O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

“OLIY MATEMATIKA.
EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA”

fani bo‘yicha

I-SEMESTR UCHUN

O‘QUV-USLUBIY MAJMUA

TOSHKENT-2016

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

“OLIY MATEMATIKA. EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA”

fani bo‘yicha

I-SEMESTR UCHUN

O‘QUV-USLUBIY MAJMUA

Mazkur o‘quv uslubiy majmua Oliy va o‘rta maxsus ta’limi vazirligining 20___yil __________dagi _____-sonli buyrug‘i bilan tasdiqlangan o‘quv reja va dastur asosida tayyorlandi

Tuzuvchilar: TATU dotsenti R.R.Raxmatov
TATU kata o‘qituvchisi SH.E. Tadjibayeva
TATU assistenti S.K.Shoyimardonov
(OTM nomi, pedagogning ilmiy darajasi, F.I.O)

O‘quv-uslubiy majmua Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Ilmiy-uslubiy kengashinig 2016 yil ____________dagi ____-sonli qarori bilan tasdiqqa tavsiya qilingan

MUNDARIJA

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKACI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

Ro‘yxatga olindi:

№ __________________

201__yil “____” ______

Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi

____

201__yil “_____” _________

OLIY MATEMATIKA. EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

FAN DASTURI

Bilim sohasi: 300 000 - Ishlab chiqarish texnik soha.

Ta’lim sohasi: 330 000 - Kompyuter texnologiyalari va informatika”;

350 000 - Aloqa va axborotlashtirish, telekommunikatsiya yexnologiyalari.

Talim yo‘nalishi: 5330 500 - Kompyuter injiniringi (“Kompyuter injiniringi”, “AT-servis”, “Axborot xavfsizligi”, “Multimedia texnologiyalari”);

5330300 - Axborot xavfsizligi (Axborot, kommunikatsiya texnologiyalari va servis);

5330600 - Dasturiy injiniring;

5350100 - Telekommunikatsiya texnologiyalari

(“Telekommunikatsiyalar”,
“Teleradioeshittirish”, Mobil tizimlari);

5350200 - Televizion texnologiyalar
(“Audiovizual texnologiyalar”, “Telestudiya tizimlari va ilovalari”);

5350300 - Axborot-kommunikatsiya texnologiyalari sohasida iqtisodiyot va menejment;

5350400 - Axborot-kommunikatsiya texnologiyalari sohasida kasb ta’limi;

5350500 - Pochta aloqasi texnologiyasi;

5350600 - Axborotlashtirish va kutubxonashunoslik.

Toshkent 2016

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus talim vazirligining 201__yil "___"_________ dagi "_____" – sonli buyrug‘ining _____ ilovasi bilan fan dasturi ro‘yxati tasdiqlangan.

Fan dasturi Oliy va o‘rta maxsus, kasb-xunar ta’limi yo‘nalishlari bo‘yicha O‘quv-uslubiy birlashmalar faoliyatini Muvofiqlashtiruvchi kengashining 201__ yil "____"_____________dagi ___ -sonli bayonnomasi bilan maqullangan

Fan dasturi Toshkent axborot texnologiyalari universitetida ishlab chiqildi.

Tuzuvchilar:

Raxmatov R.R. - TATU, "Oliy matematika" kafedrasi mudiri, f.-m.f.n.;

Norxo‘jaev O.O. - TATU, "Oliy matematika" kafedrasi dotsenti, f.-m.f.n.;

Mamatov A.E. - TATU, "Oliy matematika" kafedrasi dotsenti, f.-m.f.n.;

Chay Z.S. - TATU, "Oliy matematika" kafedrasi katta o‘qituvchisi, f.-m.f.n.;

Islamova O.A - TATU, "Oliy matematika" kafedrasi katta o‘qituvchisi, f.-m.f.n.

Taqrizchilar:

Jabborov N.N. - M.Ulug‘bek nomli O‘zMU,"Matematik tahlil" kafedrasi mudiri, dotsent, f.-m.f.n.;

Abduvoitov H.A. - TATU "Algoritmlash va matematik modellashtirish" kafedrasi dotsenti, f.-m.f.n..

Fan dasturi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Ilmiy-uslubiy Kengashida ko‘rib chiqilgan va tavsiya etilgan. (201__ yil "___"__________ dagi "__________" – sonli bayonnoma).

Kirish

Ushbu dastur “Ta’lim to‘g‘risida” hamda “Kadrlar tayyorlash Milliy dasturi to‘g‘risida”gi O‘zbekiston Respublikasi qonunlariga muvofiq amalga oshirildi. Oliy matematika fanining asosiy maqsadlaridan biri - hozirgi davr talabiga javob beradigan mutaxassislarni tayyorlashdir. Dastur oliy matematika kursi qismlari va mavzularining asosiy mazmunlarini o‘z ichiga oladi va ularni semestrlar bo‘yicha taqsimlash asosida maxsus va kasbiy fanlar uchun oliy matematika kursining mantiqiy izchilligi va to‘laligini ta’minlaydi.

Fanning maqsad va vazifalari

Ta’lim maqsadi davr bilan, ijtimoiy hayot bilan uzviy bog‘liq. Ijtimoiy hayotdagi tub burilishlar, fanning intensiv rivojlanishi, ta’lim modernizatsiyasi, yangi didaktik imkoniyatlar, insonparvarlashtirish shubhasiz ta’lim maqsadini ham tubdan o‘zgartirdi. Ta’lim maqsadining tubdan o‘zgarishi ta’lim mazmunida o‘z ifodasini topadi. Oliy matematika fani mazmuniga chiziqli algebra elementlari, tekislik va fazodagi analitik geometriya, vektorlar algebrasi, bir va ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarning differensial hisobi, integral hisob elementlari, birinchi va ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar hamda qatorlar nazariyasi, karrali, egri chiziqli integrallar, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika bo‘limlari kiritilgan.

Fanni o‘qitishdan maqsad - talabalarda mantiqiy, algoritmik, abstrakt fikrlash, matematik taffakkurini shakllantirish va rivojlantirish, o‘zining fikr-mulohaza, xulosalarini asosli tarzda aniq bayon etishga o‘rgatish hamda egallangan bilimlar bo‘yicha, ko‘nikma va malakalarni shakllantirishdir.

Fanning vazifasi - talabalarga umumilmiy, muhandislik va maxsus fanlarni o‘zlashtirish hamda matematik usullarni muhandislik ishlariga tadbiq qilish. Nazariy va amaliy masalalarini yecha olishga yetarli bo‘lgan matematik apraratni egallashga va uni qo‘llashga, shuningdek, muhandislik masalalarining matematik modelini tuzish hamda ularni tahlil qilishga o‘rgatishdan iborat.

Fan bo‘yicha talabalarning tasavvur, bilim, ko‘nikma va malakalariga qo‘yiladigan talablar

“Oliy matamatika” fanini o‘zlashtirish jarayonida bakalavr:

- matritsalarni ko‘paytirish, determinantlarni hisoblash, matritsa rangi va teskari matritsani topishni;
- chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini turli usullar bilan yechishni;
- chiziqli va evklid fazolarning ta’riflarini aniq bilishi, vektorlarning chiziqli bog‘liq va chiziqli erkliligini, vektorlar sistemasining rangi va bazisi topishni;

- analitik geometriya elementlarini va ikkinchi tartibli egri chiziqlarni, ularning tenglamalari bo‘yicha tahlil etishni;
- chiziqli operator va kvadratik formalar, differensial va integral hisob, ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar, differensial tenglamalar, operatsion hisob, karrali, egri chiziqli integrallarni hisoblashni;
- tasodifiy hodisa va murakkab hodisa ehtimolliklarini topishni;
- tasodifiy miqdor taqsimoti va xarakteristikalarini topishni;
- statistik ma’lumotlarni tahlil qilishni;
- noma’lum parametrlarni baxolashni;
- statistik gipotezalarni tekshirishni;
- korrelyatsion va regression taxlilni amalga oshirishni bilishlari kerak.

Bular bilan bir qatorda bakalavr:

- amaliy masalalarda matematik tekshirishning boshlang‘ich ko‘nikmasini ishlab chiqish (hayotiy masalalarning matematik modelini qurish, uni tekshirish va yechishning qulay usulini tanlash, olingan natijalarni baholash, qo‘llash va hokazolar);
- mavjud matematik paketlar yoki axborot texnologiyalardan foydalana olish;
- mavzuga doir misol va masalalarni yechishga mos qulay usulni topa olish;
- matematik masalalarni yechish usullarini mukammal o‘zlashtirib, yechimlarni amaliyotda qo‘llanish ko‘rinishigacha yetkazish (formula, son, grafik va hokazo) va natijada logik va algoritmik fikrlash qobiliyatiga ega bo‘lishi kerak;
- talaba mutaxassisligi bilan bog‘liq adabiyotlarda uchraydigan matematik apparat tushunchalarini mustaqil tahlil qila olishi, shuningdek, Oliy matematika fanidan olingan bilimlarni mutaxassisligi bilan bog‘lay olishi kerak;
- o‘z fikr-mulohaza va xulosalarini asosli tarzda aniq bayon eta olish malakalariga ega bo‘lishi kerak.

Fanning o‘quv rejadagi boshqa fanlar bilan o‘zaro bog‘liqligi va uslubiy jihatdan uzviy ketma-ketligi

Oliy matematika fani tabiiy-matematik fanlar majmuasiga taalluqli bo‘lib, talabalar uni I, II va IV semestrlarda o‘rganishadi.

Bu dasturni amalda bajarish uchun talabalar institutgacha bo‘lgan davrda elementar matematikadan yetarlicha ma’lumotga ega bo‘lishlari lozim.

Oliy matematikaning umumiy kursi bakalavrlar uchun matematik ta’limning asosi bo‘lib, shu asosda matematik usullarni kasbiy faoliyatda tatbiq etishlari uchun uni fizika, informatika, axborot texnologiyalari va boshqa fanlar bilan uzviy bog‘liqlikda o‘rgatish maqsadga muvofiq.

Fanning ishlab chiqarishdagi o‘rni

Oliy matematika kursi ishlab chiqarish jarayoni bilan bevosita bog‘lanmagan. Lekin u ishlab chiqarishni takomillashtirish bo‘yicha muqobil qarorlar qabul qilishda qo‘llaniladigan sonli usullarni o‘rgatadi shu asosda halq ho‘jaligi hamda texnikaning rivojlanishida asosiy va alohida o‘rinni egallaydi.

Bunda berilgan ob’ektning xususiyatlaridan kelib chiqqan holda asosiy parametrlar ajratiladi, so‘ngra ularning o‘zgarish qonuniyatlari va xossalaridan foydalanib, matematik model tuziladi. Modelning muhim parametrlari aniqlanib, tegishli matematik usullar yordamida shu model uchun masalaning maqbul yechimi topiladi.

Fanni o‘qitishda zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar

Talabalarning oliy matematika fanini o‘zlashtirishlari uchun o‘qitishning zamonaviy usullaridan foydalanish, yangi informatsion (Scientific Work Place, Matlap, Mathcad, Mathematica paketlar dasturi va h.k.) va pedagogik texnologiyalarni tatbiq qilish muxim ahamiyatga egadir. Fanni o‘zlashtirishda darslik, o‘quv va uslubiy qo‘llanmalar, ma’ruza matnlari, texnologiyalar majmuasi, elektron materiallar, virtual stendlar va maketlaridan foydalaniladi. Ma’ruza, amaliy darslarida mos ravishdagi pedagogik va axborot texnologiyalaridan foydalaniladi.

ASOSIY QISM:

Fanning nazariy mashg‘ulotlari mazmuni

Asosiy qismda (ma’ruza) fanni mavzulari mantiqiy ketma-ketlikda keltiriladi. Har bir mavzuning mohiyati asosiy tushunchalar va tezislar orqali ochib beriladi. Bunda mavzu bo‘yicha talabalarga DTS asosida o‘tkazilishi zarur bo‘lgan bilim va ko‘nikmalar to‘la qamrab olishishi kerak.

Asosiy qism sifatiga qo‘yiladigan talab mavzularning dolzarbligi, ularning ish beruvchilar talablari va ishlab chiqarish ehtiyojlariga mosligi, mamlakatimizda bo‘layotgan ijtimoiy-siyosiy va demokratik o‘zgarishlar, iqtisodiyotni erkinlashtirish, iqtisodiy-huquqiy va boshqa sohalardagi islohatlarning ustuvor masalalarini qamrab olishi hamda fan va texnologiyalarning so‘ngi yutuqlari e’tiborga olinishi tavsiya etiladi.

“Oliy matematika” fanning predmet va vazifalari. Matematika – amaliy masalarni yechishda eng kuchli vosita, fanlarning universal tili va ilmiy dunyoqarashning katta bir bo‘lagi. Tabiatda ro‘y beradigan jarayonlarni modellashtirish haqida eng sodda tushunchalar.

Chiziqli algebra va analitik geometriya elementlari. 2, 3-tartibli determinantlar va ularning xossalari. ***p*** – tartibli determinantlar. Hisoblash usullari. Matritsalar va ular ustida amallar. Teskari matritsa, matritsa rangi. Kroneker-Kapelli teoremasi. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalari va ularni matritsalar orqali yozish hamda yechish. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarini yechishning Kramer, matritsa va Gauss usullari.

Vektorlar. Vektorlar ustida chiziqli amallar. Vektorning o‘qdagi proeksiyasi. Yo‘naltiruvchi kosinuslar. Vektorlar sistemasining chiziqli bog‘liq va bog‘liqmasligi. Bazis. Dekart koordinatalar sistemasi. Vektorni koordinata o‘qlarida tashkil etuvchilar bo‘yicha yoyish. Qutb koordinatalar sistemasi.

Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi, mexanik ma’nosi, uning xossalari. Vektorning uzunligi, vektorlar orasidagi burchak, vektorlarning ortogonallik sharti.

Ikki vektorning vektor ko‘paytmasi, uning xossalari.

Vektor ko‘paytmaning mexanik ma’nosi. Ikki vektorning kollinearlik sharti. Uchta vektornnng aralash ko‘paytmasi, uning xossasi, geometrik ma’nosi. Uch vektorning komplanarlik sharti.

Analitik geometriya (tekislikda). Tekislikda to‘g‘ri chiziqning turli ko‘rinishdagi tenglamalari. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak. Ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik va perperdikulyarlik shartlari. Ikki nuqta orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa.

Ikkinchi tartibli chiziqlar: aylana, ellips, giperbola, parabola va ularning tenglamalari.

Analitik geometriya (fazoda). Tekislik. Tekislikning turli ko‘rinishdagi tenglamalari. Ikki tekislik orasidagi burchak, ularning parallellik va perpendikulyarlik sharti. Nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa. Fazoda to‘g‘ri chiziqning tenglamalari. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak, ularning parallellik va perpendikulyarlik shartlari. Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislikning o‘zaro joylashuvi.

Matematik analizga kirish. Haqiqiy sonlar to‘plami. Kompleks sonlar. Kompleks sonlarnni tasvirlash. Kompleks sonning moduli va argumenti. Kompleks sonlar ustida amallar. Kompleks sonning trigonometrik shakli. Eyler formulasi. Kompleks sonning ko‘rsatkichli shakli. Kompleks sonni darajaga ko‘tarish va ildiz chiqarish.

Chegaralangan, chegaralanmagan, chekli, cheksiz, sanoqli va sanoqsiz to‘plamlar. Funksiya, funksiya haqida tushuncha. Asosiy elementar funksiyalar, ularning grafiklari.

Sonli ketma-ketliklar va ularning limiti. Chegaralangan monoton ketma-ketlik limitining mavjudligi.

Funksiyaning nuqtadagi limiti. Funksiyaning cheksizlikdagi limiti. Limitlarning algebraik xossalari. Limitlar haqidagi teoremalar. Birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar.

Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar, ularning xossalari. Cheksiz kichik miqdorlarni solishtirish.

Funksiyaning nuqtadagi uzluksizligi. Funksiyaning uzilish nuqtalari. Asosiy elementar funksiyalarning uzluksizligi. Kesmada uzluksiz bo‘lgan funksiyaning xossalari.

Bir o‘zgaruvchili funksiyaning differensial hisobi. Funksiyaning nuqtada differensiallanuvchanligi, hosilani topish qoidalari. Funksiyaning differensiali, hosilaning va differensialning geometrik va fizik ma’nolari. Funksiya grafigiga berilgan nuqtada o‘tkazilgan urinma va normal tenglamalari.

Murakkab va teskari funksiyalarning hosilalari. Oshkormas va parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyalarni differensiallash. Differensial formasining invariantligi, yuqori tartibli hosila va differensiallar.

Roll, Lagranj, Koshi teoremalari va ularni qo‘llanilishi.

Aniqmasliklarni ochishning Lopital qoidasi.

Funksiyaning monotonlik sharti. Funksiyaning ekstremumi, ekstremum mavjud bo‘lishining zaruriy va yetarli shartlari. Kesmada uzluksiz bo‘lgan funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish.Funksiya grafigining qavariqligi, botiqligi va burilish nuqtalari. Funksiya grafigining asimptotalari.

Funksiyani tekshirishning va grafigini yasashning umumiy sxemasi va uning tadbiqi.

Integral hisob. Ko‘phadlar. Algebraning asosiy teoremasi. Bezu teoremasi. Haqiqiy koeffitsientli ko‘phadlarni chiziqli va kvadratik ko‘paytuvchilarga ajratish.

Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integrallar. Integrallar xossalari va jadvali. Integrallarni hisoblashda o‘zgaruvchilarni almashtirish va bo‘laklab integrallash. Integral osti funksiyalari turli bo‘lgan hollarda integrallash usullari.

Aniq integral tushunchasiga keltiruvchi masalalar. Aniq integralning ta’rifi va uning xossalari. Aniq integralning geometrik va fizik ma’nosi.

Yuqori chegarasi o‘zgaruvchi bo‘lgan integral. N’yuton-Leybnis formulasi. Aniq integrallarni hisoblash.

Xosmas integrallar. Chegaralari cheksiz bo‘lgan xosmas integrallar. Uzilishga ega bo‘lgan xosmas integrallarning asosiy xossalari. Funksiyalarning xosmas integrallari, ularni hisoblash usullari, yaqinlashish alomatlari. Absolyut va shartli yaqinlashishlar.

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar haqida tushuncha. Aniqlanish sohasi. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarning limiti va uzluksizligi.

Xususiy hosilalar. To‘la differensial. Sirtga o‘tkazilgan urinma tekislik va normal. Yuqori tartibli xususiy hosilalar va to‘la differensiallar.

Oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi teorema. Oshkormas funksiyani differensiallash. Aralash hosilalarning tengligi haqidagi teorema.

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarning ekstremumi. Ekstremum mavjud bo‘lishining zaruriy va yetarli shartlari.

Shartli ekstremum. Lagranjning ko‘paytuvchilar usuli. Optimal yechimlarni topishga doir misollarni qo‘llash.

Oddiy differensial tenglamalar. Differensial tenglamalarga keltiriladigan masalalar. Birinchi tartibli differensial tenglamalar. Koshi masalasi. Yechimlarning mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema. O‘zgaruvchilari ajraladigan 1–tartibli differensial tenglamalar. Koshi masalasi. Differensial tenglamaning turlari va yechish usullari. Yuqori tartibli differensial tenglamalar. Tartibi pasayadigan differensial tenglamalar. Bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan chiziqli differensial tenglamalar. Umumiy yechim xaqida teorema. Ixtiyoriy o‘zgarmas miqdorlarni variatsiyalash usuli. O‘ng tarafi maxsus ko‘rinishda bo‘lgan o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar. Differensial tenglamalar sistemasi. Differensial tenglamalar sistemasi va yuqori tartibli differensial tenglamalar orasida bog‘lanish.

Operatsion hisob. Laplas almashtirishi. Asl va tasvir. Tasvirlar xossalari, tasvirlar jadvali. Operatsion xisobning asosiy teoremalari. Tasvirga ko‘ra aslni tiklash usullari. Originallar o‘ramasi va uning xossalari. Dyuamel integrali. Differensial tenglamalar va tenglamalar sistemasini operatsion hisob yordamida yechish usullari. Operatsion hisobni injenerlik masalalariga tadbiqi.

Sonli qatorlar. Sonli qatorlar haqida tushincha. Qator yaqinlashishi va yig‘indisi. Qatorlar ustida amallar. Musbat hadli qatorlar va ularning yaqinlashish alomatlari. Ishorasi almashinuvchi qatorlar, Leybnis alomati. Ishorasi o‘zgaruvchi qatorlar. Absolyut va shartli yaqinlashish.

Funksional qatorlar. Funksional qatorlar haqida tushuncha. Yaqinlashish va tekis yaqinlashish tushunchalari. Veyershtras alomati. Tekis yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari. Darajali qatorlar. Abel teoremasi. Yaqinlashish radiusi. Darajali qatorlarning xossalari. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish. Darajali qatorlarni differensiallash va integrallash. $(x-a)$ ning darajalari bo‘yicha qator. Teylor va Makloren qatorlari. Elementar funksiyalarni Makloren qatoriga yoyish. Binomial qator, $\ln(1+x)$ funksiyani darajali qatorga yoyish. Logarifmlarni hisoblash. Aniq integralni qator yordamida hisoblash. Differensial tenglamalarni qator yordamida yechish.

Fure qatori. Fure qatorlari haqida tushuncha, trigonometrik funksiyalar sistemasi. Funksiyalarni Fure qatoriga yoyish. Fure integrali. Kompleks ko‘rinishdagi Fure integrali. Furening kosinus va sinus almashtirishlari.

Karrali, egri chiziqli va sirt integrallari. Ikki va uch karrali integrallar ta'rifi. Mavjudlik va o'rta qiymat haqidagi teoremalar. Karrali integrallarda o'zgaruvchilarni almashtirish. Qutb, silindrik va sferik koordinat sistemalariga o'tish usuli. Dekart koordinat sistemasida karrali integrallarni hisoblash.

1- va 2- tur egri chiziqli integrallar, ularning asosiy xossalari va hisoblash usullari. Grin formulasi. Egri chiziqli integrallarning integrallash yo'liga bog'lik bo'lmaslik sharti. 1- va 2-tur sirt integrallar, ularning xossalari va hisoblash usullari.

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Tasodifiylik va qonuniyat. Tasodifiy hodisa va ular ustida amallar. Elementar hodisalar fazosi. Hodisalar algebrasi.

Ehtimollikning klassik, geometrik, statistik ta'riflari. Ehtimollikning aksiomatik ta'rifi. Shartli ehtimollik. Hodisalarning bog'liqsizligi. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremalari. To'la ehtimol va Bayes formulalari.

Bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma–ketligi. Bernulli formulasi. Muavr – Laplasning lokal va integral formulalari. Puasson teoremasi.

Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni va uni berish usullari. Taqsimot funksiya va uning xossalari.

Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari. Matematik kutilish va uning xossalari. Boshlang'ich va markaziy momentlar. Dispersiya, o'rtacha kvadratik chetlanish.

Amaliyotda ko'p qo'llaniladigan diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Binomial, Puasson, gipergeometrik taqsimotlar. Tekis taqsimot, ko'rsatkichli va normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar.

Ko'p o'chovli tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot qonunlari. Ikki diskret tasodifiy miqdorlar sistemasi. Taqsimot matritsasi. To'g'ri to'rtburchakda tekis taqsimlangan va tekislikda normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar. Korrelyatsiya momenti va korrelyatsiya koeffitsienti. Katta sonlar qonuni. Chebishev tengsizligi. Chebishev va Bernulli teoremalari. Markaziy limit teoremasi.

Matematik statistikaning asosiy masalalari. Tanlanma taxlili. Tanlanmaning statistik taqsimoti va empirik funksiyasi. Poligon va gistogramma. Taqsimot parametrlarining statistik baxolari. Siljimas, effektiv va asosli baholar.

Nuqtali baholar. Taqsimot parametrlarini baholashning momentlar va haqiqatga maksimal o'xshashlik usuli. Puasson taqsimoti, ko'rsatkichli va normal taqsimotning noma'lum parametrlari uchun nuqtaviy baholar.

Statistik taxminlarni tekshirish. Asosiy va zid (konkurent) taxminlar. Birinchi va ikkinchi tur xatolar. Asosiy taxminni tekshirishning statistik alomati. Kritik soha. Taxminni qabul qilinish soxasi. Kritik nuqtalar. Statistik taxminlarni tekshirishda Pirson va Kolmogorov usullari.

Korrelyatsion va regression taxlil. Empirik formulalarni aniqlash usullari. Korrelyatsiya jadvali. Empirik regressiya. Chiziqli regressiya tenglamasini aniqlashning yig‘indilar va eng kichik kvadratlar usuli.

Amaliy mashg‘ulotlarni tashkil etish bo‘yicha ko‘rsatmalar

Amaliy mashg‘ulotlarda talabalar oliy matematika fanidan olgan nazariy bilimlarini mustahkamlaydilar. Amaliy mashg‘ulotlarda yechiladigan misol va masalalar quyidagi prinsiplarga asosan tanlanadi: tipik misol va masalalarni yechishga malaka hosil qildiruvchi, fanning mohiyatini anglatuvchi va mavzular orasidagi bog‘liqlikni ifodalovchi ma’lum miqdordagi misol va masalalar tanlanadi.

Amaliy mashg‘ulotlarning taxminiy ro‘yxati

- Matritsa va determinantlar;
- Chiziqli tenglamalar sistemasi;
- $\boldsymbol{R^n}$ fazoda vektorlar sistemasi;
- To‘g‘ri chiziq va tekislik;
- Ikkinchi tartibli chiziqlar;
- Chiziqli va Evklid fazolari;
- Chiziqli va Evklid fazolarda chiziqli operatorlar;
- Ketma – ketlik limiti;
- Funksiya limiti;
- Hosila va differensiallar;
- Aniqmas integral;
- Aniq integral;
- Xosmas integral;
- Birinchi tartibli differensial tenglamalar;
- Yuqori tartibli differensial tenglamalar;
- Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar;
- Differensial tenglamalar sistemasi;
- Operatsion hisob;
- Sonli qatorlar;
- Funksional qatorlar;
- Fure qatori;
- Karrali, egri chiziqli integrallar;
- Tasodifiy hodisa ehtimolligi ta’riflari;

- Shartli ehtimollik. To‘la ehtimol va Bayes formulalari;
- Bog‘liq bo‘lmagan tajribalar ketma – ketligi. Bernulli formulasi. Muavr – Laplasning lokal va integral formulalari. Puasson teoremasi;
- Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar, taqsimot qonuni va sonli xarakteristikalari;
- Tasodifiy miqdorlar bog‘liqsizligi, tasodifiy vektor.
- Tanlanma tahlili;
- Noma’lum parametrlarni baholash;
- Statistik taxminlarni tekshirish;
- Korrelyatsion va regression taxlil.

Laboratoriya ishlarini tashkil etish bo‘yicha ko‘rsatmalar

Fan bo‘yicha laboratoriya ishlari namunaviy o‘quv rejada ko‘zda tutilmagan.

Kurs ishini tashkil etish bo‘yicha uslubiy ko‘rsatmalar

Fan bo‘yicha kurs ishi namunaviy o‘quv rejasida rejalashtirilmagan.

Mustaqil ta’limning shakli va mazmuni

Talaba mustaqil ishining asosiy maqsadi – o‘qituvchining rahbarligi va nazoratida muayyan o‘quv ishlarini mustaqil ravishda bajarish uchun bilim va ko‘nikmalarni shakllantirish va rivojlantirish.

Talaba mustaqil ishini tashkil etishda quyidagi shakllardan foydalaniladi:

- ayrim nazariy mavzularni o‘quv adabiyotlari yordamida mustaqil o‘zlashtirish;
- berilgan mavzular bo‘yicha axborot (referat) tayyorlash;
- nazariy bilimlarni amaliyotda qo‘llash;
- maket, model va namunalar yaratish;
- ilmiy maqola, anjumanga ma’ruza tayyorlash va h.k..

Amaliy mashg‘ulotlarni tashkil etish bo‘yicha kafedra professor – o‘qituvchilari tomonidan ko‘rsatma va tavsiyalar, masalalar to‘plami ishlab chiqiladi. Unda talabalarga asosiy ma’ruza mavzulari bo‘yicha amaliy masala va misollar yechish uslubi va mustaqil yechish uchun masalalar keltirildi.

Tavsiya etilayotgan mustaqil ishlarning mavzulari

1. 2 – tartibli egri chiziqlar va sirtlar.
2. Funksiyalarni tekshirish. Murakkab funksiyalar grafigini chizish usullari.

3. Aniq integrallar yordamida geometrik va fizik masalalarni yechish hamda ularni tahlil qilish.
4. Shartli ekstremum. Chegaralangan yopiq soxada ikki oʻzgaruvchili funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatini topish.
5. Darajali qatorlarning funksiyalarni, aniq integrallarni hisoblashga va differensial tenglamalarni yechishga tatbiqi.
6. Karrali, egri chiziqli va sirt integrallari yordamida geometrik va fizik masalalarni yechish hamda ularni tahlil qilish.
7. Erlang, Pirson, Veybulla va Releya qonunlari.
8. Koʻp oʻlchovli normal va tekis taqsimot qonunlari.
9. Xarakteristik va hosil qiluvchi funksiyalar.
10. Koʻp oʻlchovli tanlanmaning statistik taxlili.

Dasturning informatsion – uslubiy ta'minoti

Mazkur fanni o'qitish jarayonida ta'limning zamonaviy ilg'or interfaol usullaridan, pedagogik va axborot – kommunikatsiya texnologiyalarining prezentatsiya (taqdimot), multimedia va elektron-didaktik texnologiyalardan foydalaniladi. Amaliy mashg'ulotlarda aqliy hujum, klaster, blis-so'rov, guruh bilan ishlash, insert, taqdimot, keys stadi kabi usul va texnikalardan keng foydalaniladi.

Foydalaniladigan adabiyotlar ro'yxati

Asosiy adabiyotlar:

1. Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010.
2. Jo'raev T., Sa'dullaev A., Xudoyberganov G., Mansurov X., Vorisov A. Oliy matematika asoslari. T.1., Toshkent, "O'qituvchi", 1995.
3. Jo'raev T., Sa'dullaev A., Xudoyberganov G., Mansurov X., Vorisov A. Oliy matematika asoslari. T.2., Toshkent, "O'zbekiston", 1999.
4. Soatov Yo.U Oliy matematika. T., O'qituvchi, 1995. 1- 5 qismlar.
5. N.M.Jabborov, E.«Oliy matematika». 1-2 qism. Qarshi, 2010.
6. Latipov X.R., Tadjiev Sh. Analitik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent, "O'zbekiston". 1995.
7. Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O'qituvchi, 2001.

Qo'shimcha adabiyotlar:

1. Azlarov T., Mansurov X. Matematik analiz, - Toshkent.: O'qituvchi, 1-qism, 1989.
2. Latipov X.R., Nosirov F.U., Tadjiev Sh.A. Analitik geometriya va chiziqli algebradan masalalar yechish bo'yicha qo'llanma. Toshkent, Fan, 1999.
3. A.Yusupov, X.A.Axmedova, A.Tilavov. «Ko'p argumentli funksiyalarning integrallari. Maydonlar nazariyasi». Toshkent, 2011.
4. Piskunov N.S. Differensialnoe i integralnoe ischislenie dlya VTUZov. -M.: Nauka, v 2x chastyax, 2001.
5. Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar yechishga doir qo'llanma. Toshkent, O'qituvchi, 2001.
6. Sirojiddinov S.X., Mamatov M. Ehtimollar nazariyasi kursi. T. O'qituvchi, 1980.
7. Bugrov Ya.S., Nikolskiy S.M. Differensialnie uravneniya. Kratnie integrali. Radi. Funksii kompleksnogo peremennogo. - Nauka, 1997.
8. Bugrov Ya.S., Nikolskiy S.M. Elementi lineynoy algebri i analiticheskoy geometrii. -M.: Nauka, 1988.

9. Kletenik D.V. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii. - M-: Nauka, 1986.
10. Danko P.S., Popov A.G., Kojevnikova T.Ya. Visshaya matematika v uprajneniyax i zadachax. V 2 ch. - M.: Vыsshaya; shkola, 1998. -ch. 1, 2.
11. Berman G.N. Sbornik zadach po kursu matematicheskogo analiza. –M.-: Nauka, 1985.
12. Minorskiy V.I. Sbornik zadach po visshey matematike. M: Nauka, 1987.
13. Beklemeshev D.V., Petrovich A.Yu., Chuberov I.A. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii i lineynoy algebre. -M.: Nauka, 1987.
14. Bugrov Ya.S., Nikolskiy S.M. Sbornik zadach po visshey matematike, uchebnoe posobie dlya injenerno texnicheskix spesialnostey vuzov. - M.: Nauka. 1997.
15. Kolde U.K. Praktikum po teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistike. –M. “Visshaya shkola”, 1991.

Internet saytlari

1. www.Ziyonet.uz
2. www.tuit.uz
3. www.Math.uz
4. www.bilim.uz
5. www.gov.uz

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA
O‘RTA-MAXSUS TA’LIMI VAZIRLIGI
TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

Ro‘yxatga olindi: “TASDIQLAYMAN”
O‘quv ishlari bo‘yicha birinchi prorektor

№_________________ _________________________

201__ yil «___»________ 201__yil «____»___________

OLIY MATEMATIKA, EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

FANINING

ISHCHI-O‘QUV DASTURI

Bilim sohasi: **300000**-Ishlab chiqarish-texnik soha;

Ta’lim sohasi: **330000**-Kompyuter texnologiyalari va informatika;

Ta’lim yo‘nalishi: **5330500** – Kompyuter injiniringi (“Kompyuter injiniringi”, “AT-servis”, “Multimedia texnologiyalari”);

5330300 – Axborot xavfsizligi;

5330600 – Dasturiy injiniring;

Ta’lim sohasi: **350000**-Aloqa va axborotlashtirish, Telekommunikatsiya texnologiyalari;

Ta’lim yo‘nalishi: **5350100** – Telekommunikatsiya texnologiyalari

(“Telekommunikatsiyalar”, “Teleradioeshittirish”, Mobil tizimlari);

5350200 – Televizion texnologiyalar (“Audioviziul texnologiyalar”, “Telestudiya tizimlari va ilovalari”);

5350300 – Axborot-kommunikatsiya texnologiyalari sohasida iqtisodiyot va menejment;

5350400 – Axborot-kommunikatsiya texnologiyalari sohasida kasb ta’limi;

5350500 – Pochta aloqasi texnologiyasi;

5350600 – Axborotlashtirish va kutubxonashunoslik.

TOSHKENT-2016

Ishchi o‘quv dastur O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan 2016 yil 09.01 da tasdiqlangan, texnika oliy o‘quv yurtlarida tayyorlanadigan bakalavrlar yo‘nalishlari uchun « **OLIY MATEMATIKA, EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA**» fanidan tuzilgan fan dasturi asosida ishlab chiqildi.

Tuzuvchilar : dots. Raxmatov R.R. ,

dots. Adirov T.X.,

dots. Islamova O.A.,

k.o‘q. Tadjibaeva Sh.E.

Taqrizchilar:

Kurganov K. A. – O‘zbekiston Milliy Universiteti “Algebra va funksional analiz” kafedrasi dotsenti, f.-m.f.n..

Abduvaitov X.A.– TATU “Algoritmlash va matematik modellashtirish” kafedrasi dotsenti, f.-m.f.n..

« **OLIY MATEMATIKA, EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA** » fanidan tuzilgan ushbu ishchi dastur kafedra yig‘ilishida muhokama qilindi va tasdiqlandi (____ _____ 201__ yil, bayonnoma №___).

Kafedra mudiri ___________ R. Raxmatov

Ishchi dastur DIF ilmiy–uslubiy kengashi tomonidan ko‘rib chiqildi va tasdiqlandi.
(____ _____ 201__ yil, bayonnoma № ___)

Kengash raisi: Fakultet dekani ___________ D.G. Abdullaev

Ishchi dastur Toshkent Axborot Texnologiyalari Universiteti Ilmiy-uslubiy Kengashida ko‘rib chiqildi va tasdiqlandi. (201__ yil “___”_____dagi “ ____ ” – sonli bayonnoma).

O‘quv uslubiy boshqarma boshlig‘i _______________ A.Ergashev

Kirish

“Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” fani talabalarga o‘zlashtirishlari zarur bo‘lgan tabiiy-ilmiy, umumkasbiy, harbiy, texnik va matematikaning maxsus bo‘limlarini o‘rgatish va harbiy masalalarga (tayin masalani matematik tilda ifodalash, yechimning optimal usulini tanlash, olingan natijalarni baholash) matematikani qo‘llashda dastlabki ko‘nikmalarini hosil qilish maqsadida o‘qitiladi.

Fanning maqsad va vazifalari

Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika kursini o‘rgatishdan maqsad – talabalar iqtidorini o‘stirish, mantiqiy va algoritmik fikrlash qobiliyatini shakllantirish; axborotlar bilan bog‘lik jarayonlarni tahlil qilish va matematik modellashtirish uchun zarur bo‘lgan matematik usullarni o‘qitish; axborotlar va texnologiyalarsohasidagi turli yo‘nalishdagi masalalarning asosli va optimal (eng maqbul) yechimlarini topishda matematika fanining o‘rni va ahamiyatini ko‘rsatish.

O‘tilgan mavzularni mustaqil rivojlashtirish, to‘g‘ri yechimlarini topish, turli axborot manbalaridan (adabiyot va internet) foydalanish ko‘nikma va qobiliyatlarini shakllantirish kerak.

Fan bo‘yicha talabaning malakasiga qo‘yiladigan talablar

Fanni o‘rganish natijasida talabalar quyidagi tasavvurlarga ega bo‘lishlari kerak:

- Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanining dunyoni bilishdagi, undagi tushuncha va tasavvurlarini umumiyligini tasavur etishdagi alohida xususiyati xaqida;

-matematik modellashtirish xaqida;

-olingan natijalarni qo‘llash mumkin bo‘lgan hollarni baholash va modellarni tekshirish usullari haqida;

Quydagilardan foydalana olishi va bilish kerak:

-matematik tahlilning asosiy tushunchalari va usullarini, analitik geometriyani, chiziqli algebrani va operatsion hisoblashni;

Quyidagi tajribalarga ega bo‘lishi kerak:

-inshooatlarni (obektlarni)soni va sifat munosabatlarini ifodalash uchun matematika belgilarini ishlata olish;

- matritsalar ustida amallarni hisoblay olishi, determinantning qiymatini uning ta’rifi va xossalariga ko‘ra (jumladan Laplas teoremasidan foydalanib) hisoblashlari, matritsa rangi va teskari matritsalarni turli usullar bilan topa olishi;

- chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini tadqiq etishi va ularni turli usullar bilan yechimlarini topishi;

- chiziqli va Yevklid fazolarning ta’rifini aniq bilishi, vektorlarning chiziqli bog‘liqligi va chiziqli erkliligini, vektorlar sistemasining rangini, fazoning bazisi va o‘lchovini, fazo ostilarni bilishi;

- chiziqli va Yevklid fazolarda chiziqli operatorlarning boshlag‘ich nazariyasini aniq bilishi;

- to‘g‘ri chiziq va tekislikning turli tenglamalarini bilishi, ular orasidagi burchaklarni hisoblay olishi, ularning parallellik va perpendikulyarlik shartlarini bilishi, nuqtadan to‘g‘ri chiziq va tekislikkacha masofani hisoblay olishi;

- ikkinchi tartibli egri chiziqlarni, ularning tenglamalari bo‘yicha tahlil etishi va tasniflashi;

- differensiallash va integrallash formulalarini chalkashtirmasdan to‘g‘ri ishlata bilishi;

- elementar hisoblashda yaxshi tajribaga ega bo‘lishni, qiyinchiliksiz berilgan funksiya uchun Teylor formulasini yozishi;

- integrallarni hisoblashda, qatorni yaqinlashishga tekshirishda zarur usullarni osonlikcha topa bilishi;

- differensial va integral hisobning tatbiqlarini bilishi;

- eng sodda differensial tenglamalar va tenglamalar sistemasini yecha bilish;

- operatsion hisobni bilishi.

Fanni o‘qitishda zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar

O‘quv jarayoni bilan bog‘liq ta’lim sifatini belgilovchi holatlar quyidagilar: yuqori ilmiy-pedagogik darajada dars berish, muammoli ma’ruzalar o‘qish, darslarni savol-javob tarzida qiziqarli tashkil qilish, ilg‘or pedagogik texnologiyalardan va mul’timedia vositalaridan foydalanish, tinglovchilarni undaydigan, o‘ylantiradigan muammolarni ular oldiga qo‘yish, talabchanlik, tinglovchilar bilan individual ishlash, erkin muloqot yuritishga, ilmiy izlanishga jalb qilish.

“Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” kursini loyihalashtirishda quyidagi asosiy konseptual yondoshuvlardan foydalaniladi:

Shaxsga yo‘naltirilgan ta’lim. Bu ta’lim o‘z mohiyatiga ko‘ra ta’lim jarayonining barcha ishtirokchilarini to‘laqonli rivojlanishlarini ko‘zda tutadi. Bu esa ta’limni loyihalashtirilayotganda, albatta, ma’lum bir ta’lim oluvchining shaxsini emas, avvalo, kelgusidagi mutaxassislik faoliyati bilan bog‘liq o‘qish maqsadlaridan kelib chiqqan holda yondoshilishni nazarda tutadi.

Tizimli yondoshuv. Ta’lim texnologiyasi tizimning barcha belgilarini o‘zida mujassam etmog‘i lozim: jarayonning mantiqiyligi, uning barcha bo‘g‘inlarini o‘zaro bog‘langanligi, yaxlitligi.

Faoliyatga yo‘naltirilgan yondoshuv. Shaxsning jarayonli sifatlarini shakllantirishga, ta’lim oluvchining faoliyatni aktivlashtirish va intensivlashtirish, o‘quv jarayonida uning barcha qobiliyati va imkoniyatlari, tashabbuskorligini ochishga yo‘naltirilgan ta’limni ifodalaydi.

Dialogik yondoshuv. Bu yondoshuv o‘quv munosabatlarini yaratish zaruriyatini bildiradi. Uning natijasida shaxsning o‘z-o‘zini faollashtirishi va o‘z-o‘zini ko‘rsata olishi kabi ijodiy faoliyati kuchayadi.

Hamkorlikdagi ta’limni tashkil etish. Demokratik, tenglik, ta’lim beruvchi va ta’lim oluvchi faoliyat mazmunini shakllantirishda va erishilgan natijalarni baholashda birgalikda ishlashni joriy etishga e’tiborni qaratish zarurligini bildiradi.

Muammoli ta’lim. Ta’lim mazmunini muammoli tarzda taqdim qilish orqali ta’lim oluvchi faoliyatini aktivlashtirish usullaridan biri. Bunda ilmiy bilimni ob’ektiv qarama-qarshiligi va uni hal etish usullarini,

dialektik mushohadani shakllantirish va rivojlantirishni, amaliy faoliyatga ularni ijodiy tarzda qo‘llashni mustaqil ijodiy faoliyati ta’minlanadi.

Axborotni taqdim qilishning zamonaviy vositalari va usullarini qo‘llash - yangi kompyuter va axborot texnologiyalarini o‘quv jarayoniga qo‘llash.

O‘qitishning usullari va texnikasi. Ma’ruza (kirish, mavzuga oid, vizuallash), muammoli ta’lim, keys-stadi, pinbord, paradoks va loyihalash usullari, amaliy ishlar.

O‘qitishni tashkil etish shakllari: dialog, polilog, muloqot hamkorlik va o‘zaro o‘rganishga asoslangan frontal, kollektiv va guruh.

O‘qitish vositalari: o‘qitishning an’anaviy shakllari (darslik, ma’ruza matni) bilan bir qatorda – kompyuter va axborot texnologiyalari.

Kommunikatsiya usullari: tinglovchilar bilan operativ teskari aloqaga asoslangan bevosita o‘zaro munosabatlar.

Teskari aloqa usullari va vositalari: kuzatish, blis-so‘rov, oraliq va joriy va yakunlovchi nazorat natijalarini tahlili asosida o‘qitish diagnostikasi.

Boshqarish usullari va vositalari: o‘quv mashg‘uloti bosqichlarini belgilab beruvchi texnologik karta ko‘rinishidagi o‘quv mashg‘ulotlarini rejalashtirish, qo‘yilgan maqsadga erishishda o‘qituvchi va tinglovchining birgalikdagi harakati, nafaqat auditoriya mashg‘ulotlari, balki auditoriyadan tashqari mustaqil ishlarning nazorati.

Monitoring va baholash: o‘quv mashg‘ulotida ham butun kurs davomida ham o‘qitishning natijalarini rejali tarzda kuzatib borish. Semestr davomida test topshiriqlari hamda tayanch so‘z va iboralar asosida oraliq va yakuniy nazoratlar o‘tkaziladi.

“ Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika ” fanidan mashg‘ulotlarning mavzular va soatlar bo‘yicha taqsimlanishi:

t/r	Mavzular nomi	Jami soat	Ma’ruza	Amaliy mashg‘ulot	Mustaqil ta’lim
1	Matritsa va determinantlar	20	6	6	8
2	Chiziqli tenglamalar sistemasi	14	4	4	6
3	Vektorlar va ular ustida amallar	20	4	6	10
4	Analitik geometriya elementlari	24	6	4	14
5	Kompleks sonlar	12	4	4	4
6	Bir o‘zgaruvchili funksiyalar. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar.	106	36	34	36
7	Differensial tenglamalar	36	12	10	14
8	Operatsion hisob	20	6	4	10
9	Qatorlar	46	20	12	14
10	Karrali va egri chiziqli integrallar	28	10	6	12
11	Extimollar nazariyasi va matematik statistika	84	36	18	30
	jami	410	144	108	158

Asosiy qism: Fanning uslubiy jixatdan uzviy ketma-ketligi

Asosiy qismda (ma’ruza) fanni mavzulari mantiqiy ketma-ketlikda keltiriladi. Har bir mavzuning mohiyati asosiy tushunchalar va tezislar orqali ochib beriladi. Bunda mavzu bo‘yicha talabalarga DTS asosida yetkazilishi zarur bo‘lgan bilim va ko‘nikmalar to‘la qamrab olinishi kerak.

Asosiy qism sifatiga qo‘yiladigan talab mavzularning dolzarbligi, ularning ish beruvzilar talablari va ishlab chiqarish extiyojlariga mosligi, mamlakatlarimizda bo‘layogan ijtimoiy – siyosiy va demokratik o‘zgarishlar, iqtisodiyotini erkinlashtirish, iqtisodiy-huquqiy va boshqa sohalardagi islohatlarning ustuvor masalalarni qamrab olishi hamda fan va texnologiyalarning so‘nggi yutuqlari e’tiborga olinishi tavsiya etiladi.

Ma’ruza mashg‘ulotlari

Matritsa va determinantlar. Determinantlar va ularning xossalari. Matritsalar va ular ustidagi amallar. Teskari matritsa. Matritsa rangi va uni topish.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o‘z-o‘zini nazorat.*

Adabiyotlar: A4,A5, A6, Q2, Q8, Q9, Q10, Q12, Q13, Q14.

Chiziqli tenglamalar sistemasi: Chiziqli algebraik tenglamalar tizimi. Kramer, Gauss va matritsa usullari yordamida chiziqli algebraik tenglamalar tizimini yechish. Bir jinsli chiziqli tenglamalar tizimlari va ularning fundamental yechimlarini topish.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o‘z-o‘zini nazorat.*

Adabiyotlar:A4, A5, A6, Q2, Q8, Q9, Q10, Q12, Q13, Q14.

Vektorlar va ular ustida amallar: R^n arifmetik fazo. Vektor va ular ustidagi chiziqli amallar. Vektorni bazislarga yoyish. Vektorlarning skalyar, vektor va aralash ko‘paytmalari. Ularning xossalari. Vektorlarning kollinearlik, perpendikulyarlik va komplanarlik shartlari. Vektorlarning fizik, mexanik va ba’zi bir harbiy amaliy masalalarga tadbiq qilinishi.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o‘z-o‘zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1,A4,A5, A6, Q2, Q8, Q9, Q10, Q12, Q13, Q14.

Analitik geometriya elementlari: Qutb koordinata sistemasi va uning dekart koordinata sistemasi bilan bog‘lanishi. Uning harbiy topografiyada foydalanishi. Tekislikda to‘g‘ri chiziqlarning har xil ko‘rinishlardagi tenglamalari. To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak. Ularning paralellik va perpendikulyarlik shartlari. Tekislik. Tekisliklar orasidagi burchak. Fazoda to‘g‘ri chiziqning har xil ko‘rinishlardagi tenglamalari. To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak. To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak. Ularning paralellik va perpendikulyarlik shartlari. Aylana, Ellips, giperbola va parabola tenglamalari va ularning xossalari.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o‘z-o‘zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1,A4,A5, A6, Q2, Q8, Q9, Q10, Q12, Q13, Q14.

Kompleks sonlar: Kompleks sonlar.Uning algebraik, trigonometrik va ko‘rsatkichli ko‘rinishlari. Eyler formulasi. Kompleks sonlar ustidagi amallar. Muavr formulasi. Ko‘phadni ko‘paytuvchilarga ajratish.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o‘z-o‘zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1, A2, A3, A4, A5, Q1,Q10, Q11, Q12, Q14.

Bir o‘zgaruvchili funksiyalar. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar: Ketma-ketliklar limiti va ularning xossalari. Funksiya limiti. Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar va ularning xossalari. Birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar. Funksiyaning uzluksizligi.shartlari. Hosilaning mexanik va geometrik ma’nosi. Yig‘indi, ko‘paytma, bo‘linma, murakab, teskari va ko‘rsatkichli funksiya hosilalarini topish. Oshkormas funksiya hosilasi. Logarifmik differensiallash. Parametrik ko‘rinishdagi funksiya va uning hosilasi. Funksiya differensiali va uning geometrik ma’nosi. Murakkab funksiya differensiali. Yuqori tartibli funksiya differensiali va hosilasi. Differrensial hisobning asosiy teoremalari: Ferma, Roll. Lagranj va Koshi teoremalari. Lopital qoidasi. Funksiya monotonligi, ekstremum qiymatlari va uning grafigining qavariq, botiq intervallari. Burilish nuqtasi. Asimptotalari. Funksiyani to‘liq tekshirish. Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral. O‘zgaruvchini almashtirib va bo‘laklab integrallash. Kasr-ratsional va ba’zi bir irratsional ifodalarni integrallash. Trigonometrik ifodalani integrallash. Aniq integral. Yuqori chegarasi o‘zgaruvchi integral. Nyuton-Leybnis formulasi. O‘zgaruvchini almashtirib va bo‘laklab integrallash. Anik integralning geometrik va mexanik masalalarni yechishga tatbiki.1 va 2-tur xosmas integrallar. Ko‘p argumentli funksiyalar limitlarini hisoblash. Xususiy hosila va to‘la differensiallarni topish. Yuqori tartibli xususiy hosila va differensiallar. Murakkab va oshkormas funksiyalarni differensiallash. Ikki argumentli funksiya ekstremumi.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o‘z-o‘zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1, A2, A3, A4, A5, Q1,Q10, Q11, Q12, Q14.

Differensial tenglamalar: Differensial tenglamalarga keltiriladigan masalalar. O‘zgaruvchilari ajraladigan 1 – tartibli differensial tenglamalar. Koshi masalasi. Differensial tenglamalar turlari va yechish usullari. Yuqori tartibli differensial tenglamalar. Tartibi pasayadigan differensial tenglamalar. Bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan chizikli differensial tenglamalar. Umumiy yechim haqida teorema. Ixtiyoriy o‘zgarmas miqdorlarni variatsiyalash usuli. O‘ng tomoni maxsus ko‘rinishda bo‘lgan o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar. Oddiy differensial tenglamalar sistemasi.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o‘z-o‘zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1, A2, A3, A4, A5, Q1, Q4, Q7, Q10, Q11, Q14.

Operatsion hisob: Laplas almashtirishlari. Asl va tasvir. Tasvirlarning xossalari, tasvirlar jadvali. Operatsion hisobning asosiy teoremalari. Tasvirga ko‘ra aslni topish usullari. Originallar o‘ramasi va uning xossalari. Dyuamel integrali. Differensial tenglamalar va tenglamalar sistemasini operatsion hisob yordamida yechish usullari.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o‘z-o‘zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1, A3, A4, A5, Q4, Q10, Q14.

Qatorlar: Sonli qatorlar. Qator yaqinlashishi va yig‘indisi. Qatorlar ustida amallar. Musbat hadli qatorlar va ularning yaqinlashish alomatlari. Ishorali almashinuvchi qatorlar, Leybnis alomati. Ishorasi o‘zgaruvchi qatorlar. Absolyut va shartli yaqinlashish. Funksional qatorlar. Yaqinlashish va tekis yaqinlashish. Veyrshtras alomati. Tekis yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari. Darajali qatorlar. Abel teoremasi. Yaqinlashish radiusi. Darajali qatorlarning xossalari. Teylor qatori. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish. Fure qatorlari, trigonometrik funksiyalar sistemasi. Yaqinlashuvchi va tekis yaqinlashuvchi funksiyalarini Fure qatoriga yoyish. Furening kosinus va sinus almashtirishlari.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o‘z-o‘zini nazorat.*

Adabiyotlar: A1, A2, A3, A4, A5, Q1, Q4, Q7, Q10, Q11, Q14.

Karrali va egri chiziqli integrallar: Ikki va uch karrali integrallar ta’rifi. Mavjudlik va o‘rta qiymathaqidagi teoremalar. Karrali integrallarda o‘zgaruvchilarni almashtirish. Qutb, silindrik va sferik koordinatalar sistemalariga o‘tish usuli. Dekart koordinat sistemasida karali integrallarni hisoblash. 1 va 2 tur egri chiziqli integrallar va ularning asosiy xossalari va ularni hisoblash usullari. Grin formulasi. Egri chiziqli integrallarning integrallash yo‘liga bog‘liq bo‘lmaslik sharti.

Tasodif va qonuniyat. Ehtimolning klassik ta’rifi. Geometrik ehtimol. Ehtimolning statistik ta’rifi. Ehtimollar nazariyasini aksiomatik asosida qurish.

Shartli ehtimol. Hodisalarning bog‘liqsizligi. Ehtimollarni qo‘shish va ko‘paytirish teoremalari. To‘la ehtimol va Bayes formulalari.

Bog‘liq bo‘lmagan tajribalar ketma – ketligi. Bernulli formulasi. Muavr – Laplasning lokal va integral formulalari. Puasson teoremasi.

Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni va uni berish usullari. Taqsimot funksiya va uning xossalari.Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari. Matematik kutilish va uning xossalari. Boshlang‘ich va markaziy momentlar. Dispersiya, o‘rtacha kvadratik chetlanish. Amaliyotda ko‘p qo‘llaniladigan diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Binomial, Puasson, gipergeometrik taqsimotlar. Tekis taqsimot, ko‘rsatkichli va normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar.

Ko‘p o‘lchovli tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot qonunlari. Ikki diskret tasodifiy miqdorlar sistemasi. Taqsimot matritsasi. To‘g‘ri to‘rtburchakda tekis taqsimlanagan va tekislikda normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar. Korrelyatsiya momenti va korrelyatsiya koeffitsienti. Katta sonlar qonuni. Chebыshev tengsizligi. Chebыshev va Bernulli teoremalari. Lyapunovning markaziy limit teoremasi.

Matematik statistikaning asosiy masalalari. Tanlanma usul. Tanlanmaning statistik taqsimoti va empirik funksiyasi. Poligon va distogramma. Taqsimot parametrlarning statistik baholari. Siljimagan, effektiv va asosli baholar. Nuqtali baholar. Taqsimot parametrlarini baholashning momentlari va eng katta o‘xshashlik usuli. Puasson taqsimoti, ko‘rsatkichli va normal taqsimotning noma’lum parametrlari uchun nuqtaviy baholar.

Bahoning aniqligi, ishonchli ehtimol, ishonchli oraliq, oraliq taksimotning matematik kutulmasi, dispersiyasi va o‘rtacha kvadratik chetlanishlar uchun ishonchlilik oraliqlar.

Statistik taxminlarni tekshirish. Asosiy va zid (konkurent) taxminlar. Birinchi va ikkinchi tur xatolar. Asosiy taxminni tekshirishning statistik alomati. Kritik soha. Taxminni qabul qilinish sohasi. Kritik nuqtalar. Statistik taxlinlarni tekshirishda K. Pirson, Kolmogorov – Smirnovparning tastiqlash alomatlari. Puasson taqsimotining parametri haqidagi taxminni tekshirish. Normal taqsimotning matematik kutilmasi, dispersiyasi va o‘rtacha kvadratik chetlanishi haqidani taxminlarni tekshirish. Korrelyatsion va regression taxlil. Empirik formulalani aniqlash usullari. Korrelyatsiya jadvali. Empirik regressiya. Chiziqli regressiya tenglamasini aniqlashning yig‘indalar va eng kichik kvadratlar usuli

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim. Bingo, blis, ajurali arra, nilufar guli, menyu, algoritm, munozara, o‘z-o‘zini nazorat.*

Adabiyotlar: A4, A7, Q4, Q5, Q6, Q10, Q15.

«Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» fani bo‘yicha ma’ruza mashg‘ulotlarining kalendar tematik rejasi

I semestr

T/r	Ma’ruza mavzulari	soat
1.	2 va 3 chi tartibli determinantlar Determinantlar hisoblash usullari.	2
2.	Matritsalar. Asosiy ta’riflar. Matritsalar ustida amallar. Teskari matritsa.	2
3.	Matritsaning rangi. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Kroneker-Kapelli teoremasi.	2
4.	Chizikli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Kramer, matritsa va Gauss usullari.	2
5.	Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirish, yechimlar to‘plamini o‘lchash. Fundamental yechimlar sistemasi.	2
6.	Vektorlar. Vektorlar ustidan chiziqli amallar. Chiziqli bog‘liq va chiziqli erkli vektorlar. Bazis.	2
7.	Ikki vektorning skalyar va vektor ko‘paytmasi. Uch vektorning aralash ko‘paytmasi	2
8.	Tekislikda to‘g‘ri chiziq. To‘g‘ri chiziq tenglamalari. To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak. To‘g‘ri chiziqlarningn paralellik va perpendikulyarlik shartlari.	2
9.	Fazoda tekislik tenglamalari. Ular orasidagi burchak. Tekisliklarning paralellik va perpendikulyarlik shartlari.	2
10.	R^3 da to‘g‘ri chiziq. To‘g‘ri chiziq va tekislikning o‘zaro joylashishi.	2
11.	Haqiqiy sonlar to‘plami. Kompleks sonlar. Kompleks sonlar ustida amallar.	2
12.	Muavr, Eyler formulalari.	2
13.	Funksiya va uning berilish usullari. Sonlar ketma ketligi. Uning limiti va xossalari.	2
14.	Funksiyaning limiti va uning xossalari. Cheksiz katta va cheksiz kichik miqdorlar.	2
15.	Birinchi va ikkinchi ajoyib limit.Funksiyaning uzliksizligi. Uzilish nuqtalari va uning turlari.	2

16.	Funksiya hosilasi. Hosilining geometrik va mexanik ma’nosi. Hosilaning xossalari.	2
17.	Hosilalar jadvali. Oshkor, oshkormas va parametrik ko‘rinish- dagi funksiyalarni differensialash. Murakkab va teskari funksiyaning hosilasi.	2
18.	Funksiyaning differensiali va uning geometrik ma’nosi. Yuqori tartibli hosila va differensial.	2
19.	Funksiyani hosila yordamida tekshirish.	2
20.	Roll, Lagranj va Koshi teoremalari. Lopital qoidasi	2
21.	Boshlangich funksiya va aniqmas integral. Aniqmas integralning xossalari.	2
22.	Integrallash jadvali.Aniqmas integralda o‘zgaruvchini almashtirish, bo‘laklab integrallash.	2
23.	Kasr ratsional ko‘rinishdagi funksiyalarni integrallash.	2
24.	Trigonometrik va ba’zi bir irratsional funksiyalarni integrallash.	2
25.	Aniq integral. Aniq integralni hisoblash va uning xossalari.	2
26.	Aniq integralning geometrik va mexanik ma’nosi. Yuqori chegarasi o‘zgaruvchi bo‘lgan integral. Nyuton-Leybnis formulasi.	2
27.	1 va 2- tur xosmas integrallar, ularni hisoblash va yaqinlashishga tekshirish.	2
	JAMI	**54**

II semestr

T/r	**Ma’ruza mavzulari**	**soat**
1.	Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya. Asosiy ta’rif va tushunchalari. Aniqlanish sohasi. Limiti, uzluksizligi.	2
2.	Birinchi tartibli xususiy hosilalari. Xususiy differensial. To‘la differensial Yuqori tartibli xususiy hosila va diffe-l. Aralash hosilaning tengligi haqidagi teorema.	2
3.	Murakkab va oshkormas funksiyani diffe-rensiallash. To‘la hosila. Ikki	2

	o‘zgaruvchili funksiyaning ekstremumi.	
4.	Differensial tenglama. Asosiy tushuncha va ta’riflar. Birinchi tartibli differesial tenglama uchun Koshi masalasi. O‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar.	2
5.	Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar. Bernulli tenglamasi.	2
6.	Tartibini pasaytirish mumkin bo‘lgan yuqori tartibli differensial tenglamalar. Yuqori tartibli chiziqli diffirensial tenglamalar. Chiziqli diffirensial tenglamaning umumiy yechimini strukturasi haqidagi teorema. Voronskiy determinanti.	2
7.	O‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli differensial tenglama.	2
8.	O‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinslimas differensial tenglamalar. O‘zgarmasni variatsiyalash usuli.	2
9.	O‘ng tomoni maxsus ko‘rinishda bo‘lgan o‘zgar- mas koeffitsientli bir jinslimas chiziqli differensial tenglamalarning xususiy yechimini topish. Oddiy differensial tenglamalar sistemasi.	2
10.	Laplas almashtirishlari va xossalari. Operatsion hisobning asosiy teoremalari.	2
11.	Asil tasvirini integrallash va differen- siallash haqidagi teoremalar.	2
12.	O‘zgarmas koeffitsientli diffirensial tenglama va tenglamalar sistemasini yechishining operatsion usuli.	2
13.	Sonli qatorlar, qatorning yaqinlashishi va uzoqlashishi. Geometrik qator. Yaqinlashuvchi qatorning xossalari. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti. Garmonik qator.	2
14.	Qator yaqinlashishining yetarli alomatlari. Taqqoslash alomati. Dalamber alomati. Koshining radikal alomati. Koshining integral alomati.	2
15.	Ishoralari almashinuvchi qatorlar. Leybnis alomati. Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar. Absalyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari.	2
16.	Funksional qatorlar. Yaqinlashish sohasi. Tekis yaqinlashish tushunchasi. Veyershtras alomati, tekis yakinlashuvchi qatorning xossalari.	2
17.	Darajali qatorlar. Abel teoremasi. Yaqinlashish radiusi va intervali. Absolyut yakinlashuvchi darajali qatorlarning xossalari.	2
18.	Teylor va Makloren qatorlari. Ularning qo‘llanishi.	2
19.	Funksiyalarning ortogonal va ortonormal sistemalari. Funksiyani ortonormal	2

	sistemalar buyicha Fure qatoriga yoyish. Dirixle sharti.	
20.	Davriy funksiya uchun Fure qatori. Juft va toq funksiyalar uchun Fure qatori. Yarim davrda berilgan ixtiyoriy davriy funksiyalarning Fure qatori.	2
21.	Fure qatorining kompleks shakli. Parseval tengligi. Fure integrali. Toq va juft funksiyalar uchun Fure integrali. Furening kosinus va sinus almashtirishlari	2
22.	Ikki karrali integral tushinchasiga olib keladigan masalalar. Ta’rifi va xossalari. Ikki karrali integralning mavjudligi haqidagi teorema.	2
23.	Dekart koordinatalar sistemasida ikki karrali integralni hisoblash. Ikki karrali integrallarda o‘zgaruvchilarni almashtirish. Qutb koordinata sistemasida ikki karrali integral.	2
24.	Uch karrali integral ta’rifi, mavjudlik teoremasi. Uch karrali integralning xossalari.	2
25.	Dekart koordinat sistemasida uch karali Integral. Uch karrali integrallarda o‘zgaruvchini almashtirish. Silindrik va sferik koordinatalar sistemasida uch karrali integral.	2
26.	1- tur egri chiziqli integral va ularni hisob-lash. Xossalari.	2
27.	2- tur egri chiziqli integral va ularni hisob-lash. Xossalari Grin formulasi. 2 tur egri chiziqli integralning integrallash yo‘liga bog‘liq bo‘lmaslik sharti.	2
	JAMI	**54**

IV semestr

№	**Ma’ruza mavzulari**	**Ajr. soat**
1	Tasodif va qonuniyat. Tasodifiy hodisa va ular ustida amallar. Elementar hodisalar fazosi. Hodisalar algebrasi.	2
2	Ehtimolning klassik ta’rifi. Geometrik ehtimol. Ehtimolning statistik ta’rifi. Ehtimollar nazariyasini aksiomatik asosida qurish.	2
3	Shartli ehtimol. Hodisalarning bog‘liqsizligi. Ehtimollarni qo‘shish va ko‘paytirish teoremalari. To‘la ehtimol va Bayes formulalari.	2

4	Bog‘liq bo‘lmagan tajribalar ketma – ketligi. Bernulli formulasi. Muavr – Laplasning lokal va integral formulalari. Puasson teoremasi.	2
5	Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni va uni berish usullari. Taqsimot funksiya va uning xossalari.	4
6	Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari. Matematik kutilish va uning xossalari. Boshlang‘ich va markaziy momentlar. Dispersiya, o‘rtacha kvadratik chetlanish.	2
7	Amaliyotda ko‘p qo‘llaniladigan diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar. Binomial, Puasson, gipergeometrik taqsimotlar. Tekis taqsimot, ko‘rsatkichli va normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar.	2
8	Ko‘p o‘lchovli tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot qonunlari. Ikki diskret tasodifiy miqdorlar sistemasi. Taqsimot matritsasi. To‘g‘ri to‘rtburchakda tekis taqsimlanagan va tekislikda normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar. Korrelyatsiya momenti va korrelyatsiya koeffitsienti.	2
9	Katta sonlar qonuni. Chebыshev tengsizligi. Chebыshev va Bernulli teoremalari. Lyapunovning markaziy limit teoremasi.	2
10	Matematik statistikaning asosiy masalalari. Tanlanma usul. Tanlanmaning statistik taqsimoti va empirik funksiyasi. Poligon va distogramma. Taqsimot parametrlarning statistik baholari. Siljimagan, effektiv va asosli baholar.	4
11	Nuqtali baholar. Taqsimot parametrlarini baholashning momentlari va eng katta o‘xshashlik usuli. Puasson taqsimoti, ko‘rsatkichli va normal taqsimotning noma’lum parametrlari uchun nuqtaviy baholar.	2
12	Bahoning aniqligi, ishonchli ehtimol, ishonchli oraliq, oraliq taksimotning matematik kutulmasi, dispersiyasi va o‘rtacha kvadratik chetlanishlar uchun ishonchlilik oraliqlar.	2
13	Statistik taxminlarni tekshirish. Asosiy va zid (konkurent) taxminlar. Birinchi va ikkinchi tur xatolar. Asosiy taxminni tekshirishning statistik alomati. Kritik soha. Taxminni qabul qilinish sohasi. Kritik nuqtalar.	2
14	Statistik taxlinlarni tekshirishda K. Pirson, Kolmogorov – Smirnovparning tastiqlash alomatlari. Puasson taqsimotining parametri haqidagi taxminni tekshirish. Normal taqsimotning matematik kutilmasi, dispersiyasi va o‘rtacha kvadratik chetlanishi haqidani taxminlarni tekshirish.	2
15	Korrelyatsion va regression taxlil. Empirik formulalani aniqlash usullari. Korrelyatsiya jadvali. Empirik regressiya. Chiziqli regressiya tenglamasini	4

	aniqlashning yig‘indalar va eng kichik kvadratlar usuli.	
	Jami	**36**

Amaliy mashg‘ulotlarning tavsiya etiladigan mavzulari

Matritsa va determinantlar. 2-chi, 3-chi, *n*-chi tartibli determinantlar. Ularni hisoblash usullari. Matritsalar, ular ustida amallar. Teskari matritsa. Matritsa rangi.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim.*

Adabiyotlar: A4, A5, A6, Q2, Q8, Q10, Q12, Q13

Chiziqli tenglamalar sistemasi: Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda Kramer, matritsa va Gauss usullari.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim. Shaxsga yo‘naltirilgan ta’lim.*

Adabiyotlar: A4, A5, A6, Q2, Q8, Q10, Q12, Q13

Vektorlar va ular ustida amallar: Vektorlar, ular ustida amallar. Vektorlarning skalyar, vektor, aralash ko‘paytmalari.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A4, A5, A6, Q2, Q8, Q10, Q12, Q13

Analitik geometriya elementlari: Dekart va qutb koordinatalar. Ular orasidagi bog‘lanish. Tekislikda to‘g‘ri chiziqlar. Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekisliklar. Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekisliklarning o‘zaro joylashuvi. Tekisliklar, to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak va masofalar. R^2dagi egri chiziqlar. Aylana, ellips, giperbola va parabola.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A4, A5, A6, Q2, Q8, Q9, Q10, Q12, Q13

Kompleks sonlar: Kompleks sonlar, ular ustida amallar. Muavr, Eyler formulalari.
Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A3, Q10, Q11, Q12, Q14.

Bir o‘zgaruvchili funksiyalar. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar: Asosiy elementar funksiyalar.Sonli ketma – ketliklar limitlarini hisoblash. Funksiya limitini hisoblash. Funksiyani uzluksizlikka tekshirish. Funksiyaning uzlish nuqtalari va ularning turlarini aniqlash. Funksiya hosilasi. Murakkab, oshkormas va parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyalarning hosilasi. Yuqori tartibli hosila va differensiallar. Funksiyalarni hosila yordamida tekshirish. Lopital qoidasi. Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral. Integralda o‘zgaruvchilarni almashtirish. Bo‘laklab integrallash. Kasr ratsional funksiyalarni integrallash. Trigonometrik va irratsional ifodalarni integrallash. Aniq integrallarni hisoblash, Nyuton – Leybnis formulasi. Aniq integralni hisoblashda o‘zgaruvchilarni almashtirish va bo‘laklab integrallash. Aniq integralning geometrik va mexanik masalalarni yechishga tatbiqi. 1 va 2-tur xosmas integrallar. Ko‘p argumentli funksiyalar limitlarini hisoblash. Xususiy hosila va to‘la differensiallarni topish. Yuqori tartibli xususiy hosila va differensiallar.

Murakkab va oshkormas funksiyalarni differensiallash. Ikki argumentli funksiya ekstremumi.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A1, A3, A4, A5, Q4, Q10, Q11, Q12, Q14.

Differensial tenglamalar: O‘zgaruvchilari ajraladigan birinchi tartibli differensial tenglamalar. Koshi masalasi. Differensial tenglamalarining asosiy turlari va ularni yechish usullari. Yuqori tartibli differensial tenglamalar. Koshi masalasi. Tartibi pasayadigan differensial tenglamalar. Bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan chiziqli differensial tenglamalar. Umumiy yechim. O‘zgarmas koeffitsientli 2- tartibli chiziqli differensial tenglamalar. Oddiy differensial tenglamalar sistemasi va ularni yechish.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A1, A3, A4, A5, Q4, Q7, Q10, Q12, Q14.

Operatsion hisob: Tasvir va asl, ularni aniqlash. Asllar o‘ramasi. Operatsion hisob yordamida differensial tenglamalarni yechish.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A1, A3, Q10, Q14

Qatorlar: Sonli qatorlar. Musbat hadli qatorlar. Ishorasi o‘zgaruvchi qatorlar. Absolyut va shartli yaqinlashish. Ishorasi almashinuvchi qatorlar. Funksional qatorlar. Darajali qatorlar. Yaqinlashish radiusi. Teylor qatori. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish. Funksiyalarni trigonometrik qatorlarga yoyish. Furening sinus va kosinus almashtirishlari. Kompleks ko‘rinishdagi Fure qatori.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A1, A3, A4, A5, Q4, Q10, Q11, Q12, Q14.

Karrali va egri chiziqli integrallar: Ikki va uch karrali integrallar va ularni hisoblash. O‘zgaruvchilarni almashtirish. Karrali integrallarni qutb, silindrik va sferik koordinata sistemalarida hisoblash.

1- va 2- tur egri chiziqli integrallarni hisoblash. Egri chiziqli integralning integrallash yo‘liga bog‘liq bo‘lmaslik sharti. Grin formulasi.

Qo‘llaniladigan ta’lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta’lim, . Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar.*

Adabiyotlar: A1, A3, A4, A5, Q4, Q10, Q11, Q12, Q14.

Tasodifiy hodisalar va ular ustida amallar

Ehtimolning klassik ta'rifiga doir masalalar yechish. Geometrik ehtimol. Shartli ehtimol. Hodisalarning bog'liqsizligi. To'la ehtimol va Bayes formulalari. Bernulli formulasi.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar*.

Adabiyotlar: A4, A7, Q4, Q5, Q6, Q10, Q15.

Tasodifiy miqdorlar, ularning taqsimot qonunlari.

Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalarini hisoblash. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot qonunlari.

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar*.

Adabiyotlar: A4, A7, Q4, Q5, Q6, Q10, Q15.

Tanlanma usul.

Emperik taqsimot funksiyasi va uni grafigini yasash. Poligon va gistrogramma. Taqsimot parametrlarni statistik baholarini hisoblash. Statistik taxminlarni tekshirish. Korrelyatsion va regrission taxlil

Qo'llaniladigan ta'lim texnologiyalari: *dialogik yondashuv, muammoli ta'lim. Aqliy xujum, keys-stadiy, pinbort, paradokslar*.

Adabiyotlar: A4, A7, Q4, Q5, Q6, Q10, Q15.

«Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» fani bo'yicha amaliy mashg'ulotlarining kalendar tematik rejasi

I semestr

T/r	**Amaliy mashg'ulotlar mavzulari**	**soat**
1.	Determenantlar va ularning xossalari. Determenantlarni hisoblash.	2
2.	Matritsalar va ular ustida amallar. Teskari matritsani hisoblash.	2
3.	Chizikli algebraik tenglamalar sistemasini Kramer usilida yechish.	2
4.	Matritsaning rangi topishga va Gauss usuliga doir misollar yechish.	2
5.	Chizikli tenglamalar sistemasini ma- tritsa usulida yechish.	2
6.	Vektorlar va usullar ustida amallar Ikki vektorning skalyar kupaytmasi xossalar va hisoblash.	2

7.	Ikki vektorning vektor ko‘paytmasi va uch vektorlarning aralash ko‘paytmasi.	2
8.	Tekislikda to‘g‘ri chiziq tenglamalariga doir misollar yechish.	2
9.	Fazoda tekislik tenglamalariga doir misollar yechish.	2
10.	Fazoda to‘g‘ri chiziq. Fazoda tekislik va to‘g‘ri chiziqning o‘zaro joylashuviga doir misollar yechish.	2
11.	Konpleks sonlar va ular ustida amallar.	2
12.	Muavr va Eyler formulalariga doir misollar yechish.	2
13.	Asosiy elementar funksiyalar va ularning grafiklarini yasash.	2
14.	Limitni hisoblash. $\frac{0}{0}$ va $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishidagi aniqmasliklarni ochish.	2
15.	1 va 2- ajoyib limitlarga doir misollar yechish. Funksiyaning uzluksizligi.	2
16.	Funksiyaning hosilasini topishga doir misollar yechish. Logarifmlarni differensiallash.	2
17.	Murakkab funksiyalarning hosilasiga Oshkormas va parametrik funksiyaning hosilasi.	2
18.	Yuqori tartibli hosila va differensial. Lopital qoidasi.	2
19.	Funksiyaning monotonligi, ekstremumni topish. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymati.	2
20.	Asimptotalar, funksiya grafigining botiqligi, qavariqligi. Burilish nuqtasi. Funksiyani to‘la tekshirish, grafigi.	2
21.	Aniqmas integralda o‘zgaruvchilarni almashtirish va bo‘laklab integrallash.	2
22.	Kasr ratsional funksiyani integrallash.	2
23.	Trigonometrik funksiyalarni integrallash.	2
24.	Irratsional ifodalarni integrallash.	2
25.	Aniq integralni hisoblash. Aniq integralda o‘zgaruvchilarni almashtirish.	2
26.	Aniq integral yordamida yassi figuralaryuzlarini hisoblash. Aniq integral yordamida jismlar hajmini va egri chiziq yoy uzunligini hisoblash	2
27.	Birinchi va ikkinchi tur xosmas integrallarga doir misollar yechish.	2

	Jami	**54**

II semestr

T/r	**Amaliy mashg'ulotlar mavzulari**	**soat**
1	Ikki argumentli funksiya aniqlanish sohasi va grafigiga doir misollar. Limiti, uzluksizligi. Birinchi tartibli xususiy hosilalar.	2
2	Ikki argumentli funksiya ekstremum-larini topishga doir misollar. Shartli ekstremumlarni topish. Ikki argumentli funksiyaning to'la differensiali va uning takribiy hisoblashlarga tatbiqi.	2
3	Birinchi tartibli differensial tenglamallar. O'zgaruvchisi ajraladigan va bir jinsli differensial tenglamaga doir misollar yechish.	2
4	Chizikli differensial tenglama. Bernulli tenglamasiga doir misollar yechish.	2
5	Yukori tartibli differensial tenglama. Tartibini pasaytirish yordamida yechiladigan differensial tenglamalar.	2
6	Yuqori tartibli o'zgarmas koeffitsientli chizikli bir jinsli tenglamalarga doir misollar yechish.	2
7	O'ng tomoni maxsus kurinishdagi bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalarni yechishga doir misollar yechish.	2
8	Operatsion hisob. Tasvirdan aslga-asldan tasvirga o'tishga doir misollar yechish.	2
9	Operatsion hisob yordamida o'zgarmas koeffitsientli chizikli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar va tenglamalar sistemasini operatsion hisob usuli bilan yechish..	2
10	Musbat hadli sonli qatorlar. Taqqoslash alomatiga doir misollar yechish. Dalamber va Koshining radikal alomatlariga doir misollar yechish.	2
11	Koshining integral alomatlariga doir misollar yechish. Ishorasi almashuvchi sonli katorlar. Absolyut va shartli yaqinlashishni aniqlashga doir misollar yechish.	2
12	Darajali qatorlar. Yaqinlashish radiusi va sohasini topishga doir misollar yechish.	2

13	Teylor va Makloren qatorlarining tadbiqiga doir misollar yechish.	2
14	Davriy funksiyalarni Fure qatoriga yoyish. Juft va toq funksiyalarni Fure qatoriga yoyishga doir misollar yechish.	2
15	Ixtiyoriy davrli funksiyalarni Fure qatoriga yoyishga doir misollar yechish. Furening sinus va kosinus almashtirishlari.	2
16	Ikki karrali integrallarni Dekart va qutb koordinatlara sistemasida yechish. Ikki karrali integral yordamida yuza va hajmni hisoblashga doir misollar yechish.	2
17	Uch karrali integralni hisoblashga doir misollar yechish. Silindrik va sferik koordinatalar sistemasida 3 karrali integral. 3 karrali integralni geometrik masalalariga tatbiqi.	2
18	1 va 2 - tur egri chiziqli integralni hisoblashga doir misollar yechish. Grin formulasi. 2-tur egri chiziqli integralning integrallash yo‘liga bog‘liq bo‘lmasligiga doir misollar yechish.	2
	Jami	**36**

IV semestr

№	Amaliy darslar mavzusi	Ajr. soat
1	Tasodifiy hodisalar va ular ustida amallar. Ehtimolning klassik ta’rifiga doir masalalar yechish.	1
2	Geometrik ehtimol. Ehtimolning xossalaridan foydalanib murakkab hodisalalarining ehtimolini hisoblash.	1
3	Shartli ehtimol. Hodisalarning bog‘liqsizligi. To‘la ehtimol va Bayes formulalari.	1
4	Bog‘liqsiz tajribalar ketma – ketligi. Bernulli formulasi. Muavr – Laplas, Puasson formulalari.	1
5	Tasodifiy miqdorlar, ularning taqsimot qonunlari. Taqsimot funksiya, zichlik funksiya va uning xossalari.	2
6	Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalarini hisoblash. Matematik kutilish, dispersiya va boshqa boshlang‘ich va markaziy momentlar.	2

7	Binomial, Puasson, gipergiometrik, tekis, ko‘rsatkichli va normal taqsimlangan miqdorlarga doir masalalar.	1
8	Ikki o‘lchovli tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot qonunlari. Korrelyatsiya momenti va korrelyatsiya koeffitsienti. Tasodifiy miqdorlarning funksiyalari.	1
9	Talanma usul. Emperik taqsimot funksiyasi va uni grafigini yasash. Poligon va gistrogramma.	2
10	Taqsimot parametrlarni statistik baholarini hisoblash.	1
11	Ishonchli ehtimol, ishonchli oraliq. Matematik kutilish, dispersiya va o‘rtacha kvadratik chetlanishlar uchun ishonchli oraliqlar tuzish.	1
12	Statistik taxminlarni tekshirish. Puasson taqsimoti parametri haqidagi taxminni tekshirish. Normal taqsimotning matematik kutilishi, dispersiyasi va o‘rtacha kvadratik chetlanishi haqidagi taxminni tekshirish	2
13	Korrelyatsion va regrission taxlil. Chiziqli korrelyatsiya koeffitsientlarini aniqlash. Eng kichik kvadratlar usuli yordamida chiziqli regressiya tenglamalarini tuzish.	2
	Jami	**18**

Mustaqil ta’lim tashkil etishning shakli va mazmuni.

“Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” bo‘yicha talabaning mustaqil ta’limi shu fanni o‘rganish jarayonining tarkibiy qismi bo‘lib, uslubiy va axborot resurslari bilan to‘la ta’minlangan.

Talabalar auditoriya mashg‘ulotlarida professor-o‘qituvchilarning ma’ruzasini tinglaydilar, misol va masalalar yechadilar. Auditoriyadan tashqarida talaba darslarga tayyorlanadi, adabiyotlarni konspekt qiladi, uy vazifa sifatida berilgan misol va masalalarni yechadi. Bundan tashqari ayrim mavzularni kengroq o‘rganish maqsadida qo‘shimcha adabiyotlarni o‘qib referatlar tayyorlaydi hamda mavzu bo‘yicha testlar yechadi. Mustaqil ta’lim natijalari reyting tizimi asosida baholanadi.

Uyga vazifalarni bajarish, qo‘shimcha darslik va adabiyotlardan yangi bilimlarni mustaqil o‘rganish, kerakli ma’lumotlarni izlash va ularni topish yo‘llarini aniqlash, internet tarmoqlaridan foydalanib ma’lumotlar to‘plash va ilmiy izlanishlar olib borish, ilmiy to‘garak doirasida yoki mustaqil ravishda ilmiy manbalardan foydalanib ilmiy maqola va ma’ruzalar tayyorlash kabilar talabalarning darsda olgan bilimlarini chuqurlashtiradi, ularning mustaqil fikrlash va ijodiy qobiliyatini rivojlantiradi. Shuning uchun ham mustaqil ta’limsiz o‘quv faoliyati samarali bo‘lishi mumkin emas.

Uy vazifalarini tekshirish va baholash amaliy mashg‘ulot olib boruvchi o‘qituvchi tomonidan, konspektlarni va mavzuni o‘zlashtirish darajasini tekshirish va baholash esa ma’ruza darslarini olib boruvchi o‘qituvchi tomonidan har darsda amalga oshiriladi.

Talabalar mustaqil ta'limining mazmuni va hajmi

I SEMESTR

Mustaqil ishlar mavzulari va tarkibi

№	Mustaqil ishlar mavzusi va qisqacha mazmuni	Berilgan topshiriqlar	Ajr. soat
1.	Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	14
2.	2 – tartibli egri chiziqlar va sirtlar.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	16
3.	Vektorlarni matritsa ko'rinishda ifodalash. Chiziqli almashtirish va bunda vektor xossalari va amallarining saqlanishini tekshirish. Uning geometrik ma'nosini ifodalash.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	10
4.	Funksiyalarni tekshirish. Murakkab funksiyalar grafigini chizish usullari.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	10
5.	Aniq integrallar yordamida yechiladigan masalalar hakida ma'lumotlar va ularni yechish hamda tahlil qilish.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	16
	JAMI		**66**

II SEMESTR

Mustaqil ishlar mavzulari va tarkibi

№	Mustaqil ishlar mavzusi va qisqacha mazmuni	Berilgan topshiriqlar	Ajr. soat
1.	Ikki argumentli funksiya ekstremumini topish. Ekstremum mavjudlik sharti va turlari. Lokal va global ekstremumlar. Ko‘p argumentli funksiyalar va ularning hosilalari orqali ifodalangan fizik masalalar sharhi.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	14
2.	Laplas va Fure almashtirishlari, ular orasidagi bog‘lanish. Ba’zi haqiqiy (transsendent) sonlarni sonli qatorlar orqali ifodalash va hisoblash.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	14
3.	Teylor qatori yordamida taqribiy hisoblashlar. Fure qatorlari va garmonik tahlil.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	14
4.	2 va 3 karrali integrallar yordamida ba’zi geometrik figuralar yuzalari va hajmlarini hisoblash.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	14
5.	Qatorlarning differensial tenglamalarni yechishga tatbiqi. Qatorlar yordamida ba’zi integralarni hisoblash.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish	10
	JAMI		**62**

IV SEMESTR

Mustaqil ishlar mavzulari va tarkibi

№	Mustaqil ishlar mavzusi va uning qisqacha mazmuni	Ajr. soat
1	Ma’lumotlarni taxlil kilish	7

2	Ma'lumotlar asosida taksimotning noma'lum parametrlarini baxolash	8
3	Statistik gipotezalarni tekshirish	7
4	Regressiya tenglamalarini tuzishning turli usullarini (tortilgan ip, yig'indilar usuli, eng kichik kvadratlar) taqqoslash tahlili.	8
	Jami	**30**

Dasturning informatsion uslubiy ta'minoti

Mazkur fanni o'qitish jarayonida ta'limning zamonaviy metodlari, pedagogik va axborot-kommunikatsiya texnologiyalarini qo'llash nazarda tutilgan:

- chiziqli algebra nazariyasi asoslari, matritsalar va chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga bag'ishlangan mavzular zamonaviy kompyuter texnologiyalari yordamida prezentatsiya va elektron-didaktik texnologiyalaridan foydalanilgan holda o'tkaziladi;
- chiziqli fazoda chiziqli operatorlar va ular ustida amallar hamda analitik geometriya masalalarini yechishga bag'ishlangan amaliy mashg'ulotlarda aqliy xujum, guruhli fikrlash, "ish o'yini" va boshqa pedagogik texnologiyalardan foydalaniladi;
- bir va ko'p o'zgaruvchi funksiyalar, ularning differensial va integral hisoblariga bag'ishlangan amaliy mashg'ulotlarida kichik guruhlar musobaqalari, guruhli fikrlash pedagogik texnologiyalarini qo'llash nazarda tutiladi.

" Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika " fanidan talabalar bilimini reyting tizimi asosida baholash mezoni.

"Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika" fani bo'yicha reyting jadvallari, nazorat turi, shakli, soni hamda har bir nazoratga ajratilgan maksimal ball, shuningdek joriy va oraliq nazoratlarining saralash ballari haqidagi ma'lumotlar fan bo'yicha birinchi mashg'ulotda talabalarga e'lon qilinadi.

Fan bo'yicha talabalarning bilim saviyasi va o'zlashtirish darajasining Davlat ta'lim standartlariga muvofiqligini ta'minlash uchun quyidagi nazorat turlari o'tkaziladi:

joriy nazorat (JN) – talabaning fan mavzulari bo'yicha bilim va amaliy ko'nikma darajasini aniqlash va baholash usuli. Joriy nazorat fanning xususiyatidan kelib chiqqan holda amaliy mashg'ulotlarda og'zaki so'rov, test o'tkazish, suhbat, nazorat ishi, kollekvium, uy vazifalarini tekshirish va shu kabi boshqa shakllarda o'tkazilishi mumkin;

oraliq nazorat (ON) – semestr davomida o'quv dasturining tegishli (fanlarning bir necha mavzularini o'z ichiga olgan) bo'limi tugallangandan keyin talabaning nazariy bilim va amaliy ko'nikma darajasini aniqlash va baholash usuli. Oraliq nazorat bir semestrda ikki marta o'tkaziladi va shakli (yozma, og'zaki, test va hokazo) o'quv faniga ajratilgan umumiy soatlar hajmidan kelib chiqqan holda belgilanadi;

yakuniy nazorat (YaN) – semestr yakunida muayyan fan bo'yicha nazariy bilim va amaliy ko'nikmalarni talabalar tomonidan o'zlashtirish darajasini baholash usuli. Yakuniy nazorat asosan tayanch tushuncha va iboralarga asoslangan yozma ish yoki test shaklida o'tkaziladi.

ON o'tkazish jarayoni kafedra mudiri tomonidan tuzilgan komissiya ishtirokida muntazam ravishda o'rganib boriladi va uni o'tkazish tartiblari buzilgan hollarda, **ON** natijalari bekor qilinishi mumkin. Bunday hollarda **ON** qayta o'tkaziladi.

Oliy ta’lim muassasasi rahbarining buyrug‘i bilan ichki nazorat va monitoring bo‘limi rahbarligida tuzilgan komissiya ishtirokida **YaN** ni o‘tkazish jarayoni muntazam ravishda o‘rganib boriladi va uni o‘tkazish tartiblari buzilgan hollarda, **YaN** natijalari bekor qilinishi mumkin. Bunday hollarda **YaN** qayta o‘tkaziladi.

Talabaning bilim saviyasi, ko‘nikma va malakalarini nazorat qilishning reyting tizimi asosida talabaning fan bo‘yicha o‘zlashtirish darajasi ballar orqali ifodalanadi.

«Oliy matematika. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» fani bo‘yicha talabalarning semestr davomidagi o‘zlashtirish ko‘rsatkichi 100 ballik tizimda baholanadi.

Ushbu 100 ball baholash turlari bo‘yicha quyidagicha taqsimlanadi:

YaN-30 ball, qolgan 70 ball esa JN-30 ball va ON-40ball qilib taqsimlanadi.

Ball	Baho	Talabalarning bilim darajasi
86-100	A’lo	Xulosa va qaror qabul qilish. Ijodiy fikrlay olish. Mustaqil mushohada yurita olish. Olgan bilimlarini amalda qo‘llay olish. Mohiyatini tushuntirish. Bilish, aytib berish. Tasavvurga ega bo‘lish.
71-85	Yaxshi	Mustaqil mushohada qilish. Olgan bilimlarini amalda qo‘llay olish. Mohiyatini tushuntirish. Bilish, aytib berish. Tasavvurga ega bo‘lish.
55-70	Qoniqarli	Mohiyatini tushuntirish. Bilish, aytib berish. Tasavvurga ega bo‘lish.
0-54	Qoniqarsiz	Aniq tasavvurga ega bo‘lmaslik. Bilmaslik.

Fan bo‘yicha saralash bali 55 ballni tashkil etadi. Talabaning saralash balidan past bo‘lgan o‘zlashtirishi reyting daftarchasida qayd etilmaydi.

Talabalarning o‘quv fani bo‘yicha mustaqil ishi joriy, oraliq va yakuniy nazoratlar jarayonida tegishli topshiriqlarni bajarishi va unga ajratilgan ballardan kelib chiqqan holda baholanadi.

Fan bo‘yicha joriy va oraliq nazoratlarga ajratilgan umumiy ballning 55 foizi saralash ball hisoblanib, ushbu foizdan kam ball to‘plagan talaba yakuniy nazoratga kiritilmaydi.

Joriy **JN** va oraliq **ON** turlari bo‘yicha 55 bal va undan yuqori balni to‘plagan talaba fanni o‘zlashtirgan deb hisoblanadi va ushbu fan bo‘yicha yakuniy nazoratga kirmasligiga yo‘l qo‘yiladi.

Talabaning semestr davomida fan bo‘yicha to‘plagan umumiy bali har bir nazorat turidan belgilangan qoidalarga muvofiq to‘plagan ballari yig‘indisiga teng.

ON va **YaN** turlari kalendar tematik rejaga muvofiq dekanat tomonidan tuzilgan reyting nazorat jadvallari asosida o‘tkaziladi. **YaN** semestrning oxirgi 2 haftasi mobaynida o‘tkaziladi.

JN va **ON** nazoratlarda saralash balidan kam ball to‘plagan va uzrli sabablarga ko‘ra nazoratlarda qatnasha olmagan talabaga qayta topshirish uchun, navbatdagi shu nazorat turigacha, so‘nggi joriy va oraliq nazoratlar uchun esa yakuniy nazoratgacha bo‘lgan muddat beriladi.

Talabaning semestrda **JN** va **ON** turlari bo‘yicha to‘plagan ballari ushbu nazorat turlari umumiy balining 55 foizidan kam bo‘lsa yoki semestr davomida joriy, oraliq va yakuniy nazorat turlari bo‘yicha to‘plagan ballari yig‘indisi 55 baldan kam bo‘lsa, u akademik qarzdor deb hisoblanadi.

Talaba nazorat natijalaridan norozi bo‘lsa, fan bo‘yicha nazorat turi natijalari e’lon qilingan vaqtdan boshlab bir kun mobaynida fakultet dekaniga ariza bilan murojaat etishi mumkin. Bunday holda fakultet dekanining taqdimnomasiga ko‘ra rektor buyrug‘i bilan 3 (uch) a’zodan kam bo‘lmagan tarkibda apellyatsiya komissiyasi tashkil etiladi.

Apellyatsiya komissiyasi talabalarning arizalarini ko‘rib chiqib, shu kunning o‘zida xulosasini bildiradi.

Baholashning o‘rnatilgan talablar asosida belgilangan muddatlarda o‘tkazilishi hamda rasmiylashtirilishi fakultet dekani, kafedra mudiri, o‘quv-uslubiy boshqarma hamda ichki nazorat va monitoring bo‘limi tomonidan nazorat qilinadi.

REYTING BALLARINING TAQSIMOTI

(O‘zOO‘MTV 2010 yil 29 avgustdagi 333-sonli buyrug‘i asosida)

Fan uchun ajratilgan umumiy reyting ballari taqsimoti

Nazorat turi	JB-1	OB-1	JB-2	OB-2	YaN	Jami
Fanga ajratilgan soatlarga nisbatan foiz hisobida	15	20	15	20	30	100

Fan uchun mashg‘ulot turlariga ajratilgan reyting ballari taqsimoti

<table>
<tr><th colspan="2">Nazorat turi</th><th>JB1-JB2</th><th>Nazorat turi</th><th>OB1,OB2</th><th>YaN</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Amaliy mashg‘ulotlarda bilimini sinash</td><td>5 bal</td><td>1. Nazariy qismdan ekspress so‘rov</td><td>3 bal</td><td rowspan="4">Yakuniy yozma ish uchun</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Uy vazifasini bajarganligi uchun</td><td>5 bal</td><td>2. Kollokviumlar o‘tkazish yo‘li bilan baholash</td><td>6 bal</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3.</td><td rowspan="2">Nazorat ishlari uchun</td><td rowspan="2">5 bal</td><td>3. Yozma ish yoki test topshiriqlari uchun</td><td>6 bal</td></tr>
<tr><td>4. Mustaqil ish</td><td>5 bal</td></tr>
<tr><td colspan="2">Jami</td><td>15+15bal</td><td>Jami</td><td>20+20</td><td>30</td></tr>
</table>

Yakuniy nazoratda yozma ish va test savollarini baholash mezoni

Yakuniy nazorat yozma ish yoki test shaklida amalga oshirilganda, sinov ko‘p variantli usulda o‘tkaziladi. Har bir yozma ish varianti 2 ta nazariy savol va 3 ta amaliy topshiriqdan iborat, test topshiriqlaridagi savollar soni 10 ta va undan ko‘p bo‘lishi ham mumkin. Nazariy savollar fan bo‘yicha tayanch so‘z va iboralar asosida tuzilgan bo‘lib, fanning barcha mavzularini o‘z ichiga qamrab oladi.

Har bir nazariy savolga yozilgan javoblar bo‘yicha o‘zlashtirish ko‘rsatkichi 0-6 ball oralig‘ida baholanadi. Amaliy topshiriqlar ham 0-6 ball oralig‘ida baholanadi. Test topshiriqlari soniga qarab har bir to‘g‘ri javob uchun alohida ball beriladi. Bunda talaba maksimal 30 ball to‘plashi mumkin.

