ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА
УРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

БУХОРО МУҲАНДИСЛИК-ТЕХНОЛОГИЯ
ИНСТИТУТИ

«ОЛИЙ МАТЕМАТИКА» кафедраси

«Олий математика» фанидан техника олий ўқув юрти
йуналишидаги талабалари учун кузги мавсум

МАЪРУЗАЛАР ТУПЛАМИ

БУХОРО–2018 й

Ушбу маърузалар матни “Олий математика” кафедрасининг 2018 йил 20 август кунги йигилишида (мажлис баёни №1) ва институт-услубий кенгашининг 2018 йил 29 август кунги мажлисида (мажлис баёни № 1) муҳокама этилди ва чоп этишга тавсия килинди.

МУАЛЛИФЛАР: **Расулов Н.П.**
БухМТИ “Олий математика”
Кафедраси, доцент
Юнусов Ғ.Ғ.
БухМТИ “Олий математика”
кафедрасининг мудири, доцент
ё
ТАКРИЗЧИЛАР: **Маматова Н.**
БухДУ кафедра мудири, доцент.

Ушбу маърузалар тупламида «Олий математика» курсининг «Куп узгарувчили функциялар», «Дифференциал тенгламалар», «Сонли каторлар» ва «Даражали каторлар» булимлари буйича мавзулар ёритилган. Бу тупламдан технологик ва техник йуналишлари буйича таълим олувчи бакалаврлар фойдаланишлари мумкин.

МУНДАРИЖА.

Кириш

Мамлакатимизда кабул килинган ва амалга оширилаётган “Кадрлар тайёрлаш миллий дастури” буйича таълим ислихотининг II боскичидаги энг асосий вазифа - тайёрланаётган мутахассисларнинг сифатини оширишдан иборатдир.

Юкори малакали, ракобатбардош, замонавий кадрлаш тайёрлашда уларга бериладиган математик билимлар катта ахамиятга эга. Шу сабабли техник, технологик ва иктисод йуналишлари буйича таълим олувчи бакалаврларнинг укув режаларида «Олий математика» фанини укитиш кузда тутилган. Талабалар учун бу фанни укитишда ушбу максадлар куйилади:

1. Касбий фаолият учун етарли хажмда математик билимлар ва усуллар хакида тушунчалар ва куникмалар хосил килиш.
2. Абстракт ва мантикий фикрлаш кобилиятларини хосил килиш ва ривожлантириш.
3. Математика ва унинг амалий тадбиклари буйича адабиётларни мустакил урганиш оркали билимлар доирасини кенгайтира олиш.
4. Ихтисослик буйича умумкасбий ва махсус фанларни узлаштириш учун керакли математик пойдеворни хосил килиш.
5. Касб фаолияти жараёнида пайдо буладиган амалий масалаларнинг математик моделларини ишлаб чикиш ва уни тахлил этиб, тегишли хуласалар чикариш.

«Олий математика» фани куйидаги асосий булимлардан иборат.

1. Тупламлар назарияси.
2. Математик мантик.
3. Олий алгебра элементлари.
4. Чизикли алгебра.
5. Аналитик геометрия.
6. Дифференциал хисоб.
7. Интеграл хисоб.
8. Куп узгарувчили функциялар.
9. Каррали, эгри чизикли ва сирт интеграллари.
10. Оддий дифференциал тенгламалар.
11. Майдон назарияси элементлари.
12. Комплекс узгарувчили функциялар назарияси.
13. Операцион хисоб.
14. Математик физик тенгламалар.
15. Эхтимоллар назарияси ва математик статистика.

Ушбу маърузалар тупламида «Олий математика» фанининг куп узгарувчили функциялар, оддий дифференциал тенгламалар, сонли ва даражали каторлар булимлари буйича фанни ишчи укув дастурида кузда тутилган мавзулар ёритилган.

«Олий математика» фанидан I курснинг бахорги мавсуми учун ишчи укув дастури

I. Аник интеграл.

Аник интеграл тушунчасига келтирувчи масалалар. Аник интегралнинг таърифи ва унинг хоссалари. Ньютон-Лейбниц формуласи. Аник интегрални хисоблаш усуллари. Аник интегрални такрибий хисоблаш формулалари. Хосмас интеграллар ва уларнинг хоссалари. Аник интегралнинг геометрик, физик ва механик масалаларни ечишга татбиклари.

II. Куп узгарувчили функциялар.

Куп узгарувчили функциялар таърифи. Аникланиш сохаси. Куп узгарувчили функциянинг лимити ва узлуксизлиги. Хусусий хосилалар. Тула хосила, тула дифференциал. Юкори тартибли хусусий хосилалар. Куп узгарувчили функциянингэкстремуми. Градиент, йуналиш буйича хосила.

III. Оддий дифференциал тенгламалар.

Дифференциал тенгламаларга келтирувчи. Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар. Ечимларнинг мавжудлиги ва ягоналиги хакидаги Коши теоремаси. Узгарувчилари ажраладиган, чизикли, бир жинсли биринчи тартибли дифференциал тенгламаларни интеграллаш. Юкори тартибли дифференциал тенгламалар. Тартибини пасайтириш мумкин булган тенгламалар. Юкори тартибли, узгармас коэффициентли, биржинсли тенгламалар. Иккинчи тартибли, узгармас коэффициентли биржинслимас тенгламалар. Дифференциал тенгламаларнинг системаси

IV. Сонли ва даражали каторлар.

Сонли каторлар таърифи, хусусий йигиндилар. Катор якинлашишининг зарурий шарти. Мусбат хадли каторлар якинлашишининг етарли шартлари. Ишоралари навбатлашувчи каторлар. Лейбниц аломати. Ишоралари узгарувчан каторлар. Абсолют ва шартли якинлашиш. Функцияли каторлар. Даражали каторларнинг якинлашиш сохаси ва уни топиш усуллари. Функцияли каторларни дифференциаллаш ва интеграллаш. Тейлор ва Маклерон каторлар. Биномиал каторлар.

1 – М А Ъ Р У З А

АНИК ИНТЕГРАЛ ТУШУНЧАСИГА ОЛИБ КЕЛУВЧИ МАСАЛАЛАР. АНИК ИНТЕГРАЛНИНГ ТАЪРИФИ ВА ХОССАЛАРИ.

Таянч иборалар: Эгри чизикли трапеция, интеграл йигинди, аник интеграл, аник интегралнинг геометрик маъноси, аник интегралнинг механик маъноси.

Маъруза режаси:

1. Эгри чизикли трапециянинг юзини хисоблаш масаласи.
2. Узгарувчи куч бажарадиган иш хакидаги масала.
3. Аник интегралнинг таърифи.
4. Аник интегралнинг асосий хоссалари.

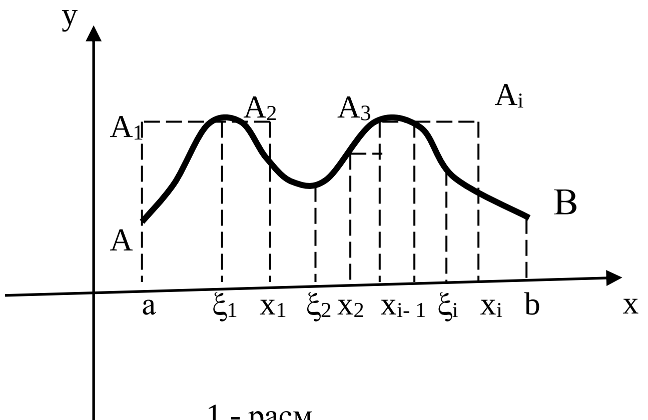
Адабиётлар:

[1]. VI боб, §12-13 [2]. X боб, §1-3

1.Эгри чизикли трапеция юзини хисоблаш масаласи.

$y=f(x)$ узлуксиз функция, $x=a$, $x=b$, $y=0$ чизиклар билан чегараланган фигурага эгри чизикли трапеция деб айтамиз.

Шу фигура юзини хисоблаш масаласини курайлик. [a; b] сегментни абциссалари $x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1}$ булган n-1 та нукта ёрдамида булакларга буламиз. Бунда $a=x_0$ ва $b=x_n$ деймиз. Булиш нукталари [a; b] сегментни n та кичик сегментларга булади: $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2]$,… $[x_{i-1};x_i]$,…. $[x_{n-1};x_n]$ Булиниш нукталаридан ОУ укига параллел тугри чизиклар утказиб, эгри чизикли трапецияни n та кичик эгри чизикли трапецияларга ажратамиз, (1-расм). Равшанки эгри чизикли трапеция АВba нинг юзи n та кичик эгри чизикли трапецияларнинг юзалари йигиндисига тенг. Агар АВba шаклнинг юзи S, асоси $[x_{i-1}; x_i]$, (i=1,2,3,…,n) булган эгри чизикли кичик трапецияларнинг юзалари ΔS_i билан белгиланса, куйидаги тенглик уринли булади:



1 - расм

$$S=\Delta S_1+\Delta S_2+\ldots+\Delta S_i+\ldots+\Delta S_n \qquad \text{ёки} \qquad S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i \qquad (1)$$

ΔS_i ларнинг аник кийматини топиб булмайди, такрибий кийматларни аниклаш учун эса $[x_{i-1};\ x_i]$ сегментларнинг хар бирида ихтиёрий ξ_i нуктадан танлаб оламиз ва бу нукталарда $f(\xi_i)$ ординаталарини ясаймиз.1-расмдан куйидагилар куринади:

$\Delta S_1\approx f(\xi_1)(x_1-x_0)$, $\Delta S_2\approx f(\xi_2)(x_2-x_1),\ldots$, $\Delta S_i\approx f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$,…,
$\Delta S_n\approx f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$ (2)

Агар $x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$ белгини киритиб (2) ларни (1) га куйсак ABba эгри чизикли трапеция юзининг такрибий кийматини топган буламиз:

$$S\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (3)$$

(3) ифодага f (x) функциянинг [a; b] кесмадаги интеграл йигиндиси деб айтилади.

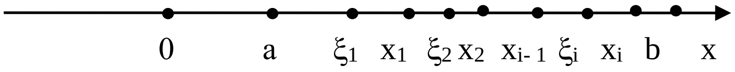
2.Узгарувчи куч бажарган иш хакидаги масала.

Механикадан маълумки, агар F куч таъсирида моддий нукта масофада силжиган булса, бажарилган иш A куйидагига тенг:

$$A= F\cdot\lambda \qquad (4)$$

Bu erda F kuch kattaligi bilan xam, yunalishi bilan xam uzgarmas.Endi F kuch uzgarmas yunalishni saklasa xam, sonli kattaligi buyicha uzgargan xolni karaymiz. Aytaylik, bu kuch ta'sirida moddiy nukta kuchning ta'sir chizigi yunalishi buylab yunalgan tugri chizik buylab xarakat kilsin. Bunda F kuch bajargan ishni xisoblash masalasini karaymiz.

Moddiy nukta xarakat kilayotgan chizikni OX uki deb kabul kilamiz:



2 - расм

Йулнинг бошлангич ва охирги нукталари мос равишда a ва b, ($a<b$) абциссаларга эга булсин. $[a;b]$ сегментнинг хар бир нуктасида кучнинг катталиги маълум кийматга , яъни $F=f(x)$ функция каби булади. Бу функцияни узлуксиз деб хисоблаймиз. $[a;\ b]$ сегментни n та кичик сегментларга буламиз.(2- расм).

$$[x_0;\ x_1],\ [x_1;\ x_2],\ \ldots\ [x_{i-1};\ x_i]\ldots\ [x_{n-1};\ x_n].$$
$$(a=x_o,\ b=x_n)$$

Уларнинг узунлиги мос равишда

$$\Delta x_1= x_1-x_0,\ \Delta x_2= x_2-x_1,\ldots,\ \Delta x_i=x_i-x_{i-1}\ ,\ldots,\ \Delta x_n=x_n-x_{n-1} \qquad \text{булади.}$$

$[x_{i-1};\ x_i]$ сегментда F кучнинг бажарган иши ΔA_i булсин, у холда $[a;\ b]$ кесмада бажарилган иш куйидагига тенг:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \qquad (5)$$

ΔA_i ларнинг аник кийматини хисоблаб булмайди. Уларнинг такрибий кийматларини хисоблаш учун $[x_{i-1}; x_i]$ ларнинг хар бирида ихтиёрий ξ_i нукта танлаб оламиз ва шу нукталардаги $F=f(x)$ функциянинг $f(\xi_i)$ кийматларини хисоблаймиз. (4) формулага кура

$$\Delta A_1 \approx f(\xi_1)\,\Delta x_1,\ \Delta A_2 \approx f(\xi_2)\,\Delta x_2, \ldots, \Delta A_i \approx f(\xi_i)\,\Delta x_i, \ldots, \Delta A_n \approx f(\xi_n)\,\Delta x_n$$

Буларни (5) тенгликка куйиб изланаётган ишнинг такрибий кийматини интеграл йигинди куринишида топамиз:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

3.Аник интегралнинг таърифи.

$y=f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада узлуксиз булсин. $x_0=x_1< x_2 <\ldots< x_i < \ldots < b=x_n$ булиниш нукталари ёрдамида $[a;b]$ кесмани n та кичик сегментларга ажратамиз.(1-расм).

$$[x_0; x_1], [x_1; x_2], \ldots [x_{i-1}; x_i]\ldots [x_{n-1}; x_n].$$

$[x_{i-1}; x_i]$, i=1,2,3,…,n кичик сегментларнинг хар бирида ихтиёрий ξ_i нуктани танлаймиз. $f(x)$ функциянинг ξ_i нуктадаги кийматини мос сегментнинг $x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$ узунлигига купайтириб (3) каби интеграл йигинди тузамиз.

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (6)$$

ТАЪРИФ: Агар S интеграл йигинди $[a; b]$ кесмани $[x_{i-1}; x_i]$ сегментларга ажратиш усулига ва уларнинг хар бирида ξ_i нуктанинг танлашига боглик булмайдиган I лимитга эга булсак, у холда бу I сон $[a; b]$ кесмада $f(x)$ функциядан олинган аник интеграл дейилади.ва $\int_a^в f(x)dx$ каби белгиланади:

$$I = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Бу ерда a – куйи чегара, b – юкори чегара, $f(x)$ – интеграл остидаги функция, $f(x)dx$ – интеграл остидаги ифода дейилади.

$[a ; b]$ кесмада $\int_a^b f(x)dx$ интеграли мавжуд булган f (x) функция бу кесмада интегралланувчи функция деб айтилади.

Олдин курилганларга асосан эгри чизикли трапециянинг аник юзаси S ва узгарувчи куч бажарган ишнинг аник микдори

$$S = \int_a^b f(x)dx, \quad A = \int_a^b f(x)dx$$

каби топилиши келиб чикади. Бу аник интегралнинг геометрик ва механик маъноларини ифодалайди.

Функция интегралининг иктисодий маъноси.

z=f(t) функция вакт утиши билан кайсидир ишлаб чикаришнинг унумдорлигини ифодаласин. [0,T] вакт оралигида ишлаб чикарилган махсулот микдори u нинг кийматини топамиз. У холда, Δt вакт ичида ишлаб чикарилган махсулот микдори $\Delta u=f(t)\cdot\Delta t$ билан аникланади ёки $\Delta u\approx f(\xi)\cdot\Delta t$, $\xi\in[t, t+\Delta t]$

[0,T] ораликни $0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=T$ нукталар ёрдамида ораликларга буламиз, у холда $\Delta u_i\approx f(\xi_i)\cdot\Delta t_i$, $\xi_i\in[t_i, t_{i-1}+\Delta t_i]$ ва $u=\sum_{i=1}^{n}\Delta u_i=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta t_i$, $u=\lim_{\max\Delta t_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta t_i=\int_0^T f(t)dt$ хосил булади. Демак, агар f(t) мехнат унумдорлиги булса, у холда $\int_0^T f(t)dt$ интеграл [0,T] давр оралигида ишлаб чикарилган махсулот микдорини ифодалайди.

4.Аник интеграл хоссалари.

а) $\int_a^a f(x)dx=0$ б) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$

в) $\int_a^b (f+\varphi)dx=\int_a^b fdx+\int_a^b \varphi dx$

г) $a<c<b$ учун $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

д) Агар $[a; b]$ кесмада $f(x)\geq 0$ *булса* $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

е) Агар $[a; b]$ кесмада $f(x)\geq\varphi(x)$ *булса* $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b \varphi(x)dx$

ж) Агар $f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада узлуксиз булса, у холда бу кесмада шундай ξ нукта топиладики, бунда $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$ булади.

Уз-узини назорат этиш саволлари:

1. Аник интеграл таърифини келтиринг.
2. Аник интегралнинг кандай хоссалари бор?
3. Аник интегралнинг геометрик маъноси нимадан иборат?
4. Аник интегралнинг механик маъноси нимадан иборат?
5. Аник интегралнинг иктисодий маъноси нимадан иборат?

2 – М А Ъ Р У З А

НЬЮТОН –ЛЕЙБНИЦ ФОРМУЛАСИ ВА АНИК ИНТЕГРАЛНИ ХИСОБЛАШ УСУЛЛАРИ.

Таянч иборалар: юкори чегараси узгарувчан булган интеграл, Ньютон-Лейбниц формуласи, булаклаб интеграллаш, узгарувчиларни алмаштириш.

Маъруза режаси:

1. Интегралнинг юкори чегараси буйича хосиласи.
2. Аник интеграл учун Ньютон-Лейбниц формуласи.
3. Аник интегрални булаклаб интеграллаш.
4. Аник интегралда узгарувчини алмаштириш.

Адабиётлар:

[1]. **VI боб, §15-18** [2]. **X боб, §4-5**

1.Интегралнинг узгарувчи юкори чегараси буйича хосиласи.

$y=f(x)$ функция $[a;b]$ кесмада узлуксиз булсин . $\int_a^b f(x)dx$ интегрални караймиз.

Агар b юкори чегара узгарувчан х булса, унда юкори чегараси узгарувчан булган интеграл хосил булади:

$$I(x)=\int_a^x f(t)dt$$

1-ТЕОРЕМА : Агар f (x) узлуксиз функция булса ,

$$I'(x)=(\int_a^x f(t)dt)'=f(x)$$

тенглик уринли булади.

Исбот : x аргументга Δx ортирма берамиз. У холда аник интегралнинг хоссасига асосан

$$I(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

I(x) функциянинг ортирмасини ёзамиз:

$$\Delta I(x)=I(x+\Delta x)-I(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$

яъни $$\Delta I(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \qquad (1)$$

Аник интегралнинг олдинги маърузадаги ж) хоссасига асосан (1) интеграл

$$\Delta I = \int_{x}^{X+\Delta X} f(t)dt = f(\xi)(x+\Delta x - x) = f(\xi)\Delta x$$

куринишга келади,бунда ξ нинг киймати x билан $x+\Delta x$ орасида ётади. Хосиланинг таърифига асосан

$$\mathrm{I}'(\mathrm{x}) = \lim_{\Delta X\to 0}\frac{\Delta \mathrm{I}(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta X\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = f(x)$$

($\Delta x\to 0$ интилганда $\xi\to x$ назарга тутилади.)
Теорема исботланди.

2. Ньютон – Лейбниц теоремаси.

ТЕОРЕМА: Агар F(x) узлуксиз f (x) функциянинг бирор бошлангич функцияси булса, у холда

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{b} = \mathrm{F(b)-F}(a)$$

тенглик уринлидир. Бу тенглик **Нъютон-Лейбниц формуласи** дейилади.

Исбот: F(x) функция узлуксиз f (x) функциянинг бирор бошлангич функцияси булсин. I-теоремага асосан $\int_{a}^{x} f(t)dt$ функция хам f(x)функциянинг бошлангич функцияси булади.Аммо, хар кандай иккита бошлангич функция бир-биридан узгармас $\vec{C}$ кушилувчи билан фарк килади:

$$\int_{a}^{x} f(t)dt = \mathrm{F}(x) + \vec{C} \qquad (2)$$

Бу тенгламада $x=a$ деб олсак, аник интегралнинг олдинги маърузадаги а) хоссасига асосан

$$0 = \mathrm{F}(a) + \vec{C}$$

булади.
Демак, $\vec{C}$ =- F (a) булади.
$\vec{C}$ кийматини (2) га куямиз.

$$\int_{a}^{x} f(t)dt = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a)$$

Энди бу тенгликда $x=b$ десак Ньютон-Лейбниц формуласи хосил булади.

$$\int_{a}^{x} f(t)dt = \mathrm{F}(x)\Big| = \mathrm{F}(в) - \mathrm{F}(a) \qquad (3)$$

Теорема исботланди.

Бевосита интеграллаш, дифференциал остига киритиш усуллари худди аникмас интегралдаги сингари булади ва шу сабабли уларни мисоллар оркали курсатамиз:

1-Мисол: $$\int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}$$

2-Мисол: $$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_a^b = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1},\quad n\neq -1$$

3-Мисол: $$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^e \ln x d\ln x = \frac{\ln^2 x}{2}\Bigg|_1^e = \frac{\ln^2 e - \ln^2 1}{2} = \frac{1}{2}\ln^2 e = \frac{1}{2}$$

4-Мисол: $$\int_a^{в} e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x}\Bigg|_a^b = \frac{e^{4в}-e^{4a}}{4}$$

5-Мисол: $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

6-Мисол: $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = arctgx\Big|_0^1 = arctg1 = \frac{\pi}{4}$$

7-Мисол:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot d(1+x^2) = \sqrt{1+x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}} = 2-1=1$$

8-Мисол:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2xdx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2xd2x = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\cos\pi + \frac{1}{2}\cos 0 = 1$$

3.Булаклаб интеграллаш усули.

u ва *v* функциялар *x* нинг дифференциалланувчи функциялари булсин. У холда :

$$d(u\,v)=vdu+udv$$

Бу айниятнинг иккала томонини *a* дан *в* гача интеграллаймиз:

$$\int_a^b d(u,v) = \int_a^b vdu + \int_a^b udv$$

чап томонига Ньютон-Лейбниц формуласини куллагандан кейин охирги тенгликни куйидаги куринишда ёзиш мумкин:

$$\int_a^b u dv = (u, v)\Big|_a^b - \int_a^b v du \qquad (4)$$

(4)- тенглик аник интегрални булаклаб интеграллаш формуласи дейилади.

1-Мисол :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = \begin{bmatrix} x = u, & \cos x dx = dv \\ dx = du, & \sin x = v \end{bmatrix} = x\cdot\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2}$$

2- Мисол :

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \begin{bmatrix} \ln x = u, & \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = dv \\ \dfrac{dx}{x} = du, & 2\sqrt{x} = v \end{bmatrix} = (2\sqrt{x}\ln x)\Big|_1^{e^2} - 2\int_1^{\lambda^2} \sqrt{x}\frac{dx}{x} = 4e - (4\sqrt{x})\Big|_1^{\lambda^2} =$$

=4e-4e+4=4

3-Мисол: -

$$\int_0^{\sqrt{3}} arctgx dx = \begin{bmatrix} arctgx = u, & dx = dv \\ \dfrac{dx}{1+x^2} = du, & x = v \end{bmatrix} = x\cdot arctgx\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\Big|_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{1}{2}\ln 4 = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \ln 2.$$

4. Аник интегралда узгарувчини алмаштириш.

