish teoremasi.
6. Kechikish teoremasi.

Adabiyotlar:

1.Shneyder V.E. Oliy matematika kiska kursi. II tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1987yil. XIV bob, §1,2,3; 320-327 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral hisob. 2-tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1974 yil. XIX bob, §3-6, 439-443 betlar.

TEOREMA. O'zgarmaslarga ko'paytirilgan bir nechta original funktsiyalar yig'indisining tasviri shu original funktsiyalar tasvirlarining mos o'zgarmaslarga ko'paytmalari yig'indisiga teng, ya'ni

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t) \quad ,$$

bunda c_i o'zgarmaslar va $L\{f_i\}=F_i(p)\leftrightarrow f_i(t)$ bo'lsa, u holda

$$L\{f\}=F(p)=\sum_{i=1}^{n} c_i F_i(p)=\sum_{i=1}^{n} c_i L\{f_i)$$

bo'ladi.

Isbot: $f(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t)$ berilgan bo'lib, har bir $f_i(t)$ funktsiya original funktsiya bo'lsin. U holda

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t)e^{-pt}\right)dt=\sum_{i=1}^{n} c_i \int_0^{+\infty} f_i(t)e^{-pt}dt=\sum_{i=1}^{n} c_i F_i(p).$$

Misol. f (t)=3sin4t−2cos5t bo'lsin. Tasvirni topamiz:

$$F(p)=L\{f(t)\}=L\{3\sin 4t-2\cos 5t\}=3L\{\sin 4t\}-2L\{\cos 5t\}=$$

$$=3\cdot\frac{4}{p^2+16}-2\cdot\frac{p}{p^2+25}=\frac{12}{p^2+16}-\frac{2p}{p^2+25}.$$

Ushbu funktsiyalar ketma-ketligini qaraymiz:

$$\delta_n(t)=\begin{cases}0, & t\notin[0,\frac{1}{n}]\\ n, & t\in[0,\frac{1}{n}]\end{cases}$$

Bu funktsiyalar ketma-ketligining n→∞ bo'lgandagi limiti Dirakning impuls funktsiyasi deyiladi va $\delta(t)$ kabi belgilanadi. Bu funktsiyani t≠0 nuqtalarda nolga teng, t=0 nuqtada esa cheksiz qiymatni qabul qiladigan funktsiya deb qarash mumkin. Masalan, portlash jarayoni Dirak funktsiyasi orqali ifodalanadi.

Dirak funktsiyasi tasvirini topish uchun dastlab $\delta_n(t)$ funktsiyalar tasvirlvrini topamiz:

$$L\{\delta_n\}=\int_0^{\infty}\delta_n(t)e^{-pt}dt=\int_0^{\frac{1}{n}}ne^{-pt}dt=\frac{n}{p}(1-e^{-\frac{p}{n}}).$$

Unda II ajoyib limitdan foydalanib,

$$L\{\delta\}=\lim_{n\to\infty}\delta_n(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{p}(1-e^{-\frac{p}{n}})=1$$

natijani olamiz.

TEOREMA. Agar f(t)↔ F(p) bo'lsa, $f(at)\leftrightarrow\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$ bo'ladi.

I s b o t : L{f(t)}=F(p) , L{f(at)}= $\int_0^{+\infty}f(at)e^{-pt}dt=$

$$=\begin{bmatrix}at=z\\ dt=\frac{dz}{a}\end{bmatrix}=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-\frac{pz}{a}}=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(t)e^{-\frac{pz}{a}}dz=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$$

Bu teorema ***o'xshashlik teoremasi*** deb yuritiladi.

Masalan, $L\{\cos t\}=\frac{p}{p^2+1}$ ekanligidan,

$$L\{\cos wt\}=\frac{1}{w}\cdot\frac{\frac{p}{w}}{\left(\frac{p}{w}\right)^2+1}=\frac{1}{w^2}\cdot\frac{p}{\frac{p^2+w^2}{w^2}}=\frac{p}{p^2+w^2}$$

natijani olamiz.

Darajali funktsiyaning tasviri.

$f(t)=t^n$ bo'lsin. $L\{t^n\}=\int_0^{+\infty}t^n\cdot e^{-pt}dt$ tasvirni topish uchun bu integralni n marta bo'laklab integrallashga to'g'ri keladi. Shuning uchun oddiy yo'ldan boramiz:

$$f(t)=t \Rightarrow L\{t\}=\int_0^{+\infty} t\cdot e^{-pt}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b t\cdot e^{-pt}dt=\begin{bmatrix} u=t,\ dv=e^{-pt}dt \\ du=dt,\ \ v=-\dfrac{1}{p}e^{-pt}\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{t}{p}\cdot e^{-pt}\Big|_0^b+\int_0^b\frac{e^{-pt}}{p}dt\right]=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{b\cdot e^{-pb}}{p}+0\right)+\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{p^2}\right)\cdot e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}=$$

$$=0-\frac{1}{p^2}\lim_{b\to\infty}(e^{-pt}-1)=-\frac{1}{p^2}(0-1)=\frac{1}{p^2};$$

Xuddi shunday $f(t)=t^2$ deb oilb $L\{t^2\}=\dfrac{2}{p^3}$ ni hosil qilamiz. Demak,

$f(t)=t^n$ bo'lsa, $L\{t^n\}=\dfrac{n!}{p^{n+1}}$ bo'ladi.

Teorema (Siljish teoremasi).

$$f(t)\leftrightarrow F(t)\Rightarrow e^{-\alpha t}f(t)\leftrightarrow F(p+\alpha)\ .$$

Isboti. Laplas almashtirishidan foydalanamiz. $L\{f(t)\}=F(p)$ ekanligini e'tiborga olgan holda

$$L\{e^{-\alpha t}f(t)\}=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}f(t)e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(p+\alpha)t}dt=F(p+\alpha).$$

Xuddi shunday, agar $f_1(t)=e^{\alpha t}f(t)$ bo'lsa

$$L\{f_1(t)\}=L\{e^{\alpha t}f(t)\}=\int_0^{+\infty}e^{\alpha t}f(t)e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(p-\alpha)t}dt=F(p-\alpha)$$ bo'ladi.

M i s o l. $f(t)=\sin wt$ tasviri bo'yicha $e^{-\alpha t}\sin wt$ funktsiyaning tasviri $\dfrac{w}{(p+\alpha)^2+w^2}$ ekanligini topamiz.

Xuddi shunday $f(t)=\cos wt$ tasviri bo'yicha $e^{\alpha t}\cos wt$ ning tasviri $\dfrac{p-\alpha}{(p+\alpha)^2+w^2}$ bo'ladi.

teorema (Kechiqish teoremasi). Agar $\tau>0$ ва $f(t)\leftrightarrow F(p)$ bo'lsa, uholda $f(t-\tau)\leftrightarrow e^{-p\tau}F(p)$ bo'ladi.

Isbot: Laplas almashtirishidan foydalanamiz:

$$L\{f(t-\tau)\}=\int_0^{+\infty}f(t-\tau)e^{-p\tau}dt=\begin{bmatrix} t-\tau=z \\ t=z+\tau \\ dt=dz\end{bmatrix}=\int_0^{+\infty}f(z)e^{-p(z+\tau)}dz=$$

$$=\int_0^{+\infty}f(z)\cdot e^{-pz}\cdot e^{-p\tau}dz=e^{-p\tau}\int_0^{+\infty}f(z)\cdot e^{-pz}dz=e^{-p\tau}\cdot F(p);$$

M i s o l . . f(t) = $(t-2)^3$ bo'lsa, uning tasvirini toping.

Echish: Kechiqish teoremasi va $t^3 \leftrightarrow \frac{3!}{p^4}$ ekanligidan foydalanib,

$$f(t-\tau) \leftrightarrow e^{-p\tau}F(p) \quad \Rightarrow \quad (t-2)^3 \leftrightarrow e^{-2p} \cdot \frac{3!}{p^4} = \frac{6e^{-2p}}{p^4} \ .$$

natijani olamiz.

Takrorlash uchun savollar: :

1. Tasvirning chiziqlilik xossasini ayting.
2. Dirak funktsiyasi qanday aniqlanadi?
3. Dirak funktsiyasi tasviri qanday ko'rinishda bo'ladi?
4. O'xshashlik teoremasini ayting.
5. coswt va sinwt funktsiyalar tasvirini yozing.
6. Darajali funktsiyaning tasviri nimaga teng?
7. f (t)=$(1+t)^2$ ning tasvirini toping.
8. Siljish teoremasini ayting.
9. Kechiqish teoremasi qanday ifodalanadi?

13.3. ORIGINALLARNI DIFFERENTSIALLASH VA INTEGRALLASH. TASVIRLAR JADVALI.

Tayanch iboralar : Hosilaning tasviri, originalning integrali, kompozitsiyalash xossasi.

Reja:

1. Hosilaning tasviri.
2. Ikkinchi va yuqori tartibli hosilalar tasvirlari.
3. Tasvirni differentsiallash.
4. Originalni integrallash.
5. Kompozitsiyalash teoremasi.
6. Originallar va ularning tasvirlari jadvali.

Adabiyotlar:

1. Shneyder V.E. Oliy matematika kiska kursi. II tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1987yil. XIV bob, §4-5; 327-331 betlar.

2. Piskunov N.S. Differentsial va integral hisob. 2-tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1974 yil. XIX bob, §7-9,13; 443-448, 456-458 betlar.

Original funktsiyalarni differentsiallash.

TEOREMA. Agar differentsiallanuvchi funktsiya tasviri f(t) $\leftrightarrow F(p)$ va $f'(t)$ hosila original funktsiya bo'lsa, u holda

$$f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0)$$

formula o'rinli bo'ladi.

I s b o t . Laplas almashtirishidan foydalanamiz:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = \begin{bmatrix} u = e^{-pt} \quad , \quad du = -p \cdot e^{-pt}dt \\ dv = f'(t)dt \quad , \quad v = f(t) \end{bmatrix} = \lim_{в\to\infty} \int_0^{в} f'(t)e^{-pt}\,\mathrm{dt} =$$

$$= \lim_{в\to\infty}\left[f(t)\cdot e^{-pt}\Big|_0^{в} + p\int_0^{в} f'(t)e^{-pt}\,\mathrm{dt}\right] = \lim_{в\to\infty}\left[f(в)\cdot e^{-pв} - f(0) + p\int_0^{в} f'(t)e^{-pt}\,\mathrm{dt}\right] =$$

$$= p\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt - f(0) = pF(p) - f(0).$$

Xususan f(0)=0 bo'lsa, $f'(t) \leftrightarrow pF(p)$ bo'ladi.

Xuddi shunday yo'l bilan

$$f''(t) = (f'(t))' = p(pF(p) - f(0)) - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$f'''(t) \leftrightarrow p[p^2F(p) - pf(0) - f'(0)] - f''(0) =$$

$$= p^3F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0)$$

formulalarni hosil etamiz. Hususiy holda $f(0)=0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ bo'lsa,

$$f''(t) \leftrightarrow p^2F(p, \quad f'''(t) \leftrightarrow p^3F(p)$$

bo'ladi. Umumiy holda

$$f^{(n)} \leftrightarrow p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - p^{n-3}f''(0) - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

bo'ladi.

Agar, $f(0) = f'(0) = f''(0) = ...f^{(n-1)}(0) = 0$ bo'lsa, u holda

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^nF(p)$$

bo'ladi.

Mavjudlik teoremasida ko'rsatilishicha $p \to \infty$ da har qanday originalning tasviri nolga intiladi.

Shuning uchun agar $f'(t) \leftrightarrow F_1(p)$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{p\to\infty} F_1(p) = 0$ bo'ladi. Ammo $f'(t) \leftrightarrow pf(p) - f(0)$ formulaga ko'ra

$$\lim_{p\to\infty} F_1(p) = \lim_{p\to\infty}[pF(p) - f(0)] = \lim_{p\to\infty} pF(p) - f(0) = 0$$

Oxirgi tenglikdan. $f(0) = \lim\limits_{p\to\infty} pF(p)$ Bu formula f(t) originalning boshlang'ch qiymatini originalni hisoblab o'tirmasdan uning F(p) tasviri bo'yicha topishga imkon beradi.

M i s o l. $F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}$ tasvir berilgan bo'lsa, f(0) boshlang'ch qiymatni toping. $f(0)=\lim\limits_{p\to\infty} pF(p)$ ekanligidan

$$f(0)=\lim_{p\to\infty}\frac{pp}{p^2+1}=\lim_{p\to\infty}\frac{p^2}{p^2+1}=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{p^2}}=\frac{1}{1+0}=1$$

Demak , f(0)=1 ekan.

<u>Tasvirni differentsiallash</u>.

TEOREMA: Agar $F(p)\leftrightarrow f(t)$ bo'lsa, unda

$$(-1)^n F^{(n)}(p)\leftrightarrow t^n f(t)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Bu teorema Isbotini keltirib utirmaymiz.

<u>Originallarni integrallash.</u>

TEOREMA. Agar $f(t)\leftrightarrow F(p)$ bo'lsa, u holda $\int\limits_0^t f(x)dx\leftrightarrow\dfrac{F(p)}{p}$ bo'ladi.

I s b o t . $\int\limits_0^t f(x)dx=g(t)$ bo'lsin. Uning original funktsiya ekaniniko'rsatish mumkin. $g(0)=\int\limits_0^0 f(x)dx=0$ bo'lgani uchun va $g(t)\leftrightarrow\Phi(p)$ ekanligini e'tiborga oladigan bo'lsak, $g(t)\leftrightarrow p\Phi(p)$ bo'ladi.

Biroq $g'(t)=\dfrac{d\int\limits_0^t f(x)dx}{dt}=f(t)\leftrightarrow F(p)$

Demak, pΦ(p)= F(p), bundan $\Phi(p)=\dfrac{F(p)}{p}$ bo'ladi.

Demak, $\int\limits_0^t f(x)dx\leftrightarrow\dfrac{F(p)}{p}$.

TEOREMA (Kompozitsiyalash teoremasi): Agar berilgan ikkita original tasvirlari $f_1(t)\leftarrow F_1(p)$, $f_2(t)\leftarrow F_2(p)$ bo'lsa, u holda

$$\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\leftrightarrow F_1(p)F_2(p)$$ bo'ladi.

Olingan barcha natijalarni birlashtirib, ushbu tasvirlar jadvalini hosil qilamiz.

№	Original funktsiya f(t)	Tasvir funktsiya F(p)
1	$\sigma_0(t)$ (Xevisayd funktsiyasi)	$\dfrac{1}{p}$

2	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
3	$e-^{\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
4	$\sin wt$	$\frac{w}{p^2+w^2}$
5	$\cos wt$	$\frac{p}{p^2+w^2}$
6	$shwt=\frac{e^{wt}-e^{-wt}}{2}$	$\frac{w}{p^2-w^2}$
7	$chwt=\frac{e^{wt}+e^{-wt}}{2}$	$\frac{p}{p^2-w^2}$
№	**Original funktsiya f(t)**	**Tasvir funktsiya F(p)**
8	$e^{-\alpha t}\sin wt$	$\frac{w}{(p+\alpha)^2+w^2}$
9	$e^{-\alpha t}\cos wt$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+w^2}$
10	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
11	$e^{-\alpha t}t^n$	$\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$
12	$e^{\alpha t}t^n$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
13	$t\sin wt$	$\frac{2pw}{(p^2+w^2)^2}$
14	$t\cos wt$	$\frac{p^2-w^2}{(p^2+w^2)^2}$
15	$f(\alpha t)$	$\frac{1}{\alpha}F(\frac{p}{\alpha})$
16	$e^{-wt}f(t)$	$F(p+w)$
17	$f'(t)$	$pF(p)-f(0)$
18	$f''(t)$	$p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$
19	$f(t-\tau)$	$e^{-p\tau}F(p)$
20	$\delta(t)$ **(**Dirak funktsiyasi)	1

21	$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{F(p)}{p}$
22	$\int_0^t f_1(s)f_2(t-s)ds$	$F_1(p)F_2(p)$

M i s o l . $\frac{d^2x}{dt^2}+x=f(t)$ differentsial tenglamaning $x(0)=x'(0)=0$ shartni qanoatlantiruvchi echimini toping.

Differentsial tenglama yordamchi tenglamasini tuzamiz

$$\bar{x}(p)(p^2+1)=F(p) \quad \text{bo'ladi.} \quad f(t)\leftarrow F(p).$$

U holda $\bar{x}(p)=\frac{F(p)}{p^2+1}=\frac{1}{p^2+1}\cdot F(p)$ deb qaraydigan bo'lsak,

$$\frac{1}{p^2+1}\to \sin t \quad , \quad f(t)\leftarrow F(p)$$ ligini hisobga olsak

$$x(t)=\int_0^t f(\tau)\sin(t-\tau)d\tau$$ bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Hosilaning tasviri qanday topiladi ?
2. Tasvirni differentsiallanganda original qanday o'zgaradi?
3. Originalni integrallashda tasvir qanday bo'ladi ?
4. Kompozitsiyalash teoremasini ayting.
5. Boshlang'ch shartni qanday topish mumkin ?
6. Tasvirlar jadvalini yozing.

13.4. DIFFERENTSIAL TENGLAMALAR VA DIFFERENTSIAL TENGLAMALAR SISTEMASINI OPERATSION HISOB YORDAMIDA ECHISH.

Tayanch iboralar : Chiziqli differentsial tenglama, yordamchi tenglama, chiziqli differentsial tenglamalar sistemasi.

Reja:

1. O'zgarmas koeffitsientli n- tartibli chiziqli differentsial tenglamalar va boshlang'ch shartlar.
2. Chiziqli differentsial tenglamaning yordamchi tenglamasi.
3. Differentsial tenglamaning Laplas operatoridagi echim.

4. O'zgarmas koeffitsientli chiziqli differentsial tenglamalar sistemalarini operatsion hisob yordamida echishintegrallash.

Adabiyotlar:

1. Shneyder V.E. Oliy matematika kiska kursi. II tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1987yil. XIV bob, §6-7; 332-335 betlar.

2. Piskunov N.S. Differentsial va integral hisob. 2-tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1974 yil. XIX bob, §10-12, 448-456 betlar.

Bizga n – chi tartibli o'zgarmas koeffitsientli

$$a_0\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+...+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x(t)=f(t) \qquad (1)$$

differentsial tenglama berilgan bo'lib, uning $t\geq 0$ dagi

$$x(0)=x_0,\ x'(0)=x_0',...,x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)} \qquad (2)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi x=x(t) echimini topish kerak bo'lsin. Bunday masalani differentsial tenglamalar bo'limida avval harakteristik tenglamani tuzish, keyin uning ildizlarini topish va ular asosida dastlab umumiy, so'ngra berilgan shartlarni qanoatlantiruvchi hususiy echimini topar edik.

Operatsion hisob yordamida bu masala juda oddiy tartibda echiladi. Dastlab (1) differentsial tenglamaning tasvirini topamiz. Buning uchun uni e^{-pt} ga hadma-had ko'paytirib 0 dan +∞ gacha integrallaymiz**:**

$$a_0\int_0^{+\infty}e^{-pt}\frac{d^n x}{dt^n}dt+a_1\int_0^{+\infty}e^{-pt}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}dt+...+a_n\int_0^{+\infty}e^{-pt}x(t)dt=\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt$$

$$a_0L\left\{\frac{d^n x}{dt^n}\right\}+a_1L\left\{\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right\}+...+a_nL\{x(t)\}=L\{f(t)\}$$

$$a_0\left\{p^n\overline{x(p)}-(p^{n-1}x_0+p^{n-2}x_0'+p^{n-3}x_0''+...+x_0^{(n-1)})\right\}+$$
$$+a_1\left\{p^{n-1}\overline{x(p)}-(p^{n-2}x_0+p^{n-3}x_0'+p^{n-4}x_0''+...+x_0^{(n-2)})\right\}+...+$$
$$+a_{n-1}\left\{p\overline{x(p)}-x_0\right\}+a_n\overline{x(p)}=F(p) \qquad (3)$$

Bu erda hosilaning tasviri formulalaridan va (2) boshlang'ch shartlardan foydalandik.Oxirgi (3) tenglamaga (1) differentsial tenglamaning *yordamchi tenglamasi* deyiladi. Yordamchi tenglamadagi $\overline{x(p)}$ qatnashgan hadlarni chapga, qolganlarini ungga o'tkazib

$$\overline{x(p)}(a_0p^n+a_1p^{n-1}+...+a_{n-1}p+a_n)=a_0(p^{n-1}x_0+p^{n-2}x_0'+...+x_0^{(n-1)})+$$
$$+a_1(p^{n-2}x_0+p^{n-3}x_0'+...+x_0^{(n-1)})+...+a_{n-2}(px_0+x_0')+a_{n-1}x_0+F(p)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu erda ushbu belgilashlar kiritamiz:

$$\varphi_n(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+...+a_{n-1}p+a_n$$

$$\phi_{n-1}(p)=a_0(p^{n-1}x_0+p^{n-2}x_0'+x_0^{(n-1)})+a_1(p^{n-2}x_0+p^{n-3}x_0'+x_0^{(n-2)})+$$
$$+...+a_{n-2}(px_0+x_0')+a_{n-1}x_0$$

U holda yordamchi tenglamadan

$$\overline{x(p)}\cdot\varphi_n(p)=\phi_{n-1}(p)+F(p)\ \Rightarrow\overline{x(p)}=\frac{\phi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)}+\frac{F(p)}{\varphi_n(p)}. \qquad (4)$$

Oxirgi $\overline{x(p)}$ funktsiya (1) differentsial tenglamaning boshlang'ch shartlarini qanoatlantiruvchi x(t) funktsiya echimining tasviri bo'ladi.

(4) tasvirning originalini topadigan bo'lsak, u (1) differentsial tenglamaning (2) boshlang'ch shartlarni qanoatlantiruvchi x(t) hususiy echimi bo'ladi.

M i s o l № 1. Ushbu $\frac{dx}{dt}+x=1$ differentsial tenglamaning $x(0)=0$ boshlang'ch shartni qanoatlantiruvchi echimi topilsin.

<u>Echish.</u> Yordamchi tenglamani tuzamiz va uni echamiz:

$$L(\frac{dx}{dt}+x)=L(1)\ \Rightarrow\left\{\overline{x(p)}(p+1)=\frac{1}{p}\right\}\Rightarrow\overline{x(p)}=\frac{1}{p(p+1)}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p-1}\ .$$

Topilgan tasvir bo'yicha tasvirlar xossalari va jadvalidan foydalanib,

$$L^{-1}\left\{\overline{x(p)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\}\ \Rightarrow\ x(t)=1-e^{-t}$$ echimni topamiz.

Demak, $x(t)=1-e^{-t}$ funksiya, $\frac{dx}{dt}+x=1$ differentsial tenglamaning x(0)=0 boshlang'ch shartni qanoatlantiruvchi echimi bo'lar ekan.

M i s o l № 2. $\frac{d^2x}{dt^2}+x=f(t)$ differentsial tenglamaning $x(0)=x'(0)=0$ shartni qanoatlantiruvchi echimini toping.

<u>Echish:</u> Differentsial tenglamaning yordamchi tenglamasini tuzamiz:

$$\bar{x}(p)(p^2+1)=F(p)\quad(\ f(t)\leftarrow F(p)\ ).$$

U holda $$\bar{x}(p)=\frac{F(p)}{p^2+1}=\frac{1}{p^2+1}\cdot F(p)$$

bo'ladi va $$\frac{1}{p^2+1}\leftrightarrow\sin t$$

ekanligini hisobga olib, kompozitsiyalash teoremasiga asosan echim

$$x(t)=\int_0^t f(\tau)\sin(t-\tau)d\tau$$

ko'rinishda bo'lishini topamiz. Yuqoridagi hamma gaplarni

$$\begin{cases} a_1\dfrac{dy}{dt}+b_1\dfrac{dx}{dt}=c_1\\ a_2\dfrac{dy}{dt}+b_2\dfrac{dx}{dt}=c_2\end{cases}$$

differentsial tenglamalar sistemasi uchun ham qo'llash mumkin. Bunda sistemaning har bir differentsial tenglamasi uchun tasvirlardagi yordamchi

tenglamani tuzamiz. So'ngra ularni sistema qilib, uni $\overline{x(p)}$ ва $\overline{y(p)}$ tasvirlarga nisbatan echamiz. Oxirida bu tasvirlarning originallarini topamiz.

M i s o l. Ushbu chiziqli differentsial tenglamalar sistemasini

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + 3\dfrac{dx}{dt} + 2x = 1 \\ 4\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dx}{dt} + 3y = 0 \end{cases}$$

$x(0) = 0,\ y(0) = 0$ boshlang'ch shartlarni qanoatlantiruvchi echimlarini toping.

<u>Echish</u>: Dastlab, $x(t) \leftrightarrow \overline{x(p)},\ y(t) \leftrightarrow \overline{y(p)}$ deb olib, yordamchi tenglamani tuzamiz:

(3p+2) $\overline{x(p)} + p\overline{y(p)} = \dfrac{1}{p},\ p\overline{x(p)} + (4p+3)\overline{y(p)} = 0$

Sistemani $\overline{x(p)}$ ва $\overline{y(p)}$ larga nisbatan echamiz:

$$\overline{x(p)} = \frac{4p+3}{p(p+1)(11p+6)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{5(p+1)} - \frac{33}{10(11p+6)}$$

$$\overline{y(p)} = -\frac{p}{pp+1)(11p+6)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{11}{11p+6}\right)$$

Tasvirlar jadvali bo'yicha originallarini topamiz:

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{3}{10}e^{-\frac{6}{11}t},\ y(t) = \frac{1}{5}\left(e^{-t} - e^{-\frac{6}{11}t}\right).$$

Bu funktsiyalar berilgan Koshi masalasining echimini ifodalaydi.

Yuqori tartibli differentsial tenglamalar sistemasi ham shunga o'xshash echiladi.

Takrorlash uchun savollar:.

1. Yordamchi tenglama deb qanday tenglamaga aytiladi?
2. Qanday qilib $\overline{x(p)}$ dan $x(t)$ ga utish mumkin?
3. Differentsial tenglamalar sistemasi operatsion hisob yordamida qanday echiladi?

XIV BOB. MATEMATIK FIZIKA TENGLAMALARI .

14.1. MATEMATIK FIZIKA TENGLAMALARI VA ULARNING TURLARI.

Tayanch iboralar: Matematik fizika tenglamalari, bir jinsli tenglama, giperbolik turdagi tenglama, parabolik turdagi tenglama, elliptik turdagi tenglama, To'lqin tenglamasi, Fure tenglamasi, Laplas tenglamasi, tor tebranishi tenglamasi.

Reja:

1. Matematik fizikaning ikkinchi tartibli hususiy hosilali asosiy differentsial tenglamalarining umumiy ko'rinishi.
2. Matematik fizika tenglamalarining asosiy turlari.
3. Giperbolik turdagi tenglamalar.
4. Parabolik turdagi tenglamalar.
5. Elliptik turdagi tenglamalar.
6. Tor tebranishlari tenglamasini keltirib chiqarish.

Adabiyotlar:
1. Yo.U. Soatov. "Oliy matematika" II qism. Toshkent. «O'qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 13-bob, § 1-2, 188-191 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral hisob. 2-tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1974 yil. XVIII bob, §1-2, 397-400 betlar.

Matematik fizikaning ikkinchi tartibli asosiy differentsial tenglamalari ikki o'zgaruvchili noma'lum u=u(x,y) funktsiya va uning hususiy hosilalariga nisbatan chiziqli bo'lib, umumiy holda quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=f(x,y).$$

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=0$$

tenglama ***bir jinsli*** deyiladi. Bir jinsli tenglamada B^2 -4AC>0 bo'lsa u ***giper*** bolik, B^2 -4AC =0 bo'lsa–***parabolik***, B^2 -4AC <0 bo'lsa–***elliptik*** turdagi tenglama deyiladi.

Matematik fizikaning asosiy tenglamalari deb quyidagi ikkinchi tartibli hususiy hosilali differentsial tenglamalarga aytiladi:

I. To'lqin tenglamasi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

Bu tenglama torning ko'ndalang tebranishi, sterjenning buylama tebranishi, o'tkazgichda elektr tebranishlari, valning aylanma tebranishi, gaz tebranishi jarayonlarini ifoda qiladi. Bu tenglama giperbolik tipdagi tenglamalarning eng soddasi hisoblanadi.

II.Issiqlik o'tkazuvchanlik yoki Fure tenglamasi.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (2)$$

Bu tenglama issiqlikning tarqalish, gaz va suyuqliklarning govak muxitda filtrlanish jarayonlarini hamda ehtimollar nazariyasining ba'zi masalalarini o'rganishga olib keladi. Bu tenglama parabolik tipdagi tenglamalarning eng soddasi hisoblanadi.

III. Laplas tenglamasi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (3)$$

Bu tenglama elektr va magnit maydonlari, statsionar issiqlik xolati, gidrodinamika, diffuziya masalalarini o'rganishga olib keladi. Bu tenglamaga elliptik tipdagi tenglamalarning eng soddasi deyiladi.

Demak, matematik fizika tenglamalari uchta tipdan iborat ekan. Ko'rilgan tenglamalarda u=u(x,y) ikki o'zgaruvchili funktsiyalarni ifodalaydi. Bu tenglamalar uch va undan ortiq o'zgaruvchili funktsiyalar uchun ham ko'rilishi mumkin. Masalan, to'lqin tenglamasi uchta o'zgaruvchi bilan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

Fure tenglamasi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

Laplas tenglamasi

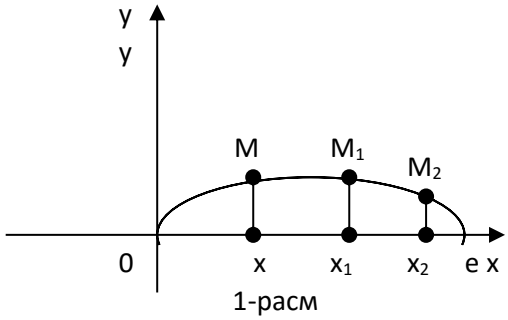
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

ko'rinishda yoziladi.

Tor tebranishi tenglamasi.

Matematik fizikada tor deganda tarang ingichka ip tushuniladi. Aytaylik *l* uzunlikdagi torning ikki tarafi x=0 va x=*l* nuqtalarga maxkamlangan bo'lsin (1-rasm).