Yozma ish va test sinovi bo‘yicha umumiy o‘zlashtirish ko‘rsatkichini aniqlash uchun variantda berilgan savollarning har biri uchun yozilgan javoblarga qo‘yilgan o‘zlashtirish ballari qo‘shiladi va yig‘indi talabaning yakuniy nazorat bo‘yicha o‘zlashtirish bali hisoblanadi.

Foydalaniladigan asosiy darsliklar va o‘quv qo‘llanmalari

ro‘yxati

8. Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010.
9. Jo‘raev T., Sa’dullaev A., Xudoyberganov G., Mansurov X., Vorisov A. Oliy matematika asoslari. T.1., Toshkent, “O‘qituvchi”, 1995.
10. Jo‘raev T., Sa’dullaev A., Xudoyberganov G., Mansurov X., Vorisov A. Oliy matematika asoslari. T.2., Toshkent, “O‘zbekiston”, 1999.
11. Soatov Yo.U Oliy matematika. T., O‘qituvchi, 1995. 1- 5 qismlar.
12. N.M.Jabborov, E.«Oliy matematika». 1-2 qism. Qarshi, 2010.
13. Latipov X.R., Tadjiev Sh. Analitik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent, "O‘zbekiston". 1995.
14. Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, O‘qituvchi, 2001.

Qo‘shimcha adabiyotlar:

16. Azlarov T., Mansurov X. Matematik analiz, - Toshkent.: O‘qituvchi, 1-qism, 1989.
17. Latipov X.R., Nosirov F.U., Tadjiev Sh.A. Analitik geometriya va chiziqli algebradan masalalar yechish bo‘yicha qo‘llanma. Toshkent, Fan, 1999.
18. A.Yusupov, X.A.Axmedova, A.Tilavov. «Ko‘p argumentli funksiyalarning integrallari. Maydonlar nazariyasi». Toshkent, 2011.
19. Piskunov N.S. Differensialnoe i integralnoe ischislenie dlya VTUZov. -M.: Nauka, v

2x chastyax, 2001.
20. Gmurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar yechishga doir qo‘llanma. Toshkent, O‘qituvchi, 2001.
21. Sirojiddinov S.X., Mamatov M. Ehtimollar nazariyasi kursi. T. O‘qituvchi, 1980.
22. Bugrov Ya.S., Nikolskiy S.M. Differensialnыe uravneniya. Kratnыe integrali. Radi. Funksii kompleksnogo peremennogo. - Nauka, 1997.
23. Bugrov Ya.S., Nikolskiy S.M. Elementы lineynoy algebri i analiticheskoy geometrii. - M.: Nauka, 1988.
24. Kletenik D.V. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii. - M-: Nauka, 1986.
25. Danko P.S., Popov A.G., Kojevnikova T.Ya. Vыsshaya matematika v uprajneniyax i zadachax. V 2 ch. - M.: Visshaya; shkola, 1998. -ch. 1, 2.
26. `Berman G.N. Sbornik zadach po kursu matematicheskogo analiza. –M.-: Nauka, 1985.
27. Minorskiy V.I. Sbornik zadach po vыsshey matematike. M: Nauka, 1987.
28. Beklemeshev D.V., Petrovich A.Yu., Chuberov I.A. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii i lineynoy algebre. -M.: Nauka, 1987.
29. Bugrov Ya.S., Nikolskiy S.M. Sbornik zadach po visshey matematike, uchebnoe posobie dlya injenerno texnicheskix spesialnostey vuzov. - M.: Nauka. 1997.
30. Kolde U.K. Praktikum po teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistike. –M. “Visshaya shkola”, 1991.

Internet saytlari

6. www.Ziyonet.uz
7. www.tuit.uz
8. www.Math.uz
9. www.bilim.uz
10. www.gov.uz

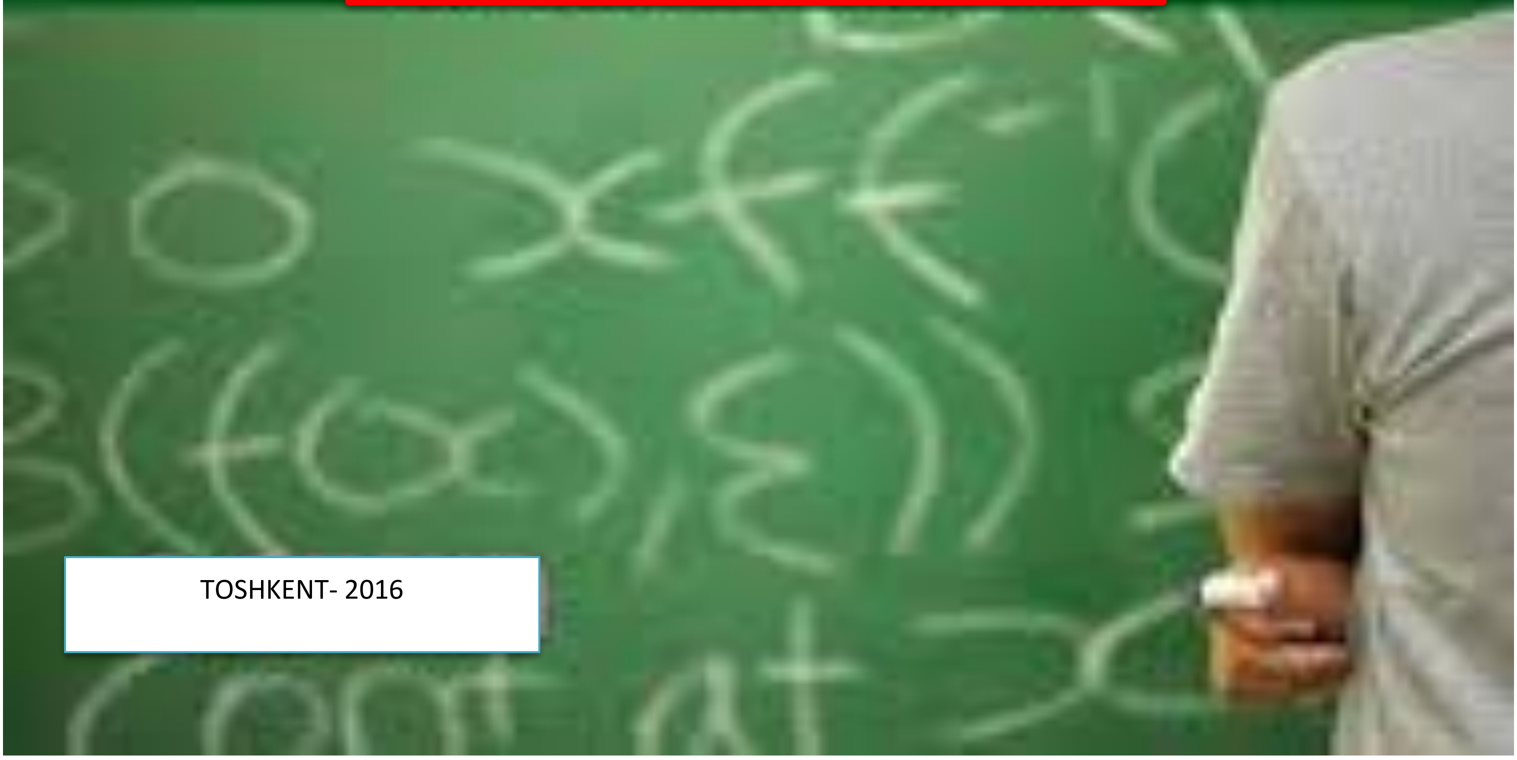
OLIY MATEMATIKA, EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

fanidan

I-SEMESTR UCHUN

Nazariy mashg‘ulotlar materiallari

TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI



TOSHKENT- 2016

1-MA'RUZA 2 VA 3 TARTIBLI DETERMINANTLAR. DETERMINANTLARNI HISOBLASH USULLARI

REJA

1. 1, 2 va 3- tartibli determinantlar
2. Yuqori tartibli determinantlar va ularni hisoblash usullari
3. Determinantlarning tadbiqlari

TAYANCH IBORALAR: Matritsa, determinant, teskari matritsa, satr, ustun, tartib, elementar almashtirishlar.

1.1. 1, 2 va 3- tartibli determinantlar

$A=(a)$ formula bilan 1×1 o‘lchovli matritsani belgilaymiz.

$I=(1)$ birlik matritsa bo‘lsin. Agar $a\neq0$ bo‘lsa, A matritsaga teskari matritsa mavjud bo‘ladi, ya'ni $A^{-1}=(a^{-1})$ bo‘ladi.

Agar $a=0$ bo‘lsa, $AB=BA=I$ tenglikni qanoatlantiruvchi B matritsani topish mumkin emas. Demak, bu holda A matritsaga teskari matritsa mavjud emas.

[1]**1.1 -Tarif.** 1×1 o‘lchovli matritsa determinanti deb, $\det(A)=a$ soniga aytiladi.

Endi $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ bo‘lgan 2×2 o‘lchovli matritsani qaraylik. Bizga malumki, A matritsaga teskari matritsa $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Shundan kelib chiqib, 2×2 o‘lchovli matritsaning determinanti ta'rifini keltiramiz.

1.2-Tarif. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matritsaning determinanti deb, $\det(A)=ad-bc$ songa aytiladi.[2]

1.2. Yuqori tartibli determinantlar va ularni hisoblash usullari

Yuqorida 1-tartibli va 2-tartibli determinantlar ta'rifi keltirildi. 3×3 o‘lchovli matritsa determinantini 2×2 o‘lchovli matritsa determinanti orqali, 4×4 o‘lchovli matritsa determinantini 3×3 o‘lchovli matritsa determianti orqali aniqlaymiz va hakozo.

---

[1] L WW Chen, Linear Algebra, London, 2008
[2] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008

Endi $n\times n$ o'chovli matritsa determinantini $(n-1)\times(n-1)$ o'lchovli matritsa determinanti orqali aniqlaymiz. A va A_{ij} matritsalarni qaraymiz. Bu yerda A_{ij} matritsa A matritsaning $i-$ satr va $j-$ustunini o'chirishdan hosil bo'lgan matritsa.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; a_{1n} \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{n1} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; a_{nn} \end{pmatrix}$$

1.3-Ta'rif. $n\times n$ o'lchovli A matritsa uchun a_{ij} elementining algebrayik to'ldiruvchisi (cofactor) deb, $c_{ij}=(-1)^{i+1}\det(A_{ij})$ soniga aytiladi. [3]

1.4-Ta'rif. $n\times n$ o'lchovli A matritsa uchun cofactor deb, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij}=a_{i1}c_{i1}+\ldots+a_{in}c_{in}$ (*) soniga aytiladi. [4]

Bu yerda A matritsaning $j-$ustuni quyidagicha:

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

1.5-Ta'rif. $n\times n$ o'lchovli A matritsa uchun cofactor $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij}=a_{1j}c_{1j}+\ldots+a_{nj}c_{nj}$ (**) songa aytiladi.

1.6-Natija. A matritsa uchun (*) va (**) ifodalar o'zaro teng, hamda ifodalarning qiymati satr va ustunlarini tanlashga bog'liq emas.

1.7-Ta'rif. $n\times n$ o'lchovli A matritsaning determinanti deb, (*) va (**) sonlarga aytiladi.

---

[3] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008
[4] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008

2×2 o‘lchovli $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ matritsani qaraylik. Bizga ma’lumki:

$$c_{11}=a_{22},\quad c_{12}=-a_{21},\quad c_{21}=-a_{12},\quad c_{22}=a_{11}.$$

U holda yuqorida keltirilgan ta’rifga ko‘ra 2×2 o‘lchovli A matritsaning determinanti quyidagicha topiladi:

1-satr bo‘yicha: $a_{11}c_{11}+a_{12}c_{12}=a_{11}c_{22}-a_{12}a_{21}$.

2-satr bo‘yicha: $a_{21}c_{21}+a_{22}c_{22}=-a_{21}a_{12}+a_{22}a_{11}$.

1-ustun bo‘yicha: $a_{11}c_{11}+a_{21}c_{21}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$.

2-ustun boyicha: $a_{12}c_{12}+a_{22}c_{22}=-a_{12}c_{21}+a_{22}a_{11}$.

4 ta son o‘zaro teng bo‘lib, avval ko‘rilgan 2×2 o‘lchovli matritsa determinanti $\det(A)=ab-bc$ ni beradi.

1.8-Misol

$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ matritsani qaraylik. A matritsaning 1-satr elementlari uchun $c_{11},\ c_{12},\ c_{23}$ larni hisoblaymiz:

$$c_{11}=(-1)^{1+1}\det(A)\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}=(-1)^{2}(20-2)=18$$

$$c_{12}=(-1)^{1+2}\det(A)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=(-1)^{3}(5-4)=-1$$

$$c_{13}=(-1)^{1+3}\det(A)\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=(-1)^{4}(1-8)=-7$$

U holda $\det(A)=a_{11}c_{11}+a_{12}c_{12}+a_{13}c_{13}=2\cdot 18+3\cdot(-1)+5\cdot(-7)=-2$ bo‘ladi.

Endi A matritsaning 2-ustun elementlari uchun $c_{12},\ c_{22},\ c_{32}$ larni hisoblaymiz:

$$c_{12}=(-1)^{1+2}\det(A)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=(-1)^{3}(5-4)=-1$$

$$c_{22}=(-1)^{2+2}\det(A)\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=(-1)^{4}(10-10)=0$$

$$c_{32}=(-1)^{3+2}\det(A)\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=(-1)^{5}(4-5)=1$$

u holda $\det(A)=a_{12}c_{12}+a_{22}c_{22}+a_{32}c_{32}=-3+0+1=-2$ bo‘ladi. Matritsa determinantini bu usul bilan hisoblash, determinantning tartibini pasaytirish orqali hisoblashni ifodalaydi.

Endi 2 ta oddiy xossani keltiramiz[5].

1.9-Xossa. Agar kvadratik matritsaning barcha satr elementlari (barcha ustun elementlari) nollardan iborat bo‘lsa, bu matritsa determinanti nolga teng bo‘ladi.

Isboti. $n\times n$ o‘lchovi matritsada $a_{ij}=0$ $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$ bo‘lgani uchun $a_{ij}\cdot c_{ij}=0$ bo‘ladi. Matritsa determinantini yuqorida ko‘rilgan usul bilan xisoblaydigan bo‘lsak, yig‘indida qatnashgan barcha qo‘shiluvchilar nolga teng bo‘ladi, demak $\det(A)=0$ bo‘ladi.

1.10-Xossa. Agar A yuqori uchburchakli yoki quyi uchburchakli matritsa bo‘lsa, bu matritsa determinanti dioganal elementlar ko‘paytmasiga teng

$$\det(A)=a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$$

Isbot: Faraz qilamiz A matritsa yuqori uchburchakli matritsa bo‘lsin. Ya’ni,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A matritsa detervinantini 1-ustun elementlari, bo‘yicha yoyamiz.

$$\det(A)=a_{11}\cdot\det\begin{pmatrix} a_{22}\ldots a_{2n} \\ 0\ldots\ldots a_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0\ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\det\begin{pmatrix} a_{33}\ldots a_{3n} \\ 0\ldots\ldots a_{4n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0\ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix}\cdot=a_{11}\cdot a_{22}\ldots\cdot a_{nn}.$$

Natijalar: [6]

1. Agar B matsitsa A matritsaning ixtiyoriy ketma-ket 2 ta satri (ustuni) elementlarini almashtirish orqali xosil bo‘lgan bo‘lsa, u xolda $\det(B)=-\det(A)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi
2. Agar B matritsaning biror satr (ustun) elementlari, A matritsaning parallel satr(ustun) elementlari yig‘indisi orqali xosil bo‘lsa, $\det(A)=\det(B)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.
3. Agar B matritsa A matritsaning biror satr (ustun) elementlarini biror noldan farqli songa ko‘paytirishdan xosil bo‘lgan bo‘lsa, $\det(B)=C\cdot\det(A)$ bo‘ladi.

1.11-Ta’rif. A $n\times n$ o‘lchovli matritsa bo‘lsin.

[5] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008
[6] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A matritsa uchun transponerlangan matritsa deb quyidagi matritsaga aytiladi.

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1.12.-xossa. $\det(A)=\det(A^T)$

1.13.-xossa. A va B matritsalar $n\times n$ o‘lchovli matritsalar bo‘lsin, u xolda $\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

1.14.-xossa. A $n\times n$ o‘lchovli xosmas matritsa bo‘lsin, u xolda $\det(A^{-1})=\det(A^T)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. (chunki $\det(A)\cdot\det(A^{-1})=\det(I_n)=1$ bo‘ladi)

1.15.-xossa. $n\times n$ o‘lchovli A matritsa uchun $\det(A)\neq 0$ bo‘lsa, A matritsa xosmas bo‘ladi.

Yuqorida keltirilgan xossalardan quyidagi natijani keltiramiz:

1.16.-natija. Quyidagi muloxazalar teng kuchli[7].

A) A xosmas matritsa
B) $Ax=0$ tenglamalar sistemasi trivial yechimga ega
C) $n\times 1$ o‘lchovli B matritsa uchun $Ax=B$ tenglamalar sistemasi yechimga ega.
D) $\det(A)\neq 0$

1.3. Determinantlarning tadbiqlari

Endi determinantlar yordamida geometriyadagi bir qancha muammolarni yechishga urinib ko‘ramiz.

1.17-Misol. XY tekisligida berilgan (x_1,y_1) va (x_2,y_2) nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi: $ax+by+c=0$ ekanligi ma’lum.

[7] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008

(x_1, y_1) va (x_2, y_2) nuqtalar to‘g‘ri chiziqda yotadi, demak $ax_1 + by_1 + c = 0$ va $ax_2 + by_2 + c = 0$ tengliklar o‘rinli bo‘lishi kerak.

Ushbu tenglamalar sistemasini yozamiz: $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$

Bu sistemani matritsa ko‘rinishida yozsak, $\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ga ega bo‘lamiz.

a, b, c lar tenglamaning noldan farqli koeffitsientlari. Demak, $\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} = 0$ tenglama qidirilayotgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini beradi.

1.18-Misol. XY tekisligida uchta (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) nuqtalardan o‘tuvchi aylana tenglamasi tuzilsin.

Aylana tenglamasi $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$ bo‘lgani uchun va berilgan uchta nuqta bu aylanada yotgani uchun, ko‘rilayotgan masala quyidagi tenglamalar sistemasini yechishga olib keladi:

$$\begin{cases} a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0 \\ a(x_1^2 + y_1^2) + bx_1 + cy_1 + d = 0 \\ a(x_2^2 + y_2^2) + bx_2 + cy_2 + d = 0 \\ a(x_3^2 + y_3^2) + bx_3 + cy_3 + d = 0 \end{cases}$$

bu sistemani matritsa ko‘rinishida yozsak:

$$\begin{pmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bo‘ladi.

a,b,c,d lar noldan farqli koeffitsientlar bo‘lsin, u holda

$$\det\begin{pmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}=0$$

tenglama qidirilayotgan aylana tenglamasi bo‘ladi.

O‘z – o‘zini tekshirish savollari.

1. 1x1 o‘lchovli matritsa determinanti deb nimaga aytiladi ?
2. 2x2 o‘lchovli matritsa determinanti deb nimaga aytiladi ?
3. $n \times n$ o‘lchovli matritsa determinanti qanday aniqlanadi?

2-MA'RUZA Matritsalar. Asosiy ta'riflar. Matritsalar ustida amallar. Teskari matritsa.

REJA

1. Matritsa tushunchasi
2. Matritsalar ustida amallar
3. Teskari matritsa

TAYANCH IBORALAR: jadval, matritsa, satr, ustun, element, o'lchov.

2.1. Matritsa tushunchasi

2.1-Ta'rif. $n \times m$ sonlarning to'g'ri to'rtburchakli jadvaliga m ta satr va n ta ustunli $m \times n$ o'lchovli matritsa deyiladi. [8]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A matritsada i –satr $(a_{i1}\ \ldots\ a_{in})$ va j -ustun $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ ko'rinishida bo'ladi.

2.2-Misol 3×4 o'lchovli matritsani ko'raylik.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Bu matritsada $(3\ 1\ 5\ 2)$ 2-satrni va $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ 3-ustunini bildiradi.

2.2 Matritsalar ustida amallar

$m \times n$ o'lchovli A va B matritsalar berilgan bo'lsin.

2.3-Ta'rif.

[8] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ va } B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Matritsalar yig‘indisi deb,

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$ matritsaga aytiladi.[9]

2.4-Misol

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 1+2 & 2+1 & 3+1 \\ 4+3 & 5+2 & 6+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

2.5-Misol Har xil o‘chovli $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ va $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ matritsalar qo‘shilmaydi.

A, B, C matritsalar $m\times n$ o‘lchovli matritsalar bo‘lsin. 0 matritsa barcha elementlari nollardan iborat bo‘lgan matritsa bo‘lsin.

2.6-xossa

a) $A+B=B+A$

b) $A+(B+C)=(A+B)+C$

c) $A+0=A$

d) shunday *m* x*n* o‘lchovli A' matritsa topiladiki. $A+A'=0$ bo‘ladi.

Endi matritsani skalyarga ko‘paytirishni ko‘ramiz:

2.7-Ta’rif.

[9] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & . & . & . & a_{1n} \\ . & & & & & & & . \\ . & & & & & & & . \\ . & & & & & & & . \\ a_{n1} & . & . & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$ matritsa uchun

$$c\cdot A=\begin{pmatrix} c\cdot a_{11} & . & . & . & . & . & . & c\cdot a_{1n} \\ . & & & & & & & . \\ . & & & & & & & . \\ . & & & & & & & . \\ c\cdot a_{n1} & . & . & . & . & . & . & c\cdot a_{nn} \end{pmatrix}$$ matritsaga

A matritsani $c\in R$ skalyar songa ko‘paytmasi deyiladi. [10]

2.8-Misol.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$ matritsa uchun

$$2\cdot A=\begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 & -2 \\ 6 & 2 & 10 & 4 \\ -2 & 0 & 14 & 12 \end{pmatrix}$$ bo‘ladi.

2.9-xossa. A, B - $m\times n$ o‘lchovli matritsalar bo‘lsin, $c,d\in R$ xaqiqiy sonlar bo‘lsin. 0- $m\times n$ o‘lchovli nollardan iborat bo‘lgan matritsa bo‘lsin. U holda quyidagilar o‘rinli:

1) $c\cdot(A+B)=c\cdot A+c\cdot B$
2) $(c+d)\cdot A=c\cdot A+d\cdot A$
3) $0\cdot A=0$
4) $c\cdot(dA)=(c\cdot d)A$

Matritsalar ko‘paytmasini aniqlash uchun, avval chiziqli tenglamalar sistemasini ko‘rib chiqamiz.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ .\ .\ .+a_{1n}x_n=b_1 \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ a_{m1}x_1+\ .\ .\ .+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (1)$$

bu sistemani matritsalar ko‘rinishida yozadigan bo‘lsak, $\grave{A}X=B$ (*) bo‘ladi, bu yerda,

[10] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & . & . & . & a_{1n} \\ . & & & & & & & . \\ . & & & & & & & . \\ . & & & & & & & . \\ a_{n1} & . & . & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (2), \qquad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \quad (3), \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix} \quad (4)$$

bo‘lib , $(*)$ yozuvni

$$\begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & . & . & . & a_{1n} \\ . & & & & & & & . \\ . & & & & & & & . \\ . & & & & & & & . \\ a_{n1} & . & . & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Endi matritsalar ko‘paytmasiga ta’rif keltiramiz.

2.10-Ta’rif.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & . & . & . & a_{1n} \\ . & & & & & & & . \\ . & & & & & & & . \\ . & & & & & & & . \\ a_{n1} & . & . & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ va } B=\begin{pmatrix} b_{11} & . & . & . & . & . & . & b_{1n} \\ . & & & & & & & . \\ . & & & & & & & . \\ . & & & & & & & . \\ b_{n1} & . & . & . & . & . & . & b_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsalar mos ravishda $m\times n$ va $n\times p$ o‘lchovli matritsalar bo‘lsin. U holda A va B matritsalar ko‘paytmasi[11] deb, shunday $m\times p$ o‘lchovli $A\cdot B$ matritsaga aytiladiki, uning elementlari quyidagicha aniqlanadi:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} q_{11} & . & . & . & . & . & . & q_{1n} \\ . & & & & & & & . \\ . & & & & & & & . \\ . & & & & & & & . \\ q_{n1} & . & . & . & . & . & . & q_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{uchun}$$

$$q_{ij}=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{im}b_{mj}$$

bu yerda $i=1,\overrightarrow{m},\ j=1,\overrightarrow{p}$.

[11] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008

Ta'rifdan ko'rinib turibdiki, A matritsaning ustunlar soni B matritsaning satrlar soniga teng bo'lishi kerak. A matritsaning i-satri $(a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in})$ va B matritsaning j–ustuni $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ . \\ . \\ . \\ b_{mj} \end{pmatrix}$ mos elementlarini ko'paytirib, yig'ib chiqsak $A \cdot B$ matritsaning q_{ij} elementi hosil bo'ladi.

2.11-Misol.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ - 2×3 o'lchovli matritsa

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ -3×2 o'lchovli matritsa

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot1+3\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot1+3\cdot2 \\ 2\cdot1+1\cdot1+1\cdot3 & 2\cdot2+1\cdot1+1\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

ko'rinib turibdiki, $A \cdot B - 2 \times 2$ o'lchovli matritsa bo'ladi.
Lekin - $B \cdot A$ matritsa har doim ham $A \cdot B$ matritsaga teng bo'lmaydi.

$A \cdot B \neq B \cdot A$

2.12 xossalar:

1) assotsiativlik: $A \cdot (BC) = (AB) \cdot C$, bu yerda $A - m \times n$ o'lchovli, $B - n \times p$ o'lchovli, $C - p \times r$ o'lchovli matritsalar.

2) distributivlik: $A \cdot (B + C) = AB + AC$, bu yerda $A - m \times n$ o'lchovli, B va $C - n \times p$ o'lchovli matritsalar,

3) $(A + B) \cdot C = AC + BC$, bu yerda A va $B - m \times n$ o'lchovli, $C - n \times p$ o'lchovli matritsalar.

4) $C \cdot (AB) = (CA) \cdot B = A(CB)$, bu yerda $A - m \times n$ o'lchovli, $B - n \times p$ o'lchovli matritsalar $C -$ haqiqiy son.

Endi chiziqli tenglamalar sistemasini o'rganamiz.

Bizga (1) ko'rinishdagi chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin. Bu sistemaning matritsa ko'rinishida yozuvi $Ax = B$ bo'lib, $A,\ x,\ B$ matritsalar (2), (3), (4) ko'rinishga ega.

2.13-Teorema Har qanday (1) ko‘rinishdagi sistema yoki yechimga ega emas, yoki bitta echimga ega, yoki cheksiz ko‘p echimga ega bo‘ladi.[12]

Bu bo‘limda kvadratik matritsalar bilan ishlaymiz.

2.14-Ta’rif. $n\times n$ olchovli kvadratik matritsa

$$I_n=\begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & . & . & . & a_{1n} \\ . & & & & & & & . \\ . & & & & & & & . \\ . & & & & & & & . \\ a_{n1} & . & . & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix},\ a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

$n-$tartibli birlik matritsa deyiladi[13].

Masalan:

$$I_1=(1),\quad I_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

2.15- Xossa.

$n\times n$ o‘lchovli A matritsa uchun

$A\cdot I_n=I_nA=A$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Endi $n\times n$ o‘lchovli A matritsa uchun $AB=BA=I_n$ tenglikni qanoatlantiruvchi $n\times n$ o‘lchovli B matritsani topish masalasini ko‘ramiz.[14]

2.16- Ta’rif. $n\times n$ o‘lchovli A matritsa teskarilanuvchi deyiladi, agar shunday $n\times n$ o‘lchovli B matritsa topilsaki $AB=BA=I_n$ tenglik o‘rinli bo‘lsa.[15]

B matritsaga A matritsaning teskari matritsasi (inversiyasi) deyiladi va $B=A^{-1}$ ko‘rinishda yoziladi.

2.17- xossa. Agar A va B $n\times n$ o‘lchovli matritsalar teskarilanuvchi bo‘lsa, quyidagi munosabati o‘rinli bo‘ladi:

$$(B\cdot A)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$$

O‘z – o‘zini tekshirish savollari.

[12] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008
[13] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008
[14] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008
[15] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008

1. Matritsaning tarifini ayting.
2. Matritsaning xossalarini ayting.
3. Qanday matritsaga birlik matritsa deb aytiladi?
4. Matritsalarning ko`paytirish tarifini ayting.

3-MA'RUZA MATRISSA RANGI. CHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASI. KRONIKER-KOPELLI TEOREMASI

REJA

1. Matritsa rangi va uni aniqlash usullari
2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi
3. Kroniker-Kopelle teoremasi

Tayanch iboralar: matritsa rangi, tenglama, koeffitsent, no'malum, ozod had, Sistema, birgalikda.

3.1. Matritsa rangi va uni aniqlash usullari

n x m o`lchamli A = ($a_{ik}$) matritsa berilgan bo`lib, p matritsaning satrlari soni n va ustunlari soni m larning kichigidan katta bo`lmagan son bo`lsin. Matritsaning ixtiyoriy p ta satrini va ixtiyoriy p ta ustunini o`chiramiz. O`chirilgan elementlar p- tartibli kvadratik matritsani tashkil etadi va unga o`z navbatida p-tartibli determinant yoki minorni mos qo`yish mumkin.

3.1-Tarif. *A matritsaning rangi deb, noldan farqli matritsa osti minorlarining eng katta tartibiga aytiladi va rang(A) ko`rinishida ifodalanadi.*[16]

1-masala. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ matritsa rangini aniqlang?

Berilgan matritsa 3 x 2 o`lchamli bo`lgani uchun satrlari va ustun-lari sonini taqqoslaymiz va kichigi 2 ni tanlaymiz. Matritsadan ikkinchi tartibli minorlar ajratamiz va ularning kattaligini hisoblaymiz. Jarayonni noldan farqli ikkinchi-tartibli minor ajralmaguncha davom etamiz:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Berilgan matritsadan noldan farqli eng yuqori ikkinchi tartibli minor ajraldi. Demak, ta`rifga binoan, A matritsa rangi 2 ga teng.

2-masala. $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ matritsa rangini aniqlang?

B matritsadan ajralishi mumkin bo`lgan eng yuqori - ikkinchi tartibli har qanday minor nolga teng:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Demak, matritsa rangi ikkiga teng bo`la olmaydi. *B* matritsa nolmas matritsa bo`lgani

[16] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008

uchun uning rangi 1 ga teng.

3-misol. $C=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ 2 & -3 & 4\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$ matritsa rangini aniqlang?

C matritsa uchinchi tartibli kvadratik matritsa. Undan yagona eng yuqori 3-tartibli M_1 minor ajraladi. M_1 minor kattaligini hisoblaymiz:

$M_1=\begin{vmatrix}-1 & 1 & -2\\ 2 & -3 & 4\\ -1 & 0 & -2\end{vmatrix}=0.$ $M_1 = 0$ bo`lgani uchun, C matritsa rangi 3 ga teng

bo`la olmaydi. $\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=1\neq 0$ bo`lgani uchun, rang(C) = 2.

3.2-xossa. Matritsa rangi uning ustida quyidagi **elementar almashtirishlar**[17] bajarganda o`zgarmaydi.

1. Matritsa biror satri (ustuni) har bir elementini biror noldan farqli songa ko`paytirganda;
2. Matritsa satrlari (ustunlari) o`rinlari almashtirilganda;
3. Matritsa biror satri (ustuni) elementlariga uning boshqa parallel satri (ustuni) mos elementlarini biror songa ko`paytirib, so`ngra qo`sh-ganda;
4. Matritsa transponirlanganda.

Matritsa rangini aniqlashning ta`rif asosida biz yuqorida masala-larda ko`rgan **«minorlar ajratib hisoblash»** usuli va nollar yig`ib hi-soblashga asoslangan **«Gauss algoritmi»** usullari mavjud.

Matritsa rangi «Gauss algoritmi» yoki nollar yig`ish usuli asosida quyidagicha aniqlanadi: dastlabki ko`rinishdagi matritsa yuqorida sanab o`tilgan elementar almashtirishlar yordamida «**trapetsiyasimon matritsa**» ko`rinishiga keltiriladi. Trapetsiyasimon matritsa deb, bosh diagonaldan yuqorida yoki quyida joylashgan har bir elementi nolga teng bo`lgan matritsaga aytiladi. Trapetsiyasimon matritsaning rangi yoki xuddi shuning o`zi dastlabki matritsaning rangi trapetsiyasimon matritsaning noldan farqli bosh diagonal elementlari soniga teng.

Misol. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 0 & 7\\ 2 & 3 & -1 & 4\end{pmatrix}$ matritsaning rangini nollar yig`ish usulida aniqlang?

Berilgan dastlabki matritsa ustida quyidagicha elementar almashtirishlar bajaramiz va uning ko`rinishini trapetsiyasimon ko`rinishga keltiramiz:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 0 & 7\\ 2 & 3 & -1 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 7 & -3 & -2\\ 0 & 7 & -3 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 7 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Trapetsiyasimon matritsa bosh diagonal elementlaridan ikkitasi noldan farqli bo`lgani uchun uning rangi va shu bilan birga berilgan matritsa rangi ikkiga teng.

[17] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008

3.2.Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi

Dastlab quyidagi misollarni ko‘rib chiqamiz:

3.3-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 6x+4y=5 \end{cases}$$

tenglamalar 2 ta to‘g‘ri chiziq tenglamalari bo‘lib, bu to‘g‘ri chiziqlar parallel va kesishmaydi.

3.2-misol.

$$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ x+y=2 \end{cases}$$

tenglamalar parallel bo‘lmagan va bitta nuqtada kesishgan to‘g‘ri chiziqlar tenglamasidir.

3.3-misol.

$$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 6x+4y=10 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi 2 ta ustma-ust tushgan to‘g‘ri chiziq tenglamalari bo‘lib, bu sistema cheksiz ko‘p yechimga ega.

Bu misollardan shuni ko‘rish mumkinki, R fazoda ko‘rilgan tenglamalar sistemasi yoki yechimga ega emas, yoki bitta yechimga ega, yoki cheksiz ko‘p yechimga ega. Lekin bu misollarni geometric usulda, y’ani to‘g‘ri chiziqlar bitta nuqtada kesishadi, yoki parallel, yoki ustma-ust tushishini bilgan holda echdik.

Endi umumiy holda n ta nomalumdan iborat m ta tenglamalar sistemasini qaraylik:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Bu yerda $x_1, \ldots x_n$ -noma’lum o‘zgaruvchilar $a_{11}, \ldots a_{mn}$, $b_1, \ldots b_m$ koeffitsentlar. Bu sistemani yuqorida keltirilgan usulida yechib bo‘lmaydi.

Agar sistema kamida bitta yechimga ega bo‘lsa, ya'ni noma'lumlar uchun shunday $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2, \ldots, x_n=\alpha_n$ qiymatlar ko‘rsatish mumkin bo‘lsaki, ularni sistemaga qo‘yganda tenglamalarning har biri ayniyatga aylansa, u holda sistema ***birgalikda*** [18]deyiladi.

Quyida chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikda bo‘lish alomatini keltiramiz. Buning uchun sistema koeffitsientlaridan tuzilgan ushbu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

[18] N.M.Jabborov «Oliy matematika». 1-2 qism. Qarshi, 2010

matrisani va $\boldsymbol{A}$ matritsadan unga ozod hadlar ustunini qo‘shish bilan hosil qilingan ushbu

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad (4)$$

matritsani qaraymiz. $\boldsymbol{A}$ matritsa (1) -sistemaning asosiy matritsasi, B matritsa esa (1)-sistemaning ***kengaytirilgan matritsasi*** deyiladi. Bu matritsalarning ranglari $r_A \le r_B$ tengsizlik bilan bog‘langan bo‘ladi.

3.3. Kroniker-Kopelli teoremasi

3.4-Teorema (Kroniker-Kapelli).[19]
(1)-chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo‘lishi uchun asosiy matritsa bilan kengaytirilgan matritsaning rangi teng, ya'ni $r_A = r_B$ bo‘lishi zarur va yetarli.

Bu teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi:
1) Agar $rangA \neq rangB$ bo‘lsa, tenglamalar sistemasi birgalikda bo‘lmaydi, ya'ni sistema echimga ega emas;
2) Agar $rangA = rangB = r = n$ bo‘lsa (1)-tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega;
3) Agar $rangA = rangB = r < n$ bo‘lsa tenglamalar sistemasi cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

Agar tenglamalar sistemasi echimga ega bo‘lsa, bu sistema birgalikda deyiladi. Agar bu echimlar yagona bo‘lsa, sistema aniqlangan sistema deyiladi
Endi $b_1 = b_2 = b_3 = \dots = b_n = 0$ bo‘lgan sistemani qaraymiz. Bu holda sistemaga bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi. Ushbu bir jinsli

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

sistema doim birgalikda, chunki $\boldsymbol{B}$ matrisa $\boldsymbol{A}$ matrisadan faqat elementlari nollardan iborat ustun bilan farq qiladi, ya'ni

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots . & \dots . & \dots & \dots . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots . & \dots . & \dots & \dots . & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Shu sababli $rangA = rangB$.

$\boldsymbol{A}$ matritsa bilan B matrisa teng bo‘lishi uchun (5)-tenglamalar sistemasi doim nol' yechimga ega, ya'ni: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Bu yechimlarga trivial yechimlar deyiladi. (5)-

[19] N.M.Jabborov, E.«Oliy matematika». 1-2 qism. Qarshi, 2010

bir jinsli sistema qachon nolmas yechimga ega bo‘lishi haqidagi savolga ushbu teorema javob beradi[20].

3.5-Teorema. (1)-tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimga ega bo‘lishi uchun ***A*** matrisaning $(rangA)$ rangi noma'lumlar soni (n) dan kichik bo‘lishi zarur va yetarlidir: $rangA < n$.

[21]**3.6.-natija.** Agar bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining tenglamalari soni ***m*** *noma'lumlar soni* ***n*** dan kichik bo‘lsa, u holda sistema nolmas yechimga ega bo‘ladi. Haqiqatdan ham, $rangA \le m < n$.

3.7-misol: Ushbu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

sistema birgalikdami?

Yechish: Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$ matrisaning rangi 3 dan ortiq bo‘lishi mumkin emas. Uni elementar almashtirishlar yordamida topamiz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hosil bo‘lgan ekvivalent matrisaning rangi $rangA = 3$, chunki

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 = 4 \neq 0.$$

Demak, ***A*** matrisaning rangi ham 3 ga tenr: $rang_A = 3$. Kengaytirilgan matrisaning rangini hisoblaymiz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Elementar almashtirishlar bajaramiz:

[20] N.M.Jabborov «Oliy matematika». 1-2 qism. Qarshi, 2010
[21] N.M.Jabborov «Oliy matematika». 1-2 qism. Qarshi, 2010

$$B=\begin{pmatrix}1&1&-3&-1\\2&1&-2&1\\1&1&1&3\\1&2&-3&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-3&-1\\0&-1&4&3\\0&0&4&4\\0&1&0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-3&-1\\0&-1&4&3\\0&0&1&1\\0&0&4&5\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&-3&-1\\0&-1&4&3\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Ekvivalent matrisa $rangA=4$ rangga ega, chunki

$$\begin{vmatrix}1&1&-3&-1\\0&-1&4&3\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&4&3\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=-1\cdot 1=-1\neq 0.$$

B matritsaning rangi 4 ga teng: $rang_B=4$. Matrisalarning ranglari har xil, demek, sistema birgalikda emas. Sistema yechimga ega emas.

3.8-misol: Ushbu

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+x_4=1,\\x_1-2x_2+x_3-x_4=-1,\\x_1-2x_2+x_3+5x_4=5\end{cases}$$

sistema birgalikdami?

Yechish: Ushbu matrisaning rangini hisoblaymiz:

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&1&1\\1&-2&1&-1\\1&-2&1&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&1\\0&0&-2&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

$rang_A=2$, chunki $\Delta=\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$. Kengaytirilgan B maritsanining rangini hisoblaymiz:

$$B=\begin{pmatrix}1&-2&1&1&1\\1&-2&1&-1&-1\\1&-2&1&5&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&1&1\\0&0&0&-2&-2\\0&0&0&4&4\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&1&1\\0&0&0&-2&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1&1&1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

$rang_B=2$, chunki $\Delta=\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$. Sistema birgalikda, chunki $rang_A=rang_B=2$. Rang noma'lumlar sonidan kichik bhlgani uchun sistema cheksiz khp echimga ega. Bu yechimlarni topamiz. Uchinchi tenglama birinchi va ikkinchi tenglamaning chiziqli kombinatsiyasi bo‘lganligi uchun uni tashlab yuborish mumkin.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

minor x_3 va x_4 noma‘lumlar oldidagi koeffisiyentlardan tuzilgan. Bu noma‘lumlarni tenglikning chap qismida qoldirib, qolgan qo‘shiluvchilarni tenglikdan o‘ng tomonga o‘tkazamiz:

$$\begin{cases} x_3+x_4=1-x_1+2x_2, \\ x_3-x_4=-1-x_1+2x_2 \end{cases}$$

x_1 va x_2 **“ozod noma’lum”**larga ixtiyoriy qiymatlarni, masalan, $x_1=1,\ x_2=0$ qiymatlarni beramiz. Sistema ushbu ko‘rinishni oladi.

$$\begin{cases} x_3+x_4=0, \\ x_3-x_4=-2 \end{cases}$$

Bu sistemani echib, $x_3=-1$, $x_4=1$ ni topamiz. Berilgan sistema cheksiz ko‘p echimga ega bo‘ladi. Ularni x_1 va x_2 **“ozod noma’lum”**larga ixtiyoriy qiymatlar berish yo‘li bilan aniqlaymiz. Umumiy ko‘rinishda bu bunday yoziladi:

$$\begin{cases} x_3=-x_1+2x_2 \ , \\ x_4=1 \end{cases}$$

3.9-misol: Ushbu

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=4, \\ 2x_1+4x_2+x_3=9, \\ x_1-x_2+x_3=-2 \\ 2x_1+5x_2-3x_3=15 \end{cases}$$

sistema birgalikdami?

Yechish: Ushbu

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 5 & -3\end{pmatrix}$$ matrisaning rangi 3 dan ortiq bo‘lishi mumkin emas. Uni elemaentar almashtirishlar yordamida topamiz.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 5 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$rang_A=3,$ chunki

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Kengaytirilgan B matritsaning rangini hisoblaymiz:

$$B=\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\2&4&1&9\\1&-1&1&-2\\2&5&-3&15\end{pmatrix}$$

Elementar almashtirishlar bajaramiz:

$$B=\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\2&4&1&9\\1&-1&1&-2\\2&5&-3&15\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\0&2&3&1\\0&-2&2&-6\\0&3&-1&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\0&1&-1&3\\0&2&3&1\\0&3&-1&7\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\0&1&-1&3\\0&0&5&-5\\0&0&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\0&1&-1&3\\0&0&1&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\0&1&-1&3\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\1&1&-1&3\\0&0&1&-1\end{pmatrix}.$$

$rang_B=3$, chunki

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

$rang_A=rang_B=3$ bo‘lganligi uchun sistema birgalikda, bundan tashqari matritsalar rangi noma'lumlar soniga teng, shu sababli sistema birgina echimga ega. $\Delta\neq 0$ minor birinchi uchta tenglama koeffisientlaridan tuzilgan, shu sababli to‘rtinchi tenglama birinchi uchta tenglamaning chiziqli kombinatsiyasidan iborat va uni tashlab yuborish mumkin.

Berilgan sistemaning birinchi uchta tenglamasidan tuzilgan sistemani yechib, $x_1=1$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-1$ ra teng.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasining matrisasi va kengaytirilgan matrisasining rangi deb nimaga aytiladi?
2. Qanday chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda deb ataladi?
3. n noma’lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi qachon birgalikda bo‘ladi?
4. n noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi qachon nolmas echimga ega?

4 –MA’RUZA Chizikli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Kramer, matritsa va Gauss usullari.

REJA

1. Satrlarning Eshelon shakli
2. Tenglamalar sistemasini Kramer usulida yechish
3. Matrisa usuli bilan chiziqli tenglamalar sistemasini yechish
4. Gauss usuli

Tayanch iboralar:

Kramer usuli, bosh determinant, yordamchi determinant, minor, xosmas, teskari matrisa, ustun matrisa, matritsaning rangi, teng kuchli sistemalar, sistema, yechim, sistemaning matrisasi, kengaytirilgan matrisa, rang, trivial, notrivial yechim, matritsaning qisqartirilgan shakli, markaziy o‘zgaruvchi, erkli o‘zgaruvchi

Satrlarning Eshelon shakli

Ta’rif. To‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi matritsa Eshelon satri deb ataladi va ular quyidagi hollarda o‘rinlidir[22]:

1. Ixtiyoriy nolsiz satrning eng chapgi elementi qiymati 1 ga teng bo‘lsin. Bu aylanish markazi deyiladi.
2. Barcha nollik satrlar massivning quyi qismida guruhlangan holda joylashtirilsa.
3. Matritsa nollari satrining pastida

Biz berilgan satrni Eshelon satriga qisqartirishni tadqiq etamiz. Buni misollarda ko‘rsatib beramiz:

Misol 1.3.1 Matritsani ko‘rib chiqamiz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1–qadam. Eng chap satridagi va barcha satrlari chap tomondagi ustunlari farqi topiladi (bizning misolda topilgan elementlarni *x* bilan belgilab qo‘yganmiz):

[22] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 5 & 0 & 15 & 5 \\ x & 2 & 4 & 7 & 1 & 3 \\ x & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ x & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2–qadam. To‘liq berkitilmagan matritsani bir qismini qarab chiqsak, satrlarni joyini almashtiramiz, 1 va 4 satrni o‘rnini almashtiramiz:

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ x & 2 & 4 & 7 & 1 & 3 \\ x & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ x & 0 & 5 & 0 & 15 & 5 \end{pmatrix}$$

3 –qadam. Agar yuqoridan oxirgicha p ustun to‘liq berk bo‘lmasa, javobimiz 1 bo‘lishi uchun to‘liq berk bo‘lmagan ustunni 1 taga ko‘paytiramiz. Quyidagi natijani olish uchun keling 1 satrni 1ga bo‘lamiz:

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ x & 2 & 4 & 7 & 1 & 3 \\ x & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ x & 0 & 5 & 0 & 15 & 5 \end{pmatrix}$$

4–qadam. Chap tomondagi ustun elementlarini nollarga aylantiramiz. Bizga bu mos satrlarni 1-satrga ko‘paytirishimizga imkon beradi. 1-satr elementalarini -2 ga ko‘paytirib 2-satr mos elementlariga qo‘shamiz:

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ x & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ x & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ x & 0 & 5 & 0 & 15 & 5 \end{pmatrix}$$

Quyidagi holatga kelishi uchun 1-satrni -1 ga ko‘paytirib 3-satrga qo‘shamiz:

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ x & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ x & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ x & 0 & 5 & 0 & 15 & 5 \end{pmatrix}$$

5 – qadam: Yuqori qismlari to‘liq yopilib, quyidagi holga keladi:

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x & x & x \\ x & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ x & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ x & 0 & 5 & 0 & 15 & 5 \end{pmatrix}$$

6–qadam: 1 – 5 qadamlarni to 2-ustun ham to‘liq yopilmaguncha takrorlaymiz. 1-qadamga muvofiq chap tarafdagi barcha ustunlar va nollik ustunlarni topamiz. Biz quyidagi natijaga ega bo‘lamiz:

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x & x & x \\ x & x & 0 & -1 & -1 & -1 \\ x & x & 0 & -1 & -1 & -1 \\ x & x & 5 & 0 & 15 & 5 \end{pmatrix}$$

2-qadamga muvofiq noldan farqli satrlarni matritsaning yuqorisiga olib chiqiladi ya’ni almashtiriladi. Quyidagi natijani olish uchun 1 va 3 satrlarni almashtiramiz:

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x & x & x \\ x & x & 5 & 0 & 15 & 5 \\ x & x & 0 & -1 & -1 & -1 \\ x & x & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3-qadamga muvofiq yuqoridagi chap ustunning qiymati 1 ga teng bo‘lishi uchun ixtiyoriy songa ko‘paytiramiz. Bunda qatotni 1/5 ga ko‘paytiramiz:

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x & x & x \\ x & x & 1 & 0 & 3 & 1 \\ x & x & 0 & -1 & -1 & -1 \\ x & x & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

4-qadamga muvofiq hech nima qilmaymiz! 5-qadamga muvofiq satrning tepasini yopamiz va quyidagi holni ko‘ramiz:

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & 0 & -1 & -1 & -1 \\ x & x & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1-qadamga muvofiq noldan farqili bo‘lgan ustunlarni topamiz va chapdan barcha shu ustunga tegishli bo‘lgan elementlarni yopamiz, hosil bo‘lgan natija:

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & -1 & -1 & -1 \\ x & x & x & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2-qadamga muvofiq hech narsa qilinmaydi! 3-qadamga muvofiq chap ustunning qiymati 1 ga teng bo‘lishi uchun 1-satrni -1 ga ko‘paytiramiz:

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & 1 & 1 & 1 \\ x & x & x-1 & -1 & -1 & \end{pmatrix}$$

4-qadamga muvofiq endi chap yopilmagan nollik ustundagi elementlarni tepadagi elementlardan kichikroq qilishga harakat qilamiz. Shuning uchun 1-satrga 2-satrni qo‘shamiz:

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & 1 & 1 & 1 \\ x & x & x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5 – qadam: Yuqori qismlari to‘liq yopilib, quyidagi holga keladi:

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1-qadamga muvofiq noldan farqili bo‘lgan ustunlarni topamiz va chapdan barcha shu ustunga tegishli bo‘lgan elementlarni yopamiz:

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \end{pmatrix}$$

∞ qadam: barcha satrlarni yopamiz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matritsa elementlarini o‘zi yopmaydi, shuning uchun uni shunday ishlab chiqsak, misolni ishlaydigan odam yuqoridagi qadamlarni ko‘rib chiqishi kerak bo‘ladi. Matritsa quyidagicha:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1-satr va 4-satrni o‘rnini almashtiramiz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 15 & 5 \end{pmatrix}$$

1-satrni -2 ga ko‘paytirib 2-satrga, 1-satrni (-1) ga ko‘paytirib 3-satrga qo‘shamiz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 15 & 5 \end{pmatrix}$$

2-satrni va 4-satrni o‘rnini almashtiramiz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1-satrni 1/5 ga ko‘paytirib chiqamiz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3-satrni -1 ga ko‘paytirib chiqamiz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3-satrga 4-satrni qo‘shamiz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hosil bo‘lgan satr eshelon shakli bo‘ldi.

Izoh. (1) da aytilganidek, biz satr yoki ustunni to‘liq berkita olmaymiz. Bu sohalarni o‘zgarishsiz ko‘chirib ololmaymiz.

(2) bosqichda, (1) bosqichda ko‘rsatilganlar faqat boshqaruvi hisoblanadi. Masalan, quyidagi matritsa berilgan bo‘lsin:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1-satrni ½ ga ko‘paytiramiz. Bunda hisob kitob ancha murakkablashadi, sonlar kasr ko‘rinishiga o‘tadi. Shuning uchun, ½ ning o‘rniga 1-satrni 3 ga ko‘paytiramiz:

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2-satrni 2 ga ko‘paytiramiz:

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1-satrni -1 ga ko‘paytirib 2-satrga qo‘shamiz:

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 & 3 \\ 0 & -5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Bu yo‘l bilan kasrlar ustida bajariladigan amallarni oldini oldik. Umumiy olganda, matritsaning boshlang‘ich markaziga butun son tanlasak, kasrli sonlardan qutilgan bo‘lamiz.

Misol 1.3.2 Matritsa berilgan bo‘lsin:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Barcha yuqorida ko‘rsatilgan qadamlarni bajarishga harakat qilamiz. Dastlab, 1 va 2 satrni o‘rnini almashtiramiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bunga sabab 1-satrning yuqori chap tomonga istalgan element qo‘yib bo‘lmasligi. 1-satrni biror songa ko‘paytirib boshqa satrlarga qo‘shish satrni nollariga olib keladi. Endi 1-satrni -2 ga ko‘paytirib 2-satrga qo‘shamiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -6 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1-satrni -3 ga ko‘paytirib 3-satrga qo‘shamiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -12 & -1 \end{pmatrix}$$

Keyin, 2-satrni (-7) ga ko‘paytiramiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & 7 & 42 & -21 \\ 0 & -7 & -6 & -12 & -1 \end{pmatrix}$$

3-satrni -5 ga ko‘paytiramiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & 7 & 42 & -21 \\ 0 & 35 & 30 & 60 & 5 \end{pmatrix}$$

Shuni aytib o‘tish kerakki, 1-satrni qisqartirdik. 2-satr va 3-satrlarni mos elementlarini ko‘paytirdik. Qadamlar soni anchaga qisqartiradi. Hozir 2-satrga -1 ni ko‘paytirib 3-satrga qo‘shamiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & 7 & 42 & -21 \\ 0 & 0 & 23 & 18 & 26 \end{pmatrix}$$

Matritsa allaqachon eshelon shakliga kelib bo‘ldi, 2-satr va 3-satrning nol bo‘lmagan satrlari 1-satrga teng bo‘lmaganini hisobga olmasa. Eshelon shakli olib kelish uchun 2-satrni 1/35ga va 3-satrni 1/23ga ko‘paytiramiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1/5 & 6/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 18/23 & 26/23 \end{pmatrix}$$

agar bu misolda xatolik yoki satrlar bir biriga o‘xshamasa, havotir olmang va yuqorida ko‘rsatilgan qadamlarni yana qilib ko‘ring, eshelon shakli satr ideal emas!

1.4. Qisqartirilgan satr shakl formasi

Ta'rif. Matritsa elementlari quyidagi holatlar o'rinli bo'lganda qisqartirilgan satr shakl formasi deyiladi[23]:

1. Ixtiyoriy nolsiz satrning eng chapgi elementi qiymati 1 ga teng bo'lsin. Bu aylanish markazi deyiladi.

2. Barcha nollik satrlar massivning quyi qismida guruhlangan holda joylashtirilsa.

3. Har bir aylanish markaziga ega ustunning barcha o'rnida 0 lar bo'lsa.

Berilgan matritsani qanday qilib qisqartirishni hozir ko'rib chiqamiz. Satr shakl formasidan qisqartirilgan satr shakl formasiga o'tish uchun qo'shimcha qadamdan foydalanamiz. Buning uchun, yuqoridagi misolni davom ettiramiz.

Misol 1.4.1 Matritsani qaytadan hisoblaymiz.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.3.1 misolda ko'rsatilganidek matritsa satr shakl formasiga qisqartiriladi.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1-qadam. Matritsaning quyi qismida joylashgan barcha nollik satrlarni berkitamiz.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & x & x & x & x \end{pmatrix}$$

2-qadam. Eng pastda turgan satrni mos ko'paytiruvchiga ko'paytirib, uni qolgan satrlarga qo'shamiz. Endi, 3-satrni -4 ga ko'paytirib 1-satrga qo'shamiz.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & x & x & x & x \end{pmatrix}$$

[23] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008

3-qadam. 3-satrni ham berkitib chiqamiz.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \end{pmatrix}$$

4-qadam. 2- va 3-qadamlarni massivning belgilanmagan satrlari uchun bajarib chiqamiz. Yuqoridagi misolni davom ettiramiz. 2-qadamda ta'kidlanganidek, 2-satrni -2 ga ko'paytirib 1-satrga qo'shamiz.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \end{pmatrix}$$

3-qadamda ko'rsatilganidek, 2-satrni berkitib chiqamiz.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -9 & -4 \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \end{pmatrix}$$

1-satr uchun faqat 3-qadamni bajaramiz.

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x \end{pmatrix}$$

∞ - qadam. Barcha satrlarni ochib chiqamiz va

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qisqartirilgan satr shakl formasiga ega bo'lamiz.

Endi ushbu misolni satrlarni berkitmasdan yuqoridagi bajarilgan qadamlarni takroran bajaramiz. Misolni satr shakl formasidan boshlaymiz.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3-satrni -4 ga ko‘paytirib 1-satrga qo‘shamiz.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2-satrni -2 ga ko‘paytirib 1-satrga qo‘shamiz,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

va qisqartirilgan satr shakl formasiga ega bo‘ldik.

4.2. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish.

Birinchi navbatda shu paytgacha bajarilgan ishlarni tahlil qilib chiqamiz. n nomalumli m o‘lchamli chiziqli tenglamalar sistemasi (1) ni o‘rganamiz. Agar o‘zgaruvchilarni Sistema (1) dan ajratib olsak, sistema m satr n+1 ustunli matritsa (2) ga aylanadi. So‘ng matritsa elementlarini oddiy satr amallari yordamida satr formasi yoki qisqartirilgan satr formasiga aylantiramiz.

1A misoldagidek, chiziqli tenglamalar sistemasi (1) matritsa ko‘rinishida bo‘lganda ham sistema bilan bir xil yechimga ega bo‘ladi. Sistemaning barcha yechimlarini topishni oson usulini ko‘rib chiqamiz.

Ta’rif. Matritsa (2) ning istalgan ustuni qisqartirilgan yoki satr formasida aylanish markaziga ega bo‘lsa **markaziy ustun** deb ataladi.

Dastlab, sistema yechimga ega bo‘lmagan holatni ko‘rib chiqamiz. Matritsa (2) qisqartirilgan satr formasiga **keltirildi** deb tasavvur qilamiz. Matritsaning oxirgi ustuni markaziy ustundir. Bu satr yordamida quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz.

$$\underbrace{0 \quad \ldots \quad 0}_{n} \quad 1$$

Bu sistema yechimga ega emas

$$0x_1 + \ldots + 0x_n = 1$$

Ta'rif. Faraz qilaylik, matritsa (2) ning oxirgi ustuni qisqartirilgan yoki satr formasida markaziy ustun bo'lmasin. Istalgan x_i o'zgaruvchi markaziy ustunga mos kelsa **markaziy o'zgaruvchi** deyiladi. Qolgan barcha o'zgaruvchilar **bo'sh o'zgaruvchilar** deyiladi[24].

Misol 1.5.1 Quyidagi matritsa

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ushbu sistemaga ega

$$x_2 \qquad\qquad - 9x_5 = -4,$$

$$x_3 \quad + 3x_5 = 1,$$

$$x_4 + x_5 = 1.$$

Matritsaning nollik satri ahamiyatsiz tenglik hisoblanadi. Matritsaning oxirgi ustuni markaziy ustun emas. 2-,3- va 4-ustunlar markaziy ustunlardir. x_2, x_3, x_4 lar markaziy o'zgaruvchilar, x_1 va x_5 bo'sh o'zgaruvchilardir. Sistemani yechish uchun bo'sh o'zgaruvchilarga ixtiyoriy qiymat berishimiz mumkin. Markaziy o'zgaruvchilar qiymati bo'sh o'zgaruvchilarga berilgan qiymatga bog'liq.

Misol 1.5.2 4 o'lchamli chiziqli tenglamalar sistemasini olaylik.

$$\begin{aligned} 5x_3 + \qquad 15x_5 &= 5; \\ 2x_2 + 4x_3 + 7x_4 + x_5 &= 3; \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 \qquad &= 1; \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 &= 2; \end{aligned} \qquad (14)$$

Tenglama 5 ta o'zgaruvchidan iborat: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Sistemani matritsa ko'rinishida ifodalaymiz.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 5 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad (15)$$

[24] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008

1.3.1 misolda ko‘rsatilganidek matritsa (15) ni satr formasiga qisqartiramiz,

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (16)$$

va sistema ko‘rinishida yozamiz

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 &= 2, \\ x_3 \quad + 3x_5 &= 1, \qquad (17) \\ x_4 + x_5 &= 1. \end{aligned}$$

1.4.1 misoldagi matritsa (15) ni ham satr formasiga qisqartiramiz,

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (18)$$

va sistema ko‘rinishida yozamiz

$$\begin{aligned} x_2 \quad - 9x_5 &= -4, \\ x_3 \quad + 3x_5 &= 1, \qquad (19) \\ x_4 + x_5 &= 1. \end{aligned}$$

1A xossaga ko‘ra (14), (17) va (19) – tenglamalar sistemalari ekvivalentdir, ya’ni ular bir xil yechimlarga ega. (16) va (18) matritsadagi 2,3,4 ustunlar markaziy ustunlar, x_2, x_3, x_4 lar markaziy o‘zgaruvchilar, x_1 va x_5 bo‘sh o‘zgaruvchilardir. Agar $x_1 = s$ va $x_5 = t$ qiymat bersak, (17) va (19) quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (s, 9t - 4, -3t + 1, -t + 1, t). \qquad (20)$$

(14) sistemani yechimi (20) da ko‘rsatilganidek ixtiyoriy $s, t \in R$ uchun o‘rinlidir.

Misol 1.5.3 1.2.4. misolga qaytamiz va 3 o‘lchamli, 5 o‘zgaruvchili sistema (8) ni qaraymiz. Sistemani matritsa ko‘rinishida ifodalaymiz. Sistema (12) da ko‘rsatilganidek matritsani (9) forma (10) ga qisqartiramiz. So‘ng sistema (13) da ko‘rsatilganidek (9) matritsani (11) formaga qisqartiramiz. 3 ta tenglamalar sistemasi (8), (12) va (13) ekvivalentdir. (10) va (11) matritsadagi 1,2,4 ustunlar markaziy ustunlar, x_1, x_2, x_4 lar markaziy o‘zgaruvchilar, x_3 va x_5 erkli o‘zgaruvchilardir. Agar x_3 = s va x_5 = t qiymat bersak, (12) va (13) quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-6 + t + 2s, 2 + t - s, s, 1 - t, t). \qquad (21)$$

(21) sistemani yechimi (8) da ko‘rsatilganidek ixtiyoriy s, t ∈ R uchun o‘rinlidir.

Misol 1.5.4 Bu misolda matritsani qisqartirilgan satr formasiga keltira olmaymiz. 3 o‘lchamli chiziqli tenglamalar sistemasiga ajratamiz.

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5;$$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1;$$

$$3x_1 + 2x_2 = 2; \qquad (22)$$

4 ta o‘zgaruvchi x_1, x_2, x_3, x_4 mavjud. Sistemani matritsa ko‘rinishida ifodalaymiz.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \qquad (23)$$

1.3.2 misolda ko‘rsatilganidek (23) matritsani qisqartiramiz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 35 & 7 & 42 & -21 \\ 0 & 0 & 23 & 18 & 26 \end{array}\right) \qquad (24)$$

va sistema hosil bo‘ldi

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1,$$

$$35x_2 + 7x_3 + 42x_4 = -21, \qquad (25)$$

$$23x_3 + 18x_4 = 26.$$

2 ta (22) va (25) tenglamalar sistemasining yechimlari bir xildir. (24) matritsadagi 1,2,3 ustunlar markaziy ustunlar, x_1, x_2, x_3 lar markaziy o‘zgaruvchilar, x_4 esa erkli o‘zgaruvchidir. Agar x_4 = s qiymat bersak, (25) quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{16}{23}s + \frac{28}{23}, -\frac{24}{23}s - \frac{19}{23}, -\frac{18}{23}s + \frac{26}{23}, s\right). \qquad (26)$$

(22) sistemani yechimi (26) da ko‘rsatilganidek barcha s ∈ R uchun o‘rinlidir.

4.3 Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usuli

Kramer (determinant) usuli. Aytaylik bizga ***n*** ta noma’lumli ***n*** ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (4.1)$$

Bu yerda$x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ -noma’lumlar, $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ -koeffisiyentlar, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ -ozod sonlar.

Teorema:

Agar (12)-tenglamalar sistemasining asosiy determinanti(Δ≠ 0)*noldan farqli bo‘lsa, u holda tenglamalar sistemasi birgalikda deyiladi. Bu holda sistema yagona yechimga ega bo‘ladi va ular quyidagi formulalardan topiladi* [25]

$$\Delta \neq 0\,,\ \ x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta},\ \ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta},\ \ldots, x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta} \qquad (4.2)$$

Bu **Kramer** formulasidan iborat. Bu yerda $\Delta \neq 0$, ga bosh determinant $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}, \ldots, \Delta_{x_n}$ larga ***yordamchi determinantlar*** deyiladi. Soddalik uchun 3 noma’lumli, 3 ta chiziqli tenglamalar sistemasini qaraymiz.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \qquad (4.3)$$

3 noma’lumli 3 ta chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda dastlab bosh(asosiy) determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (4.4)$$

[25] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008

topiladi. $\Delta \neq 0$ bo‘lsin. Undan so‘ng yordamchi determinantlar hisoblanadi (bunda bosh determinantning ustun elementlari mos ravshda ozod hadlar bilan almashtiriladi):

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \qquad (4.5)$$

Noma’lumlar quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta} \qquad (4.6)$$

Misol Ushbu sistemani eching:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

yechish: Quyidagi determinantlarni tuzamiz va hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 4 + 2 - 0 + 1 + 4 = 3 \neq 0\,,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 0 - 0 + 5 - 0 = 3\,,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 10 - 2 - 0 - 1 - 10 = -3$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 10 - 0 - 0 - 4 = 6.$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{3}{3} = 1, \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-3}{3} = -1, \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2$$

Bundan $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2.$

4.4 Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning matrissa usuli

Aytaylik bizga ***n*** ta noma’lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (4.1)$$

Ushbu belgilashlar kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (4.2)$$

U holda (4.1) sistemani matrisalarni ko‘paytirish qoidasidan foydalanib, ushbu ekvivalent shaklda yozish mumkin:

$$A \cdot X = B \qquad (4.3)$$

Bu yerda $\boldsymbol{A}$-noma’lumlar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan matrisa, $\boldsymbol{B}$-ozod hadlardan tuzilgan ustun matrisa, X-noma’lumlardan tuzilgan ustun matrisa.

Agar $\boldsymbol{A}$ matrisa xosmas, ya’ni $\det A \neq 0$ bo‘lsa, u holda uning uchun A^{-1} teskari matrisa mavjud. (4.3) matrisali tenglamaning ikkala qismini A^{-1} ga chapdan ko‘paytirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

yoki

$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B.$

$A^{-1} \cdot A = E, \quad E \cdot X = X$ ekanligini hisobga olib,

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad (4.4)$$

ni topamiz. (4.4) formula $\boldsymbol{A}$ matrisa xosmas bo‘lganda $\boldsymbol{n}$ no‘malumli $\boldsymbol{n}$ ta chiziqli tenglamalar sistemasi yechimining matrisali yozuvidan iborat bo‘ladi.

Misol. U shbu sistemani yeching:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

Yechish: Bu yerda

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 2 + 1 + 4 = 3 \neq 0,$$

$A_{11} = 1,\quad A_{12} = 0,\quad A_{13} = 2,\quad A_{21} = 3,\quad A_{22} = 3,\ A_{23} = 3,\ A_{31} = 2,$

$A_{32} = 3,\ A_{33} = 4$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$x_1 = \frac{1}{3} \cdot 5 + 1 \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot (-1) = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1;$$

$$x_2 = 0 \cdot 5 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = 0 - 1 = -1;$$

$$x_3 = \frac{2}{3} \cdot 5 + 1 \cdot 0 + \frac{4}{3} \cdot (-1) = \frac{10}{3} - \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2/$$

Bundan $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ \ x_3 = 2.$

Mavzu bo‘yicha bilimlarni faollashtirish uchun savollar

Satrlarning Eshelon shakli

Kramer qoidasini aytib bering.

Chiziqli tenglamalar sistemasi qaysi holda birgina echimga ega?

Ikkita va uchta tenglama sistemalari uchun buni geometrik nuqtai nazardan qanday talqin etish mumkin?

Chiziqli tenglamalar sistemasini echishning Gauss usuli nimadan iborat?

Matrisa deb nimaga aytiladi?

Matrisalarni transponirlash deb nimaga aytiladi?

Kvadrat matrisa nima? Uning determinanti-chi?

Qanday matrisa xos matrisa deb ataladi? Xosmas matrisa deb-chi?

Matrisalar ustida chiziqli amallar qanday aniqlanadi?

Ikki matrisaning ko‘paytmasi qanday aniqlanadi?

Qanday kvadrat matrisalar uchun $A \cdot B = B \cdot A$ bo‘ladi?

Qanday matrisa berilgan matrisa uchun teskari matritsa deb ataladi?

Teskari matrisaqanday topiladi?

5-MA'RUZA BIR JINSLI CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINI TEKSHIRISH. YECHIMLAR TO'PLAMINI O'LCHASH. FUNDAMENTAL YECHIMLAR SISTEMASI

REJA

1. Bir jinsli tenglamalar chiziqli sistemasi
2. Fundamental yechimlar sistemasi
3. Misollar yechishdan namunalar

Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi

Biror sonlar maydon ustida bir jinsli n noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0; \end{cases} \quad \textbf{(6)}.$$

Ma'lumki, (6) sistema yechimi ikki turga bo'linadi, ya'ni nol yechim va nolmas yechim. Ko'rish qiyin emaski, (6) sistemaning nol (trivial) yechimi har doim mavjud, chunki $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ da (6) sistema to'g'ri tenglikka aylanadi. Shuning uchun ham uning faqat nolmas yechimlarini topish bilan shug'ullanamiz. Bu **(6)** sistemaning vektor formasi $x_1\vec{b}_1 + ... + x_n\vec{b}_n = \vec{0}$ dan iborat.

Teorema 6. (6) sistema uchun $m < n$ bo'lsa, u holda (6) sistema nolmas yechimga ega bo'ladi, bu yerda m tenglamalar soni va n noma'lumlar soni.[26]

Isboti: $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_m \in R^m$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'lanmagan, chunki ular R^m ning bazisi. U holda chiziqli bog'langan va chiziqli bog'lanmagan vektorlar sistemalarining xossasiga ko'ra $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$ vektorlar chiziqli bog'langan vektorlar sistemasi bo'ladi. Chiziqli bog'langan vektorlar sistemasining ta'rifiga ko'ra $x_1 = \alpha_1 \wedge x_2 = \alpha_2 \wedge ... \wedge x_n = \alpha_n$ kamida bittasi 0 dan farqli bo'lgan sonlar uchun ushbu tenglik o'rinli: $\alpha_1\vec{b}_1 + \alpha_2\vec{b}_2 + ... + \alpha_n\vec{b}_n = \vec{0}$. Bundan $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ vektor (6) sistemaning nolmas yechimi bo'ladi. Teorema isbotlandi.

[26] N.M.Jabborov «Oliy matematika». 1-2 qism. Qarshi, 2010

Izoh: $\wedge$ *belgisi* ***va*** *degan ma'noni bildiradi.*

Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi yechimlarining asosiy xossalari:

➢ (6) sistemaning ixtiyoriy ikkita yechimi yig'indisi (ayirmasi) yana (6) sistemaning yechimi bo'ladi, ya'ni

$$\vec{a}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\wedge\vec{b}=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)\Rightarrow\vec{a}\pm\vec{b}=(\alpha_1\pm\beta_1,\alpha_2\pm\beta_2,...,\alpha_n\pm\beta_n)$$

➢ (6) sistemaning ixtiyoriy yechimini $\alpha\neq 0$ songa ko'paytirishdan hosil bo'lgan vektori yana (6) sistemaning yechimi bo'ladi, ya'ni

$$\alpha\in R\wedge\vec{b}=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)\Rightarrow\alpha\vec{b}=(\alpha\beta_1,\alpha\beta_2,...,\alpha\beta_n).$$

Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi yechimlarining fundamental yechimlar sistemasi

Ravshanki, (6) sistemaning kengaytirilgan matritsasining $(n+1)$-ustuni faqat nollardan tashkil topgani uchun elementar almashtirishlar xossasiga ko'ra kengaytirilgan matritsaning rangi asosiy matritsaning rangiga teng, ya'ni $r(A)=r(B)$, bu yerda

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \text{ va } B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}_{m\times(n+1)}$$

Kroneker–Kapelli teoremasiga ko'ra $r(A)=r(B)=n$ bo'lsa, (6) sistema yagona (trivial) yechimga ega. Bu yechim esa yuqorida ta'kidlab o'tganimizdek har doim mavjud. Shuning uchun ham biz bu sistemada $r(A)=r(B)<n$ deb qaraymiz, ya'ni (6) sistema aniqmas sistema bo'lsin va $r(A)=r$ belgilashni kiritaylik.

Ta'rif 18. $n-r$ ta ozod noma'lumlardan tuzilgan vektor–funksiya ko'rinishidagi ixtiyoriy yechimlar sistemasi (6) sistemaning umumiy yechimi deb ataladi, ya'ni:

$$X(t_1,...,t_{n-r})=\begin{pmatrix} x_1(t_1,...,t_{n-r}) \\ ... \\ x_r(t_1,...,t_{n-r}) \\ t_1 \\ ... \\ t_{n-r} \end{pmatrix},$$

bu yerda $x_1,\ldots,x_r$ -lar bosh (bazis) o‘zgaruvchilar, $t_1,\ldots,t_{n-r}$ lar esa mos ravishda $x_{r+1},\ldots,x_n$ ozod o‘zgaruvchilarning qiymatlari. Bu umumiy yechimdan quyidagi $n-r$ ta yechimni olamiz:

$$X_1 = X_1(1,0,\ldots,0) = \begin{pmatrix} x_1(1,0,\ldots,0) \\ \ldots \\ x_r(1,0,\ldots,0) \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = X_2(0,1,\ldots,0) = \begin{pmatrix} x_1(0,1,\ldots,0) \\ \ldots \\ x_r(0,1,\ldots,0) \\ 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$X_{n-r} = X_{n-r}(0,0,\ldots,1) = \begin{pmatrix} x_1(0,0,\ldots,1) \\ \ldots \\ x_r(0,0,\ldots,1) \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[27]**Ta’rif 19.** Ushbu, $X_1, X_2,\ldots, X_{n-r}$ vektor–ustunlar sistemasi **(6)** sistemaning normal fundamental yechimlar sistemasi deb ataladi.

Fundamental yechimlar sistemasi xossalari

- (6) sistemaning ixtiyoriy X yechimini $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_{n-r} X_{n-r}$ yagona ko‘rinishda ifodalash mumkin, bu yerda $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$ lar biror sonlar. Bu xossani qanoatlantiruvchi (6) sistemaning ixtiyoriy $n-r$ ta yechimlar majmuasi (6) sistemaning fundamental yechimlar sistemasi deb ataladi.
- (6) sistemaning $n-r$ ta ixtiyoriy yechimlar majmuasi

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \ldots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}, \; X_2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ \ldots \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix}, \ldots, \; X_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1^{(n-r)} \\ \ldots \\ x_n^{(n-r)} \end{pmatrix}$$

fundamental yechimlar sistemasini tashkil qiladi, faqat va faqat shu holdaki, bu yechimlarning komponentalaridan tuzilgan ushbu

[27] N.M.Jabborov «Oliy matematika». 1-2 qism. Qarshi, 2010

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(n-r)} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n^{(1)} & \dots & x_n^{(n-r)} \end{pmatrix}$$

matritsa rangi $n-r$ ga teng bo‘lganda.

- Bir jinsli bo‘lmagan (2) sistema va unga mos bir jinsli (6) sistemalar berilganda (2) sistemaning umumiy yechimini (6) sistemaning umumiy yechimi va (2) sistemaning qandaydir bitta xususiy yechimi yig‘indisi ko‘rinishida ifodalash mumkin.

Misollar yechishdan na’munalar

Quyidagi bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi ning umumiy yechimi va fundamental yechimlar sistemasini toping.

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$

Yechilishi: Berilgan sistemaning kengaytirilgan matritsasini yozamiz va uni elementar almashtirishlar yordami bilan zinasimon matritsa ko‘rinishiga keltiramiz:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right)_{II-2\cdot I} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{array}\right).$$

Bundan $r(A)=r(B)=2$ va $n=2$ bo‘lgani uchun berilgan sistema Kroneker – Kapelli teoremasiga ko‘ra yagona yechimga ega. Oxirgi hosil qilingan sistemadan mos ravishda ushbu sistemani yozamiz:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ 7x_2 = 0. \end{cases}$$

Bu sistemadagi ikkinchi tenglamadan $x_2 = 0$ va bu qiymatni sistemadagi birinchi tenglamaga qo‘ysak, u holda $x_1 = 0$ bo‘ladi.

Javob. Umumiy yechim: $(0;0)$.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Yechilishi: Berilgan sistemaning kengaytirilgan matritsasini yozamiz va uni elementar almashtirishlar yordami bilan zinasimon matritsa ko‘rinishiga keltiramiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)_{II-2\cdot I} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

Bundan $r(A)=r(B)=2$ va $n=3>2$ bo‘lgani uchun berilgan sistema Kroneker–Kapelli teoremasiga ko‘ra cheksiz ko‘p yechimga ega. Bosh (bazis) o‘zgaruvchilar soni $r(A)=2$ va ozod o‘zgaruvchilar soni $n-r(A)=3-2=1$ ga teng. Bosh o‘zgaruvchilarni aniqlash uchun A matritsadan hosil qilingan matritsaning noldan farqli bo‘lgan birorta ikkinchi tartibli minorini tanlaymiz, masalan $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Bu minorning birinchi va ikkinchi ustunlari A matritsaning x_1 va x_2 o‘zgaruvchilariga mos keluvchi ustunlari bo‘lib, bu o‘zgaruvchilar esa bazis o‘zgaruvchilar, qolgan x_3 o‘zgaruvchi esa ozod o‘zgaruvchi bo‘ladi. Biz qarayotgan misolda bazis o‘zgaruvchilar sifatida x_2 va x_3 o‘zgaruvchilarni tanlash mumkin emas, chunki bu o‘zgaruvchilarga mos keluvchi minor nolga teng, ya’ni $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$.

Oxirgi hosil qilingan sistemadan mos ravishda ushbu sistemani yozamiz:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Ikkinchi tenglamadan $x_2 = x_3$ ni hosil qilib, uni birinchi tenglamaga qo‘ysak, u holda $x_1 = 0$ ga ega bo‘lamiz. Agar $x_3 = t$ deb olsak, u holda sistemaning umumiy yechimi $X(t) = (0;t;t)^T = t\cdot(0;1;1)^T$ ni hosil qilamiz. Bundan fundamental yechimlar sistemasi $X_1(1) = (0;1;1)^T$ ga ega bo‘lamiz. Umumiy yechimning fundamental yechimlar sistemasi orqali chiziqli kombinatsiyasi esa $X(t) = t\cdot X_1(1)$, $t \in R$.

Javob. Umumiy yechim: $X(t) = t\cdot(0;1;1)^T$ va fundamental yechimlar sistemasi $X_1(1) = (0;1;1)^T$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$$

Yechilishi: Berilgan sistemaning kengaytirilgan matritsasini yozamiz va uni elementar almashtirishlar yordami bilan zinasimon matritsa ko‘rinishiga keltiramiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & -3 & -3 & -1 & 0 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & 9 & 9 & 10 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & 0 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 0 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Bundan $r(A)=r(B)=2$ va $n=4>2$ bo‘lgani uchun berilgan sistema Kroneker–Kapelli teoremasiga ko‘ra cheksiz ko‘p yechimga ega. $r(A)=2$ bo‘lgani uchun oxirgi hosil qilingan matritsaning birorta noldan farqli bo‘lgan ikkinchi tartibli minori, masalan $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 15 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$ ni tanlaymiz. Bu minorning birinchi va ikkinchi ustunlari mos ravishda A matritsaning x_1 va x_2 o‘zgaruvchilari ustunlariga mos kelgani uchun bu o‘zgaruvchilar bazis o‘zgaruvchilar, qolgan x_3 va x_4 lar esa ozod o‘zgaruvchilar bo‘ladi. Mos ravishda hosil qilingan matritsadan sistemani yozamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 15x_2 + 15x_3 + 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Ikkinchi tenglamadan $x_2 = -x_3 - \frac{19}{15}x_4$ ni topib, uni sistemaning birinchi tenglamasiga qo‘ysak, u holda $x_1 = -\frac{7}{15}x_4$ ga ega bo‘lamiz. Agar ozod o‘zgaruvchilarga $x_3 = t_1$ va $x_4 = 15t_2$ deb belgilash kiritsak, u holda sistemaning umumiy yechimi $X(t_1,t_2)$, fundamental yechimlar sistemasi $X_1(1,0)$ va $X_2(0,1)$ lar quyidagicha bo‘ladi:

$$X(t_1,t_2) = \begin{pmatrix} -7t_2 \\ -t_1 - 19t_2 \\ t_1 \\ 15t_2 \end{pmatrix}, \quad X_1(1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ va } X_2(0,1) = \begin{pmatrix} -7 \\ -19 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Umumiy yechimning fundamental yechimlar sistemasi orqali chiziqli kombinatsiyasi esa $X(t_1,t_2) = t_1 \cdot X_1(1,0) + t_2 \cdot X_2(0,1),\ t_1,t_2 \in R$.

Quyidagi bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi ning λ parametrga bog‘lagan holda sistemaning umumiy yechimi va fundamental yechimlar sistemasini toping.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 11x_2 - 2\lambda x_3 = 0. \end{cases}$$

Yechilishi: Berilgan sistemaning kengaytirilgan matritsasini yozamiz va uni elementar almashtirishlar yordami bilan zinasimon matritsa ko‘rinishiga keltiramiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 11 & -2\lambda & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 6-2\lambda & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 38-8\lambda & 0 \end{array}\right).$$

Quyidagi hollarni qaraymiz:

a) agar $38-8\lambda=0$, ya’ni $\lambda=\dfrac{19}{4}$ bo‘lsa, u holda $r(A)=r(B)=2$ va $n=3>2$ bo‘lib, sistema aniqmas, ya’ni Kroneker – Kapelli teoremasiga ko‘ra cheksiz ko‘p yechimga ega. $r(A)=2$ bo‘lgani uchun oxirgi hosil qilingan matritsaning birorta noldan farqli bo‘lgan ikkinchi tartibli minori, masalan $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ ni tanlaymiz. Bu minorning birinchi va ikkinchi ustunlari mos ravishda A matritsaning x_1 va x_2 o‘zgaruvchilari ustunlariga mos kelgani uchun bu o‘zgaruvchilar bazis o‘zgaruvchilar, qolgan x_3 esa ozod o‘zgaruvchi bo‘ladi. Mos ravishda hosil qilingan matritsadan sistemani yozamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ -4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Ikkinchi tenglamadan $x_2 = \dfrac{1}{2}x_3$ ni topib, uni sistemaning birinchi tenglamasiga qo‘ysak, u holda $x_1 = 2x_3$ ga ega bo‘lamiz. Agar ozod o‘zgaruvchiga $x_3 = t$ deb belgilash kiritsak, u holda sistemaning umumiy yechimi $X(t)$ va fundamental yechimlar sistemasi $X_1(1)$ quyidagicha bo‘ladi:

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ \dfrac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} \text{ va } X_1(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Umumiy yechimning fundamental yechimlar sistemasi orqali chiziqli kombinatsiyasi esa $X(t) = t \cdot X_1(1)$, $t \in R$.

b) agar $38 - 8\lambda \neq 0$, ya'ni $\lambda \neq \dfrac{19}{4}$ bo'lsa, u holda $r(A) = r(B) = 3$ va $n = 3$ bo'lib, sistema aniq, ya'ni Kroneker – Kapelli teoremasiga ko'ra yagona yechimga ega. Mos ravishda hosil qilingan matritsadan sistemani yozamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ -4x_2 + 2x_3 = 0, \\ (38 - 8\lambda)x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Demak, sistemaning umumiy yechimi faqat nol yechim, ya'ni $(0,0,0)^T$.

$$\begin{cases} \lambda^2 x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Yechilishi: Berilgan sistemaning kengaytirilgan matritsasini yozamiz va uni elementar almashtirishlar yordami bilan zinasimon matritsa ko'rinishiga keltiramiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda^2 & 3 & 2 & 0 \\ \lambda & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 1 & 4 & 0 \\ \lambda & -1 & 1 & 0 \\ \lambda^2 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 4 & 0 \\ -1 & \lambda & 1 & 0 \\ 3 & \lambda^2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 8+\lambda & 5 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 24 & -10 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 8+\lambda & 0 \\ 0 & -10 & \lambda^2 - 24 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 8+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + 2\lambda - 8 & 0 \end{array}\right)$$

Quyidagi hollarni qaraymiz:

a) agar $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = (\lambda - 2)(\lambda + 4) = 0$, ya'ni $\lambda = 2$ yoki $\lambda = -4$ bo'lsa, u holda $r(A) = r(B) = 2$ va $n = 3 > 2$ bo'lib, sistema aniqmas, ya'ni Kroneker – Kapelli teoremasiga ko'ra cheksiz ko'p yechimga ega.

Dastlab, $\lambda = 2$ bo'lsin. $r(A) = 2$ bo'lgani uchun oxirgi hosil qilingan matritsaning birorta noldan farqli bo'lgan ikkinchi tartibli minori, masalan $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ ni tanlaymiz. Bu minorning birinchi va ikkinchi ustunlari mos ravishda A matritsaning x_2 va x_3 o‘zgaruvchilari ustunlariga mos kelgani uchun bu o‘zgaruvchilar bazis o‘zgaruvchilar, qolgan x_1 esa ozod o‘zgaruvchi bo‘ladi. Mos ravishda hosil qilingan matritsadan sistemani yozamiz:

$$\begin{cases} x_2 + 4x_3 + 8x_1 = 0, \\ 5x_3 + 10x_1 = 0. \end{cases}$$

Ikkinchi tenglamadan $x_3 = -2x_1$ ni topib, uni sistemaning birinchi tenglamasiga qo‘ysak, u holda $x_2 = 0$ ga ega bo‘lamiz. Agar ozod o‘zgaruvchiga $x_1 = t$ deb belgilash kiritsak, u holda sistemaning umumiy yechimi $X(t)$ va fundamental yechimlar sistemasi $X_1(1)$ quyidagicha bo‘ladi:

$$X(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -2t \end{pmatrix} \text{ va } X_1(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Umumiy yechimning fundamental yechimlar sistemasi orqali chiziqli kombinatsiyasi esa $X(t) = t \cdot X_1(1)$, $t \in R$.

Endi, $\lambda = -4$ bo‘lgan holni qaraymiz. $r(A) = 2$ bo‘lgani uchun oxirgi hosil qilingan matritsaning birorta noldan farqli bo‘lgan ikkinchi tartibli minori, masalan $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ ni tanlaymiz. Bu minorning birinchi va ikkinchi ustunlari mos ravishda A matritsaning x_2 va x_3 o‘zgaruvchilari ustunlariga mos kelgani uchun bu o‘zgaruvchilar bazis o‘zgaruvchilar, qolgan x_1 esa ozod o‘zgaruvchi bo‘ladi. Mos ravishda hosil qilingan matritsadan sistemani yozamiz:

$$\begin{cases} x_2 + 4x_3 + 8x_1 = 0, \\ 5x_3 + 4x_1 = 0. \end{cases}$$

Ikkinchi tenglamadan $x_3 = -\frac{4}{5}x_1$ ni topib, uni sistemaning birinchi tenglamasiga qo‘ysak, u holda $x_2 = -\frac{24}{5}x_1$ ga ega bo‘lamiz. Agar ozod o‘zgaruvchiga $x_1 = t$ deb belgilash kiritsak, u holda sistemaning umumiy yechimi $X(t)$ va fundamental yechimlar sistemasi $X_1(1)$ quyidagicha bo‘ladi:

$$X(t)=\begin{pmatrix} t \\ -\frac{24}{5}t \\ -\frac{4}{5}t \end{pmatrix} \text{ va } X_1(1)=\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{24}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Umumiy yechimning fundamental yechimlar sistemasi orqali chiziqli kombinatsiyasi esa $X(t)=t\cdot X_1(1)$, $t\in R$.

b) agar $\lambda^2+2\lambda-8=(\lambda-2)(\lambda+4)\neq 0$, ya’ni $\lambda\neq 2$ va $\lambda\neq -4$ bo‘lsa, u holda $r(A)=r(B)=3$ va $n=3$ bo‘lib, sistema aniq, ya’ni Kroneker – Kapelli teoremasiga ko‘ra yagona yechimga ega. Mos ravishda hosil qilingan matritsadan sistemani yozamiz:

$$\begin{cases} x_2+4x_3+8x_1=0, \\ 5x_3+(\lambda+8)x_1=0, \\ (\lambda^2+2\lambda-8)x_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=0, \\ x_3=0, \\ x_1=0. \end{cases}$$

Demak, sistemaning umumiy yechimi faqat nol yechim, ya’ni $(0,0,0)^T$.

6 VA 7-MA'RUZALAR VEKTORLAR. VEKTOR USTIDA CHIZIQLI AMALLAR. CHIZIQLI BOG'LIQ VA CHIZIQLI ERKLI VEKTORLAR. BAZIS. IKKI VEKTORNING SKALYAR VA VEKTOR KO'PAYTMASI. UCH VEKTORNING ARALASH KO'PAYTMASI

R E J A

1. Vektorlar. Asosiy tushunchalar
2. Vektorlar ustida chiziqli amallar
3. Vektorlarni skalyar ko'paytirish
4. Skalyar ko'paytmaning bir qator eng sodda xossalari
5. Skalyar ko'paytmaning Dekart koordinatalar sistemasidagi formulasi
6. Ikki vektorning vektor ko'paytmasi
7. Vektorlarning aralash ko'paytmasi

Tayanch iboralar

Vektor, skalyar miqdor, kesma, yo'nalgan kesma, nol vektor, kolleniar, komplanar, modul, birlik vektor, chiziqli amal,

Skalyar ko'paytma, burchak kosinusi, manba, mexanika, siljuvchi kuch, ortogonal vektor, o'rin almashtirish qonuni, taqsimot qonuni, yo'naltiruvchi kosinuslar, o'ng uchlik, chap uchlik, uchburchak yuzi, parallelogram yuziga, parallelepiped, parallel.

Tekislikda vektorlar

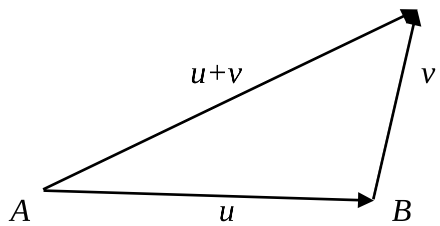
Tekislikda vektorni tartiblangan ikkita son $\bar{u} = (\bar{u}_1,\ \bar{u}_2)$ sifatida qarash mumkin, bunda $\bar{u}_1,\ \bar{u}_2 \in R$.

Ta'rif. Tekislik ikki $\bar{u} = (\bar{u}_1,\ \bar{u}_2)$ va $\bar{v} = (\bar{v}_1,\ \bar{v}_2)$ vektorlar uchun $\bar{u}_1 = \bar{v}_1$, $\bar{u}_2 = \bar{v}_2$ tenglik bajarilsa, bu vektorlar o'zaro teng deyiladi va $\bar{u} = \bar{v}$ kabi belgilanadi. [28]

Ta'rif. Tekislikda ikki $\bar{u} = (\bar{u}_1,\ \bar{u}_2)$ va $(\bar{v} = \bar{v}_1,\ \bar{v}_2)$ vektorlar yig'indisi quyidagi formula bilan aniqlanadi: [29]

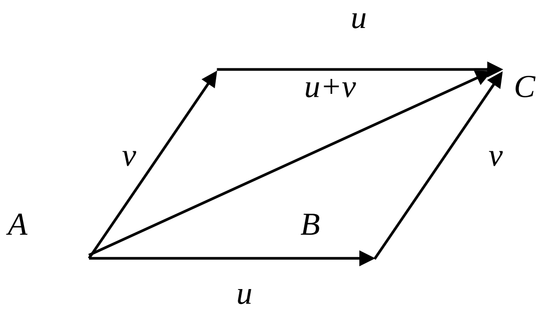
$$\bar{u} + \bar{v} = (\bar{u}_1,\ \bar{u}_2) + (\bar{v}_1,\ \bar{v}_2) = (\bar{u}_1 + \bar{v}_1,\ \bar{u}_2 + \bar{v}_2)\ .$$

$\bar{u}$ va $\bar{v}$ vektorlarni tekislikda $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{BC}$ yo'naltirilgan kesma orqali ifodalab, ular yig'indisini geometrik talqin qilish mumkin.



[28] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008
[29] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008

Keyingi chizmada $\bar{u}+\bar{v}=\bar{v}+\bar{u}$ tenglik o‘rinli bo‘lishi geometrik tarzda ko‘rsatilgan.



a) Vektorlar yig‘indisining xossalari.

b) Ixtiyoriy $\bar{u},\bar{v}\in R^2$ vektorlar uchun $\bar{u}+\bar{v}\in R^2$ munosabat o‘rinlidir.

c) Ixtiyoriy $\bar{u}, v\ w \in R^2$ vektorlar uchun assotsiativlik munosabatlari o‘rinlidir:

$$\bar{u}+(\bar{v}+w)=(\bar{u}+\bar{v})+w.$$

d) Ixtiyoriy $\bar{u}\in R^2$ vektor uchun $\bar{u}+0=\bar{u}$ munosabat o‘rinli, bunda $0=(0;0)\in R^2$.

e) Ixtiyoriy $\bar{u}\in R^2$ vektor uchun shunday $\bar{v}\in R^2$ vektor mavjudki, bunda $\bar{u}+\bar{v}=0$ munosabat bajariladi.

f) Ixtiyoriy $\overline{uv}\in R^2$ vektorlar uchun kommutativlik xossasi o‘rinli:

$$\bar{u}+\bar{v}=\bar{v}+\bar{u}$$

Isboti. $\bar{u}=(\bar{u}_1,\ \bar{u}_2)$, $(\bar{v}=\bar{v}_1,\ \bar{v}_2)$, $(w=w_1,\ w_2)$, bunda $\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \ \bar{v}_1,\ \bar{v}_2,\ w_1,\ w_2\in R$

a) $\bar{u}_1+\bar{v}_1,\ \bar{u}_2+\bar{v}_2\in R.$

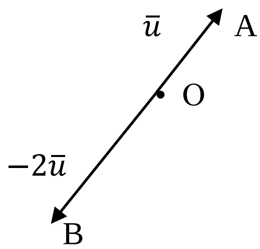
b) $\bar{u}+(\bar{v}+w)=(\bar{u}_1,\ \bar{u}_2)+(\bar{v}_1+w_1,\bar{v}_2+w_2\ )=$

$$=(\bar{u}_1+(\bar{v}_1+w_1),\bar{u}_2+(\bar{v}_2+w_2=((\bar{u}_1+\bar{v}_1)+w_1,(\bar{u}_1+\bar{v}_2)+w_2=$$
$$=(\bar{u}_1+\bar{v}_1,\bar{u}_2+\bar{v}_2)+(w_1,w_2)=(\bar{u}+\bar{v})+w.$$

Ta’rif. R^2 tekislikda ixtiyoriy $\bar{u}=(\bar{u}_1,\ \bar{u}_2)$ vektor va skalyar son $c\in R$ uchun ko‘paytmani quyidagicha aniqlaymiz[30]:

$$c\bar{u}=c(\bar{u}_1,\bar{u}_2)=(c\bar{u}_1,c\bar{u}_2).$$

4.2.1-misol. Faraz qilaylik $\bar{u}=(2,1)$. U holda $-2\bar{u}=(-4,-2)$ bo‘ladi. Chizmada $\bar{u}$ va $-2\bar{u}$ orqali vektorlarga $\overrightarrow{OA}$ va $\overrightarrow{OB}$ vektorlar mos qo‘yilgan.



[30] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008

Xossalari.

Vektorni skalyar songa ko‘paytmasi

a) Ixtiyoriy $c \in R$ va $\bar{u} \in R^2$ uchun $c\bar{u} \in R^2$ munosabat o‘rinli.
b) Ixtiyoriy skalyar $c \in R$ va $\bar{u}, \bar{v} \in R^2$ vektorlar uchun

$c(\bar{u} + \bar{v}) = c\bar{u} + c\bar{v}$ munosabat o‘rinli.

c) Ixtiyoriy $a, b \in R$ va $\bar{u} \in R^2$ uchun $(a + b) \cdot \bar{u} = a\bar{u} + a\bar{v}$ munosabat o‘rinli.
d) Ixtiyoriy $a, b \in R$ va $\bar{u} \in R^2$ uchun $(ab)\bar{u} = a(b\bar{u})$ munosabat o‘rinli.
e) Ixtiyoriy $\bar{u} \in R^2$, vektor uchun $1 \cdot \bar{u} = \bar{u}$ munosabat o‘rinli.

Ta’rif. Xar bir $\bar{u} = (\bar{u}_1,\ \bar{u}_2)$ vektor uchun uning normasi deb ataluvchi manfiy bo‘lmagan sonni quyidagi formula bilan aniqlaymiz[31]:

$$\|\bar{u}\| = \sqrt{\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2}$$

Eslatma (1). Vektorning normasi uning uzunligini bildiradi, bu esa mashhur Pifagor teoremasidan kelib chiqadi.