3-ТЕОРЕМА: $\int_a^b f(x)dx$ интегралда $x = \varphi(t)$ тенглик оркали янги t узгарувчи киритилган булсин.

Агар 1) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, 2) $\varphi(t)$ ва $\varphi'(t)$лар $[\alpha,\beta]$ да узлуксиз функциялар булса, 3) $f[\varphi(t)]$ функция $[\alpha,\beta]$ кесмада аникланган ва узлуксиз булса, у холда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (5)$$

булади.

Бу тенглик аник интегралда узгарувчиларни алмаштириш формуласи деб аталади.

Исбот: F(x) функция f (x) функциянинг бошлангич функцияси булсин.

Унда куйидаги тенгликларни ёзиш мумкин:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F((\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

Теорема исботланди.

4-Мисол:

$$\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \begin{bmatrix} \sqrt{x+1} = t, & x = t^2 - 1 \\ dx = 2tdt, & \alpha = 1, \beta = 2 \end{bmatrix} = \int_1^2 \frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{t} =$$

$$=2\int_1^2 (t^2-1)dt = \left(\frac{2x^3}{3} - 2t\right)\Big|_1^2 = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0$$

5-Мисол:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \begin{bmatrix} x = \sin t; dx = \cos tdt, 1 - x^2 = \cos^2 t \\ \alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Уз-узини назорат этиш саволлари:

1. Юкори чегараси узгарувчан интегралнинг хосиласи нимага тенг?

2.Ньютон-Лейбниц формуласини келтириб чикаринг.

3.Аник интегрални булаклаб булаклаб интеграллаш учун формулани келтириб чикаринг.

4. Аник интегралда узгарувчиларни алмаштириш формуласини келтиринг.

3 - МАЪРУЗА

ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАР ХАКИДА ТУШУНЧАЛАР. ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАРНИ ХИСОБЛАШ.

Таянч иборалар: Хосмас интеграл, якинлашувчи хосмас интеграл, узоклашувчи хосмас интеграл.

Маъруза режаси:

1. Чегараси чексиз хосмас интеграл.
2. Чексиз функцияларнинг хосмас интеграллари.

Адабиётлар:

[1]. VI боб, § 24 [2]. X боб, §6

1.Чегараси чексиз хосмас интеграллар.

ТАЪРИФ: [a;∞) интервалда узлуксиз булган *f(x)* функциянинг хосмас интеграли деб

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

лимитга айтилади ва

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

каби белгиланади, яъни

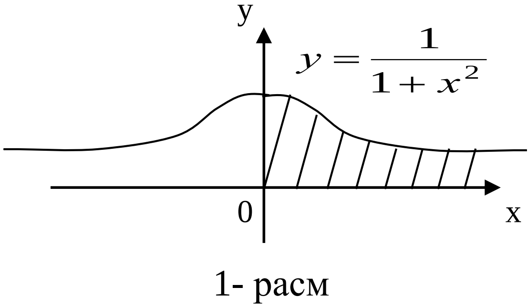
$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^{в} f(x)dx .$$

Агар (1) лимит мавжуд булса, у холда хосмас интеграл якинлашувчи дейилади; агарда курсатилган лимит мавжуд булмаса, хосмас интеграл узоклашувчи дейилади.

(-∞;b], (-∞;∞) интервалларда хосмас интеграл шунга ухшаш аникланади.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \quad .$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)dx .$$



1- расм

Мисол: $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ интегрални хисоблаймиз.

Ечими: $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^в \frac{dx}{1+x^2} =$

$$= \lim_{b\to\infty} arctg\Big|_0^в = \lim_{b\to\infty}(arctgb - arctg0) = \frac{\pi}{2}$$

Каралган интеграл 1-расмда штрихланган чексиз эгри чизикли трапециянинг юзини ифодалайди.

Баъзи бир холларда берилган интегралнинг якинлашувчи ёки узоклашувчи эканини билиш ва унинг кийматини бахолаш етарли булади. Куйидаги теоремалар исботсиз келтирилади.

ТЕОРЕМА: Агар барча $x(x \geq a)$ лар учун $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ –тенгсизликлар бажарилса ва $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx$ якинлашувчи булса, у холда $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ хам якинлашувчи ва $\int\limits_a^\infty f(x)dx \leq \int\limits_a^\infty \varphi(x)dx$ булади.

М и с о л : $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^2)}$ интеграл якинлашувчи эканлиги текширилсин.

Ечими: $x \geq 1$ булганда $\frac{1}{x^2(1+e^2)} < \frac{1}{x^2}$

$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{b\to\infty}(-\frac{1}{x})\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to\infty}(-\frac{!}{b}+1) = 1$ Демак, $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^2)}$ теоремага асосан якинлашувчи экан.

ТЕОРЕМА: Агар барча $x(x \geq a)$ лар учун $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ тенгсизликлар бажарилса ва шу билан бирга $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx$ узоклашувчи булса, у холда $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ интеграл хам узоклашувчи булади.

М и с о л : $\int\limits_1^\infty \frac{x+4}{\sqrt{x^3}}dx$ текширилсин.

Ечими : $\frac{x+4}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$,

аммо

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}(2\sqrt{b} - 2) = \infty$$

Теоремага асосан берилган интеграл узоклашувчи булади.

ТЕОРЕМА: Агар $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ интеграл якинлашувчи булса, $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ интеграл хам якинлашувчи булади. Бу холда $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ интеграл абсолют якинлашувчи интеграл дейилади.

Мисол: $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$ интегралнинг якинлашишини текширинг.

Ечими : $\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \leq \left|\frac{1}{x^3}\right|$ булиши маълум.

Аммо $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim\limits_{b\to\infty}(-\frac{1}{2x^2})\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to\infty}(-\frac{!}{2b^2}+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

Демак юкоридаги теоремаларга асосан $\int\limits_1^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| dx$ интеграл якинлашувчи ва у билан бирга $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$ интеграл хам якинлашувчидир.

2. Чексиз функцияларнинг хосмас интеграллари.

ТАЪРИФ: (a;b] интервалда узлуксиз ва $x=a$ да аникланмаган ёки узилишга эга булган f(x) функциянинг хосмас интеграли деб

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \qquad \textbf{(2)}$$

лимитга айтилади. Агар (2) лимит мавжуд булса, у холда хосмас интеграл якинлашувчи дейилади. Акс холда хосмас интеграл узоклашувчи деб айтилади.

[a;b) интервалда узлуксиз ва $x=b$ да аникланмаган f(x) функциянинг хосмас интеграли хам шунга ухшаш таърифланади:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Мисол: $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ интегрални текширинг.

Ечими : x=0 да функция аникланмаган.

Куйидагилар уринли булади:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2},$$

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}(-\frac{1}{x})\Big|_{-1}^{0-\varepsilon} = -\infty$$

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{0+\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}(-\frac{1}{x})\Big|_{0+\varepsilon}^{1} = \infty.$$

Демак курсатилган хосмас интеграл узоклашувчи экан.

Уз-узини назорат этиш саволлари:

1.Чексиз чегарали хосмас интегрални таърифланг.
2.Качон хосмас интеграл якинлашувчи (узоклашувчи) дейилади?
3.Хосмас интегралнинг хоссаларини келтиринг.
4.Чексиз функцияларнинг хосмас интегралларини таърифланг.

4 – М А Ъ Р У З А

АНИК ИНТЕГРАЛНИ ТАКРИБИЙ ХИСОБЛАШ.

***Таянч иборалар*:** Такрибий хисоблаш, тугри туртбурчак формуласи, трапеция формуласи, Симпсон формуласи.

Маъруза режаси:

1. Тугри туртбурчаклар формуласи ва унинг хатолиги.
2. Трапециялар формуласи ва унинг хатолиги.
3. Симпсон формуласи ва унинг хатолиги.

Адабиётлар:

[1]. VI боб, §19 [2]. XI боб, §5

1) Тугри туртбурчаклар формуласи.

$\int_a^в f(x)dx$ аник интегрални такрибий хисоблаш талаб килинсин. Бунда f (x) берилган [а; в] кесмада узлуксиз функциядир.

[*а*; *в*] кесмани $a=x_0, x_1, x_2,\ldots, x_n=в$ нукталар билан узунлиги Δx булган n та тенг булакларга ажратамиз:

$$\Delta x=\frac{в-\alpha}{n}$$

Сунгра $f(x)$ функциянинг $x_0, x_1, x_2,\ldots, x_n$ нукталардаги кийматларини $y_0, y_1, y_2,\ldots, y_{n-1}, y_n$, оркали белгилаймиз, яъни

$$y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),\ldots,\ y_n=f(x_n)$$

Ушбу йигиндиларни тузамиз:

$$y_0\cdot\Delta x+y_1\cdot\Delta x+\ldots+y_{n-1}\cdot\Delta x$$

$$y_1\cdot\Delta x+y_2\cdot\Delta x+\ldots+y_n\cdot\Delta x$$

Бу йигиндиларнинг хар бири $f(x)$ учун [*а*; *в*] кесмада интеграл йигинди булади ва шунинг учун $\int_a^в f(x)dx$ интегралнинг такрибий ифода этади:

$$\int_a^в f(x)dx\approx\frac{в-a}{n}(y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})$$

$$\int_a^в f(x)dx\approx\frac{в-a}{n}(y_1+y_2+\ldots+y_n)$$

Булар тугри туртбурчаклар формуласи деб айтиладилар.

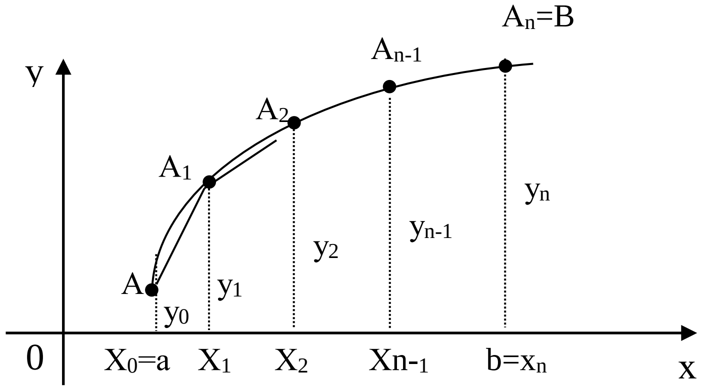
Тугри туртбурчаклар формуласининг хатолиги

$$\Delta \le M_1 \frac{(b-a)^2}{4n}$$

формула билан бахоланади. Бунда M_1 интеграл остидаги функция хосиласи абсолют кийматининг интеграллаш оралигидаги энг катта кийматини ифодалайди.

2) Трапециялар формуласи.

Агар берилган y=f(x) эгри чизикни тугри туртбурчаклар формуласида булгандек зинапоясимон чизик билан алмаштирмасдан, балки ички чизилган синик чизик (ватар) билан алмаштирсак, у холда аник интегралнинг анча аникрок киймати хосил булишини кутиш табиийдир.



Бу холда эгри чизикли aAB$в$ трапециянинг юзи юкоридан

$A\,A_1$, $A_1\,A_2$,…, A_{n-1} B

ватарлар билан чегараланган тугри чизикли трапециялар юзларининг йигиндисига тенг булади.

Аммо бу трапециялардан биринчисининг юзи $\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x$, иккинчининг юзи $\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x$ ва хоказо булгани сабабли

$$\int_a^в f(x)dx \approx \left(\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x + ... + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x \right)$$

ёки

$$\int_a^в f(x)dx \approx \frac{в-a}{n}(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1})$$

Бу эса трапециялар формуласидир.

Трапециялар формуласининг хатолиги

$$\Delta \le M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

формула билан бахоланади. Бунда M_2 интеграл остидаги функциянинг II тартибли хосиласи абсолют кийматининг интеграллаш оралигидаги энг катта кийматини ифодалайди.

3) Симпсон формуласи.

Бу ерда [a; $в$] кесмани a=x_0, x_1, x_2,…, x_n=$в$ нукталар билан узунлиги Δx булган n та тенг булакларга ажратамиз:

$$\Delta x = \frac{в - \alpha}{n}$$

Сунгра функциянинг бу нукталардаги $y_0=f\ (x_0)$, $y_1=f\ (x_1),\ldots,\ y_n=f\ (x_n)$ кийматларини хисоблаймиз. Бунда булиниш нукталарнинг сони n жуфт булсин деб талаб киламиз. $y=f(x)$ эгри чизикнинг x_{i-1}, x_i, x_{i+1} абсцисссали A_{i-1}, A_i, A_{i+1} нукталари орасидаги ёйини шу нукталардан утувчи парабола билан алмаштирамиз. Унда куйидаги муносабат уринли булади:

$$\int_a^в f(x)dx \approx \frac{в - a}{3n}(y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + 4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})).$$

Бу формула Симпсон формуласи булиб, уни исботсиз кабул киламиз.

Симпсон формуласининг хатолиги

$$\Delta \leq M_4 \frac{(b-a)^5}{2880n^4}$$

формула билан бахоланади. Бунда M_4 интеграл остидаги функциянинг IV тартибли хосиласи абсолют кийматининг интеграллаш оралигидаги энг катта кийматини ифодалайди.

Куриб утилган формулалар математикада квадратур формулалар деб аталадиган умумий формулаларнинг хусусий холлари булиб хисобланади. Квадратур формулалар сохасида математика буйича бухоролик биринчи фан доктори Салихов Г.Н. катта илмий натижаларга эришган.

Мисол: Ушбу

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

интегрални тугри туртбурчаклар, трапециялар ва Симпсон формулалари оркали хисобланг.

Ечими: [1; 2] кесмани 10 та тенг булакка ажратамиз.

$$\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0{,}1$$

деб олиб, интеграл остидаги функция кийматлари жадвалини тузамиз:

$x_0=1$, $y_0=1{,}00000$, $x_1=1{,}1$, $y_1=0{,}90909$
$x_2=1{,}2$, $y_2=0{,}83333$, $x_3=1{,}3$, $y_3=0{,}76923$
$x_4=1{,}4$, $y_4=0{,}71429$, $x_5=1{,}5$, $y_5=0{,}66667$
$x_6=1{,}6$, $y_6=0{,}62500$, $x_7=1{,}7$, $y_7=0{,}58824$
$x_0=1{,}8$, $y_8=0{,}55556$, $x_9=1{,}9$, $y_9=0{,}52632$
$x_{10}=2$, $y_{10}=0{,}50000$.

1) Тугри туртбурчаклар формуласини татбик этамиз:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}1(1+0{,}90909+0{,}83333+0{,}76923+0{,}71429+0{,}66667+0{,}625+$$
$$+0{,}58824+0{,}55556+0{,}52632)=0{,}1\cdot 7{,}18773=0{,}71877$$

2) Трапециялар формуласини татбик этамиз:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}1\left(\frac{1+0{,}5}{2} + 0{,}83333 + 0{,}76923 + 0{,}71429 + 0{,}66667 + 0{,}625 + \right.$$

$$\left. + 0{,}58824 + 0{,}55556 + 0{,}52632 \right) = 0{,}69377 .$$

3) Симпсон формуласини тадбик этамиз:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{0{,}1}{3}(1 + 0{,}5 + 2 \cdot 2{,}72818 + 4 \cdot 3{,}45955) = 0{,}69315 .$$

Хакикатда

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} = 0{,}6931472 \quad ,$$

еттинчи каср хона бирлигигача аникликда.

Уз-узини назорат этиш саволлари:

1.Тугри туртбурчаклар формуласини келтириб чикаринг.

2. Тугри туртбурчаклар формуласи хатолиги кандай бахоланади?

3.Трапециялар формуласини келтириб чикаринг ва унинг хатолигини курсатинг.

4.Симпсон формуласини келтиринг ва унинг хатолигини курсатинг.

5 - М А Ъ Р У З А

АНИК ИНТЕГРАЛ ЁРДАМИДА ЮЗАЛАРНИ, ХАЖМЛАРНИ, ЁЙ УЗУНЛИКЛАРИНИ ХИСОБЛАШ.

Таянч иборалар: Кутб координаталар системаси, шакл юзаси, жисмнинг кундаланг кесими, айланма жисм, жисм хажми, ёй узунлиги.

Маъруза режаси:

1. Ясси фигуралар юзаларини хисоблаш.
2. Аник интегралнинг жисмлар хажмини хисоблашга татбики.
3. Ясси эгри чизик ёйи узунлигини аник интеграл ёрдамида топиш.

Адабиётлар:

[1]. VI боб, §20-21 [2]. XI боб, §1-3

1.Ясси фигуралар юзаларини хисоблаш.

а) Аник интегралнинг таърифидан, агар [a;b] кесмада функция f(x)≥0 булса,у холда y=f (x) эгри чизик, OX уки ва x=a хамда x=b тугри чизик билан чегараланган эгри чизикли трапециянинг юзи

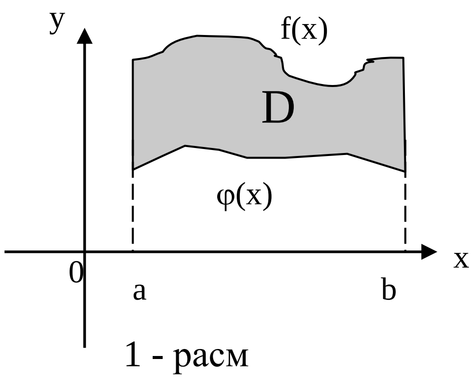
$$S=\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

га тенг. Агар [a;b] кесмада f(x)≤0 булса, тегишли трапециянинг юзи

$$S = \left|\int_a^в f(x)dx\right| \qquad (2)$$

га тенг булади.

y_1=f(x) ва y_2=u (x) эгри чизиклар хамда x=a ва x=b тугри чизиклар билан чегараланган D фигуранинг юзини хисоблаш керак булсин. (1-расм)



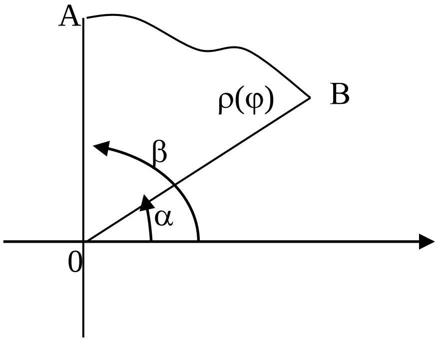
1 - расм

У холда (1) –формуладан икки марта фойдаланиб куйидагини хосил киламиз:

$$S=\int_a^b \left(f(x)-\varphi(x)\right)dx$$

б) Кутб координаталар системасида ясси фигура ρ=ρ(φ) эгри чизик ва кутб марказидан чикувчи φ = α , φ = β нурлар билан чегараланган булсин. (2- расм). У холда АВО эгри чизикли учбурчак юзи куйидаги формула оркали хисобланади:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

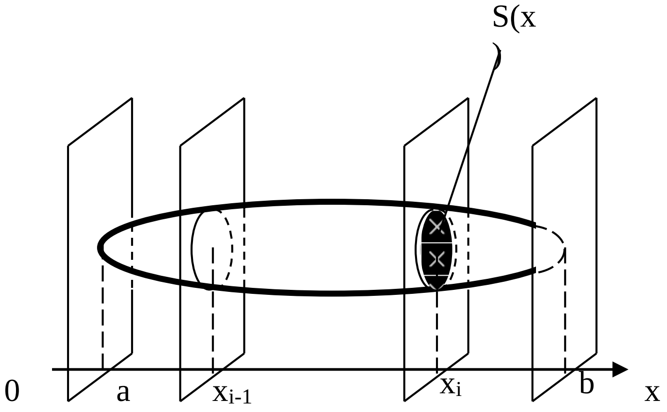


2 - расм

2. Аник интегралнинг жисмлар хажмини хисоблашга тадбики.

а) Жисмнинг хажмини кундаланг кесимнинг юзи буйича хисоблаш.

Бирор-бир жисмнинг V хажмини хисоблаш талаб этилсин. Бу жисмнинг OX укига перпендикуляр текислик билан кесимининг юзи S(x) маълум булсин. (3-расм).



3 - расм

[a;b] кесмани $a_0=x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_i,\ldots,x_n=b$ нукталар билан ихтиёрий булакка буламиз ва бу нукталар оркали OX укига перпендикуляр текисликлар утказамиз.(3-расм). Бу текисликлар жисмни n та катламга ажратади,уларнинг хажимларини $\Delta V_1, \Delta V_2,\ldots,\Delta V_n$, билан белгилаймиз. У холда

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i$$

i- чи цилиндрнинг хажми $\Delta V_i \approx S(\xi_i)\Delta x_i$ эканлигини назарга олсак,

$$V=\lim_{\max\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i = \int_{b}^{a} S(x)dx$$

ва хажмни хисоблаш учун куйидаги формула келиб чикади:

$$V = \int_{a}^{в} S(x)dx$$

б) Айланма жисмларининг хажмини хисоблаш.

Агар жисм $y=f(x)$ чизик билан чегараланган эгри чизикли трапециянинг ОХ ук атрофида айланишдан хосил булса, ОХ укига перпендикуляр абциссали кесим доирадан иборат булиб $S(x)=\pi y^2$ юзага тенг булади. Демак, бу холда

$$V=\pi\int_a^в (f(x))^2\,dx$$

3. Ясси эгри чизик ёйи узунлигини аник интеграл ёрдамида хисоблаш.

а) $y=f(x)$ чизикнинг $x=a$ ва $x=b$ чизиклар орасида жойлашган кисми узунлигини куйидаги формула оркали хисоблаймиз:

$$I=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

в) Агар эгри чизик параметрик тенгламалар оркали берилган булса.яъни

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\phi(t)\end{cases}\qquad \theta_1\le t\le\theta_2$$

булса, у холда

$$I=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\varphi'(t))^2}\,dt$$

булади.

г) Агар эгри чизик кутб координаталарда берилган булса,яъни

$$\rho=\rho(\varphi),\qquad \alpha\le t\le\beta.,$$

булса, у холда,

$$I=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi$$

булади.

Уз-узини назорат этиш саволлари:

1.Ясси фигуралар юзини аник интеграл оркали хисоблаш формулаларини келтиринг.

2.Жисмнинг хажмини кундаланг кесим юзаси оркали хисоблаш формуласини ёзирг.

3. Айланма жисм хажми интеграл ёрдамида кандай хисобланади?

4.Ясси эгри ёй узунлиги аник интеграл оркали кандай хисобланади?