Agar torning biror nuqtasini bosib qo'yib yuborsak, yoki uni biroz tortib yuborsak u harakatga keladi, ya'ni tebrana boshlaydi. Bizning asosiy masalamiz istalgan vaqtda torning joylashgan ko'rinishini aniqlash va torning har bir nuqtasi harakat qonunini aniqlashdan iborat. Boshlang'ch paytda tor OX o'qida yotibdi deb faraz qilib, uning juda kichik chetlanishini qaraymiz. Torning harakati OX o'qiga perpendikulyar yo'nalishda bo'ladi. Bu holda torning tebranish jarayoni u(x; t) funktsiya orqali bo'ladi. Juda kichik tebranishda $\overset{\cup}{M_1M_2}$ yoyning uzunligi OX o'qdagi proektsiyasiga teng bo'ladi: $\left|\overset{\cup}{M_1M_2}\right|=x_2-x_1$



1-расм

Bu erda torning zuriqishi hamma nuqtalarida bir xil bo'ladi deb qaraymiz va uni T bilan belgilaymiz. Torning MM' bo'lagini qaraymiz. Bu bo'lak chetlarida torga urinmalar bo'yicha $\vec{T}$ kuchlar ta'sir qiladi. Aytaylik, urinmalar OX o'qi bi-lan φ va φ +Δφ burchaklar hosil qilsin. U holda MM' bo'lakcha ta'sir qiluvchi OY o'qdagi proektsiyasi (2-rasm). $T\sin(\varphi+\Delta\varphi)-Tg\varphi$ Burchak φ juda kichik bo'lganda sinφ =tgφ bo'ladi. Shuni e'tiborga oladigan bo'lsak, (AMS dan)

$$\sin\varphi=\frac{AC}{-T},\quad \sin(\varphi+\Delta\varphi)=\frac{BK}{T}$$

$$AB-AC=T\sin(\varphi+\Delta\varphi)-T\sin\varphi\approx Ttg\,(\varphi+\Delta\varphi)-Ttg\varphi=T\left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)=$$

$$=T\frac{\partial^2 u(x+\theta\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x\approx T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x.\quad .\qquad (0<\theta<1).$$

Biz bu erda f(b)-f(a)=f′(c)(b-a), c∈(a;b) , ya'ni Lagranj teoremasini ishlatdik MM' bo'lakka qo'yilgan tashqi kuchlarni ham hisobga olish kerak bo'ladi, ya'ni inertsiya kuchlarini tenglashtirish kerak. Torning chiziqli zichligi ρ bo'lsin, u holda bo'lak massasi ρΔx bo'ladi. Bo'lak tezlanishi $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ga teng bo'ladi. Dalamber printsipiga asosan

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\qquad(\Delta x\neq 0)\Rightarrow(:\Delta x)$$

va $\frac{T}{\rho}=a^2$ bilan beligilaymiz. Natijada harakat tenglamasi $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ga ega bo'lamiz. Bu tenglama to'lqin tenglamasi – tor tebranishi tenglamasi deyiladi. Noma'lum funktsiya u(x; t) yana chegaraviy va boshlang'ch shartlarni ham kanoatlantirishi kerak bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar: :

1. Matematik fizika tenglamalari umumiy holda qanday ko'rinishda bo'ladi?

2. Qanday shartda tenglama bir jinsli deyiladi?

3. Qachon matematik fizika tenglamasi giperbolik turda deyiladi?

4. Qachon matematik fizika tenglamasi parabolik turda deyiladi?

5. Qachon matematik fizika tenglamasi elliptik turda deyiladi?

6. To'lqin tenglamasi qanday jarayonlarni ifoda qiladi?

7. Fure tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?.

8. Laplas tenglamasini yozing.

9. Chegaraviy shartlar qanday bo'lishi mumkin?

10. Boshlang'ch shartlar qanday bo'lishi mumkin?

11. Tor tenglamasini yozing.

14.2. KORREKT MASALALAR. KOShI VA ChEGARAVIY MASALA. LAPLAS TENGLAMASI UChUN KOShI MASALASI.

Tayanch iboralar: Boshlang'ch shart, chegaraviy shart, korrekt qo'yilgan va kuyilmagan masala, Koshi masalasi, Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasi.

Reja:

1. Hususiy hosila.
2. Ikkinchi tartibli hususiy hosilalar.
3. Hususiy hosilali ikkinchi tartibli chiziqli differentsial tenglamalar.
4. Harakteristikalar metodi.
5. Hususiy hosilali differentsial tenglama echish.

Adabiyotlar:

1. Yo.U. Soatov. "Oliy matematika" II qism. Toshkent. «O'qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 13-bob, § 1-2, 188-191 betlar.

2. Piskunov N.S. Differentsial va integral hisob. 2-tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1974 yil. XVIII bob, §1-2, 397-400 betlar.

Fizi

k xodisalarni matematik nuqtai nazardan ifodalashda usha xodisani bir qiymatli ifodalash uchun kerakli bo'ladigan shartlarni hisobga olish etarli bo'ladi. Torning ko'ndalang tebranishlari haqidagi masalani qaraylik Torning ikki cheti maxkamlangan . Demak,

$$u(0, t)=0, \quad u(l, t)=0 \qquad (1)$$

shart bajarilishi kerak. (1) ga ***chegaraviy shart*** deyiladi. Torning tebranishi uning boshlang'ch ko'rinishidan va nuqtalardagi tezliklarining taksimlanishidan bog'liq bo'ladi, ya'ni

$$u(x, t_0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,t_0)}{\partial t}=\psi(x) \qquad (2)$$

shartga bog'liq bo'ladi. (2) ***boshlang'ch shart*** deyiladi.

Demak, tor tebranishi masalasida qushimcha shartlar chegaraviy (1) va boshlang'ch (2) shartlardan iborat bo'ladi. Ikkala (1) va (2) shartlar birgalikda ***chegaraviy shartlar*** ham deb ataladi.

Keyinchalik biz shuni ko'rsata olamizki, bu shartlar $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tor tebranishi tenglamasini echish uchun tula etarli bo'ladi.

Agar torning chetki nuqtalari biror qonun bo'yicha harakatlansa chegaraviy shart

$$u(0\,;t)=M_1(t), \quad u(l\,;t)=M_2(t) \qquad (3)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar bizni juda qisqa vaqt oraligidagi jarayon qiziqtirsa, ya'ni chegaralar bor- yo'qligi ahamiyatga ega bo'lmasa, u holda quyidagicha masala qo'yish mumkin:

Masala: Quyidagi

$$U_{tt}=a^2U_{xx}+f(x;t) \qquad -\infty<x<+\infty,\ t>0$$

tenglamaning

$$U(x;0)=\varphi(x), \quad U_t(x;0)=\psi(x) \qquad -\infty<x<+\infty$$

boshlang'ch shartlarni qanoatlantiruvchi echimi topilsin. Ana shu masalani to'lqin tenglamasi uchun ***Koshi masalasi*** deyiladi.

Umuman chegaraviy masala quyidagicha qo'yiladi:

Masala: Ushbu $0\le x\le l,\ \ t\ge 0$ sohada aniqlangan va

$U_{tt}=a^2U_{xx}+f(x,t)\ \ 0<x<l,\ \ t>0$ tenglamani va

$U(0,t)=\mu_1(t),\ \ U(l,t)=\mu_2(t)\ \ (t>0)$ chegaraviy shartni hamda

$U(x;0)=\varphi(x),\ U_t(x;0)=\psi(x)\ \ (0<x<l)$ boshlang'ch shartlarni qanoatlantiruvchi U(x,t) funktsiya topilsin. Yuqorida aytib o'tilgan Koshi masalasini quyidagicha yozish mumkin.

Masala: Ushbu $U_{tt}=a^2U_{xx}+f(x,t)\ \ -\infty<x<+\infty,\ \ t>0$ tenglamaning boshlang'ch shartlarni qanoatlantiruvchi U(x,t) funktsiya topilsin.

Isbot qilish mumkinki, U(x,t) funktsiya yagona bo'ladi, xuddi shunday yana shuni Isbotlash mumkinki f(x; t) funktsiyaning kichik o'zgarishiga, Koshi masalasi echimining kichik o'zgarishi mos keladi, agar albatta soxa t bo'yicha chegaralangan bo'lsa. Bu erdan shuni xulosa qilib aytish mumkinki, to'lqin tenglamasi uchun Koshi masalasi, korrekt qo'yilgan masala bular ekan. Korrekt qo'yilmagan masalada albatta yagona echim va f(x; t) funktsiyaning kichik o'zgarishiga, echim U(x,t) ning kichik o'zgarishi mos kelishi buzilar ekan.

Yuqoridagilardan xulosa qilib korrekt masalaga quyidagicha ta'rif berish mumkin.

T A' R I F. Matematik masala korrekt qo'yilgan deyiladi agar :

1) Masala echimi mavjud bo'lsa;
2) Masala yagona echimga ega bo'lsa;
3) Masala echimi berilgan shartlarga uzluksiz bog'liq bo'lsa:

3) shartni ba'zi ***xollarda turgunlik***, ya'ni echimning turgunlik sharti ham deb atashadi.

Nokorrekt masalaga misol keltiramiz. Laplas tenglamasi $U_{xx}+U_{yy}=0$ нинг $U(x;0)=\varphi(x),\ U_y(x;0)=\psi(x)$ boshlang'ch shartlarni qanoatlantiruvchi U(x;y) echimini topish masalasi Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasi deyiladi. Ushbu

$$U^{(1)}(x;y)=0,\quad U^{(2)}(x;y)=\frac{1}{\lambda}\sin\lambda x ch\lambda y$$

funktsiyalar Laplas tenglamasini kanoatlantiradi.

$$U^{(1)}(x;y)=0,\ \ U_y^{(1)}(x;0)=0$$

$$U^{(2)}(x;y)=\varphi(x)=\frac{1}{\lambda}\sin\lambda x$$

$$U_y^{(2)}(x;0)=\psi(x)=\sin\lambda x\cdot sh\lambda y\big|_{y=0}=0$$

kurinib turibdiki .

Qo'yilayotgan boshlang'ch shartlar keraklicha katta λ larda bir-biridan juda kam farq qiladi. Ammo echim $U^{(2)}(x;y)$ λ ning qiymati qanday bo'lmasin, keraklicha katta bo'lishi mumkin. Chunki giperbolik kosinus funktsiya ishtirok qilmoqda.

Bu esa 3) shartning bajarilmasligini bildiradi. Demak, Laplas tenglamasi uchun qo'yilgan Koshi masalasi korrekt emas ekan.

Takrorlash uchun savollar::

1. Chegaraviy shart deb qanday shartga aytiladi?
2. Boshlang'ch shart deb qanday shartga aytiladi?
3. Chegaraviy masalaga ta'rif bering.
4. Koshi masalasiga ta'rif bering.
5. Korrekt va nokorrekt masalalarga ta'rif bering.

14.3. SIMLARDA ELEKTR TEBRANISHI TENGLAMASI. ISSIQLIKNING TARQALISH TENGLAMASI.

Tayanch iboralar: Telegraf tenglamalari, bir jinsli sterjen, issiqlik tarqalish tenglamasi, elektr tebranishi va issiqlik tarqalish tenglamalari uchun chegaraviy shartlar.

Reja:

1. Tor tenglamasi uchun boshlang'ch shart.
2. Tor tenglamasi uchun chegaraviy shart.
3. Chetki shart.
4. To'lqin tenglamasi uchun Koshi masalasi.
5. Korrekt masala.
6. Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasi.
7. Tor tebranishi tenglamasini Dalamber usuli bilan echish**.**

Adabiyotlar:

1. Yo.U. Soatov. "Oliy matematika" II qism. Toshkent. «O'qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 13-bob, § 3, 191-197 betlar.

2. Piskunov N.S. Differentsial va integral hisob. 2-tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1974 yil. XVIII bob, §4-5, 406-410 betlar.

Biz to'lqin tenglamasi qanday jarayonlar qonuniyatini urganadi degan savolga javob berishda simlarda elektr tebranishlari qonunlarini ham urganadi deb o'tgan edik.

Simlarda elektr toki u(x;t), kuchlanish v(x;t) kattaliklar bilan belgilanadi. Ular simdagi nuqtaning koordinatasiga va vaqtga bog'liq bo'ladi. Simning Δx bo'lagini qaraylik. Bu bo'lakdagi kuchlanishning kamayishi

$$v(x;t)- v(x+\Delta x;t) \approx -\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x$$

ga tengbo'ladi.

Bu ikkita kattalik iRΔx va $\frac{\partial i}{\partial t}L\Delta x$ lar yigindisiga teng bo'ladi. Bu erda R qarshilik, L- induktivlik koeffitsenti bo'lib, ular iRΔx qarshilik, $\frac{\partial i}{\partial t}L\Delta x$ induktivlikni bildiradi.

Minus belgi olinganiga sabab shuki, simda tok v kuchlanishning usishiga teskari yo'nalishda bo'ladi.

Demak, $-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x = iR\Delta x + \frac{\partial i}{\partial t}L\Delta x$, Δx ga qisqartiramiz,

$$-\frac{\partial v}{\partial x}=iR+\frac{\partial i}{\partial t}L \quad \text{yoki} \quad \frac{\partial v}{\partial x}+iR+\frac{\partial i}{\partial t}L=0 \qquad (1)$$

Agar Δx bo'lakdan chikuvchi va unga kiruvchi toklar ayirmasining Δt vaqt ichidagi qiymatini e'tiborga oladigan bo'lsak, u

$$[i(x;t)-i(x+\Delta x;t)]\,\Delta t \approx -\frac{\partial i}{\partial x}\Delta x\cdot\Delta t$$

ga teng bo'ladi va u Δx bo'lakni zaryadlashga $C\Delta x\frac{\partial v}{\partial t}\Delta t$ ni va AvΔxΔt ni izolyatsiyaga sarf qiladi (bu erda A izolyatsiya koeffitsenti). U holda

$$-\frac{\partial i}{\partial x}\Delta x\cdot\Delta t = C\Delta x\cdot\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\Delta t + A\cdot v\cdot\Delta x$$

$\Delta x\cdot\Delta t$ga qisqartiramiz.

$$-\frac{\partial i}{\partial x}=C\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+A\cdot v \quad \text{yoki} \quad \frac{\partial i}{\partial x}+C\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+A\cdot v=0 \qquad (2)$$

va (2) tenglamalarga telegraf tenglamalari deyiladi.

(1) va (2) tenglamalarni sistema qilib, faqat i(x;t) va v(x;t) funktsiyalari bor differentsial tenglamaga kelish mumkin. Bu uchun (2) tenglamani x bo'yicha differentsiallaymiz, (1) ni esa t bo'yicha differentsiallaymiz va uni C ga ko'paytiramiz.

$$\frac{\partial i}{\partial x}+c\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+Av=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}+c\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x}+A\frac{\partial v}{\partial x}=0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}+iR+\cdot\frac{\partial i}{\partial t}L=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}+R\cdot\frac{\partial i}{\partial t}+\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}L=0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}+R\cdot\frac{\partial i}{\partial t}+\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}L=0 \quad \Rightarrow \quad C\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}+CR\cdot\frac{\partial i}{\partial t}+CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=0 \qquad (4)$$

(3)dan, (4) ni hadma-had ayiramiz.

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}+A\frac{\partial v}{\partial x}-CR\frac{\partial i}{\partial t}-CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=0 \qquad (5)$$

(1) tenglamadan $\frac{\partial v}{\partial x}$ ni topib, (5) ga qo'yamiz, $\frac{\partial v}{\partial x}=-iR-\frac{\partial i}{\partial t}L$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}+A(-iR-\frac{\partial i}{\partial t}L)-CR\cdot\frac{\partial i}{\partial t}-CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=0 \qquad \text{ёки}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}+(CR+AL)\frac{\partial i}{\partial t}+ARV \qquad (6).$$

Xuddi shunga o'xshash holda

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=CL\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+(CR+AL)\frac{\partial v}{\partial t}+ARV \qquad (7)$$

ni hosil qilish mumkin. Agar A=0 , R=0 deb oladigan bo'lsak

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = CL\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad a^2 = \frac{1}{CL} \text{ деб белгиласак},$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

formulalarga ega bo'lamiz. Ular uchun chegaraviy shartlar

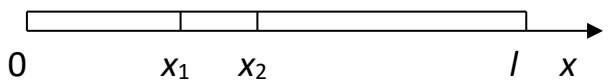
$$u(0;t) = 0, \quad u(l;t) = 0 \quad \text{ва} \quad u(x;0) = f(x), \quad u_t(x;0) = \varphi(x)$$

ko'rinishda qo'yiladi.

Endi issiqlikning tarqalish tenglamasini qaraymiz.

Uzunligi l ga teng bir jinsli sterjenni qaraymiz. Bu sterjenning yon sirtlari issiqlik o'tkazadigan va ko'ndalang kesim barcha nuqtalarida tempratura bir xil bo'lsin. Ana shu xolatda sterjenda issiqlikning tarkalish jarayonini urganamiz.

Sterjenning bir uchi OX o'qining



O nuqtasiga, ikkinchi uchi x=l nuqtasiga tushadigan qilib joylashtiramiz, hamda t momentda sterjen kesimidagi temperatura u (x; t) bo'lsin deb faraz qilamiz. Tajriba shuni ko'rsatadiki abtsissasi x ga teng bo'lgan kesimdan vaqt birligi ichida oqib o'tgan issiqlik miqdori

$$Q = -k\cdot\frac{\partial u}{\partial x}S \quad (1)$$

formula bilan aniqlanadi.Bunda S – sterjen kesimining yuzi , k –issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsentidir. x_1 va x_2 lar orasiga joylashgan $x_2 - x_1 = \Delta$ sterjen bo'lagini qaraylik. Bu bo'lakning Δt vaqt ichida oqib o'tgan issiqlik miqdori

$$\Delta Q_1 = -k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1}\cdot S\Delta t \quad (2) \quad \text{ga}$$

x_2 ga teng bo'lgan kesimidan Δt vaqt ichida oqib turgan issiqlik miqdori

$$\Delta Q_1 = -k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2}\cdot S\Delta t \quad (3) \quad \text{ga teng bo'ladi.}$$

Issiqlikning sterjenning x_1 nuqtasidan x_2 nuqtasigacha tarqalgandagi $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$ miqdori Δt vaqt ichida

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = \left[-k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1}\cdot S\Delta t\right] - \left[-k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2}\cdot S\Delta t\right] \approx k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x S\Delta t$$

(4)

Bu issiqlik oqimi Δt vaqt ichida sterjen bo'lagi temperaturasini Δu miqdorga oshirganligini inobatga olsak, u holda

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = c\rho\Delta x\cdot S\cdot\Delta u \quad \text{yoki}$$

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 \approx S\rho\cdot\Delta x\cdot S\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t \quad (5) \text{ bo'ladi.}$$

c- sterjen moddasining issiqlik xajmi, ρ- sterjen moddasining zichligi, $\rho\Delta x\cdot S$- sterjen bo'lagi massasi. (4) va (5) formulalarni tenglashtirib

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x S\Delta t = c\rho\cdot\Delta x\cdot S\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t \quad \text{yoki}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho} \quad \text{deb olsam}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6)\,\text{formulaga ega bo'lamiz.}$$

Bu formula bir jinsli sterjenda issiqlikning tarqalish tenglamasi bo'ladi. Bu tenglama echimi tula aniqlangan bo'lishi uchun u (x; t) funktsiya chegaraviy shartlarni kanoatlantirishi kerak. Ular har xil bo'lishi mumkin . Birinchi chegaraviy masalaga mos shartlar quyidagicha bo'ladi:

$$u(x;0)=\varphi(x), \quad u(0;t)=\psi_1(t), \quad u(l;t)=\psi_2(t)$$

$u(x;0)=\varphi(x)$ shartni ko'pincha fizik shart deb ataydilar, bu shart shundan dalolat beradiki, sterjenning har xil kesimlarida t=0 da φ(x) ga teng temperatura berilgan deyiladi. $u(0;t)=\psi_1(t)$, $u(l;t)=\psi_2(t)$ chegaraviy shartlar shuni ko'rsatadiki sterjenning chetki nuqtalarida $\psi_1(t)$ va $\psi_2(t)$ tempraturalar mavjud deyiladi:

M a s a l a : Ushbu $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tenglamaning 0<t<T sohadagi

$$u(x;0)=\varphi(x), \quad u(0;t)=\psi_1(t), \quad u(l;t)=\psi_2(t)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi u (x; t) echimi topilsin.

Takrorlash uchun savollar: :

1. Qanday tenglamalarga telegraf tenglamalari deyiladi?
2. Bir jinsli sterjenga ta'rif bering.
3. Bir jinsli sterjenning massasi qanday topiladi?
4. Issiqlik tarqalish tenglamasi qanday bo'ladi?
5. Fure tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masala qanday bo'ladi?

14.4. TOR TEBRANISH TENGLAMASINI FUR'E USULIDA ECHISH.

Tayanch iboralar: O'zgaruvchilarni ajratish usuli, xos qiymatlar, xos funktsiyalar.

Reja:

1. Simlarda elektr tebranishlari haqida masala.
2. Telegraf tenglamalari.
3. Bir jinsli sterjenda issiqlikning tarqalish tenglamasi.
4. Issiqlikning tarqalish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masala.

5. Elektr tebranishlari tenglamasi uchun chegaraviy masala.

Adabiyotlar:

1. Yo.U. Soatov. “Oliy matematika” II qism. Toshkent. «O’qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 13-bob, § 4, 197- 203 betlar.

2. Piskunov N.S. Differentsial va integral hisob. 2-tom, Toshkent, «O’qituvchi», 1974 yil. XVIII bob, §3, 402-406 betlar.

O’zgaruvchilarni ajratish yoki Fure usuli ko’pgina matematik fizika tenglamalarini echishda qo’llaniladi.

Misol. Ushbu $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (1)tenglamaning

u (0; t)=0, (2) , u (l; t)=0 (3) , u (x; 0)=f(x) (4) , u_t=(x; 0)=φ(x) (5)

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi u (x; t) echimi topilsin. u (x; t)≠0 echimni bittasi t ga, ikkinchisi x ga bog’liq funktsiyalar ko’paytmasi ko’rinishida izlaymiz va ularni keraklicha tartibda differentsiallash mumkin deb hisoblaymiz.

u (x; t)=X(x)T(t) (6)

Kerakli hususiy hosilalarni topib (1) ga qo’yamiz.

X(x)T′′(t) =a^2X′′(x)T(t)

Buni a^2X(x)T(t) ga bo’lamiz.

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} \qquad (7)$$

Chap tarafda faqat t ga bog’liq , ung tarafda esa faqat x ga bog’liq differentsial tenglamalar turibdi. Tenglik faqat shu holda o’rinli bo’ladiki, ular biror o’zgarmas songa teng bo’lsa. Shu o’zgarmasni -λ bilan (λ>0) bilan belgilaymiz.

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$X''+\lambda X=0$ (8) , T′′+a^2λT=0 (9)

Bu tenglamalarni umumiy echimlari

$X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\sin\sqrt{\lambda}\,x$ (10)

$T(t)=C\cos a\sqrt{\lambda}\,t + D\sin a\sqrt{\lambda}\,t$ (11)

bu erda A, B, C, D lar o’zgarmaslar.

Topilganlarni (3) ga qo’yib,

$u(x; t)=(A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\sin\sqrt{\lambda}\,x)(C\cos a\sqrt{\lambda}\,t + D\sin a\sqrt{\lambda}\,t)$

natijani hosil qilamiz.

A va B o’zgarmaslarni shunday tanlaymizki, natijada (2) va (3) shartlar bajarilsin.T(t)≠0 bo’lgani uchun

$0=u(0; t)=A+B\cdot 0$, $0=A\cos\sqrt{\lambda}\,l + B\sin\sqrt{\lambda}\,l$

A=0, $B\sin\sqrt{\lambda}\,l=0$, B≠0 bo’lishi kerak, aks holda A=0 ekanligidan X(x)=u(x; t)=0 bo’ladi.

$$\sin\sqrt{\lambda}\, l=0, \quad \sqrt{\lambda}=\frac{n\pi}{e} \quad (12) \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

$$X(x)=\sin\frac{n\pi}{e}x \qquad (13)$$

bunga chegaraviy masalaning xos funktsiyasi, λ ning qiymatlariga esa xos qiymatlar deyiladi.

$$T(t)=C\cos\frac{an\pi}{e}t+D\sin\frac{an\pi}{e}t \quad (n=1, 2, \ldots) \qquad (14)$$

$$u_n(x;\, t)=\sin\frac{n\pi}{e}x(C_n\cos\frac{an\pi}{e}t+D_n\sin\frac{an\pi}{e}t) \qquad (15)$$

Bu erda har bir n ning qiymati uchun, shu jumladan har bir (uchun (8) va (9) ifodalarni (1) tenglamalarni qo'yib (2) va (3) shartlarni qanoatlantiruvchi echimlarni hosil qilamiz, shuning uchun un(x; t) bilan belgilaymiz.

$u\,(x;\, t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x;t)$ deb belgilash kiritamiz. U holda echim

$$u\,(x;\, t)\,(C_n\cos\frac{an\pi}{e}t+D_n\sin\frac{an\pi}{e}t)\,\sin\frac{n\pi}{e}x \qquad (16)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu echim ham (2) va (3) chegaraviy shartlarni kanoatlantiradi. Yana shu narsa kurinib turibdiki (10) echim (1) differentsial tenglamaning echimi bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki C_n va D_n koeffitsentlar shunday bo'lishi kerakki (10) kator yakinlashganda, uni ikki martadan x va t bo'yicha differentsiallaganda ham hosil bo'lgan kator yakinlashuvchi bo'lishi kerak. u (x; t) echim (2) va (3) boshlang'ch shartlarni ham kanoatlantirishi kerak. Bu ishni biz C_n va D_n koeffitsentlarni tanlash orqali amalga oshiramiz. u (x; t) funktsiya (4) va (5) boshlang'ch shartlarni kanoatlantirishi kerak. Birinchidan :

t=0 da u (x; t)=f(x) bo'lishi kerak,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{e}x \qquad (17)$$

Agar f(x) (17) ko'rinishda bo'ladigan bo'lsa, uni (0;e) oraliqda Fur'e qatoriga yoyish mumkin, agar

$$C_n=\frac{2}{e}\int_0^e f(x)\sin\frac{n\pi}{e}dx \qquad (18)$$

bo'lsa. Ikkinchidan (10) echimni t bo'yicha differentsiallaymiz va t=0 da $\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{an\pi}{e}\sin\frac{n\pi}{e}x$ ga ega bo'lamiz, uning uchun Fur'e koeffitsentlarini topamiz,

$$D_n\frac{an\pi}{e}=\frac{2}{e}\int_0^e \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{e}xdx \text{ ёки } D_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^e \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{e}xdx \quad (19).$$

Demak, (16) trigonometrik qatorning C_n va D_n koeffitsentlari (18) va (19) formulalar bilan aniqlangan bo'lib, uzi ikki marta x va t bo'yicha hadma-had

differentsiallanuvchi bo'lsa, u albatta (1) tenglamaning (2), (3), (4), (5) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi u (x; t) echimi bo'ladi.

Xulosa. Demak , $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tor tebranishi tenglamasining

u (x; 0)=f(x) , u_t(x; 0)=φ(x) , u (0; t)=0 , u (*l*; t)=0
chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi echimi

$$u(x;t)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n \cos\frac{an\pi}{e}t + D_n \sin\frac{an\pi}{e}t)\sin\frac{n\pi}{e}x$$

ko'rinishda bo'lib, koeffitsentlari

$$C_n = \frac{2}{e}\int_0^e f(x)\sin\frac{n\pi}{e}xdx \ , \quad D_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^e \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{e}xdx$$

formulalar bo'yicha aniqlanar ekan.

Takrorlash uchun savollar: :

1. O'zgaruvchilarga ajratish usuli nimadan iborat?
2. Xos qiymatlarni tushuntiring?
3. Xos funktsiyalar qanday topiladi?
4. A va V koeffitsentlar qanday aniqlanadi?
5. S_n va D_n koeffitsentlar qanday aniqlanadi?
6. Tor tebranishi tenglamasining echimi qanday ko'rinishda bo'ladi?

14.5. ISSIQLIKNING CHEGARALANMAGAN STERJENDA TARQALISHI. PUASSON INTEGRALI.

Tayanch iboralar: Chegaralanmagan sterjen, boshlang'ch shart.

Rejasi:

1. Q'zgaruvchilarni ajratish metodi.
2. Tor tebranishi tenglamasi va chetki shartlar.
3. Tor tebranishi tenglamasini Fure usuli bilan echish.
4. Chegaraviy masala uchun xos qiymatlar.
5. Chegaraviy masala uchun xos funktsiyalar.
6. Tor tebranishi tenglamasi echimi.

Adabiyotlar:

1. Yo.U. Soatov. “Oliy matematika” II qism. Toshkent. «O’qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 13-bob, § 7-9, 210- 218 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral hisob. 2-tom, Toshkent, «O’qituvchi», 1974 yil. XVIII bob, §4-7, 406-414 betlar.

Aytaylik bizga chegaralanmagan sterjen berilgan bo’lib, har xil kesimlariga boshlang’ch momentda tempratura berilgan bo’lsin va keyingi momentlarda sterjenda tempraturaning taksimlanishini aniqlash kerak bo’lsin. Agar sterjen Ox o’qi bilan ustma-ust tushadigan bo’lsa, masala quyidagicha bo’ladi**:**

M a s a l a . Ushbu $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (1) differentsial tenglamaning -∞<x<+∞, t>0, sohada u(x,0)=φ(x) (2) boshlang’ch shartni qanoatlantiruvchi echimi topilsin.

Bu masala echimini topishda Fure usulidan foydalanamiz (1) differentsial tenglama hususiy echimini ikkita funktsiya ko’paytmasi ko’rinishida izlaymiz:

$$u(x;\ t)=X(x)(T(t) \qquad (3)$$

Kerakli hususiy hosilalarni topib, ularni (1) ga qo’yamiz va

$X\,(x)T'(t)=a^2\,X''(x)T(t)$ yoki

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \qquad (4)$$

tenglamani hosil qilamiz.

Oxirgi tenglikni bu ko’rinishda yozish har bir nisbatning na x ga, na t ga bog’liq bo’lishidan kelib chiqadi.U holda

$$T' + a^2\lambda^2 T = 0 \quad (5), \quad X'' + \lambda^2 X = 0 \quad (6)$$

differentsial tenglamalarga ega bo’lamiz. Ularni echib

$$T = C \cdot e^{-a^2\lambda^2 t} \text{ ва } X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

larni hosil qilamiz. U holda topilganlarni (3) ga qo’ysak

$$u_\lambda(x;t) = e^{-a^2\lambda^2 t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right] \qquad (7)$$

echimni hosil qilamiz. Bu erda har bir λ ning qiymati uchun, yangi bir echim hosil qilingani uchun A va B lar λ ga bog’liq bo’ladi.

$$u(x;t) = \sum_\lambda u_\lambda(x;t) = \sum_\lambda e^{-a^2\lambda^2 t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right]$$

(7) ifodani λ parametr bo’yicha (0;+∞) da integralaymiz

$$\int_0^\infty u_\lambda(x;t)d\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda$$

$$u(x;t) = \int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda \qquad (8)$$

ni hosil qilamiz.

Bu echim (2) shartni kanoatlantirishi uchun A(() va V(() larni aniqlaymiz. Oxirgi echimda t=0 deb olsak

$$u(x;0)=\varphi(x)=\int_0^{+\infty}\left[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda \qquad (9)$$

Faraz qilaylik, φ(x) funktsiya Fur'e integral orqali ifodalanadigan bo'lsin.