Eslatma (2). Faraz qilaylik, R^2 tekislikda ikkita P va Q nuqtalar berilgan bo‘lsin. P va Q nuqtalar orasidagi $d(P, Q)$ masofani hisoblash uchun biz birinchi $\overrightarrow{PQ}$ vektorni aniqlaymiz, bu vektor $\overrightarrow{PQ} = (\bar{v}_1 - \bar{u}_1, \bar{v}_2 - \bar{u}_2)$ ga teng.

P va Q nuqtalar orasidagi masofa $d(P, Q)$ $\overline{PQ}$ vektorning normasiga teng.

$$d(P, Q) = \sqrt{(\bar{v}_1 - \bar{u}_1)^2 + (\bar{v}_2 - \bar{u}_2)^2} = \|\overline{PQ}\|$$

Eslatma (3). $\bar{u} \in R^2$ vektor va $c \in R$ skalyar son uchun $\|c\bar{u}\| = |c| \cdot \|\bar{u}\|$ tenglikni bajarilishiga ishonch hosil qilish uncha qiyin emas.

Ta’rif. Agar $\bar{u} \in R^2$ vektor uchun $\|\bar{u}\| = 1$ tenglik bajarilsa, $\bar{u}$ vektor ***birlik*** vektor deyiladi.

4.2.2-misol. $(3,4)$ vektorning normasi 5 ga teng.

4.2.3-misol. $A(6.3)$ va $B(9.7)$ nuqtalar orasidagi masofani hisoblaymiz:

$$\|\overline{AB}\| = \sqrt{(9-6)^2 + (7-3)^2} = 5.$$

4.2.4-misol. $(\bar{u}) = (0,1)$ va $\bar{v} = (-1,0\ )$ birlik vektorlardir.

[31] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008

$\bar{u} = (1.1)$ vektorning yo‘nalishi $\bar{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ birlik vektor yo‘nalishi bilan bir xil.

4.2.6-misol. R^2 tekislikdagi xar qanday birlik vektor $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ koordinatalarga ega, $0 \leq \theta < \pi$.

Ikki vektorlarning skalyar ko‘paytmasi

Vektorlar ustida hozircha bajarilgan qo‘shish, ayrish, vektorni songa ko‘paytirish amallari chiziqli amallar deyilib, vektorlar ustida bunday ammallar bajarish natijasida yana vektor hosil bo‘ladi.

1-Ta‘rif. Ikki $\vec{u}$ va $\vec{v}$ vektorning skalyar ko‘paytmasi deb, bu vektorlar uzunliklarining ular orasidagi burchak kosinusi bilan ko‘paytmasiga teng bo‘lgan songa aytiladi va $(\vec{u}, \vec{v})$ yoki $\vec{u} \cdot \vec{v}$ bilan belgilanadi.[32]

Ta‘rifga ko‘ra $\vec{u}$

$$(\vec{u}, \vec{v}\,) = \vec{u} \cdot \vec{v} \ = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}\,| \cdot \cos\varphi \qquad (6.1)$$

Skalyar ko‘paytma tushunchasining manbai mexanikadir. Haqiqatdan, agar $\vec{u}$ ozod vektor qo‘yilgan nuqta $\vec{v}$ vektorning boshidan oxiriga siljuvchi kuchni tasvirlasa, bu kuch bajargan ***A*** ish ushbu tenglik bilan aniqlanadi:

$$A = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}\,| \cdot \cos\varphi$$

Agar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ko‘paytmani $|\vec{u}| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \cos\varphi$ ko‘rinishda yozib,

$|\vec{v}\,| \cdot \cos\varphi = Pr_{\vec{u}}\vec{v}$ ekanini nazarga olsak, $\vec{u} \cdot \vec{v} \ = |\vec{u}| \cdot Pr_{\vec{u}}\vec{v}$ ni hosil qilamiz.

$|\vec{u}| \cdot \cos\varphi = Pr_{\vec{v}}\,\vec{u}$ ekanligini e’tiborga olsak, $\vec{u} \cdot \vec{v} \ = |\vec{v}\,| \cdot Pr_{\vec{v}}\,\vec{u}$ni hosil qilamiz.

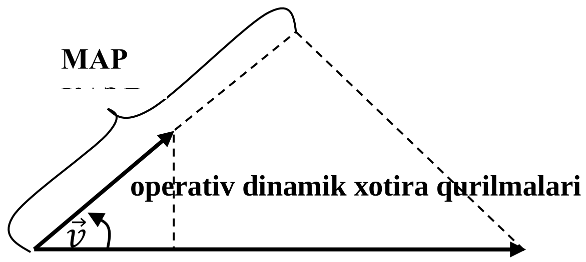
Demak,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot Pr_{\vec{u}}\vec{v} = |\vec{v}| \cdot Pr_{\vec{v}}\vec{u} \qquad (6.2)$$

formulalar o‘rinli. Boshqacha aytganda, ikki vektorning skalyar ko‘paytmasi ulardan birining uzunligi miqdori bilan ikkinchisining shu vektor yo‘nalishidagi proeksiyasi ko‘paytmasiga

[32] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008

teng.



1-chizma.

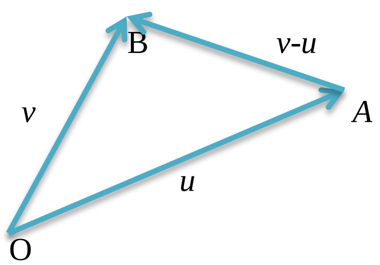
Agar ikki vektor orasidagi burchak $\frac{\pi}{2}$ ga teng bo‘lsa, ular ortogonal vektorlar deyiladi.

Skalyar ko‘paytmaning Dekart koordinatalar sistemasidagi formulasi

Faraz qilaylik R^2 tekislikda 0 dan farqli $\vec{u}$ va $\vec{v}$ vektorlar berilgan bo‘lsin, $\vec{u}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ va $\theta \in [0, \pi]$ bu vektorlar orasidagi burchak. U holda

$$\|u\|\|v\|cos\theta = u_1v_1 + u_2v_2$$

Isbot. Tekislikda $\vec{u}$ va $\vec{v}$ vektorlarni boshini O nuqtaga keltirib $\overrightarrow{OA}$ va $\overrightarrow{OB}$ vektorlarni yasaymiz. U holda chizmada ko‘rinadiki $\vec{v} - \vec{u}$ ayirma $\overrightarrow{AB}$ bilan aniqlanadi.



Ko‘sinuslar teoremasiga ko‘ra $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - 2\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}\cos\theta$

Boshqa tomondan

$$\|v-u\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta$$

Shunday qilib

$$\|u\|\|v\|\cos\theta = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|v-u\|^2)$$

$$\frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - (v_1 - u_1)^2 - (v_2 - u_2)^2) = u_1v_1 + u_2v_2$$

Skalyar ko‘paytmaning bir qator eng sodda xosalarini keltiramiz.

(a) $u \cdot v = v \cdot u$

(b) $u \cdot (v + w)$=$(u \cdot v)$+ $(w \cdot u)$

(c) c·$(u \cdot v)$=(cu)· $v)$=$u \cdot (cv)$

(d) $u \cdot u \geq 0$

(e) $u \cdot u = 0$ Agar $u = 0$ bo‘lganda.

Quyidagicha belgilaymiz $u = (u_1 u_2), v = (v_1 v_2)$ va $w = (w_1, w_2)$ bunda $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \in R$

$$u \cdot (v + w) = u_1 \cdot (v_1 + w_1) + u_2 \cdot (v_2 + w_2) = (u_1 v_1 + u_2 v_2) + (u_1 w_1 + u_2 w_2) = u \cdot v + u \cdot w$$

Ikki vektorning vektor ko‘paytmasi.

Vektor ko‘paytma ta'rifini kiritishdan avval, biz uchta o‘zaro nokomplanar vektor uchligining fazoda joylashishi bilan bog‘liq bo‘lgan zarur bir tushunchani kiritamiz. Shuni aytib o‘tamizki, keyingi punktlarda yuritiladigan mulohazalar faqat uch o‘lchovli fazoga doir bo‘ladi.

2-Ta’rif. Agar komplanar $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$vektorlar boshi umumiy nuqtaga keltirilgandan so‘ng$\vec{c}$vektorning oxiridan (uchidan) qaraganda$\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$vektoga qarab π dan kichik burchakka burish soat strelkasiga teskari bo‘lsa, bu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ uchlik ***o‘ng uchlik***, aks holda ***chap uchlik*** deyiladi. Chap va o‘ng uchlikni tashkil etadigan uchlik tartiblangan uchlik deb yuritiladi. Biz o‘ng uchlikdan foydalanamiz[33].

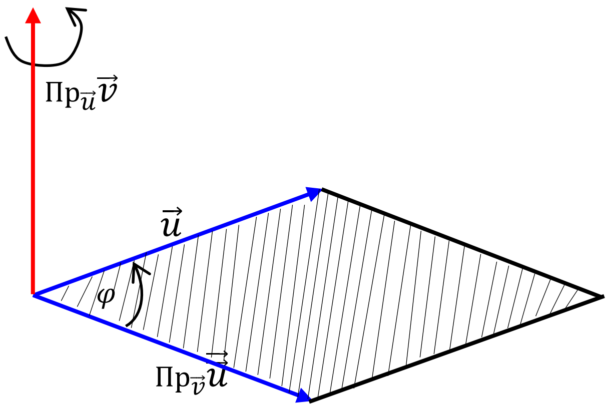
3-Ta’rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$vektorlarning vektor ko‘paytmasi deb quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan $\vec{c}$vektorga aytiladi[34].

1) $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikulyar (ortogonal);

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$; (7.14)

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$vektorlarning tartiblangan uchligi o‘ng uchlikni tashkil etadi (3-chizma).

[33] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008
[34] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008



3-chizma.

(Bu ta'rifda $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ deb faraz qilinadi) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko‘paytmasi

$\vec{a} \times \vec{b}$ yoki $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ ko‘rinishida yoziladi. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo‘lmasa, u holda $|\vec{c}| = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ son $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga yasalgan parallelogrammning yuziga teng bo‘ladi. Shunday qilib,

$$S = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}) = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|.$$

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo‘lsa, u holda $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, chunki 0 va π da $\sin(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Vektor ko‘paytma quyidagi qonunlarga bo‘ysunadi[35].

1. Vektor ko‘paytmada ko‘paytuvchilar o‘rnini almashtirilsa, uning ishorasi o‘zgaradi, ya’ni
$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$
2. Vektor ko‘paytma skalyar ko‘paytuvchiga nisbatan gruppalash qonuniga bo‘ysunadi, ya’ni
$$\vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$
3. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yig‘indisi bilan $\vec{c}$ vektorning vektor ko‘paytmasi taqsimot qonuniga bo‘ysunadi, ya’ni
$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c}$$

[35] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008

Endi vektor ko‘paytmaning koordinata formada (koordinatalar orqali) yozilishini ko‘rib o‘tamiz. Avvalo koordinata o‘qlarning$\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ortlar uchun quyidagi munosabatlar o‘rinli bo‘lishini eslatib o‘tamiz:

$$\begin{array}{lll} \vec{\imath} \times \vec{\imath} = 0\,, & \vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}\,, & \vec{\imath} \times \vec{k} = -\vec{\jmath}, \\ \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = 0, & \vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}\,, & \vec{\jmath} \times \vec{\imath} = -\vec{k}\,, \\ \vec{k} \times \vec{k} = 0\,, & \vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}\,, & \vec{k} \times \vec{\jmath} = -\vec{\imath}\,. \end{array} \qquad (6.3)$$

Buni qisqacha quyidagi sxema orqali ham berish mumkin.

$$\overrightarrow{\vec{\imath} \times \vec{\jmath} \times \vec{k} \times \vec{\imath} \times \vec{\jmath}} \longrightarrow \ +$$

$$- \ \overleftarrow{\vec{\imath} \times \vec{\jmath} \times \vec{k} \times \vec{\imath} \times \vec{\jmath}} \longleftarrow \quad (7.16)$$

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar Dekart koordinatalar sistemasida mos ravishda$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ва $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ koordinatalarga ega bo‘lsin, ya’ni

$$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\} \Longrightarrow \vec{a} = x_1 \cdot \vec{\imath} + y_1 \cdot \vec{\jmath} + z_1 \cdot \vec{k}$$

$$\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\} \Longrightarrow \vec{b} = x_2 \cdot \vec{\imath} + y_2 \cdot \vec{\jmath} + z_2 \cdot \vec{k}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ ko‘paytma uchun ormulaga qaraylik. (6.3) ni hamda vektor ko‘paytmaning xossalarini e’tiborga olib topamiz:

$$\vec{a} \times \vec{b} = x_1 x_2 \cdot (\vec{\imath} \times \vec{\imath}) + y_1 x_2 \cdot (\vec{\jmath} \times \vec{\imath}) + z_1 x_2 \cdot (\vec{k} \times \vec{\imath}) + x_1 y_2 \cdot (\vec{\imath} \times \vec{\jmath}) +$$

$$+ y_1 y_2 \cdot (\vec{\jmath} \times \vec{\jmath}) + z_1 y_2 \cdot (\vec{k} \times \vec{\jmath}) + x_1 z_2 \cdot (\vec{\imath} \times \vec{k}) + y_1 z_2 \cdot (\vec{\jmath} \times \vec{k}) + z_1 z_2 \cdot (\vec{k} \times \vec{k})$$

Yoki

$$\vec{a} \times \vec{b} = -y_1 x_2 \cdot \vec{k} + z_1 x_2 \cdot \vec{\jmath} + x_1 y_2 \cdot \vec{k} - z_1 y_2 \cdot \vec{\imath} - x_1 z_2 \cdot \vec{\jmath} + y_1 z_2 \cdot \vec{\imath} =$$

$$= (y_1 z_2 - z_1 y_2) \cdot \vec{\imath} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \cdot \vec{\jmath} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \cdot \vec{k}\,.$$

Bir xil ortlarga ega bo‘lgan qo‘shiluvchilarni gruppalab yozamiz:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\cdot\vec{\imath}+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\cdot\vec{\jmath}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\cdot\vec{k}\,.$$

Buni yana ushbu ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad (6.4)$$

bu formuladan quyidagi ikki tasdiq kelib chiqadi[36].

1. (ikki vektorning kolleniar bo‘lish sharti). $\vec{a}$ va $\vec{b}$vektorlarkolleniarbo‘lishiuchun

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$$

bo‘lishi zarur va yetarli.

2. (uchburchak yuzining formulasi).$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga uchburchak yasalgan bo‘lsin, u holda bu uchburchakning yuzi:

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{1}{2}\cdot mod\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad (6.5)$$

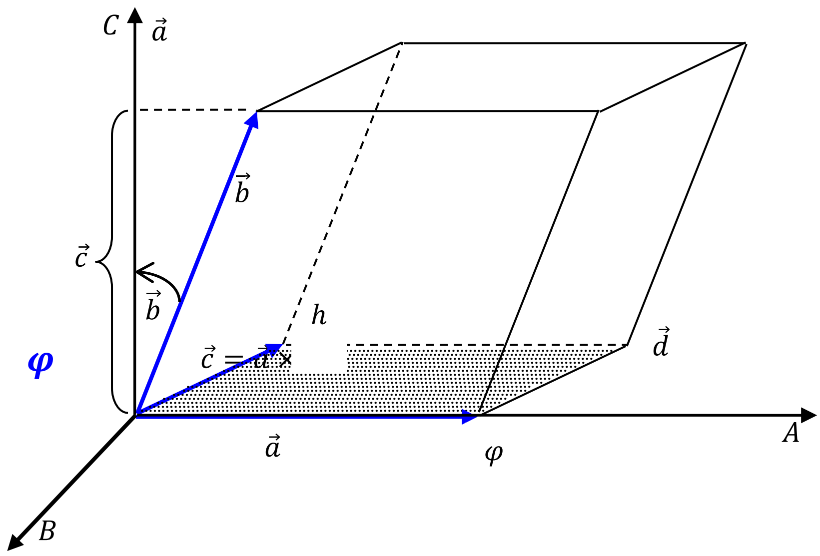
1. Vektorlarning aralash ko‘paytmasi.

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar tartiblangan uchligining aralash ko‘paytmasi deb, $\vec{a}\times\vec{b}$ vektor bilan $\vec{c}$ vektorning skalyar ko‘paytmasiga teng songa aytiladi va $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ yoki $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\cdot\vec{c}$ kabi belgilanadi.

Aralash ko‘paytmaning miqdori nuqtai nazardan ma'nosini tekshiramiz. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$vektorlar komplanar bo‘lmagan vektorlar bo‘lsin. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{d}$deb belgilasak, $\vec{d}$ vektor miqdori $\vec{a}$va $\vec{b}$ vektorlardan yasalgan parallelogram yuziga teng (4-chizma) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{d}\cdot\vec{c}$ bo‘lgani uchun skalyar ko‘paytma ta’rifiga ko‘ra $\vec{d}\cdot\vec{c}=\left|\vec{d}\right|\cdot Pr_{\vec{d}}\vec{c}=\left|\vec{d}\right|\cdot h$.

Ammo $Pr_{\vec{d}}\vec{c}$ miqdorning moduli, ya’ni $\left|Pr_{\vec{d}}\vec{c}\right|=h$son $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarga yasalgan parallelepipedning balandligini anglatadi.

[36] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008



4-chizma.

Aralash ko‘paytmaning absolyut qiymati shu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$vektorlarga yasalgan parallelepiped hajmiga teng, ya’ni

$$V_{paralelopiped} = \left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right| .$$

Endi aralash ko‘paytmaning ba’zi xossalarini keltiramiz[37].

1) Ko‘paytmada ikki qo‘shni vektorning o‘rinlari almashtirilsa, aralash ko‘paytmaning ishorasi teskariga almashadi, ya'ni quyidagi tengliklar o‘rinli:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = -(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c};$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = -(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b};$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = -(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}.$$

Bu tengliklarning har biri bevosita aralash ko‘paytma ta'rifi va geometrik ma’nosidan foydalanib isbotlanadi.

2) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$vektorlarning o‘rinlari “doiraviy siklda” almashtirilsa, aralashko‘paytma o‘z ishorasini o‘zgartirmaydi, ya'ni ushbu tengliklar o‘rinli:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}.$$

Haqiqatan ham, bu holda hosil bo‘ladigan vektorlar asosiy sistema vektorlari $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$bilan hamma vaqt bir xil tartiblangan bo‘ladi. Bunda yuqoridagi tengliklarning kelib chiqishini ko‘rish qiyin emas.

[37] WW L Chen, Linear Algebra, London, 2008

3) Агар $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlardan istalgan ikkitasi bir-biriga teng yoki parallel (kollinear) bo‘lsa, ularning aralash ko‘paytmasi nolga teng bo‘ladi.

4) Agar $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar o‘zaro komplanar vektorlar bo‘lsa, ularning aralash ko‘paytmasi nolga teng.

Endi aralash ko‘paytmani $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning koordinatalari orqali ifodalashga o‘tamiz. Dekart koordinatalar sistemasiga nisbatan $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarning yoyilmasi berilgan bo‘lsin:

$$\vec{a}\{x_1, y_1, z_1\} \Rightarrow \vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$
$$\vec{b}\{x_2, y_2, z_2\} \Rightarrow \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$
$$\tilde{n}\{x_3, y_3, z_3\} \Rightarrow \vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$$ U holda

$$(\vec{a}\times\vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{e}_1 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{e}_3.$$

Shuninguchun

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + y_3\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Shunday qilib, uch vektorning aralash ko‘paytmasi uchinchi tartibli determinant orqali ifodasi ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\Delta = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (7.19)$$

Formuladan kelib chiqadigan ba'zi natijalarni keltiramiz.

1-Natija . $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar komplanar bo‘lishi uchun

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6.6)$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarli.

2-Natija Ikki vektorning o‘rnini almashtirish natijasida aralash ko‘paytmaning ishorasi o‘zgaradi.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=-(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}.$$

3-Natija. Agar $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$, $\overrightarrow{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$ bo‘lib, bu vektorlar komplanar bo‘lmasa, u holda ularga qurilgan parallelepiped hajmi $V=\pm\Delta$ formula o‘rinli. Unda musbat ishora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ o‘ng uchlikni, minus ishora shu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ chap uchlikni tashkil etganda olinadi.

8-MAVZU TEKISLIKDA TO‘G‘RI CHIZIQ. TO‘G‘RI CHIZIQ TENGLAMALARI. TO‘G‘RI CHIZIQLAR ORASIDAGI BURCHAK. TO‘G‘RI CHIZIQLARNING PARALELLIK VA PERPENDIKULYARLIK SHARTLARI

REJA

1. Bitta nuqtasi va yo‘naltiruvchi vektori bilan to‘g‘ri chiziq tenglamasi
2. Ikki nuqtasi bilan berilgan to‘g‘ri chiziq
3. To‘g‘ri chiziqning kesmalar bo‘yicha tenglamasi
4. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi
5. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak
6. To‘g‘ri chiziqlarning parallelligi va perpendikulyarligi

1. Bitta nuqtasi va yo‘naltiruvchi vektori bilan to‘g‘ri chiziq tenglamasi

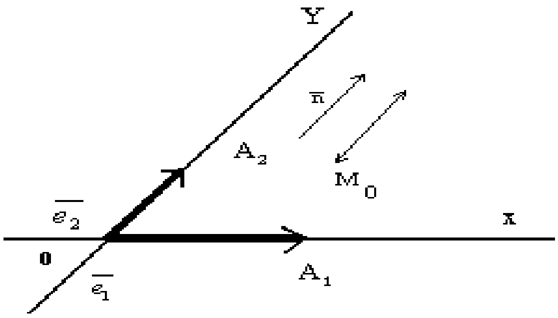
To‘g‘ri chiziq ta‘riflanmaydigan tushuncha. To‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan ixtiyoriy nol bo‘lmagan vektor to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori deyiladi.Tekislikdagi affin koordinatalar sistemasi $(0,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$berilgan bo‘lsin. Tekislikdagi d to‘g‘ri chiziq o‘zining $N_0(x_0,u_0)$ nuqtasi va yo‘naltiruvchi $\vec{a}\,(a_1,a_2)$ vektorning berilishi bilan to‘liq aniqlanadi. d to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozaylik, ma’lumki tekislikdagi biror N(x,y) nuqta d to‘g‘ri chiziqda yotishi uchun $\overrightarrow{M_0N}$ vektor $\vec{a}$ vektorga kolleniar bo‘lishi zarur va yetarlidir.

$$\overrightarrow{M_0N}=\lambda\vec{a} \tag{13.1}$$

bundan

$$x=x_0+\lambda a_1; \qquad y=y_a+\lambda a_2 \tag{13.2}$$

λ - haqiqiy soni parametr deb aytiladi.



8.1-chizma

(13.1) tenglama d to‘g‘ri chiziqning **vektor parametrik tenglamasi** (13.2) tenglama d to‘g‘ri chiziqning **parametrik tenglamasi** deyiladi.

(13.2) tenglamadan ushbu,

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2} \tag{13.3}$$

tenglamani hosil qilamiz. (13.3) ni to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi. Undan

$$a_2(x-x_0)-a_1(y-y_0)=0$$

$$a_2x-a_1y+(a_1y_0-a_2x_0)=0 \tag{13.4}$$

Bu yerda a_1 va a_2 lardan kamida bittasi noldan farqli, shu sababli (13.4) birinchi darajali tenglamadir.

Shuning bilan, ushbu muhim xulosaga keldik:

Har qanday to‘g‘ri chiziq birinchi tartibli algebraik chiziqdir.

2. Ikki nuqtasi bilan berilgan to‘g‘ri chiziq

Affin koordinatalar sistemasiga nisbatan d to‘g‘ri chiziqning $M_1(x_1,y_1)$ va $M_2(x_2,y_2)$ nuqtalari berilgan bo‘lsin. M_1M_2=d to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozaylik.

d to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori deb $\overrightarrow{M_1M_2}$ $(x_2–x_1;\ y_2-y_1)$ vektorni olsak, (13.3) ga asosan d to‘g‘ri chiziq tenglamasi ushbu

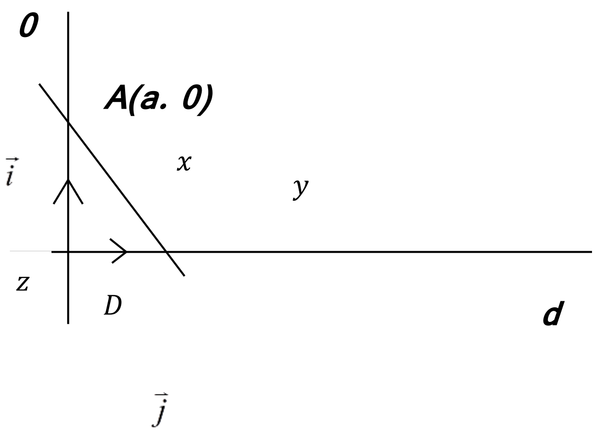
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (13.5)$$

tenglama bilan ifodalanadi. Bu berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

3. To‘g‘ri chiziqning kesmalar bo‘yicha tenglamasi

To‘g‘ri chiziq OX o‘qini A(a,0) nuqtada OY o‘qini B(0,b) nuqtada kessin, u holda ikki nuqtadan o‘tgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi (13.5) dan foydalansak (39-chizma)

$$\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}, \qquad \text{yoki} \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$



8.2-chizma

(13.5) da a,b sonlar to‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalari ni to‘g‘ri chiziqning kesmalar bo‘yicha tenglamasi deyiladi.

4. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi

Ordinata o‘qini kesuvchi d to‘g‘ri chiziq olaylik. Bu to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori $\vec{a}\,(a_1,a_2)$ bo‘lsa, $\vec{a}$ va $\vec{e}_2$ vektorlar kolleniar bo‘lmaydi, shuning uchun $a_1 \neq 0$.

5. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasini

$$Ax + By + C = 0 \qquad (13.6)$$

tekshiraylik, ya'ni A,B,C larning ba'zi birlari nolga aylanganda to'g'ri chiziqning koordinatalar sistemasiga nisbatan joylanishini o'rganaylik:

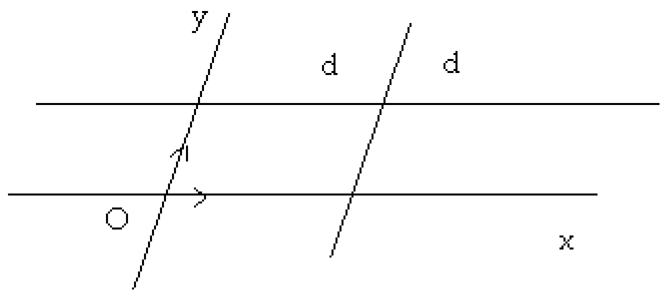
1. C = 0 bo'lsa, (13.6) tenglama ushbu Ax + By = 0 ko'rinishni oladi, 0 nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiradi, demak, to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi va aksincha O∈d bundan $A{\cdot}0+B{\cdot}0+C = 0 \Rightarrow C = 0$

Shunday qilib (13.6) to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tishi uchun C=0 bo'lishi zarur va yetarlidir.

2. A=0 bo'lsin, (13.6) $\Rightarrow By+C=0$. *R(-B,0).* Bu yo'naltiruvchi vektor e_1 koordinat vektorga kollinear, demak, d||OX,

$$y=-\frac{C}{B},\ -\frac{C}{B}=b,\ y=b.$$

Shunday qilib, y = b tenglama ordinata o'qidan b kesma ajratgan va ox o'qiga parallel to'g'ri chiziq (8.3-chizma).



8.3-chizma

Agar $A=0,\ C=0 \Rightarrow By=0 \Rightarrow y=0$, demak, *d* to'g'ri chiziq *OX* o'qi bilan ustma-ust tushadi.

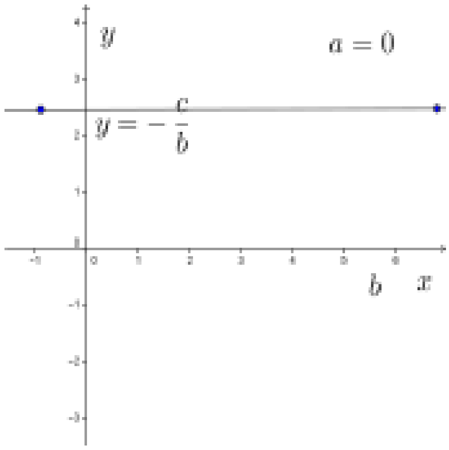
4. B = 0 bo'lsa, bunda 2-holdagiga o'xshash d to'g'ri chiziq OY o'qqa parallel joylashadi (8.3-chizma) va bu holda C=0 bo'lsa, $(Ax=0 \Rightarrow x=0)$ *d* to'g'ri chiziq OY o'qi bilan ustma-ust tushadi.

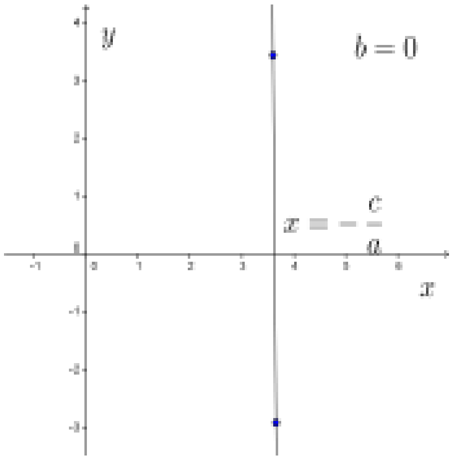
To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi quyidagicha:

$$ax+by+c=0 \qquad (*)$$

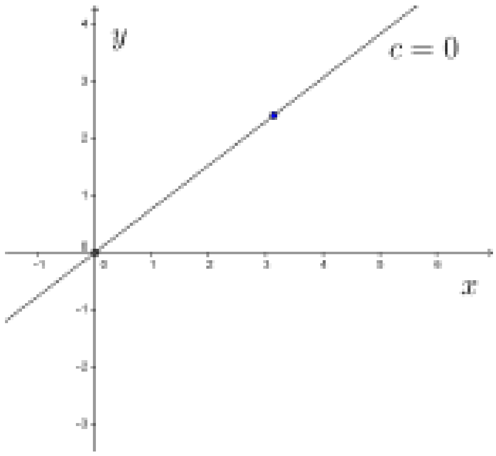
Bu yerda a,b,c berilgan sonlar. $(x;y)$ to'g'ri chiziqqa tegishli nuqta.Unga mos to'g'ri chiziqning berilish usullarini qarab chiqamiz.

1. $a=0$. U holda (*) dan $y=-\dfrac{c}{b}$ kelib chiqadi. Ya'ni bu to'g'ri chiziq x o'qiga parallel bo'ladi. (8.4 chizma)
2. $b=0$. U holda (*) dan $x=-\dfrac{c}{a}$ kelib chiqadi. Ya'ni bu to'g'ri chiziq y o'qiga parallel bo'ladi. (16.3 chizma)
3. $c=0$. U holda (*) dan $ax+by=0$ kelib chiqadi. Ya'ni bu to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi. (8.4 chizma)





8.4-chizma



8.5-chizma

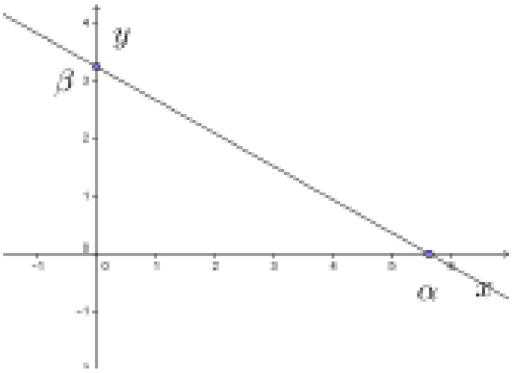
Faraz qilaylik $a \neq 0$ $b \neq 0$ va $c \neq 0$ bo‘lsin. $ax + by + c = 0$ tenglikdan $ax + by = -c$ kelib chiqadi. Tenglikning ikkala tomonini $-c$ ga bo‘lamiz.

$$\frac{ax}{-c} + \frac{by}{-c} = 1$$

Agar $-\frac{c}{a} = \alpha$ va $-\frac{c}{b} = \beta$ belgilashlarni kiritsak;

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1 \qquad (**)$$

(**) tenglikka to‘g‘ri chiziqning kesmalar bo‘yicha tenglamasi deyiladi. Bu yerda α va β modul jihatdan to‘g‘ri chiziq koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalar uzunligiga teng. (8.5 chizma)



8.6-chizma

To‘g‘ri chiziq parametrik tenglama bilan ham beriladi.

$$x = at + b\,,\ y = ct + d \qquad -\infty < t < \infty \ (***)$$

Misollar:

1. a, b, c ning qanday qiymatlarida $ax + by + c = 0$ to‘g‘ri chiziq x o‘qining musbat (manfiy) yo‘nalishini kesib o‘tadi.
2. a, b, c ning qanday qiymatlarida $ax + by + c = 0$ to‘g‘ri chiziq koordinatalar tekisligining birinchi choragini kesib o‘tmaydi.
3. Ushbu $ax + by + c = 0$ va $ax - by + c = 0$ tenglamalar bilan berilgan to‘g‘ri chiziqlar x o‘qiga nisbatan simmetrik joylashganligini ko‘rsating.

Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak

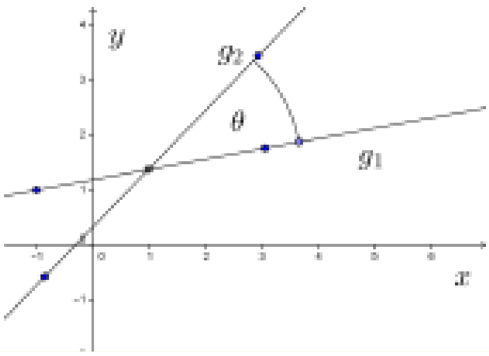
Faraz qilaylik bizga y o‘qiga parallel bo‘lmagan g_1 va g_2 to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsin. $\theta(g_1; g_2)$ orqali g_1 va g_2 to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni belgilaymiz.

To‘g‘ri chiziqlar orasidagi o‘tkir burchak uchun quyidagi xossalar o‘rinli.

(1) $\theta(g_1; g_2) = \theta(g_2; g_1)$

(2) $\theta(g_1; g_2) = 0$ faqat va faqat shu holdaki to‘g‘ri chiziqlar parallel yoki ustma-ust tushsa.

(3) $\theta(g_3; g_1) = \theta(g_3; g_2) + \theta(g_2; g_1)$



8.7- chizma

Aytaylik

$$ax+by+c=0$$

to‘g‘ri chiziq y o‘qiga parallel bo‘lmagan to‘g‘ri chiziq bo‘lsin. Tenglamani ikkala tomonini $\frac{1}{b}$ ga ko‘paytirib, so‘ngra $-\frac{a}{b}=k$ va $-\frac{c}{b}=l$ belgilashlarni inobatga olsak, biz quyidagi

$$y=kx+l \qquad (*)$$

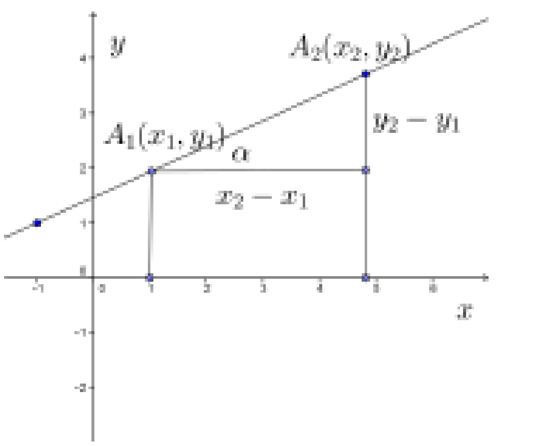
formulaga ega bo‘lamiz.

(*) formuladagi k va l koeffisientlar aniq geometric ma’noga ega:
k - to‘g‘ri chiziqning x o‘qi bilan tashkil qilgan α burchakning tangensidir.
l - to‘g‘ri chiziqning y o‘qi bilan kesishishidan hosil bo‘lgan kesmadir.

Haqiqatdan ham, aytaylik $A_1(x_1;y_1)$ va $A_2(x_2;y_2)$ nuqtalar to‘g‘ri chiziqning ikkita nuqtasi bo‘lsin.(8.8 chizma)

$$\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{(kx_2+l)-(kx_1+l)}{x_2-x_1}=k$$

To‘g‘ri chiziq y o‘qini ($x=0$ ekanidan $y=k\cdot 0+l=l$ kelib chiqadi) $(0,l)$ nuqtada kesadi.



8.8- chizma

Faraz qilaylik bizga xy tekisligida ikkita

$$y=k_1x+l_1 \text{ va } y=k_2x+l_2$$

to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsin.
θ orqali bu ikki chiziq orasidagi burchakni belgilaymiz. Agar α_1 va α_2 lar mos ravishda yuqoridagi to‘g‘ri chiziqlar bilan x o‘qi orasidagi burchaklarni belgilasak, (3) xossaga ko‘ra

$$\theta=\alpha_2-\alpha_1$$

tenglik o‘rinli.

$$k_1=\tan\alpha_1, k_2=\tan\alpha_2$$

ekanidan, biz

$$\tan\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} \qquad (**)$$

formulaga ega bo‘lamiz. Bu yerda $|\theta| < \pi$

Misollar:

1. Ikkita $ax + by + c = 0$ va $bx - ay + c' = 0$ to‘g‘ri chiziqlar to‘g‘ri burchak ostida kesishishini ko‘rsating.
2. $y = x\cot\alpha$ $(-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0)$ to‘g‘ri chiziqning x o‘qi bilan tashkil qilgan burchagi nimaga teng?
3. Ushbu $x + 2y = 0$, $2x + y = 0$ va $x + y = 1$ tenglamalar bilan berilgan to‘g‘ri chiziqlar kesishishidan hosil bo‘lgan uchburchakning ichki burchaklarini toping.
4. Ushbu to‘rtta , $\pm ax \pm by + c = 0$ $(a, b, c \neq 0)$ to‘g‘ri chiziqlar kesishishidan hosil bo‘lgan to‘rtburchakning romb ekanini ko‘rsating va koordinata o‘qlari uning diagonallari ekanini isbotlang.

To‘g‘ri chiziqlarning parallelligi va perpendikulyarligi.

Faraz qilaylik bizga xy tekisligida ikkita

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ va } a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsin.

Ularning ko‘rinishini

$$y = k_1x + l_1 \text{ va } y = k_2x + l_2$$

kabi ham yozish mumkin. Bu yerda $k_i = -\frac{a_i}{b_i}$ va $l_i = -\frac{c_i}{b_i}$ $i = \overline{1,2}$

1. Tabiiyki, agar berilgan to‘g‘ri chiziqlar ***parallel*** bo‘lsa ular orasidagi burchak nolga teng. Biz bundan

$$\tan\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} = 0 \Rightarrow k_1 - k_2 = 0$$

yoki

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \qquad (*)$$

natijani olamiz.

2. Agar berilgan to‘g‘ri chiziqlar ***perpendikulyar*** bo‘lsa ular orasidagi burchak $\frac{\pi}{2}$ ga teng. Biz bundan

$$\tan\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} = \infty \Rightarrow 1 + k_1k_2 = 0$$

yoki

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \qquad (**)$$

natijani olamiz.

Misollar:

1. Parametrik ko‘rinishida berilgan

$$\begin{cases} x = \alpha_1 t + a_1 \\ y = \beta_1 t + b_1 \end{cases} \text{ va } \begin{cases} x = \alpha_2 t + a_2 \\ y = \beta_2 t + b_2 \end{cases}$$

to‘g‘ri chiziqlarning parallellik (perpendikulyarlik) shartlarini toping.

2. Umumiy ko‘rinishda berilgan

$$ax + by + c = 0$$

to‘g‘ri chiziq va parametrik ko‘rinishida berilgan

$$\begin{cases} x = \alpha t + \beta \\ y = \gamma t + \delta \end{cases}$$

to‘g‘ri chiziqlarning parallellik (perpendikulyarlik) shartlarini toping.
Csaba Vincze and Laszlo Kozma “College Geometry” March 27, 2014 pp.179-189k.,m/

9-MA'RUZA Fazoda tekislik tenglamalari. Ular orasidagi burchak. Tekisliklarning paralellik va perpendikulyarlik shartlari.

REJA

1.Tekislikning umumiy tenglamasi

2. Berilgan uchta nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasi

3. Tekislik tenglamasining boshqa ko'rinishlari

4. Ikki tekislik orasidagi burchak

5. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa

6. Fazoda tekisliklarning joylashuvi

7. Fazoda to'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro joylashuvi

8. Fazoda to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak

Tayanch iboralar: normal vektor, tekislikning umumiy tenglamasi,berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik,tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasi, ikki tekislik orasidagi burchak, nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa, ikki tekislikning parallelligi va perpendikulyarligi.

9.1-Tekislikning umumiy tenglamasi

Tekislikka perpendikulyar vektorga **normal vektor** deyiladi.

Geometrik postulatlarga ko'ra,

- Nuqta va vektor tekislikda aniqlanadi.
- Uch nuqta tekislikda aniqlanadi.

Dekart koordinatalar sistemasuda tekislikning umumiy tenglamasi qo'yidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (1)$$

bu yerda x, y va z tekislikda yitgan nuqtaning koordinatalari.

Aytaylik, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqta tekialikda yotsin, u holda

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \qquad (2)$$

bo'ladi.

Agar (1) tenglamadan (2) tenglamani ayirsak, tekislik umumiy tenglamasining boshqacha ko'rinishi hosil bo'ladi:

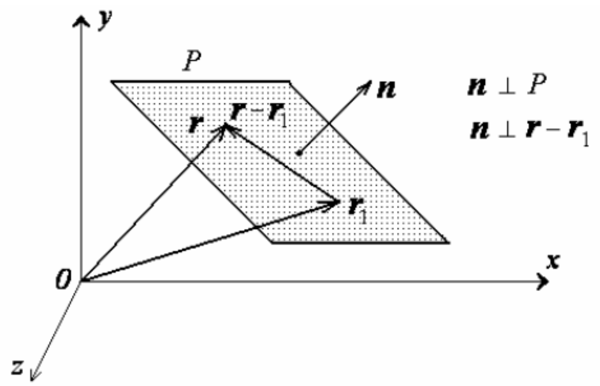
$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \qquad (3)$$

Aytaylik, A, B va C lar qandaydir $\boldsymbol{n}$ vektorning koordinatalari bo‘lsin.

U holda, (3) tenglamaning chap tomoni $\boldsymbol{n}$ va $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1=\{x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1\}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasiga teng:

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{n}=0. \qquad \text{(3a)}$$

Skalyar ko‘paytmaning xossasiga ko‘ra $\boldsymbol{n}$ va $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1$ vektorlar o‘zaro perpendikulyardir. Shunga ko‘ra, $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1$ vektor P tekislikdagi ixtiyoriy vektor, $\boldsymbol{n}$ esa, P tekislikning normal vektori.



9.1-chizma

Shunday qilib, (3) tenglama $M_1(x_1,y_1,z_1)$ nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasini ifodalaydi. A, B va C koeffisientlar tekislik normal vektorning koordinatalari hisoblanadi.

(1) tenglamaning xususiy hollarini qaraymiz[38]:

1) D=0 bo‘lsa, $Ax+By+Cz=0$ bo‘lib, tekislik koordinatalar boshidan o‘tadi.

2) C=0 bo‘lsa, $Ax+By+D=0$ bo‘lib, tekislik Oz o‘qiga parallel.

3) B=0 bo‘lsa, $Ax+Cz+D=0$ bo‘lib, tekislik Oy o‘qiga parallel.

4) A=0 bo‘lsa, $By+Cz+D=0$ bo‘lib, tekislik Ox o‘qiga parallel.

5) A=B=0 bo‘lsa, $Cz+D=0$ bo‘lib, tekislik Oxy tekislikka parallel va Oz o‘qiga perpendikulyar.

Misollar:

1) $M_1(1,-2,3)$ nuqtadan o‘tib, $\boldsymbol{n}=\{4,5,-6\}$vektorga perpendikulyar bo‘lgan tekislik tenglamasini yozing.

Yechish: (3) ga ko‘ra:

[38] WWL Chen, Analithical Geometry, London, 2008

$4(x-1)+5(y+2)-6(z-3)=0 \Rightarrow 4x+5y-6z+24=0.$

2) Tekislik $x-2y+3z-6=0$tenglama bilan berilgan. Normal vektorning birlik vektori $\boldsymbol{u}$ ni va tekislikda yotgan ikkita nuqtani toping.

Yechish: $\boldsymbol{n}=\{1,-2,3\}$ va $|\boldsymbol{n}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14}$ ekanidan,

$$\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(i-2j+3k).$$

Tenglamada *x*=*y*=0 deb olib, *z*=2 ni hosil qilamiz.

Agar *x* = *z* = 0 bo‘lsa, *y* = - 3 bo‘ladi. Shunnday qilib, $M_1(0,0,2)$ va $M_2(0,-3,0)$ nuqtalar tekislikda yotadi.

9.2-Berilgan uchta nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasi

Aytaylik, P tekislikda $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ nuqtalar va ixtiyoriy $M(x,y,z)$ nuqta berilgan bo‘lsin. Ular orqali qo‘yidagi vektorlarni quramiz:

$$\overrightarrow{M_1M}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1=\{x-x_1,\ \ y-y_1,\ \ z-z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=\{x_2-x_1,\ \ y_2-y_1,\ \ z_2-z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_3}=\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1=\{x_3-x_1,\ \ y_3-y_1,\ \ z_3-z_1\}.$$

Ular *P* tekislikda yotadi, ya’ni ularning aralash ko ‘paytmasi nolga teng:

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)=0\Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (4)$$

(4) tenglama berilgan uchta nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini ifodalaydi.

Misol. $M_1(2,5,-1)$, $M_2(2,-3,3)$ va $M_3(4,5,0)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish: (4) ga asosan:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z+1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z+1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$2(x-2) - 2(y-5) - 4(z+1) = 0 \Rightarrow$$

$$2x - 2y - 4z + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$x - y - 2z + 1 = 0.$$

9.3-Tekislik tenglamasining boshqa ko‘rinishlari

1) Aytaylik P tekislikda yotgan $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqta va P tekislikka parallel $\boldsymbol{p} = \{p_x, p_y, p_z\}$ va $\boldsymbol{q} = \{q_x, q_y, q_z\}$ vektorlar berilgan bo‘lsin.

Agar $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\} P$ tekislikda yotgan nuqtaning radius-vektori bo‘lsa, u holda $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 = \{x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1\}$, $\boldsymbol{p}$ vf $\boldsymbol{q}$ vektorlar koplanardir, ya’ni ularning aralash ko‘paytmasi nolga teng:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{pq} = 0.$$

Ushbu tenglama tekislik tenglamasining vektor ko‘rinishidir. Unu koordinata ko‘rinishida qo‘yidagicha yozish mumkin:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

2) Aytaylik tekislik tenglamasi qo‘yidagi ko‘rinishda berilgan bo‘lsin:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (6)$$

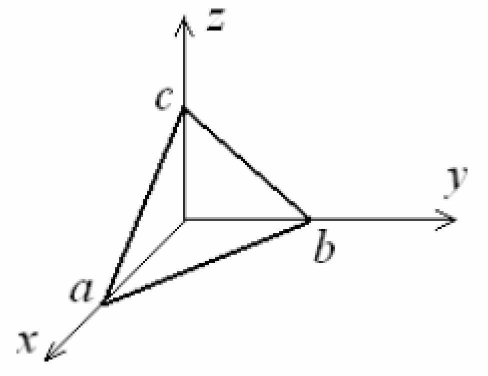
U holda

$$y = z = 0 \Rightarrow x = a,$$

$$x = z = 0 \Rightarrow y = b,$$

$$x = y = 0 \Rightarrow z = c$$

bo‘ladi. Shunga ko‘ra, tekislik *Ox*, *Oy*, *Oz* o‘qlarda mos ravishda *a*, *b*, *c* kesmalar ajratadi.



9.2-chizma

(6) tenglama tekislikning kesmalar bo‘yicha tenglamasi deyiladi.

9.4-Ikki tekislik orasidagi burchak.

Ikki tekislik orasidagi burchak θ ularning normal vektorlari $\boldsymbol{n}$ va $\boldsymbol{m}$ orasidagi burchak orqali ifodalanadi:

$$cos\theta = \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}| \cdot |\boldsymbol{m}|}.$$

Agar tekisliklar umumiy teglama ko‘rinishida berilgan bo‘lsa,

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

uholda

$$cos\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (7)$$

Agar ikki tekislik perpendikulyar bo‘lsa, u holda ularning normal vektorlari ham **perpendikulyar** bo‘ladi:

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{m} = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2.$$

Agar ikki tekislik parallel bo‘lsa, u holda ularning normal vektorlari proporsional bo‘ladi:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Ma’lumki, bir tekislikda yotgan ikki parallel bo‘lmagan vektorning bektor ko‘paytmasi shu tekisliknig normal vektoriga teng. Xususiy holda, agar tekislikda $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ nuqtalar berilgan bo‘lsa, tekislikning normal vektori qo‘yidagicha topiladi:

$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}. \qquad (8)$$

Misol. $M_1(-2,2,2)$, $M_2(0,5,3)$ va $M_3(-2,3,4)$ nuqtalar P_1 tekislikda yotadi. P_2 tekislik $3x - 4y + z + 5 = 0$ teglama bilan berilgan. P_1 va P_2 tekisliklar orasidagi burchakni toping.

Yechish: P_2 tekislikning normal vektorini topamiz:

$$\boldsymbol{m} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}.$$

P_1 tekislikning normal vektori $\boldsymbol{n} = \{3,-4,1\}$ ga teng. Shunday qilib, P_1 va P_2 tekisliklar orasidagi burchak

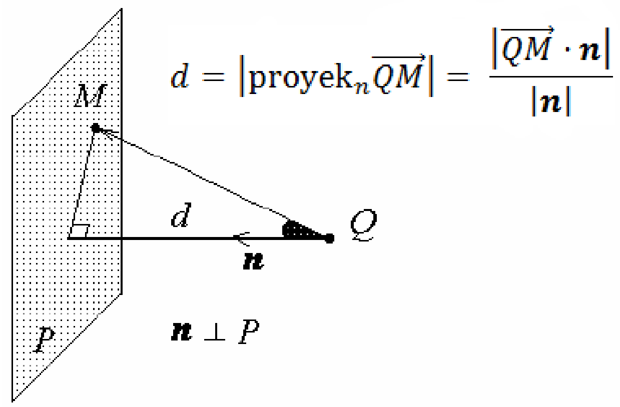
$$cos\theta = \frac{3\cdot 5 + (-4)\cdot(-4) + 1\cdot 2}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 1^2}\sqrt{5^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{11}{\sqrt{130}}$$

ga teng.

9.5-Nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa.

P tekislik $Ax + By + Cz + D = 0$ tenglama bilan berilgan bo‘lsin. Unga tegishli bo‘lgan $M(x,y,z)$ nuqtani va tegishli bo‘lmagan $Q(x_1,y_1,z_1)$ nuqtani olaylik. U holda, P nuqtadan Q nuqtagacha bo ‘lgan masofa d absolyut qiymat bilan olingan $\overrightarrow{QM}$ vektorning $\boldsymbol{n} = \{A,B,C\}$ normal vektordagi proyeksiyasiga teng:

$$d = \left|\text{Proyek}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{QM}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{QM}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{|\boldsymbol{n}|}.$$



9.3-chizma

Shuning uchun

$$d = \left|\frac{A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|.$$

(1) tenglamada

$$Ax + By + Cz = -D,$$

deb, tekislikdan $Q(x_1, y_1, z_1)$ nuqtagacha bo‘lgan masofa formulasini keltirib chiqaramiz:

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|. \qquad (9)$$

Misol. $Q(8, -7, 1)$ nuqtadan $2x + 3y - 4z + 5 = 0$ tekislikkacha bo‘lgan masofani toping.

Yechish:

$$d = \left|\frac{2 \cdot 8 + 3 \cdot (-7) - 4 \cdot 1 + 5}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2}}\right| = \frac{4}{\sqrt{29}} = \frac{4}{29}\sqrt{29}.$$

9.6-Fazoda tekisliklarning joylashuvi.

Aytaylik, P_1 va P_2 tekisliklar umumiy tenglamalar bilan berilgan bo‘lsin:

$$P_1: \qquad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$P_2: \qquad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Qo‘yudagi tenglamalar sistemasini ko‘rib chiqamiz:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

1) Agar (10) sistema birgalikda bo‘lmasa, tekisliklar parallel, bundan, $\boldsymbol{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ va $\boldsymbol{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ normal vektorlarning koordinatalari proporsionaldir:

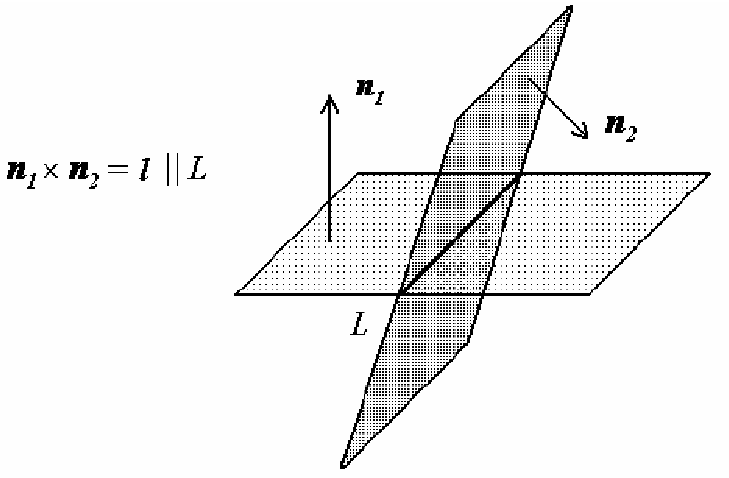
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

2) Agar (10) sistema birgalikda va tenglamalar bir-biriga proporsional bo‘lsa,u holda P_1 va P_2tekisliklar ustma-ust tushadi:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

3) Agar (10) tenglamalarsistemasi birgalikda va mos matrisaning rangi 2 ga teng bo‘lsa, u holda P_1 va P_2 tekisliklaryagona L chiziqda kesishadi. P_1 va P_2 tekisliklar normal

vektorlarining vektor ko‘paytmasi normal vektorlarga perpendikulyar va har ikki tekislikda yotgan vektorni ifodalaydi. Shuning uchun, $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$ vektor L chiziqning $\boldsymbol{l}$ yo‘naltiruvchi vektoriga teng:



9.4-chizma

9.7-Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislikning o‘zaro joylashuvi.

Aytaylik, P tekislik $Ax + By + Cz + D = 0$ tenglama bilan, L chiziq

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasi bilan berilgan bo‘lsin.

To‘g‘ri chiziq va tekislikning o‘zaro joylashuvini aniqlash uchun qo‘yidagi tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Bunda qo‘yidagi hollar bo‘lishi mumkin:

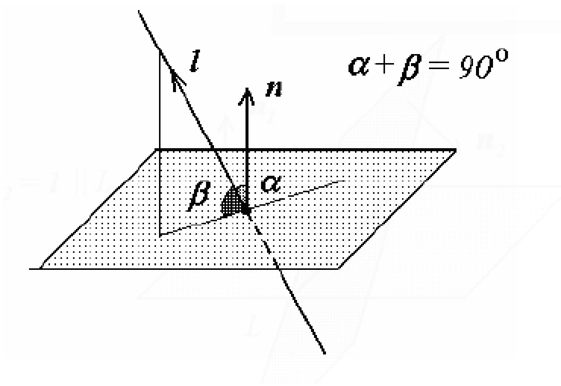
1) Agar (11) tenglamalar sistemasi birgalikda va mos matrisaning rangi 3 ga teng bo‘lsa, u holda tenglamalar sistemasiyagona$\{x_0, y_0, z_0\}$ techimga ega. Demak, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta tekislik va to‘g‘ri chiziq kesishgan nuqtadir.

2) Agar (11) tenglamalar sistemasi birgalikda va mos matrisaning rangi 2 ga teng bo‘lsa, u holda$L$ chiziq P tekislikda yotadi.

3) Agar (11) tenglamalar sistemasi birgalikda bo‘lmasa, u holda$L$ chiziq P tekislikka parallel bo‘ladi.

9.8-Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak.

Aytaylik, α - $\boldsymbol{n}$ normal vektor va $\boldsymbol{l}$yo‘naltiruvchi vektor orasidagi burchak, β - tekislik va to‘g‘ri chiziqorasidagi burchak bo‘lsin. U holda, α va β burchaklarning joylashuvini qo‘yidagi chizmada ko ‘rish mumkin:



9.5-chizma

Bundan,

$$\sin\beta = \cos\alpha = \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{n}| \cdot |\boldsymbol{l}|}.$$

10-MA'RUZA R^3 DA TO'G'RI CHIZIQ. TO'G'RI CHIZIQ VA TEKISLIKNING O'ZARO JOYLASHUVI

REJA

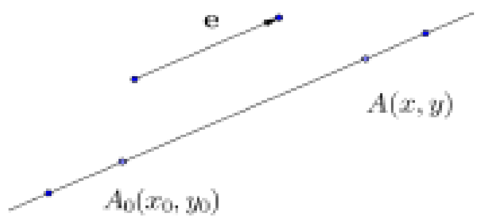
1. Fazoda to'g'ri chiziq tenglamalari
2. Fazoda tekislik tenglamasi
3. Koordinatalar sistemasiga nisbatan tekislikning joylashishi
4. Tekisliklarning o'zaro vaziyati

10.1 To'g'ri chiziq tenglamalari

Ma'lumki, ixtiyoriy to'g'ri chiziq ikkita tekislikning kesishishidan hosil bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq tenglamasini quyidagicha yozishimiz mumkin.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases} \qquad (*)$$

Izoh: (*) tenglama to'g'ri chiziq tenglamasini aniqlashi uchun ikkita erkli tenglama birgalikda qaralishi zarur.



10.1 chizma

Aytaylik $A_0(x_0, y_0, z_0)$ to'g'ri chiziqdagi fiksirlan nuqta bo'lib, $A(x, y, z)$ to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Hamda $\vec{e}(k, l, m)$ bu to'g'ri chiziqqa parallel noldan farqli vector bo'lsin (10.1 chizma). U holda $\overrightarrow{A_0A}$ va $\vec{e}$ vektorlar parallel bo'lib ularning koordinatalari proporsional bo'ladi. Ya'ni

$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m} \qquad (**)$$

(**) tenglamaga to'g'ri chiziqning ***kanonik*** tenglamasi deyiladi. Faraz qilaylik to'g'ri chiziq (*) tenglama bilan ifodalangan bo'lsin. Biz uning tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltiraylik. Bu uchun biz to‘g‘ri chiziqning biror A_0 nuqtasini va unga parallel $\vec{e}$ vektorni topishimiz yetarli.

Biror $\vec{e}(k,l,m)$ vektor to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, u holda bu vektor (*) tekisliklarning har biriga parallel bo‘ladi. Bundan $\vec{e}(k,l,m)$ vector tekislikning har bir normal $\vec{n}_1(a_1,b_1,c_1)$ va $\vec{n}_2(a_2,b_2,c_2)$ vektorlarga perpendikulyar bo‘ladi.

Demak, doim k,l,m lar

$$\begin{cases} a_1k+b_1l+c_1m=0 \\ a_2k+b_2l+c_2m=0 \end{cases} \qquad (***)$$

tenglamalarni qanoatlantiradi.

(*) tenglamalar sistemasidan biror x_0, y_0, z_0 yechimlarni va (***) tenglamalar sistemasidan biror k,l,m yechimlarni olamiz[39].

$$k=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},\ l=\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix},\ m=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

To‘g‘ri chiziqni parametrik ko‘rinishda ham ifodalash mumkin. Buning uchun (**) tenglamadagi uchala nisbarni ham biror t o‘zgaruvchiga tenglashtiramiz.

$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}=t$$

Bundan

$$x=kt+x_0,\ y=lt+y_0,\ z=mt+z_0 \quad (1)$$

(1) tenglamaga to‘g‘ri chizi qning parametrik tenglamasi deyiladi.

To‘g‘ri chiziq koordinatalar sistemasiga nisbatan quyidagicha joylashishi mumkin.($\vec{e}(k,l,m)$ to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori bo‘lsin).

1. Agar $m=0$ to‘g‘ri chiziq xy tekisligiga parallel bo‘ladi.
2. Agar $l=0$ to‘g‘ri chiziq xz tekisligiga parallel bo‘ladi.
3. Agar $k=0$ to‘g‘ri chiziq yz tekisligiga parallel bo‘ladi.
4. Agar $k=0, l=0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq z o‘qiga parallel bo‘ladi.
5. Agar $l=0, m=0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq x o‘qiga parallel bo‘ladi

[39] [39] WWL Chen, Analithical Geometry, London, 2008

6. Agar $k=0, m=0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq y o‘qiga parallel bo‘ladi

Misollar:

1. Qanday shart bajarilganda (**) kanonik tenglama bilan berilgan to‘g‘ri chiziq x (y, z)o‘qini kesadi? Qanday shart bajarilganda u xy (xz, yz) tekisligiga parallel bo‘ladi?

2. O‘zaro juft-jufti bilan parallel bo‘lmagan tekisliklarga nisbatan teng uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o‘rni to‘g‘ri chiziq bo‘lishini isbotlang.

3. $z=axy$ sirtning har bir nuqtasidan ikkita turli shu sirtda yotuvchi to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin ekanligini isbotlang.

4. Agar to‘g‘ri chiziqlar

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

va

$$\begin{cases} a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0 \end{cases}$$

tenglamalar bilan aniqlangan bo‘lib, ular kesishsa

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}=0$$

tenglikni isbotlang.

2. Fazoda tekislik tenglamasi

Bizga tekislikka tegishli $A_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqta va unga perpendikulyar biror $\vec{n}$ vektor berilgan bo‘lsin. Tekislikning ixtiyoriy $A(x;y;z)$ nuqtasi uchun $\overrightarrow{A_0A}$ vektor $\vec{n}$ vektorga perpendikulyar bo‘ladi (19.1 chizma). Bundan

$$\overrightarrow{A_0A}\cdot\vec{n}=0 \qquad (*)$$

Aytaylik a,b,c sonlar $\vec{n}$ vektorning $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ bazisdagi koordinatalari bo‘lsin.

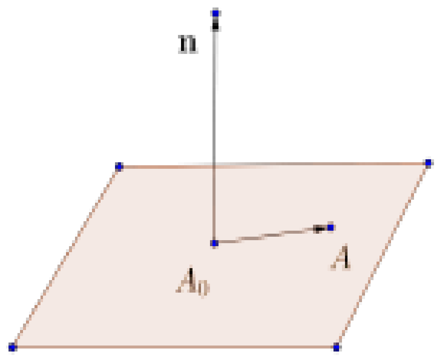
O nuqta koordinatalar boshi ekanidan

$$\overrightarrow{A_0A} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA_0}$$

U holda (*) dan

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \qquad (**)$$

tekislik tenglamasi kelib chiqadi.



10.2- chizma

Demak ixtiyoriy tekislik tenglamasi x,y,z koordinatalarga nisbatan chiziqli ekan. Shuni e’tiborga olsak ixtiyoriy tekislik tenglamasi

$$ax+by+cz+d=0$$

ko‘rinishida bo‘ladi.

Agar x_0, y_0, z_0 berilgan tenglamaning yechimi bo‘lsa , u holda

$$ax_0+by_0+cz_0+d=0$$

tenglikdan

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \quad (***)$$

Formula kelib chiqadi.

Misollar:

1. Berilgan ikkita (x_1, y_1, z_1) va (x_2, y_2, z_2) nuqtalar biror tekislikka nisbatan simmetrik bo‘lsa, bu tekislik tenglamasini tuzing.
2. $ax + by + cz + d_1 = 0$ va $ax + by + cz + d_2 = 0$ ($d_1 \neq d_2$) tekisliklarning parallel ekanini ko‘rsating.
3. $(ax + by + cz + d)^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)^2 = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plamining geometrik o‘rni nimadan iborat.
4. $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ va $x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ Ikkita sferaning kesishishidan hosil bo‘lgan aylanadan o‘tadigan tekislik tenglamasini tuzing.

11, 12-MA’RUZALAR HAQIQIY SONLAR TO‘PLAMI. KOMPLEKS SONLAR. KOMPLEKS SONLAR USTIDA AMALLAR. MUAVR, EYLER FORMULALARI.

REJA

1. Haqiqiy sonlar to‘plami
2. Kompleks sonlar haqida tushuncha
3. Kompleks sonlar ustida amallar
4. Kompleks sonlar tekisligi
5. Kompleks sonlarning algebraik, trigonometrik, ko‘rsatkichli shakllari.
6. Muavr va Eyler formulasi

Tayanch ibora va tushunchalar

Haqiqiy son, Kompleks son, kompleks sonning algebraik, trigonometrik, ko‘rsatkichli shakllari, kompleks sonlar ustida amallar, Muavr formulasi, Eyler formulasi.

Son tushunchasi matematikaning muhim tushunchalaridan biri. Ular

1) natural sonlar (1,2,3,...),
2) butun sonlar (..., -2, -1, 0, 1, 2,...),
3) kasr sonlar (oddiy va o‘nli kasrlar),
4) haqiqiy sonlar

bo‘lishi mumkin. Bunday sonlar, ular ustida bajariladigan amallar, amallarning bajarilish qoidalari o‘quvchiga maktab, kollej va litseylarda o‘qitiladigan matematika fanidan ma’lum.

Oliy matematika kursi davomida ko‘p hollarda haqiqiy sonlarga duch kelamiz. Shuning uchun haqiqiy sonlar haqidagi asosiy ma’lumotlarni qisqacha bayon etamiz.

Ratsional va irratsional sonlar[40]**.** Ma’lumki, $\frac{p}{q}$ ko‘rinishida ifodalaniladigan son ratsional son deyiladi, bunda p - butun son, q-esa natural son bo‘lib, ular o‘zaro tub, ya’ni $(p,q)q1$. Ravshanki, oddiy kasrlar ratsional son bo‘ladi.

Agar $\frac{p}{q}$ kasrning maxraji 10, 100, umuman 10 ning natural darajalari (10^n) bo‘lsa, bunday oddiy kasr ***o‘nli kasr*** deyiladi. Masalan,

[40] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

$\frac{3}{2}$, $\frac{1}{17}$, $\frac{23}{11}$, $-\frac{8}{9}$ - oddiy kasrlar, $\frac{7}{10}=0,7$, $\frac{112}{10}=11,2$, $\frac{23}{100}=0,23$ - o‘nli kasrlar bo‘ladi.

$\frac{p}{q}$ ratsional son – oddiy kasr berilgan bo‘lsin. Bo‘lish qoidasidan foydalanib p butun sonni q natural songa bo‘lamiz. Agar bo‘lish jarayonida biror qadamdan keyin qoldiq nolga teng bo‘lsa, u holda bo‘lish jarayoni to‘xtab, $\frac{p}{q}$ kasr o‘nli kasrga aylanadi. Odatda, bunday o‘nli kasr ***chekli o‘nli kasr*** deyiladi.

p ni q ga bo‘lish jarayoni cheksiz davom etib, ma’lum qadamdan keyin yuqorida aytilgan qoldiqlardan biri yana bir marta uchrashi, so‘ng undan oldingi raqamlar mos ravishda takrorlanishi mumkin. Odatda, bunday o‘nli kasr cheksiz davriy o‘nli kasr deyiladi. Takrorlanadigan raqamlar (raqamlar birlashmasi) o‘nli kasrning davri deyiladi.

Masalan, $\frac{53}{36}$ ratsional son $1,4722...=1,47(2)$ o‘nli kasrga keladi. Bu cheksiz davriy o‘nli kasr bo‘lib, uning davri 2 ga teng: $\frac{53}{36}=1,47(2)$.

Demak, har qanday $\frac{p}{q}$ ratsional son chekli o‘nli kasr yoki cheksiz davriy o‘nli kasr orqali ifodalanadi.

Aksincha, har qanday chekli o‘nli kasrni yoki cheksiz davriy o‘nli kasrni $\frac{p}{q}$ ko‘rinishida ifodalash mumkin.

Masalan,

$$1,03=1\frac{3}{100}=\frac{103}{100},$$

$$0,(3)=0,3333...=0+\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+...=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{1}{3}$$

(bunda cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig‘indisini topish formulasidan foydalanildi) bo‘ladi.

Demak, har qanday chekli yoki cheksiz davriy oʻnli kasr ratsional son orqali ifodalaniladi.

Shunday qilib, ixtiyoriy ratsional son chekli yoki cheksiz davriy oʻnli kasr orqali va aksincha ixtiyoriy chekli yoki cheksiz davriy oʻnli kasr ratsional son orqali ifodalanadi.

Ammo cheksiz davriy boʻlmagan oʻnli kasrlar ham mavjud. Masalan,

$$1{,}1010010001..., \qquad 1{,}4142135..., \qquad 2{,}7182818...$$

sonlar cheksiz davriy boʻlmagan oʻnli kasrlar boʻladi (bu sonlardan ikkinchisi $\sqrt{2}$ ni, uchinchisi esa e sonini ifodalaydi). Ravshanki, bu sonlar ratsional sonlar boʻlmaydi.

[41]**Ta'rif.** *Cheksiz davriy boʻlmagan oʻnli kasr irratsional son deyiladi*. Masalan,

$$1{,}4142135... = \sqrt{2}, \qquad 3{,}141583... = \pi, \qquad 2{,}718281... = e$$

sonlar irratsional sonlardir.

Haqiqiy son. Haqiqiy sonlar toʻplami va uning xossalari.

Ta'rif. *Ratsional va irratsional sonlar umumiy nom bilan haqiqiy sonlar deyiladi.*

Masalan,

$$2, \ 7\frac{1}{2}, \ -3, \ \sqrt{2}, \ \pi,$$

sonlar haqiqiy sonlardir.

Odatda, matematikada turli matematik ob'ektlarni, jumladan haqiqiy sonlarni, alohida-alohida oʻrganilmasdan, ularning bir nechtasini birgalikda oʻrganiladi. Bu toʻplam tushunchasiga olib keladi.

Toʻplam matematikaning boshlangʻich tushunchalaridan boʻlib, uni narsalarning ma'lum belgilar boʻyicha birlashmasi (majmuasi) sifatida tushuniladi.

Masalan, 2, 4, 6 sonlardan tashkil topgan toʻplam, bir nuqtadan oʻtuvchi toʻgʻri chiziqlardan tashkil topgan toʻplam deyilishi mumkin. Toʻplamni tashkil etgan narsalarni uning ***elementlari*** deyiladi.

Biz haqiqiy sonlardan tashkil topgan toʻplamlarni qaraymiz. Ular ***sonli toʻplamlar*** deyiladi. Bundan keyin sonli toʻplam deyish oʻrniga qisqacha ***toʻplam*** deb atayveramiz.

---

[41] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

Matematikada to‘plamlar bosh harflar bilan uning elementlari esa kichik harflar bilan belgilanadi. Masalan, $A, B, \ldots$ to‘plamlar, $a, b, \ldots$ to‘plam elementlari.

Agar a biror A to‘plamning elementi bo‘lsa, $a \in A$ kabi yoziladi va «a element A to‘plamga tegishli» deb o‘qiladi. Agar a shu A to‘plamga tegishli bo‘lmasa, uni $a \notin A$ kabi yoziladi va «a element A to‘plamga tegishli emas» deb o‘qiladi[42].

Odatda, barcha natural sonlardan iborat to‘plamni N harfi:

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\},$$

barcha butun sonlardan iborat to‘plamni Z harfi:

$$Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\},$$

barcha ratsional sonlardan iborat to‘plamni Q harfi:

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} : p \in Z,\ q \in N,\ (p, q) = 1 \right\},$$

barcha haqiqiy sonlardan iborat to‘plamni R harfi bilan belgilanadi.

Agar A chekli sondagi elementlardan tashkil topgan bo‘lsa, u chekli to‘plam, aks holda cheksiz to‘plam deyiladi.

Masalan,

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$$

chekli to‘plam,

$$N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\},$$

cheksiz to‘plam bo‘ladi.

Shuni ta’kidlash kerakki, to‘plamni tashkil etgan elementlar orasida aynan bir–biriga teng bo‘lgan elementlar to‘plamning elementi sifatida faqat bir martagina olinadi.

Aytaylik, ikki E va F to‘plamlari berilgan bo‘lsin. Agar E to‘plamning barcha elementlari F to‘plamga tegishli bo‘lsa, E to‘plam F to‘plamning qismi deyiladi va $E \subset F$ kabi yoziladi. Masalan,

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

[42] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

bo‘ladi.

Agar $E \subset F$ va $F \subset E$ bo‘lsa, E va F bir-biriga teng to‘plamlar deyiladi va $E = F$ kabi yoziladi.

E va F to‘plamlarning barcha elementlaridan tashkil topgan to‘plam, bu to‘plamlar yig‘indisi (birlashmasi) deyiladi va $E \cup F$ kabi belgilanadi. E va F to‘plamlarning barcha umumiy elementlaridan tashkil topgan to‘plam, bu to‘plamlarning ko‘paytmasi (kesishmasi) deyiladi va $E \cap F$ kabi yoziladi. E to‘plamning F to‘plamga tegishli bo‘lmagan barcha elementlaridan tashkil topgan to‘plam E to‘plamdan F to‘plamning ayirmasi deyiladi va $E \setminus F$ kabi yoziladi.

Masalan,

$$A = \{1, 2, 5, 8, 11, 13\}$$
$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

to‘plamlar uchun

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13\},$$
$$A \cap B = \{2, 8\},$$
$$A \setminus B = \{1, 5, 11, 13\},$$
$$B \setminus A = \{4, 6, 10, 12\},$$

shuningdek,

$$N \cup Z = Z,\ N \cap Z = N,\ Z \setminus N = \{\ldots -3, -2, -1, 0\}$$

bo‘ladi.

Birorta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam bo‘sh to‘plam deyiladi va $\varnothing$ kabi belgilanadi.

Odatda, chekli A to‘plam elementlari soni $m(A)$ orqali belgilanadi.

1-misol. *Dunyo okeanida 19 ta suvosti chuqurliklari ma’lum, ularning chuqurligi 7 km. dan oshadi. Ulardan 16 tasi Tinch va Hind okeanlarida, 4 tasi Hind va Atlantika okeanlarida. Har bir okeanda nechtadan suvosti chuqurliklari bor?*

Yechilishi. A to‘plam bilan Tinch va Hind okeanlaridagi suvosti chuqurliklarini, B to‘plam bilan Hind va Atlantika okeanlaridagi suvosti chuqurliklarini belgilaymiz. Masala shartiga ko‘ra $m(A) = 16,\quad m(B) = 4$ bo‘ladi. Ayni paytda $m(A \cup B) = 19$ ekanligi ma’lum.

Ravshanki Hind okeanidagi suvosti chuqurligi $A \cap B$ to‘plamni tashkil etadi. Bu to‘plamning elementlari quyidagicha topiladi:

$$m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B) = 16 + 4 - 19 = 1.$$

Shunday qilib, Hind okeanida 1 ta, Tinch okeanida 15 ta, Atlantika okeanida 3 ta suvosti chuqurliklari bor ekan.

Endi barcha haqiqiy sonlardan iborat bo‘lgan R to‘plamning xossalarini keltiramiz:

1) R *to‘plamda (to‘plam elementlari orasida) qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish, bo‘lish, darajaga ko‘tarish, ildiz chiqarish amallari kiritilgan bo‘lib, bu amallarning bajarilish qoidalari ham o‘rinli bo‘ladi;*

2) R *to‘plamda (to‘plam elementlari orasida) teng, katta, kichik tushunchalari kiritilgan. Ixtiyoriy* $a \in R$, $b \in R$, $c \in R$ *haqiqiy sonlar uchun*

$$a = b \text{, yoki } a > b \text{, yoki } a < b$$

bo‘lib, $a < b$, $b < c$ *bo‘lishidan* $a < c$ *bo‘lishi kelib chiqadi;*

3) R *zich to‘plam bo‘ladi, ya’ni ixtiyoriy* $a \in R$, $b \in R$ *haqiqiy sonlar uchun* $a \neq b$ *bo‘lsa, u holda* a *va* b *sonlar orasida istalgancha haqiqiy son bo‘ladi.*

2 − misol. *Agar* r *- ratsional,* α *- irratsional son bo‘lsa,* $r + \alpha$ *sonning irratsional son bo‘lishi isbotlansin.*

Yechilishi. Berilgan r va α sonlarning yig‘indisini β deylik: $\beta = r + \alpha$. Ravshanki, bu tenglikdan $\alpha = \beta - r$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, β ratsional son bo‘lsin. Unda $\beta - r$ soni, ikki ratsional son ayirmasi yana ratsional son bo‘lganligi uchun ratsional son bo‘ladi: $\beta - r = \alpha$ ratsional son. Bu esa berilishiga ko‘ra α ning irratsional son bo‘lishiga ziddir. Ziddiyatning kelib chiqishiga β ning ratsional son bo‘lsin deyilishi sabab bo‘ldi. Demak, β irratsional son.

Kompleks sonlar haqida tushuncha.

Bizga ma’lumki, $x^2 + 1 = 0$ tenglama $x \in \mathbb{R}$ haqiqiy sonlar to‘plamida ildizga ega emas . Shuning uchun biz bu tenglamani ildizini boshqa to‘plamdan qidiramiz.

[43]**Ta’rif.** Kompleks sonlar to‘plami $\mathbb{C}$ orqali belgilanadi va u $a + bi,$ kabi yoziladi bu yerda $a, b \in \mathbb{R}$.

[43] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

Kompleks sonlar ustida amallar

Bizga ikkita kompleks sonlar berilgan bo‘lsin $a + bi$ va $c + di$, bu yerda $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Ularning yig‘indisi

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Ularning ko‘paytmasi

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Ularning ayirmasi

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Agar $c + di \neq 0$ bo‘lsa u holda $c \neq 0$ yoki $d \neq 0$ bo‘ladi. Shunday qilib $c^2 + d^2 \neq 0$. bo‘ladi

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Bu ifodani quyidagicha yozish mumkin

$\frac{a+bi}{c+di} = x + yi,$ bu yerda $x, y \in \mathbb{R}$. u holda

$$a + bi = (c + di)(x + yi) = (cx - y) + (cy + dx)i.$$

Bundan kelib chiqadi

$$a = cx - dy,$$

$$b = cy + dx.$$

Bu chiziqli tenglamani yechsak

$x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}$ va $y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$,

Shunday qilib

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Shunga qaramasdan, bu ifodalarda $a = 1$ va $b = 0$ bo‘lganda

$$\frac{1}{c + di} = \frac{c - di}{c^2 + d^2}.$$

Kasrni mahrajiga qo‘shmasini ko‘paytiramiz

$(c+di)(c-di)=c^2+d^2$, shunday qilib

$$\frac{1}{c+di}=\frac{c-di}{(c-di)(c+di)}=\frac{c-di}{c^2+d^2}$$

Huddi shunday i^n ni qiymati quyidagilardan biriga teng: $i^2=-1, i^3=-1,\ i^4=1.$

Berilgan $z=x+yi$ kompleks sonni: x haqiqiy qismi deyiladi va $x=\Re ez$ kabi yoziladi, y son esa kompleks son z ning mavhum qismi deyiladi va $y=\Im mz$. kabi yoziladi. Kompleks sonlar to'plami $C=\{z=x+iy : x, y\in R\}$ kabi belgilanadi va $z=x+yi$ kompleks sonni qo'shmasi z = x − iy kabi yoziladi.

Har bir $z\in\mathbb{C}$ uchun quyidagi formula o'rinli

$$\Re ez=\frac{z+\bar z}{2} \quad \text{va} \quad \Im mz=\frac{z-\bar z}{2}\ .$$

Bundan tashqari, agar $w\in\mathbb{C}$, bo'lsa u holda $\overline{z+w}=\bar z+\bar w$ va $\overline{zw}=\overline{zw}$.

Kompleks sonning trigonometrik shakli

Bizga ma'lumki

$z=x+iy$, bunda $x,y\in\mathbb{R}$. z kompleks sonning moduli $r=\sqrt{x^2+y^2}$ kabi yoziladi va $|z|$ orqali belgilanadi. Agar $z\neq 0$ bo'lsa va har bir $\theta\in\mathbb{R}$ uchun quyidagi tengliklar o'rinli

(1) $$x=r\sin\theta \quad \text{va} \quad y=r\sin\theta$$

θ burchak kompleks sonning argumenti deyiladi va u $Argz$ kabi belgilanadi. Kompleks sonning quyidagi ko'rinishidagi ifodasi uning trigonometrik shakli deyiladi.

$$z=r(cos\theta+isin\theta)$$

Lekin shuni inobatga olgan holda berilgan $z\in\mathbb{C}$, $argz$ yetarli emas. Bundan kelib chiqib biz hohlagan butun sonni qo'shimiz va qisqacha 2π dan θ gacha ta'sirsiz. Umumiy aytiladigan aniq son $\theta\in\mathbb{R}$ asosiy argument z oddiy hollarda $Argz$. deb yuritiladi.

Biz bilamizki, har bir $z\in\mathbb{C}$ uchun $z^2=z\bar z$ o'rinli. Agar $w\in\mathbb{C}$, bo'lsa, u holda $|zw|=|z||w|\ \ va\ \ |z+w|\leq|z|+|w|$ o'rinli.

Bundan tashqari, agar

$z=r(cos\theta+isin\theta)\ \ va\ \ w=s(cos\varphi+isin\varphi)$,

Bu yerda $r,s,\theta,\varphi\in\mathbb{R}$ va $r,s>0$, то

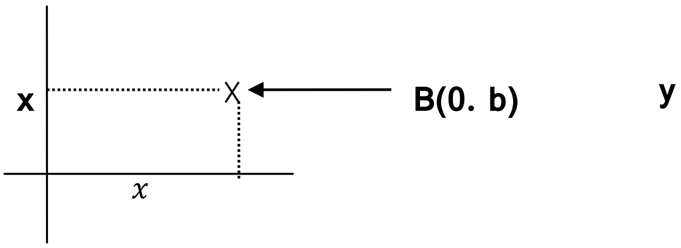
$zw=rs(cos(\theta+\varphi)+isin(\theta+\varphi))$ va

$\frac{z}{w} = \frac{r}{s}(cos(\theta - \varphi) + isin(\theta - \varphi))$.

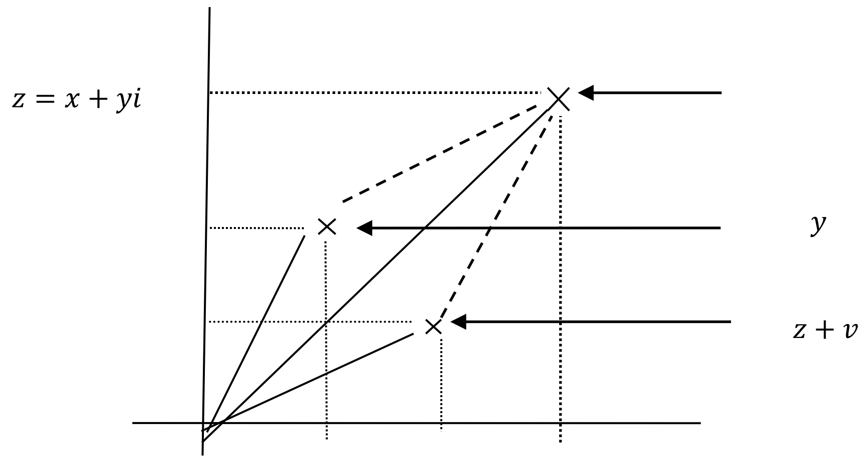
Kompleks sonlar tekisligi

Ta’rif. Bizga kompleks son berilgan bo‘lsin $z = x + yi$ bunda $x, y \in \mathbb{R}$. Bunda x son kompleks son z ning haqiqiy qismi deyiladi va $x = \Re ez$ kabi yoziladi, y haqiqiy son esa kompleks son z ning mavhum qismi deyiladi va $y = \Im mz$. kabi yoziladi.

Har qanday $z = x + yi$ kompleks sonni Oxy tekislikda x va y kordinatali A(x,y) nuqta shaklida tasvirlash mumkin va aksincha, tekislikning har bir nuqtasiga kompleks son mos keladi.



Quyida ikki kompleks sonlarni qo‘shilishi .



Kompleks sonning ko‘rsatkichli shakli

De Muavr Teoremasi

$cosn\theta + isinn\theta = (cos\theta + isin\theta)^n$ har bir $n \in \mathbb{N}$ va $\theta \in \mathbb{R}$, (2)

Faraz qilaylik, $c = R(cos\alpha + isin\alpha)$, bu yerda $R, \alpha \in \mathbb{R}$ va $R > 0$. Tenglama quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi $z^n = c$ bundan

$z = \sqrt[n]{R}(\frac{\cos\alpha + 2k\pi}{n} + i\frac{\sin\alpha + 2k\pi}{n})$, bu yerda $k = 0, 1, \dots, n-1$.[44]

Oxir oqibat, biz c^b noldan farqli qiymatiga ixtiyoriy $b \in \mathbb{Q}$, $c \in \mathbb{C}$ ega bo‘lamiz. Rational son b ni quyidagicha yozishimiz mumkin $b = p/q$, bunda $p \in \mathbb{Z}$ va $q \in N$. U holda har q va aniq z sonlarga yagona $z^q = c$ mos keladi. Endi biz $c^b = z^p$ ni aniqlaymiz, belgilaymizki (2) ifodani $n \in \mathbb{Z}$ da ko‘rsatish qiyin emas. Bundan kelib chiqadiki: q ning ixtiyoriy qiymati uchun c^b mos ratsional daraja mavjud.

Misol 9.2.1. Bizga ma’lumki $(2+3i)+(4-5i) = (2+4)+(3-5)i = 2-2i = 2(1-i)$.

Misol 9.2.2. Bizga ma’lumki $(2+3i)(4-5i) = \big(2*4-3*(-5)\big)+(2*(-5)+3*4)i = 23+2i$.

Misol 9.2.3. Bizga ma’lumki

$$\frac{2+3i}{4-5i} = \frac{(2+3i)(4+5i)}{(4-5i)(4+5i)} = \frac{-7+22i}{41} = -\frac{7}{41} + \frac{22}{41}i.$$

shu sababli

$$\mathfrak{Re}\frac{(2+3i)^2}{4-5i} = -\frac{7}{41} \quad \text{va} \quad \mathfrak{Im}\frac{(2+3i)^2}{4-5i} = \frac{22}{41}.$$

[44] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

Misol 9.2.4. Bizga ma'lumki

$\frac{(1+2i)^2}{1-i} = \frac{-3+4i}{1-i} = \frac{(-3+4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-7+i}{2} = -\frac{7}{2} + \frac{i}{2}.$

shu sababli

$\mathfrak{Re}\frac{(1+2i)^2}{1-i} = \frac{7}{2}$ va $\mathfrak{Im}\frac{(1+2i)^2}{1-i} = \frac{1}{2}.$

Misol 9.2.5. Bizga ma'lumki $1 + i + i^2 + i^3 = 0$ ва $5 + 7i^{2000} = 12.$

Kompleks o'zgaruvchili tenglamalar yechimini huddi haqiqiy o'zgaruvchili tenglamalarni yechish usullari kabi hal qilinadi. Biz quyida ikkita misol orqali ko'rib chiqamiz.

Misol 9.2.6. Bizga quyidagi tenglama berilgan bo'lsin $(1+3i)z + 2 + 2i = 3 + i$. U holda biz $2 + 2\mathrm{i}$ ni o'ng tomonga o'tkazamiz, va $(1+3i)z = 1 - i$, ga ega bo'lamiz

$$z = \frac{1-i}{1+3i} = \frac{(1-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{-2-4i}{10} = -\frac{1}{5} - \frac{2i}{5}.$$

Misol 9.2.7. Bizga quyidagi tenglama berilgan bo'lsin $\mathrm{z}^2 + 2\mathrm{z} + 10 = 0$. Bu tenglamani kvadrat tenglamani yechish usuli yordamida ildizini topamiz.

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = -1 \pm 3i.$$

Boshqa usul yordamida esa quyidagicha yechamiz

$$\mathrm{z}^2 + 2\mathrm{z} + 10 = \mathrm{z}^2 + 2\mathrm{z} + 1 + 9 = (\mathrm{z}+1)^2 + 9 = 0.$$

Bundan $(\mathrm{z}+1)^2 = -9$; yoki $z + 1 = \pm 3i$, shunday qilib $z = -1 \pm 3i$.

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagilarni qiymatlarini toping:

a) $(1-2\mathrm{i})^2$ b) $(1+2\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})$ c) $\frac{1}{3+2\mathrm{i}}$ д) $\frac{(1-2\mathrm{i})^2}{1-\mathrm{i}}$

d) $\frac{1}{1+\mathrm{i}} + \frac{1}{1-2\mathrm{i}}$ e) $\mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^4 + \mathrm{i}^5 + \mathrm{i}^6$ f) $\frac{1}{(4+2\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}$ з) $\frac{3+4\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}.$

2. Birinchi savoldagi har bir javoblarning haqiqiy va mavhum qismlarini toping.

3. Quyidagi tenglamalarni yeching:

a) $(2+\mathrm{i})\mathrm{z} + \mathrm{i} = 3$ b) $\frac{\mathrm{z}-\mathrm{i}}{\mathrm{z}-1} = \frac{2}{3}$ c) $\frac{\mathrm{z}-3\mathrm{i}}{\mathrm{z}+4} = \frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{\mathrm{z}+\mathrm{i}} = \frac{3}{2-\mathrm{z}}.$

13-MA’RUZA Funksiya va uning berilish usullari. Sonlar ketma ketligi. Uning limiti va xossalari.

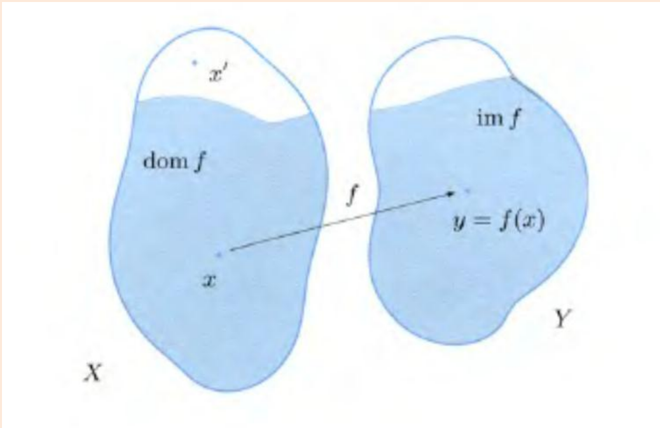
REJA

1. Funksiya ta’rifi va berilish usullari
2. Sonli ketma-ketlik
3. Sonli kyetma-ketlikning limiti
4. Yakinlashuvchi ketma ketlik ketma-ketliklar va ularning xossalari
5. Yig‘indi, ko‘paytma va bo‘linmaning limiti

1. Funksiya ta’rifi va berilish usullari

Bizga ixtiyoriy X va Y to‘plamlar berilgan bo‘lsin.

1-Ta‘rif. Agar X to‘plamdan olingan har bir x elementga biror qonunga binoan Y to‘plamdan aniq bitta y element mos qo‘yilgan bo‘lsa, u holda X to‘plamni Y to‘plamga akslantirish berilgan deyiladi va u quyidagicha belgilanadi: $f: X \to Y$ $X \xrightarrow{f} Y$.



Bu yerda y element x ning aksi (obrazi) deyiladi va $y=f(x)$ yoki $x \xrightarrow{f} y$ ko‘rinishda yoziladi, x ni esa y ning asli (proobrazi) deyiladi[45].

Hozirgi zamon fanida X to‘plamni Y to‘plamga akslantirish X to‘plamda aniqlangan funksiya deyiladi.

Bu funksiyaning umumiy ta’rifi bo‘lib, biz odatda X va Y lar haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lgan holni qaraymiz, bunday funksiyalar haqiqiy argumentli haqiqiy funksiya deyiladi.

Shunday hol uchun ta’rifni keltiraylik.

2-Ta‘rif. Elementlari haqiqiy sonlardan iborat bo‘lgan X va Y to‘plamlar berilgan bo‘lib, X to‘plamdan olingan har bir haqiqiy x songa biror qoida yoki qonunga binoan Y to‘plamda aniq bitta u element mos qo‘yilgan bo‘lsa, u holda X to‘plamda aniqlangan funksiya berilgan deyiladi.

---
[45] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

U y=f(x), y=φ(x), u=g(x), ... ko'rinishlarda yoziladi.

Bu yerda X funksiyaning aniqlanish yoki berilish sohasi, ba'zida borliq sohasi, Y esa uning o'zgarish sohasi deyiladi. x argument yoki erkli o'zgaruvchi, u esa erksiz o'zgaruvchi yoki funksiya deyiladi. $\{f(x) \mid x \in X\}$ to'plam funksiyaning qiymatlar to'plami deyiladi va Y(f) orqali belgilanadi. Funksiyaning aniqlanish sohasi D(f) orqali belgilanadi.

1-misol. 1. $y = 2x - 2$, 2. $y = x^2$, 3. $y = \dfrac{1}{x}$, 4. $f(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \le x \le 1 \\ 4 - x, & 1 < x \le 2. \\ x - 1, & 2 < x \le 3 \end{cases}$

2-misol. **a)** $f: R \to R, \quad f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ **b)** $f: R \to Z, \quad f(x) = sign(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

s) $f: R \to Z, \quad f(x) = [x],$ bu yerda $[x]$ -- x ning butun qismi.

d) $f: R \to R, \quad f(x) = x - [x]$

Quyidagi ikki holatda funksiya berilgan deyiladi:

a) funksiyaning aniqlanish sohasi,

b) x ga mos kelgan y ni topish qonuniyati berilgan bo'lsa.

Funksiyaning berilish usullari

Funksiya asosan uch xil usulda beriladi.

1. Analitik usul. Agar u ni topish uchun x ni ustida bajarish kerak bo'lgan amallar majmuasi berilgan bo'lsa, u holda funksiya analitik usulda berilgan deyiladi. Bu yerda amallar deyilganda qo'shish, ayirish, bo'lish, ko'paytirish, darajaga ko'tarish, ildiz chiqarish, logarifmlash va hakozolar tushuniladi.

Qisqacha aytganda funksiya *y=f(x)* formula yordamida berilgan bo'lsa, u holda funksiya analitak usulda berilgan deyiladi. Bu yerda tenglikning o'ng tomoni *f(x)* funksiyaning analitik ifodasi deyiladi.

Funksiya analitik usulda berilganda uning aniqlanish sohasi berilmasligi mumkin. Bu holda aniqlanish sohasi analitik ifoda ma'noga ega bo'lishi uchun x ning qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatalar to'plami tushuniladi. Bu soha funksiyaning tabiiy aniqlanish sohasi yoki borliq sohasi deyiladi.

3-misol. 1. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$, $x^2-1\neq 0$, $x\neq\pm1$, $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

2. $y=\sqrt{x^2-5x+6}$, $x^2-5x+6\geq 0$, (x-2)(x-3)$\geq$0, $D(f)=(-\infty;2]\cup[3;\infty))$

2. Jadval usuli. Ba’zi hollarda x argumentning ba’zi bir qiymatlariga mos keladigan funksiya qiymatlari jadvali beriladi. Bunga to‘rt xonali matematik jadval misol bo‘la oladi.

3. Grafik usul. y=f(x) funksiya *X* to‘plamda berilgan bo‘lsin. *XOY* koordinatalar tekislikdagi *{M(x,f(x))| x*∈*X}* nuqtalar to‘plami funksiyaning grafigi deyiladi.

Agar tekislikda funksiyaning grafigi berilgan bo‘lsa, u holda funksiya grafik usulda berilgan deyiladi.

Funksiya grafik usulda berilgan bo‘lsa, u holda $f(x_0)$ qiymatni topish uchun absissa o‘qidan x_0 nuqtani olib, undan ordinata o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazib, uni grafik bilan kesishish nuqtasining ordinatasi y_0 ni olamiz, o‘sha son $f(x_0)$ dan iborat bo‘ladi.

Matematik tahlilda uchraydigan ba’zi bir funksiyalarni sanab o‘taylik:

1. $D(x)=\begin{cases}1, & агар \quad x\in Q,\\ 0, & агар \quad x\in R\setminus Q\end{cases}$

Bu Dirixle funksiyasi deyiladi.

2. $y=signx=\begin{cases}-1, \text{ агар } x<0,\\ 0, \text{ агар } x=0,\\ 1, \text{ агар } x>0\end{cases}$

3. y=[x], x ning butun qismi. [1,5]=1, [1,4]=-2, [2]=2.