6 – М А Ъ Р У З А

АНИК ИНТЕГРАЛ ЁРДАМИДА ФИЗИК ВА МЕХАНИК МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШ.

Таянч иборалар: иш, масофа, статик момент, огирлик маркази.

Маъруза режаси:

1. Узгарувчи куч бажарган ишни хисоблаш.
2. Нотекис харакатда масофани хисоблаш.
3. Ясси эгри чизик ёйининиг статик моменти ва уни аник интеграл ёрдамида топиш.
4. Ясси шаклнинг статик моменти ва уни хисоблаш.
5. Ясси эгри чизик ёйининиг огирлик маркази ва уни аник интеграл ёрдамида топиш.
6. Ясси шаклнинг огирлик маркази ва уни топиш.

Адабиётлар:

[1]. VI боб, §23 [2]. XI боб, §4

1.Узгарувчан куч бажарган ишни хисоблаш.

Биз олдинги 17-маърузада узгарувчан F=*f(x)* куч моддий нуктани [*a*,*b*] кесма буйича харакатлантирганда бажарилган А иш аник интеграл оркали

$$A=\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

формула билан хисобланишини курсатган эдик.Шунга доир бир мисол курсатамиз.

Масала: Пружина 2 Н куч таъсири остида 4см чузилиши маълум. Шу пружинани 6см чузиш учун бажариладиган иш микдорини хисобланг.

Ечиш: Пружинани *x* метрга чузиш учун керак буладиган куч катталиги F=*f(x)*=*kx* билан аникланади. Бу формуладаги *k* пропорцианаллик коэффициентини масала шартига асосан топамиз. Унга асосан *x*=0.04 м булганда F=2Н булган. Демак,

$$k=\frac{F}{x}=\frac{2H}{0.04}=50.$$

Унда пружинани 6см чузиш учун бажарилган иш, (1) формулага асосан,

$$A=\int_0^6 50xdx=25x^2\Big|_0^6=25(6^2-0^2)=900\,(Ж)$$

булади.

2.Нотекис харакатда босиб утилган масофани хисоблаш.

Маълумки, узгармас v тезлик билан тугри чизик буйлаб текис харакатдаги моддий нуктанинг $[a,b]$ вакт оралигида босиб утган s масофаси $s=v(b-a)$ формула билан хисобланади. Энди тезлиги узгарувчан ва $v=v(t)$ функция билан аникланадиган нотекис харакатда моддий нуктанинг $[a,b]$ вакт оралигида босиб утадиган s масофасини хисоблаш масаласини курамиз. Бунинг учун $[a,b]$ вакт оралигини $a=t_0, t_1, t_2, \ldots..$, t_{n-1}, $t_n=b$ нукталар билан ихтиёрий n булакка ажратамиз. Хар бир (t_{i-1}, t_i) вакт ораликчалари узунликларини Δt_i каби белгилаймиз ва ундан ихтёрий бир $\tilde{t}_i$ нуктани танлаймиз. Моддий нуктанинг (t_{i-1}, t_i) вакт ораликчаларида босиб утган масофасини s_i каби белгилаб, бу вактда унинг тезлиги такрибан узгармас ва $v_i=v(\tilde{t}_i)$ га тенг деб оламиз. Бу холда $s_i \approx v_i \Delta t_i = v(\tilde{t}_i)\Delta t_i$ булиб, босиб утилган s масофа учун

$$s=\sum_{i=1}^{n} s_i \approx \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} v(\tilde{t}_i)\Delta t_i$$

такрибий тенгликни хосил киламиз. Бу масофа учун аник формулани хосил этиш максадида булакчалар сони n ни чексиз ошириб борамиз. Натижада

$$s=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} v(\tilde{t}_i)\Delta t_i = \int_a^b v(t)dt \qquad (2)$$

формулага эга буламиз.

Масала: Тезлиги $v(t)=t^2+3t$ конун буйича узгарадиган характда [3,8] вакт оралигида босиб утилган масофани топинг.

Ечиш: Курсатилган (2) формулага асосан

$$s=\int_3^8 (3t^2+4t)dt=(t^3+2t^2)\Big|_3^8=(8^3+2\cdot 8^2)-(3^3+2\cdot 3^2)=640-45=595.$$

3 . Эгри чизик ёйининг статик моментларини хисоблаш.

Таъриф: Бирор l укдан r масофада жойлашган m массали моддий нуктанинг бу укка нисбатан ***статик моменти*** деб $M_l = mr$ формула билан аникланадиган сонга айтилади.

Текисликдаги l укдан $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ масофаларда жойлашган $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ массали моддий нукталарнинг бу укка нисбатан ***статик моменти*** деб

$$M_l=\sum_{i=1}^{n} m_i r_i$$

формула билан аникланадиган сонга айтилади.

Энди текисликда тенгламаси $y=f(x)$, $a\leq x\leq b$, булган L=AB эгри чизик ёйи берилган булсин. Бу эгри чизикнинг хар бир x нуктасидаги чизикли зичлиги $\Upsilon=\Upsilon(x)$ узлуксиз функция билан аникланган деб хисоблаймиз. Дастлаб L=AB эгри чизик ёйининг m массасини топамиз. Бунинг учун уни ихтиёрий тарзда Δl_1, Δl_2, Δl_3, … , Δl_n кичик ёйчаларга булаклаймиз. Хар бир Δl_i ёйчадан ихтиёрий бир $P(x_i,y_i)$ (i=1,2,3, … , n) нуктани танлаб олиб, бу ерда чизикли зичлик такрибан узгармас ва $\Upsilon(x_i)$ га тенг деб оламиз. Унда Δl_i ёйчанинг массаси $m_i \approx \Upsilon(x_i)\,\Delta l_i$ булиб, изланаётган m масса учун

$$m=\sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n}\gamma(x_i)\Delta l_i =\sum_{i=1}^{n}\gamma(x_i)\sqrt{1+(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i})^2}\,\Delta x_i$$

такрибий тенгликни хосил киламиз. Унда массанинг аник киймати

$$m=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\gamma(x_i)\sqrt{1+(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i})^2}\,\Delta x_i =\int_a^b\gamma(x)dl =\int_a^b\gamma(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \quad (3)$$

формула билан аникланишини топамиз.

Энди АВ эгри чизик ёйининг ОХ координата укига нисбатан M_x статик моментини аниклаймиз ва уни хисоблаш формуласини топамиз. Бунинг учун унинг Δl_i ёйчаларини массаси Δm_i булган P_i (x_i,y_i) нукталар билан алмаштирамиз. Бу нукталардан ОХ укигача булган масофа $r_i=y_i$ булгани учун уларнинг статик моментлари $(M_x)_I$ учун

$$(M_x)_i = y_i\Delta m_i \approx f(x_i)\gamma(x_i)\Delta l_i$$

такрибий тенглик уринли булади. Унда изланаётган статик момент

$$M_x \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\gamma(x_i)\Delta l_i =\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\gamma(x_i)\sqrt{1+(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i})^2}\,\Delta x_i$$

такрибий тенглик билан аникланиб, унинг аник киймати

$$M_x =\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\gamma(x_i)\sqrt{1+(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i})^2}\,\Delta x_i =\int_a^b f(x)\gamma(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \qquad (4)$$

формула билан хисобланади.

Худди шундай тарзда бу эгри чизик ёйининг ОY координата укига нисбатан статик моменти M_y

$$M_y ==\int_a^b x\gamma(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \qquad (5)$$

формула билан хисобланишини курсатиш мумкин.

Агарда эгри чизик ёйи бир жинсли булса, унда чизикли зичлик узгармас, яъни $\gamma(x)=\gamma$ булиб, статик моментлар

$$M_x ==\gamma\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,\quad M_y ==\gamma\int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \quad (6)$$

формулалар оркали топилади.

4 . Текис шаклнинг статик моментларини хисоблаш.

XOY координата текислигида $y=f(x)$ тенгламали эгри чизик, ОХ уки ва $x=a$, $x=b$ вертикал тугри чизиклар билан чегараланган эгри чизикли трапеция берилган булсин. Унинг хар бир $P(x,y)$ нуктасидаги зичлиги бирор $\gamma(x)$

узлуксиз функциядан иборат деб караймиз. Бу холда эгри чизикли трапециянинг массаси m, OX ва OY координата укларига нисбатан статик моментлари аник интеграл ёрдамида

$$m=\int_a^b \gamma(x)f(x)dx,\quad M_x=\frac{1}{2}\int_a^b \gamma(x)f^2(x)dx,\quad M_y=\int_a^b \gamma(x)xf(x)dx \quad (7)$$

формулалар билан хисобланишини юкорида курилган каби мулохазалар оркали келтириб чикариш мумкин.

Агар эгри чизикли трапеция бир жинсли , яъни зичлик $\gamma(x)=\gamma$ узгармас булса, унда масса ва статик моментлар

$$m=\gamma\int_a^b f(x)dx,\quad M_x=\frac{\gamma}{2}\int_a^b f^2(x)dx,\quad M_y=\gamma\int_a^b xf(x)dx \qquad (8)$$

формулалар билан хисобланади.

5 . Эгри чизик ёйининг огирлик марказини хисоблаш.

Таъриф: Эгри чизик ёйининг ***огирлик маркази*** деб шундай P(x_0, y_0) нуктага айтиладики, бу нуктага эгри чизик ёйининг m массасини жойлаштирсак,унда унинг ва эгри чизик ёйининг укка нисбатан статик моментлари узаро тенг булади, яъни

$$M_x=y_0\cdot m,\quad M_y=x_0\cdot m \qquad (9)$$

тенгликлар уринли булади.

Таърифдаги (9) тенгликлардаги M_x ва M_y статик моментлар урнига уларнинг (4) ва (5) ифодаларини, m масса урнига унинг (3) ифодасини куйиб, огирлик маркази координаталари учун ушбу формулаларни хосил этамиз:

$$x_0=\frac{M_y}{m}=\frac{\int_a^b x\gamma(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \gamma(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx},\qquad y_0=\frac{M_x}{m}=\frac{\int_a^b f(x)\gamma(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \gamma(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx}.$$

Агар эгри чизик ёйи бир жинсли булса , унда зичлик $\gamma(x)=\gamma$ узгармас булиб, огирлик маркази координаталари аник интеграл ёрдамида куйидаги формулалар билан хисобланади:

$$x_0=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx},\quad y_0=\frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx}.$$

6 . Эгри чизикли трапециянинг огирлик марказини хисоблаш.

Эгри чизикли трапециянинг хам огирлик маркази (9) тенгликлар билан аникланади ва бир жинсли булмаган холда (7) формулага асосан

$$x_0=\frac{M_y}{m}=\frac{\int\limits_a^b x\gamma(x)f(x)dx}{\int\limits_a^b \gamma(x)f(x)dx}, \quad y_0=\frac{M_x}{m}=\frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b \gamma(x)f^2(x)dx}{\int\limits_a^b \gamma(x)f(x)dx}$$

формулалар билан топилади.

Эгри чизикли трапеция бир жинсли, яъни зичлик $\gamma(x)=\gamma$ узгармас булса, унинг огирлик маркази координаталари аник интеграл ёрдамида куйидаги формулалар билан хисобланади:

$$x_0=\frac{\int\limits_a^b xf(x)dx}{\int\limits_a^b f(x)dx}, \qquad y_0=\frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b f^2(x)dx}{\int\limits_a^b f(x)dx} \quad .$$

Уз-узини назорат этиш саволлари:

1.Узгарувчи куч бажарган иш кандай хисобланади?

2.Нотекис харакатда масофани хисоблаш формуласини ёзинг.

3.Ясси эгри чизик ёйнинг массаси аник интеграл оркали кандай хисобланади?

4. Ясси эгри чизик ёйининг статик моменти кандай формула билан хисобланади?

5. Эгри чизикли трапециянинг массаси аник интеграл оркали кандай хисобланади?

6. Эгри чизикли трапециянинг статик моментини хисоблаш формуласини ёзинг.

7. Ясси эгри чизик ёйининг огирлик маркази кандай таърифланади?

8. Ясси эгри чизик ёйининг огирлик маркази кандай хисобланади?

9. Эгри чизикли трапециянинг огирлик маркази кандай таърифланади ва хисобланади?

7 – МАЪРУЗА

КУП УЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯЛАР. ИККИ УЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯ ЛИМИТИ ВА УЗЛУКСИЗЛИГИ.

Таянч иборалар: Куп узгарувчили функция, аникланиш сохаси, функциянинг лимити, функциянинг узлуксизлиги, функциянинг энг катта ва энг кичик кийматлари.

Маъруза режаси:

1. Куп узгарувчили функциялар.
2. Икки узгарувчили функция.
3. Бир неча узгарувчили функциянинг лимити ва узлуксизлиги.

Адабиётлар:

[**1**]. VII боб, §1-2 [**2**]. XII боб, §1-3

1.Куп узгарувчили функциялар.

ТАЪРИФ: Агар *x, y, z, …u , t ,* узгарувчиларнинг хар бир кийматлар тупламига узгарувчи w нинг аник киймати мос келса, w ни *x, y ,z , … u ,t ,* эркли узгарувчиларнинг функцияси деб айтилади, ва $w = f(x , y, z ,\dots u ,t,)$ куринишида ёзилади. Бу ерда *x , y , z ,…u , t* , эркли узгарувчилар

Мисол:

$$\omega = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2}$$

эркли узгарувчилар сони туртта , яъни *x , y , z , u* , шунинг учун *y* турт узгарувчили функция деб айтилади.

$1-x^2-y^2-z^2-u^2>0$ муносабатни каноатлантирувчи кийматларда аникланган.

2. Икки узгарувчили функция

ТАЪРИФ: Агар бир-бирига боглик булмаган икки узгарувчи *x* ва *y* бирор D узгариш сохасидаги хар бир куш (*x* , *y*) кийматига *z* микдорнинг аник бир киймати мос келса , *z* икки эркли узгарувчи *x* ва *y* нинг D сохада аникланган функцияси дейилади ва куйидагича белгиланади:

$$Z=f(x ,y) , Z=\Phi(x ,y) \quad \text{ва} \quad x.\text{к.}$$

ТАЪРИФ: Z=f(*x* ,*y*) функция аникланган *x* ва *y* куш (*x*,*y*) кийматларнинг туплами функциянинг аникланиш сохаси ёки мавжудлик сохаси деб айтилади.

Икки узгарувчили функциянинг аникланиш сохаси геометрик тарзда кургазмали тасвирланади.Агар *x* ва *y* нинг хар бир куш кийматини OXY текисликда M(*x*,*y*) нукта билан тасвирласак , функциянинг аникланиш сохаси текисликдаги нукталарнинг бирор туплами куринишида тасвирланади.

Функциянинг аникланиш сохаси , жумладан , бутун текислик булиши хам мумкин. Бундан буён асосан текисликнинг чизиклар чегараланган кисмидан иборат булган сохалар билан иш курамиз. Берилган сохани чегараловчи чизикни соханинг чегараси деб айтамиз. Соханинг чегарада етмаган нукталарини соханинг ички нукталари деб айтамиз. Факат ички нукталардан иборат булган соха очик соха дейилади.Агар сохага чегаранинг нукталари хам кирса , соха ёпик деб айтилади.

Мисол: Ушбу $Z = \dfrac{1}{R^2 - x^2 - y^2}$ функциянинг аникланиш сохасини топинг.

Ечими: Функциянинг аникланиш сохаси $\dfrac{1}{R^2 - x^2 - y^2}$ ифода аникланган нукталар туплами , яъни $R^2 - x^2 - y^2 \neq 0$ ёки $x^2 + y^2 \neq R^2$ бажариладиган нукталар туплами булади. Бу тупламга текисликнинг айлана нукталаридан ташкари хамма нукталари тегишли булади.

Мисол: Ушбу $Z=\ln(y^2-4x+1)$ функциянинг аникланиш сохасини топинг.

Ечими: Функция $y^2-4x+8>0$ да аникланган.Тенгсизликни $y^2>4(x-2)$ куринишда ёзамиз. Аникланиш соха парабола ва унинг ички кисмида ётмаган барча нукталари туплами булади.

Мисол: $Z = \sqrt{x + y}$ функциянинг аникланиш сохасини топинг .

Ечими: Квадратик илдиз ноль ва мусбат сонлар учун аникланган булади , шунинг учун ушбу тенгсизлик каноатланиши керак: $x+y>0, y>-x$

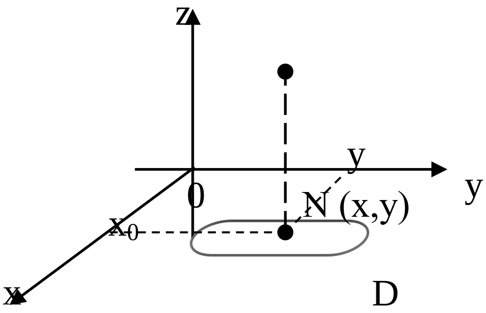
Аникланиш соха $y=-x$ тугри чизикда ва ундан юкоридаги ярим текисликда ётган нукталар тупламидан иборат

Икки узгарувчили функциянинг геометрик тасвирлаш куйидагича булади: ОХУ текисликдаги D сохада аникланган.

$$Z = f(x, y) \qquad (1)$$

функцияни ва ХОУZ тугри бурчакли Декарт координаталари системасини караймиз . D сохасининг хар бир (x,y) нуктасидан ОХУ текисликка перпендикуляр утказамиз, ва унда $f(x, y)$ га тенг кесма ажратамиз. (1-расм)

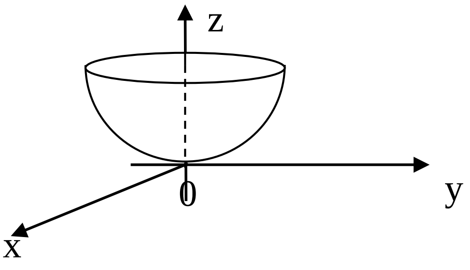
У холда фазода координаталари x , y, $f(x,y)$ булган Р нуктани хосил киламиз. Координаталари (1) тенгламани каноатлантирадиган Р нукталарнинг геометрик урни икки узгарувчи функциянинг графиги деб аталади.



1-расм

Мисол: $Z=x^2+y^2$ функциянинг графигини чизинг.

Ечими: Аналитик геометриядан



2-расм

маълумки $Z=x^2+y^2$ функциянинг графиги айланиш параболасидан иборат . (2-расм)

Изох . Уч ва ундан ортик узгарувчининг функциясини фазода график ёрдамида тасвирлаш мумкин эмас.

2. Бир неча узгарувчили функциянинг лимити ва узлуксизлиги .

Берилган нукта атрофи тушунчасини киритамиз . $M_0(x_0,y_0)$ нуктанинг r радиусли атрофи деб $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$

тенгсизликни каноатлантирадиган (x,y) нукталар тупламига айтилади.

ТАЪРИФ: Агар хар кандай мусбат ε сон учун шундай r>0 сон топилсаки , $\overline{MM}_0<r$ тенгсизлик каноатланадиган барча $M(x,y)$ нукталар учун

$$|f(x,y)-A|<\boldsymbol{\varepsilon}$$

тенгсизлик каноатланса , узгарувчи $M(x,y)$ нукта $M_0(x_0,y_0)$ нуктага интилганда $f(x,y)$ функция А лимитга интилади дейилади ва куйидагича белгиланади :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

ТАЪРИФ: M_0 (x_0,y_0) нукта $f(x,y)$ функциянинг аникланиш сохасидаги нукта булсин. Агар $M(x,y)$ нукта функциянинг аникланиш сохасида колган холда M_0 (x_0,y_0) нуктага ихтиёрий усулда интилганда ушбу тенглик

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0) \qquad (2)$$

мавжуд булса , $Z=f(x\ y)$ функция M_0 (x_0,y_0) нуктада узлуксиз дейилади.

Бирор сохaнинг хар бир нуктасида узлуксиз булган функция шу сохада узлуксиз дейилади.

Агар бирор $N(x,\ y)$ нуктада еки нукталар тупламида (2) тенглик бажарилмаса ,$N(x\ ,y)$ нукта (ёки нукталар туплами) $Z=f(x\ ,y)$ функциянинг узилиш нуктаси (ёки узилиш нукталари туплами) дейилади .

Мисол : $Z=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ функциянинг узилиш нукталарини аникланг .

Ечими: Берилган функция $y=\pm x$ тугри чизикда ётган нукталарда узилишга эга , чунки бу нукталар учун (47) тенглик бажарилмайди .

Мисол: $z^2=x^2+y^2$ функцияни узлуксизликка текширинг .

Ечими: Берилган функция учун x ва y нинг хар кандай кийматларида (2) тенглик бажарилади.Функция ОХУ текисликда узлуксиздир.

Ёпик ва чегараланган сохада узлуксиз булган куп узгарувчили функциянинг бир неча мухим хоссаларини исботсиз айтиб утамиз.

1-*х о с с а* : Агар $f(x\ ,y)$ функция ёпик ва чегараланган D сохада аникланган ва узлуксиз булса , шу D сохадан камида битта шундай N $(x_0,\ y_0,\ \ldots)$ нукта топиладики , сохaнинг бошка хамма нукталари учун ушбу

$$f(x_0,y_0...)\geq f(x,y,...)$$

муносабат бажарилади ва камида битта шундай $M(\overline{x_0}, \overline{y_0},...)$ нукта топиладики, соханинг бошка хамма нукталари учун $f(\overline{x_0}, \overline{y_0},...) \leq f(x, y,...)$ муносабат бажарилади . Функциянинг $f(x_0, y_0,...) = A$ киймати $f\ (x\ ,\ y,\ \ldots)$ функциянинг D сохадаги энг катта киймати деб, $f(\overline{x_0}, \overline{y_0},...) = a$ кийматини эса энг кичик киймати деб айтилади.

2- *х* о с с а : Агар $f\ (x\ ,y\ldots\ )$ функция ёпик ва чегараланган сохада узлуксиз булиб, мусбат ва манфий кийматларга эга булса, *у* холда шу соха ичида берилган $f\,(x,y\ldots)$ функция нолга айланадиган нукталар топилади.

Саволлар:

1.Куп узгарувчили функцияларни таърифланг.
2.Аникланиш сохаси нима?
3.Икки узгарувчили функциянинг графигига мисол келтиринг.
4.Икки узгарувчили функциянинг лимити ва узлуксизлиги нима?

8 – МАЪРУЗА

ИККИ УЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ХОСИЛАЛАРИ.

Таянч иборалар: Хусусий орттирма, тула орттирма, хусусий хосила, тула хосила, мураккаб функциянинг хосиласи.

Маъруза режаси:

1. Функциянинг хусусий ва тула орттирмаси.
2. Бир неча узгарувчили функциянинг хусусий хосиласи.
3. Мураккаб функциянинг хосиласи. Тула хосила.
4. Хар хил тартибдаги хусусий хосилалар.