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\varphi(\alpha)\cos\lambda(\alpha-x)\right]d\alpha\right)\mathrm{d}\lambda \quad \text{ёки}$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha d\alpha\right)\cos\lambda x+\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha d\alpha\right)\sin\lambda x\right]d\lambda \qquad (10)$$

(9) va (10) ifodalarning o'ng tomonlarini tenglashtiramiz va

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha d\alpha, \qquad B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha d\alpha \qquad (11)$$

ni hosil qilamiz. Natijada A(λ) va B(λ) larni (8) ga qo'ysak

$$u(x;t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t}\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha d\alpha\right)\cos\lambda x+\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha d\alpha\right)\sin\lambda x\right]d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t}\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)(\cos\lambda\alpha\cos\lambda x+\sin\lambda\alpha\sin\lambda x)d\alpha\right)\right]d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos(\alpha-x)\lambda d\alpha\right)d\lambda$$

integrallash tartibini o'zgartiramiz.

$$u(x;t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\varphi(\alpha)\left(\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t}cos\lambda(\alpha-\lambda)d\lambda\right]d\alpha \qquad (12)$$

Oxirgiifodani yana o'zgartiramiz, bu uchun ichki integralni hisoblaymiz,

$$\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t}cos\lambda(\alpha-\lambda)d\lambda=\frac{1}{a\sqrt{t}}\int_0^{+\infty}e^{-z^2}\cos\beta z dz \qquad (13)$$

bu erda biz

$$z=a\lambda\sqrt{t} \qquad \text{ва} \qquad \beta=\frac{\alpha-x}{a\sqrt{t}} \qquad (14)$$

belgilashlar kiritdik.

U holda $z^2=a^2\lambda^2t$, $-z^2=-a^2\lambda^2t$, $\beta\cdot z=a\lambda\sqrt{t}\cdot\frac{\alpha-x}{a\sqrt{t}}=\lambda(\alpha-x)$ bo'ladi.

Oxirgi integralni

$$K(\beta)=\int_0^{\infty}e^{-z^2}\cos\beta z dz \qquad (15)$$

bilan belgilaymiz va uni (bo'yicha differentsiallaymiz, u holda

$$K'(\beta)=-\int_0^{\infty}e^{-z^2}z\sin\beta z dz$$

bo'ladi. Bo'laklab integrallaymiz

$$K'(\beta)=\begin{bmatrix} u=\sin\beta z, & du=\beta cos\beta z dz \\ \mathrm{dv}=\mathrm{z}\cdot e^{-z^2}, & \mathrm{v}=-\frac{1}{2}e^{-z^2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left[e^{-z^2}\sin\beta z\right]_0^{+\infty}-\frac{\beta}{2}\int_0^{+\infty}e^{-z^2}z\cos\beta z dz=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\beta z}{e^{-z^2}}-\frac{\sin 0}{e^0}\right]-\frac{\beta}{2}\int_0^{+\infty}e^{-z^2}z\cos\beta z dz=-\frac{\beta}{2}\int_0^{+\infty}e^{-z^2}z\cos\beta z dz$$

$K'(\beta)=-\frac{\beta}{2}K(\beta)$ differentsial tenglamaga ega bo'lamiz. Oxirgi ifodani integrallaymiz, ya'ni differentsial tenglamani echamiz.

$$K'(\beta)+\frac{\beta}{2}K(\beta)=0: \qquad \frac{dK(\beta)}{d\beta}=-\frac{\beta}{2}K(\beta)$$

$$\frac{dK(\beta)}{d\beta}=-\frac{\beta}{2}d\beta \Leftrightarrow \int\frac{dK(\beta)}{d\beta}=-\frac{1}{2}\int\beta d\beta,\ \ln|K(\beta)|=-\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{2}+\ln c$$

$K(\beta)=ce^{-\frac{\beta^2}{4}}$ ga ega bo'lamiz, s ni aniqlaymiz, bu uchun $K(\beta)=\int_0^{\infty}e^{-z^2}\cos\beta z dz$ dan foydalanamiz. $K(0)=\int_0^{\infty}e^{-z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$$K(0)=c\cdot e^{-0}=c=\frac{\sqrt{\pi}}{2};\ \ c=\frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

u holda

$$K(\beta)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\beta^2}{4}} \qquad (17)$$

teng bo'ladi. Oxirgi topilgan ifodani (15) integraldan foydalanib (13) ga qo'yamiz.

$$\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\alpha-x)d\lambda=\frac{1}{a\sqrt{t}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\beta^2}{4}}$$

o'ng tarafga (ning o'rniga (14) ifodani qo'yamiz, natijada

$$\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\alpha-x)d\lambda=\frac{1}{2a}\cdot\sqrt{\pi}e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2 t}}$$

bu ifodani (12) echimga eltib qo'yamiz va

$$u(x;t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2 t}}d\alpha \qquad (19)$$

ni hosil qilamiz.

Bu formula, Puasson integrali deyiladi va u chegaralanmagan sterjen uchun qo'yilgan (1), (2) masalaning echimi bo'ladi. Yuqorida qo'yilgan masalani ba'zi

Adabiyotlarda Koshi-Dirixle masalasi ham deb yuritiladi. Demak, (19) echimni Koshi-Dirixle masalasining echimi deyiladi.

Takrorlash uchun savollar: .

1. Chegaralanmagan sterjen deganda nimani tushunasiz?
2. $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tenglama uchun boshlang'ch shart qanday ko'rinishda bo'ladi?
3. (1) tenglama echimi qanday ko'rinishda yoziladi va u qanday nomlanadi?
4. Puasson integrali qanday ko'rinishda bo'ladi?
5. Koshi-Dirixle masalasi qanday ko'rinishda bo'ladi.

XV BOB. EHTIMOLLAR NAZARIYASI.

15.1. KOMBINATORIKA ELEMENTLARI

Tayanch iboralar : kombinatorik masalalar, kombinatorika, qo'shish qoidasi, ko'paytirish qoidasi, kombinatsiya, urin almashtirish, urinlashtirish, Nyuton binomi, binomial koeffitsient.

R e j a :

1. Kombinatorik masalalar.
2. Kombinatorika predmeti.
3. Kombinatorikaning qo'shish qoidasi.
4. Kombinatorikaning ko'paytirish qoidasi.
5. Kombinatsiya ta'rifi va uni hisoblash formulasi.
6. Urin almashtirish ta'rifi va uni hisoblash formulasi.
7. Urinlashtirish ta'rifi va uni hisoblash formulasi.
8. Nyuton binomi.
9. Ba'zi bir kombinatorik ayniyatlar.

Adabiyotlar:

[10] II bob § 8-11 [12] I bob § 7

T A ' R I F 1 : Biror chekli to'plam elementlari ichidan ma'lum bir xossaga ega bo'lgan elementlardan iborat qism to'plamlarni tanlab olish yoki to'plam elementlarini ma'lum bir tartibda joylashtirish bilan bog'liq masalalar kombinatorik masalalar deyiladi.

T A ' R I F 2 : To'plamlar nazariyasining kombinatorik masalalar bilan shug'ullanadigan qismi kombinatorika deyiladi.

Masalan, o'nta talabani ikki kishilik partali sinfga necha xil usulda o'tkazish mumkinligi, molekulada atomlar qanday usullarda birlashishi mumkinligi (ximiya), oqsil moddalarda aminokislotalarning qanday tartiblarda joylashtirish mumkinligi (biologiya), turli bloklardan iborat mexanizmda bu bloklarni turlicha tartiblarda birlashtirish (konstruktorlik), bir necha dala uchastkalarida turli xil ekinlarini har xil tartibda ekish (agronomiya), ehtimolliklar nazariyasining turli masalalarini echishda natijalarni u yoki bu guruhlarini kurish kombinatorik masalalarga Misol bo'ladi va kombinatorikani ham matematikada, ham insonning boshqa faoliyatlarida kullanilishini ko'rsatadi.

Kombinatorikada qo'shish va ko'paytirish qoidasi deb ataluvchi ikkita asosiy qoida mavjud. Ularni ifodalash uchun dastlab to'plamlar nazariyasiga doir bir teoremani keltiramiz.

TEOREMA : Agarda A va V chekli to'plamlar bo'lib, ulardagi elementlar soni n(A) va n(B) bo'lsa, u holda $A \cup V$ to'plamdagi elementlar soni $n(A \cup V)$quyidagicha topiladi:

$n(A \cup V)= n(A)+ n(V)$, agarda $A \cap V= \varnothing$bo'lsa,

$n(A \cup V)= n(A)+ n(V)- n(A \cap V)$,agarda $A \cap V\neq\varnothing$ bo'lsa.

Bu teoremadan kombinatorikaning qo'shish qoidasi kelib chiqadi

<u>Qo'shish qoidasi</u> : Agarda biror α tanlovnin (α)usulda, β tanlovni esa n(β) usulda amalga oshirish mumkin bo'lsa va bu erda α ni ixtiyoriy tanlash usuli β ni ixtiyoriy tanlash usulidan farq kilsa, u holda «α yoki β» tanlovni amalga oshirish usullari soni

$n (\alpha \text{ yoki} \beta) = n (\alpha) +n (\beta)$

formula bilan topiladi.

M i s o l : Korxonada 10 erkak va 8 ayol xodim ishlaydi. Shu korxonadan bitta xodimni necha xil usulda tanlab olish mumkin?

<u>Echish:</u> α -erkak xodimni tanlash, β - ayol xodimni tanlash bo'lsin. Unda

$n (\alpha) = 10$, $n (\beta) = 8$ va bitta xodimni

$n (\alpha \text{yoki} \beta) = n (\alpha) + n (\beta) = 10+8 = 18$

usulda tanlash mumkin.

<u>Ko'paytirish qoidasi.</u> Agarda biror α tanlovnin (α) usulda,β tanlovnin (β)usulda amalga oshirish mumkin bo'lsa, u holda «α va β» tanlovni (yoki (α,β) juftlikni) amalga oshirish usullari soni

$n (\alpha \text{ va } \beta) = n (\alpha) n (\beta)$

formula bilan topiladi.

Masalan, korxonada 10 erkak va 8 ayol ishlasa, ulardan bir erkak va bir ayol xodimdan iborat juftlikni $n (\alpha \text{va } \beta) = 10 \cdot 8 = 80$usulda tanlash mumkin.

M i s o l : 10 talabadan iborat guruhga ikkita yo'llanma berildi. Bu yo'llanmalarni necha xil usulda tarkatish mumkin ?

<u>Echish :</u> α Iyo'llanmani, β esa II yo'llanmani tarkatish usullari bo'lsin. Unda $n (\alpha) = 10$ va $n (\beta) = 9$, chunki bitta talabaga I yo'llanma berilganda II yo'llanmaga 9 talaba ega bo'lishi mumkin. Demak, ikkita yo'llanmani tarkatishlar sonin (α va β) $= 10 \cdot 9 = 90$ bo'ladi.

Umumiy holda α_1, α_2 ….α_m tanlovlarni mos ravishda $n(\alpha_1)$, $n(\alpha_2)$, …., n (α_m) usullarda amalga oshirish mumkin bo'lsa,

$n (\alpha_{1 \text{ yoki}} \alpha_2 \text{ yoki}\ldots\text{yoki}\alpha_m) = n (\alpha_1)+ n (\alpha_2)+\ldots+n (\alpha_m)$,

$n (\alpha_1 \text{ va } \alpha_2 \text{ va}\ldots\text{va } \alpha_m) = n (\alpha_1) \cdot n (\alpha_2) \cdot\ldots\cdot n (\alpha_m)$

formulalar o'rinli bo'ladi.

<u>T A ' R I F 3 :</u> n ta elementli to'plamning k ($k \leq n$) ta elementli ixtiyoriy qism to'plami n ta elementdan k tadan olingan kombinatsiya deyiladi va ularning soni C_n^k kabi belgilanadi.

Faqat elementlarning joylashish tartibi bilan farq qiladigan barcha qism to'plamlar bitta kombinatsiya hisoblanadi

Kombinatsiyalarda elementlarning joylashish tartibi ahamiyatga ega emas va bu qism to'plamlar bir-biridan kamida bitta elementi bilan farq qilishi kerak .
Masalan,{a,v,s} n=3elementli to'plamdan ikkita elementli kombinatsiyalar {a;v}, {a;s}, {v;s} bo'ladi . Bu erda {v;a}={a;v}, {s;a}={a;s}, {v;s}={s;v} deb hisoblanadi
Umumiy holda quyidagi formula o'rinli:

$$S_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (1)$$

Bu erda n! (en faktorial) = 1 · 2 · 3 · …· n va 0! = 1 deb olinadi
M i s o l : Beshta odamdan uch kishidan iborat komissiyani

$$S_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$$

usulda tuzish mumkin:
<u>*T A ' R I F 4 :*</u> n ta elementdan iborat to'plamning elementlarini joylashish tartibini uzgartirish natijasida hosil bo'lgan n ta elementli ixtiyoriy to'plam urin almashtirish deb ataladi va ularning soni R_n kabi belgilanadi.
M i s o l
<u>:</u> 1) n = 2 => {a;v},{v;a}=> R_2=2
2) n = 3 =>{a;v;s},{a;s;v},{s;a;v},{v;a;s},{v;s;a},{s;v;a}=> R_3=6
Umumiy holda n elementli urin almashtirishlar soni uchun

$$R_n = n! \qquad (2)$$

formula o'rinli.
M i s o l : Navbat kutib turgan 5 ta odamni R_5= 5! = 120 usulda navbatga joylashtirish mumkin.
<u>*T A ' R I F 5 :*</u> n ta elementlardan iborat to'plamning k ta elementdan iborat qism to'plamlari bir-biridan yoki elementlari, yoki elementlarning joylashish tartibi bilan farq kilsa, ular n ta elementdan k tadan urinlashtirish deb ataladi va ularning soni A_n^k kabi belgilanadi.
M i s o l : 1) {a;v;s} n=3, k=2 =>{a;v},{a;s},{v;s},{v;a},{s;a},{s;v}=>A_4^2=6.
2) {a;v;s;d} n=4, k=3 =>{a;v;s},{a;s;v},{v;a;s},{s;a;v},{s;v;a} …=> A_4^3= 16.
Umumiy holda urinlashtirishlar soni quyidagicha topiladi:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (3)$$

<u>M a s a l a :</u> Talaba 8 kunda 4 ta imtixon topshirishi kerak. Buni necha xil usulda amalga oshirish mumkin?
<u>Echish :</u> Kunlarni 1,2,3, … ,8 kabi nomerlab chiksak, imtixonlar kuyilish kunlari {1;2;3;4}, {1;3;2;5} kabi turtliklardan iborat va ularning soni

$$A_8^4 = 1680$$

S_n^k sonlari yordamida quyidagi formulani yozish mumkin:

$$(a+v)^n = S_n^0\, a^n v^0 + S_n^1\, a^{n-1} v^1 + \ldots + S_n^k\, a^{n-k} v^k + \ldots + S_n^n\, a^0 v^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \qquad (4)$$

Bu Nyuton binomi formulasi deyiladi, S_n^k esa binomial koeffitsentlar deb ataladi. Nyutondan oldin bu formulani natural daraja uchun *Umar Xayyom* (1048-1131), *Giyosiddin ali - Qushchi* (1430) ham bilishgan. Nyutonning xizmati sho'qi, u (4) formulani nafaqat natural n daraja uchun, balkim kasr darajalar uchun ham o'rinli ekanligi ko'rsatgan.

Nyuton binomidan va ta'rifdan S_n^k uchun quyidagi kombinatorik ayniyatlar kelib chiqadi:

1) a = v = 1 $\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ 2) a=1, v= -1 $\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$

3) $C_n^k = C_n^{n-k}$ 4) $C_n^0 = C_n^n = 1.$

Bu ayniyatlarning to'g'riligini tekshirish talabalarga xavola qilinadi

Takrorlash uchun savollar::

1. Qanday masalalar kombinatorik deyiladi?
2. Kombinatorika fani nima?
3. Kombinatorikaning qo'shish qoidasi nimani ifodalaydi?
4. Qo'shish qoidasiga Misol keltiring.
5. Kombinatorikada ko'paytirish qoidasi nimani ifodalaydi?
6. Ko'paytirish qoidasiga Misol keltiring.
7. Kombinatsiya deb nimaga aytiladi va ularning soni qanday topiladi?
8. Urin almashtirish deb nimaga aytiladi va ularning soni qanday topiladi?
9. Urinlashtirish deb nimaga aytiladi va ularning soni qanday topiladi?
10. Nyuton binomi qanday ko'rinishda bo'ladi?
11. Kombinatorik ayniyatlarga Misollar keltiring.

15.2. XODISALAR VA ULAR USTIDA AMALLAR.

Tayanch iboralar: muqarrar xodisa, mumkin bo'lmagan xodisa, tasodifiy xodisa, xodisalar tengligi, xodisalar yig'indisi, xodisalar ko'paytmasi, xodisalar ayirmasi.

R e j a:

1. Xodisalar turlari.
2. Xodisalar tengligi.
3. Xodisalarniqo'shish amali.
4. Xodisalarni ko'paytirish amali.
5. Qarama-qarshi xodisalar.

Adabiyotlar:

1. Yo.U. Soatov. “Oliy matematika” II qism. Toshkent. «O’qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 14-bob, § 1, 229- 231 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral hisob. 2-tom, Toshkent, «O’qituvchi», 1974 yil. X X bob, §1, 471-474 betlar.

Xodisa tushunchasi ehtimolliklar nazariyasining boshlang’ch tushunchalaridan biri bo’lib hisoblanadi va shuning uchun ta'riflanmaydi.

T A ' R I F 1: Ma'lum bir shartlar majmuasi (kompleksi) **Sh** bajarilganda albatta ro’y beradigan xodisa ***muqarrar xodisa*** deyiladi.

Masalan,normal atmosfera bosimi shartida suvni 1000 temperaturada (darajada) kaynashi,olti yokli oddiy o’yin sokkasi tashlanganda chiqadigan raqamni (ochkoni) 6 sonidan katta bo’lmaganligi,sifatli maxsulotlar partiyasidan ixtiyoriy olingan maxsulotning sifatli chiqishi, O’zbekistonda yilda 4 fasl bo’lishi kabi xodisalar muqarrardir.

Barcha muqarrar xodisalar Ω kabi belgilanadi.

T A ' R I F 2: Ma'lum bir shartlar majmuasi Sh bajarilganda hech qachon ro’y bermaydigan xodisa mumkin bo’lmagan xodisa deb ataladi.

Masalan, energiya sarflamasdan biror ishni bajarilishi, ikkita olti yokli o’yin sokkasi tashlanganda ularda chiqqan raqamlarning (ochkolarning) yig’indisi 2 sonidan kichik bo’lishi, qobiliyatsiz va bilimsiz kishini fanda katta kashfiyot qilishi kabi xodisalar mumkin bo’lmaganlarga kiradi.

Barcha mumkin bo’lmagan xodisalar ham bir xil hususiyatlarga ega va shuning uchun ular bitta $\varnothing$ belgi bilan ifodalanadi.

T A ' R I F 3: Ma'lum bir shartlar majmuasi ***sh*** bajarilganda ba'zan ro’y beradigan, ba'zan esa ro’y bermaydigan va ularni qachon ro’y berish –bermasligini oldindan aytib bo’lmaydigan xodisalar **tasodifiy xodisalar** deb ataladi.

Masalan, tanga tashlanganda uni «gerb» tomoni bilan tushishi, ishlab chiqarilgan maxsulotning bozordagi narxi, tekshirishga olingan maxsulotni sifatli bo’lishi, sotib olingan lotoreyaga yutuq chiqishi kabi xodisalar tasodifiydir.

Tasodifiy xodisalar A,V,S,D,E … kabi harflar bilan belgilanadi.

T A ' R I F 4: Ma'lum bir shartlar majmuasi ***sh*** bajarilganda har safar A va V xodisalarning ikkalasi bir paytda yoki ro’y bersa, yoki ro’y bermasa, ular **teng kuchli xodisalar** deyiladi va A q V kabi belgilanadi.

Masalan, olti yokli o’yin sokkasi tashlanganda

A q {tok raqam chiqdi},

V q {1 yoki 3 yoki 5 raqamlar chiqdi}

tasodifiy xodisalar teng kuchli bo’ladi. Biror korxona xodimlari faqat 50 yoshdan boshlab albatta nafaqaxurlar (pensionerlar) safiga o’tkazilsa,

A q {korxonada ishlagan xodim S nafaqaxur},

V q {korxonada ishlagan xodim S yoshi 50 dan kichik emas}

xodisalari teng kuchlidir.

Barcha muqarrar yoki mumkin bo’lmagan xodisalar teng kuchlidir va shuning uchun ham ular mos ravishda Ω yoki $\varnothing$ kabi bitta belgi bilan ifodalangan edi.

T A' R I F 5: A va V xodisalarni ikkalasini bir paytda ro'y berishidan iborat S xodisa A va V **xodisalarning ko'paytmasi** (kesishmasi) deyiladi hamda $S=A\cap V$ kabi belgilanadi.

Masalan, o'yin sokkasi tashlanganda

A ={1 yoki 2 yoki 5 raqam chikdi}≡{1,2,5}

V = {2 yoki 4 yoki 5 yoki : raqam chikdi}≡{2,4,5,6}

tasodifiy xodisalarni ko'rsak, ularning ko'paytmasi

$A\cap V=S$={2 yoki 5 raqam chikdi}= {2,5} xodisani bildiradi.

Haqiqatan ham,o'yin soqqasi tashlanganda faqatgina 2 yoki 3 raqam chiqqandagina ham A, ham V xodisalari bir paytda ro'y beradi. Non maxsulotining namligi tekshirilayotgan bo'lib,

A q { maxsulot namligi 20% dan katta emas}

V q {maxsulot namligi 15% dan kichik emas}

xodisalarni ko'rsak, ularning ko'paytmasi

$S = A\cap V$ = {maxsulot namligi 15% bilan 20% orasida}degan xodisani bildiradi.

Ta'rifdan ixtiyoriy A va V xodisalar uchun

$$A\cap V= V\cap A,\ A\cap\Omega=A,\ V\cap\varnothing=\varnothing$$

munosabatlar o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

T A ' R I F 6 : A va V xodisalardan kamida bittasini ro'y berishidan iboart S xodisaA va V **xodisalarning yig'indisi yoki** (birlashmasi) deb ataladi va $S=A\cup V$ kabi belgilanadi.

Masalan, o'yin soqqasi tashlanganda

Aq{1,2,4,5}, Vq{2,3,5} tasodifiy xodisalar qaralsa, ularning yig'indisi SqA(Vq{1,2,3,4,5} xodisani, ya'ni 6 raqami chiqmaganligi xodisasini bildiradi. Bunda 1 yoki 4 raqam chiqqanda faqat A xodisasi, 3 raqami chiqqanda faqat V xodisasi, 2 yoki 5 raqami chiqqanda esa A va V xodisalar ikkalasi ham ro'y beradi. Xuddi shunday korxona xodimlarining ish staji tekshirilayotgan bo'lib,

Aq{xodimning ish staji 3 yil bilan 5 yil orasida}

Vq{xodimning ish staji 4 yil bilan 10 yil orasida}

xodisalari ko'rilayotgan bo'lsa, ularning yig'indisi

$S=A\cup V$={xodimning ish staji 3 yil bilan 10 yil orasida} degan xodisani anglatadi.

Ta'rifdan va Misollardan ko'rinadiki $A\cup V$ xodisa faqatgina ham A, ham V xodisalari ro'y bermagandagina ro'y bermaydi.

Bundan tashkari ta'rifdan ixtiyoriy A va V xodisalari uchun

$$A\cup V= V\cup A,\ A\cup\Omega=\Omega,\ V\cup\varnothing=V$$

munosabatlar o'rinli ekanligini kurish mumkin.

T A ' R I F 7: A xodisani ro'y bermasligini bildiruvchi xodisa A xodisaga qarama-qarshi xodisa deyiladi va $\overline{A}$ kabi belgilanadi.

Masalan, Aq{gerb}, $\overline{A}$={raqam}; korxonalar asosiy ishlab chiqarish fondlari xajmi (bo'yicha urganilayotgan bo'lib

Aq {tasodifiy tanlangan korxonada F(10 mlrd.so'm} degan xodisani bildirsa,unga qarama-qarshi xodisa

$\overline{A}$ = {tasodifiy tanlangan korxonada F<10 mldr.sum} bo'ladi.

Ixtiyoriy A xodisa uchun

$$A \cup \overline{A} = \Omega \ , \quad A \cap \overline{A} = \varnothing \ , \quad \Omega - A = \overline{A} \ , \quad \Omega - \overline{A} = A$$

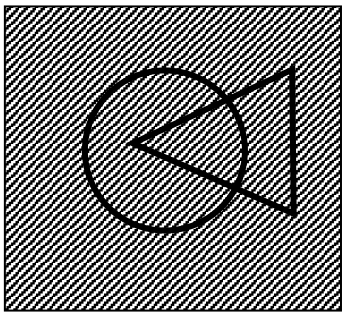
munosobatlar o'rinli bo'ladi.

Kiritilgan tushunchalarni chizmada ko'rsatish uchun berilgan kvadratda tasodifiy ravishda nuqtani tanlab olish Misolida quyidagi tasodifiy xodisalarni ko'ramiz:

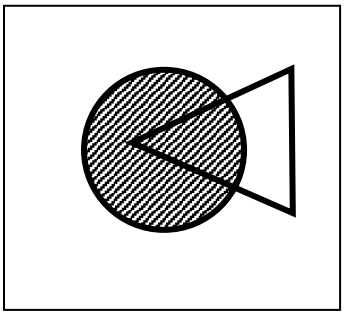
Aq{tanlangan nuqta doira ichida joylashgan}

Vq{tanlangan nuqta uchburchak ichida joylashgan}

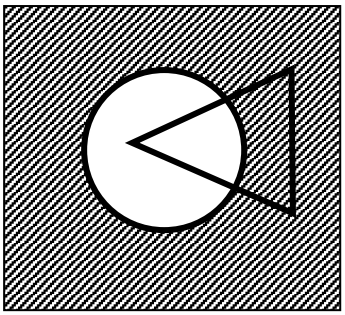
Chizmada Ω, A, $\overline{A}$, V, $\overline{B}$, $A \cap V$, $A \cup V$, $A - V$, $V - A$ xodisalar shtrixlangn soxalarni bildiradi.



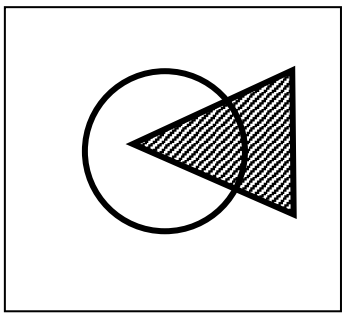
Ω



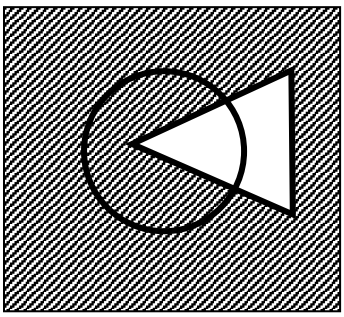
A



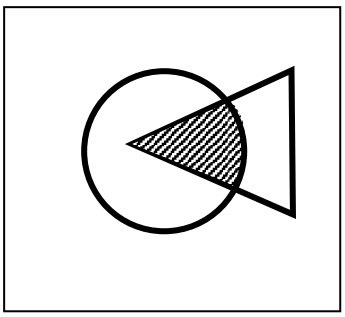
$\overline{A}$



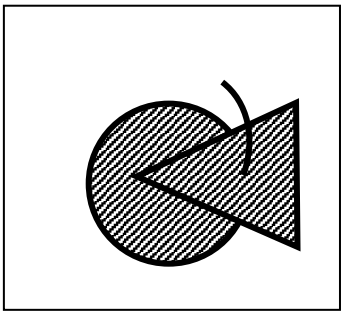
V



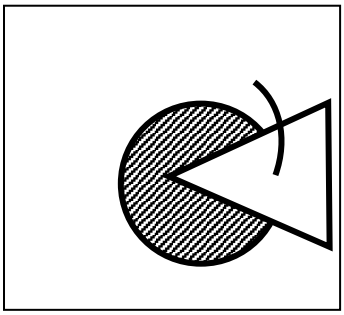
$\overline{B}$



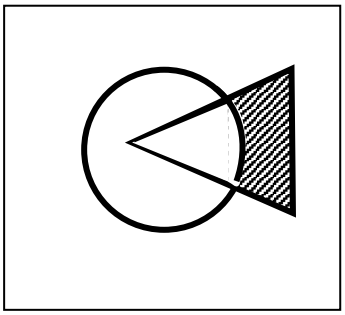
$A \cap V$



$A \cup V$



$A - V$



$V - A$

Yuqorida kiritilgan ikkita A va V xodisalarni ko'paytmasi va yig'indisi ta'rifini chekli sondagi A_1, A_2, … A_n xodisalar uchun umumlashtirish mumkin. Bunda

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \prod_{k=1}^{n} A_k$$

ko’paytma A1, A2, … An xodisalarni bir paytda ro’y berishini,

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ yig’ndi esa A1, A2, … An xodisalardan kamida bittasini ro’y berishini ifodalaydi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Qanday xodisa muqarrar deyiladi ?
2. Qanday xodisa mumkin bo’lmagan deyiladi ?
3. Qanday xodisa tasodifiy deyiladi ?
4. Qachon xodisalar teng kuchli deyiladi ?
5. Ikkita xodisa ko’paytmasi qanday aniqlanadi ?
6. Xodisalar ko’paytmasi qanday xossalarga ega ?
7. Ikkita xodisa yig’indisi qanday aniqlanadi ?
8. Xodisalar yig’indisi qanday xossalarga ega ?
9. Qarama-qarshi xodisa ta'rifi va asosiy xossalarini keltiring.

15.3. EHTIMOLLIK VA UNI HISOBLASH USULLARI .

Tayanch iboralar: ehtimollik,xodisalar algebrasi,birgalikda va birgalikda bo’lmagan xodisalar, xodisalar to’liq gruppasi,elementar natijalar,ehtimollikning klassik ta'rifi,ehtimollikning asosiy xossalari,ehtimollikning geometrik va statistik ta'rifi.

R e j a :

1. Ehtimollik tushunchasi.
2. Xodisalar algebrasi.
3. Birgalikda va birgalikda bo’lmagan xodisalar.
4. Ehtimollikning aksiomatik kiritilishi.
5. Ehtimollikning klassik ta'rifi.
6. Ehtimollikning asosiy xossalari.
7. Ehtimollikning geometrik ta'rifi.
8. 15.3. Ehtimollikning statistik ta'rifi.

Adabiyotlar:

1..U. Soatov. “Oliy matematika” II qism. Toshkent. «O’qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 14-bob, § 2-5, 231- 235 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral hisob. 2-tom, Toshkent, «O’qituvchi», 1974 yil. X X bob, §2, 474-477 betlar.

Ehtimollar nazariyasini boshlang'ch tushunchalaridan yana biri exti-mollik tushunchasidir. Bu tushunchani kiritishga sabab sho'qi xodisalar ro'y berish yoki ro'y bermaslik darajasi nuqtai nazaridan turlicha bo'ladi.
Masalan, «Sportloto» bileti olinib,undagi 36 ta sondan 6 tasi tasodifiy ravishda tanlangan bo'lsin.U holda quyidagi
Aq{tanlangan sonlardan birortasi ham tirajda chikmaydi}
Vq{tanlangan sonlardan ikkitasi tirajda chikdi}
Sq{tanlangan sonlarning hammasi tirajda chikdi}
xodisalarning hammasi tasodifiy xodisadir.«Sportloto» tiraji nati-jalaridan kurish mumkinki, A tasodifiy xodisa tez-tez ro'y berib turadi,chunki juda ko'p biletlarga yutuq chikmaydi.V tasodifiy xodisa A xodisaga nisbatan kamrok ro'y berib turadi. S tasodifiy xodisa esa juda kam,onda-sonda ro'y berib turadi.