4. y={x}, x ning kasr qismi, ya’ni {x}=x-[x]

[1,4]=0,4; [3]=0, [1,4]=-1,4-(-2)=0,6.

Sonli ketma-ketlik

1-Ta‘rif. Aniqlanish sohasi natural sonlar to‘plami N dan iborat bo‘lgan funksiya sonli ketma-ketlik deyiladi[46].

Boshqachi aytganda, har bir natural n songa biror qoida yoki qonunga binoan aniq bitta x_n son mos qo‘yilagan bo‘lsa, u holda sonli ketma-ketlik berilgan deyiladi.

f(1), f(2), ... , f(n), … .

$f(1)=x_1$, $f(2)=x_2$, ... , $f(n)=x_n$, … desak, x_1, x_2, …, x_n, … sonli ketma-ketlikka ega bo‘lamiz.

x_1- ketma-ketlikning 1-hadi, x_2-2-hadi, ... , x_n-ketma-ketlikning n -hadi yoki umumiy hadi deyiladi. Ketma-ketlik (x_n) orqali belgilaylik. Ba’zi adabiyotlarda $\{x_n\}$ orqali belgilanadi.

1-misol.

[46] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

1. $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, \; x_n = \frac{1}{n}$
2. $2, 4, \ldots, 2n, \ldots, \; x_n = 2n$
3. -1,1,-1,1,..., $\quad x_n = (-1)^n$

2. Sonli ketma-ketlikning limiti

Aytaylik, biror $X \subset R$ to'plam va $x_0 \in R$ nuqta berilgan bo'lsin.

1-Ta'rif. Agar x_0 nuqtaning ixtiyoriy

$$U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, \; x_0 + \varepsilon), \; (\forall \varepsilon > 0)$$

atrofida X to'plamning x_0 nuqtadan farqli kamida bitta nuqtasi bo'lsa, ya'ni

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists x \in X, \; x \neq x_0 : \; |x - x_0| < \varepsilon$$

bo'lsa, x_0 nuqta X to'plamning **limit nuqtasi** deyiladi[47].

3. $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ to'plamning limit nuqtasi $x_0 = 0$ bo'ladi.

4. $X = N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ to'plam limit nuqtaga ega emas.

2-Ta'rif. Agar x_0 nuqtaning ixtiyoriy

$$U_\varepsilon^+(x_0) = (x_0, \; x_0 + \varepsilon) \; \left(U_\varepsilon^-(x_0) = (x_0 - \varepsilon, \; x_0)\right) \; (\forall \varepsilon > 0)$$

o'ng atrofida (chap atrofida) X to'plamning kamida bitta nuqtasi bo'lsa, x_0 nuqta X to'plamning **o'ng (chap) limit nuqtasi** deyiladi.

3-Ta'rif. Agar ixtiyoriy $r > 0$ uchun

$$I_r^+(x_0) = [x_0, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} \; : \; 0 \leq x - x_0 < r\}.$$

to'plamda X to'plamning kamida bitta nuqtasi bo'lsa, $"+\infty"$ X to'plamning limit "nuqta"si deyiladi.

Agar ixtiyoriy $r > 0$ uchun

$$I_r^-(x_0) = (x_0 - r, x_0] = \{x \in \mathbb{R} \; : \; 0 \leq x_0 - x < r\}.$$

to'plamda X to'plamning kamida bitta nuqtasi bo'lsa, $"-\infty"$ X to'plamning limit «nuqta»si deyiladi.

Keltirilgan ta'rif va misollardan ko'rinadiki, to'plamning limit nuqtasi shu to'plamga tegishli bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin ekan.

2-Teorema[48]. Agar x_0 nuqta $X \subset R$ to'plamning limit nuqtasi bo'lsa, u holda shunday sonlar ketma-ketligi $\{x_n\}$ topiladiki,

1) $\forall n \in N$ da $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$;

---

[47] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008
[48] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

2) $n \to \infty$ da $x_n \to x_0$;
bo‘ladi.

Bizga $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ketma-ketlik berilgan bo‘lsin.

2-ta‘rif. Agar har bir $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_0 \in N$ mavjud bo‘lib, n>n_0 tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha n larda $|a_n - l| < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda l son (a_n) ketma-ketlikning limiti deyiladi.

Limit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l,$ ko‘rinishlarda belgilanadi.

3-ta‘rif[49]. Limitga ega bo‘lgan ketma-ketlik yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.
Limitga ega bo‘lmagan ketma-ketlik uzoqlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.
Yaqinlashuvchi ketma-ketlikka misol keltiraylik:

2-misol. a) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ ketma-ketlikning limiti 1 bo‘lishini ko‘rsatamiz.

$$|x_n - 1| < \varepsilon, \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon, \frac{1}{n+1} < \varepsilon, n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \quad n_0 \ge \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] - 1$$

deb olsak, n>n_0 larda $|x_n - 1| < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Demak, $\lim \dfrac{n}{n+1} = 1$ ekan.

b) $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ ketma-ketlikning limiti e bo‘lishini ko‘rsatamiz.

Bu ketma-ketliklarning qiymatilari quyidagi jadvalda ko‘rsatilgan.

2. Yakinlashuvchi ketma ketlik ketma-ketliklar va ularning xossalari

1-ta’rif. Agar biror M son mavjud bo‘lib, barcha $n_0 \in$N lar uchun $|x_n| \le M$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda (x_n) ketma-ketlik chegaralangan deyiladi.

1^0. Agar $\lim x_n$=a va a>r (a<q) bo‘lsa, y holda biror nomerdan boshlab x_n>r (x_n<q) bo‘ladi.
2^0. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangan bo‘ladi.
3^0. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik yagona limitga ega.

Tenglik va tengsizlikda limitga o‘tish.

1. Agar barcha n∈N lar uchun $x_n = y_n$ bo‘lib, $\lim x_n$=a, $\lim y_n$=b bo‘lsa, u holda a=b bo‘ladi.

2. Agar barcha $n \in N$ lar uchun $x_n \le y_n$ bo‘lib, $\lim x_n$=a, $\lim y_n$=b bo‘lsa, u holda a≤b bo‘ladi.

3. Agar barcha n lar uchun $x_n \le y_n \le z_n$ bo‘lib, $\lim x_n$=a $\lim z_n$=a bo‘lsa, u holda $\lim y_n$=a bo‘ladi.

---

[49] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

3. Yig‘indi, ko‘paytma va bo‘linmaning limiti[50]

1-teorema. Agar (x_n) va (u_n) ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $(x_n \pm y_n)$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lib,
$\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

2-teorema. Agar (x_n) va (y_n) ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lsa, $(x_n\, y_n)$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo‘lib, $\lim(x_n\, y_n) = \lim x_n \lim y_n$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

3-teorema. Agar (x_n) va (y_n) ketma-ketliklar yaqinlashuvchi va $\lim y_n \neq 0$ bo‘lsa $(\frac{x_n}{y_n})$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo‘lib, $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. (isbotlang)

Aniqmasliklar va ularni yechish.

Yuqorida (x_n) va (y_n) ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lsa, $(x_n \pm y_n)$, $(x_n y_n)$, $(\frac{x_n}{y_n})(\lim y_n \neq 0)$ ketma-ketliklarnin har biri yaqinlashuvchi bo‘lishligini ko‘rib o‘tdik.

Endi ba’zi hollarni ko‘rib o‘taylik.

1. $\frac{0}{0}$ ko‘rinishdagi aniqmaslik. $\lim x_n = 0$, $\lim y_n = 0$ bo‘lgan holda x_n va y_n larning xarakteriga qarab, $\lim \frac{x_n}{y_n}$ turlicha bo‘lishi mumkin.

1-misol.

1. $x_n = \frac{1}{n}$, $\quad y_n = \frac{1}{n^2}$, $\quad \lim \frac{1}{n} = 0$, $\quad \lim \frac{1}{n^2} = 0$ $\quad \lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim n = +\infty$

2. $x_n = \frac{1}{n^3}, y_n = \frac{1}{n^2}, \lim \frac{1}{n^3} = 0, \lim \frac{1}{n^2} = 0, \lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{1}{n} = 0$

2. $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi aniqmaslik. $\lim x_n = \infty$ va $\lim y_n = \infty$ bo‘lsin. Bu holda ham x_n va y_n larning xarakteriga qarab, $\lim \frac{x_n}{y_n}$ turlicha bo‘lishi mumkin.

2-misol.

$x_n = n^2 + 1, \quad y_n = 2n^2 - n, \quad \lim(n^2 + 1) = +\infty,$

$$\lim(2n^2 - n) = +\infty \qquad \lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{n^2+1}{2n^2 - n} = \lim \frac{n^2(1+\frac{1}{n^2})}{n^2(2-\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1+0}{2-1} = \frac{1}{2}$$

[50] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

3. $0\cdot\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik. $\lim x_n=0$, $\lim y_n=\infty$ bo'lgan holda, $0\cdot\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik $\frac{o}{o}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishga keltirib yechiladi.

3-misol. $x_n=\frac{1}{n^3+1}$, $y_n=n^3+2n$, $\lim\frac{1}{n^3+1}=0$, $\lim(n^3+2n)=+\infty$

$$\lim(x_ny_n)=\lim\frac{n^3+2n}{n^3+1}=\lim\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^3}}=1$$

Bulardan tashqari $\infty-\infty$, 0^0 ,∞^0, 1^∞ ko'rinishdagi aniqmas-liklar mavjud, bu aniqmasliklarni $\frac{0}{0}$ va $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmasliklarga keltirib xal qilamiz.

e soni. $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ o'zgaruvchinig limiti mavjudligini ko'rsatamiz.

Buning uchun $y_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ o'zgaruvchini tekshiraylik. Bu ketma-ketlikni kamayuvchi ekanligini ko'rsatamiz:

$$\frac{y_n}{y_{n+1}}=\frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}}=(\frac{n+1)^2}{n(n+2)})^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1}=(1+\frac{1}{n(n+2)})^{n+2}\cdot\frac{n}{n+1}$$

Bernulli tengsizligiga asosan $(1+\frac{1}{n(n+1)})^{n+2}\geq 1+\frac{n+2}{n(n+2)}=1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}$ ekanligini hisobga olsak, $\frac{y_n}{y_{n+1}}\geq\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}=1$ ya'ni $u_n\geq u_{n+1}$ tengsizlik kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan barcha $n\in N$ lar uchun $y_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}>0$ bo'lganligidan u quyidan chegaralangan. Shunday qilib, u kamayuvchi va quyidan chegaralanganligi uchun u chekli limitga ega. $y_n=(1+{}^1/_n)^{n+1}=(1+{}^1/_n)^n\bullet(1+{}^1/_n)= =x_n\bullet(1+{}^1/_n)$ tengsizlikdan chekli lim

$a_n=\lim(1+\frac{1}{n})^n$ mavjud ekanligi kelib chiqadi. Bu limit e orqali belgilanadi.

$$e=2.718281828459045\cdots$$

14-MA'RUZA FUNKSIYANING LIMITI VA UNING XOSSALARI. CHEKSIZ KATTA VA CHEKSIZ KICHIK MIQDORLAR

REJA

1. Funksiyaning limitining ta'riflari
2. Limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari
3. Cheksiz katta va cheksiz kichik miqdorlar

1. Funksiyaning limitining ta'riflari

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, x_0 nuqta X to'plam-ning limit nuqtasi bo'lsin. x_0 nuqtaga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, ..., x_n, ... \ (x_n \in X, \ \ x_n \neq x_0)$$

ketma-ketlikni olib, funksiya qiymatlaridan iborat $\{f(x_n)\}$:

$$f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$$

ketma-ketlikni hosil qilamiz.

Funksiya limitining ta'riflari[51]**.** Bizga X to'plam berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. a nuqtaning ixtiyoriy $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ atrofida X to'plamning a dan farqli kamida bitta nuqtasi mavjud bo'lsa, u holda a nuqta X to'plamning limit nuqtasi deyiladi.

2-ta'rif. Agar a nuqtaning ixtiyoriy $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ atrofida X to'plamning cheksiz ko'p nuqtalari mavjud bo'lsa, a nuqta X to'plamning limit nuqtasi deyiladi.

Bu ta'riflar o'zaro ekvivalentdir.

1-misol. a) $[0;5]$ to'plamning har bir nuqtasi uning limit nuqtasi bo'ladi, boshqa limit nuqtalari yo'q.

b) $(0;5)$ interval uchun $[0;5]$ segmentning barcha nuqtalari limit nuqta bo'ladi.

Bu misollardan ko'rinadiki to'plamning limit nuqtasi uning elementi bo'lishi ham bo'lmasligi ham mumkin.

c) $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ to'plam limit nuqtaga ega emas.

Agar a X to'plamning limit nuqtasi bo'lsa, u holda X to'plamdan a ga yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik ajratib olish mumkinligini ko'rsatamiz, bunda $x_n \in X, x_n \neq a$. a nuqta

[51] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lganligi uchun a nuqtaning har bir $(a-\frac{1}{n};a+\frac{1}{n})$ atrofida X to‘plamning a dan farqli kamida bitta x_n nuqtasi mavjud. Ya’ni $|x_n-a|<\frac{1}{n}$, $n=1,2,...$.

Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $n_0\in N$ topilib, barcha $n>n_0$ larda $\frac{1}{n}<\varepsilon$ bo‘ladi.Demak, har bir $\varepsilon>0$ uchun $n_0\in N$ son topilib,barcha $n>n_0$ larda $|x_n-a|<\frac{1}{n}$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bundan $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ kelib chiqadi.

3-ta’rif (Geyne). Agar X to‘plamdan olingan a ga intiluvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik qanday bo‘lmasin, funksiya qiymatlaridan tuzilgan $(f(x_n))$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona b (chekli yoki cheksiz) limitga intilsa, b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti[52] deb ataladi.

Funksiya limiti $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ kabi belgilanadi, ba’zan $x\to a$ da $f(x)\to b$ ko‘rinishda yoziladi.

2-misol. **a)** $F(x)=3-x^2$ funksiyaning $x\to1$ dagi limiti 2 ekanligini ko‘rsating. $x_n\neq1$ va $\lim x_n=1$ bo‘ladigan (x_n) ketma-ketlik olaylik. U holda $\lim f(x_n)=\lim(3-x_n^2)=\lim3-\lim x_n^2=3-1=2$. Demak, ta’rifga ko‘ra $\lim\limits_{x\to1}(3-x^2)=2$.

b) $f(x)=\sin x, x\to+\infty$ da limitga ega emas. Haqiqatan limiti $+\infty$ bo‘lgan turli $x_n=\pi n$, $x_n'=(2n+\frac{1}{2})\pi$ ketma-ketliklarni olaylik.

Bunda $f(x_n)=\sin\pi n=0$ $f(x_{0_n})=\sin(2n+\frac{1}{2})\pi=1$ bo‘lib, $\lim f(x_n)=0, \lim f(x_n')=1$. Bu esa $x\to+\infty$ da $f(x)=\sin x$ funksiyaning limiti mavjud emasligini ko‘rsatadi.

Funksiya limitini boshqacha ham ta’riflash mumkin.

---

[52] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

4-ta'rif (Koshi). Agar har bir $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, x ning $0 < |x-a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x)-b| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti deb ataladi (bu yerda $x \in X$ deb qaraymiz)

Funksiya limitining Koshi va Geyne ta'riflari o'zaro ekvivalent.

5-ta'rif. Agar har bir $M > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, x ning $0 < |x-a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $\left|f(x)\right| > M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti ∞ deyiladi. Agar x ning a ga yetarlicha yaqin qiymatlarida $f(x) > 0, (f(x) < 0)$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ $(\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty)$ bo'ladi.

Shunga o'xshash $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ larni ham ta'riflash mumkin.[53]

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0 \qquad \alpha > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty \qquad \alpha < 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m}$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \qquad a > 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \qquad a < 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty \ a > 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty \ a < 1$$

1-misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$$

funksiyaning $x_0 = 4$ nuqtadagi limiti topilsin.

◄ Quyidagi $\{x_n\}$:

[53] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 4 \quad (x_n \neq 4, \quad n = 1, 2, \ldots)$$

ketma-ketlikni olaylik. Unda

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 16}{x_n^2 - 4x_n} = \frac{x_n + 4}{x_n}$$

bo‘lib, $n \to \infty$ da $f(x_n) \to 2$ bo‘ladi. Demak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = 2. \ \blacktriangleright$$

2-misol. Ushbu

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

funksiyaning $x \to 0$ dagi limiti mavjud bo‘lmasligi ko‘rsatilsin.

◀ Ravshanki, $n \to \infty$ da

$$x_n' = \frac{2}{(4n-1)\pi} \to 0, \quad x_n'' = \frac{2}{(4n+1)\pi} \to 0$$

bo‘ladi.

Bu ketma-ketliklar uchun

$$f(x_n') = \frac{4n-1}{2}\pi = -1, \quad f(x_n'') = \frac{4n+1}{2}\pi = 1$$

bo‘lib, $n \to \infty$ da

$$f(x_n') \to -1, \quad f(x_n'') \to 1$$

bo‘ladi. Demak, berilgan funksiya $x_0 = 0$ nuqtada limitga ega emas. ▶

3-misol. $f(x) = C = \text{const}$ bo‘lsin. Bu funksiya uchun

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = C$$

bo‘ladi.

5-misol. Faraz qilaylik, $X = R \setminus \{0\}$ da $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ bo‘lsin. Bu funksiya uchun

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

bo‘ladi.

◀Ma’lumki, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ uchun

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tgx$$

bo‘ladi. Bu tengsizliklardan, funksiyalarning juftligini hisobga olib, $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ da

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

bo‘lishini topamiz. Keyingi tengsizliklardan esa

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} < 2 \cdot \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Endi $\forall \varepsilon > 0$ ni olib, $\delta = \min\{\varepsilon;\ 1\}$ deyilsa, unda $\forall x$, $|x| < \delta$, $x \neq 0$ uchun

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \varepsilon$$

bo‘ladi. Demak,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \ ►$$

5-ta’rif. ([2], p. 81, Def. 3.21[54]) Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $\forall x \in X \bigcap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$ uchun $f(x) > \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti $+\infty$ deb ataladi va

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

kabi belgilanadi.

7-misol. Aytaylik, $X = (0,\ +\infty)$, $x_0 = +\infty$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ bo‘lsin. U holda

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

bo‘ladi.

◄ Haqiqatan ham, $\forall \varepsilon > 0$ sonnni olaylik. Ravshanki, $\forall x > 0$ uchun

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Demak, $\delta = \dfrac{1}{\varepsilon}$ deyilsa, unda $\forall x > \delta$ uchun

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x} < \frac{1}{\delta} = \varepsilon$$

bo‘ladi. ►

[54] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

Limitga ega bo‘lgan funksiyalarning xossalari[55].

1⁰. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ bo‘lib, $b>p,(b<q)$ bo‘lsa, u holda x ning a ga yetarlicha yaqin $x\neq a$ qiymatlarida $f(x)>p,(f(x)<q)$ bo‘ladi.

Xususiy holda, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ bo‘lib, $b>0,(b<0)$ bo‘lsa, x ning a ga yetarlicha yaqin $(x\neq a)$ qiymatlarida $f(x)>0,(f(x)<0)$ bo‘ladi.

Bu xossani ketma-ketlikdagi kabi isbotlash mumkin.

2⁰. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ limit mavjud bo‘lsa, x ning a ga yetarlicha yaqin $(x\neq a)$ qiymatlarida $f(x)$ funksiya chegaralangan bo‘ladi.

Isbot. Ta’rifga ko‘ra har bir $\varepsilon>0$ uchun $\delta>0$ topilib, x ning $0<|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida $|f(x)-a|<\varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. $|f(x)-a|<\varepsilon \Leftrightarrow a-\varepsilon<f(x)<a+\varepsilon$, demak, $f(x)$ funksiya x ning $(a-\delta;a+\delta)$ atrofida chegaralangan.

3⁰. Agar x ning a nuqtaning biror $(a-\delta;a+\delta)$ atrofidan olingan barcha qiymatlarida $f(x)\le g(x)\le \varphi(x)$ tengsizlik o‘rinli va $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ limitlar mavjud bo‘lib, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$ bo‘ladi.

Isbot. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ bo‘lganidan $\varepsilon>0$ uchun $\delta_1>0$ topilib, tengsizlik o‘rinli bo‘ladigan barcha x larda $b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b$ bo‘lganidan $\varepsilon>0$ uchun $\delta_2>0$ topilib, $0<|x-a|<\delta_2$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladigan barcha x larda $b-\varepsilon<\varphi(x)<b+\varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ deb olsak, $0<|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda $b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$ $b-\varepsilon<\varphi(x)<b+\varepsilon$ tengsizliklarning ikkalasi ham o‘rinli bo‘ladi.

Bulardan va $f(x)\le g(x)\le\varphi(x)$ tengsizlikdan $b-\varepsilon<g(x)<b+\varepsilon$ tengsizlik kelib chiqadi. Bundan $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$ bo‘ladi.

---

[55] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

Limitning yagonaligi. Agar $f(x)$ funksiya $x \to a$ da limitga ega bo‘lsa, bu limit yagona bo‘ladi.

Isboti ketma-ketlikdagi kabi ko‘rsatiladi.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cos x$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \tan x$ do not exist

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^{\pm}} \tan x = \mp\infty, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{x\to\pm1} \arcsin x = \pm\frac{\pi}{2} = \arcsin(\pm1)$$

$$\lim_{x\to+1} \arccos x = 0 = \arccos 1, \qquad \lim_{x\to-1} \arccos x = \pi = \arccos(-1)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}$$

Asosiy elementar funksiyalarning limiti.

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^a \qquad (a \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{x\to0} (1+x)^{1/x} = \mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a} \quad (a>0); \text{ in particular, } \lim_{x\to0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{a^x-1}{x} = \log a \quad (a>0); \qquad \text{in particular, } \lim_{x\to0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1$$

1-misol. Ushbu

$$\lim_{x\to1} \frac{x+x^2+x^3+\ldots+x^n-n}{x-1}$$

limit hisoblansin.

◀ Bu limitni yuqoridagi xossalardan foydalanib hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3+\ldots+x^n-n}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+(x^3-1)+\ldots+(x^n-1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)[1+(x+1)+(x^2+x+1)+\ldots+(x^{n-1}+x^{n-2}+x+1)]}{x-1}=$$

$$=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}\ . ▶$$

2-misol. Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

limit hisoblansin.

◀ Ma'lumki, $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$. Shuni hisobga olib topamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]=\frac{1}{2}\ . ▶$$

Mashqlar

1. Ushbu

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

limitlarning ta'riflari keltirilsin.

2. Ushbu $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}$ funksiya $x_0=0$ nuqtada limitga ega emasligi isbotlansin.

3. Limit ta’rifidan foydalanib, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$ bo‘lishi isbotlansin.

4. $f(x)$ funksiya a nuqtada b limitga ega bo‘lishi uchun uning shu nuqtadagi o‘ng va chap limitlari mavjud bo‘lib,

$$f(a+0)=f(a-0)=b$$

tengliklar o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarli bo‘lishi isbotlansin.

Agar $\{\tilde{o}_n\}$ ketma-ketlikning limiti 0 ga teng bo‘lsa, bu ketma-ketlik cheksiz kichik miqdor deyiladi.

Masalan, $\alpha_n=\dfrac{1}{n}$ ketma-ketlik cheksiz kichik miqdor bo‘ladi, chunki

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Aytaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti a ga teng bo‘lsin:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

U holda $\alpha_n=x_n-a$ ó÷óí $|\alpha_n|<\varepsilon$ bo‘lib, u cheksiz kichik miqdor bo‘ladi. Natijada

$$x_n=a+\alpha_n$$

bo‘ladi. Masalan, $x_n=\dfrac{n+1}{n}$ ketma-ketlik uchun $x_n=1+\dfrac{1}{n}$ bo‘lib, $\alpha_n=\dfrac{1}{n}$ cheksiz kichik miqdor bo‘lganligidan

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Biror $\{x_n\}$:

$$x_1,x_2,x_3,\ldots x_n,\ldots$$

ketma-ketlik berilgan bo‘lsin.

Agar har qanday musbat M son olinganda ham, ketma-ketlikning biror hadidan boshlab, keyingi barcha hadlari uchun $|x_n|>M$ bo‘lsa, x_n ketma-ketlikning limiti cheksiz deyiladi va $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ kabi yoziladi.

Masalan,

$$x_n=(-1)^n\cdot n:$$
$$-1,2,-3,4\ldots$$

ketma-ketlikning limiti ∞ bo‘ladi, chunki

$$|x_n| = |(-1)^n n| = n$$

bo‘lib, har qanday musbat M son olinganda ham shunday natural n son topiladiki, $n > M$ tengsizlik bajariladi.

Agar $\{\tilde{o}_n\}$ ketma-ketlikning limiti cheksiz,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

bo‘lsa, $\{\tilde{o}_n\}$ cheksiz katta miqdor deyiladi.

Masalan, $x_n = n$:

$$1,2,3,4,\ldots$$

ketma-ketlik cheksiz katta miqdor bo‘ladi, chunki $\lim_{n\to\infty} n = \infty$.

1-lemma[56]. *Ikki cheksiz kichik miqdorlar yig‘indisi cheksiz kichik miqdor bo‘ladi.*

◄Aytaylik, α_n va β_n- cheksiz kichik miqdorlar bo‘lsin. Unda ta’rifga ko‘ra $\forall\varepsilon > 0$ uchun n ning biror qiymatidan boshlab

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

bo‘ladi.

Ravshanki,

$$|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n|.$$

Demak, n ning biror qiymatidan boshlab

$$|\alpha_n + \beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bo‘ladi. Bu esa $\alpha_n + \beta_n$ ning cheksiz kichik miqdor ekanini bildiradi. ►

2-lemma[57]. *Chegaralangan ketma-ketlik bilan cheksiz kichik miqdor ko‘paytmasi cheksiz kichik miqdor bo‘ladi.*

◄Aytaylik, x_n -chegaralangan ketma-ketlik α_n esa cheksiz kichik miqdor bo‘lsin. Unda $\forall n \in N$ uchun $|x_n| \le M$ bo‘ladi, bunda M tayin o‘zgarmas son.

Modomiki, α_n cheksiz miqdor ekan, n ning biror qiymatidan boshlab,

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

bo‘ladi. Natijada

$$|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

bo‘lib, undan

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot \alpha_n = 0$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, $x_n \cdot \alpha_n$ -cheksiz kichik miqdor. ►

---

[56] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008
[57] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

Xulosa

1. To‘plamning limit nuqtasi - a nuqtaning ixtiyoriy $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ atrofida X to‘plamning cheksiz ko‘p nuqtalari mavjud bo‘lsa, a X to‘plamning limit nuqtasi deyiladi.

2. Funksiyaning limiti - a nuqta X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lib, a ga yetarlicha yaqin $x \in X, x \neq a$ larda $f(x)$ son b songa yetarlicha yaqin bo‘lsa, b son $f(x)$ funksiyaning $x \to a$ da limiti deyiladi.

3. Cheksiz kichik funksiya - $\lim\limits_{x \to a} a(x) = 0$ bo‘lsa, $a(x)$ funksiya $x \to a$ da cheksiz kichik funksiya deyiladi.

4. Cheksiz katta funksiya - $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ bo‘lsa $f(x)$ funksiya $x \to a$ da cheksiz katta funksiya deyiladi.

15-MA'RUZA BIRINCHI VA IKKINCHI AJOYIB LIMIT. FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI. UZILISH NUQTALARI VA UNING TURLARI

REJA

1. Birinchi va ikkinchi ajoyib limit
2. Funksiyaning uzluksizligi
3. Uzilish nuqtalari va uning turlari

Faraz qilaylik, $X = R \setminus \{0\}$ da $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

bo'ladi.

◀Ma'lumki, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ uchun

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tgx$$

bo'ladi. Bu tengsizliklardan, funksiyalarning juftligini hisobga olib, $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ da

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

bo'lishini topamiz. Keyingi tengsizliklardan esa

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\cdot\frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Endi $\forall\varepsilon > 0$ ni olib, $\delta = \min\{\varepsilon; 1\}$ deyilsa, unda $\forall x$, $|x| < \delta$, $x \neq 0$ uchun

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \blacktriangleright$$ [58]

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sin x, \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\cos x, \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\tan x \qquad \text{do not exist}$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^{\pm}}\tan x=\mp\infty, \qquad \forall k\in\mathbb{Z}$$

$$\lim_{x\to\pm 1}\arcsin x=\pm\frac{\pi}{2}=\arcsin(\pm 1)$$

$$\lim_{x\to+1}\arccos x=0=\arccos 1, \qquad \lim_{x\to-1}\arccos x=\pi=\arccos(-1)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\arctan x=\pm\frac{\pi}{2}$$

Asosiy elementar funksiyalarning limiti.[59]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}=e^{a} \qquad (a\in\mathbb{R})$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\log a}\ (a>0);\ \text{in particular,}\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a \quad (a>0); \qquad \text{in particular,}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

1-misol. Ushbu

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3+\ldots+x^n-n}{x-1}$$

[58] 2.Canuto, C., Tabacco, A. Mathematical Analysis I,93p

[59] 2.Canuto, C., Tabacco, A. Mathematical Analysis I,106p.

limit hisoblansin.

◀ Bu limitni yuqoridagi xossalardan foydalanib hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3+...+x^n-n}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+(x^3-1)+...+(x^n-1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)[1+(x+1)+(x^2+x+1)+...+(x^{n-1}+x^{n-2}+x+1)]}{x-1}=$$

$$=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}\ .\ ▶$$

2-misol. Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

limit hisoblansin.

◀ Ma'lumki, $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$. Shuni hisobga olib topamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]=\frac{1}{2}\ .\ ▶$$

2) Ushbu

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\tilde{o}}=e$$

limit isbotlansin.

Ma'lumki,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e.$$

Aytaylik, $x>1$ bo‘lsin. Agar x ning butun qismini n desak, unda $n\le x<n+1$ bo‘lib,

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}$$

bo‘ladi. Bu munosabatlardan

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Ravshanki,

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\cdot(1+\frac{1}{n+1})^{-1}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{-1}=e\cdot1=e,$$
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}\cdot(1+\frac{1}{n})=e\cdot1=e.$$

U holda

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\tilde{o}}\right)^{\tilde{o}}=e$$

bo‘ladi.

Aytaylik, $\tilde{o}<-1$ bo‘lsin. Agar $\tilde{o}=-t$ deyilsa, u holda

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{\tilde{o}}\right)^{\tilde{o}}=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=e\cdot1=e$$

bo‘ladi. Demak,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\tilde{o}}\right)^{\tilde{o}}=e.$$

Keyingi ajoyib limitlarni keltirish bilan kifoyalanamiz.

3) Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e, \qquad (a>0, a\neq 1)$$

xususan,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

munosabat o‘rinli.

4) Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad (a>0)$$

tenglik o‘rinli.

5) Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$

tenglik o‘rinli.

6) Ushbu

$$\lim_{x\to a}\left[U(x)\right]^{V(x)}=C$$

limitda:

a) agar

$$\lim_{x\to a}U(x)=A, \qquad \lim_{x\to a}V(x)=B \qquad bo'lsa,$$
$$Ñ=A^B \qquad bo'ladi$$

b) agar

$$\lim_{x\to a}U(x)=A\neq 1, \qquad \lim_{x\to a}V(x)=\pm\infty$$

bo‘lsa, qaralayotgan limit bevosita hisoblanadi.

v) agar

$$\lim_{x\to a} U(x) = 1, \qquad \lim_{x\to a} V(x) = \infty$$

bo‘lsa, u holda

$$C = \ell^{\lim\limits_{x\to a}[U(x)-1]V(x)}$$

bo‘ladi. ►

Funksiya limiti haqidagi ma’lumotlardan, shuningdek muhim limitlardan foydalanib funksiyalarning limitini hisoblaymiz.

1) *Ushbu*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x + x^2 + x^3 - 3}{x - 1}$$

limit hisoblansin.

◄Bu limit quyidagicha hisoblanadi:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x + x^2 + x^3 - 3}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x - 1 + x^2 - 1 + x^3 - 1}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x - 1 + (x-1)(x+1) + (x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(1 + x + 1 + x^2 + x + 1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} 3 + 2\lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} x^2 = 3 + 2 + 1 = 6. \ ►$$

2) *Ushbu*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 10x}$$

limit hisoblansin.

◄Bu limitni hisoblashda

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

dan foydalanamiz.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 10x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}{\frac{\sin 10x}{10x}\cdot 10x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{10x}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{2}. \blacktriangleright$$

3)*Ushbu*

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\sin x}$$

limit hisoblansin.

◀Bu limitni hisoblashda

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

lardan foydalanamiz.

Avvalo berilgan limit ostidagi kasrning surat va maxrajini x ga bo‘lamiz, so‘ng limitni hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2^x-1}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{\ln 2}{1}=\ln 2. \blacktriangleright$$

4) *Ushbu*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$$

hisoblansin.

◀Bu limit quyidagiga hisoblanadi:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x\cdot\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e\cdot e=e^2. \blacktriangleright$$

5)*Ushbu*

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$$

limit hisoblansin.

◀Avvalo quyidagi $x=t^6$ almashtirishni bajaramiz. Bunda

$x\to 1$ va $t\to 1$. Natijada

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim_{t\to 1}\frac{1-t^3}{1-t^2}$$

bo‘ladi. Keyingi limitni hisoblaymiz:

$$\lim_{t\to 1}\frac{1-t^3}{1-t^2}=\lim_{t\to 1}\frac{(1-t)\left(1+t+t^2\right)}{(1-t)(1+t)}=\lim_{t\to 1}\frac{1+t+t^2}{1+t}=\frac{3}{2}.$$

Demak,

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\frac{3}{2}.\ ▶$$

6)*Ushbu*

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$$

limit hisoblansin.

◀Bu limitni hisoblash uchun $1-x=t$ almashtirish bajaramiz.

Unda $x\to 1$ *äà* $t\to 0$ bo‘lib,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{t}=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}\cdot t}=\frac{\pi}{2}\cdot 1=\frac{\pi}{2}$$

bo‘ladi. ▶

7)*Ushbu*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$$

limit hisoblansin.

◀Bu limitni hisoblashda

$$\lim_{x\to a}\left[U(x)\right]^{V(x)}=C$$

dagi v) holidan foydalanamiz. Ravshanki,

$$U(x)=\frac{x-1}{x+1}, \qquad V(x)=x$$

bo‘lib,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=1, \qquad \lim_{x\to\infty}x=\infty$$

bo‘ladi.Demak,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x-1}{x+1}-1\right]\cdot x},$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)\cdot x=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1-x-1}{x+1}=\lim_{x\to\infty}(-2)\frac{x}{x+1}=-2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=-2.$$

Shunday qilib

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=e^{-2}$$

bo‘ladi. ▶

2. Funksiyaning uzluksizligi. Uzluksiz funksiyalarning xossalari[60]

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya E to‘plamda $(E\subset R)$ berilgan bo‘lib, $x_0\in E$ bo‘lsin.

1-ta’rif. *Agar*

[60] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{1}$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Masalan

$$y = f(x) = x^2$$

funksiya ixtiyoriy $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ da uzluksiz bo'ladi, chunki

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x^2 = \lim_{x\to x_0}(x\cdot x) = x_0\cdot x_0 = x_0^2 = f(x_0).$$

Agar

$$f(x_0+0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'ngdan,

agar

$$f(x_0-0) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chapdan uzluksiz deyiladi.

Masalan

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2, & agar\ \ x \le 2 \\ x, & agar\ \ x > 2 \end{cases}$$

funksiya uchun

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0}\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -2 = f(2),$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} x = 2 \ne f(2)$$

bo'ladi. Demak berilgan funksiya $x_0 = 2$ nuqtada chapdan uzluksiz.

$y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi sharti

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) - f(x_0) \right] = 0. \qquad (1')$$

Quyidagi belgilarni kiritamiz:

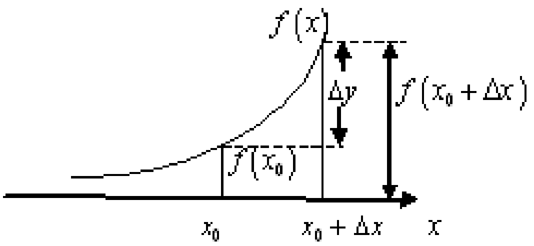
$$\Delta x = x - x_0, \qquad \Delta y = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \qquad (2)$$

Odatda, Δx argument orttirmasi , Δy esa funksiya orttirmasi deyiladi.

(2) munosabatlardan topamiz:

$$x = x_0 + \Delta x, \qquad \Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Δx va Δy larning geometrik ma'nolari 1- chizmada keltirilgan.



1-chizma

(1) va **(2)** munosabatlardan

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0 \qquad (3)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, **(3)** munosabat $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligi ta'rifi sifatida qaralishi mumkin.

Masalan, $f(x) = c = const$ funksiya ixtiyoriy $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ nuqtada uzluksiz bo'ladi, chunki

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right] = \lim_{\Delta x \to 0} (c - c) = 0.$$

2-ta'rif. *Agar $f(x)$ funksiya E to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, funksiya E to'plamda uzluksiz deyiladi.*

Uzluksiz funksiyalar ustida amallar

Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar E to'plamda berilgan bo'lsin.

1-teorema. *Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x_0 \in E$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda*

$$c\cdot f(x),\quad (c=const),\qquad f(x)\pm g(x),\qquad f(x)\cdot g(x),\qquad \frac{f(x)}{g(x)}\qquad (g(x_0)\neq 0)$$

funksiyalar ham x_0 *nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

◄Shartga ko'ra $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz. Unda

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),\ \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$$

bo'ladi. Funksiya limiti xossalaridan foydalanib topamiz:

$$\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x)=c\cdot\lim_{x\to x_0} f(x)=c\cdot f(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)\pm g(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)\cdot g(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

Keyingi munosabatlardan

$$c\cdot f(x),\qquad f(x)\pm g(x),\qquad f(x)\cdot g(x),\qquad \frac{f(x)}{g(x)}$$

funksiyalarning x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi kelib chiqadi. ►

2-teorema[61]. *Agar* $y=f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada uzluksiz bo'lib,* $u=\varphi(y)$ *funksiya* y_0 *nuqtada* ($y_0=f(x_0)$) *uzluksiz bo'lsa, u holda* $u=\varphi(f(x))$ *murakkab funksiya* x_0 *nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

◄ Shartga ko'ra $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz. Unda

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=y_0$$

[61] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

bo‘ladi. Shuningdek, $u=\varphi(y)$ funksiya y_0 nuqtada uzluksiz. Unda

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=\varphi(y_0)$$

bo‘ladi. Demak,

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(f(x))=\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=\varphi(y_0)=\varphi(f(x_0)).$$

Bu esa $\varphi(f(x))$ murakkab funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lishini bildiradi. ►

Uzluksiz sodda funksiyalarni keltiramiz.

1) $f(x)=c=const,\quad f(x)=x$ funksiyalarning ixtiyoriy $x\in(-\infty,+\infty)$ da uzluksiz bo‘lishi ravshan.

2) $f(x)=x^m$ (m - natural son) bo‘lsin. Bu funksiya m ta uzluksiz funksiyalarning ko‘paytmasi sifatida ixtiyoriy $x\in(-\infty,+\infty)$ da uzluksiz bo‘ladi.

3) $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ bo‘lsin, bunda $a_0,a_1,\ldots a_n$ o‘zgarmas sonlar. Bu funksiya ham 1-teoremaga ko‘ra ixtiyoriy $x\in(-\infty,+\infty)$ da uzluksiz bo‘ladi.

4) Aytaylik,

$$f(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m}$$

bo‘lsin, bunda $a_0,a_1,\ldots a_n$ va $b_0,b_1,\ldots b_m$ o‘zgarmas sonlar.

Bu funksiyaning ixtiyoriy

$$x\in E=(-\infty,+\infty)\setminus\{x: b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m=0\}$$

da uzluksiz bo‘lishi 1-teoremadan kelib chiqadi.

5) $f(x)=\sin x$ bo‘lsin. Ixtiyoriy $x\in(-\infty,+\infty)$ uchun

$$\Delta f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x$$

bo'ladi. Trigonometriyadan ma'lum bo'lgan ushbu

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

tenglikdan foydalanib topamiz:

$$\Delta f(x) = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Ravshanki,

$$\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1$$

va $\Delta x \to 0$ da $\sin\frac{\Delta x}{2} \to 0$. Demak,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x) = 0.$$

Bu esa $f(x)=\sin x$ funksiyaning ixtiyoriy $x\in(-\infty,+\infty)$ da uzluksiz ekanini bildiradi.

6) $f(x)=\cos x$ bo'lsin. Ixtiyoriy $x\in(-\infty,+\infty)$ uchun

$$\Delta f(x) = \cos(x+\Delta x) - \cos x$$

bo'ladi. Ma'lum

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Bu formuladan foydalanib topamiz:

$$\Delta f(x) = -2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Ravshanki,

$$\left|\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1$$

va $\Delta x \to 0$ da $\sin\frac{\Delta x}{2} \to 0$. Demak,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0$$

bo‘lib, $f(x) = \cos x$ funksiya ixtiyoriy $x \in (-\infty, +\infty)$ da uzluksiz bo‘ladi

7) Ushbu

$$f(x) = tgx, \qquad f(x) = ctgx$$

funksiyalarning uzluksizligi $\sin x, \cos x$ funksiyalarning uzluksizligi hamda 1-teoremadan kelib chiqadi.

$f(x) = tgx$ funksiya ixtiyoriy $x \in (-\infty, +\infty) \setminus \{x : x = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ da uzluksiz bo‘ladi.

8) $f(x) = a^x, \quad f(x) = \log_a x, \quad f(x) = \arcsin x, \quad f(x) = \arccos x,$ $f(x) = arctgx, \quad f(x) = arcctgx$ funksiyaning o‘z aniqlanish soxalarida uzluksiz bo‘lishi yuqoridagidek ko‘rsatiladi.

Demak, barcha sodda funksiyalar o‘z aniqlanish sohalarida uzluksiz bo‘ladi.

3. Funksiyaning uzilishi va uzilishning turlari[62]

Ma’lumki,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi. $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lishi ushbu

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ ning mavjudligi ,

2) $A = f(x_0)$ bo‘lishi

shartlarining bajarilishi bilan ifodalanadi.

[62] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

Agar

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

munosabat bajarilmasa, $f(x)$ funksiya uzilishga ega, x_0 nuqta esa uzilish nuqtasi[63] deyiladi.

Ma'lumki, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi $f(x_0+0)$ o'ng limiti, $f(x_0-0)$ chap limiti mavjud bo'lib,

$$f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$$

bo'lsa, yoki bu limitlarda xech bo'lmaganda biri mavjud bo'lmasa, $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lmaydi. Binobarin, bu holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzilishga ega bo'ladi.

Masalan,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & agar \quad x<0 \quad bo'lsa \\ 0, & agar \quad x=0 \quad bo'lsa \\ 1, & agar \quad x>0 \quad bo'lsa \end{cases}$$

funksiya uchun

$$f(0+0) = \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} 1 = 1,$$

$$f(0-0) = \lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} (-1) = -1$$

bo'lib, $x=0$ nuqtada funksiyaning o'ng va chap limitlari bir-biriga teng bo'lmaydi. Demak, berilgan funksiya uzilishga ega va $x=0$ nuqtada uning uzilish nuqtasi bo'ladi.

Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & agar \quad x>0 \quad bo'lsa, \\ -x, & agar \quad x \le 0 \quad bo'lsa, \end{cases}$$

funksiya uchun

---

[63] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\sin\frac{1}{x} \text{ - mavjud emas,}$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}(-x)=0$$

bo‘ladi. Demak, bu funksiya $x=0$ nuqtda uziladi.

Ushbu

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & agar \quad x\neq 0 \quad bo'lsa, \\ 1, & agar \quad x=0 \quad bo'lsa, \end{cases}$$

uchun

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x^2=0$$

bo‘lib, u berilgan funksiyaning $x=0$ nuqtadagi qiymatiga teng emas: $f(0)\neq 0$. Demak, funksiya $x=0$ nuqtada uziladi.

Funksiyaning uzilishi nuqtalari qatoriga uning aniqlanish sohasiga tegishli bo‘lmagan, sohaning chegaraviy nuqtalari ham kiritiladi.

Xususan, funksiyaning aniqlanish sohasi intervaldan iborat bo‘lsa, intervalning chegaraviy nuqtalari uzilish nuqtalari bo‘lishi mumkin.

Masalan, $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiya $E=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$da aniqlangan bo‘lib, $x=0$ nuqta (ravshanki, bu nuqta funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli emas va u oraliqning chegarasi) uzilish nuqta bo‘ladi.

Shunday qilib,

1) x_0 nuqta funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli va

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

shart bajarilmaganda,

2) x_0 nuqta aniqlanish sohasiga tegishli bo‘lmasdan, uning chegaraviy nuqtasi bo‘lsa, u holda x_0 funksiyaning uzilish nuqtasi bo‘ladi. $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi o‘ng va chap limitlari mavjud bo‘lib,

$$f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$$

bo‘lganda, uning x_0 nuqtadagi uzilishi birinchi tur uzilishi[64] deyiladi. Ushbu

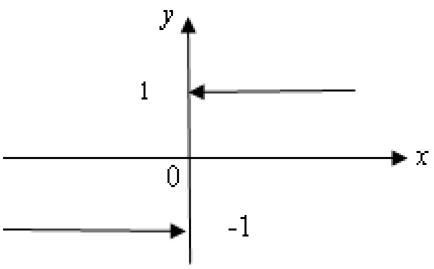
$$f(x_0+0) - f(x_0-0)$$

miqdor funksiyaning x_0 nuqtadagi sakrashi deyiladi.

Masalan, ushbu

$$f(x) = \begin{cases} -1, & agar \quad x<0 \quad bo'lsa, \\ 0, & agar \quad x=0 \quad bo'lsa, \\ 1, & agar \quad x>0 \quad bo'lsa \end{cases}$$

funksiyaning $x=0$ nuqtadagi uzilishi birinchi tur uzilishi bo‘lib, uning $x=0$ nuqtadagi sakrashi 2 ga teng bo‘ladi: **(**2-chizma**)**



2-chizma

$f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi boshqa uzilishlari ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,$ $A \neq f(x_0)$ holdan tashqari) ikkinchi tur uzilishi[65] deyiladi.

Masalan,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & agar \quad x>0 \quad bo'lsa, \\ x^2, & agar \quad x\le 0 \quad bo'lsa, \end{cases}$$

funksiya uchun

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} x^2 = 0$$

bo‘lib, bu funksiyaning $x=0$ nuqtadagi uzilishi ikkinchi tur uzilish bo‘ladi.

---

[64] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008
[65] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

16-MA'RUZA Funksiya hosilasi. Hosilining geometrik va mexanik ma'nosi. Hosilaning xossalari.

REJA

1. Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar
2. Fuksiya hosilasi
3. Differensiallash, uning asosiy qoidalari va formulalari
4. Hosilaning geometrik va mexanik ma'nosi
5. Hosilaning fizik ma'nosi
6. Hosilani hisoblash qoidalari

1. Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar

Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar jumlasiga qattiq jismni to'g'ri chiziqli harakatini, yuqoriga vertikal holda otilgan jismning harakatini yoki dvigatel silindridagi porshen harakatini tekshirish kabi masalalarni kiritish mumkin. Bunday harakatlarni tekshirganda jismning konkret o'lchamlarini va shaklini e'tiborga olmay, uni harakat qiluvchi moddiy nuqta shaklida tasavvur qilamiz. Biz bitta masalani olib qaraymiz.

Harakat tezligi masalasi. Aytaylik, M moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli harakat qonuniga ko'ra uning $t=t_0$ paytdagi tezligini (oniy tezligini) topish talab qilinsin. Nuqtaning t_0 *ва* $t_0+\Delta t$ $(\Delta t \neq 0)$ vaqtlar orasidagi bosib o'tgan yo'li $\Delta S = f(t_0+\Delta t) - f(t_0)$ bo'ladi. Uning shu vaqtdagi o'rtacha tezligi

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(t_0+\Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

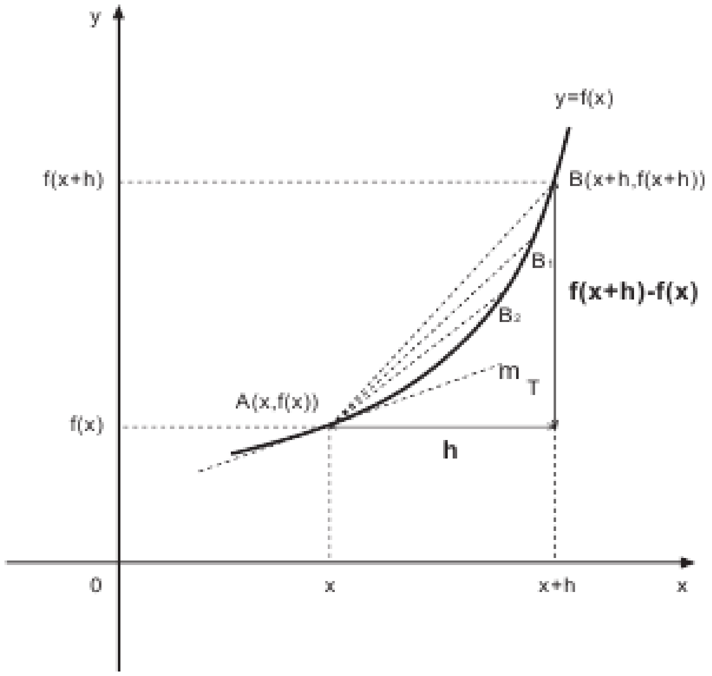
ga teng.

Ma'lumki, Δt qanchalik kichik bo'lsa, $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ o'rtacha tezlik nuqtaning t_0 paytdagi tezligiga shunchalik yaqin bo'ladi. Shuning uchun nuqtaning t_0 paytdagi tezligi quyidagi limitdan iborat. $V(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$

2. Fuksiya hosilasi.

Hosila ta'rifi.

Faraz qilaylik biz $y = f(x)$ chiziqning $A(x, f(x))$ nuqtasidagi urinmasini topmoqchimiz. m_T - A nuqtada chiziqqa o'tkazilgan urinmaning burchak koeffisienti bo'lsin. A nuqtaga o'tkazilgan urinmaning ikkinchi $B(x+h, f(x+h))$ nuqtasini olaylik.



Hamda AB vatarning gradientini m_{AB} deb qaraylik. Yetalicha kichik h uchun

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Agar biz B nuqtani A ga yaqinlashtirsak $B_1, B_2, B_3 \ldots$ nuqtalar ketma-ketligi hosil bo‘ladi. Bu nuqtalarga mos $AB_1, AB_2, AB_3 \ldots$vatarlarni chiziqning A nuqtasidagi urinmasiga qadar yaqinlashtiraylik.

$$f'(x) = \lim_{B_n \to A} m_{AB_n} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (*)$$

(*) tenglikka funksiyaning x nuqtadagi hosilasi deyiladi.

Namunaviy misollar.

1. $f(x) = x^2$ funksiya limitini hisoblang.

Yechish.

Agar $f(x) = x^2$ bo‘lsa u holda $f(x+h) = (x+h)^2$ bo‘ladi. Bundan

$$f'(x) == \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = 2x$$

Misollar:

Quyidagi funksiyalarning hosilalarini (*) formulasidan foydalanib toping.

1. $f(x) = x^2$

2. $f(x)=3x^2$
3. $f(x)=\sqrt{x}$

$y=f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo‘lsin (a,b) intervalga tegishli x_0 va $x_0+\Delta x$ nuqtalarni olamiz.

Argument biror (musbat yoki manfiy - bari bir) Δx orttirmasini olsin, u vaqtda y funksiya biror Δy orttirmani oladi. Shunday qilib argumentning x_0 qiymatida $y_0=f(x_0)$ ga, argumentning $x_0+\Delta x$ qiymatda $y_0+\Delta y=f(x_0+\Delta x)$ ga ega bo‘lamiz. Funksiya orttirmasi Δy ni topamiz.

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \qquad (1)$$

Funksiya orttirmasini argument orttirmasiga nisbatini tuzamiz.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (2)$$

Bu – nisbatning $\Delta x\to 0$ dagi limitini topamiz.

Agar bu limit mavjud bo‘lsa, u berilgan f(x) funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va $f'(x_0)$ bilan belgilanadi. Shunday qilib, ta'rifga ko‘ra $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

yoki $$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (3)$$

Demak, berilgan y=f(x) funksiyaning argument x bo‘yicha hosilasi[66] deb, argument orttirmasi Δx ixtiyoriy ravishda nolga intilganda funksiya orttirmasi Δy ning argument orttirmasi Δx ga nisbatining limitiga aytiladi.

Umumiy holda x ning har bir qiymati uchun $f'(x)$ hosila ma'lum qiymatga ega, ya’ni hosila ham x ning funksiyasi bo‘lishini qayd qilamiz. Hosilada $f'(x)$ belgi bilan birga boshqacha belgilar ham ishlatiladi. $y';\ y'_x,\ \frac{dy}{dx}$

Hosilaning $x=a$ dagi konkret qiymati $f'(a)$ yoki $y'\big|_{x=a}$ bilan belgilanadi.

Funksiya hosilasini hosila ta'rifiga ko‘ra hisoblashni ko`ramiz.

Misol: $y=x^2$ funksiya berilgan: uning:

1) ixtiyoriy x nuqtadagi va 2) x=5 nuqtadagi hosilasi y' topilsin.

Yechish:

1) argumentning x ga teng qiymatida $y=x^2$ ga teng. Argument $x+\Delta x$ qiymatida $y+\Delta y=(x+\Delta x)^2$ ga ega bo‘lamiz.

$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x(\Delta x)+(x)^2,$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni tuzamiz.

[66] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x + \Delta x(\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$ Limitga o‘tib, berilgan funksiyadan hosila topamiz. $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$

Demak, $y = x^2$ funksiyaning ixtiyoriy nuqtadagi hosilasi $y' = 2x$

2) x=5 da $y'\Big|_{x=5} = 2 \cdot 5 = 10$

3. Differensiallash, uning asosiy qoidalari va formulalari.

Berilgan f(x) funksiyadan hosila topish amali shu funksiyani differensiallash deyiladi.

Differensiallashning asosiy qoidalari.

1. O‘zgarmas miqdorning hosilasi nolga teng, ya‘ni agar y=c bo‘lsa (c=const) y'=0 bo‘ladi.

2. O‘zgarmas ko‘paytuvchini hosila ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin: y=cu(x) bo‘lsa y'=cu'(x) bo‘ladi.

3. Chekli sondagi differensiallanuvchi funksiyalar yig‘indisining hosilasi shu funksiyalar hosilalarining yig‘indisiga teng:

$$y = U(x) + V(x) + W(x); \quad y' = U'(x) + V'(x) + W'(x)$$

4. Ikkita differensiallanuvchi funksiyalar ko‘paytmasining hosilasi birinchi funksiya hosilasining ikkinchi funksiya bilan ko‘paytmasi hamda birinchi funksiyaning ikkinchi funksiya hosilasi bilan ko‘paytmasining yig‘indisiga teng:

y=uϑ bo‘lsa $y' = u'\vartheta + u\vartheta'$.

5. Ikkita differensiallanuvchi funksiyalar bo‘linmasining hosilasi (kasrda ifodalanib) bo‘linuvchi funksiya hosilasini bo‘luvchi funksiya bilan ko‘paytmasi hamda bo‘linuvchi funksiyani bo‘luvchi funksiya hosilasi bilan ko‘paytmasining ayirmasini bo‘luvchi(maxrajdagi) funksiya kvadratining nisbatiga teng:

$y = \frac{u}{\vartheta}$ bo‘lsa $y' = \frac{u'\vartheta - u\vartheta'}{\vartheta^2}$

6. Aytaylik, y=F(u) murakkab funksiya bo‘lsin ya’ni y=F(u), $u = \varphi(x)$ yoki $y = F[\varphi(x)]$, u - o‘zgaruvchi, oraliq argumenti deyiladi. y=F(u) va $u = \varphi(x)$ differensiallanuvchi funksiyalar bo‘lsin.

Murakkab funksiyaning differensiallash qoidasini keltirib chiqaramiz.

[67]**Teorema:** Murakkab *F(u)* funksiyaning erkli o‘zgaruvchi x bo‘yicha hosilasi bu funksiya oraliq argumenti bo‘yicha hosilasini oraliq argumentining erkli o‘zgaruvchi x bo‘yicha hosilasining ko‘paytmasiga teng, ya’ni

$$y'_x = F'_u(u) \cdot u'_x(x) \ldots\ldots\ldots(1)$$

Misol: $y = (x^5 + 4x^4 + 3x^2 + 2)^5$ funksiyaning hosilasini toping.

[67] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

Yechish: berilgan funksiyani murakkab funksiya deb qaraymiz ya'ni $y = u^5; \quad u = x^5 + 4x^4 + 3x^2 + 2$ (1) formulaga asosan

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \left((x^5 + 4x^4 + 3x^2 + 2)^5\right)' = 5\left(x^5 + 4x^4 + 3x^2 + 2\right)^4 \cdot \left(5x^4 + 16x^3 + 6x\right);$$

Differensiallashning asosiy formulalari jadvali:

1) y=const ; $y' = 0$

2) $y = x^{\alpha}; \quad y = \alpha x^{\alpha-1}$

3) $y = \sqrt{x}; \; y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

4) $y = \dfrac{1}{x}; \quad y = -\dfrac{1}{x^2}$

5) $y = a^x; \; y' = a^x \ln a$

6) $y = e^x; \; y' = e^x$

7) $y = \log_a x; \quad y' = \dfrac{1}{x}\log_a e$

8) $y = \ln x; \quad y' = \dfrac{1}{x}$

9) $y = \sin x; \quad y' = \cos x$

10) $y = \cos x; \quad y' = -\sin x$

11) $y = tgx; \quad y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

12) $y = ctgx; \quad y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Misollar.

1) $f(x) = (x^3 + 4x + 7)^4$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: Bu yerda $y(u) = u^4$ va $u(x) = x^3 + 4x + 7$ U holda $f(x) = (u^4)' \cdot (x^3 + 4x + 7)' = 4u^3(3x^2 + 4) = 4(x^3 + 4x + 7)^3(3x^2 + 4)$

2) $(x^2 + x)' = (x^2)' + (x)' = 2x + 1$

3) $(2x\sin x)' = (2x)'\sin x + 2x(\sin x)' = 2(x)'\sin x + 2x\cos x =$
$2\sin x + 2x\cos x = 2(\sin x + x\cos x)$

4) $y = \sin 3x \quad y' - ? \quad y' = (\sin 3x)' = 3\cos 3x$

4. Hosilaning geometrik va mexanik ma'nosi.

Bizga berilgan *u=f(x)* funksiya x nuqta va uning atrofida aniqlangan bo'lsin. Argument x ning biror qiymatida *u=f(x)* funksiya aniq qiymatga ega bo'ladi, biz uni M_0(x, u) deb belgilaylik. Argumentga Δx orttirma beramiz va natija funksiyaning u+Δu=f(x+Δx) orttirilgan qiymati to'g'ri keladi. Bu nuqtani M_1(x+Δx, u+Δu) deb belgilaymiz va M_0 kesuvchi o'tkazib uning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchagini φ bilan belgilaymiz.

Endi $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni qaraymiz. Rasmdan ko'rinadiki, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = tg\varphi$ (1) ga teng.

Agar Δx→0 ga, u holda M_1 nuqta egri chiziq bo'yicha harakatlanib, M_0 nuqtaga yaqinlasha boradi. M_0M_1 kesuvchi ham Δx→0 da o'z holatini o'zgartira boradi, xususan φ burchak ham o‘zgaradi va natijada φ burchak α burchakka intiladi. M_0M_1 kesuvchi esa M_0 nuqtadan o‘tuvchi urinma holatiga intiladi. Urinmaning burchak koeffitsienti quyidagicha topiladi

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \tag{2}$$

Demak, $f'(x)=tg\alpha$, ya’ni, argument x ning berilgan qiymatida $f'(x)$ hosilaning qiymati f(x) funksiyaning grafigiga uning $M_0(x, u)$ nuqtasidagi urinmaning OX o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchak tangensiga teng.

Geometrik ma’nosi.

Faraz qilaylik bizga $y = f(x)$ funksiya grafiga va unga tegishli bo‘lgan $P_0(x_0, f(x_0))$ nuqta berilgan bo‘lsin.

$f'(x_0)$ - f funksiyaning grafigiga $P_0(x_0, f(x_0))$ nuqtada o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffisientiga teng. Bundan foydalanib biz urinma tenglamasini keltirib chiqaramiz. Faraz qilaylik urinma tenglamasi

$$y = kx + l$$

ko‘rinishida bo‘lsin. Bu yerda $k = f'(x_0)$

$P_0(x_0, f(x_0))$ nuqta bu to‘g‘ri chiziqqa tegishli ekanidan $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + l$

$$l = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

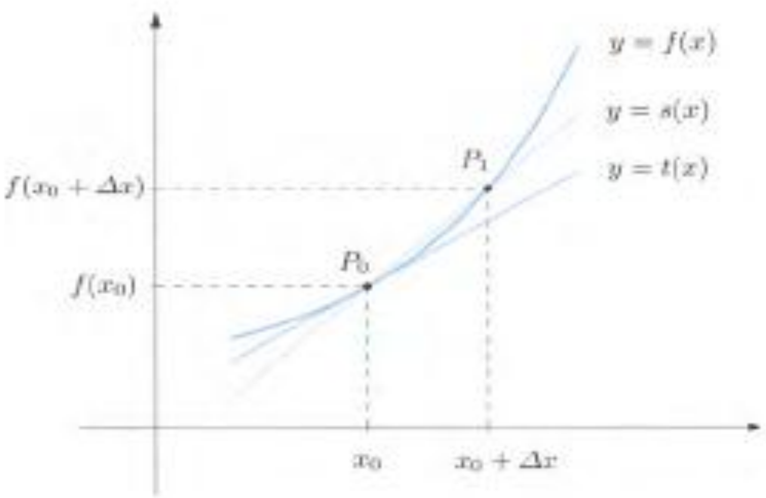
Bundan

$$y = t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x \in R$$

Fizik ma’nosi

$$v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (**)$$

(**) formula , $s = s(t)$ qonun bo‘yicha harakatlanayotgan M jismning t_0 vaqtdagi oniy tezligini ifodalaydi.



Hosilaning fizik ma’nolari.

Hosila tushunchasiga olib keladigan ikkinchi masalada harakat qonuni *s=s(t)* funksiya bilan tavsiflanadigan to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakatlanayotgan moddiy nuqtaning *t* vaqt

momentidagi oniy tezligi $v_{oniy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ekanligini ko‘rgan edik. Bundan hosilaning fizik (mexanik) ma’nosi kelib chiqadi.
s=s(t) funksiya bilan tavsiflanadigan to‘g‘ri chiziqli harakatda *t* vaqt momentidagi harakat tezligining son qiymati hosilaga teng: $v_{oniy} = s'(t)$.
Hosilaning mexanik ma’nosini qisqacha quyidagicha ham aytish mumkin: yo‘ldan vaqt bo‘yicha olingan hosila tezlikka teng.
Hosila tushunchasi nafaqat to‘g‘ri chiziqli harakatning oniy tezligini, balki boshqa jarayonlarning ham oniy tezligini aniqlashga imkon beradi. Masalan, faraz qilaylik *y=Q(T)* jismni *T* tempyeraturaga qadar qizdirish uchun uzatilayotgan issiqlik miqdorining o‘zgarishini tavsiflovchi funksiya bo‘lsin. U holda jismning issiqlik sig‘imi issiqlik miqdoridan tempyeratura bo‘yicha olingan hosilaga teng bo‘ladi:

$$C=\frac{dQ}{dT}=\lim_{\Delta T \to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

Umuman olganda, hosilani *f(x)* funksiya bilan tavsiflanadigan jarayon oniy tezligining *matematik modeli* deb aytish mumkin.

5 Hosila hisoblash qoidalari

Quyida keltirilgan teoremalar isbotida hosila topish algoritmidan, limitga ega bo‘lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar haqidagi teoremalardan foydalanamiz. Shuningdek $\Delta u=u(x+\Delta x)-u(x)$ va $\Delta v=v(x+\Delta x)-v(x)$ ekanligini hisobga olgan holda, $u(x+\Delta x)=u(x)+\Delta u$, $v(x+\Delta x)=v(x)+\Delta v$ tengliklardan foydalanamiz.
u(x) va *v(x)* funksiyalar (*a,b*) intervalda aniqlangan bo‘lsin.

Yig‘indining hosilasi.

1-teorema. Agar *u(x)* va *v(x)* funksiyalarning $x\in(a,b)$ nuqtada hosilalari mavjud bo‘lsa, *u* holda *f(x)=u(x)+v(x)* funksiyaning ham *x* nuqtada hosilasi mavjud va

$$f'(x)=u'(x)+v'(x) \qquad (4.1)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Natija. Agar $u_1(x), u_2(x), ... ,u_n(x)$ funksiyalarning *x* nuqtada hosilalari mavjud bo‘lsa, u holda $f(x)= u_1(x)+ u_2(x+ ...+u_n(x)$ funksiyaning ham *x* nuqtada hosilasi mavjud va quyidagi formula o‘rinli bo‘ladi:
$f'(x)=(u_1(x)+ u_2(x+ ...+u_n(x))'= u'_1(x)+ u'_2(x+ ...+u'_n(x)$.

Ko‘paytmaning hosilasi.

2-teorema. Agar *u(x)* va *v(x)* funksiyalar $x\in(a,b)$ nuqtada hosilaga ega bo‘lsa, u holda ularning $f(x)=u(x)\cdot v(x)$ ko‘paytmasi ham $x\in(a,b)$ nuqtada hosilaga ega va

$$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x) \qquad (4.2)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isboti. 1^0. $f(x)=u(x)\cdot v(x)$.
2^0. $f(x+\Delta x)=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)=(u(x)+\Delta u)\cdot(v(x)+\Delta v)=$
$=u(x)v(x)+\Delta uv(x)+\Delta vu(x)+ \Delta u\Delta v$.
3^0. $\Delta y= f(x+\Delta x)- f(x)= \Delta uv(x)+\Delta vu(x)+\Delta u\Delta v$.

4^0. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u v(x)+\Delta v u(x)+\Delta u\Delta x}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x)+\frac{\Delta v}{\Delta x}u(x)+\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v$.

5^0. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x})\cdot v(x)+(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x})\cdot u(x)+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=$

$=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)++u'(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v$.

Bunda $v(x)$ funksiyaning uzluksizligini e'tiborga olsak $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$ va natijada (4.2) formulaga ega bo'lamiz.

1-natija. Quyidagi $(Cu(x))'=C\cdot u'(x)$ formula o'rinli.

Isboti. Ikkinchi teoremaga ko'ra $(Cu(x))'=C'\cdot u(x)+C\cdot u'(x)$. Ammo $C'=0$, demak $(Cu(x))'=C\cdot u'(x)$.

Misollar. 1. $(6x^2)'=6(x^2)'=6\cdot 2x=12x$.
2. $(x^4)'=((x^2)(x^2))'=(x^2)'(x^2)+(x^2)(x^2)'=2x(x^2)+(x^2)\cdot 2x=4x^3$.
3. $(0{,}25x4\text{-}3x2)'=(0{,}25x^4)'+(3x^2)'=0{,}25\cdot 4x^3+3\cdot 2x=x^3+6x$.

2-natija[68]. Agar $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ funksiyalar x nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda ularning ko'paytmasi $f(x)=u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot\ldots\cdot u_n(x)$ ham x nuqtada hosilaga ega va quyidagi formula o'rinli bo'ladi:

$f'(x)=(u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot\ldots\cdot u_n(x))'=u'_1(x)\cdot u_2(x)\cdot\ldots\cdot u_n(x)+u_1(x)\cdot u'_2(x)\cdot\ldots\cdot u_n(x)+\ldots+u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot\ldots\cdot u'_n(x)$.

Bo'linmaning hosilasi.

3-teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $x\in(a,b)$ nuqtada hosilaga ega, $v(x)\neq 0$ bo'lsa, u holda ularning $f(x)=u(x)/v(x)$ bo'linmasi $x\in(a,b)$ nuqtada hosilaga ega va

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} \qquad (4.3)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isboti. 1^0. $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$.

2^0. $f(x+\Delta x)=\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}=\frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v}$.

3^0. $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v}-\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{\Delta u\cdot v(x)-\Delta v\cdot u(x)}{(v(x)+\Delta v)v(x)}$

4^0. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u\cdot v(x)-\Delta v\cdot u(x)}{(v(x)+\Delta v)v(x)\Delta x}=\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x)-u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\cdot\frac{1}{v^2(x)+v(x)\Delta v}$

5^0. $\Delta x\to 0$ da limitga o'tamiz, limitga ega funksiyalarning xossalari va 2-teorema isbotidagi kabi $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$ tenglikdan foydalansak

[68] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x)-u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\cdot\frac{1}{v^2(x)+v(x)\Delta v}=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

natijaga yerishamiz, ya'ni (4.3) formula o'rinli ekan.

Misol. Ushbu $f(x)=\dfrac{3x+7}{5x-4}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $\left(\dfrac{3x+7}{5x-4}\right)'=\dfrac{(3x+7)'\cdot(5x-4)-(3x+7)\cdot(5x-4)'}{(5x-4)^2}=\dfrac{3(5x-4)-5(3x+7)}{(5x-4)^2}=-\dfrac{47}{(5x-4)^2}$

Shunday qilib biz ushbu paragrafda hosilani hisoblashning quyidagi qoidalarini keltirib chiqardik:

1. Ikkita, umuman chekli sondagi funksiyalar yig'indisining hosilasi hosilalar yig'indisiga teng.
2. O'zgarmas ko'paytuvchini hosila belgisi oldiga chiqarish mumkin.
3. Ikkita $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar ko'paytmasining hosilasi $u'v+uv'$ ga teng.
4. Ikkita $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar bo'linmasining hosilasi $(u'v-uv')/v^2$ ga teng.

1- va 2-teorema natijalaridan foydalangan holda quyidagi qoidaning ham o'rinli ekanligini ko'rish qiyin emas:

5. Chekli sondagi differensiallanuvchi funksiyalar chiziqli kombinatsiyasining hosilasi hosilalarning aynan shunday chiziqli kombinatsiyasiga teng, ya'ni agar $f(x)=c_1u_1(x)+c_2u_2(x)+\ldots+c_nu_n(x)$ bo'lsa, u holda $f'(x)=c_1u'_1(x)+c_2u'_2(x)+\ldots+c_nu'_n(x)$.

Bu qoidaning isbotini o'quvchilarga havola qilamiz.

Eslatma. Yuqoridagi teoremalar funksiyalar yig'indisi, ko'paytmasi, bo'linmasining hosilaga ega bo'lishining yetarli shartlarini ifodalaydi. Demak, ikki funksiya yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbatidan iborat bo'lgan funksiyaning hosilaga ega bo'lishidan bu funksiyalarning har biri hosilaga ega bo'lishi har doim kelib chiqavyermaydi. Masalan, $u(x)=|x|$, $v(x)=|x|$ deb, ularning ko'paytmasini tuzsak, $y=x^2$ ko'rinishdagi funksiya hosil bo'ladi. Bu funksiyaning $\forall x\in(-\infty;+\infty)$ nuqtada, xususan, $x=0$ nuqtada hosilasi mavjud. Ammo, ma'lumki $y=|x|$ funksiyaning $x=0$ nuqtada hosilasi mavjud emas.

Asosiy trigonometrik jadvallar[69]

$$\mathrm{D}\, x^\alpha=\alpha x^{\alpha-1}\qquad(\forall\alpha\in\mathbb{R})$$

$$\mathrm{D}\,\sin x=\cos x$$

$$\mathrm{D}\,\cos x=-\sin x$$

$$\mathrm{D}\,\tan x=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\mathrm{D}\,\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

[69] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

$$\mathrm{D}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\mathrm{D}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\mathrm{D}\,a^x = (\log a)\,a^x \qquad \text{in particular,} \qquad \mathrm{D}\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$$

$$\mathrm{D}\log_a|x| = \frac{1}{(\log a)\,x} \qquad \text{in particular,} \qquad \mathrm{D}\log|x| = \frac{1}{x}$$

17-MA'RUZA Hosilalar jadvali. Oshkor, oshkormas va parametrik ko'rinishdagi funksiyalarni differensialash. Murakkab va teskari funksiyaning hosilasi.

REJA

1. Murakkab funksiyaning hosilasi
2. Teskari funksiya hosilasi
3. Funksiyaning yuqori tartibli hosilalari

1. Murakkab funksiyaning hosilasi

Aytaylik, y=F(u) murakkab funksiya bo'lsin ya'ni y=F(u), $u=\varphi(x)$ yoki $y=F[\varphi(x)]$, u - o'zgaruvchi, oraliq argumenti deyiladi. y=F(u) va $u=\varphi(x)$ differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsin.

Murakkab funksiyaning differensiallash qoidasini keltirib chiqaramiz.

Teorema: Murakkab F(u) funksiyaning erkli o'zgaruvchi x bo'yicha hosilasi bu funksiya oraliq argumenti bo'yicha hosilasini oraliq argumentining erkli o'zgaruvchi x bo'yicha hosilasining ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$y'_x = F'_u(u)\cdot u'_x(x)........(1)$$

Misol: $y=\left(x^5+4x^4+3x^2+2\right)^5$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: berilgan funksiyani murakkab funksiya deb qaraymiz ya'ni $y=u^5;\quad u=x^5+4x^4+3x^2+2$ (1) formulaga asosan

$$y'_x = y'_u\cdot u'_x = \left((x^5+4x^4+3x^2+2)^5\right)' = 5\left(x^5+4x^4+3x^2+2\right)^4\cdot\left(5x^4+16x^3+6x\right)$$

Theorem 6.7 ("Chain rule")[70] Aytaylik $f(x)$ funksiya $x_0\in R$ nuqtada hosilaga ega bo'lsin va $g(y)$ funksiya $y_0=f(x_0)$ nuqtada hosilaga ega bo'lsin. U holda $g\circ f(x)=g(f(x))$ kompozitsiya x_0 nuqtada hosilaga ega va

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0) \quad \textbf{(6.7)}$$

Misollar(6.8)

i) $h(x)=\sqrt{1-x^2}$ akslantirish $f(x)=1-x^2$ funksiyaning kompozitsiyasi.

hosilasi $f'(x)=-2x$ va $g(y)=\sqrt{y}$ uchun $g'(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, u holda 6.7 ga ko'ra

$$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ii) $h(x)=e^{\cos x}$ funksiya $f(x)=\cos 3x$ funksiya uchun kompozitsiya, $g(y)=e^y$. Ammo $f(x)$ funksiya $\varphi(x)=3x$ ning kompozitsiyasi va $\psi(y)=\cos y$ .6.7 ga ko'ra $f'(x)=-3\sin 3x$ .Boshqa tomondan $g'(y)=e^y$. 6.7 dan yana bir marta foydalansak

$$h'(x)=-3e^{\cos 3x}\sin 3x$$

---

[70] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

kelib chiqadi.

2.Teskari funksiya hosilasi

Theorem 6.9 ("Derivative of the inverse function") Aytaylik $f(x)$ funksiya $x_0 \in R$ nuqtaning atrofida bir qiymatli, uzluksiz bo'lib $x_0 \in R$ nuqtada hosilaga ega bo'lsin. Hamda $f'(x_0) \neq 0$ bo'lsin. U holda $f^{-1}(y)$ teskari akslantirish $y_0 = f(x_0)$ nuqtada hosilaga ega va

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \quad \textbf{(6.8)}$$

Misollar(6.10)

i) $y = f(x) = \tan x$ funksiya hosilasi $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ va teskarisi

$x = f^{-1}(y) = \arctan y$. (6.9) ga ko'ra

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

$f^{-1} = g$ uchun $g(x) = \arctan x$, u holda

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

ii) $y = f(x) = \sin x$:u $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ oraliqda teskarilanuvchi bo'ladi.

$x = f^{-1}(y) = \arcsin y$ ma'lumki $f'(x) = \cos x$. Agar biz $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ tenglikni inobatga olsak $f'(x) = \sqrt{1-\sin^2 x}$ tenglikka ega bo'lamiz. (6.9) ga ko'ra

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$f^{-1} = g$ uchun $g(x) = \arcsin x$, u holda

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Xuddi shunga o'xshash $g(x) = \arccos x$ uchun $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

iii) $y = f(x) = a^x$ uning hosilasi $f'(x) = (\log a)a^x$ va uning teskarisi

$x = f^{-1}(y) = \log_a y$, (6.9) ga ko'ra

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{(\log a)a^x} = \frac{1}{(\log a)y}$$

U holda $g(x)=\log_a x$ funksiya uchun $g'(x)=\dfrac{1}{(\log a)x}$ o‘rinli.

Yuqori tartibli hosilalar.

Agar funktsiyaning hosilasi $f'(x)$ (1) da ko‘rsatilganidek kiruvchi operator bo‘lsa, u holda chiquvchi funktsiyani $f''(x)$ deb belgilaymiz va u hosilaning hosilasi bo‘lib, ikkinchi tartibli hosila deb ataladi. Yuqori tartibli hosilalar ham shunga o‘xshash ta’riflanadi va $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=\frac{d^ny}{dx^n}$ kabi belgilanib, (n − 1) –tartibli hosilaning hosilasi, ya’ni n-tartibli hosila deb nomlanadi. $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ funktsiya birinchi tartibli hosila deb, $f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}$ funktsiya ikkinchi tartibli hosila deb, $f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}$ uchinchi tartibli hosila deb, $f^n(x)=\frac{d^ny}{dx^n}$ esa n-tartibli hosila deb ataladi.

Adabiyot: J.H.Heinbockel. Introduction to Calculus Volume 1, p .90-91 prop.of int.

1-misol. $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ bo‘lsa,

$y'=na_0x^{n-1}+(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots+a_{n-1}$,

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$y^{(n)}=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1\cdot a_0=a_0\,n!$,

$y^{(n+1)}=y^{(n+2)}=\ldots=0$.

Demak, n – darajali ko‘phadning n – tartibli hosilasi o‘zgarmas son bo‘lib, $(n+1)$-tartibli hosilasidan boshlab yuqori tartibli hosilalarining barchasi nolga teng bo‘lar ekan.

2-misol. $f(x)=e^{kx}$, k – o‘zgarmas $(k\neq0)$.

$$f'(x)=e^{kx}(kx)'=ke^{kx};$$

$$f''(x)=(f'(x))'=(ke^{kx})'=k(e^{kx})'=k\cdot ke^{kx}=k^2e^{kx}$$

va hokazo,

$$f^{(n)}(x)=k^ne^{kx}$$

ni olamiz. Demak,

$$(e^{kx})^{(n)}=k^ne^{kx},\quad n\in N$$

3-misol. $f(x)=sinx$.

$$f'(x)=cosx=sin(x+\frac{\pi}{2}),$$

$$f''(x)=(f'(x))'=(sin(x+\frac{\pi}{2}))'=cos(x+\frac{\pi}{2})\cdot1=sin(x+\pi),$$

- -

$$f^{(n)}(x)=sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2}),$$

ya’ni $(sinx)^{(n)}=sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2}),\quad n\in N$

4-misol. $f(x)=cosx$.

Yuqoridagiga o‘xshash,

$$(\cos x)^{(n)}=cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2}),\quad n\in N$$

ni olish mumkin.

5-misol. $f(x)=U\cdot V$, bu yerda U va V lar ixtiyoriy tartibli hosilalari mavjud funksiyalardir.

$$(U\cdot V)'=U'V+UV'$$

$$(UV)''=(U'V+UV')'=U''V+U'V'+U'V'+UV''=U''V+2U'V'+UV''$$

va hokazo.

$$(U\cdot V)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^K\,U^{(n-k)}\cdot V^{(k)}$$

ni olish mumkin. Bu *Leybnis formulasi* deb yuritiladi. Bu yerda nolinchi tartibli hosila funksiyaning o‘zi ekanligini eslash lozim.

Endi, yuqori tartibli differensial tushunchasini kiritamiz. Buning uchun funksiya differensialini uning birinchi tartibli differensiali argument orttirmasini o‘zgarmas deb qabul qilgan holda (n–1) – tartibli differensialning differensialini *n-tartibli differensial deb ataymiz* va uning uchun d^ny, $d^nf(x)$ kabi belgilashlarni qo‘llaymiz.

Demak, ta’rif bo‘yicha $d^ny=d(d^{n-1}y)$ ekan. Oxirgi formula asosida

$$d^2y=d(dy)=d[f'(x)dx]=(f''(x)dx)dx=f''(x)dx^2$$

va hokazo,

$$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n$$

formulani olamiz.

Bu yerda *ikkinchi va undan yuqori tartibli differensiallar birinchi tartibli differensialning invariantlik xossasiga ega emasligini ammo, oraliq o‘zgaruvchi bo‘lgan murakkab funksiya argumenti (erkli o‘zgaruvchi)ning chiziqli funksiyasi bo‘lgan holda bu xossa saqlanishini aytamiz.*

Yuqori tartibli hosila ma’nolariga kelsak, agar moddiy nuqta $S=S(t)$ qonun bo‘yicha to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakatlanayotgan bo‘lsa, undan (yo‘l funksiyasidan) olingan birinchi tartibli hosila moddiy nuqtaning tezligi $\vartheta=\vartheta(t)$ ekanligi bizga ma’lum, ya’ni

$$\vartheta=\frac{dS}{dt}\ .$$

Agar tezlanishni qaralsa,

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}=\frac{d\vartheta}{dt}$$

ekanligini chiqarish qiyin emas. Yoki

$$a=\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dS}{dt}\right)=\frac{d^2S}{dt^2}\ .$$

Demak, *to‘g‘ri chiziqli harakatda bo‘lgan moddiy nuqtaning tezlanishi uning yo‘l funksiyasidan olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng* ekan. Bu ikkinchi tartibli hosilaning fizik ma’nosidir. Geometrik ma’nosini keyinroq ko‘ramiz.

Differensiallanuvchi funksiyalar haqidagi teoremalar

Bu bandda differensial hisobida nazariy tatbiqlari muhim ahamiyatga ega bo‘lgan teoremalarni keltiramiz.

10.6.1-teorema (Ferma)[71]. Agar $f(x)$ funksiya $(a;b)$ oraliqda aniqlangan bo‘lib, $x_0\in(a;b)$ nuqtada eng kichik yoki eng katta qiymatga erishsa va shu nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, $f'(x_0)=0$ bo‘ladi.

Isbot. Aniqlik uchun $\sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)=f(x_0)$ deylik. U holda,

$\forall x\in(a;b)$ $f(x)\le f(x_0)$ o‘rinlidir. Endi, x_0 nuqtaga Δx orttirma berib, funksiya orttirmasi Δy ni olsak,

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\le 0$$

[71] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

bo‘ladi. U holda,

$$\Delta x<0 \text{ bo‘lganda } \frac{\Delta y}{\Delta x}\geq 0,$$

$$\Delta x>0 \text{ bo‘lganda } \frac{\Delta y}{\Delta x}\leq 0.$$

Oxirgi tengsizliklarda $\Delta x\to 0$ dagi limitga o‘tib, $f'(x_0)$ mavjudligini hisobga olsak,

$$f'(x_0)\geq 0 \text{ va } f''(x_0)\leq 0$$

larni olamiz. Bulardan $f'(x_0)=0$ kelib chiqadi.

$\inf\limits_{x\in(a,b)} f(x)=f(x_0)$ hol ham huddi shunga o‘xshash qaraladi.

Teorema isbotlandi.

10.6.2–teorema(Roll)[72]**.** Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va $(a;b)$ oraliqda differensiallanuvchi bo‘lib, kesmaning chetki nuqtalarida teng $(f(a)=f(b))$ qiymatlar qabul qilsa, $(a;b)$ oraliqda shunday c nuqta topiladiki, bu nuqtada funksiya hosilasi nolga teng $(f'(c)=0)$ bo‘ladi.

Isbot. Agar $[a;b]$ da funksiya o‘zgarmas bo‘lsa, teorema isboti aniqdir, ya’ni c nuqta sifatida $(a;b)$ ning ixtiyoriy nuqtasini olish mumkin, chunki bu oraliqda funksiya hosilasi nolga teng bo‘ladi. Demak, funksiya $[a;b]$ da o‘zgaruvchi bo‘lgan holni qarash kifoyadir. Bu holda $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo‘lganligi sababli, bu kesmada shunday x_1 va x_2 nuqtalar mavjud bo‘ladiki, ularda funksiya o‘zining eng katta va eng kichik qiymatlarini qabul qiladi. Bu nuqtalardan aqalli bittasi $(a;b)$ ning ichki nuqtasidan iborat bo‘ladi, (aks holda funksiya o‘zgarmas bo‘lib qolar edi), o‘shani c deb olib, isbotlangan Ferma teoremasiga ko‘ra $f'(c)=0$ ni olamiz. Teorema isbotlandi.

10.6.3–teorema(Lagranj)[73]**.** Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va $(a;b)$ oraliqda differensiallanuvchi bo‘lsa, $(a;b)$ oraliqda shunday c nuqta topiladiki, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ o‘rinli bo‘ladi.

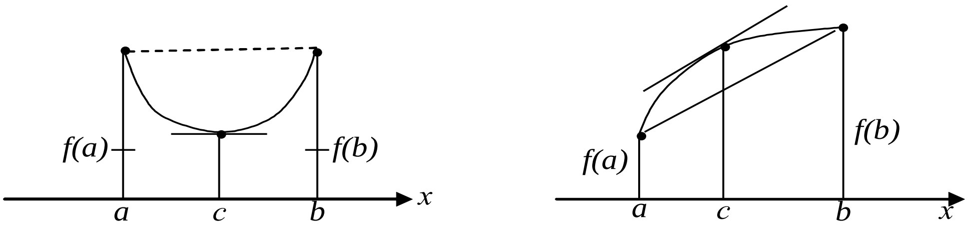
Isbot. $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ yordamchi funksiyani kiritsak, u yuqoridagi Roll teoremasi shartlarini qanoatlantiradi. Demak, shunday $c\in(a;b)$ mavjudki, $\varphi'(c)=0$ bo‘ladi.

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

da $x=c$ desak, teorema isboti kelib chiqadi.

Yuqorida keltirilgan Roll va Lagranj teoremalari quyidagicha geometrik talqinlarga ega. Ya’ni, Lagranj teoremasi shartlari bajarilsa, aqalli bitta shunday $c\in(a;b)$ nuqta topiladiki, grafikning bu nuqtasiga o‘tkazilgan urinma grafik chetki nuqtalarini tutashtiruvchi kesmaga parallel bo‘ladi. Roll teoremasida grafik chetki nuqtalarini tutashtiruvchi kesma Ox o‘qiga parallel bo‘lganligi sababli urinma abssissalar o‘qiga paralleldir (10.6.1-rasmga qarang). Shu bilan birga bunday nuqta aqalli bitta bo‘lishi aytilgan bo‘lib, ular bir nechta bo‘lishi ham mumkindir.

[72] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008
[73] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008



17.1-chizma

10.6.4 - teorema (Koshi)[74]. Agar *f(x)* va *g(x)* funksiyalar [*a;b*] kesmada aniqlangan, uzluksiz va (*a;b*) oraliqda differensiallanuvchi bo‘lib, $g'(x)\neq 0$ bo‘lsa, shunday $c\in(a;b)$ topiladiki,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Avval teorema xulosasidagi tenglikning har ikki tomonidagi ifodalar ham ma’noga ega ekanligini aytamiz. Haqiqatdan ham, o‘ng tomon uchun bu ayondir. Chap tomonni olsak, nisbat ma’noga ega bo‘lmasligi uchun $g(a)=g(b)$ bo‘lishi kerak, bu holda Roll teoremasi asosida (*a;b*) ning biror ichki nuqtasida $g'(x)=0$ bo‘lishi kerak, bu esa teorema shartiga ziddir. Demak, $g(a)\neq g(b)$ ekan.

Endi,

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot[\varphi(x)-\varphi(a)]$$

funksiya yordamida teorema isbotiga kelamiz (bunga ishonch hosil qilishni o‘quvchining o‘ziga qoldiramiz).

1-eslatma. Lagranj teoremasi xulosasidagi tenglikda $a=x_0$; $b=x_0+\Delta x$ deb faraz qilinsa, uni

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0+\theta\,\Delta x)$$

ko‘rinishda yozish mumkin bo‘ladi, bu yerda $c=x_0+\theta\Delta x$ deb olingan bo‘lib, $0<\theta<1$. Oxirgidan esa,

$$\Delta y=f'(x_0+\theta\,\Delta x)\cdot\Delta x$$

ga kelamiz. Bu funksiya orttirmasi uchun yana bir formula bo‘lib, uni *chekli orttirmalar formulasi* deb yuritiladi.

2-eslatma. Agar x_0 nuqta atrofida *f(x)* funksiya differensiallanuvchi bo‘lsa, u bu atrofda uzluksizligi ma’lumdir. Bu holda uning hosilasi $f'(x)$ x_0 nuqtada yoki uzluksiz bo‘lishi yoki ikkinchi jins uzilishga ega bo‘lishi, ammo, birinchi jins uzilishga ega bo‘laolmasligi isbotlangandir.

Haqiqatdan ham, agar x_0 nuqta atrofida *f(x)* ning hosilasi mavjud bo‘lib, bu nuqtada $f'(x)$ birinchi jins uzilishga ega deb faraz qilsak, $f'(x_0)\neq\lim\limits_{x\to x_0+0}f'(x)$ yoki $f'(x_0)\neq\lim\limits_{x\to x_0-0}f'(x)$ lardan aqqalli bittasi o‘rinli bo‘lishi kerak. Ammo, funksiya differensiallanuvchi bo‘lganligi sababli

[74] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

chekli hosila hamda bir tomonli

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

hosilalar mavjuddir. Ikkinchi tomondan Lagranj teoremasi asosida $\Delta y=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x$ ni olamiz. Bu yerda $0<\theta<1$ va bundan

$$\lim_{x\to x_0\pm 0}f'(x)=\lim_{\Delta x\to\pm 0}f'(x_0+\theta\,\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

bo‘lib, $f'(x)$ ning uzluksiz bo‘lishi, ya’ni qilingan faraz noto‘g‘ri ekanligi kelib chiqadi. Bu esa, funksiyaning nuqtadagi bir tomonli hosilasi bilan hosilasining bir tomonli limiti aynan tushunchalar emasligini ko‘rsatadi.

Masalan.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0.\end{cases}$$

funksiyani olsak, uning hosilasi $x\in(-\infty;\ \infty)$ mavjuddir.

Haqiqatdan ham,

$$f'(x)=\begin{cases}0, & x=0;\\ 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\end{cases}$$

hamda $f'(-0)=f'(+0)$ ekanligiga ishonch hosil qilish osondir.

Bundan $x=0$ nuqtada $f'(0)=0$ mavjud bo‘lib, $\lim\limits_{x\to -0}f'(x)$ va $\lim\limits_{x\to +0}f'(x)$ limitlarning ikkalasi ham mavjud emasligini ko‘rish qiyin emasdir. Demak, bu funksiyaning hosilasi 0 nuqtada mavjud bo‘lib, bu nuqtada ikkinchi jins uzilishga egadir.

Yuqori tartibli hosilalar

Faraz qilaylik, biror (a,b) da hosilaga ega $f(x)$ funksiya aniqlangan bo‘lsin. Ravshanki, $f'(x)$ hosila (a,b) da aniqlangan funksiya bo‘ladi. Demak, hosil bo‘lgan funksiyaning hosilasi, ya’ni hosilaning hosilasi haqida gapirish mumkin. Agar $f'(x)$ funksiyaning hosilasi mavjud bo‘lsa, uni $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi va y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$ simvollarning biri bilan belgilanadi. Shunday qilib, ta’rif bo‘yicha $y''(x)=(y')'$ ekan.

Shunga o‘xshash, agar ikkinchi tartibli hosilaning hosilasi mavjud bo‘lsa, u uchinchi tartibli hosila deyiladi va y''', $f'''(x)$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, $\dfrac{d^3f(x)}{dx^3}$ kabi belgilanadi. Demak, ta’rif bo‘yicha $y'''=(y'')'$.

Berilgan funksiyaning to‘rtinchi va h.k. tartibdagi hosilalari xuddi shunga o‘xshash aniqlanadi. Umuman $f(x)$ funksiyaning $(n-1)$-tartibli $f^{(n-1)}(x)$ hosilasining hosilasiga uning n-tartibli hosilasi deyiladi va $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^ny}{dx^n}$, $\dfrac{d^nf(x)}{dx^n}$ simvollarning biri bilan belgilanadi. Demak, ta’rif bo‘yicha n-tartibli hosila $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$ rekkurent (qaytma) formula bilan hisoblanar ekan.

Misol. $y=x^4$ funksiya berilgan. $y'''(2)$ ni hisoblang.

Yechish. $y'=4x^3$, $y''=12x^2$, $y'''=24x$, demak $y'''(2)=24\cdot 2=48$.
Yuqorida aytilganlardan, funksiyaning yuqori tartibli, masalan, n- tartibli hosilalarini topish uchun uning barcha oldingi tartibli hosilalarini hisoblash zarurligi kelib chiqadi. Ammo ayrim funksiyalarning yuqori tartibli hosilalari uchun umumiy qonuniyatni topish va undan foydalanib formula keltirib chiqarish mumkin.
Misol tariqasida ba'zi bir elementar funksiyalarning n-tartibli hosilalarini topamiz.
1) $y=x^{\mu}$ $(x>0,\ \mu\in R)$ funksiya uchun $y^{(n)}$ ni topamiz. Buning uchun uning hosilalarini ketma-ket hisoblaymiz: $y'=\mu x^{\mu-1}$, $y''=\mu(\mu-1)x^{\mu-2}$, . . .
Bundan

$$(x^{\mu})^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)...(\mu-n+1)x^{\mu-n} \qquad (8.1)$$

deb induktiv faraz qilish mumkinligi kelib chiqadi. Bu formulaning $n=1$ uchun o'rinliligi yuqorida ko'rsatilgan. Endi (1) formula $n=k$ da o'rinli, ya'ni $y^{(k)}=\mu(\mu-1)...(\mu-k+1)x^{\mu-k}$ bo'lsin deb, uning $n=k+1$ da o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz.
Ta'rifga ko'ra $y^{(k+1)}=(y^{(k)})'$. Shuning uchun

$$y^{(k+1)}=(y^{(k)})=(\mu(\mu-1)...(\mu-k+1)x^{\mu-k})'=\mu(\mu-1)...(\mu-k+1)(\mu-k)x^{\mu-k-1}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa (8.1) formulaning $n=k+1$ da ham o'rinli bo'lishini bildiradi. Demak, matematik induksiya usuliga ko'ra (8.1) formula $\forall n\in N$ uchun o'rinli.
(8.1) da $\mu=-1$ bo'lsin. U holda $y=\frac{1}{x}$ funksiyaning n-tartibli hosilasi

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)(-2)...(-n)x^{-1-n}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}} \qquad (8.2)$$

formula bilan topiladi.
2) $y=lnx$ $(x>0)$ funksiyaning n-tartibli hosilasini topamiz. Bu funksiyainng birinchi hosilasi $y'=\frac{1}{x}$ bo'lishidan hamda (8.2) formuladan foydalansak,

$$y^{(n)}=(y')^{(n-1)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \qquad (8.3)$$

formula kelib chiqadi.
3) $y=sinx$ bo'lsin. Ma'lumki, bu funksiya uchun $y'=cosx$. Biz uni quyidagi

$$y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$$

ko'rinishda yozib olamiz. So'ngra $y=sinx$ funksiyaning keyingi tartibli hosilalarini hisoblaymiz.

$$y''=(\cos x)'=-\sin x=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2}),$$

$$y'''=(-\sin x)'=-\cos x=\sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2}),$$

$$y^{(IV)})=(-\cos x)'=\sin x=\sin(x+4\cdot\frac{\pi}{2})$$

Bu ifodalardan esa $y=sinx$ funksiyainng n-tartibli hosilasi uchun

$$y^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2}) \qquad (8.4)$$

formula kelib chiqadi. Uning to'g'riligi yana matematik induksiya usuli bilan isbotlanadi.
Xuddi shunga o'xshash

$$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\frac{\pi}{2}) \qquad (8.5)$$

ekanligini ko‘rsatish mumkin.
Masalan,

$$\cos x)^{(115)} = \cos(x + 115\cdot\frac{\pi}{2}) = \cos(x + \frac{3\pi}{2}) = \sin x\ .$$

Yuqori tartibli hosilaning xossalari. Leybnits formulasi.[75]

1-xossa. Agar *u(x)* va *v(x)* funksiyalar *n*-tartibli hosilalarga ega bo‘lsa, u holda bu ikki funksiya yig‘indisining *n* -tartibli hosilasi uchun

$$(u(x)+ v(x))^{(n)}= u^{(n)}(x)+ v^{(n)}(x)$$

formula o‘rinli bo‘ladi.