Адабиётлар:

[**1**]. VII боб, §3-6, 11 [**2**]. XII боб, §4,6,10

1.Функциянинг хусусий ва тула орттирмаси.

Ушбу $Z=f(x,y)$ функция D сохада узлуксиз булсин.

Эркли узгарувчи x га Δx орттирма берамиз , унда Z орттирма олади бу орттирма Z нинг X буйича хусусий орттирмаси деб аталади ва $\Delta_x Z$ билан белгиланади , яъни

$$\Delta_x Z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$$

Шунга ухшаш . агар x узгармас кийматни саклаб , y га Δy орттирма берсак, Z хам орттирма олади , бу орттирма Z нинг y буйичи хусусий орттирмаси деб айтилади ва $\Delta y Z$ билан белгиланади.:

$$\Delta_y Z = f(x,y+\Delta y) - f(x,y)$$

Нихоят аргумент x га Δx орттирма ва аргумент y га Δy орттирма бериб, Z учун янги орттирма килсак бу орттирма Z нинг тула орттирмаси деб айтилади:

$$\Delta Z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

Иккитадан ортик узгарувчилар функциясининг хусусий ва тула орттирмалари шу каби таърифланади. Чунончи, $u=f(x,y,z)$ учун :

$$\Delta_x u = f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z),$$

$$\Delta_y u = f(x, y+\Delta y, z) - f(x,y,z),$$

$$\Delta_z u = f(x,y,z+\Delta z) - f(x,y,z),$$

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, Z+\Delta Z) - f(x,y,z).$$

М и с о л : $Z = x{-}y$ функциянинг хусусий ва тула орттирмаларини топинг.

Ечими: $\Delta_x Z = (x+\Delta x)\,y - xy = y\Delta x$

$$\Delta_y Z = x(y+\Delta y) - xy = x\Delta y$$

$$\Delta Z = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.$$

2. Бир неча узгарувчили функциянинг хусусий хосиласи.

ТАЪРИФ: Z=$f(x,y)$ функциянинг x буйича хусусий хосиласи. деб , хусусий орттирма Δ_x Z нинг Δx орттирмага нисбати Δx нолга интилишидаги лимитига айтилади. Z = $f(x,y)$ функциянинг x буйича хусусий хосиласи куйидаги символлар билан белгиланади:

$$Z'_x, f'_x(x,y), \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}$$

Таърифга кура

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x Z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Шунга ухшаш Z = $f(x,y)$ функциянинг y буйича хусусий хосиласи таърифланади:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y Z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

М и с о л : Z+x^3 sin y функциянинг хусусий хосилаларини хисобланг.

Ечими: y узгарувчини узгармас деб туриб x га нисбатан хусусий хосилани топамиз:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = (x^3 \sin y)'_x = 3x^2 \sin y$$

x узгарувчини узгармас деб туриб y га нисбатан хусусий хосилани хисоблаймиз:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = (x^3 \sin y)'_y = x^3 \cos y$$

Хар канча узгарувчили функцияларнинг хусусий хосилалари хам шунга ухшаш топиладики: $u = f(x, y, z, t)$,

$$\frac{\partial u}{\partial Z} = \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{\Delta_z u}{\Delta z} = \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{f(x,y,z+\Delta z,t) - f(x,y,z,t)}{\Delta z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta_t u}{\Delta t} = \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{f(x,y,z,t+\Delta t) - f(x,y,z,t)}{\Delta t}$$

М и с о л : $u = x^3 + y^3 + x \cdot t \cdot z$, $\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = ?$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + t \cdot z, \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2, \frac{\partial u}{\partial z} = xt, \frac{\partial u}{\partial t} = xz$$

Бир узгарувчили функция хосиласининг геометрик мазмунига ухшаш икки узгарувчили функциянинг хусусий хосилаларининг геометрик мазмуни мавжуд: $\frac{\partial z}{\partial y}$ хосиланинг сон киймати Z=$f(x, y)$ сиртни x=const текислик билан кесганда хосил булган эгри чизикка уринма огиш бурчагининг тангенсига тенг.

Шунингдек $\frac{\partial z}{\partial x}$ хусусий хосиланинг сон киймати Z=f (x ,y) сиртнинг y=const текислик билан кесимига уринманинг огиш бурчаги тангенсига тенг.

3. Мураккаб функциянинг хосиласи.Тула хосила.

Ушбу $Z= f\ (u\ \ v)$ тенгламада u ва v микдорлар x,y эркли узгарувчиларнинг функциялари $u = \varphi(x, y), V = \psi(x, y)$ булсин. Бу холда Z функция x ва y тенг мураккаб функцияси дейилади.

М и с о л : $Z=u^2 \cdot v^2+u+v+4$, $u=x+y$,$v=e^{x\cdot y}$

Мураккаб функциянинг x ва y буйича хусусий хосилалари куйидаги формулалар оркали хисобланади:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

Мураккаб функция куйидагича берилган булсин:

$$Z = f(u; v), u = \varphi(x), v = \psi(x)$$

Бундай холда Z дан x буйича хосила тула хосила дейилади ва куйидагича хисобланади:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

4. Хар хил тартибдаги хусусий хосилалар.

Z=f(x,y) функция берилган булсин. Унда $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ хусусий хосилалар x ва y узгарувчиларнинг функцияларидир .Шунинг учун улардан яна хосила топиш мумкин. Иккинчи тартибли хосилалар куйидагича белгиланади:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Учинчи тартибли хусусий хосилалар бундай белгиланади:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

Умуман . n - тартибли хусусий хосила (n-1) тартибли хусусий хосиланинг биринчи тартибли хусусий хосиласидир.

ТЕОРЕМА: Агар Z = f (x,y) функция ва унинг Z'_x, Z'_y , Z'_{xy} , Z'_{yx} хосилалари M(x,y) нуктада ва унинг бирор атрофида аникланган ва узлуксиз булса. Бу нуктада $f_{xy} = f_{yx}$ булади.

Теоремани исботсиз кабул киламиз.

Саволлар:

1.Хусусий ва тула орттирмаларни таърифланг.
2.Хусусий хосилаларни таърифланг.
3.Мураккаб функциянинг хосиласини таърифланг.
4.Тула хосила нима?

9 – М А Ъ Р У З А.

ТУЛА ОРТТИРМА ВА ТУЛА ДИФФЕРЕНЦИАЛ, ГРАДИЕНТ. ЙУНАЛИШ БУЙИЧА ХОСИЛА.

Таянч иборалар: Тула орттирма, тула диференциал, градиент, йуналиш буйича хосиласи.

Маъруза режаси:

1. Тула орттирма ва тула дифференциал.
2. Йуналиш буйича хосила. Градиент.

Адабиётлар:

[**1**]. VII боб, §4; XII боб, §2-3 [**2**]. XII боб, §5, 12-13

1. Тула орттирма ва тула дифференциал.

$Z=f(x,y)$ функция тула орттирмасининг таърифига кура

$$\Delta Z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \qquad (1)$$

$f(x,y)$ функция каралаётган (x,y) нуктада узлуксиз хусусий хосилаларга эга булсин.(48) тенгликни куйидаги куринишда ёзиш мумкин:

$$\Delta Z = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)] \qquad (2)$$

Кавслардаги айирмаларга Лагранж теоремасини куллаб

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \frac{\partial f(x,\overline{y})}{\partial y}\Delta y \qquad (3)$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \frac{\partial f(\overline{x}, y+\Delta y)}{\partial x}\Delta x \qquad (4)$$

тенгликларни хосил киламиз. Бунда $x < \overline{x} < x+\Delta x, y < \overline{y} < y+\Delta y$ булади. Фаразимизга кура хусусий хосилалар узлуксиз булгани учун

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\partial f(\overline{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \qquad (5)$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\partial f(x,\overline{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \Delta x\to 0, \Delta y\to 0 \Rightarrow \overline{x}\to x, \overline{y}\to y \qquad (6)$$

(5), (6) ларни лимитлар хоссасидан фойдаланиб, куйидаги куринишда ёзамиз:

$$\frac{\partial f(\overline{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \gamma_1 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial f(x,\overline{y})}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\gamma_2 \qquad (8)$$

Бу ерда γ_1 ва γ_2 лар Δx , Δy лар нолга интилганда нолга интилади .Кетма-кет (7),(8) ларни (3),(4) га ва (3), (4)ларни (2)- тенгликка куйсак, функциянинг орттирмаси ушбу куринишга келади:

$$\Delta Z=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y \qquad (9)$$

(9) даги $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$ ифода функция орттирмасининг бош булагини ташкил этади. dz ёки df билан белгиланади ва Z = f (x , y) функциянинг берилган (x,y) нуктадаги дифференциали деб айтилади. Агар Δx =dx ва Δy =dy деб олинса , функциянинг дифференциали куйидаги куринишга келади :

$$dz=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy \qquad (10)$$

Натижада (9) – тенглик $\Delta z = dz+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y$ куринишга келади.

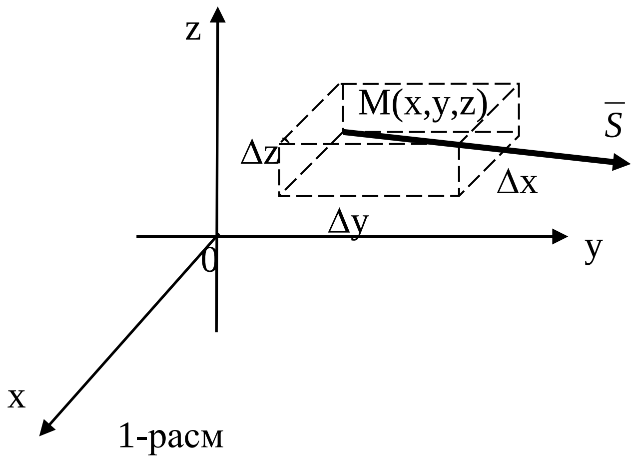
Δx , Δy нолга интилганда γ_1 Δx + γ_2 Δy нолга интилади.Бу йигиндини эътиборга олмасак катта хато килмаймиз, яъни охирги тенгликдан $\Delta z\approx dz$ ва

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy \qquad (11)$$

формулани оламиз .(11) дан такрибий хисоблашларда фойдаланиш мумкин.

2. Йуналиш буйича хосила.Градиент.

D сохада u=f (x ,y ,z) функцияни ва M(x,y,z) нуктани караймиз .M нуктадан йуналтирувчи косинуслари $\cos a,\cos\beta,\cos\gamma$ булган $\overline{s}$ векторни (1-расм) ва



1-расм

M$_1$(x+Δx,y+Δy,z+Δz) нуктани караймиз. f (x,y,z) функция D сохада узлуксиз хосилаларга эга деб фараз киламиз. Бу функция учун (9) тенглик куйидагича ёзилади:

$$\Delta u=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y+\gamma_3\Delta z \qquad (12)$$

Табиийки $\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ нолга интилганда γ_1, γ_2, γ_3, лар нолга интилади .(12) тенгликни иккала томонини ΔS га булиб ΔS →0 интилгандаги лимитни караймиз :

$$\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta S} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta S} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta S} + \gamma_1 \frac{\Delta x}{\Delta S} + \gamma_2 \frac{\Delta y}{\Delta S} + \gamma_3 \frac{\Delta z}{\Delta S}; \qquad (13)$$

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial S}; \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos a, \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta S} = \cos \beta,$$

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta S} = \cos \gamma, \lim_{\Delta S \to 0} \gamma_1 \frac{\Delta x}{\Delta S} \lim_{\Delta S \to 0} \gamma_2 \frac{\Delta y}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \to 0} \gamma_3 \frac{\Delta z}{\Delta S} = 0$$

эканликларини назарга олиб (60) – дан

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cos a + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f(x,y)}{\partial z} \cos\gamma \qquad (14)$$

тенгликни оламиз. Бу ердаги $\frac{\partial u}{\partial S}$ хосила. $u = f(x, y, z)$ функциясининг $\vec{S}$ йуналиши буйича хосиласи деб айтилади.

Хусусий хосилалар йуналиш буйича хосиланинг хусусий холидир.Масалан, $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = \frac{\pi}{2}$ булганда

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{du}{dz} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Мисол: $u = x^3 + y^3 + z^3$ берилган M(I; I; I) нуктада $\vec{S} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ вектор йуналиши буйича хосила топилсин.

Ечими:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{2}{\sqrt{14}}; \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{14}}; \cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2, \frac{\partial u(M)}{\partial x} = 3, \frac{\partial u(M)}{\partial y} = 3, \frac{\partial u(M)}{\partial z} = 3.$$

Демак.

$$\frac{\partial u}{\partial S} = 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} + 3 \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{18}{\sqrt{14}}$$

ТАЪРИФ: $u = f(x, y, z)$ функция аникланган D соханинг хар бир нуктасига координата укларидаги прекциялари хусусий хосилалар $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$нинг тегишли нуктадаги кийматларига тенг булган вектор ,

$$gradu=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

$f(x, y, z)$ функциянинг градиенти деб аталади.

ТЕОРЕМА: $u=f(x.y,z)$ скаляр майдон берилган ва шу скаляр майдонда

$$gradu=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

градиентлар майдони аникланган булсин.Бирор $\vec{s}$ вектор йуналишиши буйича олинган $\frac{\partial u}{\partial S}$ хосила grad$u$ векторнинг $\vec{s}$ вектордаги проекциясига тенг булади.Теоремани исботсиз кабул киламиз.

Градиентнинг баъзи хоссаларини келтирамиз.

а) Агар $\vec{s}$ векторнинг йуналиши градиент йуналиши билан бир хил булса, берилган нуктада $\vec{s}$ вектор йуналиши буйича олинган хосила энг катта кийматга эга булади ва у $|gradu|$ га тенг.

б) grad$u$ векторга перпендикуляр вектор йуналиши буйича хосила, нолга тенг

Мисол: $u=x^3+y^3+z^3$, M(1 :1 :1) , grad u (M) ни топинг.

Ечими: $gradu(M)=3\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$

Саволлар:

1.Тула орттирма ва тула дифференциал нима?
2.Градиент нима?
3.Йуналиш буйича хосила нима?

10 – М А Ъ Р У З А

ИККИ УЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ЭКСТРЕМУМИ. ШАРТЛИ ЭКСТРЕМУМ.

Таянч иборалар: Функциянинг максимуми, функциянинг минимуми, экстремум, экстремумнинг зарурий шарти , экстремумнинг етарли шарти, шартли экстремум.

Маъруза режаси:

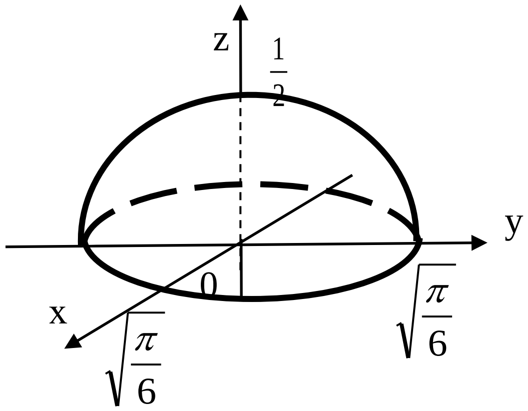
1. Икки узгарувчили функциянинг экстремуми.
2. Шартли экстремум.

Адабиётлар:

[**1**]. VII боб, §14-19 [**2**]. XII боб, §16-18

ТАЪРИФ: Агар $M_0(x_0, y_0)$ нуктага етарли даражада якин булиб, ундан фаркли хамма (x,y) нукталар учун $f(x_0, y_0) > f(x,y)$ булса, $Z=f(x ,y)$ функция $M_0(x_0, y_0)$ нуктада максимумга эга деймиз.

Худди шунга ухшаш , агар $M_0(x_0, y_0)$ нуктадан бошка ва унга етарли якин турган хамма (x,y) нукталар учун $f(x_0, y_0) < f(x,y)$ булса, $Z = f(x ,y)$ функция $M_0(x_0, y_0)$ нуктада минимумга эга деймиз.



1-расм

Функциянинг максимуми ва минимуми функциянинг экстремумлари дейилади.

Мисол: 1-расмдан маълумки функция, $Z = \frac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2)$, x=0, y=0 нуктада максимумга эришади, $\max f(x,y) = f(0;0) = \frac{1}{2}$

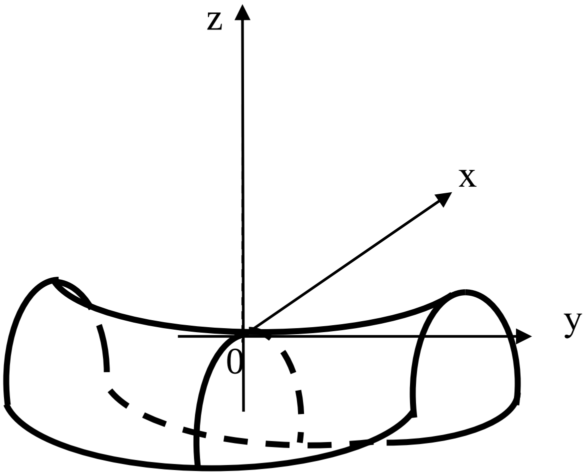
Функция экстримумининг зарурий шартини берувчи куйидаги теоремани исботсиз кабул киламиз.

ТЕОРЕМА: Агар функция (x,y) да экстремумга эришса, y холда Z нинг хар бир биринчи тартибли хусусий хосиласи аргументлариниинг шу кийматларида ё нолга тенг булади, ё мавжуд булмайди.

Бу теорема функциянинг экстремал кийматлари хакидаги масалани текшириш учун етарли булмаса хам, лекин максимум ёки минимумнинг мавжудлигига олдиндан ишончимиз булган холларда бу кийматларни топишга имкон беради.Акс холда кушимча текшириш зарур булади.

Мисол: $Z=x^2-y^2$ функциянинг хосилалари $\frac{\partial z}{\partial x}=2x, \frac{\partial z}{\partial y}=-2y$ булиб, улар (0:0) нуктада нолга айланади. Лекин бу функция шу кийматларда(2-расмга каранг) максимумга хам, минимумга хам эришмайди. $Z=f(x,y)$ функциянинг $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ (ёки мавжуд булмаган) ва $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ (ёки мавжуд булмаган) нукталари унинг критик нукталари деб аталади.

Агар функция бирор нуктада экстремумга эришса, бу хол факат критик нукталардагина юз бериши мумкин.



2-расм

ТЕОРЕМА: (Экстремумнинг етарли шартлари). $Z=f(x, y)$ функция $M_0(x_0, y_0)$ нуктани уз ичига олган бирор сохада иккинчи тартибли узлуксиз хусусий хосилаларга эга булсин: ундан ташкари $M_0(x_0, y_0)$ нукта $f(x, y)$ функциянинг критик нуктаси, яъни $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}=0, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}=0$ булсин.У вактда (x_0, y_0) нуктада :

а) агар $$\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}-(\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x\partial y})^2>0$$

ва $\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}<0$ булса , $f(x,y)$ функция M_0 нуктада максимумга эга булади;

б) агар $\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}-(\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x\partial y})^2>0$

ва $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}>0$ булса , $f(x,y)$ функция минимумга эга булади;

в) агар $\frac{\partial^2 f(M_0)\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2\partial y^2}-(\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x\partial y})^2<0$

булса, $f(x,y)$ функция максимумга хам, минимумга хам эга булмайди;

г) агар $\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}-(\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x\partial y})^2=0$

булса, $f(x,y)$ функция экстримумга эга булиши хам , булмаслиги хам мумкин.Бу холда текширишни давом эттириш керак.

Теоремани исботсиз кабул киламиз ва унинг кулланилишига мисол караймиз.

Мисол: $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ функцияни экстремумга текширинг.

Ечими:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \frac{\partial Z}{\partial y} = 3y^2 - 3x,$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial Z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_0(0;0) \\ P_1(1;1) \end{cases}$$

P_0 (0,0) критик нуктани текширамиз

$$\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x^2} = 6x \Big/ \begin{matrix} =0 \\ x=0 \end{matrix}, \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial y^2} = 6y \Big/ \begin{matrix} =0 \\ y=0 \end{matrix},$$

$$\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x \partial y} = -3,$$

демак

$$\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x \partial y})^2 = -9 < 0,$$

функция P_0 (0,0) нуктада экстримумга эга эмас,яъни теоремадаги в) холи,
2) P_1 (I ,I) критик нуктани текширамиз

$$\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x^2} = 6, \frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial y^2} = 6, \frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x \partial y} = -3,$$

Демак,

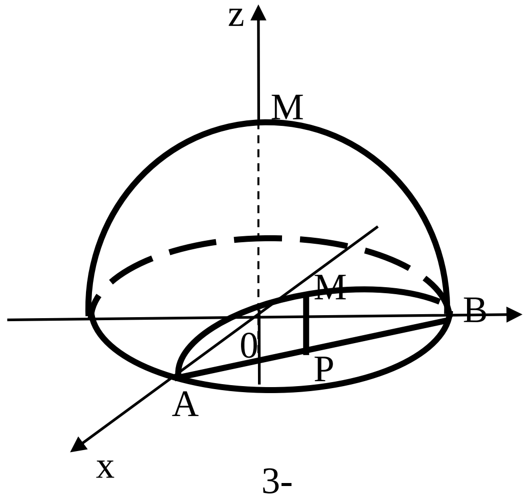
$$\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x \partial y})^2 = 27 > 0$$

$\frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x^2} > 0$ теореманинг б) холига асосан функция P(I,I) нуктада минимумга эришади, min*f* (*x*,*y*) = *f* (1;1)=-1

2. Шартли экстремум.

ТАЪРИФ: Z = *f* (*x*,*y*) функциянинг шартли экстремуми деб, бу функциянинг x ва y узгарувчиларини боглаш деб аталувчи $\varphi(x, y) = 0$ тенглама билан богланганлик шартида эришадиган экстремумга айтилади.

Агар Z=*f* (*x*,*y*) функция ва ОХУ текисликда $\varphi(x, y) = 0$ тенглама билан L чизик берилган булса, y холда Z = *f* (*x*,*y*) функциянинг L чизикнинг P_0 (x_0 , y_0) нуктага якин нукталардаги кийматларига нисбатан энг катта ёки энг кичик буладиган L чизикка тегишли P_0 (x_0 , y_0) нукта шартли экстремум булиши мумкин ва аксинча, шартли экстремум шартсиз экстремум



3-

булмаслиги мумкин ,

Мисол : $Z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ функция графиги юкори ярим сфера булади, равшанки, бу функция координата бошида максимумга эга ва унга ярим сферада М(0;0;1) нукта мос келади. L чизик А(1;0) ва В(0;1) нукталардан утувчи тугри чизик булсин, унинг тенгламаси: x+y-1=0 Геометрик нуктаи назардан, бу чизикнинг нукталари учун Z нинг энг катта киймат А ва В орасидаги $P_0(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ нуктада эришади .