Bu Misollardan ko'rinadiki,ba'zi xodisalar «juda ham tasodifiy» ya'ni onda-sonda ro'y berib turadi, ba'zi xodisalar esa «unchalik tasodifiy emas», ya'ni ancha-muncha ro'y berib turadi, ba'zi xodisalar esa «deyarli tasodifiy emas», ya'ni ular tez-tez ro'y berib turadi. Shu sababli ehtimollar nazariyasida har bir A xodisaga uning « tasodifiylik darajasini» ifodalovchi biror sonli kattalik shu A xodisaning ehtimolligi deb tushuniladi va R(A) kabi belgilanadi.Shunday qilib R(A) ehtimollik A xodisadan olingan qandaydir funktsiya deb karalishi mumkin.

Endi ba'zi bir hususiy xollarda R(A) ehtimollikni hisoblash usullariga o'tamiz.

I.<u>Ehtimollikning klassik ta'rifi.</u>

<u>T A' R I F 1:</u> $A\in\Im$, $V\in\Im$ xodisalar **birgalikda emas** deyiladi, agar ulardan biri ro'y berganda ikkinchisi ro'y bermasa, ya'ni $A\cap V=\varnothing$ shart bajarilsa. Aks holda ular **birgalikda** deb aytiladi.
Masalan, korxona xodimlarining uzluksiz ish staji miqdori I ko'rilayotgan bo'lsa,
Aq{tasodifiy tanlangan xodim uchun I<10},
Vq{tasodifiy tanlangan xodim uchun I>15},
Cq{tasodifiy tanlangan xodim uchun I<20}
xodisalaridan A va V birgalikda emas, A va S yoki V va S xodisalar esa birgalikda bo'ladi.
Ma'lum bir shartlar majmuasi (kompleksi) ***sh*** bajarilganda kuzatuvlarda har safar chekli sondagi

$$E_1, E_2,\ldots E_n \qquad (1)$$

xodisalardan birortasi ro'y bersin. Bu xodisalar quyidagi shartlarni kanoatlantirsin:

1) Kuzatuv natijasida (1) xodisalardan kamida bittasi albatta ro'y beradi, ya'ni

$$E_1\cup E_2\cup\ldots\cup E_n = \Omega \qquad (2)$$

Bu shartda (1) xodisalarning to'liq gruppasi deyiladi.

2) (1) xodisalar birgalikda emas, ya'ni kuzatuvda biror Ej xodisa ro'y bergan bo'lsa, qolgan E_i, $i \neq j$, xodisalar ro'y bera olmaydi. Bu shartni
$E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$, kabi ham yozish mumkin.

<u>T A' R I F 2:</u> 1) va 2) shartlarni qanoatlantiruvchi xodisalar gruppasi elementar xodisalar yoki elementar natijalar deb ataladi.

Masalan, tanga tashlashda

E1q{tanga gerbli tomoni bilan tushdi}q{gerb}

E2q{tanga raqamli tomoni bilan tushdi}q{raqam}

elementar xodisalar bo'ladi. Yoki tasodifan olingan talabaning «Ehtimolliklar nazariyasi» fani bo'yicha imtixonda qanday baxo olishini ko'rsak, unda

E1q{talaba «a'lo» baxo oldi}q{a'lo},

E2q{yaxshi}, E3q{qoniqarli}, E4q{qoniqarsiz}

elementar natijalar bo'ladi.

3) elementar natijalar ichidan ma'lum bir

$$E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots E_{i_m}, m \leq n \qquad (3)$$

elementar natijalarning birortasini ro'y berishini ifodalovchi

$$A = E_{i_1} \cup E_{i_2} \cup \ldots \cup E_{i_m} \qquad (4)$$

tasodifiy xodisani ko'ramiz. (3) elementar natijalar A tasodifiy xodisa uchun qulaylik tug'diruvchi yoki tashqil etuvchi natijalar deb ataladi. Kelgusida (4) ko'rinishdagi A tasodifiy xodisani kiskacha
$A=\{E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots E_{i_m}\}$ko'rinishda yozamiz va (1) elementar natijalar to'plamini to'plam osti deb qaraymiz.

Endi (1) elementar natijalarga yana bir shart qo'yamiz:

4) E_1 , E_2,…, En elementar natijalar teng imkoniyatli.

Natijalarning teng imkoniyatliligi ham ehtimollik va xodisa kabi ehtimolliklar nazariyasining boshlang'ch tushunchalaridan biri bo'lib hisoblanadi va shuning uchun uni ta'riflab bo'lmaydi.

Odatda natijalarning teng imkoniyatliligi to'g'risidagi xulosa ko'rilayotgan masalaning moxiyati va simmetriklik shartlari asosida chiqariladi.

Masalan, yuqorida ko'rib o'tilgan tanga tashlash Misolida tangani simmetrik deb olsak, E1q{gerb}, E2q{raqam} elementar natijalar teng imkoniyatli bo'ladi. Ammo tanga nosimmetrik bo'lsa, bu natijalar teng imkoniyatli bo'lmaydi. Xuddi shunday o'yin sokkasi tashlanganda,

E1q{kubik 1 raqamli tomoni bilan tushadi}={1},

E_2={2}, E_3={3}, E_4={4}, E_5={5}, E_6={6} elementar natijalar teng imkoniyatli bo'ladi. Ammo talabani imtixon topshirishi Misolidagi

E1q{a'lo}, E2q{yaxshi}, E3q{qoniqarli}, E4q{qoniqarsiz}

elementar natijalar teng imkoniyatli emas,chunki "a'lo" baxo bilan o'quvchi talabalar boshqa baxolar bilan o'quvchi talabalarga nisbatan kamrok uchraydi. Shu sababli E1 natija ro'y berishi qolgan E2,E3,E4 natijalarga nisbatan kamrok imkoniyatga ega bo'ladi.

Agarda n ta teng imkoniyatli elementar natijalardan m(A) tasi A xodisa uchun qulaylik tug'diruvchi bo'lsa, A xodisa ehtimolligi deb

$$R(A) = \frac{m(A)}{n} \qquad (5)$$

formula bilan aniqlanadigan songa aytiladi.

1-M i s o l . Simmetrik o'yin sokkasi tashlanganda nq6 ta teng imkoniyatli elementar natijalardan

A q {3 yoki 5 raqami chiqadi}={E_3,E_5}={3,5}

tasodifiy xodisa uchun E3 va E5 , ya'ni m(A)q2 tasi qulaylik tug'diruvchi va shu sababli

$$R(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

2-M i s o l . n=180ta maxsulot ichida mq9 ta sifatsiz maxsulot bor. Shu maxsulotlardan tasodifiy ravishda bittasi tanlab olingan.

A q {tanlangan maxsulot sifatsiz}

tasodifiy xodisasi ehtimolligini topamiz.

Tanlovga ixtiyoriy maxsulot tushishi mumkin va shuning uchun bu erda nq180 ta elementar natijalar bo'ladi. Tanlov tasodifiy bo'lgani uchun har bir maxsulot teng imkoniyat bilan tanlanishi mumkin,ya'ni ko'rilayotgan elementar natijalar teng imkoniyatli. A xodisa ro'y berishi uchun tanlangan maxsulot sifatsiz bo'lishi kerak va shuning uchun qulaylik tug'diruvchi natijalar soni m(A)q9 bo'ladi. Demak, klassik ta'rifga asosan,

$$R(A)=\frac{m(A)}{n} = \frac{9}{180} = 0{,}05 .$$

Ehtimollikning klassik ta'rifidan uning quyidagi asosiy xossalari kelib chiqadi.

<u>I xossa</u>. Ixtiyoriy A xodisa uchun uning ehtimolligi

$$0 \le R(A) \le 1 \qquad (6)$$

shartni kanoatlantiradi.

<u>I s b o t.</u> A xodisaga qulaylik tug'diruvchi natijalar soni barcha natijalar sonidan katta bula olmaydi, ya'ni m(A)≤ n . Ma'nosiga ko'ra n>0, m(A)≥0.

Shuning uchun

$$0 \le m(A) \le n \Rightarrow \frac{0}{n} \le \frac{m(A)}{n} \le \frac{n}{n} \Rightarrow 0 \le R(A) \le 1.$$

<u>II xossa.</u> Muqarrar xodisa Ω ehtimolligi birga teng, ya'ni

$$R(\Omega)=1 \qquad (7)$$

<u>I s b o t .</u> Muqarrar xodisa ? ta'rifiga asosan u ixtiyoriy E_i , i = $\overline{i,n}$ natijada ro'y beradi ((2) tenglikka ham karang), ya'ni barcha n ta natijalar Ω uchun qulaylik tug'diruvchi bo'ladi. Shu sababli $m(\Omega)$=n va klassik ta'rifga asosan

$$R(\Omega) = \frac{m(\Omega)}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

<u>III xossa.</u> Mumkin bo'lmagan xodisa ∅ ehtimolligi nolga teng,ya'ni

$$R(\varnothing) = 0 \qquad (8)$$

<u>I s b o t .</u> Mumkin bo'lmagan xodisa ∅ta'rifiga asosan u ixtiyoriy Ei natijada ham ro'y bermaydi, ya'ni uning uchun qulaylik tug'diruvchi natijalar yuk. Demak m(∅)=0 va n>0 bo'lgani uchun

$$R(\varnothing)=\frac{m(\varnothing)}{n}=\frac{0}{n}=0$$

II. Ehtimolning geometrik ta'rifi.

Yuqorida biz elementar natijalar to'plami $\Omega = \{E_\alpha, \alpha \in I\}$ chekli yoki sanokli bo'lgan holda tasodifiy xodisalarning ehtimolligini topish masalasi bilan shugullangan edik. Amaliyotda bu xollar bilan bir katorda ko'pincha Ω sanokli bo'lmagan (sanoksiz) cheksiz to'plam bo'lgan holda turli tasodifiy xodisalar ehtimolligini topish masalasiga duch kelamiz. Bu masalani quyidagi hususiy holda ko'rib chiqamiz.

To'g'ri chiziq , tekislik yoki fazoda biror Ω soxa berilgan bo'lsin va u $\mu(\Omega)$o'lchamga ega bo'lsin. Bu erda (o'lcham deganda uzunlik (to'g'ri chiziqda), yuza (tekislikda) yoki xajm (fazoda) ko'zda tutiladi. Ω soxaga tasodifiy ravishda tashlangan nuqtani o'lchamli $A \subset \Omega$ soxaga tushish xodisasini ham A deb belgilaymiz. Bu xodisani R(A) ehtimolligini topish uchun quyidagi shartlarni qo'yamiz:

Tasodifiy tashlangan nuqta Ω soxaning ixtiyoriy nuqtasiga tushishi mumkin,ya'ni Ωsoxaning barcha nuqtalari teng imkoniyatli.

R(A) ehtimollik A soxani faqat $\mu(A)$ o'lchamiga proportsional ravishda bog'liq bo'lib, bu soxaning ko'rinishiga (shakliga) va Ω soxani kaerida joylashganiga bog'liq emas.

Bu shartlarda A xodisa ehtimolligi deb

$$R(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} \qquad (9)$$

formula bilan aniqlanadigan songa aytiladi. Bu ehtimollikning geometrik ta'rifi deb aytiladi.(9) formula bilan aniqlangan ehtimollik ham (6)-(8) xossalarni kanoatlantirishini ko'rsatish talabalarga mustaqil ish sifatida xavola qilinadi.

M i s o l : Ωdoira ichiga tasodifiy tashlangan nuqtani unga ichki chizilgan A kvadrat ichiga tushish ehtimolligini topamiz.

Echish: Doira diametrini d deb olsak, u holda barcha elementar natijalar to'plami o'lchami

$$\mu(\Omega) = S\ (\text{doira})=\frac{\pi d^2}{4},$$

qulaylik tug'diruvchi elementar natijalar to'plami o'lchami kvadrat yuzasi bo'lib,

$$\mu(A)= S\ (\text{kvadrat}) = \frac{d^2}{2}$$

Ehtimolning geometrik ta'rifiga asosan

$$R(A)=\mu(A)/\ \mu(\Omega) = \frac{\pi d^2}{4} / \frac{d^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

III. Ehtimollikning statistik ta'rifi.

A tasodifiy xodisa statistik turgunlikka ega bo'lsa, uning $\nu_N(A) = N(A)/N$ chastotasi turli N qiymatlarida bir-biridan keskin farq kilmaydigan sonlardan iborat bo'lishi aytilgan edi. Shu sababli $N \to \infty$ bo'lganda $\nu_N(A)$ limiti to'g'risida suz yuritish

mumkin. Agarda bu limit mavjud bo'lsa, uning qiymati A xodisaning R(A) ehtimolligi sifatida qabul qilinadi. Shunday qilib ehtimollikning statistik ta'rifi

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} \nu_N(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{N(A)}{N} \qquad (10)$$

ko'rinishda ifodalanadi. Bu holda ham ehtimollikning barcha asosiy xossalari saklanib kolishini ko'rsatish qiyin emas.

Takrorlash uchun savollar::

1. Xodisa ehtimolligi deganda nima tushuniladi?
2. Qachon xodisalar to'plami algebra deb ataladi?
3. Ehtimollikka qo'yiladigan shartlar nimalardan iborat?
4. Elementar natijalar qanday aniqlanadi?
5. Ehtimollikni klassik ta'rifini keltiring.
6. Ehtimollikni geometrik ta'rifini keltiring.
7. Ehtimollikni statistikta'rifini keltiring.

15.4. EHTIMOLLIKLARNI QO'SHISH VA KO'PAYTIRISH TEOREMALARI.

Tayanch iboralar: ehtimolliklarni qo'shish teoremalari, shartli ehtimollik, bog'liq va bog'liqmas xodisalar, ehtimolliklarni ko'paytirish teoremalari.

R e j a :

1. Xodisalar yig'indisi va ko'paytmasi.
2. Birgalikda bo'lmagan xodisalar uchun qo'shish teoremasi.
3. Qarama-qarshi xodisalarning ehtimolliklari.
4. Birgalikda bo'lmagan xodisalar uchun qo'shish teoremasi.
5. Shartli ehtimollik.
6. Bog'liq va bog'liqmas xodisalar.
7. Bog'liq xodisalar uchun ko'paytirish teoremasi.
8. Bog'liqmas xodisalar uchun ko'paytirish teoremasi.
9. Qo'shish va ko'paytirish teoremalarni umumlashtirish.

Adabiyotlar:

1. .U. Soatov. "Oliy matematika" II qism. Toshkent. «O'qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 14-bob, § 7-9, 237- 243 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral hisob. 2-tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1974 yil. X X bob, §3-5, 477-486 betlar.

Ehtimolliklar nazariyasining asosiy masalalaridan biri «soddarok» tasodifiy xodisalar ehtimolliklari asosida ulardan tashqil topgan « murakkabrok » xodisalarni ehtimolliklari haqida xulosa chiqarish bo'lib hisoblanadi. Misol sifatida A va V xodisalarining ehtimolliklari yordamida ularning yig'indisi AQV va ko'paytmasi AV xodisalari ehtimolliklarini topish masalasini ko'ramiz.

T E O R E M A № 1. Agarda A va V xodisalari birgalikda bulmasa, u holda

$$R(A+V)=R(A)+R(V) \qquad (1)$$

I s b o t : A,V, A+V xodisalar ko'rilayotgan kuzatuvlarda n ta elementar natijalar bo'lib, A va V xodisalarga qulaylik tug'diruvchi elementar natijalar soni m(A) va m(V) bo'lsin. Ehtimollikning klassik ta'rifiga asosan

$$R(A)=\frac{m(A)}{n}, \qquad R(V)=\frac{m(B)}{n} \qquad (a)$$

A va V birgalikda bo'lmagani uchun ularga qulaylik tug'diruvchi natijalarning birortasi ham ustma-ust tushmaydi. Bu holda AQV yig'ndi ta'rifiga asosan unga qulaylik tug'diruvchi elementar natijalar soni m(AQV) uchun

$$m(A+V) = m(A)+m(V) \qquad (v)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. AQV xodisa uchun ehtimollikning klassik ta'rifini kullab va (a),(v) munosabatlardan foydalanib Isbotlash kerak bo'lgan (1) formulani olamiz:

$$R(A+V)=\frac{m(A+B)}{n}=\frac{m(A)+m(B)}{n}=\frac{m(A)}{n}+\frac{m(B)}{n}=P(A)+P(B)$$

N a t i j a № 1. Agarda $A_1, A_2,\ldots,A_n$ birgalikda bo'lmagan xodisalar bo'lsa

$$R(A_1+A_2,\ldots+A_n)=R(A_1)+R(A_2)+\ldots+R(A_n)=\sum_{\kappa=1}^{n} R(A_k) \qquad (1')$$

<u>I s b o t :</u> Bu xulosa (1) formulani ketma-ket qo'llash orqali va matematik induktsiya yordamida keltirib chiqariladi.

N a t i j a № 2 . $A_1, A_2,\ldots,A_n$ birgalikda bo'lmagan xodisalar to'liq gruppani tashqil etsa, u holda

$$R(A_1)+R(A_2)+\ldots+R(A_n)=\sum_{\kappa=1}^{n} R(A_k)=1 \qquad (1'')$$

<u>I s b o t :</u> $A_1, A_2,\ldots,A_n$ to'liq gruppa bo'lgani uchun

$$A_1+A_2+\ldots+A_n=\Omega \qquad (s)$$

Ular birgalikda bo'lmagani uchun (1() tenglik va (s) munosabatga asosan

$$R(A_1)+R(A_2)+\ldots+R(A_n)=R(A_1+A_2+\ldots+A_n)=R(\Omega)=1$$

Bu erda muqarrar xodisa Ω uchun R{Ω}=1 ekanligidan foydalanildi.

N a t i j a № 3. Qarama-qarshi xodisalar ehtimolliklari yig'indisi birga teng,ya'ni

$$R(A)+R(\overline{A})=1 \qquad (1''')$$

Bu natija Isboti talabalarga mustaqil ish sifatida koldiriladi.

T E O R E M A № 2. Agarda A va V xodisalar birgalikda bo'lsa, u holda

$$R(A+V)=R(A)+R(V)-R(AV) \qquad (2)$$

teoremani Isbotsiz qabul etamiz.

T A ' R I F 1: teorema №1 va №2 **ehtimollarni qo'shish teoremalari** deb ataladi.

Endi A va V xodisalar ko'paytmasi AV ehtimolligini hisoblash formulasiga o'tamiz. Buning uchun ehtimollar nazariyasining muxim tushunchalaridan biri bo'lgan shartli ehtimollik tushunchasini kiritamiz.

T A ' R I F 2**:** A xodisaning V xodisa ro'y berdi shartda hisoblangan ehtimolligi uning ***shartli ehtimolligi*** deyiladiva R(A/B) **ko'rinishda belgilanadi.**

Bu nuqtai nazardan R(A) shartsiz ehtimol **deb tushuniladi.**

M i s o l : **Qutida 2 ta sifatli va bitta sifatsiz maxsulot bor. Bu qutidan tasodifiy ravishda ikkita maxsulot olindi. Bu erda**

Aq{I tanlangan maxsulot sifatli }

B={II tanlangan maxsulot sifatli} xodisalarni ko'ramiz.V xodisa ro'y berganligi yoki ro'y bermaganligi ma'lum bulmasa, ya'ni II tanlangan maxsulot sifati to'g'risida ma'lumot bulmasa, shartsiz ehtimollik R(A)q2G`3 bo'ladi. Agarda V xodisa ro'y bergan bo'lsa, ya'ni II maxsulot sifatli bo'lsa, shartli ehtimollik R(AG`V)q1G`2 bo'ladi. Talabaga mustaqil ish sifatida $R(A/\overline{B})$, R(V/A), $R(V/\overline{A})$ ehtimolliklarni hisoblash va ixtiyoriy A,V xodisalar uchun

$$R(A/V) + R(\overline{A}/V) =1$$

ayniyatni Isbotlash tavsiya qilinadi.

T E O R E M A № 3 : Ixtiyoriy A va V xodisalar uchun

$$R(AV) =R(A)R(V/A)=R(V)R(A/V) \qquad (3)$$

formula o'rinli bo'ladi.

I s b o t : A,V,AV xodisalar ko'rilayotgan kuzatuvlarda n ta elementar natija bo'lib, ulardan m(A) tasi A uchun , m(AB) tasi AV uchun qulaylik tug'diruvchi bo'lsin. Ehtimollikni klassik ta'rifiga asosan

$$R(AV) = \frac{m(AB)}{n}, \quad R(A) = \frac{m(A)}{n} \qquad (d)$$

Endi R(VG`A) shartli ehtimollikni topamiz. A xodisa ro'y berganligi ma'lum bo'lgani uchun, endi n ta emas, balkim faqatgina m(A) ta elementar natijalar ro'y berishi mumkin. Shartga asosan ulardan m(AV) tasida V ro'y berishi mumkin va shu sababli klassik ta'rif bo'yicha

$$R(V/A) = \frac{m(AB)}{m(A)} \qquad (e)$$

(d) va (e)munosabatlardan (3)formula quyidagicha kelib chiqadi :

$$R(AV)=\frac{m(AB)}{n} = \frac{m(AB)}{n} \cdot \frac{m(A)}{m(A)} = \frac{m(A)}{n} \cdot \frac{m(AB)}{m(A)} = R(A)R(V/A)$$

Ko'paytma ta'rifiga asosan AVqVA bo'lgani uchun bu tenglikdan

$$R(AV)=R(VA) =R(V)R(A/B)$$

tenglik ham kelib chiqadi.

M i s o l : Oldingi ko'rilgan Misolda

S q {ikkala tanlangan maxsulot sifatli}

xodisa ehtimolligini topamiz. SqAV, R(A)q2G`3, R(VG`A)q1G`2 bo'lgani uchun

$$R(S)=R(AV)=R(A)\,R(V/A)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

T A ' R I F 3 : Agarda R(A/B)=R(A) shart bajarilsa, A va V xodisalar bog'liq emas deyiladi. Aks holda ular bog'liq xodisalardeb ataladi.

Shunday qilib A xodisaning ehtimolligi V xodisani ro'y bergan yoki ro'y bermasligiga bog'liq bulmasa, u holda A va V xodisalar bog'liqmas bo'ladi. Bu tushuncha ham ehtimolliklar nazariyasining muxim tushunchalaridan biri bo'lib hisoblanadi.

Amaliyotda ko'pincha A va V xodisalarni bog'liq yoki bog'liqmasligi ularni mazmuniga asosan aniqlanadi. Masalan, tanga yoki o'yin sokkasi ikki marta tashlanganda, har gal ularni ma'lum bir tomoni bilan tushishini ifodalovchi A va V xodisalar bog'liqmas bo'ladi.

T E O R E M A № 4 : Agarda A va V xodisalar bog'liq emas bo'lsa, u holda

$$R(AV) = R(A)R(V) \qquad (4)$$

formula o'rinli bo'ladi.

I s b o t : R(V/A)=R(V) bo'lgani uchun (3) formulaga asosan

$$R(AV)=R(A)R(V/A)=R(A)R(V)$$

M i s o l : Ishlab chiqarilayotgan maxsulot sifati ketma-ket ikki nazoratchi tomonidan tekshirilmokda. Bunda I nazoratchi maxsulot sifatini 0,85 ehtimollik bilan,II nazoratchi esa 0,7 ehtimollik bilan to'g'ri baxolaydi.

Aq{ikkala nazoratchi maxsulot sifatini to'g'ri baxoladi}

tasodifiy xodisa ehtimolligini topamiz. Buning uchun

A_k ={k –nazoratchi maxsulot sifatini to'g'ri baxoladi}, k=1,2

tasodifiy xodisalarni kiritamiz. Shartga asosan $R(A_1)=0,85$, $R(A_2)=0,7$.

Mazmuniga kura $A=A_1\cdot A_2$ va A_1,A_2- bog'liqmas xodisalar. Shuning uchun

$$R(A)=R(A_1A_2)= R(A_1)\cdot R(A_2)=0,85\cdot 0,7=0,595$$

T A ' R I F 4: teorema №3 va №4 ehtimolliklarni **ko'paytirish** teoremalari deyiladi.

Takrorlash uchun savollar::

1. Birgalikda bo'lmagan xodisalar uchun qo'shish teoremasini keltiring.
2. Qarama-qarshi xodisalarning ehtimolliklari qanday shartni kanoatlantiradi ?
3. Birgalikda bo'lgan xodisalar uchun qo'shish teoremasini ifodalang.
4. Shartli ehtimollik qanday aniqlanadi ?
5. Qachon xodisalar bog'liqmas (bog'liq) deyiladi ?
6. Bog'liqmas xodisalar uchun ko'paytirish teoremasi qanday ifodalanadi ?
7. Bog'liq xodisalar ko'paytmasi ehtimolligiqanday formula bilan topiladi ?

15.5. TO'LIQ EHTIMOL VA BAYES FORMULALARI.

Tayanch iboralar : to'liq ehtimol formulasi, Bayes formulasi.

R e j a :

1. Xodisalarning to'liq guruhi.
2. To'liq ehtimol formulasi.
3. To'liq ehtimol formulasidan klassik ta'rifni keltirib chiqarish.
4. Bayes formulasi.
5. Bayes formulasinitaxminlarni tekshirishga tatbiqi.

Adabiyotlar:

1. .U. Soatov. "Oliy matematika" II qism. Toshkent. «O'qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 14-bob, § 11-12 , 245- 247 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral hisob. 2-tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1974 yil. X X bob, §5-6, 482-488 betlar.

Bizni kiziktirayotgan A tasodifiy xodisa ko'rilayotgan kuzatuvda E1,E2,…En birgalikda bo'lmagan elementar natijalarning to'liq gruppasini tashqil etsin, ya'ni

$$E_i E_j = \varnothing, \ i \neq j, \text{ va } E_1+E_2+\ldots E_n = \Omega \qquad (1)$$

Oldin ko'rib o'tilgan klassik va chekli sistemalarda har bir A xodisa uchun bu elementar natijalarning ba'zilari qulaylik tug'diruvchi, qolganlari esa qulaylik tugdirmovchi sifatida ikki guruhga ajratilar edi. Agarda A xodisa uchun Ei qulaylik tug'diruvchi (yoki tugdirmovchi) elementar natija bo'lsa, buni shartli ehtimollik orqali $R(A|E_i)=1$ (yoki $R(A|E_i)=0$ deb ifodalash mumkin. Endi barcha elementar natijalarni bunday usulda ikki guruhga ajratib bo'lmaydigan holni ko'rib o'tamiz, ya'ni E1,E2,…En elementar natijalarning har birida A xodisa

$$R(A|E_1), R(A|E_2),\ldots, R(A|E_n) \qquad (2)$$

shartli ehtimolliklar bilan ro'y berishi mumkin bo'lsin.

Klassik sxemadagi E1,E2,…En elementar natijalar albatta teng imkoniyatli degan shartdan voz kechib, ular ixtiyoriy

$$R(E_1), R(E_2),\ldots,R(E_n) \qquad (3)$$

ehtimolliklar bilan ro'y berishi mumkin deb qabul qilamiz. Albatta (3) ehtimolliklar

$$R(E_1)+ R(E_2)+\ldots+ R(E_n)=1$$

shartga buysunishi kerak. (1)-(3) ma'lumotlar asosida ko'rilayotgan A xodisaning R(A) shartsiz ehtimolligini

$$R(A)= R(E_1)\, R(A|E_1)+ R(E_2)\, R(A|E_2)+\ldots+$$

$$+R(E_n)\, R(A|E_n)=\sum_{k=1}^{n} P(E_i)P(A|E_i) \qquad (4)$$

formula bilan topilishi mumkinligini ko'rsatamiz. (1) munosobatdan foydalanib, quyidagi tenglikni yozish mumkin:

$$A=\Omega A=(E_1+E_2+\ldots+E_n) = E_1 A+E_2 A+\ldots+E_nA$$

Bu erda E1 A, E2 A,…,EnA xodisalar birgalikda emas va ehtimolliklarni qo'shish hamda ko'paytirish teoremalariga asosan (4) formulani hosil qilamiz:

$$R(A)= R (E_1A+E_2A+\ldots+E_nA) = R(E_1 A)+R(E_2 A)+\ldots+R(E_nA)=$$
$$= R(E_1) R(A \mid E_1)+ R(E_2) R(A \mid E_2)+\ldots+ R(E_n) R(A \mid E_n)$$

(4) formula to'liq ehtimol formulasi deyiladi va undan klassik chekli sxema hususiy xol sifatida kelib chiqadi.

M i s o l : Konserva zavodining tomat tayyorlash sexiga uchta jamoa xujaligidan pomidor keltiriladi. Sexdagi umumiy maxsulotning 20% i I- jamoa xujaligidan, 35%i II- jamoa xujaligidan va qolgani III-jamoa xujaligidan keltirilgan. I,II,III jamoa xujaliklaridan keltirilgan pomidor mos ravishda 0,8 , 0,85 va 0,75 ehtimollik bilan standartga mos keladi.Tsexdagi umumiy maxsulotdan tasodifiy ravishda pomidor tanlab olindi.

Aq{tanlangan pomidor standartga mos keladi}

tasodifiy xodisani ehtimolligini topamiz. E1, E2, E3 orqali tanlangan pomidor mos ravishda I,II va III jamoa xujaligidan keltirilganligini belgilaymiz. Ular (1) shartlarni kanoatlantiradi va masala shartiga ko'ra

$$R(E_1)= 0,2, \qquad R(E_2)=0,35, \qquad R(E_3)=0,45$$
$$R(A \mid E_1)=0,8 \qquad R(A \mid E_2)=0,85 \qquad R(A \mid E_3)=0,75$$

To'liq ehtimol formulasiga asosan

$$R(A)= R(E_1) R(A \mid E_1)+ R(E_2) R(A \mid E_2)+R(E_3) R(A \mid E_3)=$$
$$= 0,2\cdot 0,8+0,35\cdot 0,85+0,45\cdot 0,75 = 0,795$$

Endi (1),(2),(3) shartlarda kuzatuvda A xodisasi ro'y bergan bo'lsin va

$$R(E_1 \mid A) , \ R(E_2 \mid A),\ldots, R(E_n \mid A)$$

shartli ehtimolliklarni topish talab kilinsin. Ehtimolliklarni ko'paytirish teoremasiga asosan k=1,2,…,n uchun

$$R(AE_k)=R(A)R(E_k \mid A)=R(E_k)R(A \mid E_k)$$

tenglikni yozish mumkin. Bu erdan (4) to'liq ehtimol formulasidan foydalanib, izlangan ehtimolliklar uchun

$$R(AE_k)=\frac{P(E_\kappa)P(A|E_\kappa)}{P(A)}=\frac{P(E_\kappa)P(A|E_\kappa)}{\sum_{i=1}^{n}P(E_i)P(A|E_i)}, \qquad k=1,2,\ldots,n \qquad (5)$$

formulalarga kelamiz. (5) formula ingliz matematigi Bayes (1702-1761) sharafiga **Bayes formulasi** yoki **taxminlarini tekshirish formulasi** deb ataladi. Bu formulani keyingi nomi quyidagicha tushuntiriladi. Bizda biror fikr (fakt) to'g'risida E1,E2,…,En taxminlar bor va bu taxminlarga biz qandaydir

$$R(E_1), R(E_2), \ldots, R(E_n)$$

ehtimolliklar bilan ishonamiz. Bu taxminlarda qandaydir A xodisa

$$R(A \mid E_1), R(A \mid E_2), \ldots, R(A \mid E_n)$$

ehtimollik bilan ro'y berishi mumkin bo'lsin.