Isboti. Aytaylik $y=u+v$ bo‘lsin. Bu funksiyaning hosilalarini ketma-ket hisoblash natijasida quyidagilarni hosil qilamiz: $y'=u'+v'$, $y''=(y')'=(u'+v')'=u''+v''$. Matematik induksiya metodidan foydalanamiz, ya’ni $n=k$ tartibli hosila uchun $y^{(k)}=u^{(k)}+v^{(k)}$ tenglik o‘rinli bo‘lsin deb faraz qilamiz va $n=k+1$ uchun $y^{(k+1)}=u^{(k+1)}+v^{(k+1)}$ ekanligini ko‘rsatamiz.

Haqiqatan ham, yuqori tartibli hosilaning ta’rifi, hosilaga ega bo‘lgan funksiyalar xossalaridan foydalanib $y^{(k+1)}=(y^{(k)})'=(u^{(k)}+v^{(k)})'= =(u^{(k)})'+(v^{(k)})'= u^{(k+1)}+v^{(k+1)}$ ekanligini topamiz.

Matematik induksiya prinsipiga ko‘ra $y^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$ tenglik ixtiyoriy natural *n* uchun o‘rinli deb xulosa chiqaramiz.

2-xossa. O‘zgarmas ko‘paytuvchini *n*-tartibli hosila belgisi oldiga chiqarish mumkin: $(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$.

Bu xossa ham matematik induksiya metodidan foydalanib isbotlanadi. Isbotini o‘quvchilarga qoldiramiz.

Misol. $y=\dfrac{2x+3}{x^2-5x+6}$ funksiyaning *n*-tartibli hosilasi uchun formula keltirib chiqaring.

Yechish. Berilgan kasr-ratsional funksiyaning maxrajini ko‘paytuvchilarga ajratamiz: $(x^2-5x+6)=(x-2)(x-3)$. So‘ngra

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \qquad (8.6)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladigan *A* va *B* koeffitsientlarni izlaymiz. Bu koeffitsientlarni topish uchun tenglikning o‘ng tomonini umumiy maxrajga keltiramiz va ikki kasrning tenglik shartidan foydalanamiz. U holda $2x+3=A(x-3)+B(x-2)$, yoki

$$2x+3=(A+B)x+(-3A-2B)$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Ikki ko‘phadning tenglik shartidan (ikki ko‘phad teng bo‘lishi uchun o‘zgaruvchining mos darajalari oldidagi koeffitsientlar teng bo‘lishi zarur va yetarli) quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} A+B=2, \\ -3A-2B=3 \end{cases}$$

Bu sistemaning yechimi *A*=-7, *B*=9 ekanligini ko‘rish qiyin emas. Topilgan natijalarni (8.1) tenglikka qo‘yamiz va yuqorida isbotlangan xossalardan foydalanib, berilgan funksiyaning *n*-tartibli hosilasini kuyidagicha yozish mumkin:

$$y^{(n)}=-7\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} +9\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)} \qquad (8.7)$$

[75] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

Endi $\frac{1}{x-2}$ va $\frac{1}{x-3}$ funksiyalarning n-tartibli hosilalarini topishimiz lozim. Buning uchun $u=\frac{1}{x+a}$ funksiyaning n-tartibli hosilasini bilish yetarli. Bu funksiyani $u=(x+a)^{-1}$ ko‘rinishda yozib, ketma-ket hosilalarni hisoblaymiz. U holda

$u'=-(x+a)^{-2}$, $u''=2(x+a)^{-3}$, $u'''=-2\cdot3(x+a)^{-3}=-6(x+a)^{-4}$.

Matematik induksiya metodi bilan

$$u^{(n)}=(-1)^n\cdot n!(x+a)^{-n-1} \qquad (8.8)$$

Shunday qilib, (8.7) va (8.8) tengliklardan foydalanib quyidagi

$$y^{(n)}=-7\cdot(-1)^n\cdot n!(x-2)^{-n-1}+9\cdot(-1)^n\cdot n!(x-3)^{-n-1}=(-1)^n\cdot n!\left(\frac{9}{(x-3)^n}-\frac{7}{(x-2)^n}\right)$$

natijaga yerishamiz.

3-xossa. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar n-tartibli hosilalarga ega bo‘lsa, u holda bu ikki funksiya ko‘paytmasining n -tartibli hosilasi uchun

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+C_n{}'u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\ldots+C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+$$
$$+\,C_n^{n-1}u'v^{(n-1)}+uv^{(n)} \qquad (8.9)$$

formula o‘rinli bo‘ladi. Bunda $C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

Misol. $y=x^3e^x$ ning 20-tartibli hosilasi topilsin.

Yechish. $u=e^x$ va $v=x^3$ deb olsak, Leybnits formulasiga ko‘ra

$y^{(20)}=x^3(e^x)^{(20)}+C_{20}^1(x^3)'(e^x)^{(19)}+C_{20}^2(x^3)''(e^x)^{(18)}+C_{20}^3(x^3)'''(e^x)^{(17)}+$
$+C_{20}^4(x^3)^{(4)}(e^x)^{16}+\ldots+(x^3)^{(20)}e^x$ bo‘ladi. $(x^3)'=3x^2$, $(x^3)''=6x$, $(x^3)'''=6$, $(x^3)^{(4)}=0$ tengliklarni va $y=x^3$ funksiyaning hamma keyingi hosilalarining 0 ga tengligini, shuningdek $\forall n$ uchun $(e^x)^{(n)}=e^x$ ekanligini e’tiborga olsak,

$y^{(20)}=e^x(x^3+3C_{20}^1x^2+6C_{20}^2x+6C_{20}^3)$ tenglik hosil bo‘ladi.

Endi koeffitsientlarni hisoblaymiz:

$$C_{20}^1=20,\quad C_{20}^2=\frac{20\cdot19}{2}=190,\quad C_{20}^3=\frac{20\cdot19\cdot18}{3!}=\frac{20\cdot19\cdot18}{6}=1140$$

Demak, $y^{(20)}=e^x(x^3+60x^2+1140x+6840)$.

18 – MA'RUZA Funksiyaning differensiali va uning geometrik ma'nosi. Yuqori tartibli hosila va differensial.

R E J A

1. Funksiyaning differensiali
2. Differensialning geometrik ma'nosi
3. Oshkor holda berilgan funksiyalarning yuqori tartibli hosilalari
4. Yuqori tartibli differensiallar
5. Invariantlik shaklining buzilishi

Tayanch iboralar

Kesmada differensiallanuvchi, cheksiz kichik miqdor, tartibi Δx tartibiga teng, Δx ga nisbatan chiziqli, darajasi Δx darajasidan yuqori bo'lgan cheksiz kichik miqdor, funksiya differensiali, teng kuchli, egri chiziqqa urinma, differensialning geometrik ma'nosi, yuqori tartibli hosilalar, yuqori tartibli differensiallar, invariantlik shaklining buzilishi.

1. Funksiyaning differensiali[76]

$y = f(x)$ funksiya $[\grave{a}, b]$ kesmada differensiallanuvchi bo'lsin. Bu har qanday $x \in [a,b]$ uchun

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{18.1}$$

chekli hosila mavjud ekanligini bildiradi.

$f'(x) \neq 0$ deb faraz qilaylik, u holda (18.1) tenglikdan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

ekani kelib chiqadi, bunda $\Delta \tilde{o} \to 0$ da $\alpha \to 0$.

Agar oxirgi tenglikning hamma hadini Δx ga ko'paytirilsa, ushbu

$$\Delta \acute{o} = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$$

yoki

$$\Delta \acute{o} = f'(x) \cdot \Delta x + \beta \tag{18.2}$$

munosabatga ega bo'lamiz, bunda $\beta = \alpha \cdot \Delta x$. $\Delta x \to 0$ da (18.2) formuladagi ikkala qo'shiluvchi nolga intiladi. Ularni $\Delta \tilde{o}$ bilan taqqoslaymiz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x) \cdot \Delta \tilde{o}}{\Delta \tilde{o}} = f'(x) - \div\mathring{a}\hat{e}\ddot{e}\grave{e}\ \tilde{n}\hat{\imath}\hat{\imath}\ .$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\beta}{\Delta \tilde{o}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta \tilde{o}}{\Delta \tilde{o}} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

---

[76] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

Shunday qilib, birinchi qo‘shiluvchi $f'(x)\cdot\Delta\tilde{o}$ tartibi Δx tartibiga teng bo‘lgan cheksiz kichik miqdordir, u Δx ga nisbatan chiziqli; ikkinchi qo‘shiluvchi $\beta=\alpha\cdot\Delta x$ darajasi Δx darajasidan yuqori bo‘lgan cheksiz kichik miqdordir. Bundan (18.2) formulada birinchi qo‘shiluvchi $f'(x)\cdot\Delta\tilde{o}$ asosiy ekanligi kelib chiqadi. Ana shu qo‘shiluvchiga funksiyaning differensiali deyiladi.

Funksiyaning differensiali $d\acute{o}$ yoki $df(x)$ kabi belgilanadi.

SHunday qilib,

$$d\acute{o}=f'(x)\cdot\Delta\tilde{o}. \qquad (18.3)$$

Demak, agar $y=f(x)$ funksiya x nuqtada hosilaga ega bo‘lsa, u holda funksiyaning differensiali funksiyaning hosilasi $f'(x)$ ni erkli o‘zgaruvchining Δx orttirmasiga ko‘paytirilganiga teng bo‘ladi, shu bilan birga Δx x ga bog‘liq bo‘lmaydi.

$\acute{o}=\tilde{o}$ funksiya differensialini topamiz $y'=1$ bo‘lgani uchun yoki $dy=dx$, ya’ni erkli o‘zgaruvchining orttirmasi uning differensialiga teng. U holda (18.3) formula bunday yoziladi:

$$d\acute{o}=f'(x)\cdot d\tilde{o}=\acute{o}'\cdot dx \qquad (18.4)$$

Bu formula hosila bilan differensialni bog‘laydi, shu bilan birga hosila chekli son, differensial esa cheksiz kichik miqdordir.

1-misol. $y=\cos x$ funksiya differensialini toping. $y'=-\sin x$ bo‘lgani uchun,

$$dy=-\sin x dx.$$

2-misol. $y=\ln x$ funksiya differensialini toping. $y'=\frac{1}{x}$ bo‘lgani uchun ,

$$dy=\frac{dx}{x}.$$

(18.4) tenglikdan

$$y'=\frac{dy}{dx}.$$

ga egamiz, ya’ni hosilani funksiya differensialining erkli o‘zgaruvchi differensialiga nisbati deb qarashi mumkin.

Funksiyaning differensialini topish masalasi hosilani topishga teng kuchli, chunki hosilani erkli o‘zgaruvchi orttirmasiga ko‘paytirib, funksiya differensialiga ega bo‘lamiz. SHunday qilib, hosilalarga tegishli teoremalar va formulalarning ko‘pchiligi differensiallar uchun ham to‘g‘ri bo‘lib qolaveradi.

Agar u va ϑ -differensiallanuvchi funksiyalar bo‘lsa, u holda quyidagi formulalar to‘g‘ri bo‘ladi[77]:

$$d(u\pm\vartheta)=du\pm d\vartheta, \qquad (18.6)$$

$$d(\mathrm{C}u)=Cdu,\quad C-const. \qquad (18.7)$$

$$d(u\cdot\vartheta)=\vartheta du+ud\vartheta, \qquad (18.8)$$

[77] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

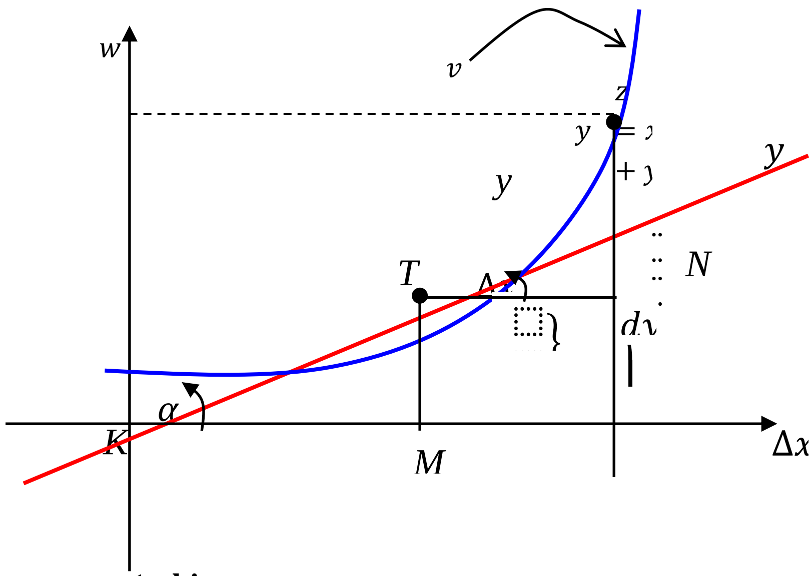
$$d\left(\frac{u}{\vartheta}\right)=\frac{\vartheta du-ud\vartheta}{\vartheta^2}. \qquad (18.9)$$

SHu formulalardan oxirgisini isbotlaymiz:

$$d\left(\frac{u}{\vartheta}\right)=\left(\frac{u}{\vartheta}\right)'\cdot dx=\frac{u'\vartheta-\vartheta'u}{\vartheta^2}\cdot dx=\frac{\vartheta u'dx-u\vartheta'dx}{\vartheta^2}=\frac{\vartheta du-ud\vartheta}{\vartheta^2}$$

2. Differensialning geometrik ma'nosi

$y=f(x)$ funksiya va unga mos chiziqni qaraymiz (1-shakl).



1-**chizma.**

Egri chiziqda $M(x,y)$ nuqtani olamiz, shu nuqtada egri chiziqqa urinma o'tkazamiz, urinma Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan hosil qiladigan burchakni α bilan belgilaymiz. Erkli o'zgaruvchi x ga Δx orttirma beramiz, u holda funksiya $\Delta y=f(x+\Delta x)+f(x)$ orttirmani oladi. Chizmada $\Delta \acute{o}=KN$, N nuqta esa $N(x+\Delta x,\ f(x+\Delta x))$ yoki ΔMKN dan:

$$TK=MK\cdot tg\alpha.$$

Ammo $tg\alpha=f'(x),\ MK=\Delta x,$ shu sababli

$$TK=f'(x)\cdot\Delta x.$$

Differensialning ta'rifiga binoan $d\acute{o}=f'(x)\cdot\Delta x.$ Shunday qilib, $TK=dy.$ Bu differensialning $y=f(x)$ egri chiziqqa x nuqtada o'tkazilgan urinmaning orttirmasiga teng ekanligini bildiradi. Differensialning geometrik ma'nosi shundan iborat.

Chizmadan

$$NT=\Delta y-dy$$

ekani kelib chiqadi. Ammo $\Delta y \sim dy$ shu sababli $\Delta x \to 0$ da $\frac{NT}{TK} \to 0$. CHizmada $\Delta y > dy$. 1-shakldan Δy dy dan kichik bo‘lishi mumkinligini ko‘ramiz. Agar $y = f(x)$ -to‘g‘ri chiziq bo‘lsa, u holda $\Delta y = dy$.

3. Yuqori tartibli hosilalar. Oshkor holda berilgan funksiyalarning yuqori tartibli hosilalari

$y = f(x)$ funksiya barcha $x \in [a,b]$ lar uchun differensiallanuvchi bo‘lsin. $f'(x)$ hosilaning qiymatlari, umuman aytganda, x ga bog‘liq, ya’ni $f'(x)$ hosila $f'(x) = \varphi(x)$ funksiyadir, shu sababali $\varphi(x)$ funksiyaning hosilasi haqida gapirish mumkin.

1-ta’rif. Berilgan funksiya hosilasidan olingan hosila shu funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi yoki ikkinchi hosila deyiladi va y'' yoki $f''(x)$ kabi belgilanadi:

$$y'' = (y')' = f''(x). \qquad (18.10)$$

2-ta’rif. Ikkinchi tartibli hosilasidan olingan hosila uchinchi tartibli hosila yoki uchinchi hosila deyiladi va y''' yoki $f'''(x)$ kabi belgilanadi.

3-ta’rif. **(**n-1**)**- tartibli hosilasidan olingan hosila n - tartibli hosila deyiladi va $y^{(n)}$ yoki $f^{(n)}(x)$ kabi belgilanadi:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = f^{(n)}(x). \qquad (18.11)$$

Hosila tartibini daraja ko‘rsatkichi bilan aralashtirib yubormaslik uchun hosila tartibi qavslar ichiga olinadi.

$n = 0$ bo‘lgan xususiy holda $f^{(0)}(x) = f(x)$ deb olamiz, ya’ni nolinchi hosila funksiyaning o‘ziga teng.

To‘rtinchi, beshinchi va yuqori tartibli hosilalar rim raqamlr bilan ham belgilanadi: $y^{IV}, y^{V}, y^{VI}, \ldots$

1-misol. $y = x^n$ funsiya berilgan. $y^{(n)}$ ni toping.

$$y' = n \cdot x^{n-1},$$
$$y'' = n \cdot (n-1) \cdot x^{(n-2)},$$
$$y''' = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^{(n-3)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n)} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x^{n-n} = n! \cdot 1 = n!$$

4. Yuqori tartibli differensiallar. Invariantlik shaklining buzilishi[78]

$y = f(x)$ funksiyani qaraymiz, bunda x–erkli o‘zgaruvchi. Bu funksiyaning

$$dy = f'(x) \cdot dx. \qquad (18.12)$$

differensiali yana x ning funksiyasidir, bunda $f'(x)$ birinchi ko‘paytuvchi esa x ga bog‘liq bo‘lishi mumkin, ikkinchi ko‘paytuvchi esa argumentning Δx orttirmasiga teng bo‘lib, x ga bog‘liq emas, shu sababli bu funksiyaning differensiali haqida gapirish mumkin.

4-ta’rif. Funksiyaning differensialdan olingan differensial ikkinchi tartibli differensial yoki ikkinchi differensial deyiladi d^2y deb belgilanadi. Shunday qilib,

[78] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

$$d(dx) = d^2x.$$

5-ta'rif. Ikkinchi tartibli differensialdan olingan differensial uchinchi tartibli differensial yoki uchinchi differensial deyiladi d^3y deb belgilanadi. Shunday qilib,

$$d(d^2y) = d^3y.$$

6-ta'rif. $(n-1)$- tartibli differensialdan olingan differensial n- tartibli differensial yoki n-differensial [79] deyiladi $d^n y$ deb belgilanadi. Shunday qilib,

$$d(d^{n-1}y) = d^n y.$$

Yuqori tartibli differensiallarni hosilalar orqali ifodalaymiz. Ikkinchi differensialning ifodasi topamiz:

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = (y'dx)'dx = y''dxdx = y''dx^2$$

(bu ifodani ifodani chiqarishda ifoda ga bog'liq emasligidan foydalandik).
Shunday qilib:

$$d^2y = y''dx^2 \qquad (18.13)$$

Bu erd$a$ $dx^2 = (dx)^2$, chunki differensial darajasini yozishda qavslarni tushirib qoldirish qabul qilingan. Bundan keyin $(dx)^3$ o'rniga dx^3 deb yozamiz va bu dx ifodaning kubi deb tushinamiz.

Uchinchi differensialning ifodasini ham shunga o'xshash topamiz:

$$d^3y = d(d^2y) = d(y''dx^2) = (y''dx^2)'dx = y'''dx^3.$$

Shunday qilib,

$$dx^3 = y'''dx^3. \qquad (18.14)$$

Bu jarayonni davom ettirib, n –differensial ifodasini topamiz:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = d\left(y^{(n-1)}dx^{(n-1)}\right) = \left(y^{(n-1)}dx^{n-1}\right)'dx = y^{(n)}dx^n.$$

Shunday qilib,

$$d^n y = y^{(n)}dx^n. \qquad (18.15)$$

Yuqori tartibli differensialdan foydalanib, (18.12-18.15) formulalar yordamida har qanday tartibli hosilani differensiallarning nisbati sifatida tasvirlash mumkin, chunonchi:

$$y' = \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2},\ y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Hozirga qadar hamma formulalarda x o'zgaruvchi erkli bo'lib keladi. Endi x oraliq argument bo'lsin, ya'ni

$$y = f(x)$$

Endi murakkab funksiyaga ega bo'laylik, bunda $x = \varphi(t)$. Bu holda ham differensial shakli saqlanishini tekshirib ko'ramiz. Biz bilamizki, birinchi tartibli differensial, x erkli o'zgaruvchi yoki oraliq funksiya bo'lishiga qaramay, o'z shaklini saqlaydi, ya'ni

$$dy = y'dx, \text{ bunda } dx = \varphi'(t)dt \neq const.$$

Ikkinchi differensial uchun ifoda topamiz:

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = d(y')dx + y'd(dx) = y''dx^2 + y'^{d^2}. \qquad (18.16)$$

(18.5) va (18.2) formulalarni taqqoslab, murakkab funksiya ikkinchi differensiali (18.2) shaklga ega emas deyish mumkin.

Shunga o'xshash, ikkinchi differensialdan boshlab, keyingi differensiallarning hammasi differensial shakli invariantligi xossasiga ega bo'lmaydi, deyish mumkin. Invariantlik xossasi faqat birinchi tartibli differensial uchun o'rinli.

[79] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

1-misol. $y = cosx$ funksiyaning dy va d^2y larni toping, x erkli o‘zgaruvchi.
Yechish. $dy = y'dx = -sinxdx$,
$d^2y = y''dx^2 = -cosxdx^2$.
2-misol. $y = cosx$ murakkab funksiyaning dy va d^2y larni toping, $x = lnt$.
Yechish. $dy = y'dx = -sinxdx \cdot \frac{dt}{t} = -sinxdx$, chunki $\frac{dt}{t=dx.}$

$d^2y = d(dy) = y''dx^2 + y'^{d^2}x = -cosx \cdot \left(\frac{dt}{t}\right)^2 + sin \cdot \frac{dt^2}{t^2} = -cosxdx^2 -$
$-sinxd^2x$, chunki $\left(\frac{1}{t} \cdot dt\right)^2 = dx^2$, $\left(-\frac{dt^2}{t^2}\right) = d^2x$.

SHunday qilib,

$$d^2y = -cosx \cdot dx^2 - sinx \cdot d^2x$$

formula o‘rinli.

O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Funksiyaning diferensiali deb nimaga aytiladi?
2. Funksiyaning diferensiali uning hosilasi orqali qanday ifodalanadi?
3. Funksiyaning diferensialining geometrik ma’nosi nimadan iborat?
4. Berilgan funksiyaning $n-$tartibli hosilasi
5. Oshkormas funksiyaning yuqori tartibli hosilalari qanday topiladi?
6. Parametrik berilgan funksiyaning yuqori tartibli hosilalari qanday topiladi?

19-MA'RUZA FUNKSIYANI HOSILA YORDAMIDA TEKSHIRISH

REJA

19.1. Xilma-xillik masalalarini yechish

19.2. O`xshashlik haritasini ko`rib chiqish va taxlili

19.3. Eksponensiyal funksiyani ko`rib chiqish

19.4. Mavzuga doir misollar yechish

Biz ishni 19.1 ta`rifidan foydalanish orqali elementar funksiyalar uchun xilma-xillik masalasini yechishdan boshlaymiz.

I) $f(x) = ax + b$ va $x_0 \in R$ chiziqli funksiyaning hosilasini qaraymiz[80].

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a(x_0 + \Delta x) + b) - (ax_0 + b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a = a \tag{19.1}$$

f grafgi a qiyalikdning to`g`ri chizig`i ekanligi bilan munosabatda bo`ladi va $f(x) = ax + b$ funksiya hosilasi $f'(x) = a$ o'zgarmasdir. Ma`lumki agar $f$ doimiy (a=0) bo`lsa, uning hosilasi aynan noldir.

II) Endi esa $f(x) = x^n$ ni $n \in R$ bilan oling. Ikki hadli formulaning natijasidir.

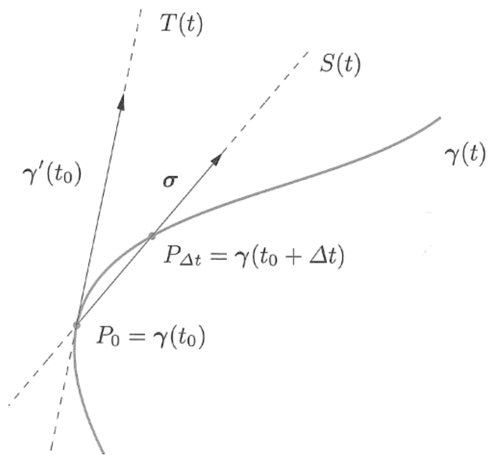
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^n - x_0{}^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n{}_0 + nx_0{}^{n-1}\Delta x + \sum_{k=2}^{n} \frac{n}{k} x_0{}^{n-k} (\Delta x)^k - x_0{}^n}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(nx_0{}^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x_0{}^{n-k} (\Delta x)^{k-1} \right) = nx_0{}^{n-1}$$

19.3)

shuning uchun, $f'(x) = nx^{n-1}$, $f(x) = x^n$ ning hosilasidir.

[80] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008



19-1 chizma

III) Endi trigonometrik funksiyalarni ko`rib chiqamiz[81]. $f(x) = \sin x$ ni $x \in R$ ni olamiz formulada berilgan.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left[x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right]}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sin\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

(19.5)

Limit va *cos* bog`liqligini beradi. $f'(x) = \cos x$ shuning uchun $f(x_0) = \sin x$ ning hosilasi $f'(x) = -\sin x$ ga tengdir.

O`xshash formulalardan foydalanish orqali biz $f(x) = \cos x$ hosila $f'(x) = -\sin x$ funksiya ekanligini ko`ramiz.

IV) Nihoyat ko‘rsatkichli funksiya $f(x) = a^x$ ni ko`ramiz.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0}}{\Delta x} = a^{x_0} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^{x_0} \log a,$$

(19.6)

$\log e = 1$ bo`lganligi uchun, $f(x) = e^x$ ning hosilasi $f(x) = e^x = f(x)$, shuning uchun $f'(x)$ hosila f funksiyaning istalgan nuqtasiga mos keladi. Bu fakt va “e” ni tanlashning sababi uning exponensial funksiya hariasi uchun asosi ustunlikka egaligidadir.

---

[81] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

Keyin esa biz funksiyada amaliyot atamalarida(algebraik amaliyot, kompazitsiya, qarama-qarshilik)da hilma-hilliknni muhokama qilamiz. Biz albatta elementariyadan qurilgan funksiyalar hosilalarini tekshirishga xilma-hillik qoidalarini isbotlaymiz.

Tushunarli bo`lishi uchun

$$\begin{aligned} &(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0), \\ &(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \\ &\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}. \end{aligned} \tag{19.7}$$

Hosilaning "Layneri". Agar f(x) va g(x) $x_0 \in R$ da xilm-hil bo`lsa, $Af(x)+Bg(x)$ xaritasi x_0 da istalgn $A, B \in R$ da xilma-hildir.

Isbot.(19,1) ni ko`rib chiqing va eslab qoling. Doimiy hilma-hillik nolni beradi. Keyin $A'(x_0) = Af(x_0)$ va $(Bg)'x_0 = Bg'(x_0)$ ni kuzatamiz. Qolgan natijalar esa quyida.

19.3 Misollar

I) Polinominalni hilma-xil qilish uchun, biz $Dx^n = nx^{n-1}$ dan foydalanamiz va funksiyaga takroran javob beramiz. Shuning uchun $f(x) = 3x^5 - 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ Funksiyada hilma-xillik quyidagicha:

$$f'(x) = 3 \cdot 5x^4 - 2 \cdot 4x^3 - 3x^2 + 3 \cdot 2x - 5 = 15x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 6x - 5.$$

II) Ratsional funksiyalar uchun biz nominator va denominatorning hosilasini hisoblaymiz keyin (19.5) qoidani qo`llaymiz va quyidagicha natija olamiz.

$f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{2x - 1}$ ning hosilasi

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(2x-1) - \left(x^2 - 3x + 1\right)^2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{4x^2 - 4x + 1}$$

III) $f(x) = x^3 \sin x$ ni ko`ramiz 19.4 qoidadan $(\sin x)' = \cos x$ bilan birga quyidagi natijaga erishiladi.

$$f'(x) = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$$

IV) Funksiya

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

(19.3) bilan hilma –hil bo`la oladi.

$$f(x)=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

Yana boshqa ehtimol $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ quyidagi natijaga erishadi

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Misollar: I) $h(x)=\sqrt{1-x^2}$ ning chizmasi, hosilasi $f'(x)=-2x$ va $g(y)=\sqrt{y}$ da $g'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$ bo`gan $f(x)=1-x^2$ da murakkab. Keyin to`g`ridan to`g`ri quyidagi natijaga erishadi.

$$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

II) $h(x)=e^{\cos 3x}$ funksiyasi $f(x)=\cos 3x$ va $g(y)=e^y$ orqali tarkib topadi. Lekin f(x) funksiya $f(x)=3x$ va $f(x)=\cos y$ da tarkibli shuning uchun 6.7 $f'(x)=-3\sin 3x$ ni beradi. Biroq $g'(y)=e^y$ 6.7 qoidasidan foydalanish orqali quyidagi hulosani olamiz

$$h'(x)=-3e^{\cos 3x}\sin 3x$$

a) O‘ng va chap limitlari farqini qaraymiz, bunda $x\to 0$ deb olamiz.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x-0}{x-0}=1 \qquad \lim_{x\to 0-}\frac{\sin(-x)-0}{x-0}=-1$$

Demak, funksiya $x_0=0$ nuqtada (differensiallanuvchi) emas ekan.

b) $x\neq 0$ bo‘lganda quyidagini va

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$$

Bundan tashqari $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} f'(x)=0$ bo‘lganligi uchun, f $x_0=0$ nuqtada davom etadi.

Bu yerda qiymatlar funksiya R ga taulluqli bo‘ladi, $x=0$ nuqtada mavjud bo‘ladi. $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0-} f'(x) = 0$ bo‘lishiga qaramasdan,

f ning qiymati $x=0$ ga teng $f'(0)=0$ da .

b) R da bo‘ladi, $f'(x) = -\sin x$

c) Ifodaning $x \neq 1$ da qiymatga ega bo‘ladi, hamda $x=1$ ham.

$$\lim_{x\to 1+}(x^2 + x - 5) = f(1) = -3 = \lim_{x\to 1-}(x-4)$$

hosilasiga ko‘ra

shuning uchun ifodaning qiymati $R/\{1\}$ ga teng. Hamda ifodaning o‘ng va chap limitlarini qaraymiz berilganga ko‘ra

$$f'_{+}(1) = \lim_{x\to 1+} f'(x) = 3 \qquad f'_{-}(1) = \lim_{x\to 1-} f'(x) = 1$$

$x=1$ nuqtada funksiya ega bo‘lmaydi.

19.7 Maximum va mimimum[82].

Bu ikkalasining vazifa funksiyaning mavjudligini ifodalaydi.

a) $\sqrt{2}$ maximum nuqtada $x=\dfrac{\pi}{4}$ ga teng, hamda $-\sqrt{2}$ nuqtada $x=\dfrac{5\pi}{4}$ ga teng.

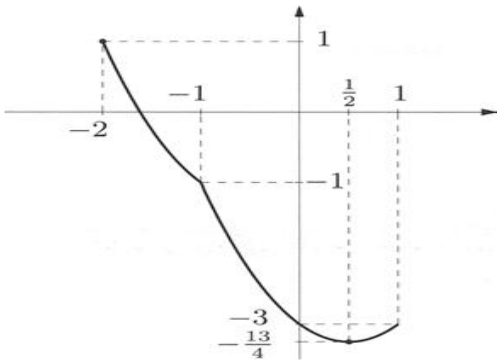
Bu funksiya $f(1)=-3$ bunda $x<-1$ funksiya bilan bir vaqtda bajariladi. Keyingi funksiyaning uchlari $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{5}{4}\right)$ nuqtada buriladi, shuning uchun $[-2,-1]$ oraliqda kamayadi, uning maximum esa 1 da $x=-2$ ga va minimum esa -1 da $x=-1$ ga tengdir.

$x \geq -1$ da buzda berilgan parabola $y=(x-\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{13}{4}$ bilan uchlari $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{13}{4}\right)$ berilgan.

Bundan $[-1,1]$ da , mimimum nuqtasi $x=\dfrac{1}{2}$ bo‘lganda $f(\dfrac{1}{2}) = -\dfrac{13}{4}$ ga teng, chunki $f(-1)=-1$ va $f(1)=-3$ ga teng , shuning uchun maximum -1 da $x=-1$ ga teng. Xulosa funksiya minimum $-\dfrac{13}{4}$ da $\left(x=\dfrac{1}{2}\right)$ ga va maximum 1 da $(x=-2)$ ga teng ekan.

Ushbu misolning grafigi quyidagicha.

[82] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008



19.2-chizma $f(x)=x^2-|x+1|-2$ funksiyaning grafigi.

Misol: Quyidagi funksiyaning qarang $f(x)=x^4-2\sqrt{\log x}$

a) Har doim $x>0$ va $\log x \geq 0$ bo‘lishi kerak, bundan $x \geq 1$ bo‘lsa , $f=[1,+\infty)$.

b) Bundan

$$f'(x)=\frac{4x^4\sqrt{\log x}-1}{x\sqrt{\log x}}$$ bo‘lsa bundan

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^4\sqrt{\log x}=1 \Leftrightarrow g_1(x)=\log x=\frac{1}{16x^8}=g_2(x)$$

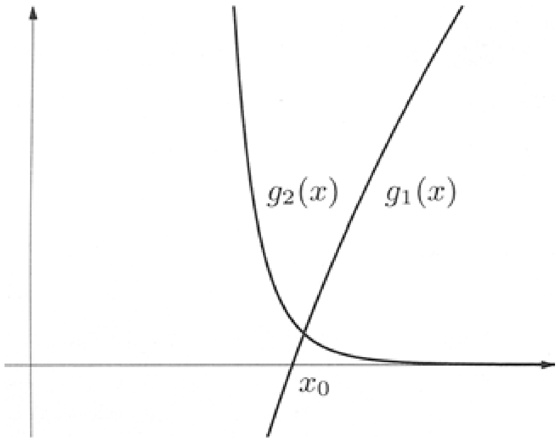
$x \geq 1$ da g_1, g_2 funksiya grafigini x_0 nuqtada kesib o‘tadi. Shunday ekan $f'(x)>0$ bo‘lganda $x>x_0$ bo‘ladi va f funksiya

$[x_0,+\infty\}$ oraliqda o‘sadiva $[1,x_0]$ oraliqda esa kamayadi. x_0 nuqta mimimum nuqta bo‘lib va berilgan $[1,x_0]$ va $[x_0,+\infty\}$ oraliqdagi monotonligi hisoblanadi. Qo‘shimcha ravishda $g_1=\log 1=0<\frac{1}{16}=g_2$ va $g_1(2)=\log 2>\frac{1}{2^{12}}=g_2(2)$ bo‘ladi, qaysiki $1<x_0<2$ bo‘lganda.

O‘shanga o‘xshash $f(e)=e^4-2$ bo‘lsa , (e^4-2,e) oraliqda funksiya grafigi f^{-1} ga tegishli bo‘ladi.

$$f^{-1}\left(e^4-2\right)=\frac{1}{f'(e)}=\frac{e}{4e^4-1}$$

Hamda uning grafigi quyidagicha



19.3-chizma $g_1(x) = \log x$ va $g_2(x) = \dfrac{1}{16x^8}$ funksiyalarning grafigi.

19.8-misol: $f(x) = \arcsin\sqrt{2e^x - e^{2x}}$ funksiyani qaraymiz.

a) Bunga ko‘ra $2e^x - e^{2x} \geq 0$ va $-1 \leq \sqrt{2e^x - e^{2x}} \leq 1$ shartlarni qanoatalantirishi kerak. Birinchi shart $2 - e^x \geq 0$ bilan ekvivalent hisoblanadi, bundan esa $x \leq \log 2$ hosil bo‘ladi. Bunga ko‘ra berilganning ildizi har doim bo‘lishli hisoblanadi. Ikkinchi tengsizlik esa sodda qilib $2e^x - e^{2x} \leq 1$ ko‘rinishga keltirib olamiz. Bundan $y = e^x$ bundan biz yozishimiz mumkin $y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2 \geq 0$, qaysiki har doim shu shartni qanoatlantiradigan .

Shunday qilib $f = (-\infty, \log 2]$ bo‘lsa , bundan tashqari

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \qquad f(\log 2) = 0$$

bo‘lsa , hamda $y = 0$ nuqtada gorizontal chap asimptota bo‘ladi.

b) Quyidagidan

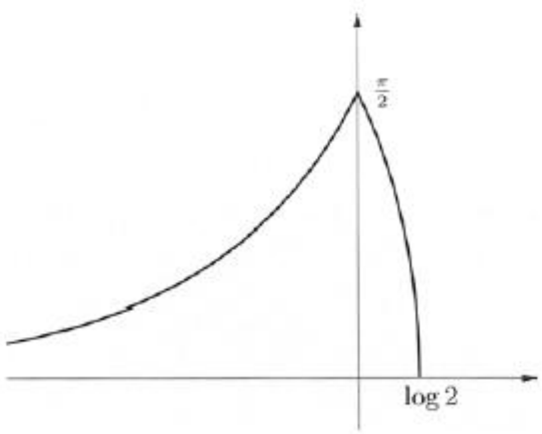
$$f'(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{\sqrt{e^x(2-e^x)(1-2e^x+e^{2x})}} = \frac{e^x(1-e^x)}{\sqrt{e^x(2-e^x)(1-e^x)^2}} \tag{19.12}$$

ajratib olib hisoblaymiz.

Bunda f xosilasi $x = \log 2$ ga teng , qachonli vertical urinma bo‘lganda va burilish nuqtasi $x = 0$ bo‘lganda.

c) f' belgisi $x<0$ nuqtada bo‘lishli bo‘lib va $0<x<\log 2$ oraliqda esa bo‘lishsiz hisoblanadi. $x=0$ nuqta esa umumiy maximum hisoblansa $f(0)=\frac{\pi}{2}$ bo‘lganda esa $x=\log 2$ nuqtada esa absolute mimumga $f(\log 2)=0$ da erishadi. f funksiyaning monotonlik oraliqlarini aytadigan bo‘lsak $(-\infty,0]$ oraliqda o‘suvchi bo‘lsa , $[0,\log 2]$ oraliqda esa kamyuvchi hisoblanadi.

f) grafigi quyidagicha



19.4- chizma $f(x)=\arcsin\sqrt{2e^x-e^{2x}}$ funksiyaning grafigi.

O‘z – o‘zini tekshirish savollari.

1. Polinimalni xilma –xil qilish uchun qanday amallar ketma-ketligi bajarildi?
2. Hosilaning Layneri haqida tushuncha bering?
3. Eksponensial funksiya qanday qilib ko`rib chiqiladi?
4. “Zanjir qoidasi” haqida tushuncha bering?
5. Funksiyani hosila orqali qanday qilib tekshirish mumkin?
6. Maksimum va minimumlar haqida tushuncha bering?

20 – M A’ R U Z A ROLL LAGRANJ VA KOSHI TEOREMALARI. LOPITAL QOIDASI

R E J A

1. Roll teoremasi
2. Lagranj teoremasi
3. Koshi teoremasi
4. Lopital qoidasi
5. Aniqmasliklarniochish:($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0)

Tayanch iboralar: Intervalda differensiallanuvchi, urinma orasidagi burchak, chekli orttirmalar, vatarning og‘ish burchagib urinma vatarga parallel, ikki funksiya orttirmasining nisbati, Lopital qoidasi, aniqmasliklar, aniqmaslikni ochish, logarifmlash, potensirlash.

Differensiallanuvchi funksiyalar haqida ba’zi teoremalar.

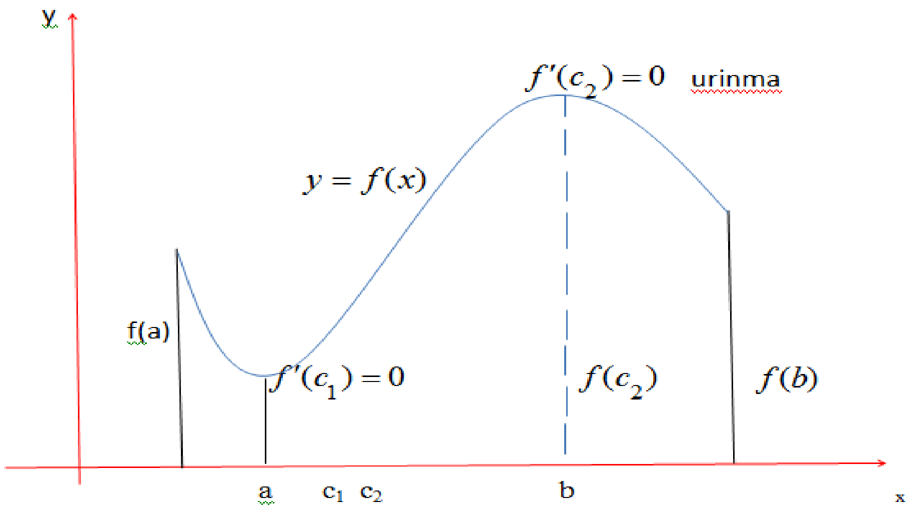
Roll teoremasi (hosilaning nollari haqidagi teorema)[83]. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz, (a,b) intervalda differensiallanuvchi, kesmaning oxirlarida teng $f(a)=f(b)$ qiymatlarni qabul qilsa, u holda kesmaning ichida kamida bitta $x=c\in(a,b)$ nuqta mavjudki unda hosila nolga teng, ya’ni

$$f'(c)=0 \qquad (20.1)$$

Isbot. $[a,b]$ kesmada uzluksiz funksiyaning xossasiga ko‘ra funksiya bu kesmada o‘zining eng katta **M** va eng kichik **m** qiymatlariga ega bo‘ladi, ya’ni funksiya chegaralangandir.

Agar $y=f(x)$ barcha $x\in\left[a,b\right]$ oraliqdagi qiymatlarini qanoatlantiradigan bo‘lsa, unga farqli ravishda barcha $x\in\left(a,b\right)$ da differensiallanuvchi bo‘lsa va oxirida $f(a)=f(b)$ bo‘lsa, keyin bu yerda $f'(c)=0$ ga teng bo‘lgan ixtiyoriy $c\in\left(a,b\right)$ son mavjud.

[83] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008



20.1-chizma

Bu teoremani **Roll teoremasi** deb ataladi. Agar $y=f(x)$ o‘zgarmas bo‘lib, bu teorema $y=f(x)$ funksiyaning turli haqiqiy qiymatlarida o‘rinlidir. Agar $f'(x)$ funksiya $a \le x \le b$, oraliqda har doim musbat yoki manfiy bo‘ladi, agar $f(x)$ funksiya bu oraliqda uzluksiz o‘ssa yoki uzluksiz kamaysa bu oraliqdagi $x=a$ va $x=b$ kesma oxirlari va mumkin bo‘lmagan $y=f(x)$ ikkala qiymatda ham ega bo‘lmasligi mumkin.

Bu shuni anglatadiki $f(a)=f(b)$ funksiya hosilasi $f'(x)$ x ning

a dan b bo‘lgan harakat yo‘nalishini o‘zgartirib yuboradi. Agar bu funksiya harakat yo‘nalishini o‘zgartirsa buning grafigi koordinata boshiga yaqin joydan va mavjud bo‘lgan $x=c$ ya’ni $f'(c)=0$ dan o‘tadi.

Teorema[84]. $f(x)$ funksiya chegaralangan $[a,b]$ oraliq, cheksiz $[a,b]$ va farqlovchi $[a,b]$ (eng kamida) oraliqlarda aniqlangan bo‘lsin. Agar $f(a)=f(b)$ bo‘lsa, u holda $x_0 \in (a,b)$ ya’ni $f'(x_0)=0$ bo‘ladi

Boshqacha qilib aytganda, $f(x)$ (a,b) da eng kamida bitta nuqtani qabul qiladi.

[84] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

Isbot. Veishtras teoremasiga ko‘ra $f([a,b])$ minimum va maksimum qiymatlarini $[m, M]$ oraliqda qabul qilgan m, M nuqtalaridir:

$$m = \min_{x_0 \in (a,b)} f(x) = f(x_m), \quad M = \max_{x_0 \in (a,b)} f(x) = f(x_M) \qquad (20.2)$$

$x_m, x_M \in (a,b)$ ga to‘g‘ri keladi. $m = M$ holatida, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da o‘zgarmas, demak har qanday $x \in (a,b)$ uchun $f'(x) = 0$ va teorema davom etadi. Deylik, $m < M$, $m \leq f(a) = f(b) \leq M$, tengsizliklardan biri $f(a) = f(b) < M$, $m < f(a) = f(b)$ ni qabul qiladi. Agar $f(a) = f(b) < M$, bo‘lsa, absolut maximum nuqta a ham b qiymat bo‘la olmaydi, shuning uchun f o‘zgaruvchida $x_M \in (a,b)$ ekstremum nuqtalardir.Bizda $x_M = x_0$ nuqtaligi bor. Agar $m < f(a) = f(b)$ bo‘lsa, bir o‘xshash isbot x_M nuqta x_0 qabul qiladi.

20.3.Teorema (Roll teoremasi)[85]. Agar $f(x)$ funksiya [a;b] kesmada aniqlangan bo‘lib, quyidagi

1) $[a,b]$ da uzluksiz;

2) (a,b) da differensiallanuvchi;

3) $f(a) = f(b)$

shartlarni qanoatlantirsa, u holda $f'(c) = 0$ bo‘ladigan kamida bitta c $(a < c < b)$ nuqta mavjud bo‘ladi.

Isbot. Ma’lumki, agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda funksiya shu kesmada o‘zining eng katta M va eng kichik m qiymatlariga yerishadi. Qaralayotgan $f(x)$ funksiya uchun ikki hol bo‘lishi mumkin.

a) $M = m$ bu holda $[a,b]$ kesmada $f(x) = const$ va $f'(x) = 0$ bo‘ladi. Ravshanki, $f'(c) = 0$ tenglamani qanoatlantiradigan nuqta sifatida $\forall c \in (a,b)$ ni olish mumkin.

[85] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

b) $M > m$, bu holda teoremaning $f(a) = f(b)$ shartidan funksiya M yoki m qiymatlaridan kamida birini $[a,b]$ kesmaning ichki nuqtasida qabul qilishi kelib chiqadi. Aniqlik uchun $f(c) = m$ bo‘lsin. Eng kichik qiymatning ta’rifiga ko‘ra $\forall x \in [a,b]$ uchun $f(x) \geq f(c)$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

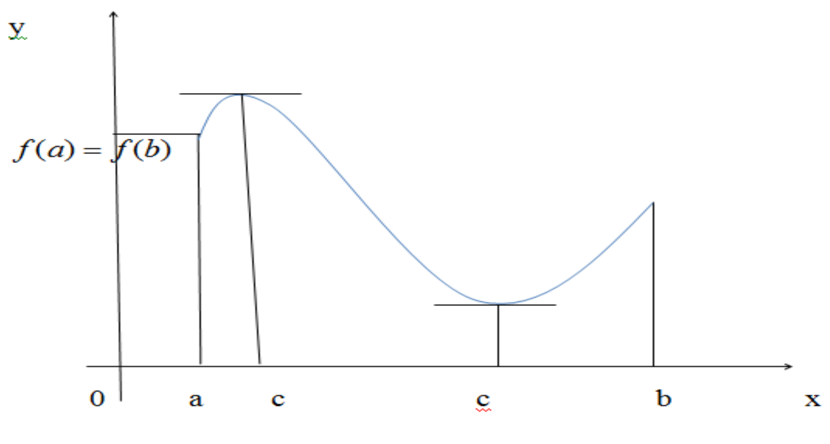
c) Endi $f'(c) = 0$ ekanligini ko‘rsatamiz. Teoremaning ikkinchi shartiga ko‘ra $f(x)$ funksiya (a,b) intervalning har bir *x* nuqtasida chekli hosilaga ega. Bu shart, xususan c nuqta uchun ham o‘rinli.

Demak, Ferma teoremasi shartlari bajariladi. Bundan $f'(c) = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

$f(c) = M$ bo‘lgan holda teorema yuqoridagi kabi isbotlanadi.

Roll teoremasiga quyidagicha geometrik talqin berish mumkin

(20.2-chizma). Agar $[a,b]$ kesmada uzluksiz, (a,b) intervalda differensiallanuvchi $f(x)$ funksiya kesma uchlarida teng qiymatlar qabul qilsa, u holda $f(x)$ funksiya grafigida abssissasi $x = c$ bo‘lgan shunday C nuqta topiladiki, shu nuqtada funksiya grafigiga o‘tkazilgan urinma abssissalar o‘qiga parallel bo‘ladi.



20.2-chizma

Eslatma. Roll teoremasining shartlari yetarli bo‘lib, zaruriy shart emas.

Masalan 20.2-rasm

1) $f(x)=x^3,\ x\in[-1,1]$ funksiya uchun teoremaning 3-sharti bajarilmaydi.

$(f(-1)=-1\neq 1=f(1))$, lekin $f'(0)=0$ bo‘ladi.

2) $f(x)=\begin{cases} x, & agar \quad 0\le x\le 1, \\ 0, & agar \quad -1<x<0, \\ 2, & agar \quad x-1 \end{cases}$ funksiya uchun Roll teoremasining barcha shartlari bajarilmaydi, lekin $(-1,0)$ ning ixtiyoriy nuqtasida $f'(x)=0$ bo‘ladi.

Mumkin bo‘lgan ikki holni qaraymiz.

a) Eng katta M va eng kichik m qiymatlar bir xil, ya’ni . $M=m$ bo‘lsin. Bundan $f(x)=const$ degan xulosaga kelamiz. Bundan kesmaning barcha nuqtasida $f'(x)=0$ ekanligi kelib chiqadi.

b) M≠m bo‘lsin. $f(a)=f(b)$ bo‘lgani uchun funksiya eng katta M va eng kichik m qiymatlardan birini kesmaning oxirlarida emas, uning ichida qabul qiladi. $f(c)=M$ bo‘lsin deylik, bunda $c\in[a,b]$.

$f'(c)=0$ ekanini isbotlaymiz. Buning uchun c nuqtaga Δx orttirma beramiz, $(c+\Delta x)\in(a,b)$ nuqtaga ega bo‘lamiz.

$f(c)=M$ funksiyaning eng katta qiymati bo‘lgani uchun

$f(c+\Delta x)<f(c)$ yoki $f(c+\Delta x)-f(c)<0$ bo‘ladi.

Ushbu munosabatlarni qaraymiz:

$$\Delta x<0 \quad \text{da} \quad f'_{+}(c+0)\le 0$$

$$\Delta x>0 \quad \text{da} \quad \frac{f(x+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}<0$$

Shartga ko‘ra funksiya (a,b) intervalning hamma erida va xususan, $\forall c\in(a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi ekanini inobatga olgan $\Delta x\to 0$ da bu munosabatlarda limitga o‘tib, ushbularga ega bo‘lamiz[86]:

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f'_{-}(c-0)\geq 0$$

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'_{+}(c+0)\geq 0 \qquad (20.3)$$

Funksiyaning $x=c$ nuqtada differensiallanuvchanligi sababli ushbuga ega bo‘lamiz:

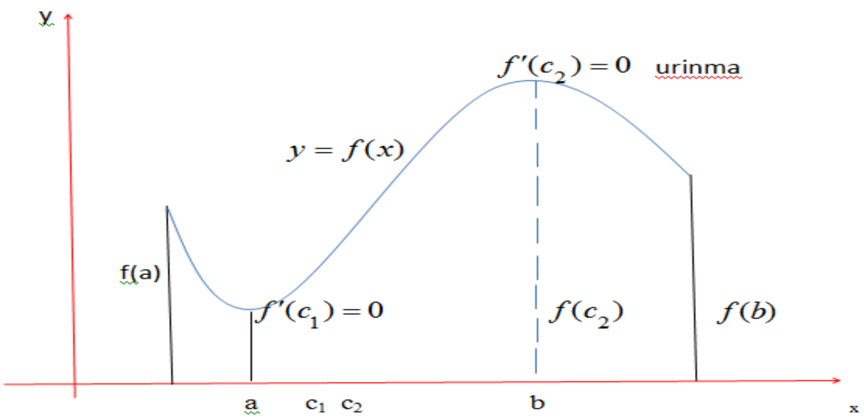
$$f'_{+-}(c-0)=f'_{+}(c+0)=f'(c) \qquad f'_{-}(c-0)\geq 0 \quad \text{va} \quad f'_{+}(c+0)\leq 0,$$

(20.4)

munosabatlar $f'(c)=0$ bo‘lgandagina birgalikda bo‘ladi. Demak, $[a,b]$ kesma ichida $x=c$ nuqta mavjudki, unda hosila nolga teng, ya’ni $f'(c)=0$ bo‘ladi.

20.3 Bu teoremaning geometrik ma‘nosi bunday: $f'(c)=0$ bo‘lishi tgα ekanini bildiradi, bunda α – 0x o‘qning musbat yo‘nalishi bilan grafikka abssissa $x=c$ ga teng bo‘lgan nuqtada o‘tkazilgan urinma orasidagi burchak. Shu sababli teoremaning sharti bajarilsa, u holda (a,b) kesma ichida kam deganda bitta shunday $x=c$ nuqta topiladiki, grafikka abssissasi $x=c$ ga teng bo‘lgan nuqtada o‘tkazilgan urinma 0x o‘qqa parallel bo‘ladi. Teoremaning shartlaridan aqalli bittasining buzilishi teorema tasdig‘ining buzilishiga olib keladi.

[86] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008



20.3- chizma

20.4.Teorema (Lagranj teoremasi)[87]**.**Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va (a,b) da chekli $f'(x)$ hosila mavjud bo‘lsa, u holda (a,b) da kamida bitta shunday c nuqta mavjud bo‘lib,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (20.5)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Quyidagi yordamchi funksiyani tuzib olamiz:

$$\Phi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \qquad (20.6)$$

Bu $F(x)$ funksiyani $[a,b]$ kesmada uzluksiz va (a,b) da hosilaga ega bo‘lgan $f(x)$ va x funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida qarash mumkin. Bundan $F(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmada uzluksiz va (a,b) da hosilaga ega ekanligi kelib chiqadi. Shuningdek $F(a)=F(b)=0$ demak $F(x)$ funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Demak, Roll teoremasiga ko‘ra (a,b) intervalda kamida bitta shunday c nuqta mavjud bo‘ladiki, $F'(c)=0$ bo‘ladi.

[87] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

Shunday qilib,

$$\Phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \qquad (20.7)$$

va bundan esa isbot qilinishi kerak bo‘lgan formula kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi.

Yuqoridagi formulani ba’zida Lagranj formulasi deb ham yuritiladi. Bu formula

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \qquad (20.8)$$

ko‘rinishda ham yoziladi.

20.5.Teorema (O‘rta qiymat teoremasi yoki Lagranj teoremasi)[88]. $f(x)$ funksiya chegaralangan $[a,b]$ oraliq, cheksiz $[a,b]$ va farqlovchi $[a,b]$ (eng kamida) oraliqlarda aniqlangan bo‘lsin. U holda $x_0 \in (a,b)$ nuqta ya’ni

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0) \qquad (20.9)$$

Isbot. Yordamchi chizmadan boshlaymiz,

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad (20.10)$$

$[a,b]$ oraliqda aniqlangan.. U$[a,b]$oraliqda cheksiz va (a,b) da o‘zgaruvchi, ya’ni hamma R uchun o‘zgarmas.

Eslatma:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Bundan quyidaginin bemalol ko‘rish mumkinki,

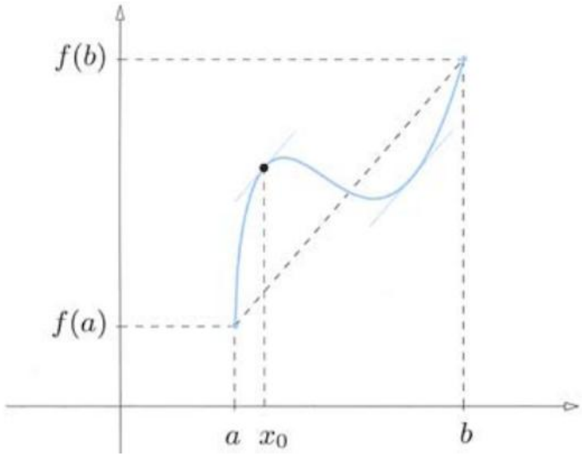
$$g(a) = f(a) \quad g(b) = g(a)$$

[88] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

Demak, Roll teoremasi **g** da tegishli, natijada $x_0 \in (a,b)$ qanoatlantiradigan nuqta mavjud

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

Lekin bunisi aniq ko‘rsatadi,



20.4-chizma. $[a,b]$ **da** $f(x)$ **uchun Lagranj nuqtasi**

O‘rta Qiymat teoremasining ma’nosi 20.4 chizmada namoyon bo‘ladi. Har bir Lagranj nuqtasida, f grafikidagi chiziqlar $(a, f(a))$ va $(b, f(b))$ nuqtalaridan o‘tgan to‘g‘ri chiziqlarga parallel.

Misol: Quyidagi misolni hisoblang. $f(x) = 1 + x + \sqrt{1-x^2}$

deb hisoblaylik, uning aniqlanish sohasi $[-1,1]$ da boshlang‘ich cheksiz funksiyalardek cheksiz. U yana ochiq oraliq $(-1,1)$ (ekstremum nuqalar emas) da ham farqli, aniqki

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Demak, $f(x)$ O‘rta Qiymat teoremasi farazini bajaradi va $(-1,1)$ da Lagranj nuqtasini qabul qilishi shart.

$$1 = \frac{f(1) - f(-1)}{1-(-1)} = f'(x_0) - 1 - \frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}},$$

x_0 da qanoatlantiradi.

Quyidagi natija O‘rta Qiymat Teoremasining $g(x)=x$ ni ham qamrab olgan) umumiylashtiruvchi natijasidir. Bu Lagranj teoremasining qolgan qismi bilan birga Lopital teoremasi va Teylor teoremasini isbotlarida kerakli bo‘ladi.

20.6. Koshi teoremasi (ikki funksiya orttirmasining nisbati haqida teorema).

Koshi tenglamasi**:** Lagranj teoremasi o‘z navbatida quyidagi teoremaning xususiy holi bo‘ladi.

Teorema (Koshi teoremasi)[89]. Agar $[a,b]$ kesmada f(x) va g(x) berilgan bo‘lib,

1) $[a,b]$ da uzluksiz;

2) (a,b) intervalda f’(x) va g‘(x) mavjud, hamda g‘(x)≠0 bo‘lsa, u holda hech bo‘lmaganda bitta shunday c (a<c<b) nuqta topilib,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (20.11)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Ravshanki, (20.11) tenglik ma’noga ega bo‘lishi uchun $g(x) \neq g(a)$ bo‘lishi kerak. Bu esa teoremadagi $g'(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$ shartdan kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, agar $g(a) = g(b)$ bo‘lsa, u holda g(x) funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantirib, biror $c \in (a,b)$ nuqtada $g'(c) = 0$ bo‘lar edi. Bu esa $\forall x \in (a,b)$ da $g'(x) \neq 0$ shartga ziddir. Demak, $g(b) \neq g(a)$

[89] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

Endi yordamchi

$$\Phi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(x)-g(a)\right)$$ funksiyani tuzaylik.

Shartga ko‘ra $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da uzluksiz va (a,b) intervalda differensialanuvchi bo‘lgani uchun F(x) birinchidan $[a,b]$ kesmada uzluksiz funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida uzluksiz, ikkinchidan (a,b) intervalda

$$\Phi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-(a)}{g(b)-g(a)}g'(x) \qquad (20.12)$$

hosilaga ega.

So‘ngra $F(x)$ funksiyaning x=a va x=b nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz: F(a)=F(b)=0 Demak, $F(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada Roll teoremasiinng barcha shartlarini qanoailantiradi. Shuning uchun hech bo‘lmaganda bitta shunday c$(a<c<b)$ nuqta topiladiki, F′(c)=0 bo‘ladi.

Shunday qilib,

$$0=\Phi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c) \qquad (20.13)$$

va bundan yuqoridagi tenglikning o‘rinli ekani kelib chiqadi. Isbot tugadi.

Isbotlangan tenglikdan Koshi formulasi deb ham ataladi.

Teorema 20.6 (Koshi teoremasi)[90]. F funksiya chegaralangan $[a,b]$ oraliq, cheksiz $[a,b]$ va farqlovchi $[a,b]$ (eng kamida) oraliqlarda aniqlangan bo‘lsin. Hamma $x\in(a,b)$ uchun $g'(x)\neq 0$ deylik. U holda bu yerda $x_0\in(a,b)$ o‘z ichiga oladi, ya’ni quyidagicha

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \qquad (20.12)$$

[90] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

Isbot. Avvalo, $g(a) \neq g(b)$, aks holda Roll teoremasi (a,b) da $g'(x)$ ni g‘oyib qiladi, farazga qarshi.

Funksiyani olamiz,

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

$[a,b]$ da aniqlangan. U $[a,b]$ a cheksiz va ochiq (a,b) oraliqda o‘zgaruvchi.

Bundan tashqari,

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x).$$

Demak, $h(a) = f(a)$, Roll teoremasini qanoatlantiradi, shuning uchun $x_0 \in (a,b)$ da bir nuqta bo‘lishi shart.

$$h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x_0) = 0$$

20.7 Lopital qoidasi[91].

Teorema: Faraz qilaylik x ning qiymati haqida, bizda mavjudki $g(x) \to 0$ yoki $f(x)$, $g(x) \to \infty$. So‘ngra agar bu yerda $L \in R \cup \{-\infty, \infty\}$ dan $f'(x)/g'(x) \to L$ mavjud bo‘lsa, u quyidagiga teng bo‘ladi $f(x)/g(x) \to L$.

Isbot: Shuning uchun namunaga ko‘ra , agar bizdagi $0/0$ formaga ko‘ra biz limitdagi hosilalarning o‘rniga qo‘ysak bo‘ladi, bundan esa bizga ∞/∞. Ko‘rinishdagi natijaga o‘xshahs tenglik hosil bo‘ladi

1. Agar $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ bunda $0/0$ bo‘lsa , bundan

[91] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}\overset{0/0}{=\!=}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ **ikkinchi limitidagi qiymati bo‘ladi**

2. Agar $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ bo‘lsa ∞/∞. bundan

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}\overset{0/0}{=\!=}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ **ikkinchi limitidagi qiymati bo‘ladi**

b)Lopital qoidasi bitta formulasi mavjud bo‘lib, bu qoida noaniqliklarni hisoblashda ishlatiladi misol uchun $\frac{0}{0}$ Agar $f(x)$) va $g(x)$ funksiyalar bir - bi idan farq qilib turuvchi bo‘lsa va qanoatlantirsa

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0\ , \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=0, \quad \lim_{x\to x_0} g^{'}(x)=0\ ,$$

Bundan yozaolamiz

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0 \qquad (20,14)$$

O‘ng tomoni limiti hisoblanadi.

Bu tenglikning isbotiga qaraydigan bo‘lsak

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{g'(x)-g'(x_0)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Chunki $f(x_0)=g(x_0)=0$ farazdir

Bundan ko‘rinadiki Lopitalqoidasi $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi noaniqliklarni hisoblashda ishlatiladi

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ va $\lim\limits_{n\to n_0} g(x)=\infty$;

Keyin bundan buni hosil qilamiz

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \tag{20.15}$$

Shu yerdan belgilash qilib $x=\frac{1}{t}$ kiritib olamiz bundan $x\to\infty$, bo'lsa $t\to 0$, bo'ladi

Yozishimiz mumkin

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}, t>0 \tag{20.16}$$

Va diqqatimizni Lopital qoidasining o'ng tomonidagi tenglamaga qaratamiz (20.16) dagi tenglikdan

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(1/t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'(1/t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f''(1/t)}{g''(1/t)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Lopital qoidasing boshqacha ko'rinishda yozadigan bo'lsak

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \text{ va } \lim_{n\to x_0} g(x)=\infty \tag{20.17}$$

Bu tenglik (20.18) tenglik asosida yaratilgandir.

O'zgartirish kiritilgan $x=x_0+\frac{1}{t}$ bundan $x\to x_0$, keyin $t\to\infty$ yozish mumkin

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(x_0+1/t)}{g(x_0+1/t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{F(x)}{G(x)} \tag{20.18}$$

Lopital qoidasi (20.18) asosan yozish talab etiladi:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to\infty}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{t\to\infty}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(x_0+1/t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'(x_0+1/t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Agar $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ noaniqlik ko‘rinishida bo‘lsa Lopital qoidasini yana yozsak bo‘ladi

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \qquad (20.19)$$

Misol: Hisoblang $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Lopital qoidasiga ko‘ra yozadigan bo‘lsak

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-(-\sin x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

(20.15) va (20.16) tengliklar qoidaga ko‘ra yozilgan bo‘lsa (20.17) esa ularning hosilalari asosida yozilgandir

Misol: Tenglamani yeching $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$

Yechish: Lopital qoidasiga ko‘ra $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{x}=0$ (c)

Tenglama limiti hisoblang: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(tgx)}$

Yechish: Lopital qoidasiga ko‘ra

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\ln(tgx)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}*\cos x}{\frac{1}{tgx}*\sec^2 x}=\lim_{x\to 0}\cos^2 x$$

Misol. Limit $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sin 5x}$

$\frac{0}{0}$ tipidagi noqaniq formasidagi o‘sishni beradi. Chunki surat maxrajdagilar har xil

funksiyalar. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{5\cos 5x}=\frac{4}{5}$.

Shuning uchun $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{5\cos 5x}=\frac{4}{5}$.

II) Nisbat $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ haliyam noaniq forma ekanligida f va g ni c atrofida ikki marta aniqlanadi deb hisoblab, biz yana qaytadan dastlabki misolning $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ limitni o‘rganib takrorlashimiz mumkin va hk….

Masalan, $\frac{0}{0}$ shaklidagi aniqlanib bo‘lmaydigan formani ko‘ramiz.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+3x-\sqrt{(1+2x)^3}}{x\sin x}.$$

Surat va maxrajni differensiallab, biz yana $\frac{0}{0}$ formadagi ifodani olamiz;

$$\lim_{x\to 0}\frac{3-3\sqrt{1+2x}}{\sin x+x\cos x},$$

Shuning uchun biz yana differensiallaymiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{\sqrt{1+2x}}}{2\cos x - x\sin x} = -\frac{3}{2}.$$

Dastlabki misolga ikki marta e’tiborimizni qaratib (murojaat qilib) xulosaga kelamizki

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+3x-\sqrt{(1+2x)^3}}{\sin^2 x} = -\frac{3}{2}$$

Sharh1: Lopital teoramasi faqatgina yuqoridagi mavjudligi uchun yetarli nol hisoblanadi. Boshqacha qilib aytganda, u sodir bo‘lishi mumkin hosilalarning farq nisbati mavjud bo‘lmasa lekin biz funksiyalarning farq nisbatiga ega bo‘lamiz.Masalani kiritamiz.qachonki limitni dek qabul qilmaganda, limiti mavjud bo‘ladi.

<<<< $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{2x+\cos x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+0(x)}{2x+0(x)} = \frac{1}{2}$$ >>>>>>>>>>>>

Sharh2: Lopital teoremasining qo‘llanishi

Biz Lopital teoremasi qo‘l keladigan bir nechta holatlarni ko‘rib chiqamiz.

20.9 Fundamental (Asosiy) limitlar[92]. Teorema yordamida (vositasida) bir nechta muhim limitlarni kashf qilamiz

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}|x|^\alpha e^x = 0, \qquad \forall\alpha\in R, \tag{20.18}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty}x^\alpha\log x = 0, \qquad \forall\alpha>0. \tag{20.19}$$

Bular ikkilangan simvollarining formalariga ekvivalent ravishda yuqorida keltirilgan. Avval (20.18)dan boshlaymiz qayerdaki $\alpha=1$ bo‘lganda (20.19) dan

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1} = +\infty$$

Boshqa har qanday $\alpha>0$, uchun, bizda bo‘ladi

[92] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^a}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{\alpha^{\frac{x}{\alpha}}}\right)^{\alpha}=\frac{1}{\alpha^{\alpha}}\left(\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}\right)^{\alpha}=+\infty$$

Vanihoyat, $\alpha\le 0$ uchun, natija uncha ahamiyatli emas, chunki u yerda noaniqlik yo‘q. (20.17)ning 2-formulasi uchun

$$\lim_{x\to-\infty}|x|^{\alpha}e^{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|^{\alpha}}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|^{\alpha}}{e^{|x|}}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y^{\alpha}}{e^{y}}\right)^{\alpha}=0$$

Endi :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^{\alpha}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}=0$$

va

$$\lim_{x\to0^+}x^{\alpha}\log x=\lim_{x\to0^+}\frac{\log x}{x^{-\alpha}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{(-\alpha)x^{-\alpha-1}}=-\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to0^+}x^{\alpha}=0.$$

Biz hozir oldinroq aytilgan ta’kidni isbotlash jarayonidamiz.

Isboti. Faqatgina,

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

sharti bilan lekin bu noaniq (yechimga ega emas) shakl, chunki

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=0,$$

Shuning uchun Lopital teoremasi ta’kidlaydiki

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{1}.$$

Kattaliklar maydonining qatorini hisoblash.

Misollar orqali biz qanday qilib Lopital natijalati eng kichik cheksiz kattalik yoki cheksiz funksiyalar, va ularning prinsiplarini aniqlashini tushuntiramiz.

Funksiya, $f(x) = e^x - 1 - \sin x$

eng kichik cheksiz kattalik $x \to 0$ uchun cheksizlikka tekshirish $\varphi(x) = x$ funksiya bilan biz teoremani ikki marta kiritamiz (bir muddat buni mumkin deb hisoblaymiz).

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x}{\alpha x^{\alpha - 1}} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + \sin x}{\alpha(\alpha - 1)x^{\alpha - 2}}.$$

$\alpha = 2$ bo‘lganda eng aniq limit mavjud va u faktga ko‘ra ½. Bu faktning o‘ziyoq Lopital teoremasini ishlatilishini aniqlaydi.Shuning uchun, $f(x)$ ikki qatorning eng kichik cheksiz kattaligi $\varphi(x) = x$ ga tegishli holda, uning qiymati esa quyidagiga teng.

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

Keyin, $f(x) = \tan x$

deb hisoblaymiz cheksiz funksiya $x \to \frac{\pi}{2}^-$ uchun $\varphi(x) = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$ ni kiritib, biz ega bo‘lamiz

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}\right)^\alpha} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sin x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\alpha(\frac{\pi}{2} - x)^\alpha}{\cos x}.$$

Birinchi limit 1 bo‘lganda, ikkinchisi uchun Lopital teoremasini kiritamiz

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{(\frac{\pi}{2} - x)^\alpha}{\cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\alpha(\frac{\pi}{2} - x)^{\alpha - 1}}{-\sin x}.$$

Oxirgisi 1 ga teng bo‘ladi qachonki $\alpha=1$, shuning uchun $\tan x$ birinchi qatorda cheksiz, $x\to\frac{\pi}{2}^{-}$ uchun

$\varphi(x)=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-x}$ ga tegishlilik bilan prinsipial qism haqiqatdan $\varphi(x)$.

Misol:

Hisoblang. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/\sqrt{x}}$

Yechish: bu ∞^0 (ko‘rinishda yoki (aniqroq ∞^{0+}). Biz yuqoridagi formulalar asosida yechamiz.

$$y=x^{1/\sqrt{x}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y=\ln x^{1/\sqrt{x}}=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\frac{\frac{\infty}{\infty}}{LHR}=\lim_{x\to\infty}\ln y\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}*\frac{2x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$$

Bundan $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\ln y}=e^{0}=1$

Misol:

Hisoblang $\lim\limits_{x\to 0+}\cos x^{1/x}$, $\lim\limits_{x\to 0+}\cos x^{1/x^2}$ va $\lim\limits_{x\to 0+}\cos x^{1/x^3}$

Yechish Bu yerda uchta misol berilgan bo‘lib , lekin biz uni qoidaga asosan ishlashimiz kerak. Ya’ni barchasi 1^{∞}.

Shunga asosan topiladi.

$$\lim_{x\to 0+} \cos x^{1/x}$$

Yechish: $y = \cos x^{1/x}$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{1}{x^3} \ln(\cos x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0+} \ln y = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(\cos x)}{x^3} \frac{0/0}{LHR} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{3*x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\tan x}{3*x^2}$$
$$\frac{0/0}{LHR} \lim_{x\to 0+} \frac{-\sec^2 x}{6*x} \frac{-1/0^+}{} 0$$

Bundan $\lim_{x\to 0+} \cos x^{1/x^3} = \lim_{x\to 0+} y = \lim_{x\to 0+} e^{\ln y} \underline{\underline{e^{-\infty}}}$

Berilgan: $y = \cos x^{1/x2}$

$\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0+} \ln y = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} \frac{0/0}{LHR} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2*x} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\tan x}{2*x} \frac{0/0}{LHR} \lim_{x\to 0+} \frac{-\sec^2 x}{2} = \frac{-1}{2}$$

Demak, $\lim_{x\to 0+} \cos x^{1/x2} = \lim_{x\to 0+} y = \lim_{x\to 0+} e^{\ln y} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

- $\lim_{x\to 0+} \cos x^{1/x3}$.

$y = \cos x^{1/x3}$ $\quad \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x^3} \ln(\cos x)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0+} \ln y = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(\cos x)}{x^3} \frac{0/0}{LHR} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{3*x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\tan x}{3*x^2}$$

$$\frac{0/0}{LHR} \lim_{x\to 0+} \frac{-\sec^2 x}{6*x} \frac{-1/0^+}{} 0$$

Bundan $\lim\limits_{x\to 0+} \cos x^{1/x^3} = \lim\limits_{x\to 0+} y = \lim\limits_{x\to 0+} e^{\ln y} \underline{\underline{e^{-\infty}}}\ 0$

Qisqacha aytganda berilgan 1^{∞} asosan bizga berilganlar 1 ni o‘z ichiga oladi, va qayerdaki yechimlar teng bo‘lsa yoki ∞ bo‘lsa javoblarni birlashtiradi.

O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Rol teoremasini ifodalang va isbotlang.
2. Rol teoremasining geometrik ma’nosini tushintiring.
3. Lagranj teoremasini ifodalang va isbotlang.
4. Lagranj teoremasining geometrik ma’nosini tushintiring.
5. Koshi teoremasini ifodalang va isbotlang.
6. $x \to a$ (chekli) va $x \to \infty$ da $\frac{0}{0}$ aniqmaslikni ochish uchun Lopital qoidasini chiqaring.

21-MA'RUZA Boshlangich funksiya va aniqmas integral. Aniqmas integralning xossalari

R E J A

6. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral;
7. Aniqmas integralning xossalari;
8. Asosiy integrallar jadvali.

Tayanch iboralar:

Differensial hisob, integral hisob, o'zaro teskari amallar, boshlang'ich funksiya, aniqmas integral, integral chiziq, asosiy integrallar jadvali. bevosita integrallash, diferensial belgisi ostiga kiritib integrallash, Aniqmas integralda o'zgaruvchini almashtirish,

1. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral. Aniqmas integralning xossalari.

Differensial hisobning asosiy vazifasi berilgan $F(x)$ funksiyaga ko'ra uning hosilasi $F'(x) = f(x)$ ni yoki differensiali $F'(x)dx = f(x)dx$ ni topishdir.

Integral hisobning asosiy vazifasi buning teskarisi bo'lib, $F(x)$ funksiyani uning ma'lum $f'(x)$ hosilaga yoki $f(x)dx$ differensialiga ko'ra topishdan iborat. Bu ikki amal o'zaro teskari amallardir.

Ta'rif. Biror oraliqda aniqlangan $f(x)$ funksiya uchun bu oraliqning hamma qiymatlarida

$$F'(x) = f(x) \text{ yoki } dF(x) = f(x)dx \qquad (21.1)$$

shart bajarilsa, u holda $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi[93] deyiladi.

Misol. $F(x) = sinx$ funksiya butun sonlar to'g'ri chizig'ida $f(x) = sosx$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi, chunki x ning istalgan qiymatida

$$F'(x) = (sinx)' = cosx = f(x)$$

yoki

$$dF(x) = d(sinx) = cosxdx = f(x)dx$$

tenglik to'g'ri bo'ladi.

Lemma. Agar $F(x)$ va $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning ikki boshlang'ich funksiyalari bo'lsa, u holda $F(x) = F(x) + C$ bo'ladi, bunda C – ixtiyoriy o'zgarmas son.

[93] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

Aniqmas integralning ta'rifi.

Ta'rif. Agar $F(x)$ funksiya biror oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda $F(x)+C$ (bunda C – ixtiyoriy doimiy) funksiyalar to'plami shu kesmada $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali[94] deyiladi va

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (21.2)$$

kabi belgilanadi. Bu yerda $f(x)$ – integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ – integral ostidagi ifoda; x- integrallash o'zgaruvchisi, $\int$-belgi integral deyiladi.

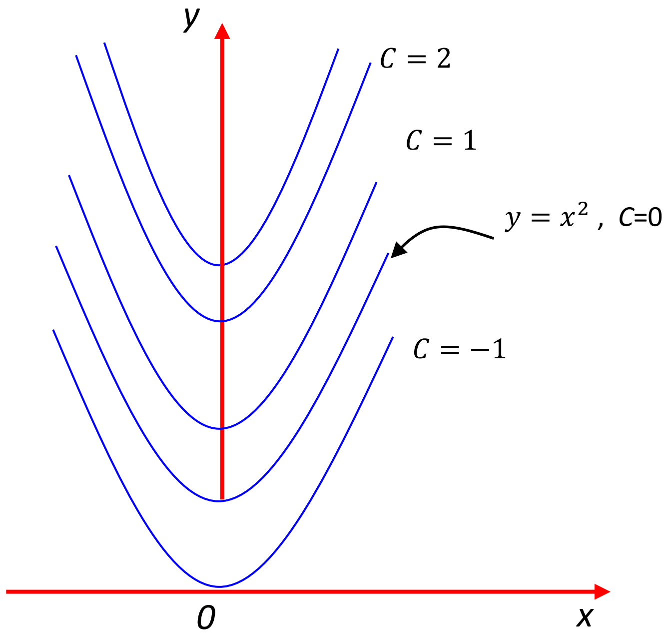
Aniqmas integralni topish jarayoni yoki berilgan funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topish jarayoniga integrallash deyiladi. Kesmada uzluksiz bo'lgan istalgan funksiya shu oraliqda boshlang'ich funksiyaga ega, demak aniqmas integralga ham ekanligi kelib chiqadi.

Masalan.

$$\int cosxdx = sinx + C, \quad \text{chunki} \quad (sinx)' = cosx.$$

Boshlang'ich funksiyaning grafigiga uning integral chizig'i deyiladi, shuning uchun aniqmas integral geometrik nuqtai nazardan ixtiyoriy ***S*** o'zgarmasga bog'liq bo'lgan hamma egri chiziqlar to'plamini ifodalaydi.

1-misol. $\int 2xdx = \frac{x^2}{2} + C$, chunki $(x^2)' = 2x$. Buning boshlang'ich funksiyalaridan biri $F(x) = x^2$ ning grafigi parabola bo'ladi, $F(x) + C = x^2 + C$ aniqmas integral – parabolalar to'plami bo'lib, uni ixtiyoriy S ga turli qiymatlar berib hosil qilish mumkin(1-chizma).



[94] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

1-chizma.

Aniqmas integralning xossalari[95].

1-xossa. Aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng, ya'ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2-xossa. Aniqmas integralning differensiali integral belgisi ostidagi ifodaga teng, ya'ni

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3-xossa. Biror funksiyaning hosilasidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy o'zgarmasning yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

4-xossa. Biror funksiyaning differensialidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy o'zgarmasning yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int dF\,(x)dx = F(x) + C.$$

5-xossa. O'zgarmas ko'paytuvchini integral belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin, ya'ni agar $k = const \neq 0$ bo'lsa, u holda

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

6-xossa. CHekli sondagi funksiyalarning algebraik yig'indisidan olingan aniqmas integral shu funksiyalarning har biridan olingan aniqmas integrallarning algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int (f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx.$$

7-xossa. Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, ya'ni

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

bo'lsa, u holda

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

tenglik to'g'ri bo'ladi, bu yerda $u = u(x)$ x ning differensiallanuvchi funksiyasi. Bu xossa integrallash formulalarining invariantligi deyiladi.

Masalan, agar $\int cosxdx = sinx + C$ bo'lsa, u holda

$$\int cosx^2 \cdot dx^2 = sinx^2 + C$$

---

[95] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

bo‘ladi. Natija to‘g‘riligiga ishonch hosil qilish uchun tenglamaning chap qismining va o‘ng qismining differensialini hisoblash yetarli. Haqiqatan ham,

$$d(sinx^2) = cosx^2 \cdot dx^2$$

va

$$d\left(\int cosx^2 \cdot dx^2\right) = cosx^2 \cdot dx^2.$$

Asosiy integrallar jadvali.

1. $\int du = u + C.$
2. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \ (\alpha \neq -1).$
3. $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C.$
4. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C.$
5. $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C.$
6. $\int a^u du = \frac{a^u}{lna} + C.$
7. $\int e^u du = e^u + C.$
8. $\int sinudu = -cosu + C.$
9. $\int cosudu = sinu + C.$
10. $\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + C.$
11. $\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C.$
12. $\int \frac{du}{sinu} = ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C.$
13. $\int \frac{du}{cosu} = ln\left|tg(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{2})\right| + C.$
14. $\int tgdu = -ln|cosu| + C.$
15. $\int ctgdu = ln|sinu| + C.$
16. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C.$
17. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$
18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arcsin\frac{u}{a} + C.$
19. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = ln\left(u + \sqrt{u^2+a}\right) + C.$

a) $\int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad (\alpha \neq -1)$

b) $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x| + c \qquad (\text{for } x > 0 \text{ or } x < 0)$

c) $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$

d) $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$

e) $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c$

f) $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + c$

g) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + c$

21.2 Misol:

a) Berilgan $f(x) = x^4$ integralini hisoblang. Hosilasi $5x^4 = Dx^5$, shuning uchun berilgan misol boshlang'ichi $F(x) = \frac{1}{5}x^5$ ga teng. Bundan,

$$\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C$$ hosil bo'ladi.

b) Berilgan $f(x) = e^{2x}$,bundan $De^{2x} = 2e^{2x}$ bo'lsa, $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ hosil bo'ladi , shuning uchun $\int e^{2x} dx = \frac{1}{5}e^{2x} + C$ hosil bo'ladi.

c) Qaysiki $D\cos 5x = -5\sin 5x, f(x) = \sin 5x$ bundan $F(x) = -\frac{1}{5}\cos 5x$ bo'lsa, bundan,

$$\int \sin 5x = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$$

hosil bo'ladi.

O'z-o'zini tekshirish savollari.

1. Berilgan funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deb nimaga aytiladi?
2. Berilgan funksiyaning anikmas integrali deb nimaga aytiladi?
3. Anikmas integralning eng sodda xossalarini keltiring.
4. Anikmas integralda bo'laklab integrallash formulasini keltirib chiqaring.
5. Anikmas integralda o'zgaruvchilarni almashtirish usulini bayon qiling.

22-MA`RUZA INTEGRALLASH JADVALI. ANIQMAS INTEGRALDA O'ZGARUVCHI ALMASHTIRISH, BO'LAKLAB INTEGRALLASH

REJA

1. Integrallash jadvali
2. O`zgaruvchilarni almashtirish (urniga kuyish usuli)
3. Bulaklab integrallash usuli
4. Ayrim xulosaviy muloxozalar

Tayanch so'zlar: *Boshlangich funksiya, , integrallash, aniqmas integral xossalari, aniqmas integral,integrallash operatsiyasi, urniga kuyib integrallash formulasi, Eyler almashtirishi, bulaklab integrallash formulasi, asosiy integrallar jadvali.*

1) $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \ a \neq -1.$

2) $\int \dfrac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C.$

3) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \ \ a > 0, \ \ a \neq -1, \ \ \ \int e^x dx = e^x + C.$

4) $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

5) $\int \cos x dx = \sin x + C.$

6) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$

7) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$

9) $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg\left(\dfrac{x}{a}\right) + C, \ \ a > 0.$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a>0.$

11) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a\neq 0.$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad a\neq 0.$

1. Integrallashning eng sodda usullari

Integrallashning ikkita eng sodda usulini qarab chiqamiz: bevosita integrallash va diferensial belgisi ostiga kiritish.

1. Bevosita integrallash usuli. Bu usulda integral belgisi ostidagi funksiyani almashtirish, 5 va 6 xossalarni qo‘llash, shuningdek, integrallashning asosiy formulalari jadvalidan foydalanishdan iborat.

1-misol. Integralni toping:

$$\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}dx.$$

Yechish. **S**uratni maxrajga bo‘lib, keyin esa 5 va 6-xossalarni qo‘llanib, integral belgisi ostidagi funksiyani almashtiramiz va integrallar jadvalidan foydalanib quyidagini hosil qilamiz:

$$\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + 5x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{x}})dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx + 5\int x^{\frac{1}{2}}dx -$$

$$-\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C_1 + 5\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_2 - 2\sqrt{x} + C_3 = = 2\sqrt{x}\cdot\left(\frac{x^2}{5}+\frac{5}{3}\cdot x - 1\right) + C,$$

Bu yerda $C = C_1 + C_2 + C_3$.

2. Differensial belgisi ostiga kiritish usuli[96].

Differensial belgisi ostiga kiritish usuli integral ostidagi ifodani almashtirishdan iborat. Masalan:

$$dx = d(x+a), \quad dx = \frac{1}{k}d(k\cdot x) = \frac{1}{k}d(k\cdot x + a),$$

[96] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

$$x \cdot dx = \frac{1}{2} d(x^2), \quad cosxdx = d(sinx), \quad \frac{dx}{x} = d(lnx) \qquad \text{va h. k.}$$

2-misol. $\int (x+2)^{100} dx$ integralni toping.

Yechish. $dx = d(x+2)$ bo‘lgani uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$\int (x+2)^{100} dx = \int (x+2)^{100} d(x+2) = \frac{(x+2)^{101}}{101} + C.$$

2. Aniqmas integralda o‘zgaruvchini almashtirish[97].

Integrallashning yanabir usuli bilan tanishamiz. Jadvalga kirmagan $\int f(x)dx$ integralni hisoblash kerak bo‘lsin. x ni t erkli o‘zgaruvchining biror differensiallanuvchi funksiyasi orqali ifodalab, integrallashning yangi t o‘zgaruvchisini kiritamiz: $x = \varphi(t)$, bunga teskari $t = \psi(x)$ funksiya mavjud bo‘lsin, u holda

$$dx = \varphi'(t)dt$$

bo‘lib,

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt \qquad (22.1)$$

ekanini isbotlaymiz. Bu tenglikni quyidagicha tushinamiz: tenglikning o‘ng qismida integrallashdan so‘ng eski x o‘zgaruvchiga qaytish kerak.

Isbotlash uchun (22.1) tenglikning chap va o‘ng qismidan olingan differensialni topamiz, natijada quyidagini hosil qilamiz:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx, \qquad (22.2)$$

$$d\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right) = f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt = f(x)dx. \qquad (22.3)$$

(22.2) va (22.3) formulalarni taqqoslab (22.1) tenglikning chap va o‘ng qismlarining differensiallari teng ekanini ko‘ramiz. Bu esa boshlang‘ich funksiyalar faqat o‘zgarmas qo‘shiluvchiga farq qilishi mumkinligini anglatadi. (22.1) formulaning to‘g‘riligi isbotlandi.

Misol. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ integralni toping.

Yechish. $x + 1 = t^2$ deb belgilaymiz, bunda $x = t^2 - 1$ va $dx = 2tdt$ bo‘ladi. Integralda o‘zgaruvchini almashtiramiz. Bundan

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \int \frac{2tdt}{(t^2-1) \cdot t} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C =$$

[97] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

$$= ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C.$$

4. Bo‘laklab integrallash[98].

Integrallashning yana bir usulini qarab chiqamiz, u ikki funksiyaning ko‘paytmasini differensiallash formulasidan kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, $u(x)$ va $v(x) - x$ ning differensiallanuvchi funksiyalari bo‘lsin. Bu funksiyalar ko‘paytmasining differensialini topamiz:

$$d(u \cdot v) = vdu + udv,$$

bundan

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Oxirgi tenglikning ikkala qismini integrallab, quyidagini topamiz:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

yoki

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (22.4)$$

(22.4)-formulaga bo‘laklab integrallash formulasi deyiladi.

Odatda, (22.4) formula ostidagi funksiya turli sinfdagi darajali va ko‘rsatkichli, darajali va trigonometrik, trigonometrik va ko‘rsatkichli va hakozo funksiyalarning ko‘paytmasi sifatida ifodalangandagina qo‘llaniladi. Bunda integrallarning ikki turini ajratib ko‘rsatish mumkin, ular uchun nimani u deb va nimani dv deb qabul qilish kerakligini ko‘rsatish mumkin.

Birinchi turga $P_n(x)$ ko‘phadning ko‘rsatkichli yoki trigonometrik funksiyaga ko‘paytmasini o‘z ichiga olgan integrallar kiradi. Bu yerda u orqali $P_n(x)$ ko‘phad belgilanadi, qolgan hamma ifoda esa dv orqali belgilanadi.

Ikkinchi turga $P_n(x)$ ko‘phadning logarifmik yoki teskari trigonometrik funksiyaga ko‘paytmasi qatnashgan integrallar kiradi. Bu holda dv bilan $P_n(x)dx$ ifoda belgilanadi, qolgan hamma ifoda esa u bilan belgilanadi.

1-misol. $\int xe^{-x}dx$ integralni toping.

[98] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

Yechish. Integral birinchi turga tegishli. Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$u = x, \ \ dv = e^{-x}dx.$$

Bundan du va v ni topamiz:

$$du = dx, \ \ v = \int e^{-x}dx = -\int e^{-x}d(-x) \ = -e^{-x}$$

(v ni topishda o‘zgarmas S ni yozish kerak emas, uni biz oxirgi natijada yozamiz).

(22.4) formulani tuzamiz:

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = C - xe^{-x} - e^{-x} = C - e^{-x}(x+1).$$

$u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar Δ kesmada uzluksiz xosilalarga ega bulsin. U xolda uv funksiya xam Δ kesmada uzluksiz xosilaga ega bo`ladi va, kupaytmaning xosilasiga asosan Quyidagi tenglik bajariladi

$$uv' = (uv)' - vu'$$

Bu tenglikni integrallab va Quyidagi tenglikni etiborga olib,

$$\int (uv)'dx = uv + C \ ,$$

topamiz

$$\int uv'dx = uv + C - \int vu'dx \, .$$

O`zgarmas ixtiyoriy C ni $\int vu'dx$ integralga kirgizsak,

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx \qquad (21)$$

yoki

$$\int udv = uv - \int vdu \ , \qquad (22)$$

ga ega bulamiz.

Ayrim xulosaviy muloxozalar

YUqorida integrallashning imumiy usullari xakida gap bordi. Integrallash metodlari asosida konkret funksiyalar sinifini tula integrallash mumkin- ratsional, irratsional , trigonometrik va giperbolik funksiyalarni integrallash. Bo`lar ning bayonini keyinrok keltiramiz.

Differensial xisob kursidan ma'lumki, ixtiyoriy elementar funksiyalardan olingan xosila yana elementar funksiyadan iborat bo`ladi. Differensiallash amaliga, teskari amal integrallash amali bulib, bunga birkancha misollar keltirish mumkinki ularning bashlangichi mavjud lekin elementar funksiyalar orkali ifodalanmaydi. Masalan Quyidagi funksiyalarni e^{-x^2}, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$,

qaraylik, boshlangichlarining mavjudligi xaqidagi teoremaga asoson , bu funksiyalarning boshlangichi mavjud, lekin ular elementar funksiyalar orqali ifodalanmaydi. Bu funksiyalarning boshlangichi yaxshi urganilgan bulib, jadvallari tuzilgan va amaliy masalalarni yechishga tadbiq qilingan.

O'z-o'zini tekshirish savollari.

1. Bevosita integrallash usulini bayon qiling.
2. Differensial belgisi ostiga kiritish usuli nimadan iborat.
3. Anikmas integralda o'zgaruvchilarni almashtirish usulini bayon qiling.
4. Bo'laklab integrallash usulini bayon qiling.
5. Bo'laklab integrallash usuli yordamida amalga oshirish maqsadga muvofiq bo'lgan integrallarning turlarini ayting.

23-MA'RUZA KASR RATSIONAL KO'RINISHDAGI FUNKSIYALARNI INTEGRALLASH

REJA

9. Kasr-rasional funksiyani oddiy kasrlarga ajratish;
10. Eng sodda rasional kasrlarni integrallash;

Tayanch iboralar:

Kasr-ratsional funksiya, ***n***-darajali ko'phad, rasional kasr, ko'phadning koeffisientlari, ***n*** -darajali ko'rsatkich, noto'g'ri kasr, to'g'ri kasr, qoldiq, eng sodda rasional kasrlar, ***k*** karralikdagi haqiqiy ildiz, ***s*** karralikdagi kompleks-qo'shma ildiz.

1.Kasr-ratsional funksiyani oddiy kasrlarga ajratish

Ma'lumki,

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

funksiya ***n***-darajali ko'jhad deyiladi, bunda $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ –ko'phadning koeffitsientlari, ***n*** -darajali ko'rsatkichi.

Ta'rif. Ikki ko'jhadning nisbati kasr-ratsional funksiya[99] yoki ratsional kasr deyiladi:

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + ... + b_{m-1}x + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n}.$$

Agar $m < n$ bo'lsa, u holda rasional kasr to'g'ri, agar $m \geq n$ bo'lsa, u holda rasional kasr noto'g'ri kasr bo'ladi.

$R(x)$ rasional kasr noto'g'ri bo'lgan hollarda kasrning $Q_m(x)$ suratni $P_n(x)$ maxrajga odatdagidek bo'lish yo'li bilan uning butun qismini ajratish kerak:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{P_n(x)}$$

ayniyat hosil qilamiz, bu yerda $q(x)$-butun qism deb ataluvchi ko'jhad, $\frac{r(x)}{P_n(x)}$-to'g'ri kasr, chunki $r(x)$ qoldiqning darajasi $P_n(x)$ darajasidan kichik.

Shunday qilib, noto'g'ri rasional kasr bo'lgan holda undan $q(x)$-butun qismni va $\frac{r(x)}{P_n(x)}$ -to'g'ri kasrni ajratish mumkin. Binobarin, noto'g'ri rasional kasrni integrallash ko'jhadni va to'g'ri rasional kasrni integrallashga keltiriladi.

Ta'rif. Quyidagicha kasrlar eng sodda rasional kasrlar[100] deyiladi:

[99] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

I. $\frac{A}{x-\alpha}$

II. $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$. $(k \geq 2 \; va \; butun).$

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ $(maxrajning \; diskriminanti \; D < 0).$

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^s}$ $(s \geq 2 \;\; va \; butun, D < 0),$

bu yerda A, B-biror haqiqiy koeffitsientlar α, p, q lar ham haqiqiy sonlar.