Бу нуктага эса сиртда M_0 нукта мос келади.

Амалда шартли экстремум нукталарини топиш учун олдин боглаш тенгламасида y ва x оркали ошкор ифодалаш керак : y=y(x) кейин Z=f (x,y) функциянинг ифодасида урнига y(x) функцияни куйиб бир узгарувчили функция хосил килинади:

$$Z=f(x,y(x))$$

кейин функция экстремумга текширилади.

Каралаётган мисолда y=1-x, $Z=\sqrt{2x-2x^2}$. Бу функция $x=\frac{1}{2}$ да максимумга эришади. Боглаш тенгламасидан $y=\frac{1}{2}$ эканлиги келиб чикади.

$P_0(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ шартли экстремум нуктаси аникланди.

Саволлар:

1. Икки узгарувчили функциянинг максимуми ва минимумига таъриф беринг.
2. Экстремумнинг зарурий ва етарли шартларини келтиринг.
3. Шартли экстремум нима?

11 - МАЪРУЗА

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРГА КЕЛУВЧИ МАСАЛАЛАР. УМУМИЙ ВА ХУСУСИЙ ЕЧИМЛАР. УЗГАРУВЧИЛАРИ АЖРАЛАДИГАН ВА ЧИЗИКЛИ БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ТЕНГЛАМАЛАР.

Таянч иборалар: Дифференциал тенглама, умумий ечим, хусусий ечим дифференциал тенгламанинг тартиби, узгарувчилари ажраладиган тенглама, чизикли биринчи тартибли дифференциал тенглама .

Маъруза режаси:

1. Дифференциал тенгламага олиб келувчи масала. Умумий ва хусусий ечимлар.
2. Узгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалар.
3. Биринчи тартибли чизикли тенгламалар

Адабиётлар:

[**1**]. VIII боб, §1-3 [**4**]. XIII боб, §1-7

1. Дифференциал тенгламага олиб келувчи масала. Умумий ва хусусий ечимлар.

Мисол: Массаси m булган жисм бирор баландликдан ташлаб юборилган. Агар жисмга огирлик кучидан ташкари хавонинг тезликка пропорционал булган (пропорционаллик коэффициенти k) каршилик кучи таъсир этса, бу жисмнинг тушиш тезлиги v кандай конун билан узгаришини билиш, яъни v=f(t) муносабатни топиш талаб этилади.

Ечими. Ньютоннинг иккинчи конунига мувофик

$$\mathrm{m}\cdot\frac{dv}{dt}=F,$$

бунда $\frac{dv}{dt}$ харакатдаги жисмнинг тезланиши, F эса жисмга харакат йуналишида таъсир этувчи куч булиб, у огирлик кучи mg дан ва хавонинг каршилик кучи –kv дан ташкил топади. Демак,

$$\mathrm{m}\ \frac{dv}{dt}=\mathrm{mg}-\mathrm{kv}$$

Биз номаълум v функция билан $\frac{dv}{dt}$ хосиласи орасидаги богланишни ифодаловчи тенгламасини топдик. Унинг ечими

$$v = ce^{\frac{-kt}{m}} + \frac{mg}{k}$$

булади.

<u>ТАЪРИФ:</u> Дифференциал тенглама деб эркли узгарувчи x , номаълум $y = f(x)$ функция ва унинг $y', y'', ..., y^{(n)}$ хосилалари орасидаги богланишни ифодалайдиган тенгламага айтилади: $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$

Агар бу тенгликни $y^{(n)}$ хосилага нисбатан ечсак у куйидаги куринишга келади: $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$.

Изланган функция $y = f(x)$ битта эркли узгарувчига боглик, шунинг учун уни оддий дифференциал тенглама деб атаймиз. Кейинги маърузаларимизда факат оддий дифференциал тенгламаларни караймиз.

<u>ТАЪРИФ:</u> Дифференциал тенгламанинг тартиби деб тенгламага кирган хосиланинг энг юкори тартибига айтилади. Масалан,

$$y' - 4xy + 7 = 0$$

биринчи тартибли дифференциал тенглама,

$$y'' + 8y' - xy - \mathrm{tg} = 0$$

иккинчи тартибли дифференциал тенгламадир

<u>ТАЪРИФ:</u> Биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг,

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

умумий ечими деб битта ихтиёрий C узгармас микдорга боглик булган ва (1) тенгламага каноатлантирадиган $y = \varphi(x, C)$ функцияга айтилади.

<u>ТАЪРИФ:</u> Ихтиёрий C узгармас микдорга маълум $C = C_0$ киймат бериш натижасида $y = \varphi(x, C)$ умумий ечимдан хосил буладиган хар кандай $y = \varphi(x, C_0)$ функцияга хусусий ечим деб айтилади.

Мисол: Биринчи тартибли

$$y' = -\frac{y}{x}$$

тенглама учун $y = \frac{C}{x}$ функциялар умумий ечим булади, уларнинг графиклари эса интеграл чизиклар деб айтилади. Умумий ечимда C=1 деб олиб $y = \frac{1}{x}$ хусусий ечимни хосил киламиз.

Энди биринчи тартибли дифференциал тенглама ечимининг мавжудлиги хакидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

ТЕОРЕМА: Агар

$$y' = f(x, y)$$

тенгламада $f(x,y)$ функция ва ундан y буйича олинган $\frac{\partial f}{\partial y}$ хусусий хосила ХОУ текисликдаги (x_0, y_0) нуктани уз ичига олувчи бирор сохада узлуксиз функциялар булса, у холда берилган тенгламанинг $x=x_0$ булганда $y=y_0$ шартни каноатлантирувчи биргина $y=u(x)$ ечими мавжуддир.

$x=x_0$ булганда y функция берилган y_0 сонга тенг булиши керак деган шарт бошлангич шарт дейилади ва купинча $y\,|_{x=x_0} = y_0$ куринишда ёзилади.

2. Узгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалар.

Ушбу

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

куринишдаги тенглама узгарувчилари ажраладиган тенглама дейилади.Бу тенгламанинг иккала томонини $N_1(y)\ M_2(x)$ ифодага булиш йули билан уни узгарувчилари ажралган тенгламага келтириш мумкин:

$$\frac{M_1(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)}dx = -\frac{M_2(x)N_2(y)}{N_1(y)M_2(x)}dy, \qquad \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = -\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy,$$

Охирги тенгликни иккала томонини интеграллаб $y=\varphi(x,c)$ умумий ечимни хосил киламиз.

Мисол : Тенгламани ечинг:

$$(1+x)ydx+(1-y)dy=0$$

Ечими. Узгарувчиларини ажратамиз:

$$\frac{(1+x)ydx}{xy} + \frac{(1-y)xdy}{xy} = 0\ , \qquad \frac{(1+x)dx}{x} + \frac{(1-y)dy}{y} = 0\ ,$$

$$\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx + \int\left(\frac{1}{y}-1\right)dy, \qquad ln|x| + x + ln|y| - y + c,$$

$$ln|xy| + x - y = c.$$

Кейинги муносабат берилган интегралнинг умумий интеграли дейилади.

3. Биринчи тартибли чизикли тенгламалар.

Биринчи тартибли чизикли тенглама деб

$$y'+P(x)y=Q(x) \qquad (2)$$

куринишдаги тенгламага айтилади,бунда $P(x)$, $Q(x)$ лар x нинг берилган узлуксиз функциялари (ёки узгармас сонлар). (2) тенгламанинг ечимини x нинг иккита функциясининг купайтмаси шаклида излаймиз:

$$y=u(x)v(x)$$

Бу тенгликнинг иккала томонини дифференциаллаймиз.

$$y' = u'v + uv'$$

ва y билан y' кийматларини (2) тенгламага куямиз:

$$u'v + uv' + puv = Q \quad ,$$

ёки

$$uv' + u(v' + pv) = Q \qquad (3)$$

v функцияни

$$v' + pv = 0$$

тенгламадан топамиз. Бунинг учун унинг узгарувчиларини ажратамиз:

$$\frac{dv}{v} = pdx \quad ,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int pdx \quad , \ \ln \cdot |v| = -\int p(x)dx \quad , \ v = e^{-\int pdx}$$

Аникланган v функция кийматини (3) тенгламага куйиб номаълум u функцияни топишимиз мумкин:

$$u'e^{-\int pdx} = Q \ , \ du = e^{-\int pdx} Q(x)dx \ , u = \int e^{-\int pdx} Q(x)dx + C$$

Демак, чизикли биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг умумий ечими куйидаги куринишда булади :

$$y = e^{-\int pdx} (\int e^{-\int pdx} \cdot Q(x)dx + C)$$

Мисол: Ушбу тенгламани ечинг :

$$y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$$

Ечими. Умумий ечимни $y=u\cdot v$ куринишда кидирамиз.
$y=u\cdot v$ ва $y' = u'v + uv'$ хосиланинг ифодаларини дастлабки тенгламага куйсак, у

$$u'v + uv' - \frac{2}{x+1}u \cdot v = (x+1)^3 \quad ,$$

$$u'v + u(v' - \frac{2}{x+1}v) = (x+1)^3 \qquad (4)$$

куринишга келади.

v ни аниклаш учун

$$v' - \frac{2}{x+1}v = 0$$

тенгламани ечамиз :

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1} \quad , \int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|v| = 2\ln|x+1| \quad , v = (x+1)^2$$

Берилган v функциянинг кийматини (4) тенгламага куйиб u функцияни аниклаймиз:

$$u'(x+1)^2 = (x+1)^3 \; , \; u' = x+1$$

$$du = (x+1)dx \quad , \quad \int du = \int (x+1)dx \quad , \quad u = \frac{(x+1)^2}{2} + C$$

Энди дастлабки тенгламанинг умумий ечимини ёзишимиз мумкин :

$$y = (x+1)^2\left(\frac{(x+1)^2}{2} + C\right) \; .$$

Саволлар:

1.Оддий дифференциал тенгламага таъриф беринг.

2.Умумий ва хусусий ечимлар нима?

3.Узгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламаларни таърифланг ва умумий ечимини аниклаш тартибини келтиринг.

4.Чизикли биринчи тартибли дифференциал тенгламаларни таърифланг ва умумий ечимни аниклаш тартибини келтиринг.

12 - МАЪРУЗА

БИР ЖИНСЛИ ВА ТУЛА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛИ ТЕНГЛАМАЛАР. ЮКОРИ ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР. $y^{(n)}=f(x)$ КУРИНИШДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР.

Таянч иборалар : Биржинсли тенглама,тула дифференциалли тенглама, биржинсли функция.

Маъруза режаси:

1. Бир жинсли дифференциал тенгламалар.
2. Тула дифференциалли тенгламалар.
3. Юкори тартибли дифференциал тенгламалар.
4. $y^{(n)}=f(x)$ куринишдаги тенгламалар.

Адабиётлар:

[1]. VIII боб, §3, 9-10   [4]. XIII боб, §5, 9, 16-17

1) Биржинсли дифференциал тенгламалар.

ТАЪРИФ: Агар λ нинг хар кандай кийматида

$$f(\lambda x,\lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

айният тугри булса, $f(x, y)$ функция x ва y узгарувчиларга нисбатан n улчовли биржинсли функция деб аталади.

Мисол: $f(x, y) = x^4 - y^4$,

$$f(\lambda x,\lambda y) = (\lambda x)^4 -(\lambda y)^4 =\lambda^4 (x^4 -y^4)$$

Демак , берилган функция 4 улчовли биржинсли функция экан.

ТАЪРИФ: Агар биринчи тартибли

$$y'= f(x, y)$$

тенгламада $f(x, y)$ функция x ва y га нисбатан ноль улчовли бир жинсли функция булса, бундай тенглама бир жинсли биринчи тартибли тенглама дейилади. Уни, яна

$$y'= f(1, \frac{y}{x})$$

куринишда ёзиш мумкин. Бундан умумий ечимни $\frac{y}{x}$=t(x) куринишда излаш мумкинлиги келиб чикади.

Дархакикат $y=t\cdot x$; $y'=t+xt'$ эканлиги учун дастлабки бир жинсли биринчи тартибли тенглама

$$t+xt'=f(1,t)$$

куринишга келади. Бу ерда узгарувчиларни ажратиб ва келиб чиккан тенгликнинг иккала томонини интеграллаб t(x) функцияни аниклаймиз:

$$x\frac{dt}{dx}=f(1,t)-t$$

$$\frac{dt}{f(1,t)-t}=\frac{dx}{x}, \qquad \int\frac{dt}{f(1,t)-t}=\int\frac{dx}{x}.$$

Охирги тенгликдан t(x) ни топиб $y=t\cdot x$ га куйсак изланган умумий ечимни топган буламиз.

М и с о л :Тенгламани ечинг:

$$y'=\frac{x+y}{x}$$

Ечими. $f(x\,,y)=\dfrac{x+y}{x}$, $f(\lambda x,\lambda y)=\dfrac{\lambda x+\lambda y}{\lambda x}=\dfrac{x+y}{x}$.

Берилган тенглама бир жинсли экан. Умумий ечимни

$$y=t\cdot x,\; y'=t+xt'$$

куринишда кидирамиз:

$$t+xt'=\frac{x+tx}{x}, \qquad xt'=1+t-t\;, \qquad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{x,}$$

$$dt=\frac{dx}{x}, \qquad \int dt=\int\frac{dx}{x}, \qquad t=ln|\mathrm{x}|+\mathrm{C},$$

$$y=t\cdot x=(\,ln|\mathrm{x}|+\mathrm{C})\cdot x.$$

2) Тула дифференциалли тенгламалар.

ТАЪРИФ: Агар

$$\mathrm{M}(x,y)\mathrm{dx}+\mathrm{N}(x,y)\mathrm{dy}=0 \qquad (1)$$

тенгламада M(x,y) ва N(x,y) функциялар узлуксиз, дифференциалланувчи булиб, улар учун

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

мунособат бажарилса, (1) тенглама тула дифференциал тенглама дейилади. Агар (1)тенгламанинг чап томони тула дифференциал булса, у холда (2) шартнинг бажарилишини ва аксинча, (2) шарт бажарилса, (1)тенгламанинг чап томони бирор u(x,y) функциянинг тула дифференциали булишини исботлаймиз,яъни (L) тенгламани куриниши

$$\mathrm{d\,u}(x,y)=0$$

булади, демак, унинг умумий интеграли u(x,y)=c.

Дастлаб, (1)тенгламанинг чап томонини бирор u(x,y) функциянинг тула дифференциали деб фараз киламиз, яъни

$$\mathrm{M}(x,y)\mathrm{d}x+\mathrm{N}(x,y)\mathrm{d}y=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy, \qquad (3)$$

бу холда

$$\mathrm{M}=\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \mathrm{N}=\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Биринчи муносабатни y буйича , иккинчи муносабатни эса x буйича дифференциаллаб

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

тенгликларни хосил киламиз.

Иккинчи тартибли хосилалар узлуксиз деб фараз килсак,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

булади. (2) тенгликнинг тугрилиги исботланди.

(3) тенгламадан

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$$

эканлиги келиб чикади. Бундан

$$u=\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\varphi(y)$$

муносабатни топамиз, бу ерда x_0 ечим мавжуд булган сохадаги ихтиёрий нуктанинг абсциссаси, φ(y) эса аникланиши керак булган функция.

Охирги тенгликнинг иккала томонини y буйича дифференциаллаймиз ва натижани N(x,y) га тенглаймиз:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial M}{\partial y}dx+\varphi'(x)=N(x,y) \quad ,$$

аммо $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ булганлиги учун

$$\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial N}{\partial x}dx+\varphi'(y)=N \quad , \quad N(x,y)\Big|_{x_0}^{x}+\varphi'(y)=N(x,y) \quad ,$$

$$N(x,y)-N(x_0,y)+\varphi'(y)=N(x,y) \ , \ \varphi'(y)=N(x_0,y)$$

$$\varphi(y)=\int\limits_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy$$

Шундай килиб, тула дифференциалли тенгламанинг умумий ечими

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = C$$

булар экан.

3) Юкори тартибли дифференциал тенгламалар.

n – тартибли дифференциал тенглама берилган булсин :

$$y^{(n)} = f(x,y,y',y'',...y^{(n-1)}) \quad . \qquad (4)$$

ТАЪРИФ: n – тартибли дифференциал тенгламанинг умумий ечими деб n та c_1 , c_2 ,…,c_n ихтиёрий узгармас микдорга боглик булган ва (4) тенгламага каноатлантирадиган

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

функцияга айтилади.

Умумий ечимдан c_1 , c_2 ,…,c_n узгармас микдорларнинг тайин кийматларида хосил буладиган хар кандай функция хусусий ечим деб аталади.

4) $y^{(n)} = f(x)$ куринишдаги тенгламалар.

Энг содда n - тартибли тенглама

$$y^{(n)} = f(x)$$

куринишдаги тенглама булади. Унинг хар иккала тмонини n марта интеграллаб умумий ечимини куйидаги куринишда оламиз:

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} ...\int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx....dx + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}C_1 + \frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}C_2 + ... + C_n$$

Мисол: Ушбу

$$y'' = \sin x$$

тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечими. $y' = \int\limits_{0}^{x} \sin\, dx + C_1 = -\cos x + 1 + C_1$

$$y = -\int\limits_{0}^{x} (cosx - 1)dx + \int\limits_{0}^{x} c_1 dx + c_2 \ \ , \ e = -\sin\, x + xc_1 + c_2 .$$

Саволлар:

1.Бир жинсли биринчи тартибли тенгламаларни таърифланг. Уларнинг умумий ечимлари кандай аникланади?

2.Тула дифференциал тенгламаларни таърифланг. Уларнинг умумий ечимлари кандай аникланади?

3.Юкори тартибли дифференциал тенгламаларни таърифланг.

4.$y^{(n)}=f(x)$ куринишдаги тенгламаларнинг умумий ечимини келтиринг.

13 - М А Ъ Р У З А

ТАРТИБИ ПАСАЮВЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР .

Таянч иборалар: Тартиби пасаювчи тенгламалар, умумий интеграл, занжир чизик тенгламаси.

Маъруза режаси:

1. Тартиби пасаювчи дифференциал тенглама.
2. Умумий интеграл тушунчаси.
3. Занжир чизик тенгламаси.

Адабиётлар:

[**1**]. VIII боб, §9-10 [**4**]. XIII боб, §18

а) Ушбу

$$y''=f(x,y')$$

куринишдаги тенглама номаълум y функцияни ошкор холда уз ичига олмайди. Умумий ечимни топиш учун

$$y' = p\ (x)$$

белги киритамиз. Бу холда

$$y''= p'$$

булади.

y' ва y'' ларни дастлабки тенгламага куйиб x нинг номаълум р функцияга нисбатан биринчи тартибли

$$p'= f\ (x,,p)$$

тенгламани хосил киламиз. Бу тенгламани интеграллаб, унинг

$$p=p(x,C_1)$$

умумий ечимни топамиз, ундан кейин y'=р муносабатдан

$$y=\int p(x,C_1)dx+C_2$$

умумий ечимни топамиз.

Мисол : Занжир чизикнинг

$$y''=\frac{1}{a}\sqrt{1+y'}$$

дифференциал тенгламасини караймиз.

$$y' = p$$

деб оламиз, у холда

$$y'' =p'$$

демак, x нинг ёрдамчи Р функциясига нисбатан биринчи тартибли

$$p' = \frac{1}{a}\sqrt{1+y'}$$

дифференциал тенглама хосил булади.

Узгарувчиларини ажратсак,

$$\frac{dP}{\sqrt{1+P^2}} = \frac{dx}{a},$$

$$\ln(P+\sqrt{1+P^2}) = \frac{x}{a} + C_1$$

$$P = sh\frac{x}{a} + C_1$$

Аммо y' = р булгани учун , кейинги мунособат изланаётган y функцияга нисбатан дифференциал тенгламани ифодалайди. Уни интегралласак, занжир чизикнинг тенгламаси хосил булади:

$$y = a\,ch\frac{x}{a} + C_1x + C_2$$

Ушбу

$$y\,\big|_{x=0} = a, \qquad y'\,\big|_{x=0} = 0$$

бошлангич шартларни каноатлантирувчи хусусий ечимни топамиз. Биринчи шарт $C_2=0$ ва иккинчи шарт $C_1=0$ ни беради.

Натижада

$$y = a\,ch(\frac{x}{a})$$

ифодани хосил киламиз.

Изох : Шундай усул билан

$$y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)})$$

тенгламани хам интеграллаш мумкин.

$y^{(n-1)}$= р деб олиб р ни аниклаш учун

$$p' = f(x,,p)$$

тенгламани хосил киламиз.

Бундан р ни x нинг функцияси каби аниклаб, $y^{(n-1)}$= р муносабатдан y ни топамиз.

б) x эркла узгарувчини ошкор холда уз ичига олмаган

$$y'' = f(y\,;\,y')$$

куринишдаги тенгламани караймиз. Бу тенгламани ечиш учун яна

$$y' = p(y)$$

деб оламиз. Аммо энди р ни y нинг функцияси деб хисоблаймиз. Бу холда

$$y'' = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p'\cdot p.$$

y' ва y'' хосилаларнинг ифодаларини

$$y'' = f(y\,;\,y')$$

тенгламага куйиб, ёрдамчи р функцияга нисбатан биринчи тартибли

$$pp' = f\,(y,p)$$

тенгламани хосил киламиз. Бунда p ни y ва ихтиёрий C_1 узгармас микдорнинг функцияси каби аниклаймиз:

$$p=p(y,C_1)$$

Бу кийматни

$$y'=p$$

мунособатга куйсак, x нинг y функцияси учун

$$y'=p(y,C_1)$$

дифференциал тенглама хосил булади. Узгарувчиларни ажратиб,

$$\frac{dy}{p(y,C_1)}=dx$$

тенгламани хосил киламиз.

Охирги тенгламани интеграллаб, дастлабки тенгламанинг

$$\Phi(x,y,C_1,C_2)=0$$

умумий интегрални топамиз.

Мисол : Ушбу

$$3y''=y^{-\frac{5}{3}}$$

тенгламанинг умумий интегралини топинг.