Yuqoridagi taxminlarni tekshirish uchun A xodisa ustida kuzatuv o'tkazamiz. Bu kuzatuv natijasida A xodisa ro'y berganligi ma'lum bo'lsin. Bu olingan qushimcha ma'lumot asosida E1, E2, …, En taxminlarga endi

$$R(E_1 | A), R(E_2 | A), \ldots, R(E_n | A)$$

ehtimolliklar bilan ishonamiz, ya'ni bu taxminlarga bo'lgan munosabatimizni kayta ko'rib chiqamiz.

M i s o l : Oldingi Misolda tasodifiy tanlangan pomidor standartga mos kelgan bo'lsin, ya'ni A xodisa ro'y bergan bo'lsin. Endi shu pomidorni I,II va III jamoa xujaligidan keltirilganligi haqidagi E1, E2 va E3 xodisalarning (taxminlarning) ehtimolliklarini kayta hisoblab chiqamiz. Bayes formulasiga asosan

$$R(E_1 | A)=\frac{1}{P(A)}R(E_1)\cdot R(A | E_1)=\frac{0{,}2\cdot 0{,}8}{0{,}795}\approx 0{,}201$$

$$R(E_2 | A)=\frac{1}{P(A)}R(E_2)\cdot R(A | E_2)=\frac{0{,}35\cdot 0{,}85}{0{,}795}\approx 0{,}374$$

$$R(E_3 | A)=\frac{P(E_3)P(A|E_3)}{P(A)}=\frac{0{,}45\cdot 0{,}75}{0{,}795}=0{,}425$$

Shunday qilib, E1,E2 va E3 taxminlarga kuzatuv (tekshiruv) o'tkazguncha mos ravishda 0,2 , 0,35 va 0,45 ehtimolliklar bilan ishongan bo'lsak, kuzatuvdan (tekshiruvdan) keyin ularga 0,201 , 0,374 va 0,425 ehtimollik bilan ishonamiz.

Takrorlash uchun savollar::

1. To'liq ehtimol formulasini yozing.
2. To'liq ehtimol formulasidan hususiy xod sifatida ehtimollikni klassik ta'rifini keltirib chikaring.
3. Bayes formulasini yozing.
4. Bayes formulasiningmoxiyati nimadan iborat?

15.6. BERNULLI SXEMASI VA BINOMIAL TAQSIMOT QONUNI.

Tayanch iboralar: Bernulli sxemasi, binomial taqsimot.

R e j a :

1. Bog'liqmas sinovlar sxemasi.
2. Bernulli formulasi.
3. Nyuton formulasi va ehtimolliklar yig'indisi.
4. Eng katta ehtimolga ega sinov natijasi.
5. Bernulli formulasini umumlashtirish.

Adabiyotlar:

1. .U. Soatov. “Oliy matematika” II qism. Toshkent. «O’qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 14-bob, § 13 , 247- 249 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral hisob. 2-tom, Toshkent, «O’qituvchi», 1974 yil. X X bob, §8, 491-496 betlar.

Ilmiy va amaliy tadkikodlarda har bir yangilik (masalan yangi goya, mashina, texnologiya, dori-darmon) avvalo ko’p sonli sinovlarda, tajribalarda, kuzatuvlarda tekshiriladi. Bu tekshiruvlar natijalari bo’yicha ko’rilayotgan yangilik to’g’risida ma'lum bir fikrga kelinadi (masalan uni amaliyot uchun qabul qilish yoki qabul kilmaslik). Ko’pincha o’tkazilgan tekshiruv sinovlari natijalari tasodifiy harakterga ega bo’ladi va shu sababli ular asosida qabul kilinayotgan karor ehtimolliklar nazariyasi yordamida ilmiy asoslangan bo’lishi kerak. Biz bu masalani quyidagi eng oddiy holda ko’rib chiqamiz.

Chekli sondagi n ta sinovlar o’tkazilmokda va ularning har birida biror A tasodifiy xodisa ro’y berishi yoki ro’y bermasligi mumkin. Quyidagi shartlarni qo’yamiz:

1. Ixtiyoriy sinovda A tasodifiy xodisani ro’yo berishi yoki ro’y bermasligi barcha oldingi va keyingi natijalarga bog’liq emas.
2. Ixtiyoriy sinovda A tasodifiy xodisa bir xil R(A)=r ehtimollik bilan ro’y berishi mumkin. Bu holda uning ro’y bermasligi,ya'ni qarama-qarshi $\overline{A}$ tasodifiy xodisa

$$R(\overline{A}) = 1 - R(A) = 1 - r \equiv q$$

ehtimollikka ega bo’ladi.

Bunday sinovlar birinchi marta shveytsariyalik matematik Yakob Bernulli (1654-1705) tomonidan urganilgan va shu sababliish *Bernulli* sxemasi deb ataladi. Masalan, tanga bir necha marta tashlanganda har safar uni “gerb” tomoni bilan tushish yoki tushmasligini yoki ma'lum bir texnologik va tashqiliy sharoitlar uzgarmay turganda tinimsiz ishlab chiqarilayotganbir xil maxsulotni bir nechtasini tekshirganda har safar uni sifatli yoki sifatsiz bo’lishini tekshirish Bernulli sxemasiga keladi.

Endi Bernulli sxemasida n ta sinovlarda kuzatilayotgan A tasodifiy xodisani roppa-rosa m marta $(0 \le m \le n)$ ro’y berish xodisasi ehtimolligini topish masalasini ko’ramiz. Bu xodisani A_m, uning $R(A_m)$ ehtimolligini $R_n(m)$ deb belgilaymiz. A_m xodisa ro’y berishi uchun barcha n ta sinovlarning ixtiyoriy m tasida A xodisa,qolgan n-m tasida esa $\overline{A}$ xodisa ro’y berishi kerak. Kombinatorikadan ma'lumki bunday variantlar umumiy soni

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

formula bilan aniqlanadi. Sinov natijalari bog’liqmas bo’lgani uchun ehtimolliklarni ko’paytirish teoremasiga asosan A_m xodisa ro’y beradigan har bir variant bir xil

$r^m q^{n-m}$ ehtimollikka ega bo'ladi. Bu S_n^m ta variantlar birgalikda bo'lmagani uchun ehtimolliklarni qo'shish teoremasiga asosan

$$R(A_m)=R_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m=\overline{o,n} \qquad (1)$$

formulani hosil qilamiz. Talabalarga n=3, m=0,1,2,3 xollarda bu formulani kelib chiqishini batafsil kurish mustaqil ish sifatida xavola qilinadi.

(1)formulani ung tomoni Nyuton binomi deb ataladigan

$$(r+q)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (2)$$

tenglikdagi qo'shiluvchilardan iborat bo'lgani uchun u ehtimoliklarning binomial taqsimoti deb ataladi. Ma'nosiga kura A_m, $m=\overline{0,n}$, xodisalarning to'liq gruppasini tashqil etadi va shuning uchun

$$\sum_{m=0}^{n} P(A_m) = \sum_{m=0}^{n} P_n(m) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = 1 \qquad (3)$$

tenglik o'rinli bo'lishi kerak. Haqiqatan ham bu tenglik (2) Nyuton binomidan kelib chiqadi,chunki belgilashimizga asosan q=1-p edi va shu sababli

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = (r+q)^n = (p+1-p)^n = 1^n=1$$

Ba'zi bir masalalarda Bernulli sxemasida ko'rilayotgan A xodisa eng katta ehtimollik bilan necha marta ro'y berishini topish talab etiladi, ya'ni (1) formula bilan aniqlangan $R_n(m)$ ehtimollik n,r va q qiymatlari ma'lum bo'lganda qandaym, $m=\overline{0,n}$, uchun eng katta qiymatga ega bo'lishini aniqlash suraladi. $0 \le m < n$ bo'lganda (1) formuladan

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{(n-m)p}{(m+1)q}$$

tenglik o'rinli bo'lishini oddiy hisoblashlar orqali keltirib chiqarish mumkin. Bu erdan, $pr-q$ butun songa teng bo'lsa $m = m_0 = pr \pm q$ va $pr-q$ butun son bo'lmaganda esa

$$pr-q < m_0 < pr+r \qquad (4)$$

tengsizlik bilan aniqlanadigan yagona mo butun sonda Pn(m) eng katta qiymatga ega bo'ladi.

<u>*M i s o l :*</u> Har biri r=0,8 ehtimollik bilan sifatli bo'lishi mumkin bo'lgan n=10 ta maxsulot tekshirilganda, ulardan m=7 tasi sifatli bo'lishi ehtimolligini topamiz.(1) formulaga asosan

$$P_{10}(7) = C_{10}^{7} 0{,}8^{7} (1-0{,}8)^{10-9} = \frac{10!}{7!(10-7)!} \cdot 0{,}8^{7} \cdot 0{,}2^{3} =$$

$$= \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0{,}8^{7} \cdot 0{,}008 = 0{,}96 \cdot 0{,}8^{7}$$

Bizning Misolimizda np-q 10·0,8-0,2=7,8 np+p=10·0,8+0,8=8,8 bo'lgani uchun (4) formulaga asosan tekshirilayotgan n=10 ta maxsulot ichida m_0=8 tasi sifatli bo'lishi eng katta ehtimollikka ega.Bu eng kattta ehtimollik qiymati $R_{10}(8) = 1{,}8 \cdot 0{,}8^{8}$ bo'lishini ko'rsatish talabaga mustaqil ish sifatida beriladi.

Endi Bernulli sxemasida tekshirilayotgan A xodisaning ro'y berishlar soni m1 bilan m2 orasida bo'lish ehtimolligini topamiz.Bu holda ehtimolliklarni qo'shish teoremasiga asosan u

$$R_n(m_1,m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (5)$$

formula bilan hisoblanadi.

Takrorlash uchun savollar::

1. Bernulli sxemasida A xodisaga qanday shartlar qo'yiladi ?
2. Binomial taqsimot formulasini yozing.
3. Eng katta ehtimolli ro'y berishlar soni qanday aniqlanadi ?
4. Binomial taqsimotda ehtimollar yig'indisi birga teng bo'lishi qanday Isbotlanadi?
5. Bernulli formulasini umumlashtirish nimadan iborat bo'ladi?

15.7. BINOMIAL TAQSIMOT UCHUN ASIMPTOTIK FORMULALAR.

Tayanch iboralar : Muavr-Laplasning lokal teoremasi, Puasson teoremasi, Muavr-Laplasning integral teoremasi.

R e j a:

1. Bernulli formulasining kamchiliklari.
2. Muavr – Laplasning lokal teoremasi.
3. Puasson teoremasi.
4. Muavr – Laplasning integral teoremasi.
5. Laplas funktsiyasi vauning xossalari.

Adabiyotlar:

1. .U. Soatov. “Oliy matematika” II qism. Toshkent. «O’qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 14-bob, § 14 , 249- 250 betlar.

Bu mavzuni quyidagi masalani kurish bilan boshlaymiz.

Chigitni unib chiqish ehtimoli 0,7 bo’lsa, ekilgan 1000 ta chigitdan 670 tasi unib chiqish ehtimoli topilsin.

Bu masala parametrlari n=1000, p=0,7 bo’lgan binomial taqsimot yordamida echiladi va izlangan ehtimollikning aniq qiymati

$$R_{1000}(670) = S_{1000}^{670}\, 0{,}7^{670}\, 0{,}3^{330} = \frac{1000!}{670!400!} 0{,}7^{670} \cdot 0{,}3^{330}$$

tenglik bilan aniqlanadi. Ammo bu erda hisoblash nuqtai-nazardan ikki turdagi qiyinchilikka duch kelamiz:

1. 1000! , 600! , 400! faktoriallarni hisoblash qiyin va ular juda katta sonlardan iborat bo’ladi;

2. $0{,}7^{670}$, $0{,}3^{330}$ darajalarni hisoblash ham murakkab va ular juda kichik sonlardan iboratdir.

Shu sababli binomial taqsimotda kuzatuvlar soni n etarli katta bo’lganda

$$R_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (1)$$

ehtimollikning qiymatini osonrok hisoblashga imkon beradigan taqribiy formulani topish masalasi paydo bo’ladi. Bu masala birinchi marta 1733 yilda frantsuz matematigi Muavr (1667-1754) tomonidan r=0,5 hususiy xol uchun xal etildi. Muavr formulasi keyinchalik frantsuz matematigi Laplas (1749-1827) tomonidan r(0,5 xol uchun umumlashtirildi va shuning uchun u Muavr-Laplas lokal teoremasi deb yuritiladi.

MUAVR-LAPLASNING LOKAL TEOREMASI:

Agarda (1) binomial taqsimotda sinovlar soni n etarli kattava 0<p<1 bo’lsa, $R_n(m)$ehtimollik uchun asimptotik harakterdagi quyidagi taqribiy formula o’rinli bo’ladi:

$$R_n(m) \approx P(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_m), \quad x_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \qquad (2)$$

Bu erda

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

va φ(x) funktsiya qiymatlari maxsus jadvaldan olinishi mumkin. (2) taqribiy formulani asimptotik harakterdaligi shuni bildiradiki, sinovlar soni n kanchalik katta bo’lsa, bu formula xatoligi shunchalik kichik bo’ladi.

Bu teorema Isboti ustida tuxtalib o’tirmasdan, uni tasdiklovchi quyidagi jadvalni keltiramiz:

M	10	15	20	25	30
$P_{100}(m)$	0,0034	0,0481	0,0993	0,0439	0,0052

P(m)	0,0044	0,0456	0,0997	0,0456	0,0044

Bu jadvalni ikkinchi satrida n=100, p=0,2 parametrli binomial taqsimotdagi ehtimolliklarning (1) formula bilan hisoblangan $R_n(m)$ aniq qiymatlari (turt xona aniqlikda), uchinchi satrida esa uning (2) formula bilan topilgan R(m) taqribiy qiymatlari keltirilgan. (2) taqribiy formula r≈0,5 bo'lganda eng yaxshi natijalar beradi. Amaliyotda (2) taqribiy formuladan *p*rq>9 shart bajarilgandagina foydalanish tavsiya etiladi. Ko'rib o'tilgan chigitni unib chiqishi haqidagi masalaning taqribiy javobi (2) formulaga asosan

$$R_{1000}(670)\approx$$

$$\frac{1}{\sqrt{1000\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3}}\varphi\left(\frac{670-1000\cdot 0{,}7}{\sqrt{1000\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{210}}\varphi\left(-\frac{30}{\sqrt{210}}\right)\approx 0{,}0293$$

bo'ladi. Bu erda φ(-x)=φ(x) va jadvalga asosan φ(2.1)≈0,0440ekanligidan foydalanildi.

(2) taqribiy formula r yoki q=1-pqiymatlari kichkina son va *p*rq≤9 bo'lganda yaxshi natijalar bermaydi. Bu holda $R_n(m)$ ehtimollik uchun qoniqarli taqribiy formula frantsuz matematigi Puasson tomonidan topildi.

PUASSON TEOREMASI: Agarda (1) binomial taqsimotda n etarli katta, r esa kichik son bo'lib, *p*r = λ bo'lsa, $R_n(m)$ ehtimollik uchun asimptotik harakterdagi quyidagi formula o'rinli:

$$R_n(m)\approx R_m=\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \qquad (3)$$

<u>I s b o t :</u> (1) formula va $r=\frac{\lambda}{n}$ tenglikdan foydalanib, $R_n(m)$ ehtimollikni quyidagi ko'rinishda ifodalaymiz:

$R_n(m)=S_n^m p^m q^{n-m}=$

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}=\frac{\lambda^m}{m!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\frac{(n-m+1)(n-m+2)...(n-1)n}{n^m}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}=$$

$$=\frac{\lambda^m}{m!}\cdot\frac{n-m+1}{n}\cdot\frac{n-m+2}{n}...\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m} \qquad (*)$$

Limitlar nazariyasidan ma'lumki, ixtiyoriy chegaralangan k va λ soni uchun

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-k}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k=1$$

va ikkinchi ajoyib limitga asosan

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=e^{-\lambda}$$

Demak n etarli katta bo'lganda

$$\frac{n-k}{n} \approx 1, (1-\frac{\lambda}{n})^{-m} \approx 1, (1-\frac{\lambda}{n})^{n} \approx e^{-\lambda}$$

va shu sababli (∗) tenglikdan (3) taqribiy formula kelib chiqadi.
Shuni ta'kidlab utish kerakki, berilganm va λ qiymatlarida

$$R_m = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

ehtimollik qiymati maxsus jadval yordamida topilishi mumkin.
<u>*M i s o l :*</u> Mineral suv qo'yish sexida shisha idishning (butilka) sinish ehtimolligi r=0,002 bo'lsa, 1000 ta idishdan uchtasini sinish ehtimolligi topilsin.

Ko'rilayotgan masala n=1000, r=0,002 parametrli binomial taqsimotga mos keladi va

$$nrq = 1000 \cdot 0{,}002 \cdot 0{,}998 = 1{,}996 < 9$$

bo'lgani uchun $R_{1000}(3)$ ehtimollikni Puassonning (3) taqribiy formulasi yordamida hisoblaymiz. Bunda $\lambda = pr = 1000 \cdot 0{,}002 = 2$ va jadval yordamida

$$R_{1000}(3) \approx \frac{2^3 e^{-2}}{3!} \approx 0{,}1804$$

ekanligini topamiz.

Endi Bernulli sxemasida kuzatuvlar soni n katta bo'lganda xodisani ro'y berishlar soni m1 bilan m2 orasida bo'lish ehtimolligining aniq qiymati

$$R_n(m_1,m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (4)$$

uchun taqribiy formula topish masalasini ko'ramiz. Bu masala Muavr-Laplasning integral teoremasida uz echimini topadi.

MUAVR-LAPLASNING INTEGRAL TEOREMASI: Agarda binomial taqsimotda kuzatuvlar soni n etarli katta va r ehtimollikuchun 0<p<1shart bajarilsa, u holda ixtiyoriy m_1 va m_2 ($m_1 \le m_2$) sonlari uchun asimptotik harakterdagi

$$R_n(m_1,m_2) \approx F(x_2)-F(x_1) \qquad (5)$$

taqribiy tenglik o'rinli bo'ladi. Bu erda

$$x_k = \frac{m_k - np}{\sqrt{npq}}, \qquad k = 1,2$$

va

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt = \int_0^x \varphi(t) dt$$

F(x) funktsiya qiymatlari $4 \ge x > 0$ bo'lganda maxsus jadvaldan olinadi. Agarda $x<0$ bo'lsa F(-x)=-F(x) tenglikdan, $x>4$ bo'lganda esa F(x)=0,5 munosabatdan foydalanib F(x) qiymati topiladi.
<u>*M i s o l :*</u> Simmetrik tanga 1000 marta tashlanganda gerb chiqishlar soni 400 bilan 600 orasida bo'lish ehtimoli topilsin.
Bu erda n=1000 , r=0,5 , m_1 = 400 , m_2 = 600 va R_{1000} (400,600) ehtimollikni topish talab etiladi. (5) taqribiyformulaga asosan

$$R_{1000}(400,600) \approx F\left(\frac{600-1000\cdot 0,5}{\sqrt{1000\cdot 0,5\cdot 0,5}}\right) - F\left(\frac{400-1000\cdot 0,5}{\sqrt{1000\cdot 0,5\cdot 0,5}}\right) =$$

$$=2F\left(\frac{100}{\sqrt{250}}\right)=2F(6,3)=2\cdot 0,5=1$$

S a v o l l a r:

1. Bernulli formulasining kamchiligi nimadan iborat?
2. Muavr-Laplasning lokal teoremasida nima tasdiklanadi ?
3. Puasson teoremasi qanday ifodalanadi ?
4. Muavr-Laplasning integral teoremasini aytib bering.
5. Laplas funktsiyasini yozing va uning xossalarini ko'rsating.

15.8. DISKRET TASODIFIY MIQDORLAR, ULARNING TAQSIMOT QONUNI VA ASOSIY SONLI HARAKTERISTIKALARI.

Tayanch iboralar: tasodifiy miqdor, diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar, diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni, matematik kutilish, dispersiya, o'rta kvadratik chetlanish.

R e j a :

1. Tasodifiy miqdor.
2. Diskret tasodifiy miqdorlar.
3. Taqsimot qonuni.
4. Matematik kutilish.
5. Matematik kutilish xossalari.
6. Dispersiya.
7. Dispersiya xossalari.
8. O'rtakvadratik chetlanish.

Adabiyotlar:

1..U. Soatov. "Oliy matematika" II qism. Toshkent. «O'qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 14-bob, § 16-18 , § 21-23 ; 251- 256 , 261- 267 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral hisob. 2-tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1974 yil. X X bob, §7-10, 489-505 betlar.

Kundalik xayotimizda biz o'zining turli qiymatlarini tasodifga bog'liq ravishda qabul qiladigan o'zgaruvchi miqdorlar bilan tez-tez uchrashib turamiz. Masalan :

1) sotib olingan lotoreya biletiga chiqqan yutuq kattaligi ;
2) tekshiruv natijasida aniqlangan sifatsiz maxsulotlar soni ;
3) ekilgan 1000 ta urugdan unib chiqqanlari soni ;
4) polizning bir gektaridan olingan hosil miqdori ;
5) sogilgan sutning tarkibidagi yog miqdori ;
bekatda kerakli avtobusni kutishga ketgan vaqt.
Bunday miqdorlar ehtimolliklar nazariyasida tasodifiy miqdorlar deb tushuniladi.

Tasodifiy miqdorlar X=X(ω), Y=Y(ω) , Z=Z(ω) kabi bosh harflar bilan, ularning mumkin bo'lgan qiymatlari esa x,u,z kabi mos kichik harflar bilan belgilanadi.

T A ' R I F 1 : Mumkin bo'lgan qiymatlarini $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kabi belgilab bo'ladigan X tasodifiy miqdorlar diskret tasodifiy miqdor deyiladi.

Ta'rifga asosan yuqoridagi 1), 2) va 3) Misollarda ko'rilgan tasodifiy miqdorlar diskretdir. Ammo 4), 5) va 6) Misollarda ko'rilgan tasodifiy miqdorlarni diskret deb bo'lmaydi, chunki ularning mumkin bo'lgan qiymatlari to'plami to'liq biror intervalni tashqil etadi va shu sababli ularni sanab bo'lmaydi. Bunday tasodifiy miqdorlar uzluksiz deb ataladi va ular keyinrok kuriladi.

X diskret tasodifiy miqdor o'zining mumkin bo'lgan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qiymatlari bilangina to'liq aniqlanmaydi. Kuzatuvlarda bu qiymatlarning ba'zilari tez-tez, ba'zilari nisbatan kam, ba'zilari esa onda-sonda ro'yobga chikib turishi mumkin. Shu sababli X tasodifiy miqdorning har bir mumkin bo'lgan x_i qiymatining $r_i=P\{X=x_i\}$ehtimolligini ham ko'rsatish kerak. Odatda bu ma'lumotlar quyidagi jadval ko'rinishida beriladi :

X	x_1	x_2	….	x_n	….
R	r_1	r_2	….	r_n	….

(1)

Bu jadvalda

$$r_1+r_2+\ldots r_n+\ldots=\sum_i r_i = 1 \qquad (2)$$

shart bajarilishi kerak.

T A ' R I F №23 : (2) shartga buysunuvchi (1) jadval X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni (yoki katori) deb ataladi.

Ehtimolliklar nazariyasi nuqtai nazaridan (1) taqsimot qonuni X diskret tasodifiy miqdor to'g'risida to'liq ma'lumot beradi. Ammo bir kator amaliy masalalarni kurganda X to'g'risida bunchalik to'liq ma'lumotga xojat bo'lmaydi.

Masalan, korxonaning yil davomida ishlab chikaradigan maxsulotining kundalik xajmi X tasodifiy miqdor bo'ladi. Ammo bu ko'rsatgichni harakterlash uchun X ni yilning har bir kundagi $x_1, x_2, \ldots, x_{365}$ qiymatlarini bilish shart bulmasdan, balkim bir kunlik o'rtacha maxsulot xajmi $\overline{X}$ ni bilish etarli.

Diskret tasodifiy miqdor X o'zining chekli sondagi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mumkin bo'lgan qiymatlarini bir xil ehtimollik bilan qabul kilsin, ya'ni

$$p_1 = r_2 = \ldots = r_n = \frac{1}{n}$$

Ma'lumki bu holda o'rta qiymat $\overline{X}$

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

formula bilan aniqlanadi. Endi o'rta qiymat tushunchasini r1 ,r2,…,rn ehtimolliklar ixtiyoriy bo'lgan xol uchun umumlashtiramiz. Buning uchun yuqorida keltirilgan $\overline{X}$ formulasini $r_k = \frac{1}{n}$, $k = \overline{1,n}$ ekanligini hisobga olgan holda quyidagicha yozib chiqamiz:

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{1}{n} + ...x_n \cdot \frac{1}{n} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n$$

Bu formula ixtiyoriy r_k , $k=\overline{1,n}$, ehtimolliklar uchun ham ma'noga ega bo'ladi va u bilan aniqlangan son X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlarini sonlar o'qida joylashuvini harakterlaydi.

T A ' R I F № 3: X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi yoki o'rta qiymati deb M(X) kabi belgilanadigan va

$$M(X) = x_1 r_1 + x_2 r_2 + \ldots + x_n r_n = \sum_{\kappa=1}^{n} x_k r_k \qquad (3)$$

formula bilan hisoblanadigan songa aytiladi.

Turli tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishlarini hisoblashda uning quyidagi xossalari foydali bo'lishi mumkin:

I x o s s a : O'zgarmas S sonning matematik kutilishi shu sonni uziga teng, ya'ni

$$M(S)=S \ , \quad S\text{-sonst} \qquad (4)$$

I s b o t : O'zgarmas S sonini faqatgina bitta S qiymatni r=1 ehtimollik bilan qabul qiladigan tasodifiy miqdor deb karash mumkin va shuning uchun (3) formulaga asosan

$$M(S)=S\cdot 1=S$$

II x o s s a : O'zgarmas S ko'paytuvchini matematik kutilish belgisidan tashkariga chiqarish mumkin, ya'ni

$$M(SX)=S\cdot M(x) \qquad (5)$$

I s b o t : Agarda X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari xk , ularning ehtimolliklari $R\{X=x_k\}=r_k$ bo'lsa, u holda SX tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari Sx_k ko'rinishda bo'lib, ularning ehtimolliklari uchun

$R\{CX=Sx_k\} = R\{X=x_k\}= r_k$

tenglik o'rinli bo'ladi. Shuning uchun (3) formulaga asosan

$$M(SX) = \sum_{\kappa} (Sx_k)r_k = S\sum_{\kappa} x_k r_k = SM(X)$$

Keyingi xossalarni bayon qilish uchun X va Y diskret tasodifiy miqdorlarni yig'indisi va ko'paytmasi tushunchasini kiritamiz. X (yoki Y) tasodifiy miqdor o'zining x_k (yoki u) mumkin bo'lgan qiymatlarini $R\{X=x_k\}=r(x_k)$ (yoki $R\{Y=u_j\}=p(u_j)$) ehtimollik bilan qabul kilsin. Bu X va Y tasodifiy miqdorlar bir

paytda kuzatilayotgan bo'lsin. Bu kuzatuvlarda X va Y bir paytni uzida $X=x_k$ va $Y=u_j$ qiymatlarini qabul qilishi tasodifiy xodisa va uning ehtimolligini

$$R\{X=x_k,\ Y=u_j\}= p\ (x_k,\ u_i)$$

deb belgilaymiz.

T A ' R I F № 4 : X va Ydiskret tasodifiy miqdorlarning $X\pm Y$ algebraik yig'indisi (XU ko'paytmasi) deb shunday Z diskret tasodifiy miqdorga aytiladiki, uning mumkin bo'lgan qiymatlari $Z_{kj}=x_k\pm u_j$
($Z_{kj} = x_k u_j$) ko'rinishda bo'lib, ularning ehtimolliklari

$$R\{Z=z_{kj}\}=P\{X=x_k,Y=u_j\}= p(x_k\ ,u_j)$$

formula bilan aniqlanadi.

T A ' R I F № 5 : X va Y diskret tasodifiy miqdorlar bog'liqmas deyiladi, agarda ixtiyoriy k va j uchun

$$R(x_k,\ u_j)= R\{X= x_k,\ Y=u_j\}= P\{X =x_k\}\ P\{Y= u_i\} = r(x_k)\ p(u_j)$$

tenglik bajarilsa. Bu shart bajarilmasa X va Yo'zaro bog'liq tasodifiy miqdorlar deb ataladi.

M i s o l: Ikkita o'yin sokkasi tashlangan va ularda chiqqan sonlar X va Y bilan belgilangan.

Bu erda klassik ta'rifga asosan

$$R\{X=k\}=\frac{1}{6}\quad,\quad R\{Y=j\}=\frac{1}{6}\quad,\quad k,j = \overline{1,6}$$

Ikkita o'yin sokkasi tashlanganda barcha natijalar soni 36 ta bo'lib, ixtiyoriy $k,j = \overline{1,6}$ uchun ularning faqat bittasida $\{X=k,\ Y=j\}$ xodisa ro'y beradi. Shu sababli

$$R\{X=k,\ Y=j\} = \frac{1}{36}=\frac{1}{6}=\frac{1}{6}=R\{X=k\}R\{Y=j\}$$

Demak X va Y bog'liqmas tasodifiy miqdorlardir.

Amaliyotda X va Y tasodifiy miqdorlarning bog'liq yoki bog'liqmasligi ko'pincha ularning mazmuniga karab belgilanadi. Masalan, ikkita zavodda bir xil maxsulot turli texnologiyada ishlab chiqarilayotgan bo'lsin. Bu zavodlarda har kuni ishlab chiqarilayotgan maxsulotlarning ichidagi sifatsizlari sonini X va Y bilan belgilasak, ular bog'liqmas tasodifiy miqdor bo'ladi.

III x o s s a : Agarda X va Y chekli M(X) va M(Y) matematik kutilishga ega bo'lgan ixtiyoriy tasodifiy miqdorlar bo'lsa, ularning algebraik yig'indisi $X\pm Y$ ham matematik kutilishga ega bo'ladi va

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y) \qquad (6)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

IV – x o s s a : Agarda X va Y chekli M(X) va M(Y) matematik kutilishga ega bo'lgan bog'liqmas tasodifiy miqdorlar bo'lsa, ularning XU ko'paytmasi ham matematik kutilishga ega bo'ladi va

$$M(XU) = M(X)\ M(Y) \qquad (7)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu xossalarni Isbotlash talabalarga mustaqil ish sifatida topshiriladi.