Ushbu

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$$

to‘g‘ri ratsional kasrni qarab chiqamiz, bu kasrning $P_n(x)$ maxraji

$$(x-\alpha)^k, (x^2+px+q)^s$$

ko‘rinishdagi chiziqli va kvadrat ko‘paytuvchilarga yoyiladi, bunda $(x-\alpha)^k$ ko‘rinishdagi ko‘paytuvchi k karralikdagi haqiqiy ildizga mos keldi, $(x^2+px+q)^s$ ko‘rinishdagi ko‘paytuvchi s karralikdagi kompleks-qo‘shma ildizlarga mos keladi $(diskriminanti \; D < 0)$:

$$P_n(x) = a_0(x-\alpha_1)^{k_1} \cdot (x-\alpha_2)^{k_2} \; . \; . \; . \; (x-\alpha_r)^{k_r} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \times$$

$$(x^2+p_2x+q_2)^{s_2} \; . \; . \; . \; (x^2+p_lx+q_l)^{s_l}. \qquad (1)$$

Quyidagi teorema o‘rinli:

Teorema[101]**.** Har qanday

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$$

Ratsional kasirni, $P_n(x)$ ning maxraji (23.1) formula bo‘yicha ko‘jaytuvchilarga ajratilgan, **I**, **II**, **III**, **IV** turdagi oddiy kasrlar ko‘rinishida ifodalash mumkin. Bunda:

a)(**23.1**) yoyilmaning $(x-\alpha)$ ko‘rinishidagi ko‘paytuvchisiga **I** turdagi bitta

$$\frac{A}{x-\alpha};$$

kasr mos keladi;

b) (**23.1**) yoyilmaning $(x-\alpha)^k$ ko‘rinishidagi ko‘paytuvchisiga **I** va **II** turdagi ***k*** ta kasr mos keladi:

---

[100] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008
[101] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)^k}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^{k-1}}+\frac{A_3}{(x-\alpha)^{k-2}}+\cdots+\frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^2}+\frac{A_k}{(x-\alpha)};$$

v) (**23.1**) yoyilmaning (x^2+px+q) ko‘rinishidagi ko‘paytuvchisiga **III** turdagi kasr mos keladi:

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q};$$

g) (**23.1**) yoyilmaning $(x^2+px+q)^s$ ko‘rinishidagi ko‘paytuvchisiga **III va IV** turdagi ***s*** ta kasr mos keladi:

$$\frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)^s}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^{s-1}}+\cdots+\frac{A_sx+B_s}{(x^2+px+q)}.$$

2-misol. Ushbu

$$R(x)=\frac{x+z}{x^3+x}$$

ratsional kasrni oddiy kasrlar yig‘indisiga ajrating.

Yechish. $R(x)$ ratsional kasr to‘g‘ri kasr, chunki suratning darajasi maxrajning darajasidan kichik (1<3). Kasrning maxrajini ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$x^3+x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1).$$

Keltirilgan teoremaga asosan $R(x)$ kasrni oddiy kasrlarga ajratish bunday ko‘rinishda bo‘lishi kerak:

$$R(x)=\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{D}{x+1}. \qquad (7.2)$$

$A,\ B,\ D$ koeffitsientlarni topishga kiramiz. (7.2) tenglikning o‘ng qismini umumiy maxrajga keltiramiz va hosil qilingan tenglikning ikkala qismida maxrajni tashlab yuboramiz. Bu amallar natijasi quyidagi tenglikdan iborat bo‘ladi:

$$x+2=A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Dx(x-1). \qquad (7.3)$$

x o‘zgaruvchiga istalgan uchta haqiqiy sonli qiymat berib, $A,\ B,\ D$ larga nisbatan uchta noma’lum uchta tenglama sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemani yechib, noma’lum $A,\ B,\ D$ koeffisientlarni tojamiz. Sonli qiymatlarni o‘rniga qo‘yish usuli ana shundan iborat. Agar ***x*** o‘zgaruvchiga maxrajning ildizlari qiymati ketma-ket berilsa, yanada sodda tenglamalarni hosil qilamiz, chunki ularda har gal faqat bitta noma’lum $A,\ B$ va D qoldi.

Haqiqatan ham, o‘zgaruvchiga dastlabki (7.2) kasr maxrajining ildizlari $-0,\ 1, -1$ qiymatlarni beramiz, bundan $A = -2$. Agar $x = 0$ bo‘lsa, (7.3) dan $2 = A(-1)$ ni tojamiz, bundan $A = -2$. Agar $x = 1$ bo‘lsa, $3 = B \cdot 1(1 + 1)$ ni tojamiz, bundan $B = \frac{3}{2}$.

Agar $x = -1$ bo‘lsa, $1 = D(-1)(-1 - 1)$ bo‘ladi, bundan $D = \frac{1}{2}$.

Endi (7.2) tenglikni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$R(x) = \frac{x+2}{x(x^2-1)} = \frac{-2}{x} + \frac{3}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}.$$

3-misol. Ushbu

$$\frac{x-1}{(x+2)(x^2-x+1)}$$

ratsional kasrni oddiy kasrlar yig‘indisiga ajrating.

Yechish. Bu to‘g‘ri kasr, uning maxraji ko‘jaytuvchilarga ajratilgan: chiziqli $(x + 2)$ va manfiy diskriminantli $(D = -3 < 0)$ kvadrat uchhad $(x^2 - x + 1)$ ko‘paytuvchilarga ajratilgan. Berilgan kasrni oddiy kasrlar yig‘indisiga ajratamiz:

$$\frac{x-1}{(x+2)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}. \qquad (7.5)$$

(7.5) tenglikdan quyidagini hosil qilamiz:

$$x - 1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 2).$$

(7.5) kasrning maxraji faqat bitta $x = -2$ haqiqiy ildizga ega. Shuning uchun sonli qiymatlarini va noma’lum koeffitsientlarni o‘rniga qo‘yish usullaridan foydalanib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz va undan esa $A,\ B,\ D$ koeffitsientlarni topamiz:

$$x = -2 \text{ da} \left| \begin{array}{c} -3 = 7A, \\ 0 = A + B, \\ 1 = -A + 2B + C, \end{array} \right. \qquad \text{bundan} \left| \begin{array}{c} A = -\frac{3}{7} \\ B = -A = \frac{3}{7}, \\ C = 1 + A - 2B = -\frac{2}{7}. \end{array} \right.$$

Shunday qilib, bunday yoziladi:

$$\frac{x-1}{(x+2)(x^2-x+1)} = -\frac{3}{7(x+2)} + \frac{3x-2}{7(x^2-x+1)}.$$

2.Eng sodda ratsional kasrlarni integrallash

I va **II** turdagi oddiy kasrlarni integrallash jadval integrallariga oson keltiriladi:

I. $\int \frac{Adx}{x-\alpha} = A\int \frac{d(x-\alpha)}{x-\alpha} = Aln|x-\alpha| + C.$

II. $\int \frac{Adx}{(x-\alpha)^k} = A\int (x-\alpha)^{-k} d(x-\alpha) = A\frac{(x-\alpha)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + C.$

III turdagi integrallarni ko‘rib chiqamiz:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx, \text{ bunda } D = \frac{p^2}{4} - q < 0.$$

suratda kasrning maxrajidan olingan hosilani ajratamiz[102]:

$$(x^2+px+q)' = 2x+p.$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)-\frac{Ap}{2}+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Integrallardan birinchisi $ln|x^2+px+q|$ ga teng. Ikkinchi integrallarni hisoblash uchun maxrajda to‘liq kvadratni ajratamiz:

$$x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4},$$

bu yerda $q-\frac{p^2}{4} > 0$, chunki shartga ko‘ra diskriminant $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$.

Demak, ikkinchi integral jadval integraliga keladi. Yuqorida aytilganlarni inobatga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}ln|x^2+px+q| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{A}{2}ln|x^2+px+q| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

Shuni aytib o‘tish kerakki, agar **III** turdagi kasrni integrallashda $A=0$ bo‘lsa, suratda maxrajining hosilasini ajratish shart emas, maxrajda darhol to‘liq kvadrat ajratish kerak.

1-misol. Integralni hisoblang:

$$I = \int \frac{3x+8}{x^2+4x+8}dx.$$

Yechish. Suratda maxrajning hosilasini ajratamiz: $(x^2+4x+8)' = 2x+4$.

[102] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

$$I=\int\frac{3x+8}{x^2+4x+8}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+4)-\frac{3}{2}\cdot 4+8}{x^2+4x+8}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+8}dx+2\int\frac{dx}{x^2+4x+8}.$$

Birinchi integral $ln|x^2+4x+8|$ ga teng. Ikkinchi integralning maxrajida to‘liq kvadrat ajratamiz:

$$(x^2+4x+8)=(x+2)^2-4+8=(x+2)^2-4+8=(x+2)^2+2^2.$$

Natijada quyidagini hosil qilamiz:

$$\text{I}=\frac{3}{2}ln|x^2+4x+8|+2\cdot\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+2^2}=\frac{3}{2}\cdot ln|x^2+4x+8|+2\cdot\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+2^2}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot ln|x^2+4x+8|+arctg\frac{x+2}{2}+C.$$

III. $\int\frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n}=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n}.$

Misol. Integralni hisoblang:

$$I=\int\frac{dx}{(x^2-x+1)^2}.$$

Yechish. Uchhaddan to‘liq kvadrat ajratamiz:

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Natijada quyidagini hosil qilamiz:

$$I=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}.$$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)=t$ almashtirishni bajarib va $a^2=\frac{3}{4}$ deb belgilab,

$$I=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^2}=I_2$$

ni hosil qilamiz va quyidagini hosil tojamiz:

$$I=I_2=\frac{1}{2(2-1)a^2}\left(\frac{t}{(t^2+a^2)^{2-1}}+(2\cdot 2-3)I_1\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}+I_1\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

x o‘zgaruvchiga qaytib,

$$I=\int\frac{dx}{(x^2-x+1)^2}=\frac{2}{3}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

ni hosil qilamiz.

O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Qanday rasionol kasr to‘g‘ri kasr, qanday rasionol kasr noto‘g‘ri kasr deyiladi?
2. Noto‘g‘ri rasionol kasrdan butun qismi qanday ajratiladi?
3. To‘g‘ri rasionol kasr oddiy kasrlar yig‘indisiga qanday ajratiladi?
4. I va II turdagi sodda kasrlar qanday integrallanadi?
5. III turdagi sodda kasrlar qanday integrallanadi?
6. IV turdagi sodda kasrlar qanday integrallanadi?

24-MA'RUZA TRIGONOMETRIK VA BA'ZI BIR IRRATSIONAL FUNKSIYALARNI INTEGRALLASH

REJA

11. Trigonometrik funksiyalar qatnashgan ifodalarni integrallash;
12. Ba'zi irratsional ifodalarni integrallash;

Tayanch iboralar:

Trigonometrik funksiya, **z** o'zgaruvchili ratsional funksiya, $R(sinx,\ cosx)$ trigonometrik ifoda, ratsionallashtirish, irratsional ifodalarni integrallash, universal trigonometrik almashtirish, juft bo'lsa, toq bo'lsa, darajani pasaytirish, irratsionallik, eng kichik umumiy karrali, uchhaddan ikki had kvadratini ajratish.

1. Trigonometrik funksiyalar qatnashgan ifodalarni integrallash[103]

Faraz qilaylik, faqat trigonometrik funksiyalarga ratsional ravishda bog'liq bo'lgan ifoda berilgan bo'lsin. Uni doim $sinx$ va $cosx$ orqali ratsional ravishda ifodalash mumkin. Bu ifodani $R(sinx,\ cosx)$ orqali belgilaymiz.

Ushbu

$$\int R(sinx, cosx)dx$$

turdagi integralni

$$tg\frac{x}{2} = z$$

o'rniga qo'yish bilan doim **z** o'zgaruvchili ratsional funksiyaning integraliga almashtirish mumkin. Integralni bunday almashtirish ratsionallashtirish deyiladi.

Haqiqatan,

$$sinx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2z}{1 + z^2}.$$

$$cosx = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - z^2}{1 + z^2},\ \ x = 2arctgz,\ \ dx = \frac{2dz}{1 + z^2},$$

shuning uchun

[103] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

$$\int R(sinx, cosx)dx = \int R\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\cdot\frac{2dz}{1+z^2} = \int R_1(z)dz,$$

bunda $R_1(z) - z$ o‘zining ratsional funksiya.

$$tg\frac{x}{2} = z$$

o‘rniga qo‘yish $R(sinx,\ cosx)$ ko‘rinishdagi har qanday funksiyani integrallashga imkon beradi, shuning uchun u universal trigonometrik almashtirish deyiladi. Lekin amaliyotda bu almashtirish ko‘pincha ancha murakkab ratsional funksiyaga olib keladi. Shuning uchun ba’zan undan foydalanmasdan ancha sodda o‘rniga qo‘yishlardan foydalaniladi.

1) Agar $R(sinx,\ cosx)$ funksiya $sinx$ ga nisbatan toq bo‘lsa, ya’ni

$$R(-sinx,\ cosx) = -R(sinx,\ cosx)$$

bo‘lsa, u holda

$$z = cosx,\quad dz = -sinxdx$$

o‘rniga qo‘yish bu funksiyani ratsionallashtiradi.

2) Agar $R(sinx,\ cosx)$ funksiya $cosx$ ga nisbatan toq bo‘lsa, ya’ni

$$R(sinx, -cosx) = -R(sinx, cosx)$$

bo‘lsa, u holda

$$z = sinx,\quad dz = cosxdx$$

o‘rniga qo‘yish bu funksiyani ratsionallashtiradi.

3) Agar $R(sinx,\ cosx)$ funksiya $sinx$ va $cosx$ ga nisbatan juft bo‘lsa, ya’ni

$$R(-sinx, -cosx) = R(sinx, cosx)$$

bo‘lsa, u holda

$$z = tgx,\quad dz = \frac{dz}{1+z^2}$$

o‘rniga qo‘yish bu funksiyani ratsionallashtiradi. Bu holda

$$sin^2x = \frac{tg^2x}{1+tg^2x} = \frac{z^2}{1+z^2},$$
$$cos^2x = \frac{1}{1+tg^2x} = \frac{1}{1+z^2}.$$

1-misol. Ushbu

$$I = \int\frac{dx}{4sinx + 3cosx + 5}$$

integralni hisoblang.

Yechish. Universal $tg\frac{x}{2} = z$ o‘rniga qo‘yishdan foydalanamiz:

$$I = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{4\cdot\frac{2z}{1+z^2} + 3\cdot\frac{1-z^2}{1+z^2} + 5} = \int \frac{2dz}{2z^2+8z+8} = \int \frac{dz}{(z+2)^2} = -\frac{1}{z+2} + C =$$

$$= C - \frac{1}{tg\frac{x}{2}+2}.$$

1) Agar $R(sinx,\ cosx)$ funksiya $sinx$ va $cosx$ darajalarning ko‘paytmasi bo‘lsa, ya’ni agar

$$\int sin^n x \cdot cos^m x dx$$

integralga ega bo‘lsa, u holda m va n (butun sonlar) darajalarga bog‘liq holda turli o‘rniga qo‘yishlar o‘rinli bo‘ladi.

a) Agar $n > 0$ va toq bo‘lsa, u holda

$$cosx = z, \qquad sinxdx = -dz$$

o‘rniga qo‘yish integralni ratsionallashtiradi.

b) Agar $m > 0$ va toq bo‘lsa, u holda

$$sinx = z, \qquad cosxdx = dz$$

o‘rniga qo‘yish ham integralni ratsionallashtiradi.

2-misol. Ushbu

$$I = \int \frac{sin^3 x}{cos^4 x} dx$$

integralni hisoblang.

Yechish. $cosx = z,\ sinxdz = -dz$ o‘rniga qo‘yish yordamida quyidagini hosil qilamiz:

$$I = \int \frac{sin^2 x \cdot sinx}{cos^4 x} dx = \int \frac{-(1-z^2)dz}{z^4} = -\int \frac{dz}{z^4} + \int \frac{dz}{z^2} =$$

$$= \frac{1}{3z^3} - \frac{1}{z} + C = \frac{1}{3cos^3 x} - \frac{1}{cosx} + C.$$

v) Agar ikkala m va n ko‘rsatkichlar juft va nomanfiy bo‘lsa, u holda trigonometriyadan ma’lum bo‘lgan

$$sin^2x = \frac{1 - cos2x}{2}, \quad cos^2x = \frac{1 + cos2x}{2}$$

darajani pasaytirish formulalaridan foydalanib, **a)**, **b)** yoki yana **v)** holni hosil qilamiz.

3-misol. Ushbu

$$I = \int sin^4xdx$$

integralni hisoblang.

Yechish. Darajani pasaytirish formulasini qo‘llanamiz:

$$I = \int (sin^2x)^2dx = \frac{1}{4}\int (1 - cos2x)^2dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2cos2x + cos^22x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2cos2x) + \frac{1 + 2cos4x}{2})dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}sin2x + \frac{1}{32}sin4x + C.$$

g) Agar $m + n = -2k \leq 0$ (juft, nomusbat) bo‘lsa, u holda $tgx = z$ yoki $z = ctgx$ o‘rniga qo‘yish integralni darajali funksiyalarning integrallari yig‘indisiga olib keladi.

Agar bunda $m < 0$ va $n < 0$ bo‘lsa, u holda quyidagi sun’iy usulni qo‘llash mumkin: suratda turgan birni $1 = (sin^2x + cos^2x)^s$ bilan ifodalab, ratsional funksiyalarni integrallashga kelamiz, bunda

$$s = -\frac{|m + n|}{2} - 1.$$

4-misol. Integralni hisoblang:

$$I = \int \frac{dx}{sin^3x \cdot cosx}.$$

Yechish. Bu yerda $n = -3, \ m = -1, \ m + n = -4 < 0, \ s = 1.$

$$I = \int \frac{sin^2x + cos^2x}{sin^3x \cdot cosx}dx = \int \frac{dx}{sinx \cdot cosx} + \int \frac{cosxdx}{sin^3x} =$$

$$= 2\int \frac{dx}{sin2x} + \int \frac{d(sinx)}{sin^3x} = ln|tgx| - \frac{1}{2sin^2x} + C.$$

d) Agar darajalardan biri nolga teng, ikkinchisi manfiy toq son bo‘lsa, u holda

$$tg\frac{x}{2} = z$$

Universal o‘rniga qo‘yishni bajarsak, u darajali funksiyalarni integrallashga olib keladi.

5-misol. Integralni hisoblang:

$$I = \int \frac{dx}{sin^3 x}.$$

Yechish. Quyidagi o‘rniga qo‘yishdan foydalanamiz:

$$tg\frac{x}{2} = z, \qquad dx = \frac{2dz}{1+z^2}, \quad sinx = \frac{2z}{1+z^2}.$$

Bunda quyidagini hosil qilamiz:

$$I = \int \frac{2(1+z^2)^3}{(1+z^2)\cdot(2z)^3} \cdot dz = \frac{1}{4}\int \frac{(1+z^2)^2}{z^3} dz = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{z^3} + \frac{2}{z} + z\right) dz =$$

$$= -\frac{1}{8z^4} + \frac{1}{2}ln|z| + \frac{z^2}{8} + C = -\frac{1}{8}ctg^4\frac{x}{2} + \frac{1}{2}ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}tg^2\frac{x}{2} + C.$$

2.Ba’zi irratsional ifodalarni integrallash[104]

Algebraik irratsionallikni o‘z ichiga olgan ba’zi integrallarni o‘zgaruvchini tegishlicha almashtirgandan so‘ng ratsional funksiyalarning integrallariga keltirish mumkin.

$$\mathbf{1)} \int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx$$

turdagi integral (bunda R −erkli x o‘zgaruvchining kasr darajalarining ratsional funksiyasi)

$$x = z^s, \ \ dx = s \cdot z^{s-1} dz$$

o‘rniga qo‘yish yordamida ratsionallashtiriladi, bu yerda s $-n_1, n_2, \dots, n_k$ sonlarning eng kichik umumiy karralisi.

2) Ushbu

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx$$

turdagi integral (bunda $R\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)$ ko‘rinishdagi kasr-chiziqli funksiyaning kasr darajalarining rarsional funksiyasi)

[104] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

$$\frac{ax+b}{cx+d}=z^s$$

o‘rniga qo‘yish yordamida ratsionallashtiriladi, bu yerda s $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sonlarning eng kichik umumiy karralisi.

1-misol. Integralni hisoblang:

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx.$$

Yechish. 3 va 6 sonlarning eng kichik umumiy karralisi 6 ga teng, shuning uchun

$$x=z^6, \quad dx=6z^5dz, \quad z=\sqrt[6]{x}$$

o‘rniga qo‘yishni bajaramiz. Natijada:

$$I=6\int \frac{(z^6+z^4+z)\cdot z^5dz}{z^6(1+z^2)}=6\int \frac{z^5+z^3+1}{1+z^2}dz=6\int \left(z^3+\frac{1}{1+z^2}\right)dz=$$

$$=6\frac{z^4}{4}+6arctgz+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}+\mathrm{C}.$$

3) $\sqrt{ax^2+bx+c}$ irratsional ifodaga bog‘liq bo‘lgan bir nechta oddiy integrallarni qarab chiqamiz:

a) Ushbu

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

turdagi integralni kvadrat uchhadda to‘liq kvadrat ajratgandan so‘ng 18 va 19-tartibli jadval integralga keltirish mumkin.

2-misol. Integralni hisoblang.

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+8}}.$$

Yechish. $x^2-4x+8=(x-2)^2+2^2$ uchhadda ikkihad kvadratini ajratamiz. Jadval integralni hosil qilamiz:

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+4}}=ln\left|(x-2)+\sqrt{(x-2)^2+4}\right|+C.$$

b) Ushbu

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

ko‘rinishdagi integralni suratda kvadrat uchhadning hosilasini ajratgandan keyin

$$(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$$

ikkita integralga ajratish mumkin:

biri - darajali funksiyadan olingan integral;

ikkinchisi - avval a) bandda qarab chiqilgan integral.

6-misol. Ushbu

$$I = \int \frac{(4x-3)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$$

integralni hisoblang.

Yechish. Suratda ildiz ostidagi ifodaning hosilasini ajratamiz:

$$(x^2 - 6x + 10)' = 2x - 6.$$

Bundan quyidagini hosil qilamiz:

$$I = \int \frac{2(2x-6)-3+12}{\sqrt{x^2-6x+10}}dx = 2\int \frac{(2x-6)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}} + 9\int \frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2+1}} =$$

$$= 4\sqrt{x^2-6x+10} + 9\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+10}\right| + C.$$

v) Ushbu

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

turdagi integralni, agar $z = \frac{1}{x-\alpha}$ o‘rniga qo‘yish amalga oshirilsa, a) bandda qarab chiqilgan integralga keltirish mumkin.

Misol. Ushbu integralni hisoblang.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}.$$

Yechish. O‘rniga qo‘yishni bajaramiz:

$$z = \frac{1}{x}, \qquad x = \frac{1}{z}, \;\; dx = -\frac{dz}{z^2}.$$

Co‘ngra ushbuni hosil qilamiz:

$$I=-\int \frac{dz}{z^2\cdot\frac{1}{z}\sqrt{\frac{5-2z+z^2}{z^2}}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{5-2z+z^2}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{(z-1)^2+4}}=$$

$$=C-ln\left|z-1+\sqrt{5-2z+z^2}\right|=C-ln\left|\frac{1}{x}-1+\sqrt{5-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\right|=$$

$$C-ln\left|\frac{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}{x}\right|.$$

2) Nihoyat, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ irratsional ifodaga ratsional bog‘liq bo‘lgan yanada umumiy ko‘rinishdagi integralni qarab chiqamiz:

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx.$$

Kvadrat uchhaddan to‘liq kvadrat ajratgandan so‘ng

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a},$$

ushbu $x+\frac{b}{2a}=z,\ \ dx=dz$ belgilashni kiritib, dastlabki integralni a va (b^2-4ac) ning ishoralariga bog‘liq holda quyidagi ko‘rinishdagi integrallardan birini topishga keltirish mumkin:

a) agar $a>0$ va $b^2-4ac<0$ bo‘lsa, u holda

$$\int R_1\left(z,\sqrt{m^2+n^2z^2}\right)dz,$$

bu yerda $n^2=a,\ m^2=-\frac{b^2-4ac}{4a}>0;$

b) agar $a>0$ va $b^2-4ac>0$ bo‘lsa, u holda

$$\int R_2\left(z,\sqrt{n^2z^2-m^2}\right)dz$$

bo‘ladi, bu yerda $n^2=a,\ m^2=\frac{b^2-4ac}{4a}>0;$

v) agar $a<0$ va $b^2-4ac>0$ bo‘lsa, u holda

$$\int R_3\left(z,\sqrt{m^2-n^2z^2}\right)dz$$

bo‘ladi, bu yerda $n^2=-a,\ m^2=-\frac{b^2-4ac}{4a}>0;$

Bu integrallar

$$\int R(sint;cost)dt$$

ko‘rinishdagi integrallarga quyidagi o‘ringa qo‘yishlar yordamida keltirilishi mumkin, bu o‘rniga qo‘yishlar trigonometrik o‘rniga qo‘yish deyiladi:

a) $z = \frac{m}{n} tgt, \; dz = \frac{m}{n} \cdot \frac{dt}{cos^2 t},$ **b**) $z = \frac{m}{n} sect, \; dz = \frac{m}{n} \cdot sect \cdot tgtdt,$

v) $z = \frac{m}{n} sint, \; dz = \frac{m}{n} \cdot costdt.$

Misol. Integralni hisoblang.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}}.$$

Yechish. Kvadrat uchhaddan to‘liq kvadrat ajratamiz:

$$5 + 2x + x^2 = (x+1)^2 + 4.$$

faraz qilaylik,

$$x + 1 = z, \;\; dx = dz$$

bo‘lsin u holda

$$I = \int \frac{dz}{\sqrt{(4+z^2)^3}}.$$

a) ko‘rinishdagi integralni hosil qilamiz. O‘rniga qo‘yishni bajaramiz:

$$z = 2tgt, \;\; dz = \frac{2dt}{cos^2 t}, \qquad 4 + z^2 = 4 + 4tg^2 t = \frac{4}{cos^2 t}.$$

SHunday qilib,

$$\int \frac{2dt}{cos^2 t \sqrt{\frac{4^3}{cos^6 t}}} = \frac{1}{4} \int costdt = \frac{1}{4} sint + C = \frac{1}{4} \cdot \frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2 t}} + C =$$

$$= \frac{x+1}{4\sqrt{(x+1)^2+4}} + C = \frac{x+1}{4\sqrt{x^2+2x+5}} + C.$$

O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. $\int R(Sinx, Cosx)dx$ ko‘rinishdagi integrallarni topish usullari (R ratsional funksiya).
2. $\int Sin^n x \cdot Cos^m xdx$ ko‘rinishdagi integrallarni topish usullari (*n* va *m* butun sonlar).

25-MA'RUZA ANIQ INTEGRAL. ANIQ INTEGRALNI XISOBLASH VA XOSSALARI

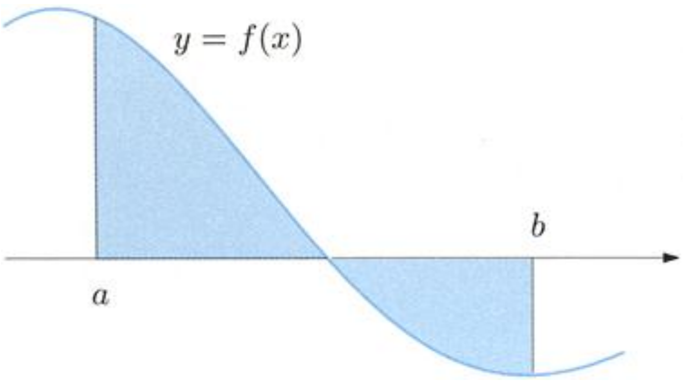
REJA

1. Aniq integral
2. Koshi integrali
3. Riman integrali
4. Aniq integralning xossalari
5. O'rta qiymat haqida teorema

Tayanch iboralar: aniq integral, integral yig'indi, quyi integral, yuqori integral, o'rta qiymat, trapetsiysimon soha, zinapoyasimon funkziya

25.1. Aniq integral [105]

Yopiq va chegaralangan $I=[a,b]\subset R$ intervalda aniqlangan f chegaralangan akslantirishni qaraymiz. $[a,b]$ interval, a,b nuqtalar orqali o'tkazilgan vertikal chiziqlar va f akslantirishning grafigini orasida joylashgan tekislikning qismini f ning $[a,b]$dagi trapetsiyasimon sohasi deb ataymiz va uni $I(f,a,b)$ orqali belgilaymiz.



25.1-chizma. $[a,b]$ intervaldagi f ning trapetsiyasimon sohasi.

$$I(f;a,b)=\{(x,y)\in R^2 : a\le x\le b, 0\le y\le f(x) \text{ yoki } f(x)\le y\le 0\}.$$

f akslantirishga qiligan ma'lum bir farazlarda, f ning $[a,b]$dagi trapetsiyasimon sohasini son qiymatini , f ning $[a,b]$dagi aniq integrali bilan bog'lash mumkin. f musbat bo'lgan holda bu son sohaning yuzasiga teng bo'ladi. Xususan, soha oddiy (to'rtburchak, uchburchak, trapetsiya va h.k.) bo'lganda aniq integral elementar geometriyaning klassik formulalarini hosil qiladi.

Aniq integraldagi ko'plab tushunchalar integrallanuvchi funksiyadan nima talab qilinishi bilan bog'liq. Biz aniq integralni ikkita tipini keltiramiz. Birinchi tip, $[a,b]$da

[105] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

bo‘lakli uzluksiz yoki uzluksiz bo‘lgan akslantirishlarning Koshi nomi bilan ataluvch aniq integrali.

25.1-tarif. $f:[a,b]\to R$ akslantirish bo‘lakli uzluksiz[106] deyladi agar u uzilish yoki chekli sakrash nuqtalari bo‘lgan cheklita nuqtadan tashqarida uzluksiz bo‘lsa. Ikkinchi tip aniq integral Riman tomonidan qurilgan bulib,u integrallanuvchi funksiyalarning kengroq sinfini hosil qiladi.

25.2.Koshi integrali.

Biz f ni $[a,b]$da uzluksiz deb faraz qilamiz. Bizning g‘oyamiz shunday ketma-ketlik tuzamizki, u f ning trapetsiyasimon sohasi bilan appraksimatziyada bo‘ladi.

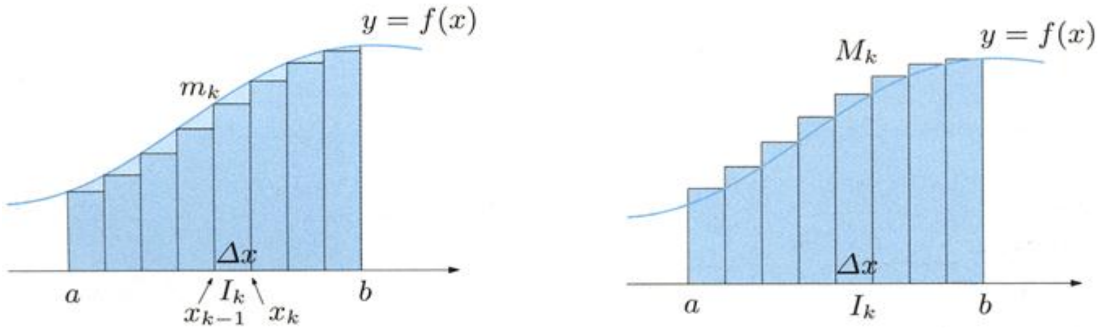
Ixtiyoriy n ta na tural sonni olamiz. $[a,b]$ni $x_k=a+k\cdot\vartriangle x, k=0,1,2,...n$ bo‘linish nuqtalari erdamida , uzunliklari $\vartriangle x=\dfrac{b-a}{n}$ ga teng qismlarga ajratamiz . Bu bo‘linish nuqtalarini indekslari o‘sish tartibida joylashtiramiz, ya’ni $a=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b.$ $k=1,2,...,n$ va I_k orqali $[x_{k-1},x_k]$ intervalni belgilaymiz. f akslantirish $[a,b]$ da uzluksiz ekanligidan har bir I_k da ham uzluksiz bo‘ladi. Veyershtrass teoremasiga ko‘ra f akslantirish I_k da o‘zining maksimum va mininmumga erishadi va ularni $m_k=\min\limits_{X\in I_k} f(x)$, $M_k=\max\limits_{X\in I_k} f(x)$ orqali belgilaymiz.

$s_n=\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\vartriangle x$ va $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} M_k\vartriangle x$ kattaliklarni aniqlaymiz. Bu yig‘indilar mos ravishda f ning $[a,b]$dagi quyi va yuqori yig‘indilari deb ataladi. Ta’rifga ko‘ra, $m_k\le M_k$ va $\vartriangle x>0$,bundan $s_n\le S_n$.

f funksiya $[a,b]$da musbat bo‘lsa, u holda I_k dagi f ning trapetsiyasimon sohasini yuzasi $m_k\vartriangle x$ ga teng bo‘lgan $r_k=I_k\times[0,m_k]$ to‘rtburchaklardan tuzilgan. Shuning uchun r_k to‘rtburchaklarning yuzalar yig‘indisi s_n ga $I(f;a,b)$ning yuzasida quyidan yaqinlashadi. Xuddi shuningdek, $R_k=I_k\times[0,M_k]$ to‘rtburchaklar yuzalari yig‘indisi S_n esa $I(f;a,b)$ning yuzasiga yuqoridan yaqinlashadi. Yopiq va chegaralangan intervalda aniqlangan uzluksiz akslantirishning xossalaridan foydalanib biz Koshi integralini isbotldik.

25.2-teorema . s_n va S_n ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lsa u holda ularning lmitlari teng bo‘ladi.

[106] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008



25.2- chizma. $[a,b]$ intervaldagi f ning (o‘ng) yuqori yig‘indisi va (chap) quyi yig‘indisi

25.3-ta’rif.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

so‘nga f ning $[a,b]$ dagi aniq integrali deb ataladi

25.4-misol.

i) $[a,b]$ intervalda f funksiyani o‘zgarmas son deb olib, uning qiymati c bo‘lsin. U holda ixtiyoriy k uchun $m_k = M_k = c$ bo‘ladi. Shuning uchun har bir n uchun

$s_n = S_n = c\sum_{k=1}^{n} \Delta x = c(b-a)$. Demak, $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$.

ii) $[0,1]$ intervalda $f(x) = x$ ni qaraylik. $I(x;0,1)$ soha yuzasi uchlari $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ nuqtalarda bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchakning yuzasi $\frac{1}{2}$ ga teng bo‘ladi. Endi biz $[0,1]$ kesmada f ning aniq integrali bilan bu qiymatning bir ekanligini ko‘rib chiqamiz.

$n > 1$ deb olaylik. U holda $\Delta x = \frac{1}{n}$ va $k = 0,\ldots,n$ uchun $x_k = \frac{k}{n}$ ni hosil qilamiz. f ning o‘suvchi ekanligidan $m_k = x_{k-1}$ va $M_k = x_k$ bo‘ladi. Shuning uchun

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}\Delta x = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1) \text{ va } S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \Delta x = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k.$$

Endi $\sum_{k=1}^{n} k$ yig‘indi esa dastlabki n ta natural sonning yig‘indisi bo‘lib, bu yig‘indi (3.2) ga ko‘ra $\frac{n(n+1)}{2}$ ga teng bo‘ladi. Xuddi shuningdek, $\sum_{k=1}^{n}(k-1)$ yig‘indi esa 0 dan $(n-1)$ gacha bo‘lgan natural sonlar yig‘indisi bo‘lib, bu yig‘indi $\frac{n(n-1)}{2}$ ga teng bo‘ladi.

Demak, $s_n = \frac{n(n-1)}{2n^2}$ va $S_n = \frac{n(n+1)}{2n^2}$. Bu yig‘indilarni $n \to \infty$ da limitga o‘tsak, ikkala limit uchun ham $\frac{1}{2}$ ga ega bo‘lamiz.

Endi biz aniq integralning yangi tushunchalari bilan shug'ullanamiz. Agar f $[a,b]$ da uzluksiz va x^* bu intervalning ichki nuqtasi bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x^*} f(x)dx + \int_{x^*}^b f(x)dx$$

formulani isbotlash mumkin. Bu formulani m'anosi, bo'lakli-uzluksiz akslantirishlarning aniq integrallarini qanday aniqlash mumkin. $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < x_m < b$ a va b ning orasida yotuvchi
nuqtalar bo'lsin, bu nuqtalarda f uzluksiz bo'lmasin. $[x_{i-1}, x_i]$ ning ichida f ni aniqlovchi, chegaraviy nuqtalarda esa f ning uzluksizligiga intiluvchi f_i akslantirishni quyidagicha aniqlaymiz:

$$f_i(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_{i-1}^+} f(x), & x = x_{i-1} \\ f(x), & x_{i-1} < x < x_i \\ \lim\limits_{x \to x_i^-} f(x), & x = x_i \end{cases}.$$

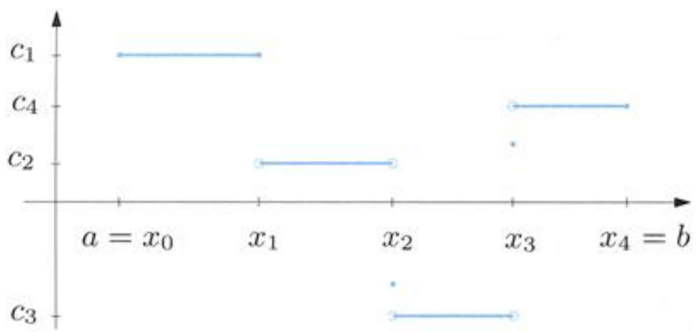
$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)dx$ ga ega bo'lamiz.Bundan tashqari , bo'lakli-uzluksiz akslantirishlarni cheklita nuqtalarda modifiqaziya qilinishi uni aniq integralini o'zgartirmaydi.

25.3.Riman integrali.

f orqali [a,b] da aniqlangan akslantirishni belgilaymiz. Dastlab, aniq integral tushunchasini elementar funksiya hisoblanuvchi zinapoyasimon funksiya uchun aniqlaymiz, keyinchalik quyi va yuqori integral tushunchalarini kiritib umumiy holga kelamiz. [a, b] segmentda ixtiyoriy n+1 ta nuqtani tanlaymiz

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Buning natijasida [*a*, *b*] segment $I_k = [x_{k-1}; x_k]$, $k = \overline{1,n}$ qism intervallariga ajraladi. Har bir qism intervallarda zinapoyasimon funksiyaning qiymati o'zgarmas bo'ladi.



25.3- chizma. $[a,b]$ intervalda zinapoyasimon funksiyaning grafigi

25.5-tarif. $f:[a,b]->R$ akslantirish zinapoyasimon funksiya[107] deyiladi, agar [a, b] segment $\{x_0, x_1 \ldots, x_n\}$ nuqtalar orqali oraliqlarga bo`lganda, shunday $c_1, c_2, \ldots, c_n$ o`zgarmaslar topilib, ixtiyoriy $x \in (x_{k-1}, x_k), k=\overline{1,n}$ uchun $f(x)=c_K$ tenglik bajarilsa,

Agar har bir (x_{K-1}, x_K) interval uchun f o`zgarmas bo`lsa, biz o`sha intervalni $f$ ga moslashgan deymiz. Moslashgan bo`lakning yaxshilanishi ham moslashgan holda bo`ladi. Alohida olganda agar f va g [a, b] da zinapoyasimon funksiya bo`lsa, har doim mos holda f va g ga moslashtirilgan ikki bo`lakning nuqtalarining birlashmasini olishgani orqali ikkala moslashtiralgan bo`lakni yaratish mumkin.

S[a, b] orqali [a, b] dagi zinapoyasimon funksiyalar to`plami belgilaymiz.

25.6-tarif. $f \in S([a,b])$ va $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ moslashgan bo`lak bo`lsin. c_k ni f ning $[x_{k-1}, x_k]$ dagi o`zgarmas qiymati deylik. Ushbu

$$\int_i f = \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{k-1})$$

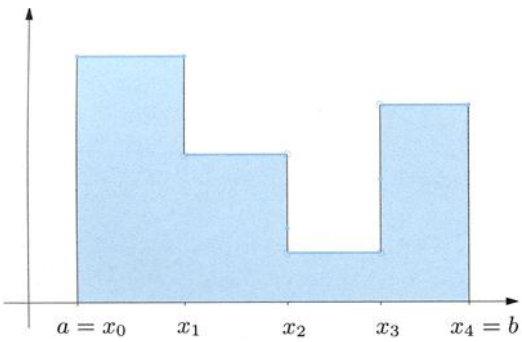
songa $I=[a,b]$ da f ning aniq integral deyiladi.

Bir necha izohlar muhimdir.

i) Tarif tanlangan bo`lakga bogliq emas.Xususan ,agar, [a, b] da f(x)=c bo‘lsa, u holda $\int_I f = c(b-a)$.

ii) Aniq integral f ning uzilish nuqtalaridagi qiymatiga bogliq emas.

f I da musbat bo‘lsa , $\int_I f$ ning qiymati I da f ning trapetsiysimon sohasining yuzasiga teng, haqiqatdan oxirgi asosi $x_k - x_{k-1}$ va balanligi c_k bo‘lgan to‘rtburchaklarning yuzalarini yigindisiga teng.



25.4- chizma. $[a,b]$ interval va zinapoyasimon funksiya bilan chegaralangan soha.

[107] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

25.7-xossa. Agar g , h $\in$S([a, b]) bo'lib, $\forall$ x$\in$[a, b] uchun g(x) $\leq$ h(x) bo`lsa , u holda

$$\int_I g \leq \int_I h \text{ bo`ladi.}$$

Isbot. {x_0, x_1, … x_n} ikkala akslantirishlarga mos bo'lishlar bo`lsin.

c_k va d_k mos ravishda g va h larni (x_{k-1}, x_k) dagi qiymatlari bo`lsin.

Farazimizga ko'ra $c_k \leq d_k$, $k = 1, 2, ..., n$, shunday qilib

$$\int_i g = \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} d_k (x_k - x_{k-1}) = \int_i h.$$

$f : [a,b] \to R$ chegaralangan akslantirish bo`lsin,

$s_f = \sup\limits_{x\in[a,b]} \in R$ va $i_f = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) \in R$ belgilashlarni kiritamiz . f ni quyidan chegaralaydigan zinapoyasimon funksiyalar to'plamini

$$S_f^+ = \{h \in S([a,b]) : f(x) \leq h(x), \forall x \in [a,b]\}$$

orqali va yuqarida chegaralaydigan zinapoyasimon funksiyalar to'plamini

$$S_f^- = \{h \in S([a,b]) : f(x) \leq h(x), \forall x \in [a,b]\}$$

orqali belgilaemiz. Ular bo`sh emas, ular kamida h(x)=$s_f$ va g(x)=$i_f$ o`zgarmas qiymatlaridan tashkil topgan bo`ladi.

Bu aniq integrallar to`plamini ko'rib chiqishga undaydi.

25.8-tarif[108]. $\overline{\int_I f} = \inf\left\{\int_I h : h \in S_f^+\right\}$ songa I=[a, b] da f ning yuqori integrali, $\underline{\int_I f} = \sup\left\{\int_I g : g \in S_f^-\right\}$ songa I=[a, b] da f ning quyi integrali deyiladi.

Ko'rinib turibdiki $S_f^+ \neq \varnothing$,bundan $\overline{\int_I f} < +\infty$ hamda $\underline{\int_I f} > -\infty$.

Bunaqa qiymatlar quyidagi xossaga tayanadi.

25.9-xossa. [a, b]da aniqlangan f akslantirish

[108] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

$$\int_{\underline{I}} f \le \overline{\int_I} f$$

tengsizlikni qanoatlantiradi.

Isbot. Agar $g \in S_f^+$ va $h \in S_f^+$ bo`lsa, tarifga ko‘ra $\forall x \in [a,b]$ lar uchun $g(x) \le f(x) \le h(x)$ bo`ladi, 25.6- xossaga asosan, $\int_I g \le \int_I h$ ligini ko`rsatadi.

g ni qo‘zg‘almas deb va h ni o`zgartirib, biz $\int_I g \le \overline{\int_I} f$ ga ega bo`lamiz.

Bu tengsizlikda g ni o`zgartirish tasdiqni isbotlaydi.

Shu o‘rinda **(25.9)** tenglik barcha akslantirishlar uchun istalgan imkonni saqlab qoladimi degan savol paydo bo‘ladi. Javob yoqligini quyidagi (misol) ko‘rsatib beradi.

25.10-misol. Direxli funksiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ agar\ x \in Q \\ 0, agar\ x \in R/Q \end{cases}$$

[0, 1] ning har bir (x_{k-1}, x_k) qism intervali ratsional va irratsional nuqtalardan tashkil topadi. $S_f^{\ +}$ dagi zinapoyasimon funksiyalarning barchasi 1 dan katta, $S_f^{\ -}$ dagi akslantirishlar musbat emas (chekli sondagi nuqtalardan tashqari). Xulosa qilib

$$\overline{\int}_{\mathrm{I}} f = 1 \ \text{ va } \ \int_{\underline{\mathrm{I}}} f = 0.$$

25.11-tarif . $I = [a,b]$ da chegaralangan f akslantirilish I bo‘yicha integrallanuvchi[109] (yani, Riman ma’nosida integrallanuvchi) deyiladi, agar

$$\int_{\underline{\mathrm{I}}} f = \overline{\int}_{\mathrm{I}} f \ \text{ bo‘lsa.}$$

Buning qiymati, [*a*, *b*] da f ning aniq integrali deyiladi va $\int_{\mathrm{I}} f$ yoki $\int_a^b f(x)dx$ orqali belgilanadi.

f [*a*, *b*] da musbat akslantirish bo‘lganda aniq integralning geometrik ma’nosi aniqroq bo‘ladi: ixtiyoriy $h \in S_f^{\ +}$ funksiya uchun $I(f; a,b)$ to‘plam $I(h;\, a,\, b)$ ning qism

[109] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

to‘plami va ixtiyoriy $g \in S_f^-$ lar uchun $I(g;\, a,\, b)$ ni ham o‘zida saqlaydi. Yuqori integral I bo‘yicha *f* ning trapetsiyasimon soha yuzasini yuqori bahosini beradi, quyisi esa pastdagi nuqtalardagi taxminiy qiymatini beradi. Zinapoyasimon *f* funksiya 25.6- tarifdagi qiymat bo‘yicha $\int_{\mathrm{I}} f$ orqali integrallanadi. $f \in S_f^-$ $\int_{\mathrm{I}} f \le \underline{\int_{\mathrm{I}}} f$ ni nazarda tutadi, va $\overline{\int_{\mathrm{I}}} f \le \int_{\mathrm{I}} f$ esa $f \in S_f^+$ ning ketma-ketligidir.

Shundan ,

$$\int_{\mathrm{I}} f \le \underline{\int_{\mathrm{I}}} f \le \overline{\int_{\mathrm{I}}} f \le \int_{\mathrm{I}} f$$

va yuqori integral quyi integralga teng bo‘lishi kerak.

Zinapoyasimon funksiyaga o‘xshagan funksiya ko‘p

25.12-misol. *f(x)=x* ni [0, 1] da deb hisoblaymiz. Biz Riman integrali orqali *f* ni ½ o‘lchovli trapetsiyasimon sohada aniqlaymiz. [*0, 1*] ni $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\} =$

$=\left\{\frac{k}{n};\ k = 0, 1, 2, \ldots, n\right\}$ nuqtalarga mos keluvchi *n > 1* bo‘lgan teng bo‘laklarga bo‘lamiz. Zinapoyasimon funksiyani olamiz:

$$h_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{n}, agar\, \frac{k-1}{n} < x \le \frac{k}{n}, k = 1, \ldots, n, \\ 0, agar\ x = 0. \end{cases}$$

va

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{n}, agar\, \frac{k-1}{n} < x \le \frac{k}{n}, k = 1, \ldots, n, \\ 0, agar\ x = 0. \end{cases}$$

$g_n(x) \le f(x) \le h_n(x),\ \forall x \in [0,1]$ bo‘ganda, bu

$$\int_I h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

va xuddi shunday

$$\int_i g_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

Bu degani

$$\overline{\int_I} f \le \inf_n \int_I h_n = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \underline{\int_I} f \ge \sup_n \int_I g_n = \frac{1}{2},$$

$$\overline{\int_I} f \le \frac{1}{2} \le \underline{\int_I} f$$

Tarifga ko‘ra integralni organishni ahamiyatsiz qoldirmaslik kerak. Integrallanuvchi funksiyalar sinflarini hamda ularni hisoblashning samarali usullarini blish juda ahamiyatli.

25.13-teorema. $[a,b]$ da integrallanuvchi akslantirishlar sinflari quyidagilar:

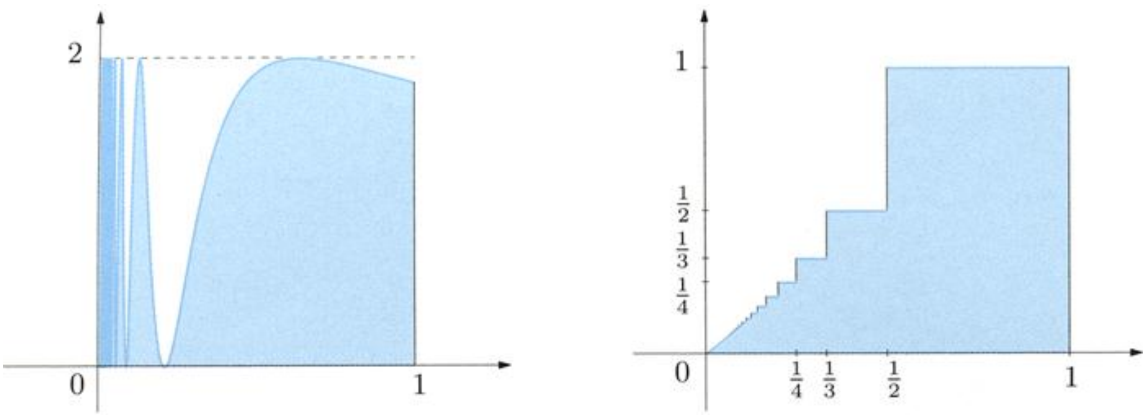
a) [*a*, *b*] da uzluksiz akslantirishlar;
b) [*a*, *b*] da bo‘lakli uzluksiz aslantirishlar;
c) [*a*, *b*] da monoton funksiyalar.

Isbot. Riman integralining ta’rifidan kelib chiqadi.

Teoremani tadbiqi sifatida,

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sin\dfrac{1}{x}, agar\ 0 < x < 1, \\ 0, agar\ x = 0. \end{cases}$$

[0, 1] da yo‘naltirilgan (0 va 2 orqali) davom etuvchi integrallanuvchi funksiyadir



25.5- chizma. $[0,1]$ intervalda funksiyaning integrali.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n},\ agar\ \dfrac{1}{n+1} < x \le \dfrac{1}{n},\ n = 1, 2, \ldots, \\ 0, agar\ x = 0. \end{cases}$$

25.5-chizmada ko‘rib turganimizdek [0, 1] da o‘sib boruvchi funksiya.

25.14-Xossa. Agar *f(x)* funksiya [*a*, *b*] integrallanuvchi bo‘lsa, unda:

i) $f(x)$ funksiya $[c,d]\subset[a,b]$ qism intervalda ham integrallanuvchi bo‘ladi;

ii) $|f(x)|$ funksiya ham $[a, b]$ da integrallanuvchi.

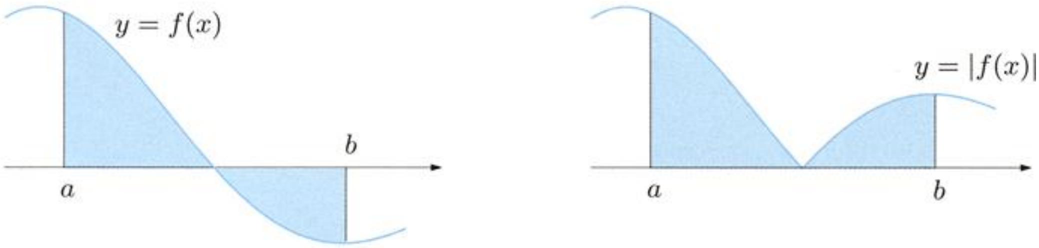
Isbot. Riman integrali orqali isbotlanadi.

25.4.Aniq integralning xossalari

Koshi va Riman integrallari davom etib boruvchi akslantirishlar bo‘lib hisoblanadi. 25.12- misolda keltirilgan $f(x) = x$ kabi akslantirish aniq integralning ikki turiga mos keladi. Biz buni mukammal isbotini keltirmaymiz. Bular uchun ularning o‘zi yetarli. $R([a, b])$ ga $[a, b]$ da integrallanuvchi akslanishlarning to‘plami deb qaraymiz.

$\int_a^b f(x)dx$ interval $[a, b]$ va f gagina bog‘liq son;

Bu hech qanaqa o‘zgaruvchiga bog‘liq emas. x o‘rniga istalgan harf qo‘yish mumkin: $\int_a^b f(s)ds$ yoki $\int_a^b f(y)dy$. Barchasida bir xil son bo‘ladi.



25.6- chizma $[a,b]$ intervaldagi f ning $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ integrali trapetsiyasimon sohaning yuzasi

25.15-teorema[110]**.** Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar haqiqiy sonlar o‘qining I intervalida integrallanuvchi bo‘lsa, u holda:

i) ixtiyoriy $a,b,c\in \mathrm{I}$ lar uchun $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

ii) Ixtiyoriy $a,b\in \mathrm{I}$ va $\alpha,\beta\in R$ lar uchun
$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta f(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$.

iii) Aytaylik $a,b\in \mathrm{I}$ lar uchun $a < b$. Agar $[a, b]$ segmentga $f(x)\geq 0$ bo‘lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx\leq 0$.

iv) Aytaylik $a,b\in \mathrm{I}$ lar uchun $a < b$. Agar $[a, b]$ segmentda $f(x) < g(x)$ bo‘lsa, unda $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx.$

[110] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

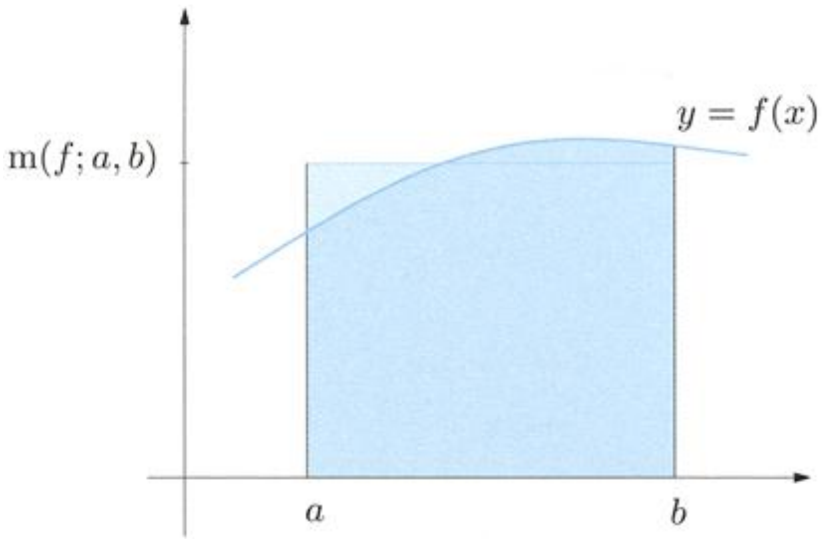
v) Aytaylik $a, b \in \mathrm{I}$ lar uchun $a < b$. Unda $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

25.4. O‘rta qiymat haqidagi teorema

25.16-ta’rif . Ushbu

$$m(f;a,b) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

tenglik bilan aniqlangan songa, *f(x)* funksiyaning [*a*, *b*] intervaldagi o‘rta qiymati deyiladi.



25.7- chizma. $[a,b]$ intervaldagi f ning o‘rta qiymati.

25.17-teorema. (o‘rta qiymat haqidagi teorema) *f(x)* funksiya [*a*, *b*] da integrallanuvchi funksiya bo‘lsin. *f(x)* funksiyani [*a*, *b*] dagi integral o‘rtachasi

$$\inf_{x\in[a,\,b]} f(x) \le m(f;a,b) \le \sup_{x\in[a,\,b]} f(x) \qquad (1)$$

tengsizlikni qanoatlantiradi. Undan tashqari *f(x)* funksiya [*a*, *b*] da uzluksiz bo‘lsa, shundan yagona $z \in [a,\, b]$ topiladiki, uning uchun

$$m(f;a,b) = f(z) \qquad (2)$$

Isbot. $i_j = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ va $s_f = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ bo‘lsin, u holda $x \in [a,b]$ lar uchun

$$i_j \le f(x) \le s_f$$

tengsizlik bajariladi.

25.16-teoremani iv) xossasiga asosan

$$(b-a)i_f = \int_a^b i_f dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b s_f dx = (b-a)s_f .$$

Oxirgi tengsizlikni *b-a* ga bo‘lsak (1) tengsizlik hosil bo‘ladi. Faraz qilaylik, *f* uzluksiz bo‘lsin, unda Veyershtrass teoremasiga ko‘ra,

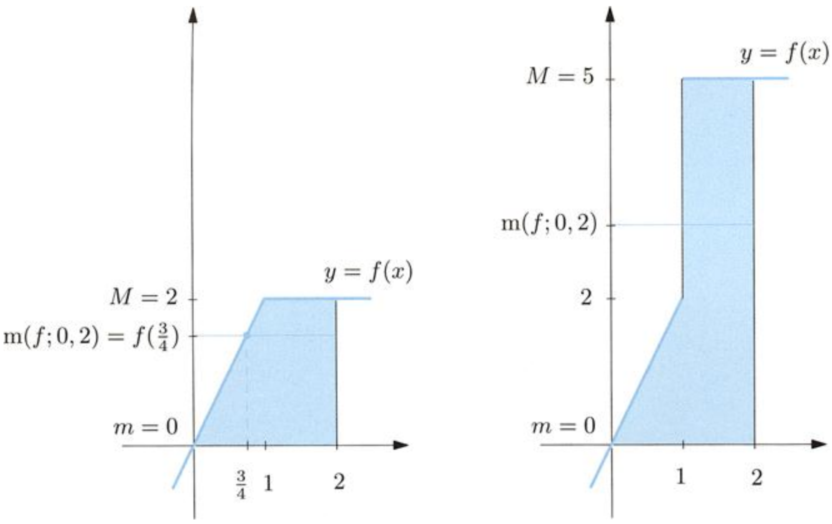
$$i_f = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \text{ va } s_f = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

bo‘ladi.

(1) dan $m(f;a,b)$ son [*a*, *b*] dagi *f* ning maksimum va minimumlari orasida yotadi deymiz. Unda [*a*, *b*] segmentga qarashli *z* nuqta topilib

$$m(f;a,b) = f(z)$$

bajariladi. Teorema isbotlandi.



25.8- chizma. Integral hisobning o‘rta qymat haqidagi teoremasi.

25.18-misol. [*0*, *2*] da uzluksiz

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \ agar \ 0 \le x \le 1 \\ 2, \ agar \ 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

funksiyani o‘rta qiymati

$$m(f;a,b) = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 2xdx + \int_1^2 2dx\right) = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2}$$

bo‘ladi.

O‘z-o‘zini tekshirish savollari.

1. Berilgan kesmada berilgan funksiyaning aniq integrali deb nimaga aytiladi?
2. Aniq integralning mavjudligi haqidagi teorema.
3. Aniq integralning geometrik ma’nosi qanday?
4. Aniq integralning eng sodda xossalarini ifodalang va isbotlang.
5. O‘rta qiymat haqidagi teoremani ifodalang va isbotlang.

26 – MA'RUZA Aniq integralning geometrik va mexanik ma'nosi. Yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan integral. Nyuton-Leybnis formulasi

REJA

1. Integral hisobining asosiy teoremasi
2. Aniq integralning integrallash qoidasi
3. Aniq integral yordamida yuzalarni hisoblash

Tayanch iboralar: integral funksiya,boshlang'ich funksiya

26.1.Integral hisobining asosiy teoremasi

f akslantirish haqiqy I intervalda aniqlangan bo'lib, I ning har bir ochiq va chegaralangan qism intervalida integrallanuvchi deb faraz qilamiz. Bu holda f uzluksiz.

Ushbu

$$F(x) = F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)ds \qquad (26.1)$$

tenglik bilan aniqlangan funksiyani f akslantirishni I dagi yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan integral funksiyasi deb ataymiz, bunda $x_0 \in I$ qo'zg'almas nuqta va x I da o'zgaradi.

Shunday qilib, f akslantirishdan bitta integrallash chegarasi o'zgarmas, ikkinchisi o'zgaruvchi bo'lgan integralni yuli integrallash yuli bilan integral funksiya hosil qilinadi.

26.1- Teorema[111]. f akslantirish I haqiqiy intervalda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Berilgan $x_0 \in I$ nuqtada

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)ds$$

f akslantirishni I dagi integral funksiyasi bo'lsin. $F(x)$ funksiya I da differensiallanuvchi va ixtiyoriy $x_0 \in I$ lar uchun

$$F'(x) = f(x).$$

Isbot: I intervalda ixtiyoriy x ni fikserlaymiz va unga Δx orttirma berganimizda, $x + \Delta x$

[111] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

ham I ga qarashli bo‘lsin. $F(x)$ funksiyaning orttirmasini argument orttirmasini nisbatiga qaraymiz.

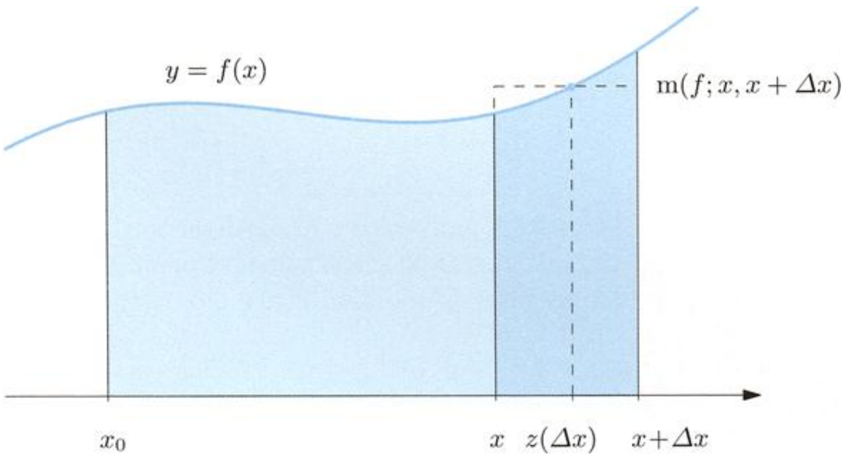
$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left(\int_{x_0}^{x+\Delta x} f(s)ds-\int_{x_0}^{x} f(s)ds\right).$$

9.33- teoremadagi *i)* xossaga asosan

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(s)ds=\int_{x_0}^{x} f(s)ds+\int_{x}^{x+\Delta x} f(s)ds$$

natijada

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x} f(s)ds=m(f;x,x+\Delta x).$$



26.1- chizma. Integral hisobning asosiy teoremasi.

Shunday qilib $F(x)$ funksiya orttirmasining argument ortirmasiga nisbati f akslantirishning x va $x+\Delta x$ orasidagi o`rtacha qiymatiga teng. f uzluksiz bo‘lganligi uchun, 9.35- o`rta qiymat haqidagi teoremaga asosa shunday z=z(Δx) nuqta topiladiki bunda m(f; x; x+ Δx)=f(z(Δx)) tenglik bajariladi, ya’ni

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(z(\Delta x)) \tag{26.2}$$

Δx -> 0 limitiga o‘tamiz, Δx >0 bo`lsin.

$$x\le z(\Delta x)\le x+\Delta x$$

ekanligidan va 4.5- teoremadan

$$\lim_{\Delta x -> 0} + z(\Delta x) = x$$

degan xulosaga kelamiz. Mos argumentlar uchun $\lim_{\Delta x -> 0} z(\Delta x) = x,$ shunday qilib $\lim_{\Delta x -> 0} z(\Delta x) = x$.

Lekin f x larda uzluksiz, unda (4.11) dan

$$\lim_{\Delta x -> 0} f(z(\Delta x)) = f(\lim_{\Delta x -> 0} z(\Delta x)) = f(x)$$

hosil qilinadi.

(26.2) da limitiga o`tib, biz qo‘yidagi tenglikga ega bulamiz

$$F'(x) = \lim_{\Delta x -> 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x) .$$

x I ning chegaraviy nuqtasi bo‘lsa, bir tomonlama limitlarni olishning o`zi yetarli va xulosa bir xil bo‘ladi.

26.2- natija[112] F_{x_0} I da uzluksiz f ning integral funsiyasi bo‘lsin.Unda ihtiyoriy $x \in I$ lar uchun

$$F_{x_0} = G(x) - G(x_0)$$

tenglik o‘rinli.

Isbot. $G(x)$ funkziya f ning biror boshlang‘ich funkziyasi bo‘lsin. 26.1-teoremaga ko‘ra $F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)ds$ funkziya ham f ning boshlangich funkziyasi bo‘ladi.Berilgan funkziyaning boshlangich funkziyalari o‘zgarmas qo‘shiluvchiga farq qiladi. Yani $F_{x_0} = G(x) - c$. O`zgarmas son $F_{x_0}(x_0) = 0$ shartdan topiladi.

Keyingi teorema juda ahamiyatli, ya`ni u integral osti hosil qilingan boshlang`ich orqali aniq integral hosil qilinadi.

26.3-natija f akslantirish [a, b] da uzliksiz va G o`sha intervalda f ning boshlang`ich funkziyasi bo`lsin. Unda

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) \qquad (26.3)$$

bo‘ladi.

[112] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

Isbot: F_a integral a da 0 ga aylanib ketishi yuzasidan, $\int_a^b f(x)dx = F_a(b)$

Oldingi teorema $x_0 = a, x = b$ ekanligi isbotlaymiz.Ko`pincha G(b)-G(a) ayirma $\left[G(x)\right]_a^b$ yoki $G(x)|_a^b$ kurinishda yoziladi.

26.4-misol.(26.3)-formuladan foydalanib quyida uchta integralni hisoblaymiz:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = 2$$

$$\int_2^6 \frac{1}{x} dx = [\log x]_2^6 = \log 6 - \log 2 = \log 3$$

26.5-izoh. Bo‘lakli uzluksiz f akslantirish uchun integral hisob asosiy teoremasining umumlashgani mavjud, u quyidagicha bo`ladi.

Agar f I ning barcha yopiq va chegaralangan qism intervallarida bo‘lakli uzluksiz bo`lsa, I da ixtiyoriy F integral funksiya uzluksiz, f uzluksiz bo‘lgan barcha nuqtalarda u differensiallanuvchi va $F'(x) = f(x)$.

F integral f ning I dagi umumlashgan boshlang‘ichi deyiladi.

26.6-natija. Berilgan uzluksiz birinchi tartibli hosilali f I da diffrenziallanuvchi va ixtiyoriy $x_0 \in I$ uchun ,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(s)ds, \quad \forall x \in I . \tag{26.4}$$

Isbot. f o‘z hosilasining boshlang‘ich funkziyasidir,unda (26.3) formulaga asosan

$$\int_{x_0}^x f'(s)ds = f(x) - f(x_0)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Misol sifatida, $f(x) = \arcsin x$ va $f(x) = \arctan x$ funkchiyalarni Maklarin yoyilmalarini keltirsa bo‘ladi. Yordamchi tushunchani keltiramiz.

26.7-lemma. Agar φ 0 atrofida uzluksis akslantirish bo‘lib, $x \to 0$ da, $\varphi(x) = 0(x^d)$ va $\alpha \geq 0$ bo‘lsa, unda boshlang‘ich $\psi(x) = \int_0^x \varphi(s)ds$ funkziya $x \to 0$ da $\psi(x) = 0(x^{\alpha+1})$ qanoatlantiradi.Bularni quyidagicha yazishimiz mumkin

$$\int_{x_0}^{x} 0\left(s^{\alpha}\right)ds = 0(x^{\alpha+1}) \qquad x \to 0 .$$

(26.4)

Isbot. 6.40-Lopital teoremasiga ko‘ra:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\psi(x)}{x^{\alpha+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\psi'(x)}{(\alpha+1)x^{d}} = \frac{1}{\alpha+1}\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x^{\alpha}} = 0 .$$

$f(x) = \arctan x$ ni olamiz. $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ ligidan (26.4) -formuladan

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+s^2}ds$$

ekanligi kelib chiqadi. (7.18)-formulada $x = s^2$ deb olsak, $f'(s)$ ning Maklarin yoyilmasi

$$\frac{1}{1+s^2} = 1 - s^2 + s^4 - ... + (-1)^m s^{2m} + 0\left(s^{2m+1}\right) = \sum(-1)s^{2k} + 0\left(s^{2m+1}\right)$$

bo‘ladi. Oxirgi qatorni hadma-had integrallab,(26.4) formuladan foydalanib $f(x)$ fynksiyani Maklarin yoyilmasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + 0\left(x^{2m+2}\right) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + 0\left(x^{2m+2}\right).$$

$f(x) = \arcsin x = \int_0^x \dfrac{1}{\sqrt{1-s^2}}ds$ uchun Maklarin yoyilmasi yozing.

(7.17) dan foydalanib, $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ va $x = -s^2$ deb o‘zgartirsak

$$\frac{1}{\sqrt{1-s^2}} = 1 + \frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{8}s^4 + ... + \left|\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ m \end{pmatrix}\right| s^{2m} + o\left(s^{2m+1}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\left|\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ k \end{pmatrix}\right| s^{2k} + o\left(s^{2m+1}\right).$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + + \frac{3x^3}{40} + \ldots + \left|\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ m \end{pmatrix}\right| \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + o\left(x^{2m+2}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \left|\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ k \end{pmatrix}\right| \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2m+2}\right).$$

26.2. Aniq integralni integrallash qoidasi

Integral hisobning fundamental teoremasi va aniqmas integralni integrallash qoidalari, aniq integrallar uchun ham o‘rinli.

26.8-teorema. (Bo‘laklab integrallash[113]) $[a, b]$ da f va g differensiallanuvchi bo‘lsin. U holda

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \qquad (26.5)$$

Isbot. $H(x)$ - $f'(x)g(x)$ ning boshlang‘ichi bo‘lib $f(x)g'(x)$ ning bo‘lak integrallangandagi natijasi

$$f(x)g(x) - H(x)$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - [H(x)]_a^b.$$

26.9-teorema (Almashtirish orqali integrallash) $f(y)$ $[a,b]$ da uzluksiz bo‘lsin $\varphi(x)$ ni davomiy differensiallanuvchi $[\alpha,\beta]$ dan $[a,b]$ gacha oling, so‘ng

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)dy \qquad (26.6)$$

Bu formula yana quyidagicha yozilishi mumkin:

$$\int_a^b f(y)dy = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx \qquad (26.7)$$

Isbot. $F(y)$ $f(y)$ ni $[a,b]$ dagi boshlang‘ichi bo‘lsin. (26.6) formula (9.4) va (26.3) dan kelib chiqadi.

[113] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

Ikkala formula ham misollarda qo‘llaniladi.

26.10-misol i)

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin^3 x\cdot\cos x = \begin{bmatrix} y=\varphi(x)=\sin x, & \varphi'(x)=\cos x \\ \varphi(0)=0, & \varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} =$$

$$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y^3 dy = \left[\frac{1}{4}y^4\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{16}.$$

ii)

$$S=\int_0^1 \arcsin\sqrt{1-y^2}\,dy = \begin{bmatrix} y=\varphi(x)=\cos x, \\ \varphi^{-1}(0)=\frac{\pi}{2}, \quad \varphi^{-1}(1)=0 \end{bmatrix} =$$

$$=\int_{\pi/2}^0 \left(\arcsin\sqrt{1-\cos^2 x}\right)(-\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} x\sin x dx =$$

$$=[-xcox]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1.$$

26.11-teorema [114] $[-a,a]$, $a>0$ integralda f integrallanuvchi bo‘lsin. f juft bo‘lsa,

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

agar toq bo‘lsa

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

Isbot. 9.33-teoremaga ko‘ra

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

$y=\varphi(x)=-x$ o‘rta integralda

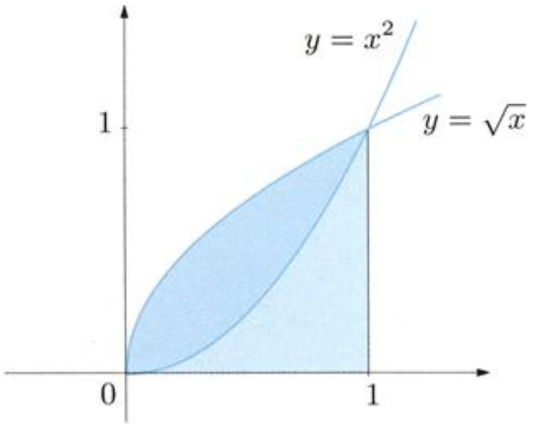
$$\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_a^0 f(-y)dy = \int_0^a f(-y)dy$$

26.3.Aniq integral yordamida yuzalarni hisoblash.

Maydonlarni hisoblash uchun fundamental teoremaga tayanib integrallardan bir nechta misollari bilan tugaydi.

[114] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

i. Tasavur qiling, bizga $y = f(x) = x^2$ va $y = g(x) = \sqrt{x}$ (9.11 chizma) bilan chegaralangan A maydonni topish vazifasi berilgan bo‘lsin. To‘liq chiziqlari $x = 0$ va $x = 1$ nuqtalarda kesishadi va maydon to‘rtburchak maydoni va funksiyaning to‘rburchak maydoni orasida farqi ko‘rilishi mumkin, ikkalasi uchun ham interval $[0,1]$.



9.11-chizma. $f(x) = x^2$ va $g(x) = \sqrt{x}$ funksiyalarning grafiklari bilan chegaralangan soha

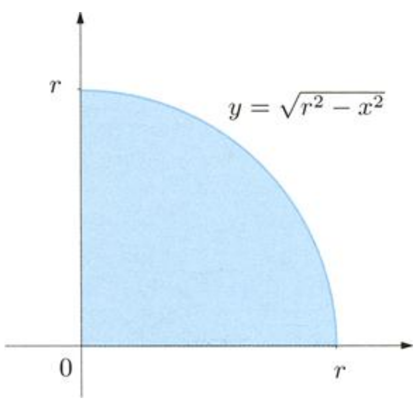
Shundan $$A = \int_0^1 g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2]dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right] = \frac{1}{3}$$

ii. 2-misolda biz $A(r) = \pi r^2$ maydonning diskka munosabati tekshiramiz. $x^2 + y^2 \le r^2$ aylanada r radius, (x, y) nuqtalar $[0, r]$ da $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ning chorak qismi (1.12 chizma) shundan,

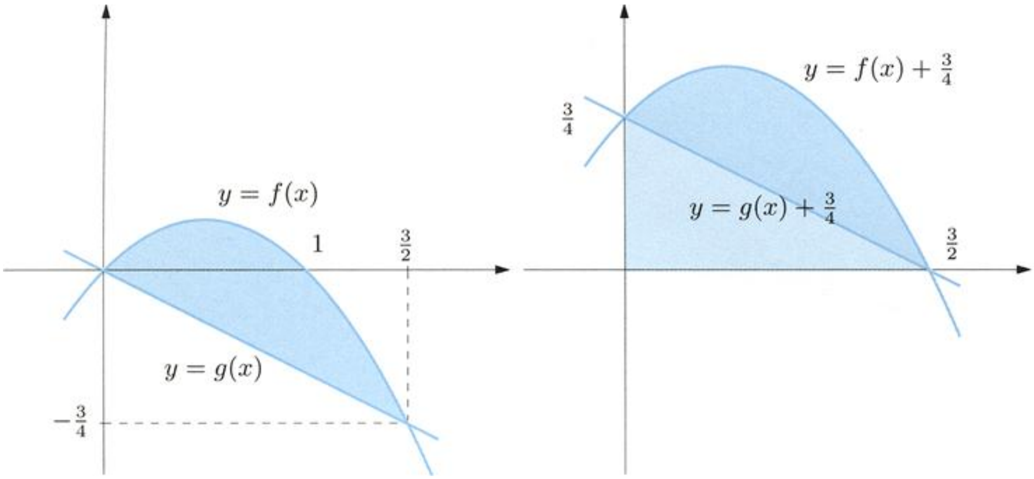
$$A(r) = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx$$

Almashtirish olamiz: $x = \varphi(t) = rt$, bundan $dx = rdt$ va $o = \varphi(0)$, $r = \varphi(1)$.

Chunki (9.29) orqali, biz $A(r) = 4r^2\int_0^1 \sqrt{1 - t^2}dt$ ga (9.30) ga ega bo‘lamiz.



9.12-chizma $y=\sqrt{r^2-x^2}$ funksiyaning birinchi kvadrantdagi yuzasi



9.13 chizma $f(x)$ va $g(x)$ funksiyaning grafiklari bilan chegaralangan yuzani parallel ko'chirish

27- MAVZU I VA II TUR XOSMAS INTEGRALLAR, ULARNI HISOBLASH VA YAQINLASHISHGA TEKSHIRISH

REJA

1. Chegarasi cheksiz (I tur) xosmas integrallar
2. I tur xosmas integrallarning xossalari
3. Chegaralanmagan funksiyaning (II tur) xosmas integrali
4. Ba'zi xosmas integrallarni hisoblash

Tayanch iboralar: Xosmas integral, yaqinlashuvchi xosmas integral, uzoqlashuvchi xosmas integral, integralning limit qiymati, $x = a$ da aniqlanmagan yoki uzulishga ega, absalyut va shartli yaqinlashuvchanlik.

Biz hozirgacha ko'rgan integrallarning haqiqiy o'qning yopiq intervalida aniqlangan edi. Ko'pgina tadbiqiy misollarda intervalni chegaralari cheksiz va funksiyaning cheksizga aylanadigan hollarga duch kelamiz. Bu hollarda integral Koshi va Riman integrallarida limitga o'tish orqali aniqlanadi.

27.1.Chegarasi cheksiz (I tur) xosmas integrallar

$R_{loc}([a, +\infty))$ orqali $[a, +\infty)$ intervalning ixtiyoriy yopiq va chegaralangan $[a, c]$ intervaliga integrallanuvchi funksiyalar to'plamini belgilaymiz.$[a, +\infty)$ oraliqda $f \in R_{loc}([a, +\infty))$ funksiyalar uchun

$$F(c) = \int_a^c f(x)dx$$

tenglik bilan aniqlangan yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan integral funksiyani qaraymiz.

27.1-tarif. $f \in R_{loc}([a, +\infty))$ bo'lsin. Ushbu

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)dx$$

ayniyatni qaraylik. Yuqoridagi tenglikning chap tomoniga $f(x)$ funksiyadan $[a, +\infty)$ oraliq bo'yicha olingan xosmas integral[115] deyiladi.

- **i)** Agar limit mavjud va chekli bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a, +\infty)$ oraliqda integrallanuvchi, yoki xosmas integral yainlashuvchi deyiladi.
- **ii)** Agar limit mavjud bo'lib, chekli bo'lmasa, xosmas integral uzoqlanuvchi deyiladi.
- **iii)** Agar limit mavjud bo'lmasa, xosmas integral mavjud emas deyiladi.

[115] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

$[a;+\infty)$ oraliqda integrallanuvchi funksiyalar sinifini $R([a;+\infty))$ orqali belgilaymiz.

Musbat funksiyalar uchun xosmas integralni tasavur qilish oson. Lekin bu hol birinchi izohga mos kelmaydi

27.2-xossa. Agar $f \in R_{loc}([a,+\infty))$ bo‘lib, barcha $x \in [a,+\infty)$ lar uchun $f(x) \geq 0$ bo‘lsin. Unda $F(c)$ yuqori chegarasi o‘zgaruvchi integral $[a,+\infty)$ da o‘suvchi.

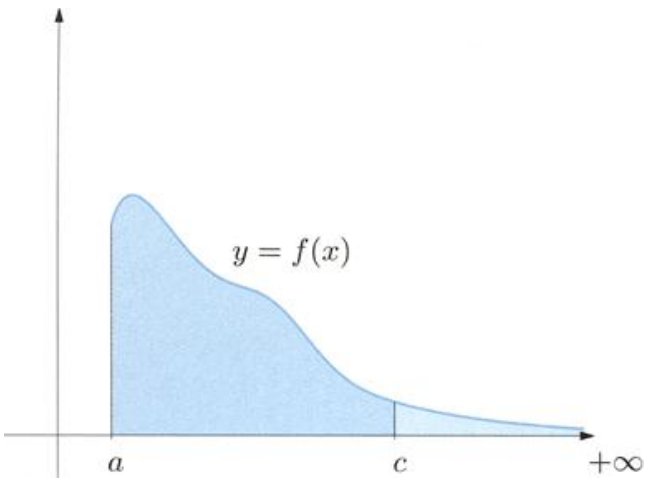
Isbot. $c_1, c_2 \in [a,+\infty)$ bo‘lib, $c_1 < c_2$ bo‘lsin.

$$F(c_2) = \int_a^{c_2} f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx = F(c_1) + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx .$$

$\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx \geq 0$ bo‘lganligi uchun $F(c_2) - F(c_1) \geq 0$, bu yerdan $F(c_2) \geq F(c_1)$ xossa isbotlandi.

27.3-natija. $R([a;+\infty))$ ga qarashli $f(x)$ funksiyaning xosmas integrali $+\infty$ da yaqinlashuvchi ham uzoqlashuvchi ham bo‘lishi mumkin.

Musbat $f(x)$ funksiyadan $[a;+\infty)$ oraliq bo‘yicha olingan xosmas integralni geometric manosi: $y = f(x)$, $x = a$ chiziqlar va absissa o‘qlari orasida joylashgan trapetsiyasimon sohani yuzasini beradi. (27.1- chizma).



27.1- chizma. $[a,+\infty)$ chegaralanmagan intervalda f ning trapessiyasimon yuzasi

27.4-misol. i) $\alpha > 0$ o‘zgaruvchi uchun $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ funksiyalar oilasini $[1; +\infty)$ dagi integralni qaraymiz.

$$\int_1^c \frac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}, agar\ \alpha \neq 1 \\ \log x,\ agar\ \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{c^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}, agar\ \alpha \neq 1 \\ \log c, agar\ \alpha = 1 \end{cases}$$

dan $\alpha \neq 1$ bo‘lganda

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{c\to+\infty} \frac{c^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1},\ agar\ \alpha > 1 \\ +\infty,\quad agar\ \alpha < 1 \end{cases}$$

bo‘ladi. Agar $\alpha = 1$ bo‘lsa, u holda

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{c\to+\infty} \log c = +\infty$$

Bu ikkita holatdan $[a, +\infty)$ da $(a > 0)$ yozsak

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} yaqinlashuvchi,\ agar\ \alpha > 1 \\ uzoqlashuvchi,\ agar\ \alpha \leq 1 \end{cases}$$

ii) $f(x) = \cos x$ bo‘lsin. Ushbu $F(c) = \int_0^c \cos x\, dx = \sin c$ integral uchun $c \to +\infty$ limit mavjud emasligidan, $\int_0^{+\infty} \cos x\, dx$ mavjud emas.

Aniq integralning kelajakda ba’zi xosmas integrallariga duch kelamiz. Agar f; g lar $R([a; +\infty))$ da aniqlangan bo‘lsin.

i) ixtiyoriy $\alpha, \beta \in R$ uchun $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$.

ii) ixtiyoriy $\alpha, \beta \in R$ uchun $\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x)dx$.

iii) faraz qilaylik $[a; +\infty)$ da $f \geq 0$ bo‘lsa u holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx \geq 0$ bo‘ladi.

i) – iii) xossalarning isboti 25.33- teorema va limitlarning xossalaridan kelib chiqdi.

27.2.Yaqinlashuvchanlik kriteryasi[116].

27.5-teorema. $f, g \in R_{loc}$ $([a;+\infty))$ va bu funksiyalar uchun barcha $x \in [a;+\infty)$ uchun $0 \le f(x) \le g(x)$ bo`lsin. U holda

$$0 \le \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \qquad (27.1)$$

Xususan,

i) Agar g integral yaqinlashsa, u holda f ning integrali ham yaqinlashadi.
ii) Agar f ning integrali uzoqlashsa, u holda g ning integrali ham uzoqlashadi.

Isboti: Aniq integralning monotonligi va $[a;+\infty)$ da $0 \le f(x) \le g(x)$ ekanligidan foydalansak, $F(c) = \int_a^c f(x)\,dx \le \int_a^c g(x)\,dx = G(c)$ ga ega bo`lamiz.

27.3-natijaga ko`ra F(c) va G(c) akslantirishlarning C->+∞ uchun limiti mavjud emas. 4.4-natijaning yordami bilan limitlarni taqqoslab, $0 \le \lim\limits_{C->+\infty} F(C) \le \lim\limits_{C->+\infty} G(C)$ (27.1)- ni hosil qilamiz.

i) va ii) larning isboti o`z-o`zidan ma`lum.

27.6-misol. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\,dx \; va \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x}\,dx$ integrallarning yaqinlashuvchanligini tekshiramiz.

Barcha $x \in [1,+\infty)$ uchun $\frac{\pi}{4} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$, u holda $\frac{\arctan x}{x^2} < \frac{\pi}{2x^2} \; va \; \frac{\pi}{4x} \le \frac{\arctan x}{x}$.

Demak,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\,dx < \int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2x^2}\,dx \text{ va } \int_1^{+\infty} \frac{\pi}{4x}\,dx \le \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x}\,dx.$$

27.4-misoldan $\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2x^2}\,dx$ yaqinlashuvchi va $\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{4x}\,dx$ uzoqlashuvchi ekanini bilamiz.

[116] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

27.5-teoremaning i) bandidan $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$ yaqinlashuvchi ii) bandidan esa $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx$ uzoqlashuvchi ekanini bilamiz.

27.7-teorema.(Absalyut yaqinlashish alomati)[117] Faraz qilaylik, $f \in R_{loc}([a;+\infty))$ uchun $|f| \in R([a;+\infty))$ o`rinli bo`lsin, u holda $f \in R([a;+\infty))$ va bundan tashqari

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \right| \le \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

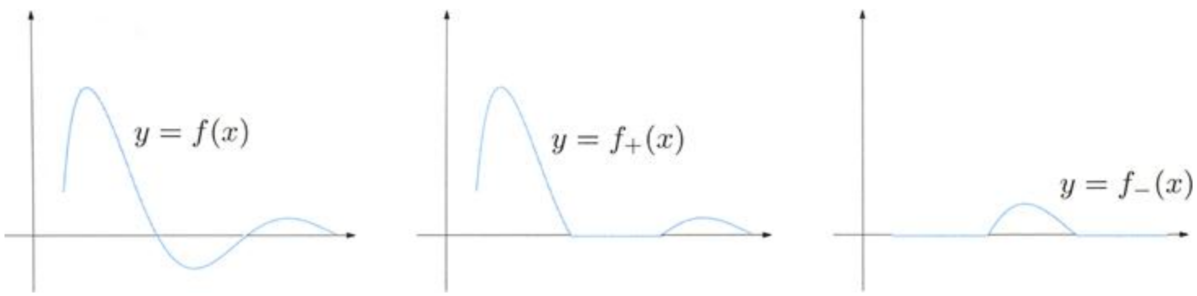
Isbot: f ning musbat va manfiy qismlarini mos ravishda f_+ va f_- deb belgilaymiz, ya`ni

$$f_+(x) = \max(f(x),0) = \begin{cases} f(x), agarf(x) \ge 0 \\ 0, agarf(x) < 0 \end{cases}$$

$$f_-(x) = \max(-f(x),0) = \begin{cases} 0, agar\ f(x) \ge 0 \\ -f(x), agar\ f(x) < 0 \end{cases}.$$

$f, |f|$ larning ikkalasi ham manfiymas:

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), |f(x)| = f_+(x) + f_-(x). \qquad (27.2)$$



27.2- chizma(o‘ngda) f ning grafiklari (markazda) musbat qismi va (chapda) manfiy qismi.

(27.2) munosabatni qo‘shib hamda ayirib, ushbu

[117] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

$$f_+(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2}, \qquad f_-(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2} \quad ,$$

tengliklarga kelamiz, bular,9.33-teoremani ii) hossasiga asosan $f_+, f_- \in R_{lok}[o,+\infty)$ ekanligi kelib chiqadi.

Ixtiyoriy $x \ge a$ uchun, $o \le f_+(x), f_-(x) \le |f(x)|$ dan 27.5-teoremani taqqoslash alomatiga ko‘ra f_+ va f_- lar $[a;+\infty)$ da integrallanuvchi. (27.2) ning birinchisi f ning integrallanuvchi ekanligini bildiradi.Barcha $c > a$ uchun 9.33- teoremani v) hossasiga ko‘ra

$$\left|\int_a^c f(x)dx\right| = \int_a^c |f(x)|dx.$$

Ohirgi tenglikdan $c \to +\infty$ da limitga o‘tsak, isbot tugaydi.

27.8- misol. $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ integralni qaraylik. $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ dan 27.4- misol va 27.5- teoremaga ko‘ra $[1;+\infty)$ da $|f(x)| = \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|$ integrallanuvchi. Funksiya integralni yuqoridan boshlasak,

$$\left|\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx\right| \le \int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x^2}dx\right| \le \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = 1$$

27.9-izoh. **A**bsalyut yaqinlashish integrallanuvchi bulishni yetarli sharti, zaruriy emas. Bundan ko‘rinadiki

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx \text{ yaqinlashuvchi, } \int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}dx\right| \text{ uzoqlashvchi.}$$

f akslantirishning absalyut qiymati $|f|$ funksiya $R([a;+\infty))$ ga tegishli bo‘lsa, u holda f $[1,+\infty)$ da absalyut integrallanuvchi deb ataladi.

27.10-teorema. (Asimtotik taqqoslash alomati)

Faraz qilaylik, $f \in R_{loc}([a;+\infty))$ funksiya $x \to +\infty$ da $\varphi(x)=\frac{1}{x}$ ga nisbatan α 1 tartibli cheksiz kichk miqdor bo‘lsin. U holda

i) agar $\alpha > 1$, bo‘lsa $f \in R_{loc}([a;+\infty))$.

ii) agar $a \le 1$, bo‘lsa $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ uzoqlashuvchi bo‘ladi.

27.11- misol.

i) $\int_1^{+\infty}(\pi-2\arctan x)dx$ ni qaraylik. $x\to+\infty$ uchun $f(x)=\pi-2\arctan x$ akslantirish 1-tartibli cheksiz kichik miqdor. Lapital teoremasiga ko‘ra

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2acr\tan x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{1+x^2}=2$$

Shuning uchun integral uzoqlashuvchi.

ii) $\int_1^{+\infty}\frac{x+\cos x}{x^3+\sin x}dx$ integralni qaraylik $x\to+\infty$ uchun $\cos x=o(x)$, $\sin x=o(x^3)$ dan $x\to+\infty$ da $\frac{x+\cos x}{x^3+\sin x}\sim\frac{1}{x^2}$ kelib chiqadi va bu integral yaqinlashuvchi.

27.12 misol. Endi $\int_\alpha^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha(\log x)^\beta}dx$ integral $\alpha,\beta>0$ o‘zgaruvchi qiymatlar qanday bo‘lganda yaqinlashuvchiligini tekshiramiz.

i) $\alpha=1$ holda integrallaymiz. $t=\log x$ deb o‘zgaruvchi kiritamiz, u holda

$$\int_\alpha^{+\infty}\frac{1}{x(\log x)^\beta}dx=\int_{\log\alpha}^{+\infty}\frac{1}{t^\beta}dt=\begin{cases}yaqinlashuvchi,\ agar\ \beta>1\\ uzoqlashuvchi,\ agar\ \beta\le 1.\end{cases}$$

ii) Agar $\alpha>1$ bo‘lsa $x\ge 2$ dan $\log x\ge\log 2$ ga ko‘ra $\frac{1}{x^\alpha(\log x)^\beta}=\frac{1}{x^\alpha(\log 2)^\beta}$, $\forall x\ge 2$ bo‘ladi. Taqqoslash alomatiga ko‘ra

iii) $\alpha<1$ bo‘lganda integral ostidagi funksiyani $\frac{1}{x^\alpha(\log x)^\beta}=\frac{1}{x}\frac{x^{1-\alpha}}{(\log x)^\beta}$ ko‘rinishida yozaylik. Ixtiyoriy β uchun $\frac{x^{1-\alpha}}{(\log x)^\beta}$ funksiya $+\infty$ ga intiladi. Buning uchun shunday $M>0$ son topiladiki $\frac{1}{x^\alpha(\log x)^\beta}\ge\frac{M}{x}$, $\forall x\ge 2$ o‘rinli bo‘ladi. Taqqoslash alomatiga ko‘ra integral uzoqlashuvchi.

27.13-teorema[118]. f funksiya $[k_0;+\infty)$ da uzluksiz,musbat va kamayuvchi bo‘lsin ,bu erda $k_0\in N$. U holda

[118] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} f(k) \le \int_{k_0}^{+\infty} f(x)dx \le \sum_{k=k_0}^{\infty} f(k) . \qquad (27.3)$$

Qator va integralni ba’zi harakatlarini ko‘ramiz. Ravshanki,

a) $\int_{k_0}^{+\infty} f(x)dx$ - yaqinlashuvchi $\Leftrightarrow \sum_{k=k_0+1}^{\infty} f(x)$ - yaqinlashuvchi

b) $\int_{k_0}^{+\infty} f(x)dx$ - uzoqlashuvchi $\Leftrightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} f(x)$ - uzoqlashuvchi

27.14- misol.

i) Umumlashgan garmonik $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ qator α ning qanday qiymatida yaqinlashuvchi bo‘ladi. Gipoeza teoremasini qanatlantiruvchi ushbu $\frac{1}{x^{\alpha}}$, $\alpha > 0$ tasdiqdan faqat $\alpha > 1$ bo‘lganda $[1;+\infty)$ da integral yaqinlashuvchi bo‘ladi. Shuning uchun

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = \begin{cases} yaqinlashuvchi, \ \alpha > 1 \ uchun \\ uzoqlashuvchi, \ 0 < \alpha \le 1 \ uchun \end{cases}$$

ii) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k}$ qatorni ko‘raylik $f(x) = \frac{1}{x \log x}$ akslantirishni olamiz 10.12 misolning **i)** holiga ko‘ra bu integral $[2; +\infty)$ da uzoqlashuvchi. U holda $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k}$ qator ham uzoqlashuvchi $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{c \to -\infty} \int_{c}^{b} f(x)dx$ integral uchun ham yuqoridagi barcha xossalar va yaqinlashish natijalari o‘rinli.

27.3.Chegaralanmagan funkchiyaning (II tur) hosmas integrali.

Chegaralangan $[a, b)$ intervalda aniqlangan va har bir yopiq $[a, c]$ $(a < c < b)$ qism intervalda integrallanuvchi funksiyalarning to‘plami $R_{loc}([a, b))$ ni qaraylik. Agar $f \in R_{loc}([a, b))$ bo‘lsa,u holda $F(c) = \int_{a}^{c} f(x)dx$ integral funksiya $[a, b)$ da aniqlangan. Biz bunday integral funqchiyalarni $c \to b^{-}$ dagi limit holatlaini o‘rganamiz.

27.15 tarif. $f \in R_{loc}([a, b))$ va

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{c \to b} \int_{a}^{c} f(x)dx \qquad (27.4)$$

bo‘lsin. U holda (27.4) ning chap tomoni $[a, b)$ da f funksiyaning xosmas integral deb ataladi.

i) Agar limit mavjud va chekli bo‘lsa, u holda f $[a, b)$ da(xosmas) integrallanuvchi yoki bu xosmas integral yaqinlashuvchi deb ataladi.

ii) Agar limit mavjud, amma cheksiz bo‘lsa u holda f ning xosmas integrali uzoqlashuvchi deyiladi.

iii) Agar limit mavjud bo‘lmasa, u holda bu xosmas integral aniqlanmagan deyiladi.

Odatda $[a, b)$ da integrallanuvchi funksiyalarni $R([a, b))$ orqali belgilanadi. Agar akslantirish $[a, b)$ da chegaralangan va Koshi yoki Riman ma’nosida integrallanuvchi bo‘lsa,u $[a, b)$ da yuqorida ko‘rsatilgan ma’noda integrallanuvchi bo‘ladi. Bu xosmas integral aniq integral bilan ustma-ust tushadi. Haqiqatan, $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|\ x\in[a,b)$ deb olsak,

$\left|\int_a^b f(x)dx-\int_a^c f(x)dx\right|=\left|\int_c^b f(x)dx\right|\le\int_c^b|f(x)|dx\le M(b-c)$ ga ega bo‘lamiz.Bu erda

$c\to b^-$ da limitga o‘tsak (27.4) ega bo‘lamiz.