Ечими. p ни y нинг функцияси эканини билган холда $y'=p$ деб оламиз. Бу холда $y''=p'\cdot p$ булади ва биз ёрдамчи p функция учун биринчи тартибли тенглама хосил киламиз:

$$3pp'=y^{-\frac{5}{3}}$$

Бу тенгламани интеграллаймиз:

$$p^2=C_1y^{-\frac{2}{3}}, \qquad p=\pm\sqrt{C_1-y^{-\frac{2}{3}}}$$

Аммо $y'=p$, демак, y ни аниклаш учун

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1-y^{-\frac{2}{3}}}}=dx \qquad , \qquad \frac{y^{\frac{1}{3}}dy}{\pm\sqrt{C_1y^{\frac{2}{3}}-1}}=dx$$

тенгламани хосил киламиз, бундан

$$x + C_2 = \pm\int \frac{y^{\frac{1}{3}}dy}{\sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1}}$$

кейинги интегрални хисоблаш учун

$$C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1 = t^2$$

алмаштириш бажарамиз. Бу холда

$$y^{\frac{1}{3}} = (t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{C_1^{\frac{1}{2}}} \quad , \qquad dy = 3t(t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{C_1^{\frac{1}{2}}} dt$$

Демак

$$\int \frac{y^{\frac{1}{2}}dy}{\sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1}} = \frac{1}{C_1^2}\int \frac{3t(t^2 + 1)}{t} dt = \frac{3}{C_1^2} = \left(\frac{t^3}{3} + t\right) =$$

$$= \frac{1}{C_1^2}\sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1} \cdot (C_1 y^{\frac{2}{3}} + 2) \quad .$$

Охирги натижадан

$$x + C_2 = \pm\frac{1}{C_1^2}\sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1} \cdot (C_1 y^{\frac{2}{3}} + 2)$$

эканини топамиз.

Саволлар:

1.Тартиби пасаювчи иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар турларини келтиринг.

2. Тартиби пасаювчи иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимлари кандай аникланади?

14 - М А Ъ Р У З А

ЮКОРИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИКЛИ УЗГАРМАС КОЭФФИЦЕНТЛИ БИР ЖИНСЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР.

Таянч иборалар: Чизикли эркли функциялар, Вронский детерминанти, характеристик тенглама.

Маъруза режаси:

1. Бир жинсли чизикли тенгламалар.
2. Узгармас коэффицентли 2-тартибли бир жинсли чизикли тенгламалар.
3. Узгармас коэффицентли n-тартибли бир жинсли тенгламалар.

Адабиётлар:

[**1**]. VIII боб, §11-19 [**4**]. XIII боб, §20-22

1) Бир жинсли чизиикли тенгламалар.

ТАЪРИФ: Агар n-тартибли диффферренциал тенглама номаълум y функция ва унинг $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ хосилаларига нисбатан биринчи даражали булса, бундай тенглама чизикли дифференциал тенглама дейилади:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x), \qquad (1)$$

бунда $a_0,, a_1, a_2, \dots, a_n$ ва $f(x)$ лар x нинг маълум функциялари ёки узгармас сонлар. Бундан кейин $a_0,, a_1, a_2, \dots, a_n$ ва $f(x)$ функцияларнинг x нинг барча кийматларида узлуксиз функция ва a_0 коэффицент бирга тенг деб фараз киламиз. (1) тенгламанинг унг томонида турган $f(x)$ функция тенгламанинг унг томони деб аталади.

Агар $f(x) \neq 0$ булса, бу холда тенглама бир жинслимас чизикли тенглама дейилади.

Агар $f(x) = 0$ булса, бу холда тенглама

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \qquad (2)$$

куринишда булади ва бир жинсли чизикли тенглама деб айтилади.

Бир жинсли чизикли тенгламаларнинг баъзи хоссаларини 2-тартибли тенгламалар мисолида курсатамиз.

ТЕОРЕМА : Агар y_1 ва y_2 2-тартибли бир жинсли чизикли

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (3)$$

тенгламанинг иккита хусусий ечими булса , у холда y_1+y_2 хам бу тенгламанинг ечими булади.

Исбот : Теореманинг шартлари бажарилган булсин, куйидаги тенгликлар уринли булади:

$(y_1+y_2)''+a_1(y_1+y_2)'+a_2(y_1+y_2)=(y_1''+a_1y_1'+a_2y_1)+y_2''+a_1y_2'+a_2y=0$

Теорема исботланди.

ТЕОРЕМА : Агар y_1 функция (3) нинг ечими булса , у холда С·y_1 хам (3) тенгламанинг ечими булади.

Исбот : Теореманинг шарти бажарилган булсин, унда унинг исботи куйидаги тенгликлардан келиб чикади:

$(C\cdot y_1)''+a_1(C\cdot y_1)'+a_2(C\cdot y_1)=C(y''+a_1y'+a_2y=0)=C\cdot0=0.$

ТАЪРИФ: Агар [*а* ; в] кесмада (3) тенглама иккита y_1 ва y_2 ечимининг нисбати узгармас микдрога тенг булмаса, яъни $\frac{y_1}{y_2}\neq const$ булса, y_1 ва y_2 ечимлар [*а* ; в] кесмада чизикли боглик булмаган ечимлар дейилади.

ТАЪРИФ: Агар y_1 ва y_2 ларнинг функцияси булса, у холда

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

детерминант Вронский детерминанти дейилади.

ТЕОРЕМА : Агар y_1 ва y_2 функциялар [*а* ; в] кесмада чизикли боглик булса, у холда бу кесмада Вронский детерминанти айнан нолга тенг булади.

Исбот : $y_2=\lambda y_1$ булса , у холда $y'_2=\lambda y'_1$ булади ва

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_2 \\ y_1' & \lambda y_2' \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=0$$

ТЕОРЕМА : Агар (3) тенгламанинг y_1 ва y_2 ечимлари [*а*;*в*] кесмада чизикли эркли булса, бу ечимлардан тузилган W Вронский детерминанти курсатилган кесманинг хеч бир нуктасида нолга айланмайди.

Бу ва кейинги теоремани исботсиз кабул киламиз.

ТЕОРЕМА : Агар y_1 ва y_2 функциялар (3) тенгламанинг иккита чизикли эркли ечими булса, у холда

$$y=C_1y_1+C_2y_2$$

(бунда C_1 ва C_2-ихтиёрий узгармас микдорлар), (3) тенгламанинг умумий ечими булади. Бунда y_1 ва y_2 ечимлар (3) тенгламанинг асосий ечимлари деб айтилади.

2) Узгармас коэффициентли 2-тартибли бир жинсли чизикли тенгламалар.

Иккинчи тартибли бир жинсли чизикли тенглама

$$y''+p\,y'+q\,y=0 \qquad (4)$$

берилган булсин, бунда p ва q узгармас хакикий сонлар.

Бу тенгламанинг иккита чизикли эркли хусусий ечимини $y=e^{kx}$ куринишда излаймиз, (k=const). Бу холда $y'=\mathrm{k}\,e^{kx}$, $y''=\mathrm{k}^2 e^{kx}$.
y, y' , y'' лар кийматларини (4) тенгламага куйсак.

$$e^{kx}\cdot(\mathrm{k}^2+\mathrm{pk}+\mathrm{q})=0$$

муносабат хосил булади. Аммо $e^{kx}\neq 0$, демак

$$\mathrm{k}^2+\mathrm{pk}+\mathrm{q}=0$$

тенглик хосил булади. Бу тенглама (4) тенгламанинг характеристик тенгламаси деб айтилади.

Бунда

$$k_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\ , \qquad k_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,.$$

куйидаги холлар булиши мумкин.
1) k_1 ва k_2 хакикий ва бир-бирига тенг булмаган сонлар, ($\mathrm{k}_1\neq\mathrm{k}_2$). Бу холда

$$y_1=e^{k_1x}\ , \qquad y_2=e^{k_2x}$$

функциялар хусусий ечимлар булади.

Бу ечимлар

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{e^{k_2x}}{e^{k_1x}}=e^{(k_2-k_1)x}\neq 0$$

булгани учун чизикли эркли булади. Демак умумий ечим

$$y=\mathrm{C}_1e^{k_1x}+\mathrm{C}_2e^{k_2x}$$

куринишда булади.
2) Характеристик тенгламанинг илдизлари хакикий ва тенг булганда, яъни $\mathrm{k}_1=\mathrm{k}_2$ умумий ечим

$$y=(\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2x)\,e^{k_1x} \qquad (5)$$

куринишда булади.
3) Характеристик тенгламанинг илдизлари комплекс сонлар булган холда. яъни $\mathrm{k}_1=\alpha-\mathrm{i}\beta$ ва $\mathrm{k}_2=\alpha+\mathrm{i}\beta$ булганда умумий ечим

$$y=e^{\alpha k}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x) \qquad (6)$$

куринишда булади.
(5) ва (6) муносабатларни исботсиз кабул киламиз.

3) Узгармас коэффициентли n-тартибли бир жинсли тенгламалар.

n-тартибли бир жинсли чизикли

$$y^{(\mathrm{n})}+a_1y^{(\mathrm{n}-1)}+a_2y^{(\mathrm{n}-2)}+\ldots+a_ny=0 \qquad (7)$$

тенгламани караймиз. $a_1, a_2,\ldots, a_n$ ларни узгармас сонлар деб фараз киламиз.
ТАЪРИФ: Агар [a ; в] кесмада x нинг барча кийматлари учун
$\varphi_\mathrm{n}(x)=\mathrm{A}_1\varphi_1(x)+\mathrm{A}_2\varphi_2(x)+\ldots+\mathrm{A}_{\mathrm{n}-1}\varphi_{\mathrm{n}-1}(x)$
тенглик уринли булса, бунда $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2,\ldots, \mathrm{A}_\mathrm{n}$ хаммаси бир вактда нолга тенг булмайдиган узгармас сонлар, у холда $\varphi_\mathrm{n}(x)$ функция $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …,$\varphi_{\mathrm{n}-1}(x)$ функциялар оркали чизикли ифода этилади дейилади. Агар n та $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,…,

$\varphi_{n-1}(x)$, $\varphi_n(x)$ функцияларнинг хеч бири колганлари оркали чизикли ифода этилмаса, у функциялар чизикли эркли функциялар деб аталади.

ТЕОРЕМА : Агар y_1 , y_2 ,…, y_n функциялар (7) тенгламанинг чизикли эркли ечимлари булса, у холда

$$y = C_1y_1 + C_2y_2+\ldots+ C_ny_n)$$

унинг умумий ечими булади, бунда C_1, C_2,…C_n ихтиёрий узгармас сонлар. Умумий ечим куйидагича топилади:

1) Характеристик тенгламани тузамиз:

$$k^n +a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} +\ldots+ a_n =0.$$

2) Характеристик тенгламанинг k_1 , k_2 ,…,k_n илдизларини топамиз.

3) Хар бир каррали k илдизга e^{kx} хусусий ечим мос келади.

4) Хар бир жуфт $k^{(1)} =\alpha-i\beta$, $k^{(2)} =\alpha+i\beta$ кушма комплекс бир каррали илдизларга иккита $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ва $e^{\alpha x}\sin\beta x$ хусусий ечимлар тугри келади.

5) Хар бир r каррали хакикий илдизга r та чизикли эркли

$$e^{kx} , x e^{kx} , \ldots, x^{2-1} e^{kx}$$

хусусий ечимлар тугри келади.

6) Хар бир μ каррали жуфт $k^{(1)} =\alpha-i\beta$, $k^{(2)} =\alpha+i\beta$ кушма комплекс илдизга 2μ та

$$e^{\alpha x}\cos\beta x ,x e^{\alpha x}\cos\beta x ,\ldots, x^{\mu-1} e^{\alpha x}\cos\beta x ,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x , x e^{\alpha x}\sin\beta x ,\ldots, x^{\mu-1} e^{\alpha x}\sin\beta x$$

хусусий ечимлар тугри келади.

7) n та чизикли эркли y_1 , y_2 ,…, y_n хусусий ечимларни топгандан сунг (7) тенгламанинг умумий ечими тузилади:

$$y = C_1 y_1 +C_2 y_2 +\ldots+C_ny_n$$

Мисол : Тенгламанинг умумий ечимини топинг :

$$y^{(4)}-y =0$$

Ечими. Характеристик тенгламани тузиб илдизларини аниклаймиз :

$$k^4 -1=0 \ , k_1=1,\ k_2= -1 , k_3 = i ,\ k_4= - i$$

Энди умумий ечимни ёзишимиз мумкин :

$$y =C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x +C_4\sin x .$$

Саволлар:

1. Юкори тартибли чизикли узгармас коэффициентли биржинсли дифференциал тенгламаларни таърифланг ва хоссаларини келтиринг.

15 - М А Ъ Р У З А

УЗГАРМАС КОЭФФИЦЕНТЛИ ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ БИР ЖИНСЛИМАС ЧИЗИКЛИ ТЕНГЛАМАЛАР.

Таянч иборалар: Вариациялаш усули, номаълум коэффициентлар усули.

Маъруза режаси:

1. Бир жинслимас II тартибли чизикли тенгламалар.
2. Ихтиёрий узгармасларни вариациялаш усули.
3. Узгармас коэффицентли иккинчи тартибли бир жинслимас чизикли тенгламалар.

Адабиётлар:

[**1**]. VIII боб, §20-21 [**4**]. XIII боб, §23-25

1) Бир жинслимас иккинчи тартибли чизикли тенгламалар.

Бир жинслимас иккинчи тартибли чизикли тенгламалар деб

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \qquad (1)$$

куринишдаги тенгламага айтилади. Бунда a_1, a_2,, f бир узгарувчили функциялар ёки узгармаслар.

ТЕОРЕМА : Бир жинслимас (1) тенглама умумий ечими бу тенгламанинг бирор y^* хусусий ечими билан мос бир жинсли

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (2)$$

тенгламанинг $\bar{y}$ умумий ечими йигиндиси каби ифодаланади, яъни

$$y = \bar{y} + y^*$$

Теоремани исботсиз кабул киламиз.

2) Ихтиёрий узгармас микдорларни вариациялаш усули.

Бир жинсли (2) тенгламанинг умумий ечими топилди деб фараз киламиз:

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad (3)$$

Бу ерда C_1 ва C_2 лар узгармас микдорлар.

(1) тенгламанинг хусусий ечими y^* ни аниклаш учун (3) муносабатда C_1 ва C_2 лар узгармас микдорларни x нинг функцияси деб олиб y^* ни

$$y^* = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 \qquad (4)$$

куринашда кидирамиз. Бунда C_1 (x) ва $C_2(x)$ функциялар аниклаш керак булган номаълум функциялар.

(4) тенгликни дифференциаллаймиз:

$$y^{*\prime}=C_1(x)\,y_1'+C_2(x)\,y_2'+C_1'(x)\,y_1+C_2'(x)\,y_2$$

$C_1(x)$ ва $C_2(x)$ функцияларни

$$C_1'(x)\,y_1+C_2'(x)\,y_2=0 \tag{5}$$

тенглик бажариладиган килиб танлаб оламиз. Унда биринчи тартибли $(y^*)'$ хосила

$$y^{*\prime}=C_1(x)\,y_1'+C_2(x)\,y_2' \tag{6}$$

куринишга келади. Энди бу ифодани дифференциаллаб, $(y^*)''$ ни топамиз:

$$y^{*\prime\prime}=C_1(x)\,y_1''+C_2(x)\,y_2''+C_1'(x)\,y_1'+C_2'(x)\,y_2' \tag{7}$$

(4), (6), (7) лардаги y^*, $(y^*)'$,$(y^*)''$кийматларини (1) тенгламага куйиб

$$C_1(x)\,y_1''+C_2(x)\,y_2''+C_1'(x)\,y_1'+C_2'(x)\,y_2'+$$
$$+a_1(C_1(x)\,y_1'+C_2(x)\,y_2')+a_2(C_1(x)\,y_1+C_2(x)\,y_2)=f(x)$$

ёки

$$C_1(x)(y_1''+a_1y_1'+a_2y_1)+C_2(x)(y_2''+a_1y_2'+a_2y_2)+$$
$$+C_1'(x)y_1'+C_2'(x)\,y_2'=f(x)$$

тенгликни хосил киламиз. Агар y_1 ва y_2 функциялар (2) тенгламанинг ечимлари эканлигини назарга олсак, охирги тенглик

$$C_1'(x)y_1'+C_2'(x)\,y_2'=f(x) \tag{8}$$

куринишни олади.Шундай килиб, номаълум $C_1(x)$ ва $C_2(x)$ функцияларни аниклаш учун (5) ва (8) тенгликлардан тузилган тенгламалар системасини ечиш керак. Аникланган $C_1(x)$ ва $C_2(x)$ функцияларни (4) га куйиб y^* хусусий ечимни топамиз.

Мисол: Ушбу

$$y''-\frac{1}{x}y'=x$$

тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечими. Умумий ечимни

$$y=\bar{y}+y^*$$

куринишда кидирамиз. $\bar{y}$ умумий ечимни

$$\bar{y}''-\frac{1}{x}\,\bar{y}'=0$$

тенгламадан топамиз:

$$\frac{\bar{y}''}{\bar{y}'}=\frac{1}{x}, \qquad\qquad \frac{d\bar{y}'}{\bar{y}'}=\frac{dx}{x},$$

$$\ln\bar{y}'=\ln x+\ln C, \qquad\qquad \bar{y}'=C_1x.$$

демак

$$\bar{y}=C_1x^2+C_{2.}$$

Хусусий y^* ечимни

$$y^*=C_1(x)\cdot x^2+C_2(x)$$

куринишда кидирамиз. Бунинг учун (5) ва (8) тенгламалар системасини тузиб $C_1(x)$ ва $C_2(x)$ номаълум функцияларни топамиз:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot x^2+C_2'(x)=0 \\ 2C_1'(x)\cdot x^2+C_2'(x)\cdot 0=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x)=\frac{1}{2} \\ C_2'(x)=-\frac{1}{2}x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x)=\frac{x}{2}+\overline{C}_1 \\ C_2(x)=-\frac{x^3}{2}+\overline{C}_2 \end{cases}.$$

$y*$ хусусий ечим

$$y*=\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}=\frac{x^3}{3}$$

куринишда экан.

Демак, дастлабки тенгламанинг умумий ечими

$$y=C_1x^2+C_2+\frac{x^3}{3}$$

булади.

3) Узгармас коэффициентли иккинчи тартибли бир жинслимас чизикли тенгламалар.

Ушбу

$$y''+p\,y'+q\,y=f(x) \qquad (9)$$

тенглама берилган булсин, бунда p, q лар хакикий сонлар.

(9) тенгламанинг умумий ечимини

$$y=\bar{y}+y*$$

куринишда излаймиз. Бунда $\bar{y}$ (9) тенгламага мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими, $y*$ эса (9) тенгламанинг хусусий ечими.

$\bar{y}$ ни топиш учун

$$k^2+p\,k+q=0$$

характеристик тенгламани ечиб

$$\bar{y}=C_1\,y_1+C_2\,y_2$$

умумий ечимни тузамиз.

(9) тенгламага узгармас коэффициентли тенглама эканлиги учун, баъзан, хусусий $y*$ ечимни осонрок топилади. (9) тенгламанинг унг томони курсаткичли функция билан купхад купайтмасидан иборат

$$f(x)=P_n(x)\,e^{\alpha k}$$

куринишда булсин, бунда $P_n(x)$ n-даражали купхад. У холда куйидаги хусусий холлар булиши мумкин:

1) α сони $k^2+p\,k+q=0$

характеристик тенгламанинг илдизи булмаган хол.

Бу холда хусусий ечим

$$y*=x(\mathrm{A}_0x^{\mathrm{n}}+\mathrm{A}_1x^{\mathrm{n}-1}+\ldots+\mathrm{A}_{\mathrm{n}})\,e^{\alpha k}.$$

куринишда излаш керак. Бу ердаги $y*$ ни (9) тенгламага куйиб, тенгламанинг иккала томонидаги $e^{\alpha k}$ га кискартириб, кейин бир хил даражали x лар олдидаги коэффициентларни бир-бирига тенглаб олсак, номаълум A_0, A_1,… ,A_n коэффициентларни топиш учун (n+1) номаълумли (n+1) тенгламали чизикли тенгламалар системасини хосил киламиз. Бундай усул номаълум коэффициентлар усули деб айтилади. Агар шу системадан A_0, A_1,… ,A_n ларни топсак, y* ни ёзишимиз мумкин булади.

2) α характеристик тенгламанинг бир каррали илдизи булган хол. Бундай холда хусусий ечимни

$$y^*=(A_0 x^n + A_1 x^{n-1}+\ldots+A_n)x\, e^{\alpha k}.$$

куринишда кидириш максадга мувофик. A_0, A_1,… ,A_n лар юкорида курсатилган номаълум коэффициентлар усули оркали аникланади.

в) α сон характеристик тенгламанинг икки каррали илдизи булган холда хусусий y* ечимни

$$y^*=x^2(A_0 x^n + A_1 x^{n-1}+\ldots+A_n)\, e^{\alpha k}.$$

куринишда излаб, A_0, A_1,… ,A_n ларни номаълум коэффициентлар усули оркали аниклаймиз.

Мисол: Ушбу тенглама ечилсин

$$y''-7y'+6y=(x-2)\, e^x.$$

Ечими. Умумий ечимни

$$y=\bar{y}+y^*$$

куринишда кидирамиз. $\bar{y}$ мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечимидир. Уни ёзиш учун

$$k^2 - 7k + 6 = 0$$

характеристик тенгламанинг илдизларини топамиз: $k_1=1$, $k_2=6$

Демак, $\bar{y}=C_1 e^x + C_2 e^{6x}$

y* хусусий ечимни ($\alpha=k_1=1$)

$$y^*=x(Ax+B)\, e^x$$

куринишда кидирамиз. А ва В ларни топиш учун номаълум коэффициентлар усулидан фойдаланамиз:

$$y^{*\prime\prime}-7y^{*\prime}+6y^*=[(Ax^2+Bx)+(4Ax+2B)+2A-7(Ax^2+Bx)-7(2Ax+2B)+$$
$$+6(Ax^2+Bx)]\, e^x=(x-2)\, e^x,$$

ёки $$(-10Ax-5B+2A)\, e^x=(x-2)\, e^x,$$

$$-10A=1, \quad -5B+2A=-2, \quad A=-\frac{1}{10}, \quad B=\frac{9}{25},$$

Шундай килиб хусусий ечим

$$y^*=x\left(-\frac{1}{10}x+\frac{9}{25}\right) e^x$$

ва умумий ечим

$$y= C_1 e^x+ C_2 e^{6x}+x\left(-\frac{1}{10}x+\frac{9}{25}\right) e^x$$

булади.

Саволлар:

1. Узгармас коэффициентли иккинчи тартибли бир жинслимас чизикли тенгламаларни таърифланг.
2. Ихтиёрий узгармасларни вариациялаш усулини келтиринг.

16 – М А Ъ Р У З А

УЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ЧИЗИКЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ.

Таянч иборалар : Дифференциал тенгламалар системаси, системанинг хусусий ечимлари, системанинг умумий ечимлари, системанинг детерминанти, характеристик тенглама.

Маъруза режаси:

1. Дифференциал тенгламалар системаси.
2. Системанинг хусусий ечимлари.
3. Системанинг умумий ечимлари.
4. Системанинг детерминанти.
5. Характеристик тенглама.