Shuni ta'kidlab utish kerakki, (7) formula o'zaro bog'liq tasodifiy miqdorlar uchun o'rinli bo'lmaydi.

M(X) matematik kutilish X tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari sonlar o'qining kaysi nuqtasi atrofida tudalanganligini harakterlaydi. Bir kator masalalarda X tasodifiy miqdor qiymatlari o'zining M(X) matematik kutilishi atrofida kanchalik yoyilganligini (tarkalganligini) harakterlashga to'g'ri keladi. Masalan biror kattalik ikki xil asbob yordamida bir necha marta ulchangan bo'lib, kaysi asbobda ulchash natijalari o'zining o'rta qiymatiga yakinrok joylashgan bo'lsa, ya'ni kamrok yoyilgan (tarkalgan) bo'lsa, shu asbob yaxshirok deb olinadi.

Ehtimolliklar nazariyasida X tasodifiy miqdor qiymatlarining tarkokligi ko'rsatgichi sifatida dispersiya va o'rta kvadratik chetlanish qabul qilingan.

T A ' R I F № 6 : X tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb D(X) kabi belgilanadigan va

$$D(X) = M\,(X-M(X))^2 \qquad (8)$$

formula bilan hisoblanadigan songa aytiladi.

X diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonuni berilgan bo'lsa, (8) formulani

$$D(X)=\sum_{\kappa} (x_k - m_x)^2\, p_k \qquad (9)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu erda $m_x = M(X)$.

Kiskalik uchun $M(X)=a$ belgilash kiritib va matematik kutilish xossalaridan foydalanib dispersiyaning (8) formulasini quyidagicha yozish mumkin:

$D(X)=M(X-a)^2 =M(X^2-2aX+a^2) =M(X^2)-M(2aX)+M(a^2)=M(X^2)-2aM(X)+a^2=$
$=M(X^2)-a^2 = M(X^2)-[M(X)]^2$

Shunday qilib

$$D(X) = \sum_{\kappa} x_{\kappa}^2\, p_k - [M(X)]^2 \qquad (10)$$

va amaliyotda dispersiyani shu formula bilan hisoblash qulaydir. Dispersiya quyidagi xossalarga ega :

I x o s s a : Dispersiya manfiy bo'lmagan sondir, ya'ni

$$D(X) \geq 0 \qquad (11)$$

I s b o t : $(X-M(X))^2 \geq 0$ bo'lgani uchun matematik kutilishning III xossasiga asosan

$$D(X) =M\,(X-M(X))^2 \geq 0$$

II x o s s a : O'zgarmas S sonining dispersiyasi nolga teng, ya'ni

$$D(C) = 0 \qquad (12)$$

I s b o t : Matematik kutilishning I xossasiva (8) formulaga asosan

$$D(C) = M(S-M(S))^2 = M(S-S)^2 = M(0) = 0$$

III x o s s a : O'zgarmas S ko'paytuvchini dispersiya belgisidan kvadratga oshirib chiqarish mumkin, ya'ni

$$D(CX) = C^2D(X) \qquad (13)$$

I s b o t : Matematik kutilishning III xossasiga asosan

$$D(CX) = M(SX-M(SX))^2 = M(SX-SM(X))^2 =$$
$$= M[C^2(X-M(X))^2] = S^2\, M(X-M(X))^2 = S^2D(X)$$

IV x o s s a : Agarda X va Y bog'liqmas tasodifiy miqdorlar bo'lsa, ularning yig'indisini dispersiyasi har birining dispersiyalari yig'indisiga teng bo'ladi , ya'ni

$$D\,(X+Y)=D(X)+D(Y) \qquad (14)$$

Bu xossani Isbotsiz qabul etamiz.

V x o s s a : Bog'liqmas X va Y tasodifiy miqdorlar ayirmasining dispersiyasi X va Y dispersiyalarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$D(X-Y) = D(X) + D(Y) \qquad (15)$$

I s b o t : Dispersiyani IV va II xossalariga asosan

$$D(X-Y)=D(X+(-Y))= D(X)+D(-Y)=D(X)+(-1)^2D(Y)=D(X)+D(Y)$$

VI x o s s a : X tasodifiy miqdorga ixtiyoriy S o'zgarmas son qushilsa, uning dispersiyasi uzgarmaydi, ya'ni

$$D(X+C) = D(X) \qquad (16)$$

Bu xossaning Isboti talabalarga xavola qilinadi.

Agarda ko'rilayotgan masalada X tasodifiy miqdor qiymatlarining o'lcham birligini ham hisobga olish kerak bo'lsa, bu holda dispersiyaD(X) o'rniga ko'pincha o'rta kvadratik chetlanish deb ataladigan,

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \qquad (17)$$

formula bilan aniqlanadigan ko'rsatgichdan foydalaniladi. Bunga sabab sho'qi X qanday o'lcham birligiga ega bo'lsa, M(X) va σ(X) ko'rsatgichlar ham usha o'lcham birligiga ega bo'ladi, D(X) esa bu o'lcham birligining kvadrati bilan ulchanadi.

Takrorlash uchun savollar::

1. Tasodifiy miqdor qanday ta'riflanadi ?
2. Diskret tasodifiy miqdorlar qanday aniqlanadi ?
3. Diskret tasodifiy miqdorni taqsimot qonuni ta'rifini keltiring .
4. Taqsimot qonuni bo'yicha matematik kutilish qanday hisoblanadi ?
5. Matematik kutilish qanday asosiy xossalarga ega ?
6. Dispersiya ta'rifini va mazmunini keltiring.
7. Dispersiyaning asosiy xossalarini ko'rsating.
8. O'rta kvadratik chetlanish ta'rifi va ahamiyatini ko'rsating.

15.9. ASOSIY DISKRET TAQSIMOT QONUNLARI.

Tayanch iboralar : Binomial taqsimot, Puasson taqsimoti, geometrik taqsimot.

R e j a :

1. Binomial taqsimot.
2. Binomial taqsimotning sonli harakteristikalari.
3. Puasson taqsimoti.
4. Puasson taqsimotining matematik kutilishi va dispersiyasi.
5. Geometrik taqsimot.
6. Geometrik taqsimot sonli harakteristikalari.

7. Gipergeometrik taqsimot.
8. Gipergeometrik taqsimotning matematik kutilishi va dispersiyasi.

Adabiyotlar:
1..U. Soatov. “Oliy matematika” II qism. Toshkent. «O’qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 14-bob, § 26-27 ; 269- 273 betlar.

Bu erda biz amaliy masalalarni echishda juda ko’p uchrab turadigan ba'zi bir diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlarini ko’rib chiqamiz.
I.Binomial taqsimot. Bernulli sxemasida,ya'ni R(A)=r ehtimolli A tasodifiy xodisa ustida n ta bog’liqmas kuzatuv o’tkazilganda, A xodisaning ro’y berishlar sonini X bilan belgilaylik. Aniqlanishi bo’yicha X diskret tasodifiy miqdor bo’lib u o’zining k=0,1,2,…,n mumkin bo’lgan qiymatlarini

$$R\{X= k\} =R_n (k) = S_n^{\kappa} r^k q^{n-k} , q=1-p \qquad (1)$$

ehtimolliklar bilan qabul qilishi va

$$\sum_{\kappa=0}^{n} P\{X=k\} = 1$$

bo’lishi oldin ko’rib o’tilgan edi. (1) ehtimolliklarga ega bo’lgan X binomial taqsimotli tasodifiy miqdor deyiladi. Shu tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasini topamiz. Ta'rif bo’yicha ular

$$M(X)= \sum_{\kappa=0}^{n} x_k r_k = \sum_{\kappa=0}^{n} k\, S_n^{\kappa}\, r^k q^{n-k} ,$$

$$D(X) = \sum_{\kappa=0}^{n} x_{\kappa}^2 p_k - [M(X)]^2 = \sum_{\kappa=0}^{n} k\, S_n^{\kappa}\, r^k q^{n-k} - [M(X)]^2$$

formula bilan topiladi. Ammo bu formulalardagi yig’ndilarni hisoblash ancha murakkab va shu sababli M(X), D(X) ko’rsatgichlarni boshqacha usulda topamiz. Buning uchun X_m , m=1,2,…,n, yordamchi tasodifiy miqdorlarni kiritamiz. Bu erda X_m =1 (X_m=0) agarda m –kuzatuvda A xodisa ro’y bersa (ro’y bermasa) deb olamiz. Shartga asosan R(A)=r , R(A) =1-r=q bo’lgani uchun, X_m diskret tasodifiy miqdorlar bir xil

X_m	1	0
P	r	q

m=1,2,…, n. taqsimot qonuniga ega bo’ladi. U holda ixtiyoriy $m=\overline{1,n}$ uchun

$$M(X_m) = x_1 r_1 + x_2 r_2 = 1\cdot p + 0\cdot q = p ,$$

$$D(X_m) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 - [M(x)]^2 = 1^2\cdot p + 0^2\cdot q - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

X_m , m==$\overline{1,n}$ tasodifiy miqdorlarning aniqlanishiga kura ularning yig’indisi n ta kuzatuvda A xodisa necha marta ro’y berganini bildiradi, ya'ni

$$X_1+X_2+\ldots+X_m = X$$

kuzatuvlar bog'liqmas bo'lgani uchun X_m , $m=\overline{1,n}$, tasodifiy miqdorlar ham bog'liqmas bo'ladi. Shu sababli M(X) va D(X) xossalariga asosan

$M(X)= M(X_1+X_2+\ldots+X_m)=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n) = p+p+\ldots+r=pr$

$D(X)=D(X_1+X_2+\ldots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n) = pq+pq+\ldots+rd=prq.$

Demak (1) binomial taqsimotga ega bo'lgan X tasodifiy miqdor uchun

$$M(X) = pr\,, \quad D(X)=prq\,, \quad \sigma(X) = \sqrt{npq} \qquad (2)$$

<u>II. Puasson taqsimoti.</u> Binomial taqsimot uchun

$$R_n(k) \approx \frac{\lambda^{\kappa} e^{-\lambda}}{\kappa!}\,, \quad \lambda = np\,, \quad \kappa = \overline{0,n}$$

Puasson asimptotik formulasini chikargan edik. Endi mumkin bo'lgan qiymatlari manfiy bo'lmagan k=0,1,2,… butun sonlardan iborat bo'lgan X diskret tasodifiy miqdorni ko'ramiz va uning bu qiymatlari ehtimolliklarini

$$R\{X=k\}= R(k) = \frac{\lambda^{\kappa} e^{-\lambda}}{\kappa!}\,, \lambda > 0 \qquad (3)$$

formula bilan aniqlaymiz. Avvalo (3) ehtimolliklardan tuzilgan kator yig'indisi birga teng bo'lishini ko'rsatamiz:

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} P(\kappa) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\kappa} e^{-\lambda}}{\kappa!} = e^{-\lambda} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\kappa}}{\kappa!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

Bu erda $u = e^x$ funktsiya uchun

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{x^{\kappa}}{\kappa!}$$

Makloren katoridan foydalanildi. Demak (3) ehtimolliklar taqsimot qonunini tashqil etadi va u λ parametrli Puasson taqsimoti deyiladi.

Masalan, kichik ehtimollik bilan sifatsiz bo'lishi mumkin bo'lgan maxsulotlarning katta xajmli partiyasidagi sifatsiz maxsulotlar soni Puasson taqsimotiga ega bo'ladi.

Puasson taqsimotining matematik kutilishini uning ta'rifi bo'yicha hisoblaymiz:

$$M(X)= \sum_{\kappa=0}^{\infty} \kappa P(\kappa) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \kappa \frac{\lambda^{\kappa} e^{-\lambda}}{\kappa!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\kappa \lambda^{\kappa-1}}{\kappa!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \left(\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\kappa}}{\kappa!} \right)_{\lambda}' = \lambda e^{-\lambda} (e^{\lambda})' = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda\,.$$

Xuddi shunday hisoblashlar orqali D(X)=λ ekanligini ko'rsatish mumkin. Shunday qilib Puasson taqsimotida

$$M(X) = D(X) = \lambda \qquad (4)$$

Bu hususiyat faqatgina Puasson taqsimotiga xosdir.

<u>III. Geometrik</u> taqsimot Bog'liqmas kuzatuvlarning har birida A tasodifiy xodisa bir xil R(A)=r ehtimollik bilan ro'y berishi mumkin bo'lsin. X orqali A xodisa birinchi marta ro'y bergan kuzatuvning tartib raqamini belgilaymiz. Bu holda X diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari barcha natural sonlardan iborat bo'ladi va

$$\{X = n\} = \underbrace{\overline{A} \cdot \overline{A} \ldots \overline{A}}_{n-1} A \quad , \; n=1,2,3,\ldots..$$

Kuzatuvlar bog'liqmas bo'lgani uchun ehtimolliklarni ko'paytirish teoremasiga asosan

$$R\{X=n\} = P\{\underbrace{\overline{A} \cdot \overline{A} \ldots \overline{A}}_{n-1} A\} =$$

$$=P(\overline{A})\cdot P(\overline{A})\ldots P(\overline{A})\cdot R(A) = q^{n-1}p = pq^{n-1}, \; q=1-p.$$

Shunday qilib kiritilgan X tasodifiy miqdoruchun

$$R\{X=n\} = pq^{n-1} \; , \; n=1,2,3,\ldots \qquad (5)$$

(5) ehtimolliklar taqsimot qonuni tashqil etishini ko'rsatish uchun ulardan tuzilgan kator yig'indisini topamiz :

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} R\{X=n\} = r\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = 1$$

Bu erda biz $0<q<1$ bo'lgani uchun q^{n-1} , $n=1,2,3,\ldots$ cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya tashqil etishidan va uning barcha hadlar yig'indisi $S=1/(1-q)$ bo'lishidan foydalandik.

(5) ehtimolliklar birinchi hadi r,maxraji esa q bo'lgan geometrik progressiya hadlaridan tashqil topgani uchun u geometrik taqsimot qonuni deb ataladi. Matematik kutilish ta'rifiga asosan

$$M(X)= \sum_{n=1}^{\infty} n\, R\{X=n\}=\sum_{n=1}^{\infty} prq^{n-1}= p\left(\sum_{n=1}^{\infty} q^{n}\right)'_{q} =$$

$$= p \cdot \left(\frac{q}{1-q}\right)' = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

Xuddi shunday hisoblashlar orqali $D(X)=q/p^2$ ekanligini topish mumkin. Shunday qilib geometrik taqsimotda

$$M(X) = \frac{1}{p}, \quad D(X) = \frac{q}{p^2} \qquad (6)$$

Takrorlash uchun savollar::

1. Binomial taqsimot qonunini yozing va nechta parametrga bog'liqligini aniqlang.
2. Binomial taqsimotning asosiy sonli harakteristikalari qanday formula bilan hisoblanadi?
3. Puasson taqsimot qonunini yozing va nechta parametr bilan aniqlanishini ko'rsating.
4. Puasson taqsimotida matematik kutilish va dispersiyani qanday hisoblash mumkin?
5. Puasson taqsimotining uziga xos hususiyati nimadan iborat ?
6. Geometrik taqsimot qonunini yozing va unda nechta parametr katnashishini ko'rsating.

7. Geometrik taqsimotning sonli harakteristkalari qanday hisoblanadi?

15.10. EHTIMOLLIKLARNING TAQSIMOT VA ZICHLIK FUNKTSIYALARI. UZLUKSIZ TASODIFIY MIQDORLAR UCHUN SONLI HARAKTERISTIKALAR.

Tayanch iboralar : Taqsimot funktsiyasi, zichlik funktsiyasi, uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasi.

R e j a :

1. Taqsimot funktsiyasi ta'rifi.
2. Taqsimot funktsiyasining asosiy xossalari.
3. Taqsimot funktsiyasi tadbiqlari.
4. Zichlik funktsiyasi.
5. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar.
6. Zichlik funktsiyasi xossalari.
7. Zichlik funktsiyasining tadbiqlari.
8. Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishi va dispersiyasi.

Adabiyotlar:
1..U. Soatov. “Oliy matematika” II qism. Toshkent. «O’qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 14-bob, § 19-23 ,256- 266 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral hisob. 2-tom, Toshkent, «O’qituvchi», 1974 yil. X X bob, §12-14, 506-517 betlar.

Biz diskret X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni uni to’liq aniqlashini ko’rib utdik. Ammo mumkin bo’lgan qiymatlari biror chekli yoki cheksiz intervalni to’liq tuldiradigan X uzluksiz tasodifiy miqdor uchun taqsimot qonuni ma'noga ega bo’lmaydi. Shu sababli biz endi X tasodifiy miqdorni biror x qiymatni qabul qilish ehtimolligi o’rniga uni biror soxaga tushish ehtimolligini kurishimiz kerak. Ehtimolliklar nazariyasida bunday soxalar sifatida $(-\infty,x)$ intervallar kuriladi va x o’zgaruvchining ixtiyoriy qiymatida ularuchun

$$R\{X\in(-\infty,x)\} = R\{X<x\}$$

ehtimolliklar aniqlangan deb qabul qilinadi. Bu ehtimolliklar x o’zgaruvchini qiymatiga bog’liq bo’ladi, ya'ni biror

$$F(x) = P\{X<x\},\ x\in(-\infty,\infty) \qquad (1)$$

funktsiyani aniqlaydi.

T A ' R I F 1: (1) tenglik bilan aniqlangan $F(x)$ funktsiya X tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi deb ataladi.

Shuni ta'kidlab utish kerakki $F(x)$ taqsimot funktsiyasi ham diskret, ham uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun ma'noga ega.

Taqsimot funktsiyalari quyidagi xossalarga ega :

I –x o s s a : $F(x)$ kamaymovchi funktsiya , ya'ni

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2) \qquad (2)$$

I s b o t : Quyidagi tasodifiy xodisalarni kiritamiz :

$$A\{x<x_2\}\ ,\ B\{x<x_1\}\ ,\ C\{x_1 \le X < x_2\}$$

Ular birgalikda emas va $x_2>x_1$ bo'lgani uchun A=V+S tenglik o'rinli bo'ladi. Ehtimolliklarni qo'shish teoremasiga asosan

$$R(A)=R(V)+R(S) \Rightarrow R(A)-R(V)=R(S)$$

$$R\{X<x_2\}- R\{X<x_1\} = P\{x_1 \le X< x_2\}\ge 0 \qquad (3)$$

Bu erdan, (1) formulaga asosan,

$$F(x_2) – F(x_1) \ge 0 \Rightarrow F(x_2) \ge F(x_1).$$

II x o s s a : $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty)=1$

I s b o t : Taqsimot funktsiyasi ta'rifi va ehtimolliklar xossasiga asosan

$$F(-\infty) =R\{X<+\infty\} = P\{\varnothing\} = 0$$

$$F(+\infty) =R\{X<\infty\} = P\{\Omega\} = 1$$

Bu erda $\varnothing$ va Ω mumkin bo'lmagan va muqarrar xodisa ekanligini eslatib o'tamiz.

III x o s s a : $0\le F(x)\le 1$, $x\in(-\infty ,\infty)$

I s b o t : Bu xossa (1) formula va ehtimollikni xossalaridan kelib chiqadi.

T E O R E M A : Agar $F(x)$ diskret yoki uzluksiz X tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi bo'lsa, ixtiyoriy $[a,v)$ yarim interval uchun

$$R\{X\in[a,v)\} = R\{a\le X<v\}=F(v)-F(a) \qquad (4)$$

formula o'rinli bo'ladi.

I s b o t : Oldin ko'rilgan (3) formulada $x_1 = a$, $x_2 = v$ deb (4) formulani hosil qilamiz.

Bu teoremadan kelib chiqadiki $F(x)$ Xtasodifiy miqdorni to'liq harakterlaydi, chunki uni ixtiyoriy oralikka tushishini aniqlaydi.

T A ' R I F 2 : Agarda $F(x)$ taqsimot funktsiyasi differentsiallanuvchi bo'lsa, uning hosilasi zichlik funktsiyasi deb ataladi.

Shunday qilib zichlik funktsiyasi $f(x)$

$$f(x) = F'(x) \qquad (5)$$

formula bilan aniqlanadi.

Diskret tasodifiy miqdorlar uchun $f(x)$ zichlik funktsiyasi aniqlanmagan (ma'noga ega emas). Shu sababli uzluksiz tasodifiy miqdorlarni quyidagicha ta'riflash mumkin.

T A ' R I F 3 : Agarda X tasodifiy miqdorning $F(x)$ taqsimot funktsiyasi differentsiallanuvchi bo'lsa, u uzluksiz tasodifiy miqdor deyiladi.

Endi $f(x)$ zichlik funktsiyasini asosiy xossalarini ko'rib o'tamiz.

I x o s s a : $f(x) \ge 0$, $x\in(-\infty,\infty)$ (6)

I s b o t : Taqsimot funktsiyasi $F(x)$ kamaymovchi bo'lgani uchun uning hosilasi $F'(x) = f(x)$ manfiy bula olmaydi.

II x o s s a : X uzluksiz tasodifiy miqdor f (x) zichlik funktsiyasi bilan berilgan bo'lsa, uning taqsimot funktsiyasiF(x) quyidagicha topiladi:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \qquad (7)$$

I s b o t : Zichlik funktsiyasi ta'rifi va taqsimot funktsiyasi 2 –xossasiga asosan

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} F'(t)\,dt = F(t)\Big|_{-\infty}^{x} = F(x) - F(-\infty) = F(x)$$

Demak f(x) zichlik funktsiyasi ham X tasodifiy miqdorni to'liq harakterlaydi.

III –x o s s a : $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \qquad (8)$$

I s b o t : (7) formula va taqsimot funktsiyasining 2-xossasiga asosan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = F(\infty) = 1$$

IV - x o s s a : Ixtiyoriy $[a,v)$ yarim interval uchun

$$R\{X\in[a,v)\} = R\{a\le X< v\} = \int_{a}^{в} f(x)dx \qquad (9)$$

I s b o t : Zichlik funktsiyasi ta'rifi, Nyuton Leybnits formulasi va (5) formulaga asosan

$$\int_{a}^{в} f(x)dt = \int_{a}^{в} F'(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{в} = F(v) - F(a) = R\{a\le X<v\}$$

V –x o s s a : X uzluksiz tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari $[a,v]$ kesmada yotsa, ya'ni $X\in[a,v]$ bo'lsa, u holda

$$f(x) = 0\ , \qquad x \bar{\in} [a,v] \qquad (10)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

I s b o t : $X\in[a,v]$ bo'lgani uchun F(x) taqsimot funktsiyasi ta'rifiga asosan ixtiyoriy $x<a$ ($x>v$) uchun F(x)=0 (F(x)=1) va shuning uchun bu coxalarda

$f(x) = F'(x) = 0.$

Oldingi ma'ruzada diskret tasodifiy miqdorlar uchun M(X) matematik kutilish va D(X) dispersiya ko'rsatgichlarini kiritgan edik. Endi bu ko'rsatgichlarni uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun aniqlaymiz.

T A ' R I F 4: Zichlik funktsiyasi f (x) bo'lgan uzluksiz X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi M(X) va dispersiyasi D(X) deb quyidagi integrallar bilan aniqlangan sonlarga aytiladi:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx \qquad (12)$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x-M(x)]^2 f(x)dx \qquad (13)$$

Diskret holda ko'rsatilgan M(X) va D(X) xossalari bu erda ham to'liq saklanib kolishini ko'rsatish mumkin. Jumladan, dispersiya uchun amaliy hisoblashlarda qulay bo'lgan

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(x)]^2 \qquad (14)$$

formulani keltirib chiqarishni talabalarga mustaqil ish sifatida beramiz.

I z o x : (14) yoki ham (14) ham (13) integrallar mavjud bo'lmasligi mumkin. Bu holda X uchun D(X) yoki ham D(X) ham M(X) mavjud emas deyiladi va bu narsa $D(X) = \infty$ yoki $D(X) = \infty$, $M(X)= \infty$ yozuv bilan ifodalanadi.

Takrorlash uchun savollar::

1. Taqsimot funktsiyasi ta'rifini bering.
2. Diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimot funktsiyasi qanday ko'rinishda bo'ladi ?
3. Taqsimot funktsiyasini asosiy xossalarini ko'rsatib uting.
4. Taqsimot funktsiyasining tadbiqlarini ko'rsating.
5. Zichlik funktsiya qanday ta'riflanadi ?
6. Qanday tasodifiy miqdorlar uchun zichlik funktsiyasi mavjud ?
7. Zichlik funktsiyasining tadbiqlarini ko'rsating.
8. Zichlik funktsiyasini asosiy xossalarini ko'rsatib uting.
9. Uzluksiz tasodifiymiqdorlarning matematik kutilishi va dispersiyasi qanday aniqlanadi ?

15.11. ASOSIY UZLUKSIZ TAQSIMOTLAR.

Tayanch iboralar: Tekis taqsimot, normal taqsimot, uch sigma koidasi, kursatgichli taqsimot.

R e j a :

1. Tekis taqsimot.
2. Tekis taqsimotning sonli harakteristikalari.
3. Normal taqsimot.
4. Normal taqsimotning sonli harakteristikalari.
5. Standart normal taqsimot.
6. «Uch sigma» qoidasi.

7. Ko'rsatgichli taqsimot.
8. Ko'rsatgichli taqsimotningsonli harakteristikalari.

Adabiyotlar:
1..U. Soatov. "Oliy matematika" II qism. Toshkent. «O'qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 14-bob, § 28-30 ,272- 279 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral hisob. 2-tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1974 yil. X X bob, §15-20, 517-534 betlar.

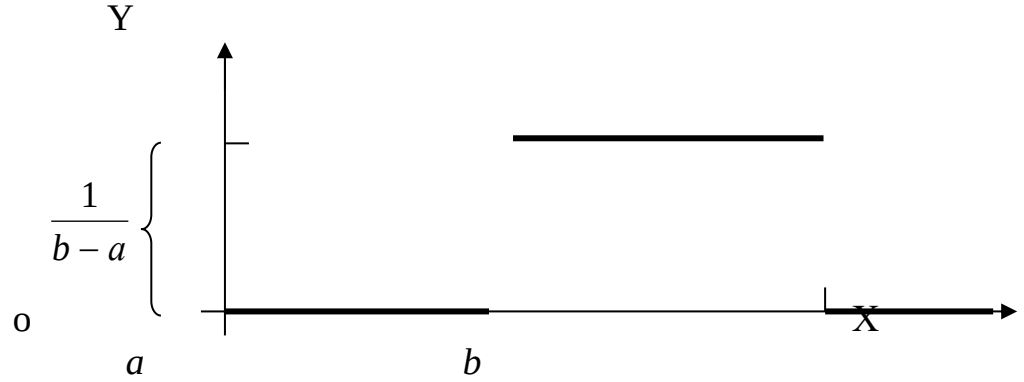
I.Tekis taqsimot.

T A ' R I F 1: Qiymatlari $[a,v]$ kesmani tuldiruvchi X uzluksiz tasodifiy miqdor tekis taqsimotga ega deyiladi,Agarda uning f (x) zichlik funktsiyasi

$$f(x)=\begin{cases}1/(b-a), x\in[a,b]\\ 0,\ x\bar{\in}[a,b]\end{cases} \qquad (1)$$

ko'rinishda bo'lsa.

Tekis taqsimotning u=f(x) zichlik funktsiyasining grafigini chizamiz:

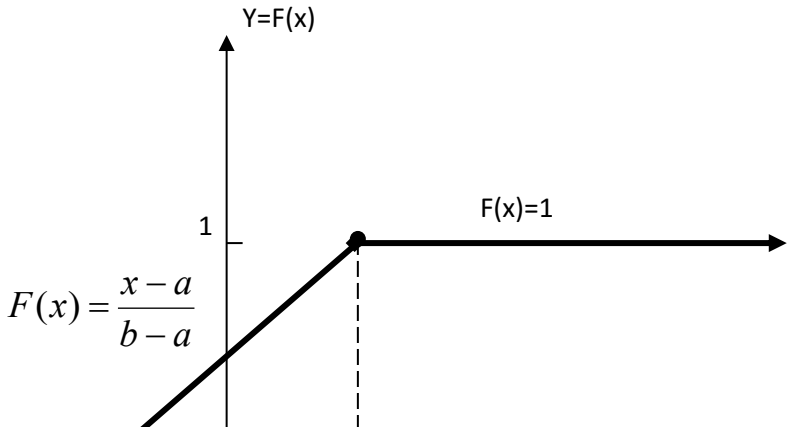


Endi bu tekis taqsimotning F(x) taqsimot funktsiyasini topamiz. X$\in[a,v]$ bo'lgani uchun $x<a(x>v)$ bo'lganda F(x)=0 (F(x)=1) bo'ladi.
$x\in[a,v]$ bo'lsa, f(x) va F(x) orasidagi boglanish formulasiga kura

$$\mathrm{F}(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{a} f(t)dt+\int_{a}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{a}0dx+\int_{a}^{x}\frac{1}{в-a}dx=\frac{x-a}{в-a}$$

Demak $$\mathrm{F}(x)=\begin{cases}0, x<a\\ \dfrac{x-a}{в-a}, x\in[a,в]\\ 1, x>в\end{cases} \qquad (2)$$

u=F(x) taqsimot funktsiyasi grafigini chizamiz:



●------●

F(x)=0

X

Endi tekis taqsimot uchun M(x) matematik kutilish va D(x) dispersiyani hisoblaymiz:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{a}^{в} dx \cdot \frac{1}{в-a} dx = \frac{в^2 - a^2}{2(в-a)} = \frac{a+в}{2} \qquad (3)$$

Demak tekis taqsimotda matematik kutilish [a,v] kesmaning o'rta nuqtasidan iborat (matematik kutilish o'rta qiymat deb ham atalishini eslang)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{a}^{в} x^2 \frac{1}{в-a} dx = \frac{в^3 - a^3}{3(в-a)}$$

bo'lgani uchun

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2 = \frac{(в^3 - a^3)}{3} - (\frac{a+в}{2})^2 =$$

$$= \frac{в^2 + aв + a^2}{3} - \frac{a^2 + 2aв + в^2}{4} = \frac{(в-a)^2}{12} \qquad (4)$$

Bu erdan ko'rinadiki [a,v] kesma uzunligi $v - a$ kancha katta bo'lsa, D(X) ham shuncha katta bo'ladi (D(X) tasodifiy miqdor qiymatlarining yoyilganligini ifodalashini eslang).

M i s o l : 0,5 l xajmli shishalarga avtomatik liniyada mineral suv kuyilmokda. Avtomatik liniya tasodifan buzilib tuxtagan paytda shishaga kuyilib bo'lgan suv xajmini X orqali belgilasak, u [0,0.5] oralikda tekis taksimlangan tasodifiy miqdor bo'ladi.

<u>II.Normal taqsimot.</u>

<u>T A ' R I F 2 :</u> Mumkin bo'lgan qiymatlari ixtiyoriy sondan iborat bo'lgan X uzluksiz tasodifiy miqdor a va σ>0 parametrlinormal taqsimotga ega deyiladi, Agarda uning $f(x)$ zichlik funktsiyasi

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty \qquad (5)$$

ko'rinishda bo'lsa.