27.16 misol. $f(x)=\dfrac{1}{(b-x)^{\alpha}}$, $\alpha>0$ ni olaylik va bu $[a, b)$ da integrallanuvchi

$$\int_a^c\frac{1}{(b-x)^{\alpha}}=\begin{cases}\dfrac{(b-x)^{1-\alpha}}{\alpha-1}, agar\ \alpha\ne1\\ -\log(b-x),\ agar\ \alpha=1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{(b-c)^{1-\alpha}-(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha-1}, agar\ \alpha\ne1\\ \log\dfrac{(b-a)}{(b-c)},\ agar\ \alpha=1\end{cases}$$

$\alpha\ne1$ bo‘lsin

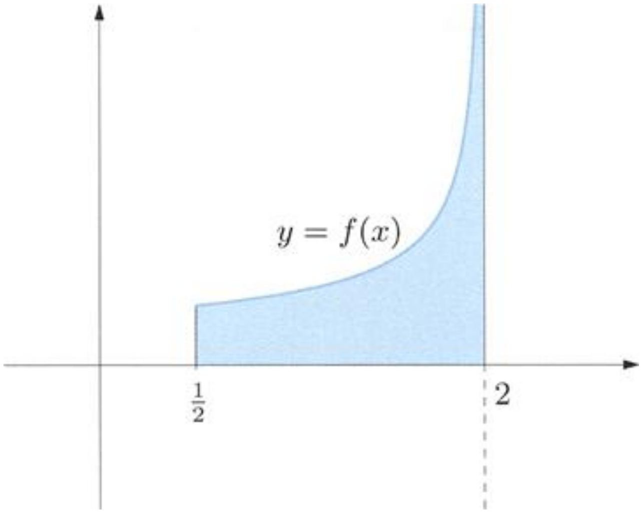
$$\int_a^b\frac{1}{(b-x)^{\alpha}}dx=\lim_{c\to b^-}\frac{(b-c)^{1-\alpha}-(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha-1}=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, agar\ a<1\\ +\infty,\ agar\ a>1\end{cases}$$

$\alpha=1$ bo‘lsa

$$\int_a^b\frac{1}{b-x}dx=\lim_{c\to b^-}\log\frac{b-a}{b-c}=+\infty$$

27.3 rasmda $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$ da $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ akslantirishning chegaralanmagan trapessia sohasi keltirilgan. Shuning uchun

$$\int_a^b\frac{1}{(b-x)^{\alpha}}dx=\begin{cases}yaqinlashuvchi,\ agar\ \alpha<1\\ uzoqlashuvchi,\ agar\ \alpha\ge1\end{cases}$$



27.3-chizma $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ funksiyaning $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right)$ intervaldagi chegaralanmagan trapessiyasimon yuzasi

27.17 teorema: (Taqqoslash alomati) $f, g \in R_{loc}([a,b))$ lar uchun, ixtiyoriy $x \in [a, b)$ larda $0 \le f(x) \le g(x)$ bo‘lsa, u holda

$$0 \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx. \qquad \textbf{(27.5)}$$

Xususan,

i) Agar g dan olingan integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda f dan olingan integral ham yaqinlashuvchi;

ii) Agar f dan olingan integral uzoqlashuvchi bo‘lsa, u holda g dan olingan integral ham uzoqlashuvchi bo‘ladi;

27.18 teorema. (Asimptotik taqqoslash) Agar $f \in R_{loc}([a, b))$ bo‘lib, $\varphi(x) = \dfrac{1}{b-x}$ ga nisbatan $x \to b^-$ da α tartibli cheksiz kichik miqdor bo‘lsa , u holda

i) agar $\alpha < 1$ bo‘lsa, $f \in R_{loc}([a, b))$;

ii) agar $\alpha \ge 1$ bo‘lsa, $\int_a^b f(x)dx$

uzoqlashuvchi bo‘ladi.

$(a, b]$ dagi

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx$$

integral ham yuqoriga oxshash aniqlanadi.

27.19 misol

i) $\int_1^3 \sqrt{\frac{7-x}{3-x}}dx$ integralni qaraylik $f(x)=\sqrt{\frac{7-x}{3-x}}$ funksiya [1, 3) da aniqlangan va uzluksiz, ammo $x\to 3^-$ uchun uzilishga ega. $7-x\le 4$ dan [1, 3) da taqqoslash alomatiga ko‘ra $\int_1^3 \sqrt{\frac{7-x}{3-x}}dx \le \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}dx < +\infty$ ga ega bo‘lamiz. Shuning uchun integral yaqinlashuvchi.

ii) $\int_1^2 \frac{e^x+1}{(x-1)^2}dx$ ga qaraylik $x\in(1;2]$ da $\frac{e+1}{(x-1)^2} < \frac{e^x+1}{(x-1)^2}$, shuning uchun taqqoslash alomatika ko‘ra integral ∞ ga intiladi.

iii) $x\to 0^+$ uchun $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sin x} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, shuning uchun asimptotik taqqoslash alomatiga ko‘ra integral yaqinlashuvchi

iv) $\int_\pi^4 \frac{\log(x-3)}{x^3-8x^2+16x}dx$ integral $[\pi;\, 4)$ da aniqlangan f integrallanuvchi bo‘ladi. $x\to 4^-$ uchun $f\to +\infty$ va $f(x)=\frac{\log(1+(x-4))}{x(x-4)^2} \sim \frac{1}{4(x-4)}$, $x\to 4^-$ shunday qilib 10.18 – teoremaga ko‘ra (x = 4 ning chapida $f(x)=\frac{1}{x-4}$ manfiy) $-\infty$ ga intiladi

27.2 Ba’zi xosmas integrallar[119].

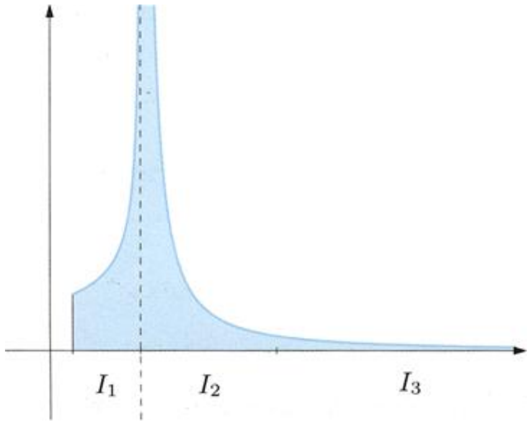
27.20 misol:

i) faraz qilaylik bizdan $S=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ ni tekshirish talab qilinsin.

Agar biz haqiqiy to`g`ri chiziqda berilgan integralni quyidagicha $S=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ ko`rinishida yoza olamiz. Bu integrallarning ikkalasi ham yaqinlashuvchi bo`lib, qiymati $\frac{\pi}{2}$ ag teng .

Demak, $S=\pi$ $S_1=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ ning integralini $(0;1]\cup[1;+\infty)$ ichida aniqlangan bo`laklarga ajratib,

[119] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008



27.4-chizma chegaralanmagan intervaldagi funksiyaning cheksiz trapessiyasimon yuzasi

$S_1=\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$ ko`rinishida yozamiz, ammo $x\to 0^+$ uchun $\frac{\sin x^2}{x^2}\sim\frac{1}{x}$ va $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}$ Shuning uchun 27.18- teoremaga ko`ra 1-integral uzoqlashuvchi, 2-integral esa 27.5- teoremaga ko`ra yaqinlashuvchi bo`ladi: Demak, $S_1\to+\infty.$ shunga o`xshash, $S_2=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ ham yaqinlashuvchi.

ii) S bilan $\int_1^6 \frac{x-5}{(x+1)\sqrt[3]{x^2-6x+8}}dx$ ni belgilaymiz. Integral, -1, 2, 4 larda uzoqlashuvchi (bu nuqtalar integrallanuvchining aniqlash sohasidan tashqarida yotadi). Bundan

$S=(\int_1^2+\int_2^3+\int_3^4+\int_4^6)\frac{x-5}{(x+1)\sqrt[3]{(x-2)(x-4)}}dx$ $x\to 2^{\pm}$ va $x\to 4^{\pm}$ lar uchun $\frac{1}{3}$-tartibli cheksiz funksiya, shuning uchun integral yaqinlashuvchi.

O'z – o'zini tekshirish savollari.

4. Berilgan funksiyaning chegaralari cheksiz xosmas integrallari deb nimaga aytiladi ?
5. Chegaralanmagan funksiyalarning xosmas integrallari deb nimaga aytiladi ?
6. Hosmas integrallar uchun taqqosalash teoremasini ayting.
7. Qanday xosmas integral absalyut yaqinlashuvchi integral deb ataladi ?

R. R. Raxmatov Sh.E.Tadjibayeva S.K.Shoyimardonov

OLIY MATEMATIKA FANIDAN AMALIY MASHG‘ULOTLAR O‘TKAZISHGA DOIR O‘QUV QO‘LLANMA

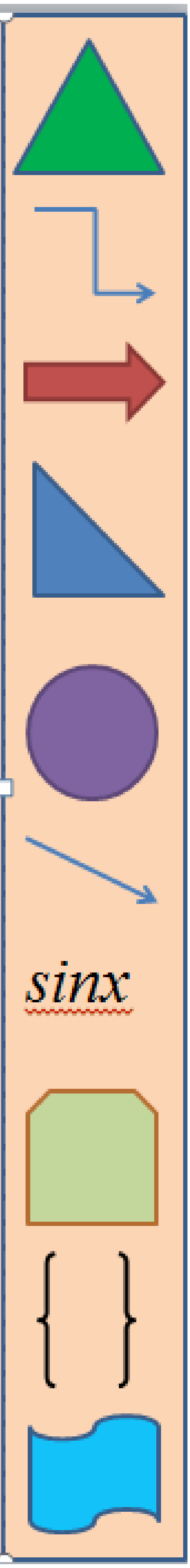
I

IKKI JILDLIK

1-JILD

TATU va uning hududiy filiallari talabalari uchun

TOSHKENT 2016



R.Raxmatov, Sh.E.Tadjibayeva, S.K.Shoyimardonov

OLIY

MATEMATIKA

R. R. Raxmatov, Sh.E.Tadjibayeva, S.K.Shoyimardonov

OLIY MATEMATIKA FANIDAN AMALIY MASHG‘ULOTLAR O‘TKAZISHGA DOIR O‘QUV QO‘LLANMA

IKKI JILDLIK

1-JILD

TATU va uning xududiy filiallari talabalari uchun

TOSHKENT 2016

S O‘ Z   B O SHI

Ushbu o‘quv qo‘llanma O‘zR Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan tasdiqlangan "Oliy matematika," fanining o‘quv rejasiga to‘la mos keladi va bu o‘quv qo‘llanma bakalavriatning quyidagi ta’lim yo‘nalishi talabalariga mo‘ljallangan:

5330500 – Kompyuter injiniringi ("Kompyuter injiniringi", "AT-servis", "Multimedia texnologiyalari");

5330300 – Axborot xavfsizligi;

5330600 – Dasturiy injiniring;

5350100 – Telekommunikatsiya texnologiyalari ("Telekommunikatsiyalar", "Teleradioeshittirish", Mobil tizimlari);

5350200 –Televizion texnologiyalar ("Audiovizual texnologiyalar", "Telestudiya tizimlari va ilovalari");

5350300 – Axborot-kommunikatsiya texnologiyalari sohasida iqtisodiyot va menejment;

5350400 – Axborot-kommunikatsiya texnologiyalari sohasida kasb ta’limi;

5350500 –Pochta aloqasi texnologiyasi;

5350600 –Axborotlashtirish va kutubxonashunoslik.

O‘quv qo‘llanma ikki jilddan iborat bo‘lib, uning birinchi jildida chiziqli algebra, tekslikda va fazoda analitik geometriya, vektorlar algebrasi elementlari, matematik analizga kirish, bir o‘zgaruvchili funksiyalarning differensial hisobi, funksiyalarni hosilalar yordamida tekshirish, bir o‘zgaruvchili funksiyalarning integral hisobi kiritilgan. Har bir paragrafda dastlab qisqacha nazariy ma’lumotlar keltirilib, keyin esa turli tipdagi misol va masalalarning batafsil yechilish usullar ko‘rsatilib, kerakli uslubiy ko‘rsatmalar berilgan. Har bir bo‘lim uchun mustaqil yechish uchun yetarli miqdorda misol va masalalar hamda test savollari berilgan. Undan tashqari har bir bo‘limda berilayotgan nazariy bilimlarni amaliyot bilan bog‘lovchi masalalar yechib ko‘rsatilgan va mustaqil bajarish uchun topshiriqlar berilgan.

Kitob hajmini ixchamlashtirish maqsadida unda quyidagi belgilashlar kiritilgan:

►- masala va misollar yechilishining boshlanishi;

◄- masala va misollar yechilishining tugallanishi.

Mazkur qo‘llanma yaratishda mualliflar o‘zlarining Toshkent axborot texnologiyalari universitetining talabalariga ko‘p yillar mobaynida o‘qilgan ma’ruzalar va talabalar bilan o‘tkazilgan amaliy mashg‘ulotlarni asos qilib olingan, shuningdek mavjud adabiyotlardan ham foydalanilgan. O‘quv qo‘llanma kamchiliklardan holi emas, albatta. Qo‘llanmadagi kamchiliklarni bartaraf etishga va uning sifatini yaxshilashga qaratilgan fikr va mulohazalarini bildirganlarga mualliflar avvaldan o‘z minnatdorchliklarini bildiradilar.

I BOB CHIZIQLI ALGEBRA ELEMENTLARI

1.1 Determinantlar va ularning xossalari. Determinantlarni hisoblash usullari

Ikkinchi tartibli determinant deb
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1.1)$$
tenglik bilan aniqlanadigan songa aytiladi. Qisqacha, Δ deb belgilanadi. Bu yerda a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} -determinantning elementlari deyiladi. .

a_{11}, a_{12} va a_{21}, a_{22} mos ravishda determinantning 1- va 2-satrlari, a_{11}, a_{21} va a_{12}, a_{22} mos ravishda determinantning 1- va 2-ustunlari deyiladi. Ya'ni
$$a_{ij} : \begin{cases} i - \text{satr tartibi} \\ j - \text{ustun tartibi.} \end{cases}$$
Determinantning ixtiyoriy satri yoki ustuni determinantning *qatori* deb ataladi. a_{11}, a_{22} -elementlar joylashgan diagonal *bosh diagonal* deyiladi. a_{21}, a_{12} -elementlar joylashgan diagonal *yordamchi diagonal* deyiladi.

1-misol

Hisoblang: $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$

► (1.1) formulani qo'llaymiz:
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 - 2\cdot(-4) = 15 + 8 = 23. \blacktriangleleft$$

Eslatma Determinantning elementlari funksiyalar bo'lishi ham mumkin, shuning uchun determinantning qiymati, umuman olganda, funksiyadir.

2-misol

Hisoblang: $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$.

► $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$. ◄

Uchinchi tartibli determinant deb
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (1.2)$$
tenglik bilan aniqlanadigan songa aytiladi. Ko'pincha, determinant tartibiga mos ravishda Δ_3 deb ham belgilanadi.

3-misol

Hisoblang: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$.

► (1.2) formulani qo‘llaymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot1\cdot5+(-1)\cdot4\cdot2+3\cdot1\cdot(-3)-3\cdot1\cdot2-(-1)\cdot1\cdot5-2\cdot4\cdot(-3)=$$

$$=10-8-9-6+5+24=16. ◄$$

Determinantning a_{ij} elementining M_{ij} *minori* deb, uning $i-$ satri va $j-$ ustunini o‘chirishdan hosil bo‘lgan determinantga aytiladi.

Masalan, uchunchi tartibli determinant uchun

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Determinantning a_{ij} elementining A_{ij} *algebraik to‘ldiruvchisi* deb,

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ tenglik bilan aniqlanadigan songa aytiladi.

Masalan, uchunchi tartibli determinant uchun

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

4-misol

Quyidagi $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ determinantning M_{23} minorini hisoblang

► Determinantning $2-$ satri va $3-$ ustunini o‘chiramiz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot2-1\cdot(-3)=2+3=5.$$ Demak, $M_{23}=5$.◄

5-misol

Quyidagi $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ determinantning A_{32} va A_{13} algebraik to‘ldiruvchilarini hisoblang.

► $A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}$, ya'ni $A_{32}=-M_{32}$ bo'lgani uchun, determinantning $3-$ satri va $2-$ ustunini o'chiramiz:

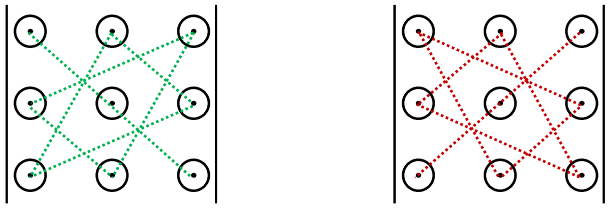
$$A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & 3 & 5\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-(2\cdot5-(-4)\cdot1)=-14 \cdot$$

$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{32}$ yoki $A_{13}=M_{13}$ bo'lgani uchun, determinantning $1-$satri va $3-$ ustunini o'chirib hisoblaymiz.

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=1\cdot2-3\cdot3=-7.$$

Demak, $A_{32}=-14,\ \ A_{13}=-7$. ◄

Determinant hisoblashning (1.2) formulasini eslab qolish uchun quyidagi sxemani keltiramiz:



Hisoblashning bu qoidasi *uchburchak usuli(Sarryus usuli)* deyiladi. Qulaylik uchun deteminantning birinchi va ikkinchi ustunini quyidagicha parallel ko'chirib, bosh diagonal va yordamchi diagonalga parallel chiziqlar bo'yicha ko'paytmalar tuzamiz:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{matrix}-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{matrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\ , \qquad (1.3)$$

bunda bosh diagonal bo'yicha hosil qilinga qo'shuluvchilar musbat ishora bilan, yordamchi diagonal bo'yicha hosil qilingan qo'shiluvchilar manfiy ishora bilan olinadi.

6-misol

Quyidagi $\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ -1 & 2 & 3\\ -3 & 2 & 5\end{vmatrix}$ determinantni hisoblang

► Determinantning birinchi va ikkinchi ustunini parallel ko'chirib yozib Sarryus usulida hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{matrix} = 1\cdot2\cdot5+1\cdot3\cdot(-3)+4\cdot(-1)\cdot2-4\cdot2\cdot(-3)-1\cdot3\cdot2-1\cdot(-1)\cdot5=$$

$$=10-9-8+24-6+5=16.\blacktriangleleft$$

(1.2) formulani algebraik to‘lduruvchilar yordamida quyidagicha ifodalaymiz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \qquad (1.4)$$

7-misol

Quyidagi $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ determinantni hisoblang

► (1.4) formulani qo‘llaymiz, buning uchun avval A_{11}, A_{12} va A_{13} larni hisoblaymiz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3-10=-7,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-15)=16,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2-(-9)=11.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-7)+5\cdot16-4\cdot11=-14+80-44=22.\blacktriangleleft$$

Determinantning xossalari[120]:

1. *Determinantning barcha satrlarini mos ustunlari bilan almashtirish natijasida qiymati o‘z garmaydi*
2. *Determinantning biror qatoridagi barcha elementlari nolga teng bo‘lsa, uning qiymati nolga teng bo‘ladi.*
3. *Determinantning ikkita parrallel qatorining o‘rinlarini o‘zaro almashtirish natijasida determinant qiymatining ishorasi qarama-qarshisiga o‘zgaradi.*
4. *Determinantning ikkita parrallel qatori bir xil bo‘lsa, uning qiymati nolga teng bo‘ladi.*
5. *Agar determinantning biror qatori bir xil ko‘paytuvchiga ega bo‘lsa, bu ko‘paytuvchini determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin. Demak, determinantni biror songa ko‘paytirish uchun uning biror qatori elementlarini shu songa ko‘paytirish kifoya.*

[120] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

6. *Determinantning ikkita parrallel qatori mos pavishda proporsional bo'lsa, uning qiymati nolga teng bo'ladi.*

7. *Determinantning qiymati uning biror qatori elementlarini mos algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirilib qo'shilganiga teng.*

8. *Agar determinantning biror qator elementlari yig'indilardan iborat bo'lsa, u holda bu determinant ikki determinant yig'indisiga teng bo'ladi, bunda birinchi determinantda shu qator birinchi qo'shuluvchilardan, ikkinchisida esa ikkinchi qo'shuluvchilardan tashkil topgan bo'ladi.*

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{33} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

9. *Agar determinantning biror qatori elementlarini ixtiyoriy songa ko'paytirib, parallel qatori elementlariga mos ravishda qo'shilsa, determinant qiymati o'zgarmaydi.*

10. *Determinantning biror qatori elementlarini parallel qator mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalari yig'indisi nolga teng.*

Masalan, $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$.

9-xossa yordamida, (1.4) formuladan ko'ra umumiyroq bo'lgan, determinantni *biror qatori bo'yicha yoyib hisoblash usuli* hosil bo'ladi. Masalan, uchunchi tartibli determinant uchun

$$\Delta_3 = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}, \tag{1.5}$$

$$\Delta_3 = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}. \tag{1.6}$$

Bu yerda (1.5) va (1.6) formulalar mos ravishda determinantning ixtiyoriy $i-$ *satri* va $j-$ *ustuni bo'yicha yoyilmasi* deyiladi.

8-misol

Quyidagi $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ determinantni biror qatori bo'yicha yoyib hisoblang

► Determinantni eng ko'p nol element qatnashgan qatorini aniqlaymiz. Bu yerda uchunchi ustunda eng ko'p nol element bo'lgani uchun, (1.6) formulani qo'llaymiz: $\Delta_3 = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} = 6A_{23}$, chunki $a_{13} = a_{33} = 0$.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -6 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -6\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 6\cdot(16-6) = 60. ◄$$

Quyida biz *n*-tartibli determinantning ko'rinishini keltiramiz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Quyida biz, asosan, yuqori tartibli determinantlarni hisoblashda keng qo‘llanadigan ikkita hisoblash usulini keltiramiz.

1. Yuqori tartibli determinantni, asosiy xossalaridan foydalanib, biror qatorining bitta elementidan boshqa barcha elementlarini nolga aylantirilib, so‘ng 9-xossa yordamida *tartibini pasaytirib hisoblash* mumkin.

9-misol

Quyidagi $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ determinantni hisoblang.

► Determinantning birinchi satrini -2 va -1 ga ko‘paytirib, mos ravishda ikkinchi va to‘rtinchi satriga qo‘shamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 \\ -3 & 5 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$3-$ustun bo‘yicha yoyib(9-xossa), ya’ni $\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{43}A_{43}$ va $a_{23} = a_{33} = a_{43} = 0$ ekanini e’tiborga olib, tartibini pasaytiramiz. Hosil bo‘lgan uchunchi tartibli determinantni esa uchburchak usulida yechamiz.

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 5 & -5 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 18 - 15 - 30 + 10 + 30 - 27 = -14 \,.$$ ◄

2. Bosh diagonalidan yuqorisidagi yoki pastidagi barcha elementlari nollardan iborat bo‘lgan determinant *uchburchak shaklidagi determinant* deyiladi. Bunday determinantning qiymati bosh diagonali elementlari ko‘paytmasiga teng. Har qanday determinantni *uchburchak shakliga keltirib hisoblash* mumkin.

10-misol

Quyidagi $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ determinantni uchburchak shakliga keltirib hisoblang.

► Determinantning a_{11} elementini 1 ga aylantirish uchun birinchi va ikkinchi satrlarining o‘rinlarini almashtiramiz. Hosil bo‘lgan birinchi satrni -2, -2 va -3 ga ko‘paytirib, mos ravishda ikkinchi , uchunchi va to‘rtinchi satrlarga qo‘shamiz.

$$\Delta=-\begin{vmatrix}1&-3&2&5\\2&-4&1&5\\2&2&0&-3\\3&-1&1&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-3&2&5\\0&2&-3&-5\\0&8&-4&-13\\0&8&-5&-13\end{vmatrix}$$

Uchinchi satrini -1 ga ko‘paytirib to‘rtinchi satrlarga qo‘shamiz:

$$\Delta=-\begin{vmatrix}1&-3&2&5\\0&2&-3&-5\\0&8&-4&-13\\0&0&-1&0\end{vmatrix}$$

Ikkinchi satrini -4 ga ko‘paytirib uchinchi satriga qo‘shamiz. So‘ng uchinchi va to‘rtinchi satrlar o‘rinlarini almashtiramiz:

$$\Delta=-\begin{vmatrix}1&-3&2&5\\0&2&-3&-5\\0&0&8&7\\0&0&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-3&2&5\\0&2&-3&-5\\0&0&-1&0\\0&0&8&7\end{vmatrix}$$

Uchinchi satrini 8 ga ko‘paytirib to‘rtinchi satriga qo‘shamiz :

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&-3&2&5\\0&2&-3&-5\\0&0&-1&0\\0&0&0&7\end{vmatrix}=1\cdot2\cdot(-1)\cdot7=-14\cdot$$ ◄

Auditoriya topshiriqlari

1. Berilgan ikkinchi tartibli deteminantlarni hisoblang.

a) $\begin{vmatrix}5&3\\7&-4\end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix}4&-7\\-2&-3\end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix}tgx&-1\\1&tgx\end{vmatrix}$.

2. Tenglamani yeching.

a) $\begin{vmatrix}x+3&2\\7&x-2\end{vmatrix}=0$; b) $\begin{vmatrix}\sin2x&-\cos2x\\\sin3x&\cos3x\end{vmatrix}=0$

3. Berilgan uchinchi tartibli deteminantlarni hisoblang.

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 10 & -2 & 4 \\ -15 & 3 & 6 \\ 20 & -1 & 5 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 7 \\ 4 & 6 & 5 \end{vmatrix}$.

4. Berilgan uchinchi tartibli deteminantlarni satr yoki ustun bo‘yicha yoyib hisoblang.

a) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$.

5. Berilgan deteminantlarni uchburchak shakliga keltirib hisoblang.

a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ deteminantlarni $a-b$, $a-c$ va $b-c$ larga bo‘linishini isbotlang.

7. $\begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ deteminantni hisoblamasdan, 13 ga bo‘linishini isbotlang.

Mustaqil yechish uchun testlar

1. To‘g‘ri tengliklarni aniqlang

1) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$.

A) 1),3); B) 1),2); D) 2),3); E) 3),4).

2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ determinantning a_{21} elementining M_{21} minorini toping:

A) 4 B) -4 D) 2 E) -2.

3. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ determinantning a_{21} elementining A_{21} algebraik to‘ldiruvchisiini toping:

A) 4 B) -4 D) 2 E) $-2.$

4. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ deteminantni hisoblang

A) 4 B) -4 D) 2 E) $-2.$

5. Agar n-tartibli determinantning satrlarini teskari tartibda yozib chiqilsa qiymati qanday o‘zgaradi?

A) $(-1)^n$ ga ko‘payadi; B) $(-1)^{n-1}$ ga ko‘payadi; D) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ga ko‘payadi;
E) o‘zgarmaydi.

1.2 Matritsalar va ular ustida amallar. Teskari matritsa

Berilgan m ta satr va n ta ustundan iborat to‘g‘ri burchakli ushbu

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ yoki } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

jadvalga $m\times n$ o‘lcovli *matritsa* deyiladi. Bu yerda a_{ij} $(i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n)$ - matritsaning elementlari deyiladi. Matritsalar lotin alifbosidagi bosh harflar bilan belgilanadi. Ba’zan, o‘lchamlarini ifodalash uchun $A_{m\times n}$ kabi belgilanadi.

Matritsalar qisqacha,

$$A=(a_{ij})\ \ (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}) \text{ yoki } A=\|a_{ij}\|\ \ (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}) \qquad (2.2)$$

ko‘rinishda ham yoziladi.

Agar matritsada $i=1$ bo‘lsa, bunday

$$A=[a_{11}\quad a_{12}\quad \dots\quad a_{1n}]$$

matritsa *satr matritsa* deyiladi.

Agar matritsada $j=1$ bo‘lsa, bunday

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

matritsa *ustun matritsa* deyiladi.

Matritsada $m = n$ bo‘lsa, *kvadrat matritsa* deyiladi:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Bosh diagonalidagi elementlari birlardan va qolgan elementlari nollardan iborat bo‘lgan kvadrat matritsa *birlik matritsa* deyiladi va E deb belgilanadi. Masalan,

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matritsaning barcha elementlari nollardan iborat bo‘lsa, *nol matritsa* deyiladi va Q deb belgilanadi.

Mos elementlari teng, ya’ni $a_{ij} = b_{ij}$ bo‘lgan bir xil o‘lchamli A va B matritsalar *teng matritsalar* deyiladi.

Matritsaning satrlarini mos ustunlariga almashtirishdan hosil bo‘lgan matritsa *transponirlangan matritsa* deyiladi va A^T kabi belgilanadi.

Masalan, $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ matritsa berilgan bo‘lsa, A^T matritsani hisoblash uchun satrlarini mos ustunlariga almashtiramiz: $A^T = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Bir xil o‘lchovli A va B matritsalarni qo‘shish va ayirish mumkin.

Bir xil o‘lchovli *A va B matritsalarni yig‘indisi(ayirmasi)* deb shunday C matritsaga aytiladiki, uning elementlari A va B matritsalarning mos elementlari yig‘indisiga(ayirmasiga) teng. $C = A + B$ ($C = A - B$) kabi belgilanadi.

A matritsani λ songa ko‘paytmasi deb, barcha elementlarini λ songa ko‘paytirishdan hosil bo‘lgan B matritsaga aytiladi, $B = \lambda A$ kabi belgilanadi.

Matritsalarni qo‘shish va songa ko‘paytirish quyidagi xossalarga ega:

i. $A + B = B + A$

ii. $A + Q = A$

iii. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

iv. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

1-misol

Quyida $A=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 3 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ matritsalar berilgan bo‘lsa $A+B$ va $2A-B$ matritsalarni hisoblang

$$\blacktriangleright\ A+B=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 3 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+3 & 5+(-1)\\ 3+2 & -1+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 5 & 3\end{bmatrix};$$

$$2A-B=2\cdot\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 3 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot(-2) & 2\cdot 5\\ 2\cdot 3 & 2\cdot(-1)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-4-3 & 10-(-1)\\ 6-2 & -2-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & 11\\ 4 & -5\end{bmatrix}.\ \blacktriangleleft$$

2-misol

Quyida $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 0 & 5\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -5 & 4\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ matritsalar berilgan. A^T+2B va $A-B^T$ matritsalarni hisoblang

$$\blacktriangleright\ A^T+B=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & 0\\ 3 & 5\end{bmatrix}+2\cdot\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -5 & 4\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+2\cdot(-3) & 4+2\cdot 1\\ -1+2(-5) & 0+2\cdot 4\\ 3+2\cdot 0 & 5+2\cdot 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 6\\ -11 & 8\\ 3 & 9\end{bmatrix};$$

$$A-B^T=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 0 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3 & -5 & 0\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-(-3) & -1-(-5) & 3-0\\ 4-1 & 0-4 & 5-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 4 & 3\\ 3 & -4 & 3\end{bmatrix}.\ \blacktriangleleft$$

Berilgan $m\times k$ o‘lchovli A matritsani $k\times n$ o‘lchovli B matritsaga *ko‘paytmasi* deb, shunday $m\times n$ o‘lchovli C matritsaga aytiladiki, uning elementlari

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj} \tag{2.4}$$

tenglik bilan aniqlanadi. $C=A\cdot B$ kabi belgilanadi.

Demak, birinchi matritsaning ustunlari soni ikkinchi matritsaning satrlari soniga teng bo‘lgan holdagini ularni ko‘paytirish mumkin. Umuman olganda, $A\cdot B$ ko‘paytma mavjud bo‘ganda $B\cdot A$ ko‘paytma mavjud bo‘lavermaydi. $B\cdot A$ ko‘paytma mavjud bo‘gan holda ham, umuman olganda, $AB\neq BA$.

Agar $A\cdot B=B\cdot A$ bo‘lsa, A va B matritsalar *kommutativlanadigan* matritsalar deyiladi.

3-misol

Quyida $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -5 & 3\\ 0 & 4\end{bmatrix}$ matritsalar berilgan. $A\cdot B$ va $B\cdot A$ ko‘paytmalarni hisoblang

► Bu yerda $A_{2\times3}$ va $B_{3\times2}$ bo‘lgani uchun AB matritsa 2×2 o‘lchovli bo‘ladi:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ -5 & 3\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot1+1\cdot(-5)+2\cdot0 & 3\cdot2+1\cdot3+2\cdot4\\ -2\cdot1+0\cdot(-5)+5\cdot0 & -2\cdot2+0\cdot3+5\cdot4\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-2 & 17\\ -2 & 16\end{bmatrix}.$$

$B\cdot A$ matritsa esa 3×3 o‘lchovli bo‘ladi:

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -5 & 3\\ 0 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot3+2\cdot(-2) & 1\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot2+2\cdot5\\ -5\cdot3+3\cdot(-2) & -5\cdot1+3\cdot0 & -5\cdot2+3\cdot5\\ 0\cdot4+4\cdot(-2) & 0\cdot1+4\cdot0 & 0\cdot2+4\cdot5\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 12\\ -21 & -5 & 5\\ -8 & 0 & 20\end{bmatrix}. \quad A\cdot B\neq B\cdot A.$$ ◄

4-misol

Quyida $A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ matritsalar berilgan. $A\cdot B$ va $B\cdot A$ ko‘paytmalarni hisoblang

► $$A\cdot B=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot3+2\cdot2 & 2\cdot4+2\cdot3\\ 1\cdot3+2\cdot2 & 1\cdot4+2\cdot3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 14\\ 7 & 10\end{bmatrix};$$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot2+4\cdot1 & 3\cdot2+4\cdot2\\ 2\cdot2+3\cdot1 & 2\cdot2+3\cdot2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 14\\ 7 & 10\end{bmatrix}.$$

$A\cdot B=B\cdot A$, demak, A va B matritsalar kommutativlanadigan matritsalar.◄

Matritsalarni ko‘paytirish quyidagi xossalarga ega:

i. $(\lambda A)B=\lambda(AB)$

ii. $(A+B)C=AC+AB$

iii. $A(B+C)=AB+AC$

iv. $A(BC)=(AB)C$

Transponirlangan matritsa uchun esa quyidagi formulalar o‘rinli:

1. $\left(A^T\right)^T=A$
2. $(AB)^T=B^T\cdot A^T$

Agar A kvadrat matritsaning determinanti noldan farqli bo‘lsa, ya’ni $\det A\neq 0$ bo‘lsa, A matritsa *xosmas matritsa* deyiladi.

Agar $\det A=0$ bo‘lsa, A matritsa *xos matritsa* deyiladi.

Agar $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, A^{-1}matritsa Axosmas matrtsaning *teskari matritsasi* deyiladi. Bu yerda E matritsa A matritsa o‘lchovi bilan bir xil o‘lchovli birlik matritsadir.

Xosmas matritsa A uchun yagona A^{-1} teskari matritsa mavjud va quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2.5)$$

Teskari matritsa quyidagi xossalarga:

1. $\det\left(A^{-1}\right)=\dfrac{1}{\det A}$
2. $(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

5-misol

Quyidagi matritsalarning teskarilarini toping

a) $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, b) $A=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

► a) $\det A=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-10\neq 0$ algebraik to‘ldiruvchilarni hisoblaymiz:

$$A_{11}=4,\ A_{12}=-3,\ A_{21}=-2,\ A_{22}=-1$$

Natijada, (2.5) formulaga ko‘ra,

$$A^{-1}=-\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}$$

Tekshirish:

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=E$$

a) Uchunchi tartibli determinantni hisoblaymiz, $\det A = -8$ va algebraik to'ldiruvchilar: $A_{11} = -2$, $A_{12} = 2$, $A_{13} = 4$, $A_{21} = 3$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = -2$, $A_{31} = -7$, $A_{32} = -5$, $A_{33} = -6$. U holda,

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \blacktriangleleft$$

Auditoriya topshiriqlari

1. A va B matritsalar berilgan. $A+B$, $2A-B$ va $A+3B$ matritsalarni toping

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

2. A va B matritsalar berilgan. AB va BA matritsalarni toping

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$;

d) $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$;

e) $A = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

3. A, B va C matritsalar berilgan. $(AB)C = A(BC)$ ekanini tekshiring

$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

.

4. Berilgan A matritsaning A^{-1} teskari matritsasini toping

a) $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;

b) $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

Mustaqil yechish uchun testlar

1. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ matritsa berilgan, $A+2B$ matritsani toping

$A)\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 11 & 0 \end{pmatrix}$, $B)\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 17 & -7 \end{pmatrix}$, $C)\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$, $D)\begin{pmatrix} -11 & 4 \\ 11 & 0 \end{pmatrix}$

2. $K=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ matritsa berilgan bo‘lsa, $2K$ matritsani toping

$A)\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 6 & -8 \end{pmatrix}$, $C)\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -4 & 6 & -8 \end{pmatrix}$, $D)$ A *va* B *to'g'ri*

3. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ matritsalar berilgan, $A\cdot B$ matritsani toping

$A)\begin{pmatrix} -13 & 7 \\ 25 & -7 \end{pmatrix}$, $B)\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$, $C)\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 17 & -7 \end{pmatrix}$, $D)\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

4. Teskari matritsani topish formulasini ko‘rsating?

A) $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$, $B)$ $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$

C) $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$, $D)$ $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ bo‘lsa, A^{-1} teskari matritsani toping

$A)\quad A^{-1}=-\begin{pmatrix}-3 & 5 & -12\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 7\end{pmatrix},\qquad B)\ A^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 5 & -12\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 7\end{pmatrix}$

$C)\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 2\\ 5 & 0 & -3\\ -12 & 1 & 7\end{pmatrix}\qquad D)\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 2\\ -5 & 0 & 3\\ -12 & -1 & 7\end{pmatrix}$

1.3 Matritsa rangi. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Kroneker-Kapelli teoremasi

1.3.1 Matritsaning rangi

To‘g‘ri burchakli (xususiy holda kvadrat) A matritsa berilgan bo‘lsin. Uning biror k ta satr va k ta ustunini ajratamiz, kesishmada turgan elementlardan $k-$tartibli determinanat hosil qilamiz. Bu determinant matritsaning k -*tartibli minori* deb ataladi.

Masalan, ushbu $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ matritsaning 2-tartibli minorlaridan biri $M_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3-2=1$ bo‘ladi. 3-tartibli minorlaridan biri $M_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 6 & 5 \end{vmatrix}=15+12+2+3-10+12=34$ bo‘ladi. Berilgan matritsaning 18 ta *2-tartibli*, 4 ta *3-tartibli* minori bor.

Matritsaning rangi deb, uning noldan farqli minorlarining eng yuqori tartibiga aytiladi, *rangA* yoki $r(A)$ kabi belgilanadi.

Matritsada elementar almashtirishlar deb, quyidagi almashtirishlarga aytiladi:

a) Nollardan iborat qatorlarni o‘chirish.

b) Ikkita parallel qatorlarni o‘rnini almashtirish.

c) Bir qatorning barcha elementlarini biror songa ko‘paytirib, boshqa qatorning mos elementlariga qo‘shish.

d) Qatorning barcha elementlarini noldan farqli bir xil songa ko‘paytirish

Bu almashtirishlar natijasida hosil bo‘lgan matritsa berilgan matritsaga *ekvivalent matritsa* deyiladi va $A\sim B$ kabi belgilanadi.

Teorema. *Matritsalar ustida elementar almashtirishlar natijasida uning rangi o‘zgarmaydi.*

Matritsaning rangini 2 xil usulda topish mumkin.

1-usul. *O‘rab turuvchi minorlar usuli*

Bu usulda birinchi noldan farqli k-*tartibli* minori topiladi. k–tartibli minorni o‘z ichiga oluvchi barcha $k+1$ tartibli minorlar ***o‘rab turuvchi minorlar*** deyiladi. k–tartibli minor noldan farqli bo‘lib, bu minorni o‘rab turuvchi barcha $k+1$ tartibli minorlar nolga teng bo‘lganda, matritsaning rangi shu noldan farqli minor tartibiga teng bo‘ladi. Bu usul hisoblash ishlarini ancha kamaytirish imkoniyatini beradi. Agar o‘rab turuvchi $k+1$ tartibli minorlardan birortasi nolga teng bo‘lmasa, ana shu minorni o‘rab turuvchi minorlarni tekshirilib, bu jaroyon davom ettiriladi.

2-usul. *Zinasimon usul* (*yoki elementar almashtirishlar usuli*)

Bu usulda elementar almashtirishlar yordamida matritsa uchburchakli matritsa ko‘rinishiga keltiriladi. Natijada hosil bo‘lgan matritsaning noldan farqli satrlari soni matritsaning rangiga teng bo‘ladi.

1-misol

Berilgan $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 4 & -2 & 0\\ 1 & 2 & -7 & 5 & 6\\ 3 & 6 & 9 & -5 & -2\end{bmatrix}$ matritsa rangini ikki xil usulda aniqlang.

►*1-usul.* $M_2=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=4+2=6\neq 0$. Bu minorni o‘rab turuvchi 3-tartibli minorlar soni 6 ta(umumiy holda, 3-tartibli minorlari 40 ta).

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & 4\\ 1 & 2 & -7\end{vmatrix}=-28+8-4+4-8+28=0,\quad \begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ 1 & -7 & 5\end{vmatrix}=20+2-14-4-14+10=0,$$

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 4 & 0\\ 1 & -7 & 6\end{vmatrix}=24-28-8+12=0,\quad \begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ 3 & 9 & -5\end{vmatrix}=-20+6+18-12+18-10=0,$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & 4\\ 3 & 6 & 9\end{vmatrix}=36+24-12+12-24-36=0,\quad \begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 4 & 0\\ 3 & 9 & -2\end{vmatrix}=-8+36-24-4=0$$

Demak, berilgan matritsa uchun $rangA=2$ bo‘ladi.

2-usul. Quyidagicha elementar almashtirishlar olib boramiz: 1)1-satr elementlarini $-2,-1,-3$ larga ko‘paytirib, mos ravishda 2-, 3-, 4-satr elementlariga qo‘shamiz; 2) 2-satr elementlarini $1,-2$ larga ko‘paytirib, mos ravishda 3-, 4-satr elementlariga qo‘shamiz; 3) nollardan iborat satrlarini o‘chiramiz.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 4 & -2 & 0\\ 1 & 2 & -7 & 5 & 6\\ 3 & 6 & 9 & -5 & -2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 6 & -4 & -4\\ 0 & 0 & -6 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 12 & -8 & -8\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 6 & -4 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim$$

$\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 6 & -4 & -4\end{bmatrix}$. Demak, $rangA=2$ ekan.◄

Tartibi matritsa rangiga teng bo‘lgan minor *bazis minor* deb ataladi. Kesishmasida bazis minor elementlari turgan satrlar va ustunlar *bazis satrlar va ustunlar* deyiladi. Matritsaning istalgan satri(ustuni) uning bazis satrlarining (ustunlarining) chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘ladi. Bazis satrlar (ustunlar) chiziqli erkli satrlar(ustunlar) bo‘ladi.

Teorema. *Agar matritsaning rangi r ga teng bo‘lsa, u holda unda r ta chiziqli erkli satr topiladi, qolgan barcha satrlar esa bu r ta satrning chiziqli kombinatsiyasi bo‘ladi.*

Natija. *Matritsaning rangi undagi chiziqli erkli satrlar(ustunlar) soniga teng.*

1.3.2 Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi

Quyidagi umumiy ko‘rinishdagi n ta noma’lumli m ta tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (3.1)$$

Bu yerda, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – noma’lumlar, $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ -koeffitsientlar, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ -ozod hadlar.

(3.1) tenglamalar sistemasining *yechimi* deb, shunday n ta $\left(x_1^o, x_2^o, \ldots, x_n^o\right)$ sonlar to‘plamiga aytiladiki, bu sonlar (3.1) sistemaning barcha tenglamalarini to‘g‘ri tenglikka aylantiradi.

Agar (3.1) sistema yechimga ega bo‘lsa, u *birgalikdagi sistema* deyiladi. Agar bu yechim yagona bo‘lsa, sistema *aniq sistema* deyiladi. Agar (3.1) sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lsa, u *aniqmas* sistema, agar tenglamalar sistemasi umuman yechimga ega bo‘lmasa, u *birgalikda bo‘lmagan sistema* deyiladi.

(3.1) tenglamalar sistemasi uchun quyidagi matritsalarni tuzamiz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \qquad (3.2)$$

A matritsa (3.1) sistemaning *asosiy matritsasi* deyiladi. B matritsa *kengaytirilgan matritsa* deyiladi.

Bu matritsalarning ranglar $rangA \le rangB$. munosabat bilan bog‘langan.

Agar A matritsaning rangi n noma’lumlar sonidan kichik bo‘lsa, u holda bu tenglamalar sistemasida $n-k$ ta o‘zgaruvchi chiziqli erkli bo‘lib, k ta o‘zgaruvchi chiziqli bog‘liq o‘zgaruvchilar bo‘ladi. Bu holda (3.1) tenglamalar sistemasida k ta tenglama qoldiriladi. Qolgan tenglamalar bu tenglamalarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘ladi. Qoldirilgan tenglamalarda $n-k$ ta o‘zgaruvchini tenglamalarning o‘ng tomoniga o‘tkaziladi. Bu o‘zgaruvchilar chiziqli erkli o‘zgaruvchilar deyiladi. Tenglamalarni yechishda chiziqli erkli o‘zgaruvchilarga qiymatlar berilib, qolgan k ta o‘zgaruvchilarning ularga mos qiymatlari topiladi.

1. Kroneker – Kapelli teoremasi

1-teorema (*Kroneker – Kapelli*). *Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi birgalikda bo‘lishi uchun uning asosiy matritsasi bilan kengaytirilgan matritsasining rangi teng bo‘lishi zarur va yetarli, ya’ni* $rangA = rangB$**.**

Shunday qilib: $rangA \ne rangB$ bo‘lsa, tenglamalar sistemasi birgalikda emas;

$rangA = rangB = r = n$ bo‘lsa, tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega;

$rangA = rang\ B = r < n$ bo‘lsa, tenglamalar sistemasi cheksiz ko‘p yechimga ega.

1.3.3 Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi

Agar chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining barcha ozod hadlari nolga teng bo‘lsa, bunday sistema *bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi* deyiladi.

Ushbu
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (3.3)$$

tenglamalar sistemasi bir jinsli tenglamalar sistemasi.

Bu yerda $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ bo‘lib A va B matritsalar ranglari teng,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{bmatrix}$$

ya'ni *r(A)=r(B).*

Kroneker-Kapelli teoremasiga ko'ra, bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi hamma vaqt birgalikda bo'ladi. (3.3) tenglamalar sistemasi doim nollardan iborat *trivial yechim* deb ataladigan yechimga ega:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \tag{3.4}$$

2-teorema. *Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining determinanti nolga teng bo'lganda, va faqat shu holdagina bu sistema noldan farqli yechimlarga ega bo'ladi.*

3-teorema. *(3.3) tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun A matritsaning rangi noma'lumlar sonidan kichik, ya'ni* $r(A) < n$ *bo'lishi zarur va yetarli.*

Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining yechimlarining har qanday chiziqli kombinatsiyasi yana shu sistemaning yechimi bo'ladi.

$r(A)=k<n$ bo'lsa, u holda (3.3) sistemaning fundamental yechimlar sistemasi $n-k$ ta yechimdan iborat bo'ladi. Fundamental yechimlar sistemasini aniqlash uchun bazis noma'lumlarni aniqlaymiz. Ularni $x_1, x_2, \dots, x_k$ deb belgilaymiz. Bu noma'lumlarni $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ chiziqli erkli noma'lumlar orqali ifodalab olinadi. Bu *n-k* ta noma'lumga ixtiyoriy qiymatlar berib, $x_1, x_2, \dots, x_k$ o'zgaruvchilarning mos aniq qiymatlarini topamiz. Bu topilgan yechimlar (3.3) ning fundamental yechimlar sistemasi bo'ladi. Ko'pincha normallangan fundamental yechimlar sistemasi olinadi.

2-misol

Fundamental va umumiy yechimlar sistemasi topilsin.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 + 19x_4 = 0 \end{cases}$$

► $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & 19 \end{bmatrix}$, $M_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=5-6=-1\neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 24 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & -4 \\ 3 & 8 & 19 \end{vmatrix}=0.$$

$$rangA=2,\ \begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \end{cases},\quad \begin{cases} x_1=8x_3-7x_4 \\ x_2=-6x_3+5x_4 \end{cases}.$$

$x_3=1,\ x_4=0$ va $x_3=0,\ x_4=1$ deb olib, $(8;-6;1;0)$ va $(-7;5;0;1)$ fundamental yechimlarni hosil qilamiz. Umumiy yechim: $\{8a-7b;-6a+5b;a;b\}$◄

Natija. *Agar bir jinsli tenglamalar sistemasining tenglamalari soni noma'lumlar sonidan kichik bo'lsa, bu sistema nolmas yechimga ega bo'ladi va bu yechimlar cheksiz ko'p bo'ladi.*

Agar bir jinsli tenglamalar sistemasining rangi $r<n$ bo'lsa sistemadagi shu rangni tashkil qiluvchi minorlar turgan satrdagi tenglamalarni ajratamiz, ular qolgan $n-r$ dona tenglamalarning chiziqli kombinatsiyalardan iborat bo'ladi.

3-misol

Fundamental va umumiy yechimlar sistemasi topilsin

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0 \\ x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0 \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0 \end{cases}$$

► $$A=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$rang(A)=2$.

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0 \\ -7x_3-5x_4=0 \end{cases}\qquad \begin{cases} x_1=2x_2-4{,}6x_3 \\ x_4=-1{,}4x_3 \end{cases}$$

Javob: $\{2a-4{,}6b;\ a;\ b;-1.4b\}$.◄

Auditoriya topshiriqlari

1. Berilgan A matritsaning rangini ta'rif yordamida toping.

a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 3 & 6 & -6 \end{bmatrix}$; b) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & -8 \end{bmatrix}$; d) $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ -4 & 3 & -8 \end{bmatrix}$.

2. Berilgan A matritsaning rangini o‘rab turuvchi minorlar usulida yeching.

$$a)\quad A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b)\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$c)\quad A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad d)\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

3. Berilgan A matritsaning rangini elementar almashtirishlar usulida yeching.

$$a)\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & -1 & 3 & -2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \qquad b)\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & -3 & 0 & -3 \\ 3 & 9 & 1 & -2 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & -5 & -8 & 4 & -16 \end{bmatrix}$$

4. Sistema birgalikda bo‘ladimi?

$$a)\quad \begin{cases} x_1-2x_2+5x_3=0 \\ 2x_1-5x_2-2x_4=-2 \\ 3x_1+2x_2+6x_3=16 \end{cases} \qquad b)\quad \begin{cases} 2x_1+3x_2-7x_3=2 \\ 3x_1-x_2+x_4=9 \\ 4x_1-5x_2+9x_3=14 \end{cases}$$

5. Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yeching.

$$a)\quad \begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=0 \\ 3x_1-2x_2+5x_4=0 \\ 2x_1-2x_2+3x_3=0 \end{cases} \qquad b)\quad \begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3=0 \\ x_1+2x_2-3x_4=0 \\ 3x_1-2x_2+2x_3=0 \end{cases}$$

6. Fundamental va umumiy yechimlar sistemasi topilsin.

$$a)\quad \begin{cases} 4x_1-2x_2-x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+8x_2+3x_3-5x_4=0 \\ x_1-5x_2-2x_3+4x_4=0 \\ 3x_1+3x_2+x_3-x_4=0 \end{cases} \qquad b)\quad \begin{cases} x_1-5x_2+2x_3+4x_4=0 \\ 2x_1-3x_2-3x_3+x_4=0 \\ x_1+2x_2-5x_3-3x_4=0 \\ 3x_1-8x_2-x_3+5x_4=0 \end{cases}$$

Mustaqil yechish uchun testlar

1. Matitsa rangini toping.

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$A)\ \ rang(A)=3 \quad B)\ \ rang(A)=2 \quad C)\ \ rang(A)=1 \quad D)\ \ rang(A)=4$

2. Matritsa rangi bu -

A) Matritsaning o‘lchami B) matritsaning determinanti.

C) noldan farqli eng katta minorining qiymati D) noldan farqli minorlarining eng katta tartibi

3. Matritsaning ko‘rsatilgan minorini o‘rab turuvchi minori noto‘g‘ri berilgan variantni aniqlang:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ -2 & 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}; \quad M_2=\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad B)\ \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \\ -2 & 5 & -1 \end{vmatrix}, \quad C)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}, \quad D)\ \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

4. O‘lchami 4×4 bo‘lgan matritsaning nechta 2-tartibli va nechta 3-tartibli minorlari mavjud?

A) 16 va 9; B) 25 va 16; C) 36 va 9; D) 36 va 16.

5. Agar n ta noma’lumli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi aniqmas sistema bo‘lsa. uning asosiy A va kengaytirilgan B matritsalari ranglari qanday bog‘langan bo‘ladi?

$A)\ \ rang(A)=rang(B)<n \qquad B)\ \ rang(A)\neq rang(B)$

C) $rang(A)=rang(B)=n \qquad D)\ \ rang(A)<n$

6. Agar 5 ta noma’lumli chiziqli bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasi asosiy matritsasi rangi $r=3$ bo‘lsa, uning fundamental yechimlari soni nechta bo‘ladi?

A) 3ta; B) 2ta; D) 5ta; E) 4ta.

1.4 Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish usullari

1.4.1 Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usuli.

Determinantlarni chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga tatbiqi bo'lgan *Kramer(determinant) usuli* bilan tanishamiz. Aytaylik bizga n ta no'malumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...+ a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ...+ a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (4.1)$$

Bu yerda $x_1, x_2, ..., x_n$ -noma'lumlar, $a_{11}, a_{12}, ..., a_{nn}$ -koeffitsientlar, $b_1, b_2, ..., b_n$ -ozod sonlar.

Teorema. *Agar (4.1)-tenglamalar sistemasining asosiy determinanti($\Delta \neq 0$) noldan farqli bo'lsa, u holda sistema yagona yechimga ega bo'ladi va u quyidagi formulalardan topiladi .*

$$\Delta \neq 0 \ , \ x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, ..., x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta} \qquad (4.2)$$

Bu *Kramer* formulasidan iborat. Bu yerda $\Delta \neq 0$ ga bosh determinant, $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}, ..., \Delta_{x_n}$ larga yordamchi determinantlar deyiladi. Soddalik uchun uch noma'lumli, uchta chiziqli tenglamalar sistemasini qaraymiz.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \qquad (4.3)$$

uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda dastlab bosh(asosiy) determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (4.4)$$

topiladi. $\Delta \neq 0$ bo'lsin. Undan so'ng yordamchi determinantlar hisoblanadi(bunda bosh determinantning ustun elementlari mos ravsihda ozod hadlar bilan almashtiriladi):

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \qquad (4.5)$$

Noma'lumlar quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \tag{4.6}$$

1-misol

Ushbu sistemani Kramer usulida yeching:

$$\begin{cases} x + 5y - z = 3, \\ 2x + 4y - 3z = 2, \\ 3x - y - 3z = -7 \end{cases}.$$

►Quyidagi determinantlarni tuzamiz va hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -16; \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -7 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 64;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = -16; \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 32.$$

Bundan, $x = \dfrac{64}{-16} = -4, \quad y = \dfrac{-16}{-16} = 1, \quad z = \dfrac{32}{-16} = -2.$ ◄

Agar bosh determinant nolga teng bo‘’lsa, tenglamalar sistemasi yechimga ega bo‘lmaydi yoki cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi. Ya’ni

1) $\Delta = 0$ bo‘lib, Δ_x, Δ_y, Δ_z lardan kamida bittasi nolga teng bo‘lmasa, (4.3) tengamalar sistemasi yechimga ega bo‘lmaydi,

2) $\Delta = 0$ bo‘lib, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, $\Delta_z = 0$ bo‘lsa, sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

2-misol

Ushbu sistemani Kramer usulida yeching:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 7 \\ 2x + y - 2z = 9 \\ 3x - z = 10 \end{cases}$$

► Bosh determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 12 + 0 + 9 - 0 + 4 = 0.$$

Yordamchi determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 9 & 1 & -2 \\ 10 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -7-40+0+30-0+18=1.$$

$\Delta = 0$ bo‘lib, $\Delta_x = 1 \neq 0$ bo‘lgani uchun berilgan tenglamalar sistemasi yechimga ega emas.◄

3-misol

Ushbu sistemani Kramer usulida yeching:

$$\begin{cases} x-2y+z=5 \\ 2x \quad\;\; -z=3 \\ 3x+2y-3z=1 \end{cases}$$

►Quyidagi determinantlarni tuzamiz va hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0+6+4-0+2-12=0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0+2+6-0+10-18=0,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -9-15+2-9+1+30=0,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0-18+20-0-6+4=0.$$

$\Delta = 0$ bo‘lib, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, $\Delta_z = 0$ bo‘lgani uchun sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

Bu holda 2 ta tenglamani qoldirib, erkli noma’lum, masalan, z ni tenlikning o‘ng tomoniga o‘tkazamiz.

$$\begin{cases} x-2y+z=5 \\ 2x \quad\;\; -z=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y=5-z \\ 2x \quad\;\; =3+z \end{cases}$$

Hosil bo‘lgan ikki noma’lumli tenglamalar sistemasini yana Kramer usulida yechamiz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 5-z & -2 \\ 3+z & 0 \end{vmatrix} = 6+2z,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5-z \\ 2 & 3+z \end{vmatrix} = -7+3z.$$

Demak, tenglamaning yechimi: $\left\{ \frac{z+3}{2}; \frac{3z-7}{4}; z \right\}$.◄

1.4.2 Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning matrisa usuli.

Aytaylik bizga n ta no‘malumli n ta chiziqli (4.1) tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin. Ushbu belgilashlarni kiritamiz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

U holda (4.1) sistemani matrisalarni ko‘paytirish qoidasidan foydalanib, ushbu ekvivalent shakldа yozish mumkin:

$$A \cdot X = B \tag{4.8}$$

Bu yerda A-noma’lumlar oldidagi koeffisientlardan tuzilgan matrisa, B-ozod hadlardan tuzilgan ustun matrisa, X -noma’lumlardan tuzilgan ustun matrisa

Agar A matrisa xosmas, ya’ni $\det A \neq 0$ bo‘lsa, u holda uning uchun A^{-1} teskari matrisa mavjud. (4.8) matrisali tenglamaning ikkala qismini A^{-1} ga chapdan ko‘paytirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

yoki

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

$A^{-1} \cdot A = E$, $E \cdot X = X$ ekanligini hisobga olib,

$$X = A^{-1} \cdot B \tag{4.9}$$

ni topamiz. (4.9) formula A matrisa xosmas bo‘lganda n no‘malumli n t ta chiziqli tenglamalar *sistemasi yechimining matritsali yozuvidan* iborat bo‘ladi.

4-misol

Ushbu sistemani yeching:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

►Bu yerda

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}5\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$$detA=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}=-4+2+1+4=3\neq 0,$$

$$A_{11}=1,\ A_{12}=0,\ A_{13}=2,\ A_{21}=3,\ A_{22}=3,\ A_{23}=3,\ A_{31}=2,\ A_{32}=3,\ A_{33}=4$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 1\\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$$

$$x_1=\frac{1}{3}\cdot 5+1\cdot 0+\frac{2}{3}\cdot(-1)=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1;$$

$$x_2=0\cdot 5+1\cdot 0+1\cdot(-1)=0-1=-1;$$

$$x_3=\frac{2}{3}\cdot 5+1\cdot 0+\frac{4}{3}\cdot(-1)=\frac{10}{3}-\frac{4}{3}=\frac{6}{3}=2.$$

Bundan $x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=2.$ ◄

1.4.2 Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli.

Bizga n ta noma'lumli n ta chiziqli (4.1) tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin. Uning asosiy matritsasi A ning rangi $rang(A)=r\leq n$ bo‘lsa, kengaytirilgan matritsasi B ni har doim, elementar almashtirishlar yordamida, quyidagi ekvivalent matritsaga almashtirish mumkin.

$$\begin{bmatrix}1 & \bar{a}_{12} & \dots & \bar{a}_{1r} & \bar{a}_{1\,r+1} & \dots & \bar{a}_{1n} & \bar{b}_1\\ 0 & 1 & \dots & \bar{a}_{2r} & \bar{a}_{2\,r+1} & \dots & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & \bar{a}_{r\,r+1} & \dots & \bar{a}_{rn} & \bar{b}_r\\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \bar{b}_{r+1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \bar{b}_n\end{bmatrix} \qquad (4.10)$$

Agar bu matritsada $\bar{b}_{r+1}.\bar{b}_{r+2},\ldots,\bar{b}_n$ lardan kamida bittasi noldan farqli bo‘lsa, (4.1) sistema yechimga ega emas, chunki $rang(A) \neq rang(B)$ bo‘ladi. Agar $\bar{b}_{r+1} = \bar{b}_{r+2} = \ldots = \bar{b}_n = 0$ bo‘lsa, berilgan (4.1) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi birgalikda bo‘ladi. Bu holda (4.10) matritsaning bazis satrlariga mos tenglamalarni tuzamiz.

$$\begin{cases} x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \ldots + \bar{a}_{1r}x_r + \bar{a}_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1 \\ \quad x_2 + \ldots + \bar{a}_{2r}x_r + \bar{a}_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad x_r + \bar{a}_{r\,r+1}x_{r+1} + \ldots + \bar{a}_{rn}x_n = \bar{b}_r \end{cases} \tag{4.11}$$

Hosil bo‘lgan (4.11) sistemaning yechimlari berilgan (4.1) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining ham yechimlaridir. (4.11) da $x_r, x_{r-1}, \ldots, x_2, x_1$ bazis noma’lumlarni $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ erkli nomalumlar orqali, oxirgi tenglamadan boshlab ketma-ket aniqlanadi. Agar $r = n$ bo‘lsa, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining yechimi yagona bo‘ladi.

Gauss usuli n ta noma’lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi bo‘lgan holda ham o‘rinli bo‘ladi.

3-misol

Ushbu sistemani Gauss usulida yeching:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 2y - 3z = -3 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases}$$

► Berilgan tenglamalar sistemasining kengaytirilgan matritsasini tuzamiz va ekvivalent almashtirishlar yordamida quyidagi ekvivalent matritsani hosil qilamiz.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \\ 0 & -4 & -1 & -11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Bundan sistema birgalida ekani kelib chiqadi, chunki $rang(A) = rang(B) = 3$.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \quad 4y + z = 11 \\ \qquad z = 3 \end{cases}$$

sistemaga ega bo‘ldik. Oxirgi tenglamadan boshlab, $z = 3$ ni ikkinchi tenglamaga qo‘yib, y ni topamiz:

$$4y + 3 = 11, \; y = 2.$$

Endi $y = 2$ va $z = 3$ ni 1- tenglamaga qo‘yib, x ni topamiz:

$$x + 2 + 3 = 6, \; x = 1.$$

Demak, $x = 1, y = 2, \; z = 3.$◄

Auditoriya topshiriqlari

1. Berilgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching

$$a)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -7 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 5x_1 \qquad + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad = 5 \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 7 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$$

2. Berilgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini matritsa usulida yeching

$$a)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 \qquad = -1 \\ \qquad x_2 + x_3 = -2 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ \qquad x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

3. Berilgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss usulida yeching.

$$a)\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \end{cases}$$

Shaxsiy uy topshiriqlari

1

Berilgan Δ determinant uchun a_{i2}, a_{3j} elementlarning minorlari va algebraik to‘ldiruvchilarini toping. Δ determinantni:

a) i-satr elementlari bo‘yicha yoyib;

b) j-ustun elementlari bo‘yicha yoyib;

d) i-satr elementlarini nollarga aylantirib hisoblang.

1.1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -14 \end{vmatrix}$ $\quad i = 4,\ j = 1$

1.2. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ $\quad i = 1,\ j = 3$

1.3. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ $\quad i = 4,\ j = 1$

1.4. $\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$ $\quad i = 1,\ j = 3$

1.5. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ $i=2,\ j=4$

1.6. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ $i=1,\ j=2$

1.7. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ $i=2,\ j=3$

1.8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ $i=3,\ j=1$

1.9. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ $i=4,\ j=3$

1.10. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ $i=4,\ j=2$

1.11. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$ $i=1,\ j=4$

1.12. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ $i=2,\ j=4$

1.13. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ $i=1,\ j=4$

1.14. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ $i=2,\ j=4$

1.15. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ $i=1,\ j=3$

1.16. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $i=3,\ j=2$

1.17. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $i=3,\ j=1$

1.18. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $i=2,\ j=4$

1.19. $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 2 \end{vmatrix}$ $i=2,\ j=3$

1.20. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ $i=4,\ j=3$

1.21. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ $i=4,\ j=2$

1.22. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ $i=3,\ j=3$

1.23. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ $i=2,\ j=4$

1.24. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ $i=1,\ j=4$

1.25. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ $i=3,\ j=1$

1.26. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ $i=1,\ j=3$

1.27. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$ $i=2,\ j=4$

1.28. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ $i=3,\ j=3$

1.29. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ $i=3,\ j=1$

1.30. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ $i=4,\ j=1$

2

Ikkita A va B matritsalar berilgan. Quyidagilarni toping:
a) $A\cdot B$; b) $B\cdot A$; d) A^{-1}.

2.1. $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2.2. $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$.

2.3. $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2.4. $A=\begin{bmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

2.5. $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$.

2.6. $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

2.7. $A=\begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$.

2.8. $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{bmatrix}$.

2.9. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$.

2.10. $A=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$

2.11. $A=\begin{bmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$

2.12. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{bmatrix}.$

2.13. $A=\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

2.14. $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$

2.15. $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$

2.16. $A=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 5 & 1 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$

2.17. $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$

2.18. $A=\begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$

2.19. $A=\begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$.

2.20. $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

2.21. $A=\begin{bmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{bmatrix}$.

2.22. $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 7 & -2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -3 & 5 & 0 \\ 4 & -3 & 3 \end{bmatrix}$.

2.23. $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2.24. $A=\begin{bmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

2.25. $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$.

2.26. $A=\begin{bmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

2.27. $A=\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

2.28. $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

2.29. $A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$

2.30. $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & -5 & 5 \\ 0 & -3 & 7 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$

3. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi birgalikda ekanligini tekshiring. Agar birgalikda bo‘lsa, uni

a) Kramer formulalari bo‘yicha;

b*)* matritsa usulida ;

d) Gauss usulida yeching.

3.1. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=7, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3=6; \end{cases}$ 3.2. $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=3, \\ x_1+x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-3; \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=12, \\ x_1+2x_2+4x_3=6, \\ 5x_1+x_2+2x_3=3; \end{cases}$ 3.4. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=-4, \\ x_1+3x_2-x_3=11, \\ x_1-2x_2+2x_3=-7; \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=12, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=6, \\ 2x_1-x_2-x_3=-9; \end{cases}$ 3.6. $\begin{cases} 8x_1+3x_2-6x_3=-4, \\ x_1+x_2-x_3=2, \\ 4x_1+x_2-3x_3=-5; \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} 4x_1+x_2-3x_3=9, \\ x_1-x_2-x_3=-2, \\ 8x_1+3x_2-6x_3=0; \end{cases}$ 3.8. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=33, \\ 7x_1-5x_2=24, \\ 4x_1+x_3=39; \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=12, \\ 7x_1-5x_2+x_3=-33, \\ 4x_1+x_3=-7; \end{cases}$ 3.10. $\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=6, \\ 5x_2+4x_3=-20, \\ 3x_1-2x_2+5x_3=-22; \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10; \end{cases}$ 3.12. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1; \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8; \end{cases}$ 3.14. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4; \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22; \end{cases}$ 3.16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15; \end{cases}$

3.17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3; \end{cases}$ 3.18. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9; \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19; \end{cases}$ 3.20. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 11, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16; \end{cases}$

3.21. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = -3; \end{cases}$ 3.22. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ 3x_1 + 4x_2 = 15; \end{cases}$

3.23. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = 21, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 15, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9; \end{cases}$ 3.24. $\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 4x_3 = -8, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5; \end{cases}$

3.25. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -9; \end{cases}$ 3.26. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 6, \\ 5x_1 - 8x_2 - 4x_3 = -9, \\ 4x_1 + x_3 = 39; \end{cases}$

3.27. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12, \\ 7x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 38, \\ 4x_1 + x_3 = -7; \end{cases}$ 3.28. $\begin{cases} 7x_2 + 4x_3 = 20, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 26, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -14; \end{cases}$

3.29. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = 11, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 10; \end{cases}$ 3.30. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 = 5, \\ x_1 - 9x_2 + 13x_3 = -15, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -39. \end{cases}$

II BOB VEKTORLAR ALGEBRASI ELEMENTLARI

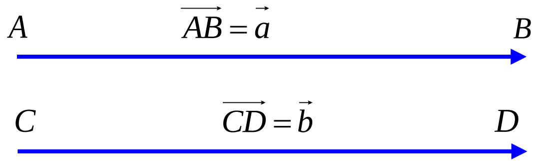
2.1 Vektorlar. Vektorlar ustida chiziqli amallar. Chiziqli bog‘liq va chiziqli erkli vektorlar. Bazis

Vektorlar. Asosiy tushunchalar. Yo‘nalgan kesma yoki nuqtalarning tartiblangan $\{A,B\}$ jufti *vektor* deyiladi; odatda birinchi nuqtani vektorning boshi, ikkinchi nuqtani esa uning oxiri (uchi) deyiladi(1-chizma) va $\overrightarrow{AB}$ kabi belgilanadi. Boshi va oxiri ko‘rsatilmagan vektor lotin alifbosining kichik harflari bilan belgilanadi: $\vec{a}$, $\vec{b}$, …

1-chizma

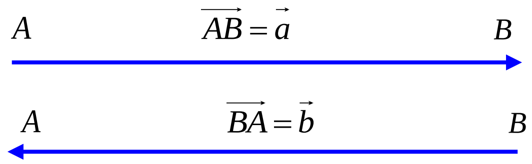
Vektorning *moduli* yoki *uzunligi* deb, vektorning boshi va oxiri orasidagi masofaga aytiladi. $|\overrightarrow{AB}|$ yoki $|\vec{a}|$ kabi belgilanadi. Bir to‘g‘ri chiziqda yoki parallel to‘g‘ri chiziqlarda yotuvchi vektorlar *kollinear vektorlar* deyiladi. Bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlarga *komplanar vektorlar* deyiladi. Boshi va oxiri bir nuqtada bo‘lgan vektor *nol vektor* deyiladi.

Uzunliklari teng, kollinear va yo‘nalishlari bir xil bo‘lgan ikki vektor *teng vektorlar* deb ataladi, boshqacha aytganda, agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uchun quyidagi uchta shart $\left(|\vec{a}|=|\vec{b}|,\ \vec{a}\parallel\vec{b},\ \vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}\right)$ bajarilsa, u holda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar teng deyiladi va $\vec{a}=\vec{b}$ deb yoziladi(2-chizma).



2-chizma

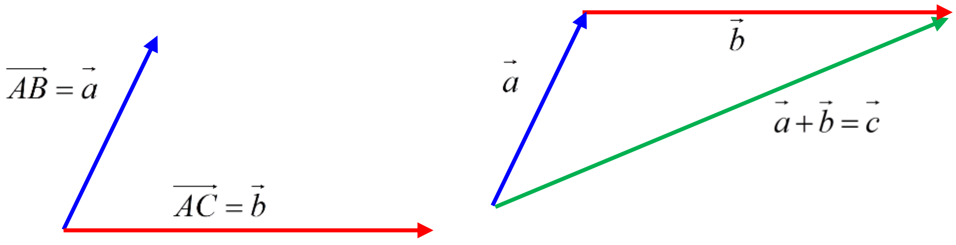
Uzunliklari teng, kollinear va yo‘nalishlari har xil bo‘lgan ikki vektorga *qarama-qarshi vektorlar* deyiladi, boshqacha aytganda, agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uchun quyidagi uchta shart $\left(|\vec{a}|=|\vec{b}|,\ \vec{a}\parallel\vec{b},\ \vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}\right)$ bajarilsa, u holda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar qarama-qarshi vektorlar deyiladi va $\vec{a}=-\vec{b}$ deb yoziladi.



3-chizma

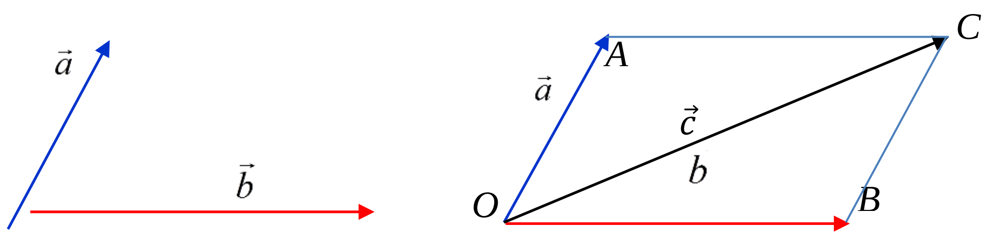
Vektorlar ustida chiziqli amallar.

1) Vektorlarni qo‘shish va ayrish. Vektorlar o‘z-o‘ziga parallel ko‘chirilsa, berilgan vektorga teng vektor hosil bo‘ladi. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorning yig‘indisini topish uchun $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ vektorning oxiri $\vec{b}$ vektorning boshi bilan ustma-ust tushadigan qilib $\vec{b}$ vektorni o‘z-o‘ziga parallel ko‘chiramiz. Hosil bo‘lgan vektorni $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$ deb belgilaymiz (4-chizma). O nuqta bilan B nuqtani tutashtiramiz. Natijada hosil bo‘lgan $\overrightarrow{OB}=\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig‘indisi deyiladi va $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ kabi yoziladi. Vektorlarni bunday qo‘shish qoidasi «*uchburchak qoidasi*» deb ataladi(4-chizma).



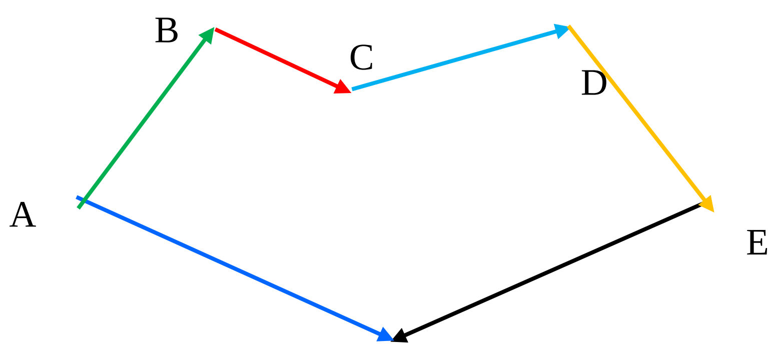
4-chizma

$\vec{a},\vec{b}$ vektorlar o‘zaro kollinear bo‘lmagan vektor bo‘lsin. Ularning boshini bitta O nuqtaga o‘z-o‘ziga parallel ravishda ko‘chiramiz, so‘ngra tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan iborat parallelogramm chizamiz. Uning O nuqtaga qarama-qarshi uchini C deb $\overrightarrow{OC}$ vektorni qaraymiz. Ravshanki, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. Vektorlar yig‘indisini bunday geometrik yasashga odatda «*parallelogramm qoidasi*» deb yuritiladi (5-chizma).



5-chizma.

Bizga bir necha $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{EN}$ vektorlar berilgan bo‘lsin. Bu vektorlarning har biri ketma-ket kelgan jufti uchun birinchisining oxiri bilan ikkinchisining boshi ustma-ust tushsin (6-chizma). Bu holda vektorlar siniq chiziq tashkil qilib, yig‘indi vektor ularning yopuvchisiga teng, ya’ni $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EN}=\overrightarrow{AN}$



N

6-chizma

$\vec{a},\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi deb shunday $\vec{x}$ vektorga aytiladki, uni $\vec{b}$ vektorga qo‘shganda $\vec{a}$ vektor hosil bo‘ladi, ya’ni agar $\vec{x}$ vektor uchun ushbu $\vec{x}+\vec{b}=\vec{a}$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda $\vec{x}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi deyiladi hamda $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$ deb yoziladi.

Agar «kamayuvchi» $\vec{a}$ va «ayriluvchi» $\vec{b}$ vektorlar berilsa, u holda ushbu $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$ munosabatni qanoatlantiruvchi $\vec{x}$ vektor doim mavjud. $\overrightarrow{BC}=\vec{x}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$. Demak, $\vec{a}-\vec{b}$ ayirma vektorni chizish uchun bir nuqtadan chiquvchi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni chizib, $\vec{b}$ vektorning uchidan $\vec{a}$ vektorning uchiga boruvchi vektorni chizish kifoya. Shunday qilib, vektorlarni ayirish amali hamma vaqt ma’noga ega.

2) Vektorni songa ko‘paytirish.

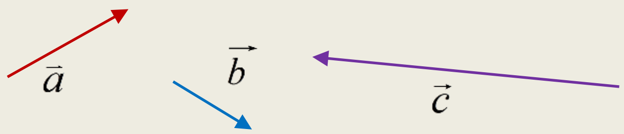
$\vec{a}$ vektorni $\lambda \in R$ soniga ko‘paytmasi deb shunday $\vec{b}$ vektorga aytiladiki, bu vektorning uzunligi $\left|\vec{b}\right| = \lambda \cdot \left|\vec{a}\right|$ teng bo‘lib, yo‘nalishi esa $\lambda > 0$ bo‘lganda $\vec{a}$ vektor bilan bir xil yo‘nalgan, $\lambda < 0$ bo‘lganda $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi yo‘nalgan bo‘ladi.

1-misol.

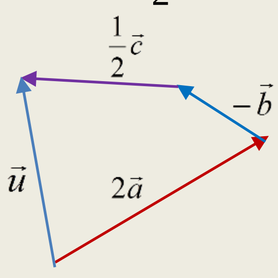
Berilgan $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarga asosan quyidagi vektorni yasang:

$$\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

▶



Bir nuqtadan boshlab $2\vec{a}$, $-\vec{b}$ va $\frac{1}{2}\vec{c}$ vektorlarni ketma- ket joylashtiramiz:



Izlangan $2\vec{a}$ vektor hosil bo‘ladi,◄

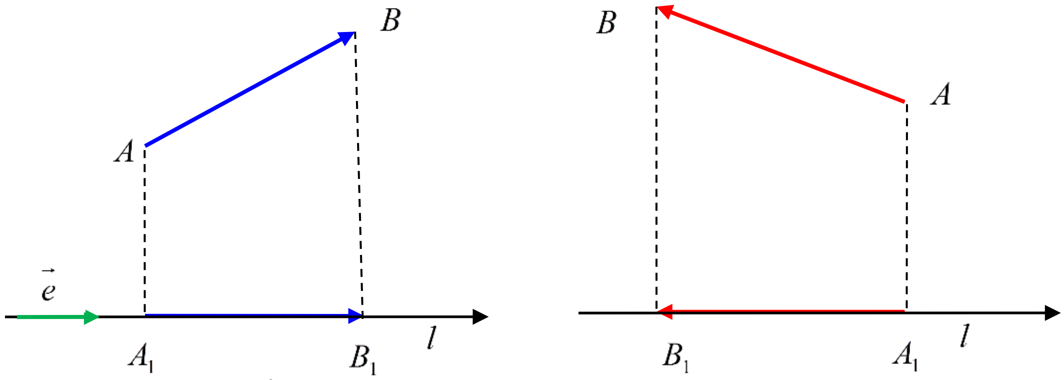
Vektorning koordinatalari. Musbat yo‘nalishi tanlab olingan l to‘g‘ri chiziq *o‘q* deb ataladi. O‘qning yo‘nalishini odatda strelka bilan ko‘rsatiladi (7-chizma), bu strelkaning yo‘nalishi l to‘g‘ri chiziqdagi munosabat yo‘nalishni aniqlovchi $\vec{e}$ vektor yo‘nalishi bilan bir xil bo‘ladi.

7-chizma.

$$\overrightarrow{OE} = \vec{e}, \qquad \left|\overrightarrow{OE}\right| = |\vec{e}| = 1.$$

Yo‘nalish o‘qdagi musbat yo‘nalish bilan bir xil bo‘lgan hamda uzunligi birga teng bo‘lgan vektor ($\vec{e}$ vektor) o‘qning *orti (bazisi)* deyiladi.

$\overrightarrow{AB}$ vektorning l o‘qdagi proeksiyasi deb, shunday $\overrightarrow{A_1B_1}$ vektorning uzunligiga aytiladiki, unda A_1 va B_1 lar mos ravishda A va B nuqtalarning l o‘qdagi ortogonal proeksiyalari bo‘lib, bu uzunlik $\overrightarrow{A_1B_1}$ va $\vec{e}$ vektorlarning yo‘nalishlari bir xil bo‘lganda musbat ishora bilan, aks holda manfiy ishora bilan olinadi (8-chizma).



$\Pr_l \overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| > 0 \qquad \Pr_l \overrightarrow{AB} = -\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| < 0$

8-chizma.

$\overrightarrow{AB}$ vektorning l o‘qdagi proeksiyasini $\quad Pr_l\overrightarrow{AB} = \pm\left|A_1B_1\right|.$ (5.1)

Bundan $\overrightarrow{AB}$ vektor o‘qqa perpendikulyar bo‘lgandagina uning proeksiyasi nolga teng degan xulosa kelib chiqadi. $\overrightarrow{A_1B_1} = x \cdot \vec{e}$ tenglikdagi x son $\overrightarrow{AB}$ vektorning proeksiyasidir, ya’ni $x = Pr_l\overrightarrow{AB}$.

Vektorning o‘qdagi proeksiyasining xossalari:

1. $Pr_l\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\ldots+\vec{d}\right) = Pr_l\vec{a}+Pr_l\vec{b}+Pr_l\vec{c}+\ldots+Pr_l\vec{d}$

2. $Pr_l\left(\lambda\cdot\vec{a}\right)=\lambda\cdot Pr_l\vec{a}$, $\lambda\neq 0$.
3. Teng vektorlarning bitta o‘qqa proeksiyalari o‘zaro tengdir.
4. $Pr_l\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cdot cos\varphi$, bu yerda φ - $\vec{a}$ va $\vec{e}$ vektorlar orasidagi burchak, $0\le\varphi\le\pi$.

Agar tekislikda (yoki fazoda) koordinatalar boshi deb ataluvchi nuqta, o‘zaro perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar, ularda musbat yo‘nalish hamda uzunlik birligi (umuman aytganda, har bir yo‘nalishdagi o‘qda har xil) tanlangan bo‘lsa, tekislikda (fazoda) *Dekart koordinatalar sistemasi* berilgan deyiladi. O‘qlar mos ravishda abssissalar o‘qi, ordinatalar o‘qi, (aplikatalar o‘qi) deb yuritiladi. Tegishli o‘qlar koordinatalar o‘qlari deyiladi. Faraz qilaylik, tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi berilgan bo‘lsin (uni qisqacha *Oxy* sistema deb ham yuritiladi) va $\vec{a}$ vektor koordinatalar boshi *O* nuqtadan chiqqan bo‘lsin.

$\vec{a}$ *vektorning koordinatalari* deb uning koordinata o‘qlaridagi proeksiyalariga aytiladi, ya’ni

$$x=Pr_{Ox}\vec{a},\quad y=Pr_{Oy}\vec{a}.$$

Agar Oxy sistemada $\vec{a}=\{x_1,y_1\}$, $\vec{b}=\{x_2,y_2\}$ bo‘lsa, $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}\{x_1+x_2,\ y_1+y_2\}$ bo‘ladi.

Agar *Oxy* sistemada $\vec{a}$ vektorning koordinatalari $\{x,y\}$ bo‘lsa, $\lambda\cdot\vec{a}$ vektorning shu sistemadagi koordinatalari $\{\lambda x,\lambda y\}$ bo‘ladi.

Agar *Oxy* sistemada $\overrightarrow{AB}$ vektor boshining koordinatalari $\{x_1,y_1\}$ va oxiri $\{x_2,y_2\}$ bo‘lsa, $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalari $\{x_2-x_1\ ,\ y_2-y_1\}$ bo‘ladi , ya’ni

$$\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1\ ,y_2-y_1\}\tag{5.2}$$

2-misol

Agar $\vec{a}\{5,4\}$ vektor boshining koordinatalari $A(-2,3)$ bo‘lsa, uning oxirining koordinatalarini aniqlang.

► $\vec{a}\{5,4\}$ vektor oxirining koordinatalari $B(x,y)$ bo‘lsin. U holda $x-(-2)=5,\ y-3=4\Leftrightarrow x=5-2=3,\ \ y=4+3=7$ bo‘ladi. Demak, $B(3,7)$.◄

3-misol

Agar $\vec{b}\{2,-1\}$ vektor oxirining koordinatalari B(3,2) bo‘lsa, uning boshining koordinatalarini aniqlang.

► $\vec{b}\{2,-1\}$ dan

$$3-x=2,\quad 2-y=-1,\quad x=3-2=1,\quad y=2+1=3.$$

Bundan $A(1,3)$.◄

2.1.1 Chiziqli bog‘liq va chiziqli erkli vektorlar sistemasi. Bazis.

Bizga n ta $\vec{a_1},\ \vec{a_2},\ \vec{a_3},\ldots,\vec{a_n}$ vektorlar va n ta $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ldots,\alpha_n$ sonlar berilgan bo‘lsin bu sonlarning mos vektorlarga ko‘paytmalarining yig‘indisini tuzamiz.

$\alpha_1\cdot\vec{a_1}+\alpha_2\cdot\vec{a_2}+\alpha_3\cdot\vec{a_3}+\ldots+\alpha_n\cdot\vec{a_n}$ ko‘paytmaga vektorlar sistemasining chiziqli kombinatsiyasi deyiladi.

$\vec{a_1},\ \vec{a_2},\ \vec{a_3},\ldots,\vec{a_n}$ vektorlar sistemasi uchun kamida bittasi noldan farqli shunday n ta α_1, α_2, α_3, $\ldots,\alpha_n$ sonlar mavjud bo‘lsaki, ular uchun vektorlar sistemasining chiziqli kombinatsiyasi nolga teng, ya’ni

$$\alpha_1\cdot\vec{a_1}+\alpha_2\cdot\vec{a_2}+\alpha_3\cdot\vec{a_3}+\ldots+\alpha_n\cdot\vec{a_n}=0 \qquad (5.3)$$

bo‘lsa, bunday vektorlar sistemasiga *chiziqli bog‘liq sistema* deb ataladi. Aks holda $\vec{a_1},\ \vec{a_2},\ \vec{a_3},\ldots,\vec{a_n}$ vektorlar *chiziqli erkli* deyiladi, ular uchun (5.3) tenglik faqat $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\ldots=\alpha_n=0$ bo‘lgandagina o‘rinli bo‘ladi.

Agar vektorlar chiziqli bog‘liq bo‘lsa, (5.3) dagi biror vektorni boshqa vektorlar orqali ifodalab olish mumkin. $\alpha_1\cdot\vec{a_1}$ ifodani qoldirib qolgan ifodalarni tenglikning o‘ng tomoniga o‘tkazib $\alpha_1\neq 0$ ga bo‘lsak,

$$\vec{a}_1=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\cdot\vec{a_2}-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\cdot\vec{a_3}-\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\cdot\vec{a_4}-\ldots--\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\cdot\vec{a_n}$$

va belgilash kiritsak, bu vektor qolgan vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘ladi:

$$\vec{a_1}=\beta_2\cdot\vec{a_2}+\beta_3\cdot\vec{a_3}+\beta_4\cdot\vec{a_4}+\ldots+\beta_n\cdot\vec{a_n}\ . \qquad (5.6)$$

Agar vektorlardan kamida biri qolgan vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lsa, u holda bu vektorlar chiziqli bog‘liqdir. Aks holda barcha vektorlar chiziqli erkli bo‘ladi.

Ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorni n ta chiziqli erkli $\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3},\ldots,\vec{e_n}$ vektorlarning chiziqli kombinasiyasi ko‘rinishida ifodalash mumkin bo‘lsa, u holda shu n ta vektorlar fazoning *bazisi* deyiladi.

Bazisni hosil qiladigan vektorlar soni *fazoning o‘lchami* deb ataladi. Bazisga kiruvchi vektorlar *bazis vektorlar* deb ataladi.

1. To‘g‘ri chiziqning o‘lchami 1 ga teng, chunki to‘g‘ri chiziqda istalgan $\vec{e}$ vektor bazis hosil qiladi, qolgan vektorlar shu bazis vektor orqali ifodalanadi:

$$\vec{a}=\alpha\cdot\vec{e}\ ,\qquad \alpha\neq 0\ . \quad \text{(1 o‘lchovli fazo)}$$

2. Tekislikning o‘lchami 2 teng, chunki tekislikda kollinear bo‘lmagan istalgan ikkita $\vec{e}_1$ va $\vec{e}_2$ vektor chiziqli erkli bo‘lib, bazis hosil qiladi, qolgan vektorlarni esa ular orqali ushbu ko‘rinishda ifodalash mumkin:

$$\vec{a} = \alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 \,, \quad \left(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0\right). \qquad \text{(2 o‘lchovli fazo)}$$

3. Fazoda

$$\vec{a} = \alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3 \,, \quad \left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0\right). \qquad \text{(3 o‘lchovli fazo)}$$

Vektorlarni bazis vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida ifodalashga *bazis bo‘yicha yoyish* deyiladi.

Ba’zis vektorning uzunliklari har xil bo‘ladi Biz amaliyotda birlik uzunlikka ega bo‘lgan birlik vektorlardan tashkil topgan bazislar bilan shug‘ullanamiz. Bazis vektorlar bir biriga nisbatan har xil joylashgan (har xil burchak ostida) bo‘ladi. Biz koordinata o‘qlarida yotuvchi, yo‘nalishi koordinata o‘qlarining musbat yo‘nalishi bilan ustma-ust tushuvchi birlik uzunlikka ega bo‘lgan va o‘zaro perpendikulyar bo‘lgan $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ birlik bazis vektorlar bilan shug‘ullanamiz Bu vektorlar *ortonormal vektorlar* yoki *ortlar* deyiladi.

$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ vektorning o‘qlaridagi proeksiyalari mos ravishda a_x, a_y, a_z bilan belgilasak, uning birlik–bazis vektorlar(ortlar) orqali yozuvi

$$\vec{a}\left(a_x, a_y, a_z\right) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \tag{5.7}$$

dan iborat bo‘ladi.

Bu ifodaga $\vec{a}$ vektorning $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ba’zis vektorlar yoki koordinata o‘qlari bo‘yicha yoyilmasi deyiladi

Koordinata boshidan chiqqan vektorga *radius vektor* deyiladi.

4-misol

Agar $\vec{a}\{-1,4\}$, $\vec{b}\{2,-1\}$, $\vec{c}\{3, 5\}$ vektorlar koordinatalari bilan berilgan bo‘lsa quyidagi vektorlarning koordinatalari aniqlansin:

$$a)\ \frac{\vec{c} - 2\vec{b}}{2}, \quad b)\ \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \vec{c}.$$

► $$a)\frac{\vec{c} - 2\vec{b}}{2} = \vec{d}\left\{\frac{3 - 2\cdot 2}{2}, \ \frac{5 - 2\cdot(-1)}{2}\right\} = \vec{d}\{-0.5, 3.5\},$$

$$b)\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \vec{c} = \vec{s}\left\{\frac{-1+2}{2} - 3, \ \frac{4 + (-1)}{2} - 5\right\} = \vec{s}\{-2.5, -3.5\}.$$ ◄

Auditoriya topshiriqlari

1. Agar $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ va $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$ vektorlar ABC uchburchakning tomonlari bo‘lsa, u holda bu uchburchakning $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BM}$ va $\overrightarrow{CP}$ medianalarini $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar orqali ifodalang.

2. $\vec{a}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$ va $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ vektorlar berilgan bo‘lsa, $\vec{u}=2\vec{a}-3\vec{b}$ va $\vec{v}=-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$ vektorlarni aniqlang. Dekart koordinatalar sistemasida $\vec{u}$ va $\vec{v}$ vektorlarni yasang.

3. $\vec{a}(2;-3;4)$, $\vec{b}(5;3;-2)$ vektorlarga qurilgan parellelogramning diagonallarini ifodalovchi vektorlarni toping.

4. $ABCD$ to‘g‘rito‘rtburchakning tomonlari uzunliklari $AB=4,\ BC=3$ bo‘lib, A va B uchidan $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{BC}$ vektorlar yo‘nalishida $\vec{a}$ va $\vec{b}$ birlik vektorlar qo‘yilgan.

1) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$ va $\overrightarrow{DB}$ vektorlarni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang.

2) N va P nuqtalar mos ravishda BC va CD tomonlarning o‘rtasi bo‘lsa, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AP}$ va $\overrightarrow{PN}$ vektorlarni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang.

5. Radiusi $R=3$ bo‘lgan aylananing $90°$ li AB yoyini C nuqta orqali $AC:CB=3:2$ nisbatda AC va CB yoylarga bo‘lingan. Agar $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ va $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ bo‘lsa, $\overrightarrow{OC}$ vektorni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang.

6. To‘g‘riburchakli $ABCD$ trapetsiyaning asoslari $AD=4,\ BC=2$ bo‘lib, D buchagi $45°$ ga teng. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{AD}$ vektorlarni $\overrightarrow{CD}$ vektor bilan aniqlangan l o‘qga proyeksiyalarini toping.

7. Asosi ychburchakdan iborat bo‘lgan SABC piramidada $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$ va $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$. Agar M nuqta ΔABC ning og‘irlik markazi bo‘lsa, $\overrightarrow{SM}$ vektorni bu vektorlar orqali ifoda qiling.

8. Uchburchakning $A(1;2;-1)$ uchi, $\overrightarrow{AB}=\{-2;1;4\}$ va $\overrightarrow{BC}=\{3;-1;4\}$ tomonlari yotgan vektorlar berilgan bo‘lsa, uchburchakning qolgan uchlari va $\overrightarrow{AC}$ vektorni toping.

Mustaqil yechish uchun testlar

1. Agar $A(2;0;4)$, $B(5;2;4)$, $C(-2;6;5)$, $D(-5;6;3)$ berilgan bo‘lsa, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ vektorni toping

A) $\vec{a}(0;2;-2)$; B) $\vec{a}(5;14;10)$; C) $\vec{a}(4;7;-2)$; D) $\vec{a}(7;1;0)$

2. Agar $A(2;0;4)$, $B(5;2;4)$, $C(-2;6;5)$, $D(0;6;3)$ berilgan bo‘lsa, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$ vektorni toping

A) $\vec{a}(6;2;2)$; B) $\vec{a}(0;-2;-2)$; C) $\vec{a}(4;7;-2)$; D) $\vec{a}(7;1;0)$

3. $A(1,-2,3)$, $B(3,4,-6)$ berilgan bo‘lsa, $\overrightarrow{AB}$ vektor uzunligini toping

A) 7; B) 11; C) 13; D) 8

4. A(-4;0;2), B(-1;2;-2), C(6;-2;4) uchburchak uchlari koordinatalari bo'lsa, mediana chizig'ini ifodalovchi $\overline{BE}$ vektor koordinatalarini aniqlang

$A)$ $\{2;-3;5\}$; B) $\{2;3;-5\}$; $C)$ $\{-2;3;-5\}$; $D)$ $\overline{a}(7;1;0)$

5. $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3,\ldots,\vec{a}_n$ vektorlarning … bittasini qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalash mumkin …, bu sistema chiziqli bog'liq sistema bo'ladi.

A) kamida, bo'lsa; B) ixtiyoriy, bo'lsa;

D) kamida, bo'lmasa; D) ixtiyoriy, bo'lmasa;

6. $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3,\ldots,\vec{a}_n$ vektorlarning … bittasini qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalash mumkin …, bu sistema chiziqli erkli sistema bo'ladi

A) kamida, bo'lsa; B) ixtiyoriy, bo'lsa;

D) kamida, bo'lmasa; D) ixtiyoriy, bo'lmasa;

2.2 Kesmani berilgan nisbatda bo'lish. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi

2.2.1 Ikki nuqta orasidagi masofa. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish

a) *Ikki nuqta orasidagi masofa*. Fazoda ikkita ixtiyoriy $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqta berilgan bo'lsin. Bu nuqtalar orasidagi masofani topish bilan shug'ullanamiz. A, B nuqtalarni koordinatalar boshi O nuqta bilan tutashtirib, bu nuqtalarning radius-vektorlarini yasaymiz. Izlanayotgan masofani $d(A,B)$ bilan belgilaymiz, ya'ni $\left|\overrightarrow{AB}\right| = d(A,B)$. Bu holda $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ $\overrightarrow{OA}$ va $\overrightarrow{OB}$ radius-vektorlarning koordinatalari mos ravishda $\overrightarrow{OA} = \{x_1, y_1, z_1\}$,$\overrightarrow{OB} = \{x_2, y_2, z_2\}$ bo'lgani uchun $\overrightarrow{AB}$ vektorning to'g'ri burchakli $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ bazisga nisbatan koordinatalari quyidagicha bo'ladi:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1\ , y_2 - y_1\ , z_2 - z_1\} \iff \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\cdot\vec{e}_1 + (y_2 - y_1)\cdot\vec{e}_2 + (z_2 - z_1)\cdot\vec{e}_3$$

bundan

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (6.1)$$

ni hosil qilamiz. $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ esa A va B nuqtalar orasidagi $d(A, B)$ masofa bo'lgani uchun

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Agar tekislikda ikkita $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ nuqta berilgan bo'lsa, ular orasidagi masofa

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (6.2)$$

formula bilan aniqlanadi.

b) *Kesmani berilgan nisbatda bo'lish.* $A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar fazodagi ikkita ixtiyoriy har xil nuqta bo'lsin.