Адабиётлар:

[**1**]. VIII боб, §22 [**4**]. XIII боб, §29-30

Ушбу

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \\ .... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

дифференциал тенгламалар системаси берилган булсин, бунда $a_{i\ j}$ коэффициентлар узгармас сонлар, x аргумент, $y_1(x)$, $y_2(x)$,…,$y_n(x)$ изланаётган функциялар.

(1) система узгармас коэффициентли чизикли бир жинсли дифференциал тенгламалар системаси дейилади. Унинг хусусий ечимини куйидаги куринишда излаймиз:

$$y_1 = \alpha_1 e^{\kappa x} , y_2 = \alpha_2 e^{\kappa x} ,…, y_n = \alpha_n e^{\kappa x} \qquad (2)$$

$\alpha_1 e^{\kappa x}$, $\alpha_2 e^{\kappa x}$,…, $\alpha_n e^{\kappa x}$ функциялар (1) тенгламалар системасини каноатлантирадиган узгармас α_1 , α_2 ,…, α_n ва k сонларни аниклаш талаб килинади. Уларни (1) системага куйиб ушбуларни хосил киламиз:

$$\left.\begin{array}{l}
к\alpha_1 e^{кx} = (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n)e^{кx} \\
к\alpha_2 e^{кx} = (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n)e^{кx} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
к\alpha_n e^{кx} = (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + a_{nn}\alpha_n)e^{кx}
\end{array}\right\}$$

$e^{кx}$ га кискартирамиз. Барча хадларини бир томонга утказиб ва α_1 , α_2 , …,α_n олдидаги коэффициентларни туплаб, куйидаги тенгламалар системасини хосил киламиз:

$$\left.\begin{array}{l}
(a_{11} - к)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n = 0 \\
a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - к)\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + (a_{nn} - к)\alpha_n = 0
\end{array}\right\} \tag{3}$$

α_1, α_2, … ,α_n , ва k ларни (3) системани каноатлантирадиган килиб танлаб оламиз. Бу тенглама α_1, α_2, … ,α_n , га нисбатан чизикли алгебраик тенгламалар системасидир. (3) системанинг детерминантини тузамиз:

$$\Delta(к) = \begin{vmatrix}
a_{11} - к \quad a_{12}...a_{1n} \\
a_{21} \quad a_{22} - к... a_{2n} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n1} \quad a_{n2}.....(a_{nn} - к)
\end{vmatrix} \tag{4}$$

Агар k шундай булсаки, $\Delta \neq 0$ булса, у холда (3) система факат

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

ечимга эга булади ва (2)дан

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$$

(1) системанинг ечими келиб чикади. Бундай ечимлар бизни кизиктирмайди. (1) тенгламалар системасининг нолдан фаркли (2) куринишдаги ечимларни k нинг шундай кийматларида хосил киламизки, бу кийматларда (4) детерминант нолга айланади. Демак, k ни аниклаш учун куйидаги тенгламага келамиз:

$$\begin{vmatrix}
a_{11} - к & a_{12} & ... \, a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} - к & ... \, a_{2n} \\
\dots\dots\dots & \dots\dots & \\
a_{n1} & a_{n2} & ... \, a_{nn} - к
\end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

Бу тенглама (1) системанинг харктеристик тенгламаси дейилади, унинг илдизлари характеристик тенгламанинг илдизлари дейилади. Бир неча холни куриб чикамиз.

1) Характеристик тенгламанинг илдизлари хакикий ва хар хил.

Характеристик тенгламанинг илдизларини $к_1$, $к_2$,…, $к_n$ билан белгилаймиз. Хар бир $к_i$ илдиз учун (3) системани ёзамиз ва

$$\alpha_1^{(i)},\alpha_2^{(i)},...,\alpha_n^{(i)}$$

коэффициентларни аниклаймиз. Шундай килиб, куйидагиларни хосил киламиз:

$к_1$ илдиз учун (1) системанинг ечими

$$y_1^{(1)}=\alpha_1^{(1)}\,e^{к_1x},\quad y_2^{(1)}=\alpha_2^{(1)}\,e^{к_1x},\quad \ldots, y_n^{(1)}=\alpha_n^{(1)}\,e^{к_1x},$$

$к_2$ илдиз учун (1) системанинг ечими

$$y_1^{(2)}=\alpha_1^{(2)}\,e^{к_2x},\quad y_2^{(2)}=\alpha_2^{(2)}\,e^{к_2x},\quad \ldots, y_n^{(2)}=\alpha_n^{(2)}\,e^{к_2x};$$

. . . .

$к_n$ илдиз учун (1) системанинг ечими

$$y_1^{(n)}=\alpha_1^{(n)}e^{к_nx},\quad y_2^{(n)}=\alpha_2^{(n)}\,e^{к_nx},\quad \ldots, y_n^{(n)}=\alpha_n^{(n)}\,e^{к_nx}.$$

Бевосита (1) тенгламага куйиш йули билан

$$\begin{cases} y_1 = C_1\alpha_1^{(1)}e^{л_1x}+C_2\alpha_1^{(2)}e^{л_2x}+...+C_n\alpha_1^{(n)}e^{л_nx}\\ y_2 = C_1\alpha_2^{(1)}e^{л_1x}+C_2\alpha_2^{(2)}e^{л_2x}+...+C_n\alpha_2^{(n)}e^{л_nx}\\ .\\ y_1 = C_1\alpha_n^{(1)}e^{л_1x}+C_2\alpha_n^{(2)}e^{л_2x}+...+C_n\alpha_n^{(n)}e^{л_nx}\end{cases}$$

функциялар системаси хам , бунда C_1, C_2, …,C_n ихтиёрий узгармас микдорлар, (1) дифференциал тенгламалар системасининг ечими булишига ишонч хосил килиш мумкин. Бу (1) системанинг умумий ечимидир. Узгармас микдорларнинг шундай кийматларини топиш мумкинки, бу кийматларда ечимнинг берилган бошлангич

$$y_1|_{\,x=x_0}=y_{10}\ ,\qquad y_2|_{\,x=x_0}=y_{20}\ ,\ \ldots\ ,\qquad y_n|_{\,x=x_0}=y_{n0}\ ;$$

шартларни каноатлантиришини курсатиш мумкин, бунда x_0, y_{10}, y_{20}, … , y_{n0} олдиндан маълум сонлар.

Мисол : Ушбу

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=2y_1+2y_2\\ \dfrac{dy_2}{dx}=y_1+3y_2\end{cases}$$

тенгламалар системасинингумумий ечимини топинг.

Ечими. Характеристик тенглама тузамиз :

$$\begin{vmatrix}2-к & 2\\ 1 & 3-к\end{vmatrix}=0$$

ёки k^2-5k+4=0, k_1=1 , k_2=4.

Система ечимини бундай куринишда излаймиз:

$$y_1^{(1)}=\alpha_1^{(1)}e^{x},\qquad\qquad y_2^{(1)}=\alpha_2^{(1)}e^{x},$$

$$y_1^{(2)}=\alpha_1^{(2)}e^{4x},\qquad\qquad y_2^{(2)}=\alpha_2^{(2)}e^{4x},$$

k_1=1 илдиз учун (3) системани тузамиз:

ва $\alpha_1^{(1)}$ в $\alpha_2^{(1)}$ни аниклаймиз.

$$\begin{cases}(2-1)\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0\\ \alpha_1^{(1)}+(3-2)\alpha_2^{(1)}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0\\ \alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0\end{cases}$$

Бу тенгликлардан $\alpha_2^{(1)}=-\frac{1}{2}\alpha_1^{(1)}$ни топамиз. $\alpha_1^{(1)}=1$ десак, $\alpha_2^{(1)}=-\frac{1}{2}$ ни хосил киламиз. Шундай килиб, системанинг ечимини хосил килдик:

$$y_1^{(1)}=e^x,\qquad у_2^{(1)}=-\frac{1}{2}e^x.$$

Энди k$_2$=4 илдиз учун (3) системани тузамиз ва $\alpha_1^{(2)}$ ва $\alpha_2^{(2)}$ ни аниклаймиз:

$$\begin{cases}-2\alpha_1^{(2)}+2\alpha_2^{(2)}=0\\ \alpha_1^{(2)}-\alpha_2^{(2)}=0\end{cases}\Rightarrow\{\alpha_1^{(2)}=\alpha_2^{(2)}.$$

$\alpha_1^{(2)}=1$ десак $\alpha_2^{(2)}=1$ булади. Системанинг иккинчи ечимини хосил килдик:

$$y_1^{(2)}=e^{4x},\qquad y_2^{(2)}=e^{4x}.$$

Энди системанинг умумий ечимини ёзамиз:

$$y_1=\mathrm{C}_1\mathrm{e}^x+\mathrm{C}_2\mathrm{e}^{4x}$$
$$y_2=-\frac{1}{2}\mathrm{C}_1\mathrm{e}^x+\mathrm{C}_2\mathrm{e}^{4x}$$

2) Характеристик тенгламанинг илдизлари хар хил, аммо улар орасида комплекс илдизлар хам бор.

Характеристик тенгламанинг илдизлари орасида иккита кушма комплекс илдиз булсин :

$$к_1=\alpha+i\beta\ ,\quad к_2=\alpha-i\beta$$

Бу илдизларга ушбу ечимлар мос булади :

$$y_j^{(1)}=\alpha_j^{(1)}e^{(\alpha+i\beta)},\qquad \mathrm{j}=1,2,...,\mathrm{n}.$$
$$y_j^{(2)}=\alpha_j^{(2)}e^{(\alpha-i\beta)},\qquad \mathrm{j}=1,2,...,\mathrm{n}.$$

$\alpha_j^{(1)}$ ва $\alpha_j^{(2)}$ коэффициентлар (3) тенгламалар системасидан аникланади.

Дастлабки системанинг комплекс ечимининг хакикий кисмлари яна ечим булишидан фойдаланиб куйидагиларни ёзишимиз мумкин:

$$\begin{cases}\bar{y}_j^{(1)}=e^{\alpha x}(\lambda_j^{(1)}\cos\beta x+\lambda_j^{(2)}\sin\beta x)\\ \bar{y}_j^{(2)}=e^{\alpha x}(\bar{\lambda}_j^{(1)}\sin\beta x+\bar{\lambda}_j^{(2)}\cos\beta x)\end{cases}$$

бунда $\lambda_j^{(1)}$, $\lambda_j^{(2)}$, $\overline{\lambda}_j^{(1)}$, $\overline{\lambda}_j^{(2)}$, лар $\alpha_j^{(1)}$ ва $\alpha_j^{(2)}$ оркали аникланадиган хакикий сонлар. Охирги функцияларнинг мос комбинациялари системанинг умумий ечимини ташкил этади.

Мисол : Ушбу

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -7y_1 + y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -2y_1 - 5y_2 \end{cases}$$

системанинг умумий ечимини топинг.

Ечими. Характеристик тенгламанинг илдизларини топамиз :

$$\begin{vmatrix} -7-\kappa & 1 \\ -2 & -5-\kappa \end{vmatrix} = 0 \qquad \kappa^2+12\kappa+37=0\,, \quad \kappa_1 = -6+i\,, \quad \kappa_2 = -6-i$$

$\kappa_1 = -6+i$ ни (3) системага куйиб, ушбуни топамиз:

$$\alpha_1^{(1)}=1, \quad \alpha_2^{(1)}=1+i$$

Демак, $\quad y_1^{(1)} = e^{(-6+i)x}, \quad y_2^{(1)} = (1+i)e^{(-6+i)x}.$

$\kappa_1 = -6-i$ ни (3) системага куйиб, ушбуни топамиз:

$$\alpha_1^{(1)}=1, \quad \alpha_2^{(1)}=1-i$$

Демак, $\quad y_1^{(1)} = e^{(-6-i)x}, \quad y_2^{(1)} = (1-i)e^{(-6-i)x}.$

Эйлер белгисидан фойдаланиб куйидагиларни чикариб ёзамиз:

$$y_1^{(1)} = e^{-6x}\cos x + ie^{-6x}\sin x$$

$$y_2^{(1)} = e^{-6x}(\cos x - \sin x) + ie^{-6x}(\cos x + \sin x)$$

$$y_1^{(2)} = e^{-6x}\cos x - ie^{-6x}\sin x$$

$$y_2^{(2)} = e^{-6x}(\cos x - \sin x) - ie^{-6x}(\cos x + \sin x)$$

Хакикий кисмларни айириб олиб дастлабки тенгламалар системасининг умумий ечимини

$$y_1 = C_1e^{-6x}\cos x + C_2e^{-6x}\sin x$$

$$y_2 = C_1e^{-6x}(\cos x - \sin x) + C_2e^{-6x}(\cos x + \sin x).$$

куринишда оламиз.

Саволлар:

1.Узгармас коэффициентли чизикли дифференциал тенгламалар системасини таърифланг.

2.Дифференциал тенгламалар системасининг умумий ечими кандай аникланади?

17 – М А Ъ Р У З А

СОНЛИ КАТОРЛАР ВА УЛАРНИНГ АСОСИЙ ХОССАЛАРИ.

Таянч иборалар: Сонли каторлар, хусусий йиғинди, якинлашувчи катор, узоклашувчи катор, якинлашишининг зарурий шарти.

Маъруза режаси:

1. Сонли катор таърифи. n-хусусий йигинди.
2. Геометрик прогрессия.
3. Сонли каторнинг хоссалари.
4. Сонли каторнинг таккослаш аломатлари.
5. Катор якинлашишининг зарурий шарти.

Адабиётлар:

[**1**]. IX боб, §1-6 [**4**]. XVI боб, §1-3

I. Сонли катор таърифи. *n*- хусусий йигинди.

ТАЪРИФ: $u_1, u_2, u_3,\ldots\ u_n,\ldots$ чексиз сонли кетма – кетлиги берилган булсин. Ушбу

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n \qquad (1)$$

ифода сонли катор дейилади. (u_1 биринчи, u_n n-чи хадлари)

ТАЪРИФ: (1)-каторнинг n та чекли хадларининг йигиндиси

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{i=1}^{n}u_n$$

каторнинг n – хусусий йигиндиси дейилади.

n – хусусий йигиндилар кетма-кетлигини тузамиз:

$$S_1=u_1$$
$$S_2=u_1+u_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$$

ТАЪРИФ: Агар $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ мавжуд булса, унга (1) каторнинг йигиндиси деб айтилади ва катор якинлашади дейилади(S чегараланган сон).

Агар $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ мавжуд булмаса, ёки ±∞ га тенг булса (1) катор узоклашувчи деб айтилади.

Мисол: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ каторнинг йигиндисини топинг.

Ечими: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1})=1-\frac{1}{n+1},\qquad S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$$

катор йигиндиси 1 га тенг, у якинлашувчи экан.

Мисол: Ушбу

$$a+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots \qquad (2)$$

каторни текширинг.

Ечими: (2) – катор геометрик прогрессия хадларидан тузилган катордир а биринчи хади, q унинг махражи. Геометрик прогрессиянинг олдинги n та хадининг йигиндиси

$$(q\neq1),\quad S_n=\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}$$

1) Агар |q|<1 булса, $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q})=\frac{a}{1-q}$

Демак, |q|<1 да катор якинлашувчи.

г) Агар |q|>1 булса, $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q})=\infty$

Демак, |q|>1 да катор узоклашувчи.

3) Агар q=1 булса, (2) – дан

$$a+a+\ldots+a+\ldots$$

катор хосил булади.

$$S_n=na,\quad \lim_{n\to\infty}n\,a=\infty$$

булиб, каторнинг узоклашувчанлиги келиб чикади.

4) q=-1 булса, (2)-дан $a - a + a - a + \dots$ катор хосил булади.

Бу холда n жуфт булганда $S_n = 0$, n ток булганда $S_n = a$ булади.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{n жуфт булганда} & S_n = 0 \\ \text{n ток булганда} & S_n = a \end{array}\right\} \text{булади.}$$

Демак, S_n нинг лимити мавжуд булмайди катор узоклашувчидир.

2.Сонли каторнинг хоссалари.

Куйидаги теоремани исботсиз кабул киламиз.

ТЕОРЕМА: Агар берилган (2) каторнинг бир канча хадларини ташлаш биланхосил килинганкатор якинлашса, берилган каторнинг узи хам якинлашади. Аксинча, агар берилган катор якинлашса, унинг бир канча хадларини ташлаш билан хосил килинган катор хам якинлашади.

ТЕОРЕМА: Агар $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ (3)

катор якинлашса ва йигиндиси S га тенг булса,

$$ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n + \dots \qquad (4)$$

катор хам якинлашади ва йигиндиси cS га тенг булади, бунда c узгармас сон.

Исбот: Агар (3) каторнинг n- хусусий йигиндиси S_n булса, (4) каторнинг n – хусусий йигиндиси $c \cdot S_n$ булади.

Демак, $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot S_n = c \lim\limits_{n\to\infty} S_n = c \cdot S$

Теорема исботланди.

ТЕОРЕМА: Агар $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ (5)

$$в_1 + в_2 + \dots + в_n + \dots \qquad (6)$$

каторлар якинлашса ва уларнинг йигиндилари мос равишда S_1 ва S_2

булса, у холда

$$a_1 \pm в_1 + a_2 \pm в_2 + \dots + a_n \pm в_n + \dots \qquad (7)$$

катор якинлашувчи булади ва йигиндиси $S_1 \pm S_2$ га тенг булади.

Исбот: S_n (7) –каторнинг n- хусусий йигиндиси булсин. Демак,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} ((\bar{S}_1 + \bar{S}_2) = S_1 \pm S_2$$

Бу ерда $\bar{S}_1$ *ва* $\bar{S}_2$ мос равишда (5) ва (6) каторларнинг n-хусусий йигиндилари.

3.Сонли каторларни таккослаш аломатлари.

ТЕОРЕМА: $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ (8)

ва $V_1 + V_2 + \ldots + V_n + \ldots$ (9)

мусбат хадли сонли каторлар булсин. (8) – каторнинг хадлари (9)-каторнинг мос хадлардан ортик булмасин :

$$u_1 \le V_1 \,, u_2 \le V_2 \,, \ \ldots, u_n \le V_n \,, \ldots$$

ва (9)- катор якинлашувчи булсин. Бундай холда (8) катор хам якинлашувчи булади ва унинг йигиндиси (9) катор йигиндисидан ортмайди.

ТЕОРЕМА: Агар (8) – каторнинг хадлари (9) – каторнинг мос хадларидан кичик булмаса :

$$u_1 \ge V_1 \,, u_2 \ge V_2 \,, \ \ldots, u_n \ge V_n \,, \ldots$$

ва (9) – катор узоклашувчи булсин. Бу холда (8) катор хам узоклашувчи булади.

Бу теоремаларни исботсиз кабул киламиз.

Мисол: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ каторни текширинг.

Ечими: Ёрдамчи $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^{n+1}}$ каторни караймиз.

Бу катор геометрик прогрессия хадларидан тузилган ($q = {}^1\!/_2$) катор ва у якинлашувчидир.

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}} \le \frac{2}{2^{n+1}}$$

Демак $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ катор якинлашувчи экан.

4.Катор якинлашишининг зарурий шарти.

ТЕОРЕМА. Агар $u_1+ u_2+ u_3+\dots + u_n +\dots$ катор якинлашувчи булса, у холда $n\to\infty$ да унинг u_n умумий хади нолга интилади.

Исбот. $S_n= u_1+ u_2+ u_3+\dots + u_n$ ва $S_{n-1}= u_1+ u_2+ u_3+\dots + u_{n-1}$ n – хусусий йигиндиларни караймиз.

Демак,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0$$

Теорема исботланди.

Саволлар:

1.Сонли каторни таърифланг.
2.Сонли каторнинг хоссаларини келтиринг.
3.Катор якинлашишининг зарурий шартини келтиринг.

18 -М А Ъ Р У З А

МУСБАТ ХАДЛИ СОНЛИ КАТОРЛАР ЯКИНЛАШИНИНИНГ ЕТАРЛИ ШАРТЛАРИ.

Таянч иборалар: Сонли каторлар якинлашишининг етарли шартлари, Даламбер аломати, Коши аломати, интеграл аломати.

Маъруза режаси:

1. Даламбер аломати.
2. Коши аломати.
3. Катор якинлашишининг интеграл аломати.

Адабиётлар:

[**1**]. IX боб, §7-8 [**4**]. XVI боб, §4-6

Агар сонли катор учун якинлашишнинг зарурий шарти бажарилса, унинг якинлашувчанлигига ишонч пайдо булади. Бундай холда каторнинг текширилиши давом эттирилади.

ТЕОРЕМА:(Даламбер аломати)

Агар мусбат хадли $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ (1)

катор (n+1) - хадининг n – хадига нисбати n→∞ l чекли лимитга эга булса, яъни, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$ булса, у вактда:

1) $l<1$ булганда катор якинлашади;
2) $l>1$ булганда катор узоклашади;
3) $l=1$ булганда катор текширилишини давом эттириш керак.

Теорема исботсиз кабул килинади.

М и с о л : $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ каторни текширинг.

Ечими: $u_n={}^1/4^n$, $u_{n+1}={}^1/4^{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4^{n+1}}:\frac{1}{4^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{4*4^n}=\frac{1}{4}<1$$

Катор якинлашувчи экан.

ТЕОРЕМА: (Коши аломати) Агар мусбат хадли (1) – катор учун $\sqrt[n]{u_n}$ микдор n→∞ l чекли лимитга эга , яъни $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$ булса,

4) $l<1$ булганда катор якинлашади;

5) $l>1$ булганда катор узоклашади;
6) $l=1$ булганда катор текширилиши давом этилади.
Теорема исботсиз кабул килинади.

Мисол: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{4n+3}\right)^{n}$ каторни текширинг.

Ечими: Коши аломатига кура

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{4n+3}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4n+3}=\frac{1}{4}<1$$

катор якинлашувчи.