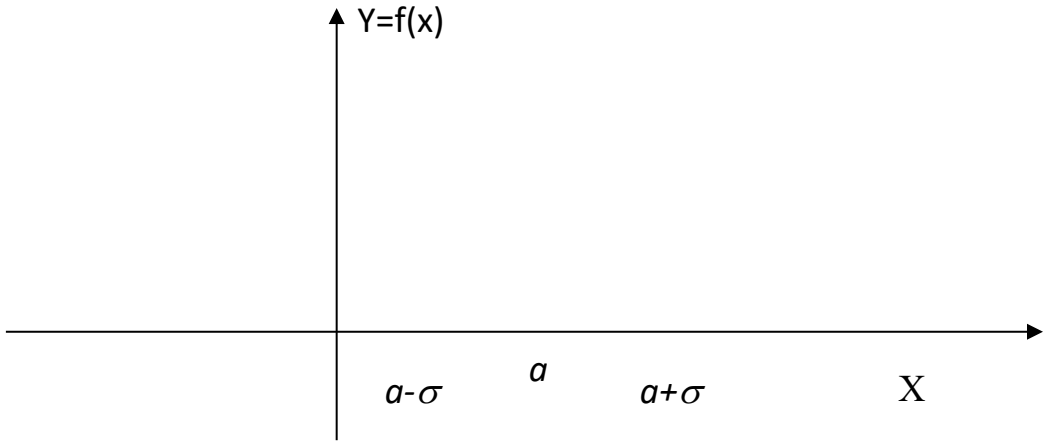
Normal taqsimotning F(x) taqsimot funktsiyasi

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt \qquad (6)$$

ko'rinishda bo'ladi va u elementar funktsiyalar orqali ifodalanmasligini ko'rsatish mumkin.

Bu taqsimotni kiskacha $N\ (a,\sigma^2)$ deb belgilaymiz va uning sonli harakteristikalari M(X)=a, D(X)= σ^2 ekanligini ko'rsatish mumkin. Demak, a parametr matematik kutilishni, σ parametr kvadrati normal taqsimotning dispersiyasini, uzi esa o'rta kvadratik chetlanishini aniqlar ekan.

Bu erdan normal taqsimot o'zining matematik kutilishi M(X) = a va dispersiyasi D(X) = σ^2 orqali to'liq aniqlanadi degan muxim xulosaga kelamiz. Bularga asosan normal taqsimot zichlik funktsiyasining grafigini chizamiz.



Parametrlari a=0, σ =1 bo'lgan N (0,1) normal taqsimotning zichlik funktsiyasi

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

va taqsimot funktsiyasi

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$$

aloxida ahamiyatga ega. Bu funktsiyalar bilan biz oldin Muavr-Laplas teoremalarida uchrashgan va ularning qiymatlari maxsus jadvaldan olinishi mumkin ekanligini kurgan edik.

Odatda $\varphi(x)$, $\Phi(x)$ funktsiyalar jadvallarida ularning qiymatlari argumentning $x \geq 0$ qiymatlari uchun keltirilgan. Agarda $x<0$ bo'lsa , ularning qiymatlarini

$$\varphi(-x) = \varphi(x), \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \qquad (7)$$

munosabatlardan foydalanib topish mumkin.

Bu munosabatlarni birinchisi $\varphi(x)$ funktsiya juftligidan, ikkinchisi esa quyidagi almashtirmalardan kelib chikadi :

$$\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \varphi(t)dt = \int_{x}^{\infty} \varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt - \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \Phi(\infty) - \Phi(x) = 1 - \Phi(x)$$

Bu jadvallar yordamida ixtiyoriy normal taqsimotning $f(x)$ zichlik va $F(x)$ taqsimot funktsiyalari qiymatlarini

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{x-a}{\sigma}), \qquad F(x) = \Phi(\frac{x-a}{\sigma}) \qquad (8)$$

munosabatlardan foydalanib topish mumkin. Bu munosabatlarni talabalar mustakil ish sifatida keltirib chikarishi mumkin.

(7) –(8) munosabatlardan foydalanib ixtiyoriy $N(a,\sigma^2)$ normal taqsimotli X tasodifiy miqdor uchun quyidagi muxim xulosalarga kelamiz:

1. Ixtiyoriy (α,β) interval uchun

$$R\{\alpha<X<\beta\} = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) \qquad (9)$$

2. Ixtiyoriy $\delta>0$ uchun

$$R\{|X-a|<\delta\} = P\{a-\delta<X<a+\delta\} = F\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - F-\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2F\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - 1 \qquad (10)$$

3. $$R\{|X-a|<3\sigma\} = 2F(3)-1 = 2\cdot 0{,}9986-1 = 1{,}9972-1 = 0{,}9972 \qquad (11)$$

Bu erdan kurinadiki, amaliy kuzatuvlarda X qabul kiladigan qiymatlar $(a-3\sigma, a+3\sigma)$ intervalda yotadi deb xisoblash mumkin. Bu natija “uch sigma koidasi” deb ataladi.

Normal taqsimot extimolliklar nazariyasida aloxida ahamiyatga ega bo’lgan taqsimot bo’lib xisoblanadi va amaliy masalalarni echishda juda ko’p qo’llaniladi. Masalan, ulchash natijalari xatoliklari, paxta tolasining uzunligi,oilaning oylik daromadi, sutdagi yog miqdori normal taqsimotga ega bo’lgan tasodifiy miqdorlar bo’ladi.

III. Kursatgichli taqsimot.

T A ‘ R I F 3 : Faqat manfiy bo’lmagan qiymatlarni qabul qiluvchi va zichlik funktsiyasi

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \qquad (12)$$

ko’rinishda bo’lgan uzluksiz X tasodifiy miqdor kursatgichli taqsimotga ega deyiladi. Bu erda λ ixtiyoriy musbat son va u kursatgichli taqsimotning parametri deyiladi.

Bu taqsimotning $F(x)$ taqsimot funktsiyasini topamiz:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \qquad (13)$$

Endi kursatgichli taqsimotning $M(x)$, $D(x)$ va $\sigma(x)$ sonli harakteristikalarini xisoblaymiz. Bulaklab integrallash formulasidan va

$$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-\lambda x} = 0, \qquad n = 1,2$$

munosabatdan foydalanib,

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda} \qquad (14)$$

$$D(X)=\int_{0}^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda^2} \qquad (15)$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{1}{\lambda}=M(X) \qquad (16)$$

natijalarni olamiz.

Turli texnik kurilmalarni birinchi marta buzilguncha ishlagan vaqtini X bilan belgilasak, u kursatgichli taqsimotli tasodifiy miqdor bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar::

1. Tekis taqsimot zichlik va taqsimot funktsiyasini yozing.
2. Tekis taqsimotda matematik kutilish va dispersiya qanday xisoblanadi ?
3. Normal taqsimot zichlik funktsiyasini yozing va nechta parametrga boglik ekanligini aniqlang.
4. Normal taqsimot parametrlari qanday extimoliy ma'noga ega ?
5. Uch sigma koidasi ma'nosi nimadan iborat ?
6. Kursatgichli taqsimotning zichlik va taqsimot funktsiyalarini yozing.
7. Kursatgichli taqsimotning sonli harakteristikalarini xisoblash formulasini yozing.

XVI BOB. MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI.

16.1. MATEMATIK STATISTIKA PREDMETI, ASOSIY MASALALARI VA TUSHUNCHALARI.

Tayanch iboralar : Matematik statistika predmeti, bosh to'plam va uning hajmi, tanlanma va uning hajmi, reprezentativ tanlanma, takroriy va notakroriy tanlanma.

R e j a :

1. Matematik statistika predmeti.
2. Matematik statistikaning asosiy masalalari.
3. Bosh to'plam va uning hajmi.
4. Tanlanma va uning hajmi.
5. Tanlanmaning reprezentativligi.
6. Tanlanma turlari.

Adabiyotlar:

1. .U. Soatov. “Oliy matematika” II qism. Toshkent. «O’qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 14-bob, § 45-46 ,310- 313 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral xisob. 2-tom, Toshkent, «O’qituvchi», 1974 yil. X X bob, §27, 542-543 betlar.

Matematik statistika va extimolliklar nazariyasi o’zaro boglik fanlar bo’lib, buni quyidagi Misolda ko’rsatish mumkin.

Partiyada N dona bir xil maxsulot bo’lib, ularning har biri $r(0<p<1)$ extimollik bilan sifatli bo’lishi mumkin bo’lsin. SHu partiyadan n dona maxsulot tavakkaliga tanlab olingan desak, ularni tekshiruvdan utkazmasdan roppa-rosa k donasi sifatli bo’lishini aniq ayta olmasdan,faqatgina bu xodisaning extimolligini xisoblab, uning to’g’risida ma’lum bir xulosa chikara olamiz. Bu extimolliklar nazariyasining asosiy masalalaridan biridir.

Endi shu partiyadagi maxsulotning sifatli bo’lish extimolligi r noma’lum bo’lsin.

Tavakkaliga olingan n dona maxsulot tekshiruvdan utkazilib, ulardan roppa-rosa k donasi sifatli ekanligi aniqlandi. SHu ma’lumotlarga asosan noma’lum r extimollik xakida ma’lum bir xulosalar chikarish mumkin. Bu matematik statistikaning masalalaridan biridir.

Bu Misoldan extimolliklar nazariyasi va matematik statistika masalalari bir-biriga teskari deb aytish mumkin. Extimollik nazariyasi biror A xodisa xakida uning ustida kuzatuv, tajriba utkazilgunga kadar xulosa chikarishga imkon beradi. Matematik statistika esa bu A xodisa xakida uning ustida utkazilgan kuzatuv, tajriba natijalari asosida xulosa chikaradi.

SHunday qilib matematik statistika,extimolliklar nazariyasiga asoslangan holda, tasodifiy xodisa yoki miqdorlarni ular ustida utkazilgan kuzatuv natijalariga asosan urganuvchi fandir.

Matematik statistikaning asosiy masalalaridan bir nechtasini keltiramiz:

1. Tasodifiy X miqdor ustida utkazilgan kuzatuv natijalaridan foydalanib, uning noma’lum F(x) taqsimot funktsiyasi xakida xulosalar chikarish. Bu taqsimotni baholash masalasi deb ataladi.
2. X tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi $F(x,a_1,a_2,\ldots,a_m)$ ko’rinishda bo’lib, $a_1,a_2,\ldots,a_m$ noma’lum parametrlarga boglik bo’lsin. Bu holda parametrlarning qiymatlarini kuzatuv natijalariga asosan baholashga to’g’ri keladi.
   Bu parametrlarni baholash masalasi deyiladi.
3. Ma’lum bir muloxazalarga asosan taqsimot funktsiyasi F(x) deb taxmin kilinmokda. Kuzatuv natijalariga asosan bu taxmin to’g’ri yoki noto’g’ri ekanligi xakida xulosa chikarishimiz lozim.
   Bu statistik taxminlarni tekshirish masalasi deyiladi.
4. Ikkita X va Y tasodifiy miqdorlar ustida utkazilgan kuzatuv natijalariga asosan ular boglik yoki boglik emas, bogliklik kuchi va ko’rinishi to’g’risida xulosalar chikarish talab etiladi.
   Bu korrelyatsion va regression masala deyiladi.

Endi matematik statistikaning asosiy tushunchalariga o’tamiz.

T A ‘ R I F 1 : O’rganilayotgan X tasodifiy miqdorning kurilayotgan ob’ektda mumkin bo’lgan barcha qiymatlar to’plami *bosh to’plam* , undagi elementlar soni esa bosh to’plamning *hajmi* deb ataladi.

Bosh to’plam hajmi chekli yoki cheksiz bo’lishi mumkin. Masalan, korxonada 120 ishchi bo’lib, X ularning har birini kun davomida ishlab chikargan maxsulotlar sonini ifodalasa, bu holda bosh to’plam hajmi chekli va 120 ga teng bo’ladi. Agarda X orqali avtomatda kadoklanayotgan sariyog ogirligini (gr.) belgilasak, bu holda, masalan, $X \in [195,205]$ bo’lib, bosh to’plam hajmi cheksiz bo’ladi.

T A ‘ R I F 2 : O’rganilayotgan X tasodifiy miqdorning tekshiruvda kuzatilgan qiymatlar to’plami *tanlanma to’plam* yoki kiskacha *tanlanma*, undagi elementlar soni esa *tanlanma hajmi* deb ataladi.

Ta’rifdan kelib chikadiki, tanlanma bosh to’plamning qismi (to’plam osti) bo’lib, amaliy nuqtai-nazardan uning hajmi doimo chekli bo’ladi.

T A ‘ R I F 3 : Agarda tanlanma o’rganilayotgan X tasodifiy miqdor bo’yicha bosh to’plamni nisbatan to’g’ri ifodalasa, u *reprezentativ* (vakolatli) *tanlanma* deyiladi.

Masalan, partiyadagi 100 dona maxsulotdan 85 donasi sifatli, kolgani sifatsiz bo’lsin. SHu partiyadan 10 dona maxsulot olindi, ya’ni hajmi 10 bo’lgan tanlanma hosil kilindi. SHu tanlanma bo’yicha partiyadagi sifatli maxsulotlar ulushi % qiymati xakida xulosa chikarish talab etilsin. Agarda tanlanmaga 10 dona faqat sifatsiz yoki aksincha, 10 dona faqat sifatli maxsulotlar tushgan bo’lsa, partiyadagi sifatli maxsulotlar ulushi 0% yoki 100% degan noto’g’ri xulosalar kelib chikadi. SHunday qilib, bu ikkala tanlanma reprezentativ bulmaydi. Bu Misolda tanlanma reprezentativ bo’lishi uchun unda taxminan 15% sifatsiz va 85% sifatli maxsulot bo’lishi kerak.

Tanlanmaning reprezentativligini ikki usulda amalga oshirish mumkin:

1. tanlanma hajmini katta qilib olish;
2. tanlanmaga elementlarni bosh to’plamdan tasodifiy ravishda olish;

Bu shartlarda tanlanmaning reprezentativ bo’lishi extimolliklar nazariyasining katta sonlar qonuniga asosan kelib chikadi.

Tanlanma ikki xil yo’l bilan hosil kilinishi mumkin va mos ravishda takroriy yoki notakroriy tanlanma deb ataladi.

T A ‘ R I F 4 : Agarda bosh to’plamdan kuzatuv uchun tanlab olingan element tekshiruvdan keyin bosh to’plamga kaytarilsa (kaytarilmasa), natijada hosil bo’lgan tanlanma *takroriy (notakroriy)* deb ataladi.

SHunday qilib takroriy tanlanmada bosh to’plamning elementi bir necha marta katnashishi mumkin. Notakroriy tanlanmada esa bosh to’plamning elementi faqat bir marta katnashishi mumkin.

Takrorlash uchun savollar::

1. Matematik statistika predmeti nimadan iborat ?
2. Matematik statistikaning asosiy masalalariga Misol keltiring.
3. Bosh to’plam va uning hajmi qanday ta’riflanadi ?
4. Tanlanma va uning hajmi qanday ta’riflanadi ?

5. Kachon tanlanma reprezentativ deyiladi ?
6. Takroriy va notakroriy tanlanma qanday amalga oshiriladi ?

16.2. STATISTIK TAQSIMOTLAR.

Tayanch iboralar : Varianta, chastota, nisbiy chastota, statistik taqsimot qonuni, empirik taqsimot funktsiyasi, poligon, gistogramma.

R e j a :

1. Statistik taqsimot qonuni.
2. Empirik taqsimot funktsiyasi.
3. Empirik taqsimot funktsiyasi xossalari.
4. Kuzatuv natijalari poligoni.
5. Kuzatuv natijalari gistogrammasi.

Adabiyotlar:

1. .U. Soatov. “Oliy matematika” II qism. Toshkent. «O’qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 14-bob, § 47-48 ,313- 317 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral xisob. 2-tom, Toshkent, «O’qituvchi», 1974 yil. X X bob, §28, 543-546 betlar.

Tekshirilayotgan X belgining kuzatilgan qiymatlari

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n \qquad (1)$$

bo’lib, hajmi n bo’lgan tanlanmani tashkil etsin. Bu erda x_i , i =1,2,…,n, *variantalar* deb ataladi.

(1) tanlanmadagi variantalarni usib borish tartibida joylashtirishdan hosil kilingan

$$x_1^* \le x_2^* \le ... \le x_n^* \qquad (2)$$

ketma-ketlik *variatsion kator* deyiladi.

(1) tanlanmadagi turli qiymatli variantalarni $x_1, x_2, ..., x_m$ va ularning takrorlanishlar sonini $n_1, n_2, ..., n_m$ deb belgilaymiz. Bu holda n_i; i =1,2,…,m, sonlar *chastotalar* deb ataladi va ular

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n \qquad (3)$$

tenglikni kanoatlantiradi. Bunda n – tanlanma hajmidir. Bu holda tanlanmani ushbu

x_i	x_1	X_2	….	x_m
n_i	n_1	N_2	….	n_m

(4)

jadval ko’rinishda ifodalash mumkin va u X belgining berilgan tanlanma bo’yicha *statistik taqsimot qonuni* deb ataladi. Ko’pincha n_i chastota urniga *nisbiy chastota* deb ataladigan $w_i = n_i/n$ sonlardan foydalaniladi. Bu holda statistik taqsimot qonuni

x_i	x_1	x_2	….	x_m
w_i	w_1	w_2	….	w_m

(5) ko'rinishda bo'ladi va unda

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_m = 1 \qquad (6)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

M i s o l : Dukonda kun davomida sotilgan televizorlar soni X bo'lsin. 10 kun davomida utkazilgan kuzatuvlarda

5, 2, 4, 0, 2, 5, 0, 4, 1, 2

natijalardan iborat tanlanma olindi. Bu tanlanmaning variatsion katori

0, 0, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 5, 5

bo'yicha undagi turli variantalar

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5,$$

ularning chastotalari

$$n_1 = 2,\ n_2 = 1,\ n_3 = 3,\ n_4 = 2,\ n_5 = 2,$$

nisbiy chastotalari

$$w_1 = 0.2,\ w_2 = 0.1,\ w_3 = 0.3,\ w_4 = 0.2,\ w_5 = 0.2$$

ekanligini topamiz. Demak bu tanlanma bo'yicha X belgining statistik taqsimot qonuni quyidagicha bo'ladi :

x_i	0	1	2	4	5
n_i	2	1`	3	2	2
w_i	0,2	0,1	0,3	0,2	0,1

Bu erda

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 2+1+3+2+2=10 = n$$

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = 0,2+0,1+0,3+0,2+0,2 = 1$$

tengliklar bajariladi.

Endi ixtiyoriy x xakikiy soni uchun n_x orqali (1) tanlanmadagi qiymati x sondan kichik bo'lgan variantalar sonini belgilaymiz. Bu n_x sonini (2) variatsion katordan aniqlash osonrok bo'lishini ta'kidlab o'tamiz.

Bu holda (n – tanlanma hajmi)

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n} \qquad (7)$$

formula barcha xakikiy sonlar to'plamida aniqlangan funktsiyani ifodalaydi.

Bu funktsiya quyidagi xossalarga ega:

I . $0 \le F_n^*(x) \le 1, x \in (-\infty, \infty)$

Bu xossa $0 \le n_x \le n$ ekanligidan kelib chikadi.

II. $F_n^*(x)$ kamaymovchi funktsiya , ya'ni $x_1 < x_2$ bo'lsa, u holda $F_n^*(x_1) \le F_n^*(x_2)$

Bu xossa $x_1 < x_2$ bo'lganda $n_{x_1} \le n_{x_2}$ ekanligidan kelib chikadi.

III. . $F_n^*(x)=0$,Agar $x \le x_1^*$ bo'lsa. Bunda x_1^* - tanlanmaning variatsion katoridagi birinchi elementni bildirib, kuzatuv natijalarining eng kichik qiymatini ifodalaydi.

Bu xossa $x \le x_1^*$ bo'lganda n_x =0 ekanligidan kelib chikadi.

Jumladan , doimo $F_n^*(-\infty)=0$ munosabat o'rinli.

IV. $F_n^*(x)=1$, Agar $x > x_n^*$ bo'lsa. Bu erda x_n^* variatsion katordagi oxirgi element bo'lib, kuzatuv natijalarining eng katta qiymatiga teng bo'ladi.

Bu xossa $x > x_n^*$ bo'lganda n_x =n ekanligidan kelib chikadi.

Jumladan, doimo $F_n^*(+\infty)=1$ munosabat o'rinlidir.

Bu erdan $F_n^*(x)$ xossalari taqsimot funktsiyasi xossalariga uxshashligi kelib chikadi. Bu uxshashlik bejiz bulmasdan, katta sonlar qonunining Bernulli teoremasiga asosan ixtiyoriy kichik ε>0 va har qanday $x \in (-\infty,\infty)$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|F_n^*(x)-F(x)\right|<\varepsilon)=1$$

munosabat o'rinli ekanligi kelib chikadi. Bu erda F(x) qaralayotgan X belgining taqsimot funktsiyasini bildiradi. Sh sababli $F_n^*(x)$ o'rganilayotgan X belgining berilgan tanlanma bo'yicha <u>*empirik taqsimot funktsiyasi*</u> deyiladi va noma'lum F(x) taqsimot funktsiyasi uchun baxo sifatida, ya'ni F(x)≈ $F_n^*(x)$ deb karaladi.

Bizning Misolda empirik taqsimot funktsiyasi

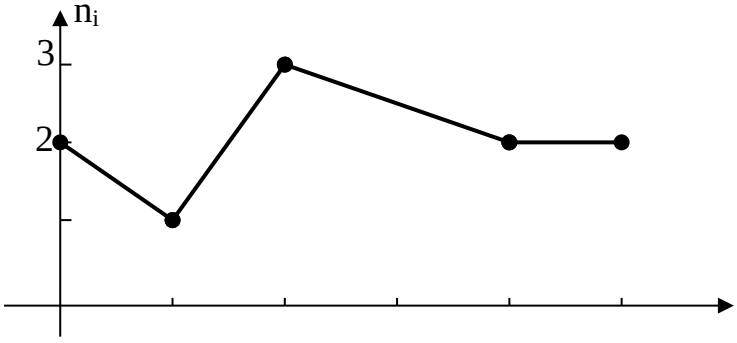
$$F_{10}^*(x)=\begin{cases} 0, x \le 0 \\ 0{,}2, 0 < x \le 1 \\ 0{,}3, 1 < x \le 2 \\ 0{,}6, 2 < x \le 4 \\ 0{,}8, 4 < x \le 5 \\ 1, x > 5 \end{cases}$$

ko'rinishda bo'lib, uning grafigi pogonasimon bo'ladi.

Tanlanmaning taqsimotini grafik ravishda ifodalash uchun poligon va gistogrammadan foydalaniladi.

XOY Dekart koordinatalar sistemasini kiritib, uning abstsissalar o'qiga x_i , i = 1,2,…,m, variatalarni,ordinatalar o'qiga ega n_i chastotalarni yoki w_i nisbiy chastotalarni joylashtiramiz. Sungra koordinata tekisligida (x_i , n_i) yoki (x_i , w_i) i =1,2,…,m, nuqtalarni topamiz va ularni ketma-ket to'g'ri chiziq kesmalari bilan tutashtiramiz. Natijada hosil bo'lgan sinik chiziq chastotalar yoki nisbiy chastotalar <u>*poligoni*</u> deyiladi.

Bizning Misolda chastotalar poligoni quyidagicha bo'ladi :



1

0 1 2 3 4 5 x_i

Agarda tanlanma hajmi n katta yoki X belgi uzluksiz tasodifiy miqdordan iborat bo'lsa, poligon urniga gistogramma chiziladi.
Buning uchun X belgining kuzatilgan qiymatlari joylashgan $(x_1^*, x_m^*)=(x_{min}, x_{max})$ oraliq k ta teng h uzunlikdagi Δ_1 , Δ_2 ,…, Δ_k intervallarga bulinadi. Bu intervallarga tushgan variantalar soni m_1 , m_2,…,m_k bo'lsin. Endi asoslari h uzunlikli Δ_i intervallardan, balandliklari esa m_i /h, i=1,2,…,k bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklarni chizamiz. Bu to'g'ri to'rtburchaklar hosil qilgan pogonasimon shakl <u>*chastotalar gistogrammasi*</u> deyiladi va uning yuzasi

$$S=\frac{m_1}{h}\cdot h+\frac{m_2}{h}\cdot h+...+\frac{m_k}{h}\cdot h=m_1+m_2+...+m_k=n,$$

bo'ladi. Bu erda n-tanlanma hajmidir.
Ko'pincha m_i chastotalar urniga $v_i=m_i/n$ nisbiy chastotalar olinib, <u>*nisbiy chastotalar gistogrammasi*</u> hosil qilinadi va uning yuzasi

$$S=\frac{v_1}{h}\cdot h+\frac{v_2}{h}\cdot h+...+\frac{v_k}{h}\cdot h=v_1+v_2+...+v_k=1$$

bo'ladi.
M i s o l : X belgi ustida utkazilgan 30 ta kuzatuv natijalari quyidagicha:

3.5	2.3	-1.5	5.0	3.2	1.7	1.0	-1.8	4.2	2.2
0.7	5.4	2.9	1.7	-0.6	3.2	6.0	2.9	3.3	0.7
-2.0	3.5	1.5	4.7	5.0	3.1	1.8	2.7	3.5	1.7

Bu erda x_{min} = -2 , x_{max} =6 va tanlanmani gistogrammasini hosil qilish uchun kuzatuvlar joylashgan [-2,6] kesmani k=4 ta bir xil uzunlikli oraliqlarga ajratamiz. Bu oraliqlar uzunligi

$$h=\frac{x_{max}-x_{min}}{k}=\frac{6-(-2)}{4}=2$$

oraliqlar esa

$$\Delta_1=[-2,0)\ ,\quad \Delta_2=[0,2)\ ,\quad \Delta_3=[2,4)\ ,\quad \Delta_4=[4,6]$$

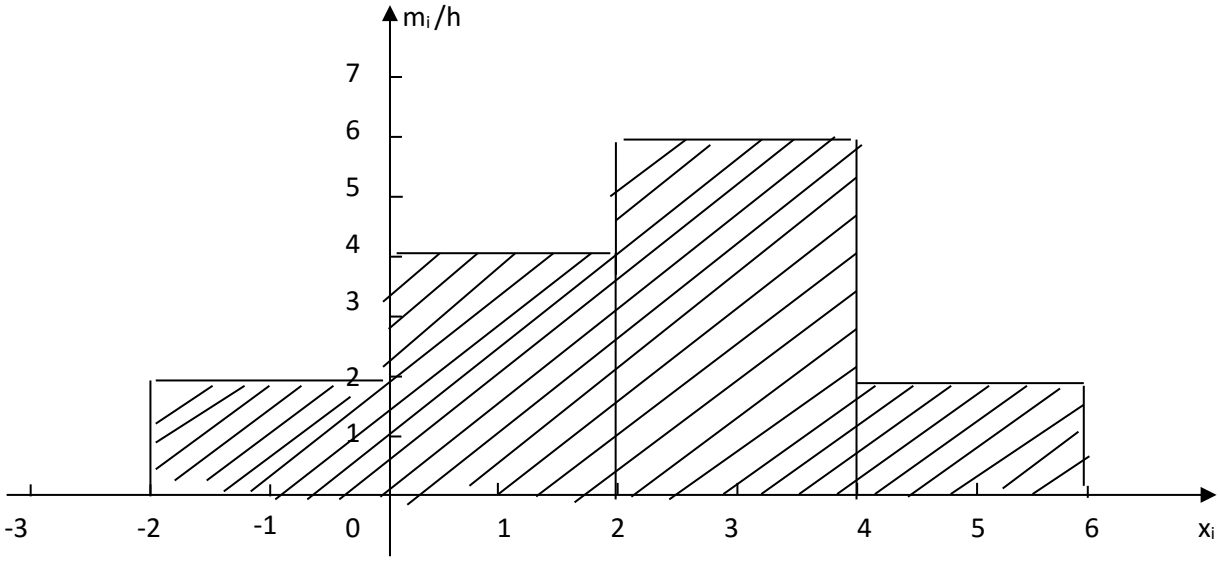
bo'ladi. Tanlanma bo'yicha

$$m_1=4\ ,\ m_2=8\ ,\ m_3=12\ ,\ m_4=6$$

ekanligini topamiz. Bu holda

$$\frac{m_1}{h}=\frac{4}{2}=2\quad ,\quad \frac{m_2}{h}=\frac{8}{2}=4\quad ,\quad \frac{m_3}{h}=\frac{12}{2}=6\ ,\quad \frac{m_4}{h}=\frac{6}{2}=3$$

bo'ladi va chastotalar gistogrammasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:



Shuni ta'kidlab utish kerakki, nisbiy chastotalar gistogrammasini noma'lum $f(x) = F'(x)$ zichlik funktsiyasi uchun baxo sifatida karash mumkin. Tanlanma hajmi n oshgan va intervallar uzunligi h kamaygan sari bu baxo yaxshilanib boradi.

Takrorlash uchun savollar::

1. Statistik taqsimot qonuni qanday aniqlanadi ?
2. Empirik taqsimot funktsiyasi qanday aniqlanadi ?
3. Empirik taqsimot funktsiyasi nima maqsadda qo'llaniladi ?
4. Poligon deganda nima tushuniladi ?
5. Gistogramma ta'rifini keltiring va uni nima maqsadda kullanilishini kursating.

16.3. STATISTIK BAHOLAR VA ULARNING TURLARI.

Tayanch iboralar : Statistik baxo, siljimagan va siljigan baxo, asosli baxo, effektiv baxo, xakikatga maksimal uxshashlik usuli va baxosi.

R e j a:

1. Statistik baxo.
2. Statistik baxoga kuyiladigan talablar.
3. Xakikatga maksimal uxshashlik usuli.

Adabiyotlar:

1. .U. Soatov. “Oliy matematika” II qism. Toshkent. «O’qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 14-bob, § 49-51 , 318- 321 betlar.

Ko’p hollarda o’rganilayotgan X tasodifiy miqdor taqsimotining ko’rinishi maьlum bo’lib, ammo uni to’liq aniqlovchi parametrlar qiymati nomaьlum bo’ladi. Masalan, biror kursatkichni ulchashda yo’l kuyilayotgan xatolik X tasodifiy bo’lib,u normal taqsimotga ega bo’lishini nazariy ko’rsatish mumkin . Ammo bu $N(a,\sigma^2)$ normal taqsimotni tula aniqlash uchun kerak bo’lgan a va σ^2 parametrlar qiymatini nazariy topib bulmaydi. SHu sababli bu parametrlarning takribiy qiymatlarini statistik kuzatuv natijalariga asosan topish masalasi paydo bo’ladi.

Soddalik uchun X tasodifiy miqdor taqsimoti bitta noma’lum θ parametrga boglik va F(x,θ) ko’rinishda deb xisoblaymiz. Qaralayotgan X tasodifiy miqdor ustida utkazilgan *n* ta boglikmas kuzatuv natijalari $x_1, x_2, ..., x_n$ sonlardan iborat bo’lib,ular hajmi *n* bo’lgan tanlanmani hosil kiladi. Statistik nazariyada bu kuzatuv natijalari o’zaro boglikmas,bir xil F(x,θ) taqsimotga ega bo’lgan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketlik kabi karaladi.