ТЕОРЕМА: (Катор якинлашишининг интеграл аломати). Ушбу

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{\mathrm{n}}+\ldots \qquad (2)$$

каторнинг хадлари мусбат, лекин усувчи булмасин, яъни $u_1\geq u_2\geq\ldots\geq u_{\mathrm{n}}\geq\ldots$

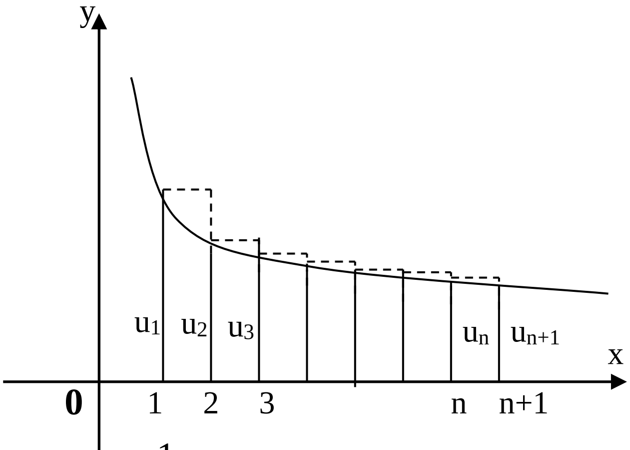
ва f (x) шундай усмайдиган узлуксиз функция булиб

$$\mathrm{f}(1)=u_1,\quad \mathrm{f}(2)=u_2,\ \ldots\ ,\ \mathrm{f}(\mathrm{n})=u_n,\ldots.$$

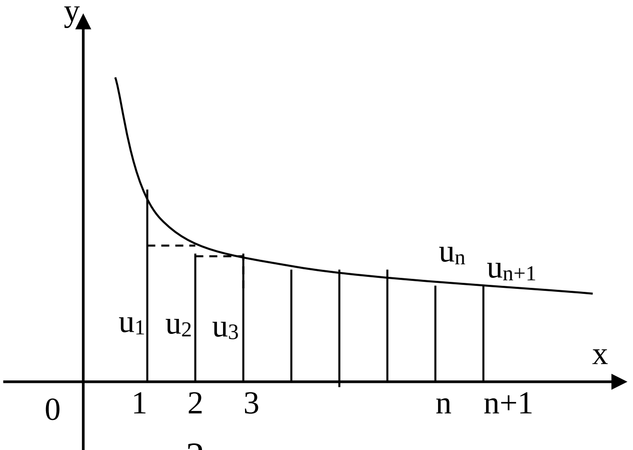
булсин. Бу холда куйдагилар уринлидир:

а) агар $\int\limits_{1}^{\infty}f(x)dx$ хосмас интеграл якинлашса, (2) катор хам якинлашади;

б) агар бу хосмас интеграл узоклашса, (2) катор хам узоклашувчи булади.



1- расм



2- расм

0

Исбот: Теореманинг шартларига асосан $y = \mathrm{f}(x)$ мавжуд булсин.

1- расмга асосан $\quad S_n > \int_1^{n+1} f(x)dx \qquad (3)$

2- расмга кура $\quad S_{n+1} < \int_1^{n+1} f(x)dx + u_1 \qquad (4)$

г) $\int_1^{\infty} f(x)dx$ - якинлашса, у холда $\int_1^{n+1} f(x)dx < \int_1^{\infty} f(x)dx$ булади, (24) тенгликдан

$S_{n+1} < S_n < \int_1^{\infty} f(x)dx$. Лекин $\int_1^{\infty} f(x)dx$ якинлашувчи, шунинг учун $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

тенгликдан берилган (2) каторнинг якинлашувчанлиги келиб чикади.

д) $\int_1^{\infty} f(x)dx$ узоклашсин, у холда (3) тенгликдан

$$S_n > \int_1^{n+1} f(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n > \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx = \infty$$

келиб чикади.
Бундан берилган (2) каторнинг узоклашувчанлиги келиб чикади.
Теорема исботланди.

Мисол: $\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+5}}$

Ечими: Интеграл белгисига асосан

$$f(x) = \frac{1}{2n+5}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{2x+5} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{в} \frac{dx}{2x+5} = \frac{1}{2} \lim_{b\leftarrow\infty} \int_1^{в} \frac{d(2x+5)}{2x+5} = \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \ln|2x+5|\Big|_1^{в} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} (\ln(2b+5) - \ln 7) = \infty$$

Хосмас интеграл узоклашувчи, демак $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+5}$ катор хам узоклашувчи булади.

Саволлар:

1.Мусбат хадли сонли каторлар якинлашишининг Даламбер аломатини келтиринг.
2.Мусбат хадли сонли каторлар якинлашишининг Коши аломатини келтиринг
3. Мусбат хадли сонли каторлар якинлашишининг интеграл аломатини келтиринг.

19 – М А Ъ Р У З А

ИШОРАЛАРИ НАВБАТЛАШУВЧИ КАТОРЛАР , УЗГАРУВЧАН ИШОРАЛИ КАТОРЛАР, ШАРТЛИ ВА АБСОЛЮТ ЯКИНЛАШИШЛАР.

Таянч иборалар: Ишоралари навбатлашувчи, узгарувчан ишорали, шартли якинлашиш ,абсолют якинлашиш, Лейбниц теоремаси.

Маъруза режаси:

1. Ишоралари навбатлашувчи каторлар.
2. Узгарувчан ишорали каторлар. Абсолют ва шартли якинлашиш.

Адабиётлар:

[**1**]. IX боб, §10-11 [**4**]. XVI боб, §7-8

1.Ишоралари навбатлашувчи каторлар.

ТАЪРИФ : u_1, u_2 ,…,u_n , …мусбат хадли сонли кетма-кетлик хадларидан тузилган

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - ... + (-1)^{n+1}u_n + ... \qquad (1)$$

каторга ишоралари навбатлашувчи катор деб айтилади.

ТЕОРЕМА: (Лейбниц). Агар (1) – ишоралари навбатлашувчи каторнинг хадлари учун

$$u_1>u_2>u_2>\ldots u_n>\ldots \qquad (2)$$

ва

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \qquad (3)$$

булса,(1) катор якинлашади,унинг йигиндиси мусбат булади ва биринчи хаддан катта булмайди.

Теорема исботсиз кабул килинади.

М и с о л : $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ каторни текширинг.

Ечими. Катор хадларини ёйиб ёзамиз :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+...$$

Ишоралари навбатланувчи катор экан .

Лейбниц теоремасидаги шартларни текширамиз:

а) $1>\frac{1}{2}>...>\frac{1}{n}>...$ (2) – шарт бажарилди.

б) $\lim\limits_{n\to}\frac{1}{n}=0$ (3) – шарт бажарилди.

Демак, берилган катор якинлашувчи ва унинг йигиндиси бирдан ошмайди

2. Узгарувчан ишорали каторлар.Абсолют ва шартли якинлашиш

ТАЪРИФ: Агар сонли каторнинг хадлари орасида мусбатлари хам, манфийлари хам булса, катор узгарувчан ишорали катор деб айтилади.

Шуни изохлаб айтиш мумкинки, ишоралари навбатлашувчи каторлар узгарувчан ишорали каторларнинг хусусий холидир.

u_1, u_2,…, u_n,…сонлар мусбат хам , манфий хам булиши мумкин булган сонли кетма-кетликдан тузилган каторни караймиз

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n \qquad (4)$$

ТЕОРЕМА: (Узгарувчан ишорали катор якинлашишининг етарли шарти). (28) – катор хадларининг абсолют кийматларидан тузилган

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \qquad (5)$$

катор якинлашса, берилган узгарувчан ишорали (4) – катор хам якинлашади.

М и с о л: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{4^n}$ каторни текширинг.

Ечими: Берилган катор хадларининг абсолют кийматларидан тузилган каторни караймиз:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{4^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n} \qquad (6)$$

Даламбер белгисига асосан

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4^{n+1}}:\frac{1}{4^n}\right)=\frac{1}{4}<1.$$

(6)- катор якинлашувчи экан, демак теоремага асосан берилган катор хам якинлашувчи булади.

ТАЪРИФ : Агар (4) – узгарувчан ишорали катор хадларининг абсолют кийматларидан тузилган (5)- катор якинлашса, берилган

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

катор абсолют якинлашувчи дейилади.

Агар (4) – узгарувчан ишорали катор якинлашса , лекин унинг хадларининг абсолют кийматларидан тузилган (5)- катор узоклашса, берилган (4)- катор шартли якинлашувчи катор деб айтилади.

М и с о л : $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ каторни текширинг.

Ечими:

$$\sum_{n=1}^{\infty} | (-1)^{n+1}\frac{1}{n} | = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \qquad (7)$$

Охирги катор якинлашишини интеграл белгиси оркали текширамиз.

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\ln x\,|_1^b = \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \infty$$

Хосмас интеграл узоклашувчи, демак $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ зарурий шарт бажарилган булса хам, гармоник катор деб аталмиш (7) катор узоклашувчи экан. Лекин маърузамизни 1-пунктида

$$. \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} \qquad (8)$$

катор якинлашувчанлиги курсатилган эди. Бундан, (8) катор шартли якинлашиши келиб чикади.

ТЕОРЕМА: Агар (4) – катор абсолют якинлашса, унинг хадларининг уринлари ихтиёрий равишда алмаштирилганда хам *у* абсолют якинлашувчанлигича колади.

Бу ва юкорида таърифланган теоремалар исботсиз кабул килинади.

Саволлар:

1.Лейбниц теоремасини таърифланг.
2.Узгарувчан ишорали каторларни таърифланг.
3.Абсалют ва шартли якинлашишлар нима?

20 – М А Ъ Р У З А

ФУНКЦИОНАЛ КАТОРЛАР . ДАРАЖАЛИ КАТОРЛАР ВА УЛАРНИНГ ЯКИНЛАШИШ ОРАЛИКЛАРИ.

Таянч иборалар: Функционал катор, якинлашиш соха, даражали катор, якинлашиш радиус, Абель теоремаси, кучайтирилган катор.

Маъруза режаси:

1. Функционал каторлар.
2. Кучайтирилган каторлар.
3. Даражали каторлар.

Адабиётлар:

[**1**]. IX боб, §13-15 [**4**]. XVI боб, §9-13

1. Функционал каторлар.

ТАЪРИФ: Агар катор хадлари x узгарувчининг функцияси булса , бу катор функционал катор дейилади:

$$U_1(x)+U_2(x)+...+U_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x) \qquad (1)$$

x нинг функционал катор якинлашадиган кийматлари туплами шу каторнинг якинлашиш сохаси дейилади.

Бу ерда $U_1(x)$ каторнинг биринчи, $U_2(x)$ иккинчи ва $Un(x)$ n-чи хади деб айтилади.

Табиийки, каторнинг якинлашиш сохасидаги йигиндиси x нинг бирор функциясидир ва уни S(x) билан белгилаймиз:

$$U_1(x)+U_2(x)+...+U_n(x)+...=S(x)$$

М и с о л : $\sum_{n=0}^{\infty}x^n =1+x+x^2+...+x^n+...$

функционал каторнинг аникланиш сохаси D ва хадлар йигиндиси S(x) функцияни топинг.

Ечими: Аникланиш сохаси D (-1;1) ораликдаги кийматлардан иборат, чунки бу кийматлар учун берилган функционал катор ун учинчи маърузадаги мисолда урганилган чексиз камаювчи геометрик прогрессияга тенг. Унинг биринчи хади b=1 га ва махражи q = x га тенг. Демак,

$$S(x)=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-x} \ , \qquad x\in(-1,1)$$

булади.

ТАЪРИФ: (1) каторнинг биринчи n та хадларининг йигиндиси $S_n(x)$ билан белгиланади ва унга n - хусусий йигинди деб айтилади.

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

эса функционал каторнинг колдиги деб айтилади.

Каторнинг якинлашиш сохасидаги x нинг барча кийматлари учун

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$$

муносабат уринлидир. Шунинг учун

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty}(S(x) - S_n(x)) = 0$$

муносабат уринли булади.

2. Кучайтирилган каторлар.

ТАЪРИФ: Агар хадлари мусбат булган шундай

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

сонли якинлашувчи катор мавжуд булиб , x узгарувчининг берилган сохадаги барча кийматлари учун

$$|U_1(x)| \le a_1, |U_2(x)| \le a_2, \ldots, |U_n(x)| \le a_n, \ldots$$

муносабат бажарилса,

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots$$

функционал катор x узгарувчининг узгариш сохасида кучайтирилган катор деб айтилади.

М и с о л : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ якинлашувчи катор учун $x \in (-\infty; \infty)$ да $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}, n = 1,2,\ldots$ бажарилади.

Демак $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ катор $(-\infty; \infty)$ да кучайтирилган катордир.

Куйидаги теоремаларни исботсиз кабул киламиз:

ТЕОРЕМА: Бирор $[a\ ;\ b]$ кесмада кучайтирилган булган ва узлуксиз функциялардан тузилган функционал каторнинг йигиндиси шу кесмада узлуксиз функциядир.

ТЕОРЕМА: $[a\ ;\ b]$ кесмада кучайтирилган булган узлуксиз функцияларнинг куйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty} Un(x) = U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots$$

катори берилган ва S (x) шу каторнинг йигиндиси булсин. Бу холда куйидаги тенглик уринли булади:

$$\int_a^x S(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x U_n(t)dt.$$

Бу функционал каторни хадлаб интеграллаш коидаси дейилади.

ТЕОРЕМА : Агар [*a* ; *b*] кесмада хосилалари узлуксиз булган функциялардан тузилган

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + ... + U_n(x) + ...$$

катор шу кесмада S(*x*) йигиндига эга булса ва унинг хадларининг хосилаларидан тузилган.

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n^{'}(x) = U_1^{'}(x) + U_2^{'}(x) + ... + U_n^{'}(x) + ...$$

катор шу кесмада кучайтирилган булса, куйидаги тенглик уринли булади:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n'(x)$$

Бу функционал каторни хадлаб дифференциаллаш коидаси дейилади.

3. Даражали каторлар.

ТАЪРИФ : Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... \qquad (2)$$

куринишдаги функционал катор даражали катор деб айтилади. Бунда $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ узгармаслар булиб, каторнинг коэффициентлари дейилади.

ТЕОРЕМА: (Абель). *а*) Агар даражали катор нолдан фаркли бирор x_0, кийматда якинлашса, *x* узгарувчининг $| x | < | x_0 |$ тенгсизликни каноатлантирувчи хар кандай кийматларида катор абсолют якинлашади.

б) агар (2) катор бирор x_0 кийматда узоклашса, *x* нинг $| x | > | x_0 |$ тенгсизликни каноатлантирувчи хар бир кийматида катор узоклашади.

Натижа: Даражали каторнинг якинлашиш сохаси маркази координаталар бошида булган симметрик интервалдан иборатдир .

ТАЪРИФ: Даражали каторнинг якинлашиш интервали деб,шундай (-R,R) интервалга айтиладики, бу интервал ичида ётган хар кандай *x* нуктада катор якинглашади , унинг ташкарисидаги *x* ларда эса катор узоклашади. Бу ерда R сони даражали каторнинг якинлашиш радиуси деб айтилади.

Даражали каторнинг якинлашиш радиусини хисоблаш формулаларини келтирамиз:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_n + 1} \right|, R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{| a_n |}}$$

Бу формулалар Даламбер ва Коши аломатларидан келиб чикади.

М и с о л: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$

каторнинг якинлашиш радиусини топинг.

Ечими:

$$R = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n!} : \frac{1}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{1} = \infty$$

Демак якинлашиш интервали $(-\infty;\infty)$ булади.

Саволлар:

1.Функционил каторларни таърифланг.
2.Якинлашиш соха нима?
3.Кучайтирилган каторни таърифланг.
4.Даражали каторларни таърифланг ва уларнинг якинлашиш радиусларини хисоблаш учун формулаларини келтиринг.

21 – М А Ъ Р У З А

ДАРАЖАЛИ КАТОРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШ. ТЕЙЛОР ВА МАКЛОРЕН КАТОРЛАРИ.

Таянч иборалар: Даражали каторни интеграллаш, даражали каторни дифференциаллаш, Тейлор катори, Маклерон катори, биномиал катор.

Маъруза режаси:

1. Даражали каторни интеграллаш ва дифференциаллаш.
2. Тейлор ва Маклерон каторлари.
3. Биномиал каторлар.

Адабиётлар:

[**1**]. IX боб, §16-18 [**4**]. XVI боб, §14-20

1.Даражали каторни интеграллаш ва дифференциаллаш.

ТЕОРЕМА: $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$ (1)
даражали катор бутунлай якинлашиши интервали ичида ётувчи исталган $[-\rho;\rho]$ кесмада кучайтирилгандир.

И с б о т : Теореманинг шартига кура p<R , шунинг учун сонли катор

$$|a_0|+|a_1|\,p+|a_2|\,p^2+\ldots+|a_n|\,p^n+\ldots$$

якинлашади. Аммо $|x|<p$ булганда

$$|a_nx^n|\le|a_n|\,p^n$$

тенгсизлик бажарилади.Демак (1) катор кучайтирилган булади .Теоремадан куйидаги натижалар келиб чикади.

1-Натижа: Якинлашиш интервали ичида бутунлай ётувчи хар кандай кесмада даражали каторнинг йигиндиси узлуксиз функциядир.

2-Натижа: Агар интеграллаш чегералари α,β даражали каторнинг якинлашиш интервали ичида ётса, катор йигиндисининг интеграли катор хадларидан олинган интеграллар йигиндисига тенг.

3-Натижа:

$$S(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (2)$$

даражали каторнинг якинлашиш интервали(-R;R) булса, (2) каторни хадлаб дифференциаллашдан хосил килинган

$$\varphi(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$$

каторнинг хам якинлашиш интервали(-R;R) булади ва $\varphi(x)=S'(x)$ тенглик бажарилади.

2.Тейлор ва Макролен каторлари.

y=$f(x)$ функция x=a нукта атрофида n+1 та хосилага эга булсин. Куйидаги тенглик

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+...+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x) \quad (3)$$

Тейлор формуласи ва a=0 да Макролен формуласи деб айтилади. Бу ерда $R_n(x)$ шу формуланинг колдик хади дейилади.

Агар $n\to\infty$ (3) формула даражали каторга айланади ва якинлашиш сохасидаги x лар учун $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ булади.

Бундай холларда Тейлор ва Маклорен формулалари куйидаги якинлашувчи даражали каторларга айланади:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+...+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+...$$

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+...+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+... \quad (4)$$

Мисол: $f(x)$=sin x функциянинг Маклорен каторини ёзинг .

Ечими: Берилган функциянинг n та хосиласини топиб, x=0 даги кийматини хисоблаймиз.(4) – тенгликдан куйидаги даражали катор келиб чикади:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...$$

Мисол: y=cos x , y=e^x , y=e^{-x} , y=sh$x$, y=ch$x$ функцияларнинг Маклорен каторлари ёзилсин .

Ечими: Олдинги мисолда курсатилган усулга кура

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+...,$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...,$$

$$shx=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+...,$$

$$chx=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+...$$

3.Биномиал каторлар.

Куйидаги тенгликкка биномиал катор деб айтилади:

$$(1+x)^m = 1+\frac{mx}{1!}+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1*2*3}x^3... \qquad (5)$$

m нинг маълум кийматларида бир катор функцияларнинг даражали каторларини келтириб чикариш мумкин.

$$a)\ m=\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2*4}x^2+\frac{1*3}{2*4*6}x^3-\frac{1*3*5}{2*4*6*8}x^4+... \qquad (6)$$

$$б)\ m=-\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{1*3}{2*4}x^2-\frac{1*3*5}{2*4*6}x^3+\frac{1*3*5*7}{2*4*6*8}x^4-... \qquad (7)$$

в) (7) – тенгликнинг хар иккала томонидаги x лар урнига $-x^2$ куйилса , куйидаги даражали катор келиб чикади:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1*3}{2*4}x^4+\frac{1*3*5}{2*4*6}x^6+... \qquad (8)$$

г) Даражали каторни интеграллаш мумкинлиги юкорида айтилди. Шунинг учун ()ни иккала томонини интеграллаймиз:

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x (1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^6+...)dt$$

$$\arcsin x = x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+... \qquad (9)$$

д) m = -1 булганда (5) дан

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+... \qquad (10)$$

даражали катор келиб чикади.

е) (10)- тенгликни иккала томонини интеграллаб, $f(x)=\ln(1+x)$ функциянинг даражали каторини чикарамиз:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1-t+t^2-t^3+t^4-t^5+...)dt$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+... \qquad (11)$$

Бу тенглик (-1;1) интервалда уринлидир.

ж) (11)- тенгликда x нинг урнига $-x$ куямиз.

$$\ln(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-... \qquad (12)$$

з) (11)ва (12) ларнинг айирмасидан эса кейинги даражали каторни чикаришимиз мумкин:

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+...\right] \qquad (13)$$

Бу ерда $\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n}$ булсин , бунда $x=\frac{1}{2n+1}$ келиб чикади.

Хар кандай n>0 ва 0<x<1 учун (13)- дан

$$\ln\frac{n+1}{n}=2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+...\right]$$

тенглик тугри булади.

Бу ерда n=1 деб олсак

$$\ln 2=2\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+...\right]$$

ва ln$x$ функциянинг x=2 нуктадаги киймати келиб чикади.

и) (9) – тенгликдан эса x нинг урнига 1 ёзиб arc sin x нинг x=1 нуктадаги киймати чикади:

$$\arcsin 1=\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}+...$$

Саволлар:

1.Даражали каторларни дифференциаллаш ва интеграллаш мумкинлиги хакидаги теоремаларни келтиринг.

2.Тейлор ва Маклерон каторларга мисол келтиринг.

АДАБИЁТЛАР РУЙХАТИ.

1. **СОАТОВ Ё.У.** «Олий математика», I жилд, Тошкент, «Укитувчи», 1992 й. II жилд, Тошкент, «Укитувчи», 1994 й.
2. **РАХИМОВ Д. Г.** «Олий математика», I жилд, Тошкент, «ТКТИ», 2003 й.
3. **ПИСКУНОВ Н.С.** «Дифференциал ва интеграл хисоб», 1-том, Тошкент, «Укитувчи», 1972 й.
4. **ПИСКУНОВ Н.С.** «Дифференциал ва интеграл хисоб», 2-том, Тошкент, «Укитувчи», 1974 й.
5. **АЗЛАРОВ Т., МАНСУРОВ Х.** «Математик анализ», I кисм, Тошкент, Укитувчи, 1994 й.
6. **ТУЛАГАНОВ Т., НОРМАТОВ А.** «Математикадан практикум», Тошкент, Укитувчи, 1983 й.
7. **ТОЖИЕВ Ш.** «Олий математикадан масалалар туплами», Тошкент, Укитувчи, 2003 й.

АДАБИЁТЛАР РУЙХАТИ.

8. **СОАТОВ Ё.У.** «Олий математика», I жилд, Тошкент, Укитувчи, 1992 й.
9. **РАХИМОВ Д.Г. «**Олий математика**»,** I жилд, Тошкент, «ТКТИ», 2003й.
10. **ПИСКУНОВ Н.С.** «Дифференциал ва интеграл хисоб», 1-том, Тошкент, Укитувчи, 1972 й.
11. **АЗЛАРОВ Т., МАНСУРОВ Х.** «Математик анализ», I кисм, Тошкент, Укитувчи, 1994 й.
12. **ТУЛАГАНОВ Т., НОРМАТОВ А.** «Математикадан практикум», Тошкент, Укитувчи, 1983 й.
13. **ТОЖИЕВ Ш.** «Олий математикадан масалалар туплами», Тошкент, Укитувчи, 2003 й.