<u>T A ‘ R I F 1:</u> Statistik kuzatuv natijalaridan tuzilgan ixtiyoriy $h(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ funktsiya <u>*statistika*</u> yoki <u>*statistik baxo*</u> deb ataladi.

Har bir statistik baxo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tasodifiy miqdorlardan hosil kilingani uchun uning uzi ham tasodifiy miqdordan iborat bo’ladi. Amaliy tatbiklarda $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tasodifiy miqdorlarlar urniga $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tanlanma olinadi va bu holda $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ statistik baxoning kuzatilgan qiymatidan iborat bo’lib, aniq bir songa teng bo’ladi.

Nomaьlum θ parametr uchun olingan statistik baxoni $\theta^*(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ yoki kiskacha θ_n^* kabi belgilaymiz. Bunda θ_n^* tasodifiy miqdor, θ esa tasodifiy bo’lmagan noma’lum bir son bo’lgani uchun, $\theta_n^* \approx \theta$ takribiy tenglik xakida gapirib bulmaydi. SHu sababli θ_n^* statistik baxoni θ parametr qiymatiga yakinligini faqat extimollar bilan boglik tushunchalar orqali ifodalash mumkin.

<u>T A ‘ R I F 2 :</u> Noma’lum θ parametr uchun olingan θ_n^* statistik baxo <u>*siljimagan*</u> deyiladi, Agarda uning matematik kutilishi

$$M(\theta_n^*) = \theta \qquad (1)$$

shartni kanoatlantirsa.

(1) shart θ_n^* statistik baxo sistematik, ya’ni doimiy xatolikka ega bulmasdan, faqat tasodifiy xatoliklarga ega ekanligini ifodalaydi. Agarda $M(\theta_n^*) = \theta+\varepsilon$ $(\varepsilon \neq 0)$ bo’lsa, statistik baxo <u>*siljigan*</u> deb ataladi. Masalan, biror kattalik santimetrli chizgichda ulchanayotgan bo’lsa, unda albatta sistematik ε (|ε|<1sm) xatolikka yo’l kuyilayotgan bo’ladi va shu sababli bu holda qaralayotgan baholar siljigan bo’ladi.

<u>T A ‘ R I F 3 :</u> Statistik baxo θ_n^* <u>*asosli*</u> deyiladi, Agarda ixtiyoriy ε>0 kichik son uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\theta_n^* - \theta_n^* - \theta\right| < \varepsilon\right\} = 1 \qquad (2)$$

shart bajarilsa.

SHunday qilib asosli baxo uchun $n\to\infty$ da extimollik bo'yicha $\theta_n^*\to\theta$ munosabat o'rinli bo'ladi va ma'lum ma'noda θ_n^* qiymatlari noma'lum θ songa yakin deb aytish mumkin.

<u>T E O R E M A :</u> Agarda θ_n^* siljimagan statistik baxo bo'lib, uning dispersiyasi

$$\lim_{n\to\infty} D(\theta_n^*) = 0 \qquad (3)$$

shartni kanoatlantirsa, u asosli baxo bo'ladi.

<u>T A ' R I F 4 :</u> Berilgan n xajmli tanlanmada θ parametr uchun mavjud barcha statistik baholar ichida eng kichik dispersiyaga ega bo'lgan θ_n^* baxo <u>*effektiv*</u> (samarali) deb ataladi.

Effektiv θ_n^* baxoning qiymatlari θ parametrga boshka baholarga nisbatan yakinrok joylashgan deb tushunish mumkin.

<u>T A ' R I F 5 :</u> Agarda θ_n^* statistik baxo

$$\lim_{n\to\infty} M(\theta_n^*) = \theta \qquad (4)$$

shartni kanoatlantirsa, u <u>*asimptotik siljimagan baxo*</u> deyiladi.

Agarda $\tilde{\theta}_n$ noma'lum θ parametr uchun effektiv, θ_n^* esa boshka bir baxo bo'lsa, $e_n = D(\tilde{\theta}_n)/D(\theta_n^*)$ con shu baxoning effektivligi deb ataladi. Ma'nosiga ko'ra, har qanday θ_n^* baxo va ixtiyoriy n uchun $0\le e_n\le 1$ munosabat o'rinli bo'ladi.

<u>T A ' R I F 6:</u> Agarda θ_n^* statistik baxo uchun

$$\lim_{n\to\infty} e_n = 1 \qquad (5)$$

shart bajarilsa, u <u>*asimptotik effektiv baxo*</u> deyiladi.

Ko'p hollarda asimptotik siljimagan yoki effektiv baholarni topish masalasi nisbatan osonrok xal etilishi mumkin .

Endi $\Im(x,\theta)$ taqsimotdagi noma'lum θ parametr uchun $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanma bo'yicha θ_n^* statistik baxo hosil qilish usullardan birini ko'rib o'tamiz . Bu <u>*xakikatga*</u> <u>*maksimal uxshashlik*</u> usuli deb ataladi. Bunda dastlab berilgan taqsimot ko'rinishi va tanlanma bo'yicha

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta) = \Im(x_1,\theta)\cdot \Im(x_2,\theta)\cdots \Im(x_n,\theta) \qquad (6)$$

funktsiyani hosil qilamiz. (6) <u>*xakikatga maksimal uxshashlik funktsiyasi*</u> deyiladi va u n ta boglikmas kuzatuvlarda X tasodifiy miqdorimiz $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlar qabul qilish extimolligi xakida ma'lumot beradi. Bu funktsiyada $x_1, x_2, ..., x_n$ kuzatuv natijalari bo'lgani uchun uzgarmas sonlar sifatida karaladi va θ o'zgaruvchi deb olinadi. Noma'lum θ parametrga θ_n^* baxo sifatida (6) funktsiyaga eng katta (maksimum) qiymat beruvchi θ o'zgaruvchi qiymati olinadi va u <u>*xakikatga maksimal uxshashlik*</u> baxosi deb ataladi.

Demak, xakikatga maksimal uxshashlik baxosi (6) funktsiyaning kritik nuqtasi kabi aniqlanadi va shu sababli, ekstremumlar nazariyasiga asosan,

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta)}{\partial \theta} = 0 \qquad (7)$$

tenglamadan topiladi. (7) <u>*xakikatga maksimal uxshashlik tenglamasi*</u> deyiladi. Xisoblashlarni osonlashtirish maksadida ba'zi taqsimotlar uchun (7) tenglama urniga

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta)}{\partial \theta} = 0 \qquad (8)$$

tenglamani ham karash mumkin. Bunga sabab sho'qi, (7) va (8) tenglama ildizlari doimo bir xil bo'ladi.

Agarda X tasodifiy miqdorning taqsimoti $\Im(x, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$ ko'rinishda bo'lib, m ta θ_i , i =1,2,..,m, noma'lum parametrlarga boglik bo'lsa, ular uchun xakikatga maksimal uxshashlik baholari $\theta_n^*(i)$, i=1,2,…,m.

$$\frac{\partial L(x_1, x_2 ..., x_n, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_m)}{\partial \theta_i} = 0 \ , \quad i = 1,2,\ldots,m$$

yoki

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2 ..., x_n, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_m)}{\partial \theta_i} = 0 \ , \quad i = 1,2,\ldots,m$$

tenglamalar sistemasidan topiladi.

Isbotlash mumkinki, $\Im(x)$ taqsimotlarning ancha keng sinflari uchun xakikatga maksimal uxshashlik baholari asosli va asimptotik effektiv bo'ladi. Ammo ular siljigan baholar bo'lishi mumkin.

Takrorlash uchun savollar:

1. Statistik baxo deganda nima tushuniladi ?
2. Statistik baxo kachon siljimagan yoki siljigan deyiladi ?
3. Qanday statistik baxo asosli deyiladi ?
4. Kachon statistik baxo effektiv deyiladi ?
5. Xakikatga maksimal uxshashlik usulini moxiyati nimadan iborat ?

16.4. NORMAL TAQSIMOT PARAMETRLARINI BAHOLASH. TANLANMA O'RTA QIYMAT VA DISPERSIYA.

Tayanch iboralar: Tanlanma o'rta qiymat, tanlanma dispersiya, tuzatilgan tanlanma dispersiya.

R e j a :

1. Normal taqsimot uchun xakikatga maksimal uxshashlik usulini kullash.
2. Tanlanma o'rta qiymat va uning ahamiyati.
3. Tanlanma o'rta qiymat xossalari.
4. Tanlanma dispersiya va uning moxiyati.
5. Tanlanma dispersiya xossalari.

Adabiyotlar:

1. .U. Soatov. "Oliy matematika" II qism. Toshkent. «O'qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 14-bob, § 49-51 ,318- 321 betlar.
2. Piskunov N.S. Differentsial va integral xisob. 2-tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1974 yil. X X bob, §29-30, 547-552 betlar.

O'rganilayotgan X tasodifiy miqdor $N(a,\sigma^2)$ normal taqsimotga ega bo'lib,uning a va σ^2 noma'lum parametrlarini $X_1, X_2,..., X_n$ tanlanma bo'yicha xakikatga maksimal uxshashlik usulida baholash masalasini ko'ramiz. Bu erda normal taqsimotning

$$f(x,a,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

zichlik formulasidan foydalanamiz.Bu holda xakikatga maksimal uxshashlik funktsiyasini topamiz:

$$L(X_1,X_2,...,X_n,a,\sigma^2)=f(X_1,a,\sigma^2)\cdot f(X_2,a,\sigma^2)\cdots f(X_n,a,\sigma^2)=$$

$$=(2\pi\sigma^2)^{-n/2}exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2\right\} .$$

Xisoblashlarni soddalashtirish maksadida bu funktsiyaning natural logarifmini karaymiz:

$$\ln L(X_1,X_2...,X_n,a,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln 2\pi\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2$$

Bu funktsiyadan a va σ^2 parametrlar bo'yicha hosilalar olib, ushbu

$$\frac{\partial \ln L(X_1,X_2,...,X_n a,\sigma^2)}{\partial a}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_1-a)=0 ,$$

$$\frac{\partial \ln L(X_1,X_2,...,X_n a,\sigma^2)}{\partial a}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(X_1-a)^2=0$$

xakikatga maksimal uxshashlik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemani echib, a va σ^2 parametrlar uchun $a_n^*, (\sigma^2)_n^*$ xakikatga maksimal uxshashlik baholarini topamiz:

$$a_n^* = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad (1)$$

$$(\sigma^2)_n^* = \frac{1}{n}\left[(X_1 - a_n^*)^2 + (X_2 - a_n^*)^2 + ... + (X_n - a_n^*)^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - a_n^*)^2 \qquad (2)$$

Agarda X tasodifiy miqdor $N(a, \sigma^2)$ normal taqsimotga ega bo'lsa, u holda

a = M(X) , σ^2 = D(X)

bo'ladi. Demak (1) va (2) formulalar bilan aniqlanadigan $a_n^*, (\sigma^2)_n^*$ normal taqsimotning o'rta qiymati (matematik kutilishi) M(X) va dispersiyasi D(X) uchun statistik baholar bo'ladi. Ular normal taqsimotdan tashkari boshka juda ko'p taqsimotlarning o'rta qiymati va dispersisi uchun ham yaxshi statistik baxo bo'lishini ko'rsatish mumkin. SHu sababli (1) va (2) formulalar orqali topiladigan statistik baholar mos ravishda <u>*tanlanma o'rta qiymat*</u> va <u>*tanlanma dispersiya*</u> deb ataladi hamda $\overline{X}$ va S^2 kabi belgilanadi :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad , \quad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \qquad (3)$$

Bu baholarning xossalarini urganamiz.

Buning uchun $X_i, i = 1,2,..., n,$ boglikmas, bir xil taksimlangan tasodifiy miqdorlar bo'lib,

$$M(X_i) = a \quad , \; D(X_i) = \sigma^2, \quad i = 1,2,..., n$$

ekanligidan foydalanamiz.

$$M(\overline{X}) = M(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a = a \qquad (4)$$

Demak $\overline{X}$ tanlanma o'rta qiymat noma'lum M(X)=a matematik kutilish uchun siljimagan baxo bo'ladi.

$$D(\overline{X}) = D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \qquad (5)$$

Bu erdan

$$\lim_{n\to\infty} D(\overline{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$$

ekanligi kelib chikadi. Demak $\overline{X}$ tanlanma o'rta qiymat a= M(X) matematik kutilish uchun asosli baxo bo'ladi.

Bundan tashkari normal taqsimot uchun bu baxo effektiv,boshka taqsimotlarning ko'pi uchun esa asimptotik effektiv bo'lishini Isbotlash mumkin.

S^2 tanlanma dispersiya xossalarini urganish uchun uni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left[(X_i - a) - (\overline{X} - a)\right]^2 =$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2-\frac{2}{n}(\overline{X}-a)\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)+\frac{1}{n}\cdot n(\overline{X}-a)^2=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2-\frac{2}{n}(\overline{X}-a)\cdot n(\overline{X}-a)+(\overline{X}-a)^2=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2-(\overline{X}-a)^2 \qquad (6)$$

Bu erda

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)=\sum_{i=1}^{n}X_i-na=n\overline{X}-na=n(\overline{X}-a)$$

ekanligidan foydalanildi.

Endi,dispersiya ta'rifiga asosan

$$M(X_i-a)^2=M(X_i-M(X_i))^2=D(X_i)=\sigma^2$$

va (4)-(5) tengliklarga asosan

$$M(\overline{X}-a)^2=M(\overline{X}-M(\overline{X}))^2=D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$$

ekanligidan foydalanib, (6) tenglikdan ushbu natijani olamiz:

$$M(S^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i-a)^2-M(\overline{X}-a)^2=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2-\frac{\sigma^2}{n}=\frac{1}{n}n\sigma^2-\frac{\sigma^2}{n}=\frac{n-1}{n}\sigma^2 \qquad (7)$$

Demak,

$$M(S^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2$$

va S^2 tanlanma dispersiya noma'lum $D(X)=\sigma^2$ dispersiya uchun siljigan baxo bo'ladi. Ammo

$$\lim_{n\to\infty}M(S^2)=\sigma^2\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=\sigma^2 \quad ,$$

ya'ni S^2 asimptotik siljimagan baxo bo'ladi. SHu sababli tanlanma hajmi n etarli katta bo'lsa, S^2 baxoni siljimagan deb xisoblash mumkin. Agar tanlanma hajmi n katta bulmasa, σ^2 dispersiya uchun siljimagan baxo sifatida

$$(S^2)^*=\frac{n}{n-1}S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \qquad (8)$$

baxoni karash mumkin. Bu baxo <u>*tuzatilgan tanlanma dispersiya*</u> deb ataladi va uning uchun

$$M(S^2)^*=M(\frac{n}{n-1}S^2)=\frac{n}{n-1}M(S^2)=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\sigma^2=\sigma^2$$

munosabat o'rinli bo'ladi, ya'ni $(S^2)^*$ siljimagan baxo bo'ladi. S^2 va $(S^2)^*$ tanlanma dispersiyalar $\sigma^2 = D(X)$ dispersiya uchun asosli baxo bo'lishini ko'rsatish mumkin.

Agarda X ustidagi kuzatuv natijalari statistik taqsimot qonuni orqali berilgan bo'lsa, tanlanma o'rta qiymat $\overline{X}$ va tanlanma dispersiya S^2

$$\overline{X} = \frac{\sum_{\kappa=1}^{m} X_\kappa n_\kappa}{\sum_{\kappa=1}^{m} n_\kappa}, \qquad S^2 = \frac{\sum_{\kappa=1}^{m} (X_\kappa - \overline{X})^2 n_\kappa}{\sum_{\kappa=1}^{m} n_\kappa} \qquad (9)$$

formulalar bilan topiladi. Bu erda X_k , k =1,2,…,m, qaralayotgan X tasodifiy miqdorning o'zaro teng bo'lmagan kuzatilgan qiymatlarini, n_k esa shu qiymatlar chastotasini ifodalaydi.

Masalan, X ustidagi n=10 ta kuzatuv natijalari

x_k	1	1	2	5
n_k	1	3	4	2

statistik taqsimot qonuni bilan berilgan bo'lsin. Bu holda

$$\overline{X} = \frac{-1\cdot 1 + 1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 5\cdot 2}{1+3+4+2} = \frac{20}{10} = 2 \ ,$$

$$S^2 = \frac{(-1-2)^2\cdot 1 + (1-2)^2\cdot 3 + (2-2)^2\cdot 4 + (5-2)^2\cdot 2}{1+3+4+2} = \frac{30}{10} = 3$$

Takrorlash uchun savollar::

1. Tanlanma o'rta qiymat qanday aniqlanadi va nima maqsadda qo'llaniladi?
2. Tanlanma o'rta qiymat qanday xossalarga ega?
3. Tanlanma dispersiya qanday aniqlanadi va nima maqsadda qo'llaniladi?
4. Tanlanma dispersiya kamchiligi nimadan iborat va u qanday tuzatiladi?
5. Tuzatilgan tanlanma dispersiya formulasini yozing.

16.5. INTERVAL BAHOLAR VA ULARNI NORMAL TAQSIMOT UCHUN YASASH.

Tayanch iboralar : Nuqtaviy baholar, baxo aniqligi, ishonchli extimollik, interval baxo.

R e j a :

1. Nuqtaviy baholar va ularning aniqligi.
2. Ishonchlilik extimolligi va interval baxo.
3. Interval baxoni yasash algoritmi.
4. Normal taqsimot parametrlari uchun interval baholar.

Adabiyotlar:

1. **.U. Soatov. "Oliy matematika" II qism. Toshkent. «O'qituvchi» nashriyoti, 1994 y. 14-bob, § 52 ,321- 324 betlar.**

O'rganilayotgan X tasodifiy miqdor taqsimotini aniqlovchi noma'lum θ parametr uchun X_1 , X_2 ,…,X_n tanlanma bo'yicha

$$\theta_n^* = \theta^*(X_1, X_2, ..., X_n)$$

statistik baxo ko'rilgan bo'lsin. Har bir tanlanmada bu baxo qiymati biror sondan iborat bo'ladi.

T A ' R I F 1 : Qiymatlari sondan iborat bo'lgan statistik baholar ***nuqtaviy*** deb ataladi.

Masalan, tanlanma o'rta qiymat $\overline{X}$ yoki tanlanma dispersiya S^2 nuqtaviy baholardir.

Noma'lum θ parametr uchun θ_n^* statistik baxo bo'lsa, $\left|\theta - \theta_n^*\right|$ ifoda qanchalik kichik bo'lsa, θ_n^* baxo shunchalik yaxshi deb xisoblash tabiiydir.

T A ' R I F 2 : Agarda $\left|\theta - \theta_n^*\right| < \delta$ bo'lsa, δ son θ_n^* ***baxoning aniqligi*** deyiladi.

Ravshanki, $\delta > 0$ soni qanchalik kichik bo'lsa, θ_n^* baxo θ parametrni shunchalik aniqroq ifodalaydi. Ammo θ_n^* baxo tasodifiy miqdor bo'lgani uchun, $\left|\theta - \theta_n^*\right| < \delta$ tengsizlikni bajarilishi tasodifiy xodisa bo'lib, bu xodisani yuz berishini faqat ma'lum bir extimollik bilan kafolatlash mumkin.

T A ' R I F 3 : Ushbu

$$R\{\left|\theta - \theta_n^*\right| < \delta\} = \gamma$$

tenglik bilan aniqlangan γ soni θ_n^* baxoning ***ishonchlilik extimolligi*** deb ataladi.

Odatda γ ishonchlilik extimolligi qiymati oldindan beriladi va ko'pinchalik 0.95 yoki 0.99 yoki 0.999 deb olinadi.

T A ' R I F 4 : Noma'lum θ parametrni biror extimollik bilan o'z ichiga olgan (α,β) oraliq shu parametrning ***interval baxosi*** deb ataladi.

Tanlanma hajmi n unchalik katta bo'lmaganda nuqtaviy baholarning xatoligi ancha qo'pol bo'lishi mumkin. SHu sababli bunday hollarda interval baholardan foydalaniladi.

Interval baholarni ko'rilgan θ_n^* nuqtaviy baxo va berilgan γ ishonchlilik extimolligi orqali quyidagicha topish mumkin :

1) θ_n^* nuqtaviy baxoning taqsimotini topamiz;
2) topilgan taqsimotdan foydalanib, (1) tenglikdan δ baxo aniqligini aniqlaymiz;
3) $\left|\theta - \theta_n^*\right| < \delta$ tengsizlikni unga teng kuchli

$$\theta_n^* - \delta < \theta < \theta_n^* + \delta$$

qush tengsizlik bilan almashtirib, chegaralari

$$\alpha = \theta_n^* - \delta\ ,\ \ \beta = \theta_n^* + \delta$$

bo'lgan interval baxoni hosil qilamiz.

Topilgan (θ_n^*-δ , θ_n^*+δ) interval baxo (1) tenglikka asosan noma'lum θ parametrni γ extimollik bilan o'z ichiga oladi va γ ishonchli extimollikli ***<u>ishonchli interval</u>*** deb ataladi.

Endi N(a,σ^2) normal taqsimot parametrlari uchun γ ishonchli extimollikli ishonchli intervallar topish masalasini ko'ramiz.

Bu erda uch holni ko'rib o'tamiz.

<u>I hol.</u> Taqsimotning σ^2 =D(X) dispersiyasi ma'lum bo'lib, a=M(X) noma'lum o'rta qiymati uchun ishonchli interval topish talab etiladi.

Bu erda noma'lum a parametr uchun nuqtaviy baxo sifatida $\overline{X}$ tanlanma o'rta qiymatni olamiz va normal taqsimotli bosh to'plam uchun $\overline{X}$ tasodifiy miqdor ham normal taqsimotga ega bo'lishidan foydalanamiz (Bu yasdiqni Isbotsiz qabul qilamiz). Oldingi ma'ruzada

$$M(\overline{X})=a \quad , D(\overline{X}) = \sigma^2/n$$

ekanligi 1gan edi. Demak $\overline{X}$ tanlanma o'rta qiymat N(a,σ^2/n) taqsimotga ega. SHu sababli, oldingi ma'ruzalarga asosan,

$$P\left\{\left|\overline{X}-a\right|<\delta\right\}=2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu erdan t=$\delta\sqrt{n}/\sigma$ deb olib va berilgan γ ishonchlilik extimolligidan foydalanib

$$P\left\{\left|\overline{X}-a\right|<\delta\right\}=2\Phi(t)=\gamma \Rightarrow \Phi(t)=\gamma/2 \qquad (2)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama ildizini F(x) Laplas funktsiyasi jadvali yordamida topamiz. Bu holda baxo aniqligi δ = tσ/$\sqrt{n}$ tenglik bilan aniqlanadi. Demak a = M(X) uchun ishonchli interval chegaralari

$$\alpha=\overline{X}-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}=\overline{X}-\delta \ , \ \beta=\overline{X}+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}=\overline{X}+\delta \qquad (3)$$

tengliklar orqali topiladi.

<u>M i s o l :</u> σ^2 =9 , n=36 , $\overline{X}$ =4.1 , γ = 0,95 bo'lsin. Bu holda F(t)=0,95/2=0,475 tenglama ildizi (Laplas funktsiyasi jadvali orqali) t=1.96 ekanligini topamiz. Bu erdan baxo aniqligi

$$\delta=\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}=\frac{3\cdot 1{,}96}{\sqrt{36}}=0{,}98$$

ishonchli interval chegaralari (3) ga asosan

$$\alpha=\overline{X}-\delta=4.1-0.98=3.12 ,$$
$$\beta=\overline{X}+\delta=4.1+0.98=5.08$$

ekanligini aniqlaymiz. SHunday qilib, γ=0.95 extimollik bilan (3.12,5.08) interval noma'lum a=M(X) o'rta qiymatni uz ichiga oladi.

<u>II hol.</u> σ^2=D(X) dispersiya noma'lum bo'lib, a=M(X) noma'lum o'rta qiymat uchun ishonchli interval topish kerak.

Bu holda dastlab berilgan n xajmli tanlanma bo'yicha $\overline{X}$ tanlanma o'rta qiymat va S^2 tuzatilgan tanlanma dispersiyani xisoblaymiz va

$(\overline{X}-a)\sqrt{n}/S$ tasodifiy miqdor parametri k = n-1 bo'lgan St'yudent taqsimotiga ega bo'lishidan foydalanamiz (bu yasdiqni Isbotsiz qabul qilamiz). Berilgan γ ishonchlilik extimolligi bo'yicha St'yudent taqsimoti jadvalidan foydalanib,

$$P\left\{\left|(\overline{X}-a)\sqrt{n}/S\right|<t\right\}=\gamma \qquad (4)$$

tenglamadan t qiymatini topamiz. Odatda berilgan n va γ bo'yicha t qiymati maxsus jadvaldan topiladi. Bu holda $\overline{X}$ baxo aniqligi δ=St/$\sqrt{n}$, ishonchli interval chegaralari esa

$$\alpha=\overline{X}-\delta=\overline{X}-\frac{St}{\sqrt{n}}\ ,\ \beta=\overline{X}+\delta=\overline{X}+\frac{St}{\sqrt{n}} \qquad (5)$$

formulalardan topiladi.

<u>M i s o l :</u> n=16, $\overline{X}$ =20.2 , S^2=0,64 , γ=0,95 bo'lsin. Jadvaldan n=16 , γ=0.95 uchun t=2.13 bo'lishini topamiz. Demak $\overline{X}$ =20.2 baxoning aniqligi (0.95 extimollik bilan)

$$\delta=\frac{St}{\sqrt{n}}=\frac{0{,}8\cdot 2{,}13}{\sqrt{16}}=0{,}46,$$

ishonchli interval chegaralari (5) ga asosan

$$\alpha=\overline{X}-\delta=20{,}2-0{,}426=19{,}774,$$
$$\beta=\overline{X}+\delta=20{,}2+0{,}426=20{,}626$$

bo'ladi. SHunday qilib 0,95 extimollik bilan (19.774,20.626) interval noma'lum $a=M(X)$ parametrni koplaydi.

<u>III hol.</u> σ^2=D(X) noma'lum dispersiya uchun ishonchli interval tuzish talab etilsin. Bu erda $a=M(X)$ ma'lum yoki noma'lum bo'lishi ham mumkin.

Dastlab hajmi n bo'lgan tanlanma bo'yicha S^2 tanlanma dispersiyani topamiz. Bu holda nS^2/σ^2 tasodifiy miqdor parametri k = n-1 bo'lgan xi-kvadrat deb ataladigan taqsimotga ega bo'ladi. Bu yasdiqni Isbotsiz qabul qilamiz. Bu taqsimotning jadvalidan foydalanib, berilgan γ ishonchlilik extimolligi bo'yicha ushbu

$$P\left\{\frac{nS^2}{\sigma^2}<x_1\right\}=\frac{1-\gamma}{2} \qquad (6)$$

$$P\left\{\frac{nS^2}{\sigma^2}<x_2\right\}=\frac{1+\gamma}{2} \qquad (7)$$

tenglamalardan x_1 va x_2 sonlarini topamiz. Bu holda

$$P\left\{x_1<\frac{nS^2}{\sigma^2}<x_2\right\}=P\left\{\frac{nS^2}{\sigma^2}<x_2\right\}-P\left\{\frac{nS^2}{\sigma^2}<x_1\right\}=\frac{1+\gamma}{2}-\frac{1-\gamma}{2}=\gamma$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Shu holda

$$x_1<\frac{nS^2}{\sigma^2}<x_2 \qquad \text{va} \qquad \frac{nS^2}{x_2}<\sigma^2<\frac{nS^2}{x_1}$$

qush tengsizliklar teng kuchli bo'lgani uchun, izlangan ishonchli interval chegaralari

$$\alpha = \frac{nS^2}{x_2}, \quad \beta = \frac{nS^2}{x_1} \qquad (8)$$

ekanligini topamiz.

M i s o l : n=22, S^2 =0,0289, γ=0,98 bo'lsin. Bu holda (1-γ)/2 =0,01, (1+γ)/2 =0,99, k = n-1=21 bo'lgani uchun xi-kvadrat taqsimot jadvallaridan foydalanib, (6) va (7) tenglama ildizlari x_1=8,90, x_2=38,9 ekanligini topamiz. SHu sababli ishonchli interval chegaralari (8)ga asosan

$$\alpha = \frac{22 \cdot 0{,}0289}{38{,}9} = 0{,}0163, \qquad \beta = \frac{22 \cdot 0{,}0289}{8{,}9} = 0{,}0714$$

bo'ladi. Demak 0,98 extimollik bilan (0.0163,0.0714) interval noma'lum σ^2 dispersiyani koplaydi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Qanday baholar nuqtaviy deb ataladi ?
2. Baxoning aniqligi qanday aniqlanadi ?
3. Interval baxo qanday ta'riflanadi ?
4. Ishonchli extimollik va ishonchli interval nima ?
5. Nuqtaviy baxo orqali interval baxo tuzish boskichlarini kursating.
6. Dispersiyasi ma'lum normal taqsimotning o'rta qiymati uchun interval baxo qanday topiladi?
7. Dispersiyasi noma'lum normal taqsimotning o'rta qiymati uchun interval baxo qanday topiladi?
8. Normal taqsimotning noma'lum dispersiyasi uchun interval baxo qanday topiladi?

ADABIYOTLAR.

1. **СОАТОВ Ё.У.** «Олий математика», I жилд, Тошкент, Укитувчи, 1992 й.
2. **ПИСКУНОВ Н.С.** «Дифференциал ва интеграл хисоб», 1-том, Тошкент, Укитувчи, 1972 й.
3. **МАДРАХИМОВ Х.С., ГАНИЕВ А.Г., МУМИНОВ Н.С.** «Аналитик геометрия ва чизикли алгебра», Тошкент, Укитувчи, 1988 й.
4. **САРИМСОКОВ Т.А.** «Хакикий узгарувчининг функциялари назарияси» Тошкент, Укитувчи, 1968 й.
5. **Т. ЁКУБОВ** «Математик логика элементлари», Тошкент, Укитувчи, 1983й.
6. **РАЖАБОВ Ф., НУРМЕТОВ А.** «Аналитик геометрия ва чизикли алгебра», Тошкент, Укитувчи, 1990 й.
7. **ШНЕЙДЕР В.Е., СЛУЦКИЙ А.И., ШУМОВ А.С.** «Олий математика киска курси», I том, Тошкент, Укитувчи, 1983 й.
8. **НАЗАРОВ Р.Н., ТОШПУЛАТОВ Б.Т., ДУСУМБЕТОВ А.Д.** «Алгебра ва сонлар назарияси», I кисм, Тошкент, Укитувчи, 1993 й.
9. **НАЗАРОВ Х., ОСТОНОВ К.** «Математика тарихи», Тошкент, Укитувчи, 1996 й.
10. **ИБРОХИМОВ Р**., «Математикадан масалалар туплами», Тошкент, Укитувчи, 1990 й.
11. **АЗЛАРОВ Т., МАНСУРОВ Х.** «Математик анализ», I кисм, Тошкент, Укитувчи, 1994 й.
12. **ТУЛАГАНОВ Т., НОРМАТОВ А.** «Математикадан практикум», Тошкент, Укитувчи, 1983 й.
13. **ТОЖИЕВ Ш.** «Олий математикадан масалалар туплами», Тошкент, Укитувчи, 2003 й.