A va B nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi C uchun

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB} \tag{6.3}$$

tenglik o'rinli. (5.5) da C nuqta $[AB]$ kesmaning ichki nuqtasi bo'lsa, $\lambda > 0$, C nuqta $[AB]$ kesmaning tashqi nuqtasi bo'lsa, $\lambda < 0$ bo'ladi.

$[AB]$ kesmani berilgan nisbatda bo'lish masalasi quyidagicha aniqlanadi: $A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar va λ son berilgan. (A, B) to'g'ri chiziqda yotuvchi va (6.3) tenglikni qanoatlantiruvchi C nuqtaning koordinatalari topilsin.

Ravshanki, (6.3) dan $\left|\overrightarrow{AC}\right| = |\lambda| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|$, bundan

$$|\lambda| = \frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{CB}\right|} \tag{6.4}$$

Shuning uchun biz qarayotgan masala (AB) to'g'ri chiziqda yotib, $[AB]$ kesmani $\lambda > 0$ bo'lganda ichkarida, $\lambda < 0$ bo'lganda tashqaridan $\lambda : 1$ nisbatda bo'luvchi C nuqtaning koordinatalarini topishdan iboratdir.

C nuqtaning Dekart koordinatalarini $\{x, y, z\}$ bilan belgilaylik. U holda (6.3) tenglikka ko'ra ushbu tengliklar sistemasini hosil qilamiz:

$$x - x_1 = \lambda \cdot (x_2 - x), \ y - y_1 = \lambda \cdot (y_2 - y), \ z - z_1 = \lambda \cdot (z_2 - z)$$

$\lambda \neq -1$ ekanini hisobga olib, C nuqtaning koordinatalari uchun bundan quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda}, \ y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda \cdot z_2}{1 + \lambda} \tag{6.5}$$

Agar $\lambda = 1$ bo'lsa, (5.6) dan ushbu formulaga ega bo'lamiz.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2} \tag{6.6}$$

Bu berilgan kesma o'rtasining koordinatalarini beradi. Agar $[AB]$ kesma tekislikda berilgan bo'lsa, uni λ nisbatda bo'lish formulalari

$$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda}$$

ko'rinishda bo'ladi.

1-misol

Oxirgi nuqtalari $A(-1; 8; -3)$ va $B(9; -7; 2)$ bo'lgan kesma P_1, P_2, P_3 va P_4 nuqtalar bilan teng beshta bo'lakka bo'lingan bo'lsa P_1 va P_3 nuqtalarning koordinatalarini toping.

► $AP_1 : P_1B = 1:4$ bo‘lgani uchun, $\lambda = \frac{1}{4}$. (6.5) formulaga ko‘ra, $P_1(x_1;\ y_1; z_1)$ koordinatalari

$$x_1 = \frac{4\cdot(-1)+9}{4+1} = 1,\quad y_1 = \frac{4\cdot 8+(-7)}{4+1} = 5,\quad z_1 = \frac{4\cdot(-3)+2}{4+1} = -2.$$

$AP_3 : P_3B = 3:2$ bo‘lgani uchun, $\lambda = \frac{3}{2}$. (6.5) formulaga ko‘ra, $P_3(x_3;\ y_3; z_3)$ koordinatalari

$$x_3 = \frac{2\cdot(-1)+3\cdot 9}{2+3} = 5,\ y_1 = \frac{2\cdot 8+3\cdot(-7)}{2+3} = -1,\ z_1 = \frac{2\cdot(-3)+3\cdot 2}{2+3} = 0.$$

Demak, $P_1(1;\ 5;-2)$ va $P_3(5;-1;\ 0)$.◄

2.2.2 Vektorlarni skalyar ko‘paytirish

Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ *vektorning skalyar ko‘paytmasi* deb, bu vektorlar uzunliklarini ular orasidagi burchak kosinusi bilan ko‘paytmasiga teng bo‘lgan songa aytiladi va $(\vec{a},\vec{b})$ yoki $\vec{a}\cdot\vec{b}$ bilan belgilanadi.

Ta’rifga ko‘ra,

$$(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\varphi \tag{6.7}$$

Skalyar ko‘paytma tushunchasining manbai mexanikadir. Haqiqatan, agar $\vec{a}$ ozod vektor qo‘yilgan nuqta $\vec{b}$ vektorning boshidan oxiriga siljuvchi kuchni tasvirlasa, bu kuch bajargan A ish ushbu tenglik bilan aniqlanadi:

$$A = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\varphi$$

2-misol

Berilgan $\vec{F} = \{6,-2,1\}$ kuchning to‘g‘ri chiziq bo‘ylab $A(3,4,-2)$ nuqtadan $B(4,-2,-3)$ nuqtaga siljishida bajargan ishni hisoblang

► $\overrightarrow{AB} = \{x, y, z\}$ vektorning koordinatalarini aniqlaymiz. Buning uchun $x = x_B - x_A,\ y = y_B - y_A,\ z = z_B - z_A$ formulalarga A va B nuqtalarning koordinatalarini qo‘yib $x = 4-3 = 1,\ y = -2-4 = -6,\ z = -3+2 = -1$ larni topamiz.

Demak, $\overrightarrow{AB} = \{1,-6,-1\}$. $\vec{F}$ kuch ta’siri ostida bajarilgan ish o‘tilgan $\overrightarrow{AB}$ yo‘l bilan $\vec{F}$ kuchning skalyar ko‘paytmasiga tengligidan, ya’ni ish $\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$ ga teng. Shuni hisoblaymiz:

$$\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = \left(6\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3\right)\cdot\left(\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 - \vec{e}_3\right) = 6\cdot 1 + (-2)\cdot(-6) + \cdot(-1) = 6+12-1 = 17.$$

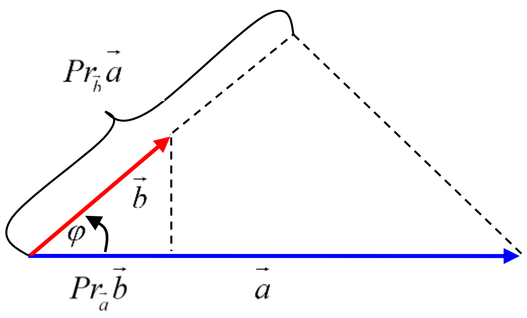
Demak, $A = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = 17$. ◄

Agar $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ko'paytmani $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\varphi$ ko'rinishda yozib, $|\vec{b}|\cdot cos\varphi = Pr_{\vec{a}}\vec{b}$ ekanini e'tiborga olsak, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot Pr_{\vec{a}}\vec{b}$ ni hosil qilamiz.

$|\vec{a}|\cdot cos\varphi = Pr_{\vec{b}}\vec{a}$ ekanligini e'tiborga olsak, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\cdot Pr_{\vec{b}}\vec{a}$ ni hosil qilamiz. Demak,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot Pr_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot Pr_{\vec{b}}\vec{a} \qquad (6.8)$$

formulalar o'rinli. Boshqacha aytganda, ikki vektorning skalyar ko'paytmasi ulardan birining uzunligi miqdori bilan ikkinchisining shu vektor yo'nalishidagi proeksiysi ko'paytmasiga teng.



1-chizma.

Agar ikki vektor orasidagi burchak $\frac{\pi}{2}$ ga teng bo'lsa, ular *ortogonal vektorlar* deyiladi.

3-misol

Agar $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar koordinatalari bilan berilgan, ya'ni:

$$\vec{a}=\vec{i}-4\vec{j}+8\vec{k}\ ;\ \vec{b}=4\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}\ ;\ \vec{c}=2\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}\ .$$

bo'lsa $(\vec{b}+\vec{c})$ vektorning $\vec{a}$ vektordagi proyeksiyasini toping.

► $\vec{b}+\vec{c}=6\vec{i}+7\vec{j}+4\vec{k}=\vec{d}$, (6.8) dan $\mathrm{Pr}_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})=\mathrm{Pr}_{\vec{a}}\vec{d}=\frac{\vec{d}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}$ formulani hosil qilamiz. $\mathrm{Pr}_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})=\frac{6\cdot1+7\cdot(-4)+4\cdot8}{\sqrt{1^2+(-4)^2+8^2}}=\frac{10}{9}$. ◄

Skalyar ko'paytmaning bir qator eng sodda xossalarini keltiramiz.

1-teorema. *Agar $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ bo'lsa, u holda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar ortogonal bo'ladi.*

2-teorema. *Har qanday vektorning shu vektorning o‘ziga skalyar ko‘paytmasi bu vektorning uzunligi kvadratiga teng, ya’ni*

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2 \tag{6.9}$$

3-teorema. *Skalyar ko‘paytma o‘rin almashtirish qonuniga bo‘ysunadi, ya’ni ixtiyoriy ikki* $\vec{a}$ *va* $\vec{b}$ *vektorlar uchun* $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ *munosabat o‘rinli.*

4-teorema. *Skalyar ko‘paytma skalyar ko‘paytuvchiga nisbatan gruppalash qonuniga bo‘ysunadi, ya’ni* $\left(\lambda\cdot\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\left(\lambda\cdot\vec{b}\right)=\lambda\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ *munosabatlar o‘rinli.*

5-teorema. *Skalyar ko‘paytma qo‘shishga nisbatan taqsimot qonuniga bo‘ysunadi, ya’ni ixtiyoriy uchta* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *va* $\vec{c}$ *vektorlar uchun ushbu tenglik o‘rinli:*

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

Skalyar ko‘paytmaning Dekart koordinatalar sistemasidagi formulasi

6-teorema. *Dekart koordinatalar sistemasida* $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ *va* $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$ *vektorlar berilgan bo‘lsa, bu vektorlarning skalyar ko‘paytmasi ularning mos koordinatalar ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng, ya’ni*

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2 \tag{6.10}$$

Agar $\vec{a}=\{x_1,y_1\}$ *va* $\vec{b}=\{x_2,y_2\}$ *bo‘lsa,*

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2 \tag{6.11}$$

bo‘ladi.

$\vec{a}=\{x_1,y_1\}$ vektorning uzunligi koordinatalarda

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2} \tag{6.12}$$

$\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ vektorning uzunligi esa

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{6.13}$$

formuladan topiladi.

Vektorlar orasidagi burchak koordinatalari orqali (Dekart sisitemasida), ya’ni skalyar ko‘paytma ta’rifiga ko‘ra osongina topiladi: $\vec{a}=\{x_1,y_1\}$ va $\vec{b}=\{x_2,y_2\}$ vektorlar uchun

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \qquad (6.14)$$

$\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ va $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$ vektorlar uchun

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \qquad (6.15)$$

formulalar o‘rinli.

4-misol

Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak $\varphi=\pi/4$ ga teng va $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2}$, $\left|\vec{b}\right|=3$ ekanligi ma’lum bo‘lsa $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$ vektorning uzunligini hisoblang.

► $\vec{c}$ vektorning uzunligini topish uchun vektorlarning skalyar ko‘paytmasidan foydalanamiz. $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^{\,2}$ deb belgilab va $\vec{a}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|^2$ ni e’tiborga olib, berilgan vektorning har ikki tomonini kvadratga ko‘taramiz:

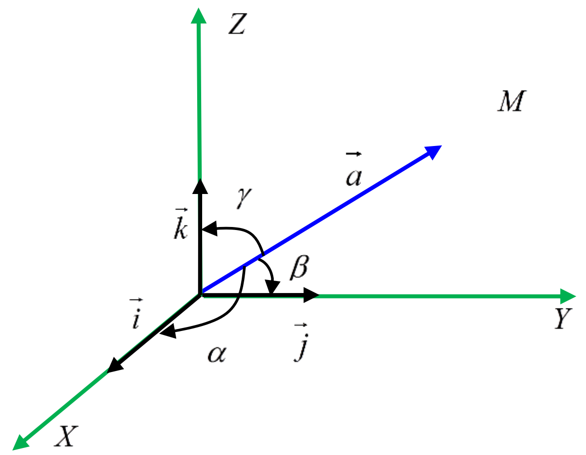
$$\vec{c}^{\,2}=\left(2\vec{a}+3\vec{b}\right)^2=4\vec{a}^{\,2}+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}^{\,2}$$

berilganlarga asosan:

$\vec{a}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|^2=2;\ \vec{b}^{\,2}=\left|\vec{b}\right|^2=9;\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot cos\varphi=\sqrt{2}\cdot3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3.$

Demak, $\vec{c}^{\,2}=4\cdot2+12\cdot3+9\cdot9=125$ yoki $\left|\vec{c}\right|=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$. ◄

Odatda vektorning koordinata o‘qlari bilan tashkil qilgan α,β,γ burchaklarning kosinuslari uning *yo‘naltiruvchi kosinuslari* deyiladi(2-chizma).



2-chizma.

$\vec{a}=\{x,y,z\}$ vektorning yo‘naltiruvchi kosinuslari uning koordinatalari orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (6.16)$$

Birlik vektorlarning koordinatalari uning yo‘naltiruvchi kosinuslaridan iborat, ya’ni agar $\left|\vec{a^0}\right|=1$, bo‘lsa,

$$\vec{a^0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\} \qquad (6.17)$$

(6.16) ga ko‘ra,

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \qquad (6.18)$$

formulani hosil qilish mumkin, ya’ni vektorning yo‘naltiruvchi kosinuslari kvadratlarining yig‘indisi birga teng.

Auditoriya topshiriqlari

1. $C(2;0;2)$ va $D(5;-2;0)$ nuqtalar yordamida teng uch qismga bo‘lingan kesmaning oxirlari A va B nuqtalarning koordinatalarini toping.

Javob: $A(-1;2;4)$, $B(8;-4;2)$

2. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar koordinatalari bilan berilgan:

$$\vec{a}=7\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}\ ;\ \vec{b}=2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$$

Bu vektorlarlarning skalyar ko‘paytmasini toping.

Javob: $\vec{a}\cdot\vec{b}=22$

3. Agar $|\vec{a}|=7\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=4$ va $(\vec{a},\wedge\vec{b})=45^0$ bo‘lsa, $3\vec{a}+\alpha\vec{b}$ va $\vec{a}-2\vec{b}$ vektorlar α ning qanday qiymatlarida o‘zaro perpendikulyar bo‘ladi?

Javob: $\alpha=31{,}5$

4. Uchlari $A(-1;5;1)$, $B(1;1;-2)$ va $C(-3;3;2)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchak berilgan. AC tomonni davom ettirishdan hosil bo‘lgan tashqi burchakni aniqlang.

Javob: $\varphi=arccos(4/9)$

5. Uchlari $A(-2;3;1)$, $B(-2;-1;4)$ va $C(-2;-4;0)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchak berilgan. Bu uchburchakning C ichki burchagini hisoblang.

Javob: $\angle BCA=\pi/4$

6. Agar $A(-4;0;4)$, $B(-1;2;-2)$, $C(6;-2;4)$ chburchak uchlari koordinatalari bo‘lsa, $\overline{BA}$ vektorni mediana chizig‘ini ifodalovchi $\overline{BE}$ vektorga proyeksiyasini aniqlang.

Javob: $5\frac{1}{7}$

7. Rombning tomonlari umumiy uchdan chiquvchi ***a*** va ***b*** vektorlarda joylashgan. Uning diagonallari perpendikulyar ekanligini isbotlang.

8. Agar $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ va $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ vektorlar berilgan hamda $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=4$ v va $\left(\vec{a},\wedge\vec{b}\right)=60^0$ bo‘lsa, AOB uchburchakning $\overrightarrow{OA}$ tomoni $\overrightarrow{OM}$ medianasi orasidagi φ burchak kosinusini toping.

Javob: $\cos\phi=\frac{2}{\sqrt{7}}$

Mustaqil yechish uchun testlar

1. Agar $A(-4;1)$, $B(2;4)$ nuqtalar uchun $AC:CB=2:1$ o‘rinli bo‘lsa, C-?

A) $C(-1;2)$; B) C$(-1;3)$; C) C$(0;3)$; D) $C(-2;2)$

2. Proyeksiyalar bilan berilgan ***a*** va ***b*** vektorlarning skalayar ko‘paytmasi qaysi javobda berilgan?

A) $|\vec{a}|Pr_{\vec{a}}\vec{b}$; B) $|\vec{b}|\mathrm{Pr}_{\vec{a}}\,\vec{b}$; D) $|\vec{a}|Pr_{\vec{b}}\vec{b}$ E) $Pr_{\vec{a}}\vec{b}\cdot Pr_{\vec{b}}\vec{a}$

3. $\vec{a}(2;1;6)$ va $\vec{b}(1;-2;-1)$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasini hisoblang.

A) 0; B) -4; C) -6; D) 4

4. $\vec{a}(4;-7;4)$, $\vec{b}(4,-2,-3)$ vektorlar berilgan. U holda $pr_{\vec{a}}\vec{b}$ ni toping

A) 2; B) 3; C) 4; D) 5

5. Agar $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=2, \left(\vec{a},\wedge\vec{b}\right)=60^0$ berilgan bo‘lsa, $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)$ skalyar ko‘paytma topilsin.

A) 2; B) 3; C) 6; D) 4

6. $A(1,-2,3)$, $B(3,4,-6)$, $C(-3,1,3)$ berilgan bo‘lsa, $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AC}$ vektorlar orasidagi burchak kosinusini toping

A) $\frac{1}{2}$; B) $\frac{2}{11}$; C) 1; D) 0

2.3 Vektorlarning vektor va aralash ko‘paytmalari

2.3.1 Ikki vektorning vektor ko‘paytmasi

Vektor ko‘paytma ta’rifini kiritishdan avval, biz uchta o‘zaro nokomplanar vektor uchligining fazoda joylashishi bilan bog‘liq bo‘lgan zarur bir tushunchani kiritamiz. Shuni aytib o'tamizki, keyingi punktlarda yuritiladigan mulohazalar faqat uch o'lchovli fazoga doir bo'ladi.

Agar komplanar $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar boshi umumiy nuqtaga keltirilgandan so'ng $\vec{n}$ vektorning oxiridan (uchidan) qaraganda $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektoga qarab π dan kichik burchakka burish soat miliga qarama-qarshi bo'lsa, bu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ uchlik *o'ng uchlik,* aks holda *chap uchlik* deyiladi. Chap va o'ng uchlikni tashkil etadigan uchlik *tartiblangan uchlik* deb yuritiladi.

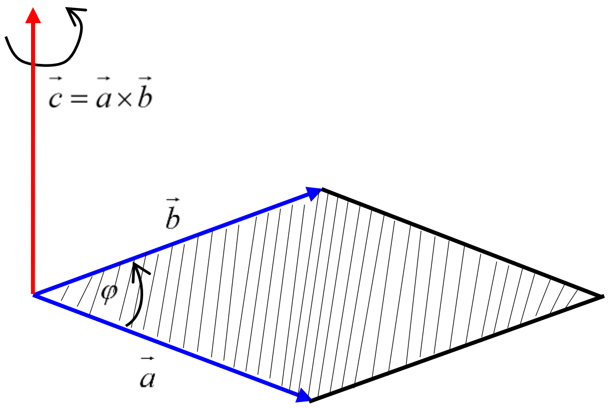
Biz o'ng uchlikdan foydalanamiz.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning *vektor ko'paytmasi* deb quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan $\vec{c}$ vektorga aytiladi.

1) $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikulyar (ortogonal);

2) $$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\left(\vec{a},\vec{b}\right); \qquad (7.1)$$

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarning tartiblangan uchligi o'ng uchlikni tashkil etadi (3-chizma).



3-chizma.

(Bu ta'rifda $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$ deb faraz qilinadi) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi $\vec{a} \times \vec{b}$ yoki $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ ko'rinishida yoziladi. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lmasa, u holda $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ son $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga ysalgan parallelogrammning S yuziga teng bo'ladi. Shunday qilib, $S = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot sin\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$.

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa, u holda $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, chunki $\varphi = \left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0$ yoki $\varphi = \pi$ da $sin\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0$.

1-misol

Agar $\left|\vec{a}\right| = 8$, $\left|\vec{b}\right| = 15$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 96$ bo'lsa, $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ ni hisoblang.

► $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko‘paytmasi uzunligi, shu vektorlar uzunliklari ko‘paytmasi bilan ular orasidagi burchak sinusi ko‘paytmasiga teng. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi ga asosan:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\left(\vec{a},\wedge\vec{b}\right)$$

Bundan

$$\cos\left(\vec{a},\wedge\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{96}{8\cdot 15}=\frac{4}{5}$$

U holda

$$\sin\left(\vec{a},\wedge\vec{b}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\vec{a},\wedge\vec{b}\right)}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$$

Demak,

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\left(\vec{a},\wedge\vec{b}\right)=8\cdot 15\cdot\frac{3}{5}=72$$ ◄

Vektor ko‘paytma quyidagi qonunlarga bo‘ysunadi:

5. Vektor ko‘paytmada ko‘paytuvchilar o‘rnini almashtirilsa, uning ishorasi o‘zgaradi, ya’ni

$$\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$$

6. Vektor ko‘paytma skalyar ko‘paytuvchiga nisbatan gruppalash qonuniga bo‘ysunadi, ya’ni

$$\left(\lambda\cdot\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(\lambda\cdot\vec{b}\right)=\lambda\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$

7. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yig‘indisi bilan $\vec{c}$ vektorning vektor ko‘paytmasi taqsimot qonuniga bo‘ysunadi, ya’ni

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$

Endi vektor ko‘paytmaning koordinatalar orqali yozilishini ko‘rib o‘tamiz. Avvalo koordinata o‘qlarning $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ortlar uchun quyidagi munosabatlar o‘rinli bo‘lishini eslatib o‘tamiz:

$$\begin{aligned}&\vec{i}\times\vec{i}=0\,, \quad \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\,, \quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\,,\\ &\vec{j}\times\vec{j}=0, \quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\,, \quad \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\,,\\ &\vec{k}\times\vec{k}=0\,, \quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\,, \quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\,.\end{aligned} \tag{7.2}$$

Buni qisqacha quyidagi sxema orqali ham berish mumkin.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{\vec{i}\times\vec{j}\times\vec{k}\times\vec{i}\times\vec{j}}\ \rightarrow +\\ \overleftarrow{\vec{i}\times\vec{j}\times\vec{k}\times\vec{i}\times\vec{j}}\ \leftarrow -\end{array}\right\} \tag{7.3}$$

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar Dekart koordinatalar sistemasida mos ravishda $\vec{a}\{a_x;a_y;a_z\}$ va $\vec{b}\{b_x;b_y;b_z\}$ koordinatalarga ega bo‘lsin, ya’ni

$$\vec{a}\{a_x;a_y;a_z\}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\,,\quad \vec{b}\{b_x;b_y;b_z\}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$$

$\vec{a}\times\vec{b}$ ko‘paytma uchun formulani (7.2) ni hamda vektor ko‘paytmaning xossalarini e’tiborga olib topamiz:

$$\vec{a}\times\vec{b}=a_xb_x\cdot\left(\vec{i}\times\vec{i}\right)+a_yb_x\cdot\left(\vec{j}\times\vec{i}\right)+a_zb_x\cdot\left(\vec{k}\times\vec{i}\right)+\ +a_xb_y\cdot\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)+a_yb_y\cdot\left(\vec{j}\times\vec{j}\right)+a_zb_y\cdot\left(\vec{k}\times\vec{j}\right)+$$

$$+a_xb_z\cdot\left(\vec{i}\times\vec{k}\right)+a_yb_z\cdot\left(\vec{j}\times\vec{k}\right)+a_zb_z\cdot\left(\vec{k}\times\vec{k}\right).$$

yoki

$$\vec{a}\times\vec{b}=-a_yb_x\cdot\vec{k}+a_zb_x\cdot\vec{j}+a_xb_y\cdot\vec{k}-a_zb_y\cdot\vec{i}-a_xb_z\cdot\vec{j}+a_yb_z\cdot\vec{i}$$

Bir xil ortlarga ega bo‘lgan qo‘shiluvchilarni gruppalab yozamiz:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\cdot\vec{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\cdot\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\cdot\vec{k}$$

Buni yana ushbu ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \tag{7.4}$$

Bu formuladan quyidagi ikki tasdiq kelib chiqadi.

1. (ikki vektorning kolleniar bo‘lish sharti). $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kolleniar bo‘lishi uchun $\vec{a}\times\vec{b}=0$ bo‘lishi zarur va etarli.
2. (uchburchak yuzining formulasi). $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga uchburchak yasalgan bo‘lsin, u holda bu uchburchakning yuzi:

$$S=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{1}{2}mod\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \tag{7.5}$$

(7.1) va (7.5) formulalar vektor ko‘paytmaning geometrik tatbiqlari hisoblanadi.

2-misol

Berilgan $\vec{a}\{2;0;3\}=2\vec{i}+3\vec{k}$ va $\vec{b}\{0;-4;1\}=-4\vec{j}+\vec{k}$ vektorlardan tuzilgan parallelogramning yuzini hisoblang.

► (7.1) ga binoan, $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\left(\vec{a},\wedge\vec{b}\right)$. Vektor ko‘paytma xossalari va (7.2)ga asosan esa, $\vec{a}\times\vec{b}=\left(2\vec{i}+3\vec{k}\right)\times\left(-4\vec{j}+\vec{k}\right)=12\vec{i}-2\vec{j}-8\vec{k}$ bo‘ladi. Demak, parallelogramm yuzi $S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{12^2+(-2)^2+(-8)^2}=\sqrt{212}=2\sqrt{53}\,(kv.b.)$ ◄

Quyida aralash ko‘paytmaning fizik tatbiqiga bir masala ko‘ramiz:

3-misol

Agar $N(1,2,3)$ nuqtaga $\vec{F}=\vec{e_1}-2\vec{e_2}+4\vec{e_3}$ kuch qo‘yilgan bo‘lsa bu kuchning $M(3,\ 2,-1)$ nuqtaga nisbatan momenti topilsin.

► $\overrightarrow{MN}$ vektorni aniqlaymiz: $\overrightarrow{MN}=\{1-3, 2-2,\ 3-(-1)\}$, $\overrightarrow{MN}=\{-2,\ 0, 4\}$. N nuqtaga qo‘yilgan $\vec{F}$ kuchning momenti

$$m_N\left(\vec{F}\right)=\overrightarrow{MN}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \vec{F}_x & \vec{F}_y & \vec{F}_z\\ \left(\overrightarrow{MN}\right)_x & \left(\overrightarrow{MN}\right)_y & \left(\overrightarrow{MN}\right)_z\end{vmatrix}$$

formula bilan topiladi. Bu formulaga asosan quyidagini topamiz:

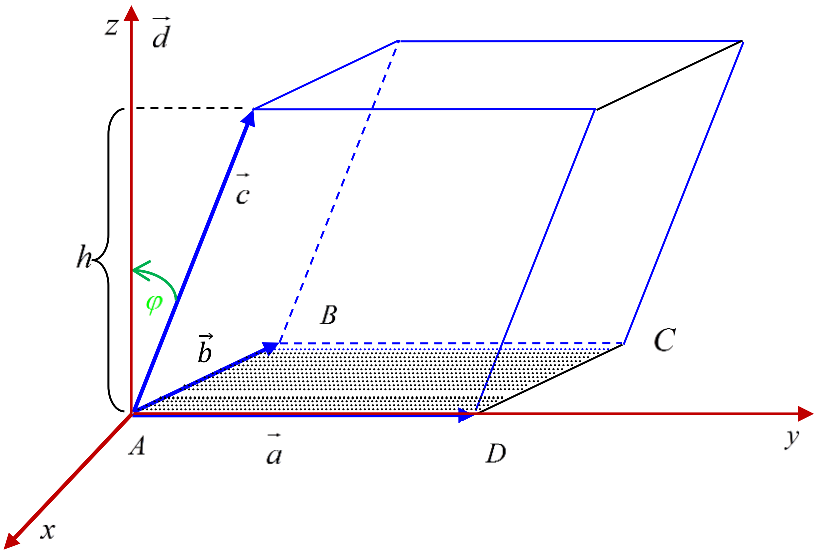
$$m_N\left(\vec{F}\right)=\overrightarrow{MN}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 1 & -2 & 4\\ -2 & 0 & 4\end{vmatrix}=-8\vec{e}_1-12\vec{e}_2-4\vec{e}_3. \ ◄$$

2.3.2 Vektorlarning aralash ko‘paytmasi

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar tartiblangan uchligining aralash ko‘paytmasi deb, $\vec{a}\times\vec{b}$ vektor bilan $\vec{c}$ vektorning skalyar ko‘paytmasiga teng songa aytiladi va $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ yoki $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\cdot\vec{c}$ kabi belgilanadi

Aralash ko‘paytmaning moduli nuqtai nazardan ma’nosini tekshiramiz. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar komplanar bo‘lmagan vektorlar bo‘lsin. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{d}$ deb belgilasak, $\vec{d}$ vektor moduli $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan yasalgan parallelogram yuziga teng (4-chizma) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{d}\cdot\vec{c}$ bo‘lgani uchun skalyar ko‘paytma ta’rifiga ko‘ra

$$\vec{d}\cdot\vec{c}=\left|\vec{d}\right|\cdot Pr_{\vec{d}}\vec{c}$$



4-chizma.

Ammo $Pr_{\vec{d}}\vec{c}=h$ miqdorning moduli, ya’ni $|h|$ son $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarga yasalgan parallelepipedning balandligini anglatadi.

Aralash ko‘paytmaning absolyut qiymati shu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarga yasalgan parallelepiped hajmiga teng, ya’ni

$$V_{parallelepiped}=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|. \tag{7.6}$$

Aralash ko‘paytmaning ba’zi xossalarini keltiramiz:

1) Ko‘paytmada ikki vektorning o‘rinlari almashtirilsa, aralash ko‘paytmaning ishorasi teskariga almashadi, ya’ni quyidagi tengliklar o‘rinli:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c},$$
$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b},$$
$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}.$$

2) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarning o‘rinlari “doiraviy shaklda” almashtirilsa, aralash ko‘paytma o‘z ishorasini o‘zgartirmaydi, ya’ni ushbu tengliklar o‘rinli:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}.$$

3) Agar $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlardan istalgan ikkitasi bir-biriga teng yoki parallel (kollinear) bo‘lsa, ularning aralash ko‘paytmasi nolga teng bo‘ladi.

4) Agar $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar o‘zaro komplanar vektorlar bo‘lsa, ularning aralash ko‘paytmasi nolga teng.

Endi aralash ko‘paytmani $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarning koordinatalari orqali ifodalashga o‘tamiz. Dekart koordinatalar sistemasiga nisbatan $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarning yoyilmasi berilgan bo‘lsin:

$$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\} \Leftrightarrow \vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$
$$\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\} \Leftrightarrow \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$
$$\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\} \Leftrightarrow \vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$$

U holda

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Shuning uchun

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + y_3\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Shunday qilib, uch vektor aralash ko‘paytmasining uchinchi tartibli determinant orqali ifodasi ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\Delta = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (7.7)$$

Formuladan kelib chiqadigan ba’zi natijalarni keltiramiz.

1-Natija. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *vektorlar komplanar bo‘lishi uchun*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7.8)$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarli.

4-misol

Berilgan $\vec{a} = \{2;-1;3\}$, $\vec{b} = \{3;0;2\}$, $\vec{c} = \{1;-1;4\}$ vektorlarni chiziqli erklilikka tekshiring.

► Agar uch vektor komplanar bo‘lsa, ular chiziqli bog‘liq bo‘ladi. Chunki tekislikda har qanday uch vektor chiziqli bog‘liqdir. Berilgan vektorlarni komplanarlikka tekshirish kifoya.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0-2-9-0+4+12=5\neq 0.$$

Demak, berilgan vektorlar chiziqli erkli ekan.◄

2-Natija. *Agar* $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$, $\vec{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$ *bo'lib, bu vektorlar komplanar bo'lmasa, u holda ularga qurilgan parallelepiped hajmi* $V=\pm\Delta$ *formula o'rinli. Unda musbat ishora* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *o'ng uchlikni, manfiy ishora shu* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *lar chap uchlikni tashkil etganda olinadi.*

5-misol

Berilgan $\vec{a}=4\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=-2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{i}+\vec{j}+x\vec{k}$ vektorlardan tuzilgan piramidaning hajmi 8 ga teng bo'lsa, x ni toping.

► (7.7) ko'ra, aralash ko'paytmani topamiz.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & x \end{vmatrix} = -4x+12+4-4-8+6x = 2x+4.$$

$V_{pir.}=\frac{1}{6}V_{par-d}$ bo'lgani uchun va (7.6) dan, $V_{pir.}=\frac{1}{6}|2x+4|=8$, $|2x+4|=48$.

U holda, $x_1=-26$ va $x_2=22$.◄

Auditoriya topshiriqlari

1. Uchlari $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak yuzini hisoblang.

Javob: $S_{\Delta ABC}=0.5\cdot\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\right|=14$ kv. birlik.

2. $\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}-22\vec{j}+6\vec{k}$; $\overrightarrow{BC}=-2\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}$ vektorlar ΔABC ning tomonlari. $\overrightarrow{AD}$ balandlikning uzunligini hisoblang.

Javob: $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\frac{2S_{\Delta ABC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{8\sqrt{5}}{3}$.

3. $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar koordinatalari bilan berilgan:

$$\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}\ ;\ \vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k};\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+7\vec{k}.$$

Bu vektorlarning aralash ko'paytmasini toping.

Javob: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=33$.

4. Ushbu $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$; $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$; $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+7\vec{k}$ vektorlarning komplanarligini isbotlang.

5. Uchlari $A(1;2;3)$, $B(2;4;1)$, $C(7;6;3)$ va $D(2;-3;-1)$ nuqtalarda bo‘lgan piramida berilgan. Shu piramida uchun quyidagilarni: a) AB, AC, AD qirralarning uzunliklarini; b) ABC yoqning yuzini; d) piramidaning hajmini toping.

Javob:

$a)\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{17},\ \left|\overrightarrow{AC}\right| = 2\sqrt{13},\ \left|\overrightarrow{AD}\right| = 5\sqrt{2}$;

$b) S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = 14$ kv. birlik;

$d)\ V_{pir} = 30$ kub birlik.

6. Agar tekislikda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar nokollinear bo‘lsa α ning qanday qiymatida $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 2\vec{b}$ va $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ vektorlar kollinear bo‘ladi.

Javob: $\alpha = -6$

7. Agar $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ va $(\vec{a}\hat{\ }\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ bo‘lsa $\vec{p} = 3\vec{a} - 5\vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} + 7\vec{b}$ vektorlardan tuzilgan uchburchak yuzini toping.

Javob: $S_{\Delta} = \frac{1}{2}|\vec{p}\times\vec{q}| = 78\sqrt{3}$

8. $C(-1;\ 4;-2)$ nuqtaga qo‘yilgan uchta $\vec{F} = \{2;-1;-2\}$, $\vec{Q} = \{3;\ 2;-1\}$ va $\vec{P} = \{-4;\ 1;\ 3\}$ kuchlar berilgan.Bu kuchlar teng ta’sir etuvchisining $A(2;\ 3;-1)$ nuqtaga nisbatan momentining yo‘naltiruvchi kosinuslarini toping.

Javob: $cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{66}}$, $\cos\beta = -\frac{4}{\sqrt{66}}$, $\cos\gamma = -\frac{7}{\sqrt{66}}$

Mustaqil yechish uchun testlar

1. Berilgan $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ vektorlarning vektor ko‘paytmasi $\vec{a}\times\vec{b}$ ni toping

A) $\{9;-3;9\}$; B) $\{6;3;-9\}$; C) $\{-9;3;-5\}$; D) $\{9;3;6\}$

2. Agar $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$ va $(\vec{a}\hat{\ }\vec{b}) = \frac{\pi}{6}$ bo‘lsa, $\left|\left(2\vec{a} + 3\vec{b}\right)\times\left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)\right|$ ni hisoblang

A) $75\sqrt{3}$; B) 105; C) 140; D) $60\sqrt{3}$

3. Agar $\bar{a}(1;\ 2;-3)$, $\bar{b}(-2;1;-1)$ bo‘lsa, $(\bar{a} - 2\bar{b})\times(2\bar{a} - \bar{b})$ vektor ko‘paytmani toping

A) $(3;-21;15)$; B) $(-5;-35;-25)$; C) $(3;21;15)$; D) $(5;-35;25)$

4. $\vec{a}(2;1;6)$, $\vec{b}(1;-2;-1)$ va $\vec{c}(2;-4;-2)$ vektorlarning aralash ko‘paytmasini hisoblang

A) 0; B) -4; C) 6; D) 4

5. Agar $\vec{a}=\{x;-1;2\}$, $\vec{b}=\{1;x;-3\}$, $\vec{c}=\{1;-3;5\}$ vektorlar chiziqli bog‘liq bo‘lsa, x ning qiymatini toping

A) $x_1=-2,\ x_2=0{,}2$ B) $x_1=2,\ x_2=0{,}2$

C) $x_1=-2,\ x_2=-0{,}2$ D) $x_1=2,\ x_2=-0{,}2$

Shaxsiy uy topshiriqlari

1. Agar $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$, va $|\vec{a}+\vec{b}|=24$ bo‘lsa, $|\vec{a}-\vec{b}|$ ni hisoblang.

Javob: $|\vec{a}-\vec{b}|=22$.

2. Agar ΔABC da $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{n}$ ekanligi ma’lum bo‘lsa, quyidagi vektorlarni yasang:

1) $\dfrac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$, 2) $\dfrac{\vec{m}-\vec{n}}{2}$, 3) $\dfrac{\vec{n}-\vec{m}}{2}$, 4) $-\dfrac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$

3. $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarga yasalgan parallelogrammdan foydalanib quyidagi ayniyatlarning to‘g‘riligini chizmada tekshiring:

1) $(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}$, 2) $\vec{a}+(\vec{b}-\vec{a})=\vec{b}$ 3) $\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{2}+\vec{b}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$;

4. Teng yonli $ABCD$ trapesiyaning pastki asosi $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, yon tomoni $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ va ular orasidagi burchagi $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ berilgan. Trapesiyaning qolgan tomonlari va diagonallarini tashkil etuvchi vektorlarni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang

Javob: $\overrightarrow{BC}=-\dfrac{b}{a}\vec{a}+\vec{b}$; $\overrightarrow{CD}=\dfrac{b-a}{a}\vec{a}$; $\overrightarrow{AC}=\dfrac{a-b}{a}\vec{a}+\vec{b}$; $\overrightarrow{BD}=-\vec{a}+\vec{b}$; bu yerda a, b mos ravshda $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlarning uzunliklarini bildiradi.

5.Koordinatalar boshidan $M(12;-3;4)$ nuqtagacha bo‘lgan masofani hisoblang.

$\vec{r}(0;2;-3)$ radius vektorning ortlar bo‘yicha yoyilmasini yozing va modulini hisoblang.

Javob: $\vec{r}=2\vec{j}-3\vec{k}$, $|\vec{r}|=\sqrt{13}$.

6. $M(-2;\ 1;\ 3)$ va $N(0;-1;\ 2)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

Javob: 3.

7. $\vec{a}\{3,\ 2,\ 7\}$ va $\vec{b}\{4,\ 1,\ -5\}$ vektorlarning yig‘indisi va ayirmasini ort vektorlar yordamida yozing.

Javob:
$$\vec{a}+\vec{b}=7\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$$
$$\vec{a}-\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}+12\vec{k}$$

8.Uchlari $A(5;\ 2;\ 6)$, $B(6;\ 4;\ 4)$, $C(4;\ 3;\ 2)$ va $D(3;\ 1;\ 4)$ nuqtalarda bo‘lgan to‘rtburchakning kvadrat ekanligini tekshiring.

9. α va β larning qanday qiymatlarida $\vec{a} = 2\vec{i} + \alpha\vec{j} + \vec{k}$ va $\vec{b} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + \beta\vec{k}$ vektorlar kollinear bo‘ladi?

Javob: $\alpha = -4; \quad \beta = \frac{3}{2}$.

10.Uchlari $A(2;\,1;\,-4)$, $B(1;\,3;\,5)$, $C(7;\,2;\,3)$ va $D(8;\,0;\,-6)$ nuqtalarda bo‘lgan to‘rtburchakning parallelogramm ekanligini isbotlang va parallelogramm tomonlari uzunliklarini toping.

Javob. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ bo‘lgani uchun parallelogramdir.

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{86} \approx 9,3; \quad \left|\overrightarrow{DC}\right| = \sqrt{41} \approx 6,4.$

11. Uchlari $A(-1;\,2;\,3)$, $B(2;\,-1;\,1)$, $C(1;\,-3;\,-1)$ va $D(-5;\,3;\,3)$ nuqtalarda bo‘lgan to‘rtburchakning trapesiya ekanligini isbotlang

Ko‘rsatma . $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{CD}$ vektorlarning kollinear. $\overrightarrow{AD}$ va $\overrightarrow{BC}$ vektorlarning kollinear emasligini tekshirish zarur.

12.Boshlang‘ich nuqtasi $M(-1;\,3;\,2)$ va oxirgi nuqtasi $N(0;\,1;\,4)$ bo‘lgan $\overrightarrow{MN}$ vektorning yo‘naltiruvchi kosinuslarini toping.

Javob. $\cos\alpha = \frac{1}{3}; \quad \cos\alpha = -\frac{2}{3}; \quad \cos\alpha = \frac{2}{3}$.

13. $\vec{a}$ vektor Ox o‘qi bilan $\alpha = 45^\circ$, Oy o‘qi bilan $\beta = 60^\circ$ burchak hosil qiladi. Agar $\left|\vec{a}\right| = 6$ bo‘lsa, uning koordinatalari topilsin.

Javob. $\vec{a}\left\{3\sqrt{2};\,3;\,3\right\}$.

14. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ga teng. $\left|\vec{a}\right| = 4$; $\left|\vec{b}\right| = 3$ bo‘lsa, $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ vektorning uzunligini toping.

Javob. $\left|\vec{c}\right| = 2\sqrt{63}.$.

15. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar koordinatalari bilan berilgan: $\vec{a} = 7\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$. Bu vektorlarning skalyar ko‘paytmasini toping.

16.Uchlari $A(-1;\,5;\,1)$, $B(1;\,1;\,-2)$, $C(-3;\,3;\,2)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchak berilgan. AC tomonni davom ettirishdan hosil bo‘lgan tashqi burchakni aniqlang.

Javob. $\varphi = arccos\left(\frac{4}{9}\right)$.

III BOB ANALITIK GEOMETRIYA ASOSLARI

3.1 Tekislikda to‘g‘ri chiziq tenglamalari

To‘g‘ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasi *Oxy* tekislikda har qanday to‘g‘ri chiziq *x* va *y* ga nisbatan birinchi darajali

$$Ax + By + C = 0 \tag{1.1}$$

tenglama bilan beriladi, bu yerda *A*, *B*, *C* –haqiqiy sonlar, $A^2 + B^2 > 0$ va har qanday (1.1) tenglama to‘g‘ri chiziqni aniqlaydi.

(1.1) tenglama *to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi* deyiladi. To‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar $\vec{n} = \{A; B\}$ vektor to‘g‘ri chiziqning *normal vektori* deyiladi.

Agar $B \neq 0$ bo‘lsa, (1.1)ni *y* ga nisbatan yechib,

$$y = kx + b\ (k = tg\alpha) \tag{1.2}$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin. (1.2) tenglama *to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi* deyiladi. α - to‘g‘ri chiziq bilan *Ox* o‘qining musbat yo‘nalishi orasidagi burchak, *k* - to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsienti, *b* - to‘g‘ri chiziqning *Oy* o‘qidan kesadigan kesmasi.

To‘g‘ri chiziqning yana quyidagi tenglamalari mavjud:

1. $M_0(x_0; y_0)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\vec{n} = \{A; B\}$ normal vektorga ega to‘g‘ri chiziq tenglamasi:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \tag{1.3}$$

2. $M_0(x_0; y_0)$ nuqtadan o‘tuvchi va *k* - burchak koeffitsientli to‘g‘ri chiziq tenglamasi:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \tag{1.4}$$

3. To‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases} \tag{1.5}$$

Bu yerda, $\vec{s}(m; n)$ - to‘g‘ri chiziqning *yo‘naltiruvchi vektori.*

4. To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \tag{1.6}$$

5. To‘g‘ri chiziqning “kesma”lardagi tenglamasi:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{1.7}$$

Bu yerda *a* va *b* to‘g‘ri chiziqning mos ravishda *Ox* va *Oy* koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalari.

6. Ikki $M_1(x_1;y_1)$ va $M_2(x_2;y_2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \tag{1.8}$$

1-misol

Quyidagi $2x-3y+6=0$ tenglama bilan berilgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientini va o‘qlardan ajratgan kesmalarini aniqlang.

► $2x-3y+6=0$ ni y ga nisbatan yechamiz: $y=\frac{2}{3}x+2$, $k=\frac{2}{3}$. Berilgan tenglamani quyidagicha almashtiramiz:

$$2x-3y=-6 \,|:(-6)$$

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$$

Demak, $a=-3,\quad b=2,\ k=\frac{2}{3}$.◄

2-misol

ABC uchburchakning uchlari $A(-3;1)$, $B(5;-3)$ va $C(7;5)$ berilgan.

CD balandlik va *AE* medianalari kesishgan nuqtasini toping.

► CD balandlik *AB* tomonga perpendikulyar bo‘lishi kerak. Avval (1.8) ni qo‘llab, *AB* tomon tenglamasini tuzamiz.

$$\frac{x+3}{5+3}=\frac{y-1}{-3-1},\ y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},\ k_1=-\frac{1}{2}.$$

CD balandlik tenglamasida $k_2=2$, u holda (1.2)ga ko‘ra, $y-5=2(x-7)$ yoki $y=2x-9$.

E nuqta $B(5;-3)$ va $C(7;5)$ nuqtalarning o‘rtasi bo‘lgani uchun

$$E\left(\frac{5+7}{2};\frac{-3+5}{2}\right)=E(6;1).$$

$A(-3;1)$ va $E(6;1)$ nuqtalardan o‘tuvchi *AE* mediana tenglamasi: $y=1$.

CD balandlik va *AE* medianalar tenglamalarini birgalikda yechamiz:

$$\begin{cases} y=2x-9 \\ y=1 \end{cases};\quad \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}.$$

Demak, $M(5;1)$ - *CD* balandlik va *AE* medianalar kesishgan nuqta.◄

Tekislikda to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashish holatlarini ko‘rib chiqamiz.

1. Agar tekislikda to‘g‘ri chiziqlar

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ va } A_2x+B_2y+C_2=0$$

umumiy tenglamalar bilan berilgan bo‘lsin. U holda ular orasidagi φ burchaklardan biri ularning $\vec{n}_1=\{A_1;\, B_1\}$ va $\vec{n}_2=\{A_2;\, B_2\}$ normallari orasidagi burchakga teng va quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \tag{1.9}$$

To‘g‘ri chiziqlarning *perpendikulyarlik sharti*

$$A_1A_2+B_1B_2=0 \tag{1.10}$$

formula bilan aniqlanadi.

To‘g‘ri chiziqlarning *parellellik sharti*

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2} \tag{1.10}$$

formula bilan aniqlanadi.

Agar

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \tag{1.11}$$

tenglik bajarilsa, to‘g‘ri chiziqlar ustma-ust tushadi.

2. Tekislikda to‘g‘ri chiziqlar $y=k_1x+b_1$ va $y=k_2x+b_2$ burchak koeffitsientli tenglamalar bilan berilgan bo‘lsin. U holda ular orasidagi φ burchak

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} \tag{1.12}$$

formula bilan hisoblanadi. Bu holda to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lishi uchun $k_1=k_2$ tenglik bajarilishi va perpendikulyar bo‘lishi uchun $k_1k_2=-1$ shart bajarilishi zarur va yetarli.

$M_0(x_0;y_0)$ nuqtadan $Ax+By+C=0$ to‘g‘ri chiziqgacha bolgan d masofa quyidagi

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{1.13}$$

formula bilan hisoblanadi.

3-misol

Berilgan $x-2y+4=0$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan $M(5;\,2)$ nuqtaga simmetrik nuqtani toping.

►Avval $M(5;\,2)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\vec{n}=\{1;-2\}$ normal vektorli $x-2y+4=0$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzamiz. Bu holda $\vec{n}=\{1;-2\}$ izlanayotgan to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori bo‘ladi. (1.6)ga ko‘ra,

$$\frac{x-5}{1}=\frac{y-2}{-2},\ y=-2x+12.$$

Bu to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasini topamiz.

$$\begin{cases} x-2y+4=0 \\ y=-2x+12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}.$$

Topilgan $M_0(4;4)$ nuqta $M(5;\,2)$ nuqta va unga simmetrik $M'(x;\,y)$ nuqtalarning o‘rtasi bo‘lgani uchun

$$\frac{x+5}{2}=4,\qquad \frac{y+2}{2}=4$$

tenglik o‘rinli. Bundan, $x=3,\ y=6$. Demak, $M'(3;\,6)$.◄

4-misol

Kvadratning ikkita tomoni $5x-12y-65=0$ va $5x-12y+26=0$ to‘g‘ri chiziqlarda yotsa, kvadratning yuzini toping.

► Berilgan to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel bo‘lgani uchun ular kvadratning qarama-qarshi tomonlari bo‘lib, orasidagi masofa kvadrat tomonining uzunligiga teng. Buning uchun $5x-12y-65=0$ to‘g‘ri chiziqdan ixtiyoriy nuqta tanlanadi, masalan, $M_0(1;-5)$ va ikkinchi $5x-12y+26=0$ to‘g‘ri chiziqgacha masofa (1.13)ga asosan topiladi.

$$d=\frac{|5\cdot1-12\cdot(-5)+26|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{91}{13}=7\ .$$

Demak, $S_{kv}=49$.◄

Auditoriya topshiriqlari

1. $2x-5y+8=0$ tenglama bilan berilgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientini va o‘qlardan ajratgan kesmalarini aniqlang.

2. $A(5;-3)$ nuqtadan o‘tuvchi va *a*) Ox o‘qiga; *b*) Oy o‘qiga; c) 1-chorak bissektrisasiga; d) $y=-2x+7$ to‘g‘ri chiziqga; e) $2x-5y+8=0$ to‘g‘ri chiziqga parallel to‘g‘ri chiziq tenglamalarini tuzing.

3. $A(-1;3)$ va $B(2;-5)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

4. $A(-2;5)$ nuqtadan o‘tib, $3x+5y-8=0$ to‘g‘ri chiziqga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

5. Kvadratning bir uchi $A(-1;2)$ nuqtada, bir tomoni esa $4x-3y-15=0$ to‘g‘ri chiziqda yotadi. Kvadratning yuzini hisoblang.

6. $4x-3y-12=0$ to‘g‘ri chiziqqa parallel va undan $d=2$ masofada joylashgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

7. Agar $M(4;\ 2)$ nuqta to‘g‘ri chiziqning koordinatalar orasidagi kesmasining o‘rtasi ekani ma’lum bo‘lsa to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

8. $A(1;-2)$, $B(5;4)$ va $C(-2;0)$ nuqtalar uchburchakning uchlari bo‘lsa, uning bissektrisalari tenglamalarini tuzing.

9. To‘g‘ri chiziqning $A(3;-4)$ nuqtasi unga koordinata boshidan tushirilgan perpendikulyar asosi ekani ma’lum bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

10. $5x-y+4=0$ va $3x+2y-1=0$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Mustaqil yechish uchun testlar

1. $3x+5y-8=0$ to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientini va Oy o‘qidan ajratgan kesmasini aniqlang

$A)\ k=\frac{3}{5};\ b=\frac{8}{5}$ $B)\ k=-\frac{3}{5};\ b=\frac{8}{5};$ $C)\ k=\frac{5}{3};\ b=\frac{8}{3};$ $D)\ k=\frac{5}{3};\ b=-\frac{8}{3}$

2. Berilgan $A(3;-4)$ va $B(1;-3)$ va nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasini toping

$A)\ \frac{x-3}{-2}=\frac{y+4}{1};$ $B)\ y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ $C)\ x+2y+5=0;$ $D)\ \begin{cases} x=3-2t \\ y=-4+t \end{cases}$

3. Berilgan $A(3;-4)$ va $B(1;-3)$ va nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasini toping

$A)\ \frac{x-3}{-2}=\frac{y+4}{1};$ $B)\ y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ $C)\ x+2y+5=0;$ $D)\ \begin{cases} x=3-2t \\ y=-4+t \end{cases}$

4. Quyidagilardan qaysi biri $M(1;-3)$ nuqtadan o‘tib, $\vec{s}=\{-3;5\}$ vektorga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq bo‘ladi?

$A)\ \frac{x+3}{-1}=\frac{y-5}{3};$ $B)\ y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ $C)\ \frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{-5};$ $D)\ \begin{cases} x=1-3t \\ y=-3-5t \end{cases}$

5. Trapetsiya asoslarining tenglamalari berilgan: $3x-4y-15=0$, $3x-4y-35=0$. Trapetsiyaning balandligini aniqlang

$A)\ \frac{3}{5};$ $B)\ 3$ $C)\ 4$ $D)\ 5$

3.2 Fazoda tekislik tenglamalari

To‘g‘ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasida ixtiyoriy tekislik

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (2.1)$$

tenglama bilan beriladi, bu yerda *A*, *B*, *C*, *D* – ma'lum sonlar, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ va (2.1) ko'rinishdagi har qanday tenglama biror tekislikni aniqlaydi. (2.1) tenglama *tekislikning umumiy tenglamasi* deb ataladi. (2.1) tenglama bilan berilgan tekislikka perpendikulyar $\vec{n}(A;B;C)$ vektor tekislikning *normal vektori*(yoki *normali*) deyiladi.

Tekislikning bir nechta berilish usullari mavjud.

1. Berilgan $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{n}(A;B;C)$ normal vektorga ega tekislik tenglamasi:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (2.2)$$

2. Tekislikning o'qlardan ajratgan kesmalar bo'yicha tenglamasi:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (2.3)$$

Agar (2.1)da $D \neq 0$ bo'lsa, $-D$ga bo'lish orqali (2.3) tenglama hosil qilinadi va bu yerda a, b, c tekislikning mos ravishda Ox, Oy, Oz o'qlardan ajratgan kesmalaridir.

3. Uch nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi. Agar tekislik bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ va $M_3(x_3, y_3, z_3)$ nuqtalardan o'tsa, uning tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.4)$$

Determinantni 1-satr elementlari bo'yicha yoyish orqali (2.2) formulani hosil

qilish mumkin.

Tekisliklar orasidagi φ burchak deganda ular hosil qiladigan ikki yoqli burchaklardan biri tushuniladi.

(P_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ va (P_2): $A_2x + B_2y + C_{21}z + D_2 = 0$ tekisliklar fazoda har qanday joylashganda ham ular orasidagi burchaklardan biri ularning $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ va $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$normallari orasidagi burchakka teng(1-shakl). Shuning uchun tekisliklar orasidagi burchak quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$cos\varphi = \cos\left(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}\right) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (2.5)$$

Tekisliklarning *perpendikulyarlik sharti*

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 \qquad (2.6)$$

formula bilan aniqlanadi.

Tekisliklarning *parellellik sharti*

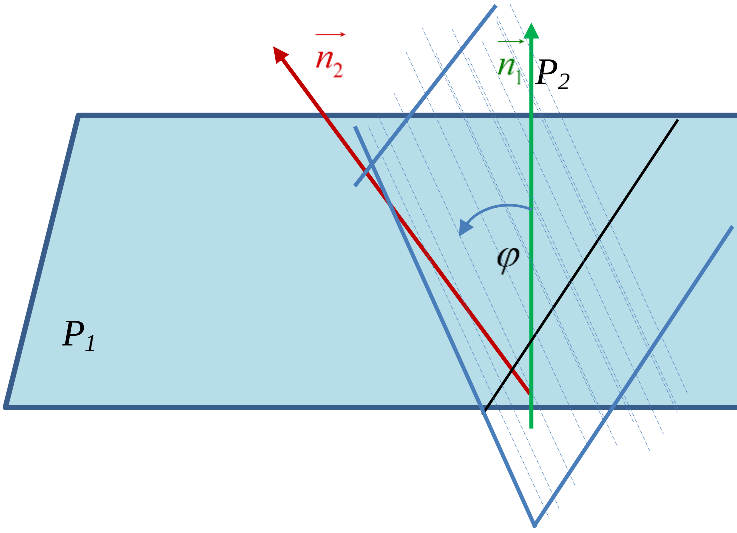
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \tag{2.7}$$

formula bilan aniqlanadi.

Agar

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \tag{2.8}$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, tekisliklar ustma-ust tushadi.



1-chizma.

Tekislikning umumiy tenglamasidagi ba'zi koeffitsientlar nolga aylanganda tekislikning koordinata o'qlariga nisbatan vaziyati quyidagicha bo'ladi:

1. Agar $D=0$ bo'lsa, koordinatalar boshidan o'tadi.

2. Agar a) $A=0$ bo'lsa, $\vec{n}=B\vec{j}+C\vec{k}$ normal vektori Ox o'qiga perpendikulyar bo'ladi. Demak , tekislik Ox o'qiga parallel bo'ladi.

Xuddi shu kabi

b) $B=0$ bo'lsa, tekislik Oy o'qiga parallel bo'ladi;

c) $C=0$ bo'lsa, tekislik Oz o'qiga parallel bo'ladi.

3. Agar a) $D=0$, $C=0$ bo'lsa, $Ax+By=0$ koordinatalar boshidan o'tib Oz o'qiga parallel bo'ladi. Demak , tekislik Oz o'qidan o'tuvchi tekislik bo'ladi.

Xuddi shu kabi

b) $D=0$, $B=0$ bo'lsa, tekislik Oy o'qidan o'tuvchi tekislik bo'ladi;

c) $D=0$, $A=0$ bo'lsa, tekislik Ox o'qidan o'tuvchi tekislik bo'ladi.

4. Agar a) $A=0$, $B=0$ bo'lsa, $\vec{n}=C\vec{k}$ normal vektori Oz o'qiga parallel bo'ladi. Demak , $Cz+D=0$ tekislik Oxy tekisligiga parallel bo'ladi.

Xuddi shu kabi

b) $A=0$, $C=0$ bo'lsa, tekislik Oxz tekisligiga parallel bo'ladi;

c) $B=0$, $C=0$ bo'lsa, tekislik Oyz tekisligiga parallel bo'ladi.

5. Agar a) $A=0$, $B=0$ va $D=0$ bo'lsa, $Cz=0$ yoki $z=0$ tekislik Oxy tekisligiga parallel va koordinata boshidan o'tadi. Demak, Oxy koordinata tekisligining o'zi hosil bo'ladi. Xuddi shu kabi

b) $A=0$, $C=0$ va $D=0$ bo'lsa, Oxz tekisligi hosil bo'ladi;

c) $B=0$, $C=0$ va $D=0$ bo'lsa, Oyz tekisligi hosil bo'ladi.

Berilgan $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikkacha bo'lgan d masofa

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{2.9}$$

formula bilan hisoblanadi.

1-misol

Agar $M_1(2,0,4)$ va $M_2(5,5,1)$ nuqtalar berilgan bo‘lsa M_1 nuqtadan o‘tuvchi va $\overrightarrow{M_1M_2}$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzing.

► $M_1(2,0,4)$ nuqtadan o‘tib, $\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{n}(3,5,-3)$ normal vektorga ega bo‘lgan tekislik tenglamasi (2.2) ga ko‘ra,

$$3(x-2)+5(y-0)-3(z-4)=0,$$

$$3x+5y-3z+6=0. ◄$$

2-misol

Ox o‘qiga parallel, hamda $M_1(0,2,11)$ va $M_2(2,3,4)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

► Ox o‘qiga parallel bo‘lgani uchun tekislikning umumiy tenglamasida $A=0$ bo‘lib, normal vektori $\vec{n}(0;B;C)$ ko‘rinishda bo‘ladi. $\overrightarrow{M_1M_2}(2;1;-7)\perp\vec{n}$ dan va (2.2) formuladan foydalanib quyidagi tenglamalarni tuzamiz:

$$2\cdot 0+1\cdot B-7\cdot C=0,$$

$$B(y-3)+C(z-4)=0.$$

Bu tenglamalarni birgalikda yechib, izlanayotgan tekislik tenglamasini hosil qilamiz.

$7(y-3)+(z-4)=0$ yoki $7y+z-25=0$.◄

3-misol

Berilgan $6x+2y-4z-7=0$ va $9x+3y-6z+13=0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

► $\overrightarrow{n_1}=\{6,2,-4\}$, $\overrightarrow{n_2}=\{9,3,-6\}$

$$\cos\varphi=\frac{6\cdot 9+2\cdot 3+(-4)\cdot(-6)}{\sqrt{6^2+2^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{9^2+3^2+(-6)^2}}=\frac{84}{\sqrt{56}\cdot\sqrt{126}}=\frac{84}{\sqrt{7056}}=\frac{84}{84}=1,$$

$\varphi=\arccos 1=0.$

Demak, berilgan tekisliklar o‘zaro parallel.◄

4-misol.

Berilgan $M_0(4;3;0)$ nuqtadan, berilgan $M_1(1;3;0)$, $M_2(3;0;1)$ va $M_3(4;-1;2)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislikkacha bo‘lgan masofani toping.

► Dastlab (2.4) formuladan foydalanib, uch nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasini tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-0 \\ 3-1 & 0-3 & 1-0 \\ 4-1 & -1-3 & 2-0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{yoki} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Determinantni hisoblab, $2x+y-z-5=0$ tekislik tenglamasi hosil qilalamiz. $M_0(4;3;0)$ nuqtadan $2x+y-z-5=0$ tekislikkacha masofa

$$d = \frac{|2\cdot 4+1\cdot 3-1\cdot 0-5|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}. ◄$$

Auditoriya topshiriqlar

1. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi

a) berilgan $M_0(2;-3;0)$ nuqtadan o‘tib, $\vec{n}(1,5,-2)$ vektorga perpendikulyar;

b) Berilgan $M_0(3;-1;2)$ nuqtadan o‘tib, Oxz tekisligiga parallel;

c) Berilgan $M_1(1;2;-5)$ va $M_2(2;0;-1)$ va nuqtalardan o‘tib, Oy o‘qiga parallel;

d) $M_0(0;3;4)$ nuqtadan va Oz o‘qidan o‘tuvchi;

e) $A(3;5;-2)$ nuqtadan o‘tib, $\vec{n}_1(2;1;-3)$ va $\vec{n}_2(4;-3;-1)$ vektorlarga parallel tekislik tenglamalarini tuzing va ularni yasang.

2. $M_1(1;2;-5)$ va $M_2(2;0;-1)$ nuqtalardan o‘tib, $3x+5y-3z+6=0$ tekisligiga perpendiulyar tekislik tenglamasini tuzing.

3. $A(4;-3;5)$ nuqtadan o‘tib, koordinata o‘qlaridan $1:2:2$ nisbatdagi musbat kesmalar ajratadigan tekislik tenglamasini tuzing.

4. $7x-y-5z+6=0$ va $2x-y+3z-13=0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

5. $A(1;3;-5)$ nuqtadan o‘tuvchi va $3x+2y-6z+7=0$, $2x-6y+3z-13=0$ tekisliklarga perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzing.

6. $2x+6y-3z+15=0$ va $2x+6y-3z-13=0$ tekisliklar orasidagi masofani toping.

7. $2x-y+4z+21=0$ tekisligiga perpendikulyar va Ox, Oy koordinata o‘qlaridan mos ravishda $a=2$, $b=-3$ kesma ajratuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

8. Uchlari $A(-3;0;2)$, $B(1;2;-2)$, $C(0;1;-2)$ va $D(3;-3;2)$ nuqtalarda bo‘lgan piramidaning A uchidan BCD yog‘iga tushirilgan balandligi uzunligini toping.

Mustaqil yechish uchun testlar

1. $A(1;2;1)$ va $B(4;0;-5)$ nuqtalar berilgan. $A(1;2;1)$ nuqtadan o‘tib, $\overrightarrow{AB}$ vektorga perpendikulyar bo‘lgan tekislik tenglamasini toping

$A)$ $2x+3y-6z+2=0$ $B)$ $4x-6y-12z-3=0$

$C)$ $3x-2y-6z-1=0$ $D)$ $6x-2y-3z+5=0$

2. Ox o‘qidan o‘tuvchi tekislik tenglamasi berilgan javobni aniqlang

$A)$ $3y-6z+5=0$ $B)$ $5y+12z=0$

$C)$ $3x-7=0$ $D)$ $6x-2y-3z=0$

3. Oyz koordinata tekisligiga parallel tekislik tenglamasi berilgan javobni aniqlang

$A)$ $3y-6z+5=0$ $B)$ $5y+12z=0$

$C)$ $3x-7=0$ $D)$ $6x-2y-3z=0$

4. $2x-3y+6z-7=0$ tekislikka perpendiklyar tekislikni toping

$A)$ $2x+3y-6z+5=0$ $B)$ $4x-5y+12z-7=0$

$C)$ $3x-2y-6z-7=0$ $D)$ $6x-2y-3z+5=0$

5. Berilgan $M(-9;-1;3)$ nuqtadan $3x+6y+2z-8=0$ tekislikkacha bo‘lgan masofani toping

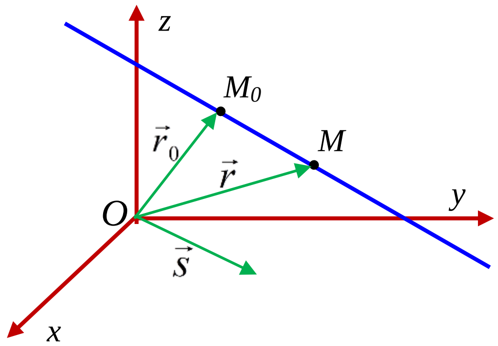
$A)$ 3 $B)$ 4 $C)$ 5 $D)$ 6

6. Berilgan $3x-2y-6z-7=0$ va $6x-3y+2z=0$ tekisliklar orasidagi burchak kosinusini toping

$A)$ $15/49$ $B)$ $18/49$ $C)$ $12/49$ $D)$ $16/49$

3.3 Fazoda to‘g‘ri chiziq. To‘g‘ri chiziq va tekislikning o‘zaro joylashuvi

Agar to‘g‘ri chiziqda yotuvchi $M_0\left(\vec{r}_0\right)=M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ nuqta va to‘g‘ri chiziqga parallel $\vec{s}\left(m,n,p\right)$, $\left(\left|\vec{s}\right|\neq 0\right)$ vektor berilgan bo‘lsa, fazoda to‘g‘ri chiziqning vaziyati aniqlangan bo‘ladi. $M\left(\vec{r}\right)=M\left(x,y,z\right)$ nuqta to‘g‘ri chiziqdagi o‘zgaruvchan nuqta bo‘lsin. U holda $\overrightarrow{M_0M}=t\cdot\vec{s}$ bo‘ladi. Bu yerda t M nuqtaning vaziyatiga qarab ixtiyoriy haqiqiy son qiymati qabul qilishi mumkin. t to‘g‘ri chiziqning o‘zgaruvchan *parametri* deyiladi. $\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0$ dan to‘g‘ri chiziqning *vektor tenglamasi* hosil bo‘ladi:



1-chizma

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\cdot\vec{s} \qquad (1)$$

Bu tenglamadan koordinatalarga o‘tsak,

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases} \qquad (2)$$

to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi hosil bo‘ladi. (2) dan *to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi*ni hosil qilamiz

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \qquad (3)$$

$\vec{s}(m,n,p)$ vektor to‘g‘ri chiziqning *yo‘naltiruvchi vektori* deyiladi.

Ikki $M_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$ *va* $M_2\left(x_2,y_2,z_2\right)$ *nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq* tenglamasi

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (4)$$

Har qanday ikkita parallel bo‘lmagan tekisliklarning tenglamalari birgalikda

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (5)$$

to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. To‘g‘ri chiziqning $\bar{s}$ yo‘naltiruvchi vektori sistemadagi tekisliklarning normal vektori $\vec{n}_1(A_1,B_1,C_1)$ va $\vec{n}_2(A_2,B_2,C_2)$ ning har biriga perpendikulyar, demak, $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$.

To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasidan kanonik tenglamani hosil qilish mumkin. Buning uchun to‘g‘ri chiziqda yotuvchi bitta nuqta koordinatalarini va yo‘naltiruvchi vektorni bilish yetarli, yoki avval to‘g‘ri chiziqning proyeksiyalardagi tenglamasiga o‘tish lozim.

To‘g‘ri chiziqning proyeksiyalardagi tenglamasi uning umumiy tenglamasidan avval y ni, keyin x ni yo‘qotib topiladi:

$$\begin{cases} x = mz + a \\ y = nz + b. \end{cases} \tag{6}$$

1-misol.

Ushbu $\begin{cases} x - 2y - z - 5 = 0 \\ 2x + y - 3z - 5 = 0 \end{cases}$ umumiy tenglama bilan berilgan to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini yozing.

► Bu yerda $\bar{n}_1(1,-2,-1)$ va $\bar{n}_2(2,1,-3)$, u holda

$$\bar{s} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 7\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}, \qquad \vec{s}(7,1,5).$$

To‘g‘ri chiziqda yotuvchi bitta nuqtani topish uchun $z = 0$ deb, $x = 3,\ y = -1$ larni topamiz. $M_0(3,-1,0)$ berilgan to‘g‘ri chiziqda yotadi. Demak, to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi

$$\frac{x-3}{7} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{5}. \quad ◄$$

Ikkita to‘g‘ri chiziq kanonik tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}; \qquad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}. \tag{7}$$

Bu *to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak* ularning yo‘naltiruvchi $\bar{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ va $\bar{s}_2(m_2, n_2, p_2)$ vektorlari orasidagi φ burchakga teng

$$\cos\varphi = \pm\frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \tag{8}$$

a) to‘g‘ri chiziqlarlarning *perpendikulyarlik sharti*

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0 \tag{9}$$

b) to‘g‘ri chiziqlarning *parallelik sharti*

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \tag{10}$$

d) to‘g‘ri chiziqlarning *ayqash bo‘lish sharti*

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{11}$$

e) parallel bo‘lmagan to‘g‘ri chiziqlarning *kesishish sharti*

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (12)$$

Berilgan $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan $\bar{s}(m, n, p)$ vektor bo‘ylab yo‘nalgan $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqgacha bo‘lgan masofa

$$d = \left|\bar{s} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right| \Big/ |\bar{s}| \qquad (13)$$

formula bilan hisoblanadi.

2-misol.

Agar $A(0,-2,8)$, $B(4,3,2)$, $C(1,4,3)$ nuqtalar berilgan bo‘lsa, A nuqtadan o‘tib BC to‘g‘ri chiziqga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

► Izlanayotgan to‘g‘ri chiziq BC to‘g‘ri chiziqga parallel bo‘lgani uchun $\vec{s} = \overrightarrow{BC}(-3,1,1)$ deb tanlash kifoya. U holda $A(0,-2,8)$ nuqtadan o‘tuvchi yo‘naltiruvchisi $\vec{s}(-3,1,1)$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzamiz:

$$\frac{x}{-3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-8}{1} \blacktriangleleft$$

3-misol.

Berilgan $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$ va $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

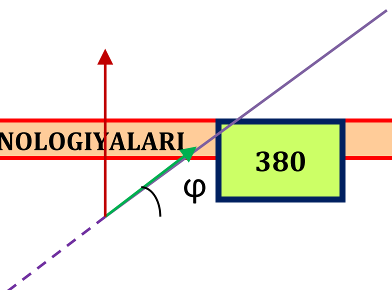
►Birinchi to‘g‘ri chiziqda yotgan ixtiyoriy nuqtadan, masalan, $M_1(2, -1, 0)$ dan ikkinchi $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$ to‘g‘ri chiziqgacha masofa topiladi.

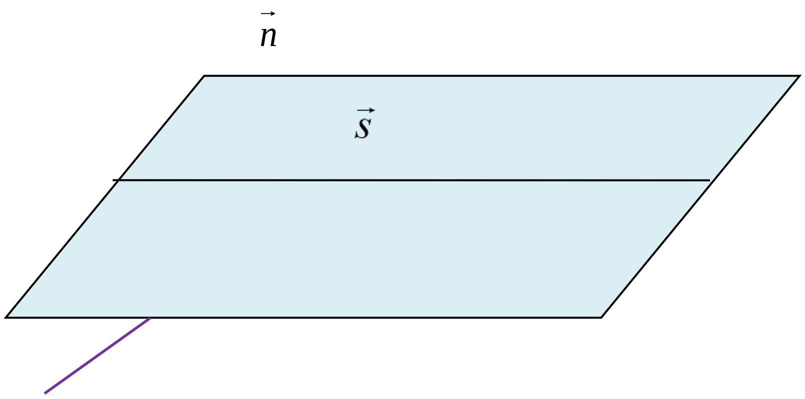
$$\overrightarrow{M_1M_0}(5, 2, 3), \ \vec{s}(3, 4, 2), \ |\vec{s}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{29} \ ,$$

$$\vec{s} \times \overrightarrow{M_1M_0} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + \vec{j} - 14\vec{k}, \ \left|\vec{s} \times \overrightarrow{M_1M_0}\right| = 3\sqrt{29} \, .$$

To‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofa $d = \left|\vec{s} \times \overrightarrow{M_1M_0}\right| \Big/ |\vec{s}| = 3$. ◄

To‘g‘ri chiziq (L): $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ va tekislik $(T): Ax + By + Cz + D = 0$ tenglamalari berilgan bo‘lsin. To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi *burchak* deb, to‘g‘ri chiziq va uning tekislikdagi orthogonal proyeksiyasi orasidagi φ burchakga aytiladi.





To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$\left|\cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{s}}\right)\right| = \sin\varphi = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasidan parametrik tenglamasiga o'tib, tekislik tenglamasiga qo'yamiz

$$(Am+Bn+Cp)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Bunda uch hol bo'lishi mumkin.

1. Agar $Am+Bn+Cp \neq 0$ bo'lsa, *to'g'ri chiziq va tekislik* *kesishadi.* Bu holda $t = -(Ax_0+By_0+Cz_0+D)/(Am+Bn+Cp)$ ni to'g'ri chiziq parametrik tenglamasiga qo'yib, *to'g'ri chiziq va tekislikning* *kesishish nuqtasi* M topiladi.

Xususan, $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ bo'lsa, *to'g'ri chiziq va tekislik* *perpendikulyar* bo'ladi.

2. Agar $Am+Bn+Cp = 0$ va $Ax_0+By_0+Cz_0+D \neq 0$ bo'lsa, *to'g'ri chiziq va tekislik* *parallel*.

3. Agar $Am+Bn+Cp = 0$ va $Ax_0+By_0+Cz_0+D = 0$ bo'lsa, *to'g'ri chiziq tekislikda* *yotadi*(to'g'ri chiziq tekislikga tegishli).

4-misol.

Berilgan $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1{,}5}{0} = \frac{z-3}{1}$ to'g'ri chiziqqa nisbatan $M(3{,}3{,}3)$ nuqtaga simmetrik M` nuqtani toping.

► $M(3{,}3{,}3)$ nuqtadan o'tuvchi $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1{,}5}{0} = \frac{z-3}{1}$ to'g'ri chiziqga perpendikulyar tekislik tenglamasini topamiz.

$$-1(x-3) + 0(y-3) + 1(z-3) = 0,$$

$$-x + z = 0.$$

To'g'ri chiziq va tekislik kesishgan nuqtani topamiz.

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1,5}{0}=\frac{z-3}{1}\Rightarrow\begin{cases}x=-t+1,\\ y=1,5,\\ z=t+3.\end{cases}$$

$$-(-t+1)+(t+3)=0,$$
$$2t+2=0,$$
$$t=-1.$$

$M_0(2;1,5;2)$ - kesishish nuqtasi. Bundan

$$x_{M_0}=\frac{x_M+x_{M'}}{2}\Rightarrow x_{M'}=2x_{M_0}-x_M=2\cdot 2-3=1,$$
$$y_{M_0}=\frac{y_M+y_{M'}}{2}\Rightarrow y_{M'}=2y_{M_0}-y_M=2\cdot 1,5-3=0,$$
$$z_{M_0}=\frac{z_M+z_{M'}}{2}\Rightarrow z_{M'}=2z_{M_0}-z_M=2\cdot 2-3=1.$$

Natijada, $M'(1,0,1)$ izlangan nuqtaga ega bo‘lamiz. ◄

Auditoriya topshiriqlari

1. $\begin{cases}x-3y+2z+2=0\\ x+3y+z+14=0\end{cases}$ umumiy tenglama bilan berilgan to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini yozing. (Javob: $\frac{x+8}{-9}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{6}$.)

2. Uchburchakning $A(1,-2,3)$, $B(4,3,-2)$, $C(2,1,-2)$ uchlari berilgan bo‘lsa, AD medianasining parametrik tenglamasini yozing.(Javob: $x=1+3t, y=-2+2t, z=3-2t$.)

3. A va B ning qanday qiymatlarida $Ax+By+6z-5=0$ tekislik va $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{-5}=\frac{z+2}{3}$ to‘g‘ri chiziq perpendikulyar bo‘ladi? (Javob: $A=4,\ B=-10.$)

4. To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchakni toping:

$a)$ $\begin{cases}3x-y-1=0,\\ 3x+2z-2=0\end{cases}$ va $2x+y+z-4=0;$

$b)$ $\begin{cases}x-2y+3=0,\\ 3y-z-1=0\end{cases}$ va $2x+3y+z+1=0.$

(Javob: $a)$ $\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}$; $b)$ $\varphi=\arcsin\frac{5}{7}$.)

5. To‘g‘ri chiziq va tekislikning o‘zaro joylashuvini aniqlang. Agar ular kesishuvchi bo‘lsa, kesishish nuqtasini toping:

$a)\ \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{z}{3}$ va $3x-3y+2z-5=0;$

$b)\ \dfrac{x-13}{5}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{3}$ va $x+2y-3z-3=0;$

$d)\ \dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-7}{3}$ va $2x-y+3z-7=0.$

(Javob: *a*) parallel; *b*) to‘g‘ri chiziq tekislikda yotadi; *d*) $M(3,2,1)$ nuqtada kesishadi.)

6. $A(3,\ 4,\ 0)$ nuqtadan va $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing. (Javob: $x-2y+z+5=0$.)

7. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi va $2x-y-z-3=0$ tekislikga perpendikulyar tekislik tenglamasini yozing. (Javob: $x+7y-5z+14=0$.)

8. $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$ va $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z}{1}$ parallel to‘g‘ri chiziqlardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing. (Javob: $2x+3y+5z+5=0$.)

9. $A(3,\ 1,-1)$ nuqtaning $x-2y+z+6=0$ tekislikdagi proyeksiyasini toping. (Javob: (2, 3, -2).)

10. $A(3,1,-2)$ nuqtaning $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$ to‘g‘ri chiziqdagi proyeksiyasini toping. (Javob: (-1, -1, 0).)

11. $\begin{cases} x=z-2 \\ y=2z+1 \end{cases}$ va $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishuvchi ekanligini ko‘rsating, hamda ular joylashgan tekislik tenglamasini yozing. (Javob: $x+2y-5z=0$.)

Mustaqil yechish uchun testlar

1. $A(3,\ -2,\ 0)$ va $B(5,\ -4,\ 3)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasini yozing.

A) $\begin{cases} x=3+3t, \\ y=-2+2t, \\ z=-2t. \end{cases}$ B) $\begin{cases} x=5+2t, \\ y=-4-2t, \\ z=3+3t. \end{cases}$ C) $\begin{cases} x=3+2t, \\ y=-2+2t, \\ z=3t. \end{cases}$ D) $\begin{cases} x=1+3t, \\ y=-2+2t, \\ z=3-2t. \end{cases}$

2. *A* ning qanday qiymatida $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{A}=\dfrac{z}{2}$ va $\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z-3}{-2}$ to‘g‘ri chiziqlar perpendikulyar bo‘ladi?

A) 1; B) -2; C) 3; D) -1.

3. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{3}$ to‘g‘ri chiziq va $x+7y-5z+14=0$ tekislik qanday joylashgan?

A) parallel; B) perpendikulyar; C) to‘g‘ri chiziq tekislikda yotadi; D) kesishadi.

4. $\frac{x+1}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{2}$ to‘g‘ri chiziq va $2x+3y+5z+5=0$ tekislik kesishgan nuqtani toping.

A) $(3,\ -2,\ 0)$, B) $(3,\ -2,\ -1)$, C) $(4,\ -1,\ -2)$, D) $(2,\ -3,\ 0)$.

5. $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{3}$ va $\frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{5}$ to‘g‘ri chiziqlar qanday joylashgan?

A) parallel; B) perpendikulyar; C) ayqash; D) kesishadi.

Shaxsiy uy topshiriqlari

1.1. $M(4,\ -1,\ -2)$ nuqtadan o‘tuvchi va $2x-y-3z+5=0$ tekislikga parallel bo‘lgan tekislikning o‘qlardan ajratgan kesmalarini toping.

1.2. $A(-1,\ 3,\ 2),\ B(1,1,0)$ nuqtalardan o‘tuvchi va $x+2y-3z-3=0$ tekislikga perpendikulyar bo‘lgan tekislik tenglamasini yozing.

1.3. Agar $M_1(3,-2,4),\ M_2(-1,\ 4,\ 2)$ nuqtalar berilgan bo‘lsa, M_1M_2 kesmaning o‘rtasidan o‘tuvchi va shu kesmaga perpendikulyar tekislik tenglamasini yozing.

1.4. Ox o‘qidan va $A(-1,\ 3,\ -3)$ nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing va $x-2y+2z+5=0$ tekislik bilan hosil qilgan burchagini aniqlang.

1.5. $M(4,\ -1,\ -2)$ nuqtadan $2x+2y-z+4=0$ tekislikgacha bo‘lgan masofani toping.

1.6. $A(-1,\ 3,\ 2),\ B(1,1,0)$ va $C(2,\ 0,\ -1)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

1.7. $A(4,\ 1,\ 2),\ B(2,-1,3)$ nuqtalardan o‘tuvchi va $\vec{a}(1,2,-5)$ vektorga parallel bo‘lgan tekislik tenglamasini yozing.

1.8. $A(3,\ 2,-3),\ B(-1,\ 4,\ 2)$ nuqtalardan o‘tuvchi va Oy o‘qiga parallel bo‘lgan tekislik tenglamasini yozing.

1.9. $M(5,\ 4,\ -8)$ nuqtadan $3x+6y-2z+15=0$ tekislikgacha bo‘lgan masofani toping.

1.10. $A(1,\ 2,\ 1),\ B(3,0,3)$ nuqtalardan o‘tuvchi va Ox o‘qidan $a=2$ kesma ajratuvchi tekislik tenglamasini yozing.

1.11. $A(-1,\ 2,\ 3)$ nuqtadan o‘tuvchi, $3x-y+2z+7=0$ va $2x+y+3z-5=0$ tekisliklarga perpendikulyar bo‘lgan tekislik tenglamasini yozing.

1.12. $A(2,\ -5,\ 2),\ B(1,0,1)$ va $C(2,\ 4,\ -1)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

1.13. O‘zaro parallel bo‘lgan $2x-9y+6z+17=0$ va $2x-9y+6z-16=0$ tekisliklar orasidagi masofani toping.

1.14. $x-3y+6=0$ va $x+2y-7=0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

1.15. Oz o‘qidan o‘tuvchi va $2x+y-2z+7=0$ tekislik bilan 45° burchak tashkil etuvchi tekislik tenglamasini yozing.

1.16. $3x+6y-2z+15=0$ tekislikdan 4 birlik masofada yotuvchi tekislik tenglamasini yozing.

1.17. $C(2,\ 0,\ -1)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\vec{a}(1,\ 3,-2),\ \vec{b}(1,-1,1)$ vektorlarga perpendikulyar tekislik tenglamasini yozing.

1.18. $x-2y-z-14=0$ va $x+y+z-3=0$ tekisliklarning kesishish chizig‘idan hamda $A(2,\ 4,\ -2)$ nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

1.19. $x-2y+z-7=0$, $2x+y-3z+16=0$ tekisliklarning kesishish chizig‘idan o‘tuvchi va $4x+3y+z-15=0$ tekislikga perpendikulyar tekislik tenglamasini yozing.

1.20. $A(-1,\ 3,\ 2),\ B(1,1,0)$ va $C(2,\ 0,\ -1)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik bilan Oxz tekislik orasidagi burchakni toping.

1.21. $2x-y+2z-7=0$ va $x-2y+2z-2=0$ tekisliklarning kesishish chizig‘idan o‘tuvchi hamda Ox o‘qiga parallel bo‘lgan tekislik tenglamasini yozing.

1.22. O‘zaro parallel bo‘lgan $2x-3y+6z-3=0$ va $2x-3y+6z-24=0$ tekisliklar orasidagi masofani toping.

1.23. $A(2,\ 1,\ 3)$ nuqtadan o‘qlardan $a=1,\ b=2, c=3$ kesma ajratuvchi tekislikgacha bo‘lgan masofani toping.

1.24. Ox o‘qidan o‘tuvchi va $2x+y-2z+7=0$ tekislik bilan 45° burchak tashkil etuvchi tekislik tenglamasini yozing.

1.25. $A(2,\ -3,\ 1)$ nuqtadan o‘tuvchi, $2x+y-2z+7=0$ va $2x+y+3z-5=0$ tekisliklarga perpendikulyar bo‘lgan tekislik tenglamasini yozing.

1.26. $M(3,\ -1,\ 7)$ nuqtadan o‘tuvchi va $3x+y-2z+15=0$ tekislikga parallel bo‘lgan tekislikning o‘qlardan ajratgan kesmalarini toping.

1.27. $A(2,\ -3,-1)$ nuqtadan o‘tuvchi, $x-3y+6=0$ va $2x+y-2z-5=0$ tekisliklarga perpendikulyar bo‘lgan tekislik tenglamasini yozing.

1.28. $M(-3,\ 1,\ -9)$ nuqtaning $4x-3y-z-7=0$ tekislikga nisbatan simmetrik bo‘lgan M' nuqta koordinatalarini toping.

1.29. $5x+3y+z-18=0$ va $2x+z-9=0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

1.30. O‘zaro parallel bo‘lgan $3x-2y-6z-13=0$ va $3x-2y-6z+15=0$ tekisliklar orasidagi masofani toping.

2.Quyidagi umumiy tenglama bilan berilgan to‘g‘ri chiziqlarning kanonik tenglamalarini yozing.

2.1 $\begin{cases} 2x+y+z-2=0 \\ 2x-y-3z+6=0 \end{cases}$

2.2 $\begin{cases} 6x-7y-4z-2=0 \\ x+7y-z-5=0 \end{cases}$

2.3 $\begin{cases} x+3y+z+14=0 \\ x-3y+2z+2=0 \end{cases}$

2.4 $\begin{cases} x-2y+3z-2=0 \\ 2x+3y-8z+3=0 \end{cases}$

2.5 $\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ x-y-2z+2=0 \end{cases}$

2.6 $\begin{cases} 6x-5y-4z+8=0 \\ 6x+5y+3z+4=0. \end{cases}$

2.7 $\begin{cases} 2x+2y-z-8=0 \\ x-2y+z-4=0 \end{cases}$

2.8 $\begin{cases} 2x-5y+2z+5=0 \\ x+5y-z-5=0. \end{cases}$

2.9 $\begin{cases} 3x+y-z-6=0 \\ 3x-y+2z=0 \end{cases}$

2.10 $\begin{cases} 2x-3y+z+6=0 \\ x-3y-2z+3=0 \end{cases}$

2.11 $\begin{cases} x+5y+2z+11=0 \\ x-y-z-1=0 \end{cases}$

2.12 $\begin{cases} 4x+y+z+2=0 \\ 2x-y-3z-5=0 \end{cases}$

2.13 $\begin{cases} 2x+3y+z+6=0 \\ x-3y-2z+3=0 \end{cases}$

2.14 $\begin{cases} 2x+y-3z-2=0 \\ 2x-y+z+6=0 \end{cases}$

2.15 $\begin{cases} 3x+4y-2z+1=0 \\ 2x-4y+3z+4=0. \end{cases}$

2.16 $\begin{cases} x+y-2z-2=0 \\ x-y+z+2=0 \end{cases}$

2.17 $\begin{cases} 5x+y-3z+4=0 \\ x-y+2z+2=0. \end{cases}$

2.18 $\begin{cases} x+5y-z++11=0 \\ x-y+2z-1=0. \end{cases}$

2.19 $\begin{cases} x-y-z-2=0 \\ x-2y+z+4=0. \end{cases}$

2.20 $\begin{cases} x-2y-z+4=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$

2.21 $\begin{cases} 4x+y-3z+2=0 \\ 2x-y+z-8=0. \end{cases}$

2.22 $\begin{cases} 6x-7y-z-2=0 \\ x+7y-4z-5=0 \end{cases}$

2.23 $\begin{cases} 3x+3y-2z-1=0 \\ 2x-3y+z+6=0. \end{cases}$

2.24 $\begin{cases} x+5y+2z-2=0 \\ 2x-5y-z+5=0 \end{cases}$

2.25 $\begin{cases} 6x-7y-4z-2=0 \\ x+7y-z-5=0 \end{cases}$

2.26 $\begin{cases} x+3y+2z+14=0 \\ x-3y+z+2=0. \end{cases}$

2.27 $\begin{cases} 2x+3y-2z+6=0 \\ x-3y+z+3=0. \end{cases}$

2.28 $\begin{cases} 3x+3y+z-1=0 \\ 2x-3y-2z+6=0. \end{cases}$

2.29 $\begin{cases} 3x+4y+3z+1=0 \\ 2x-4y-2z+3=0 \end{cases}$

2.30 $\begin{cases} 6x+5y-4z+4=0 \\ 6x-5y+3z+8=0. \end{cases}$

3. Quyidagi masalalarni yeching.

3.1. $M(3,\ -1,\ 7)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\begin{cases} 3x+y+3z+1=0 \\ x-2y-z+4=0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqga parallel to‘g‘ri chiziq tenglamasini toping.(Javob: $\frac{x-3}{5}=\frac{y+1}{6}=\frac{z-7}{-7}$.)

3.2. m va C ning qanday qiymatlarida $\frac{x-3}{m}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-5}$ to‘g‘ri chiziq $3x-2y+Cz-7=0$ tekislikga perpendikulyar bo‘ladi? .(Javob: $m=-3, C=5$.)

3.3. p ning qanday qiymatida $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-4}{p}$ va $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0 \\ x-2y+3z-2=0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqlar perpendikulyar bo‘ladi? .(Javob: $p=-5$.)

3.4. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{-1}$ to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi va $x+2y+3z-5=0$ tekislikga perpendikulyar tekislik tenglamasini yozing. (Javob: $x+7y-5z+6=0$.)

3.5. D ning qanday qiymatida $\begin{cases} x+y-2z+D=0 \\ x-2y+3z+12=0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziq Oz o‘qini kesib o‘tadi? (Javob: $D=-8$.)

3.6. $M(1, 3, -2)$ nuqtaning $\begin{cases} x+2y-z+3=0 \\ x+y+z+2=0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqga nisbatan simmetrik nuqtasini toping.(Javob: $(-3, -5, 2)$.)

3.7. $M(2,\ 0,\ 1)$ nuqtadan va $\frac{x-3}{3}=\frac{y+1}{5}=\frac{z+1}{-2}$ to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing. (Javob: $3x-y+2z-8=0$.)

3.8. $\frac{x-3}{3}=\frac{y+1}{5}=\frac{z+1}{-2}$ va $\frac{x+3}{3}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-8}{-7}$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishuvchi ekanini isbotlang va shu to‘g‘ri chiziqlardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing.(Javob: $3x-y+2z-8=0$.)

3.9. $\frac{x+6}{3}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z-15}{-7}$ va $\begin{cases} 2x+3z-3=0 \\ 2y+5z+7=0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasini toping. (Javob: $(0, -6,\ 1)$.)

3.10. $M(3,\ 0, -2)$ nuqtadan $\frac{x-1}{2}=\frac{y+6}{-1}=\frac{z-2}{3}$ to‘g‘ri chiziqga tushirilgan perpendikulyar tenglamasini yozing. (Javob: $\frac{x-3}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z+2}{-1}$.)

3.11. $\frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+5}{-3}$ va $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-3}$ parallel to‘g‘ri chiziqlardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing.(Javob: $x-3y-z-2=0$.)

3.12. $\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+6}{6}$ va $\begin{cases}4x-y-z-2=0\\2x+y-2z+17=0\end{cases}$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping. (Javob: $\varphi=\arccos\frac{20}{21}\approx 17°48'$.)

3.13. $M(3,\ 4,\ 0)$ nuqtadan va $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{2}$ to‘g‘ri chiziqgacha bo‘lgan masofani toping. (Javob: $d=\sqrt{17}$.)

3.14. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{3}$ va $\begin{cases}x-2y+3z-2=0\\2x+3y-8z+3=0\end{cases}$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping. (Javob: $\varphi=90°$.)

3.15. $A(-5,\ -3,\ 2)$ nuqtaning $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{1}$ to‘g‘ri chiziqga nisbatan simmetrik nuqtasini toping. (Javob: (3, 1,-2).)

3.16. $M(3,\ -1,\ 5)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\begin{cases}3x+y+3z+1=0\\x-2y-z+4=0\end{cases}$ to‘g‘ri chiziqga perpendikulyar tekislik tenglamasini toping. (Javob: $5x+6y-7z+26=0$.)

3.17. $M(5,-1,\ 3)$ nuqtaning $3x-y+2z-8=0$ tekislikdagi proyeksiyasini toping.(Javob: $(2,\ 0,\ 1)$.)

3.18. $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{-1}$ to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi va $x-7y+5z-5=0$ tekislikga perpendikulyar tekislik tenglamasini yozing. (Javob: $x-2y-3z+5=0$.)

3.19. $x=2t+1, y=4t+2, z=5t+3$ to‘g‘ri chiziqga nisbatan $M(4,3,10)$ nuqtaga simmetrik bo‘lgan M' nuqtani toping. (Javob: $M'(2,9,6)$.)

3.20. $\frac{x-5}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{-1}$ to‘g‘ri chiziqdan va $M(4,-1,3)$ nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing. (Javob: $x+3y-z+2=0$.)

3.21. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{-1}$ to‘g‘ri chiziqdan va $M(3,1,8)$ nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing. (Javob: $x+3y-z+2=0$.)

3.22. $\frac{x+4}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{1}$ va $\begin{cases} x-y+z+3=0 \\ 3x-y-z+7=0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqlar kesishuvchi ekanini isbotlang, kesishish nuqtasini toping. (Javob: $(-1,3,1)$.)

3.23. $\begin{cases} x+y-z-5=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziq bilan $x+2y+3z-30=0$ tekislik perpendikulyar ekanini isbotlang va kesishish nuqtasini toping. (Javob: $(5,5,5)$.

3.24. $\begin{cases} 2x-y-2z-2=0 \\ x-y-4=0 \end{cases}$ va $\begin{cases} 3x-2y-2z+2=0 \\ y-2z-1=0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel ekanini isbotlang, ular orasidagi masofani toping. (Javob: $d=\sqrt{17}$.)

3.25. $M(1,-4,-5)$ nuqtadan $x=4t+6, y=3t+4, z=2t+2$ to‘g‘ri chiziqgacha bo‘lgan masofani toping. (Javob: $\sqrt{22}$.)

3.26. $A(2,\ 6,\ 9)$ nuqtaning $\begin{cases} x-2y+2z+1=0 \\ 3x-2y+z+1=0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqdagi proyeksiyasini toping. (Javob: $(3,8,6)$.)

3.27. $\begin{cases} x+2y+2z-1=0 \\ 3x+y-4z+2=0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziq bilan $A(2,-2,0)$ va $B(3,-3,-1)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq orasidagi burchakni toping. (Javob: $\varphi=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.)

3.28. $x=2t-3,\ y=3t+1,\ z=-t-2$ to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi va $3x-2y+z=0$ tekislikga perpendikulyar tekislik tenglamasini yozing. (Javob: $x-5y-13z-18=0$.)

3.29. $A(2,1,-3)$ nuqtadan o‘tub, $\begin{cases} x-2y+2z=0 \\ 3x-2y+z+1=0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasini yozing. (Javob: $x=2t+2, y=5t+1, z=4t-3$.)

3.30. $\begin{cases} 5x-2y+2=0 \\ 2x-z+1=0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziq va $A(4,\ 6,\ 1)$ va $B(0,\ -4,-7)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlarning parallelligini isbotlang va ulardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing. (Javob: $10x-8y+5z+3=0$.)

IV-BOB MATEMATIK ANALIZ ASOSLARI

4.1 Kompleks sonlar va ular ustida amallar. Muavr va Eyler formulalari[121]

Ushbu $z = x + iy$ ko'rinishdagi songa *kompleks son* deyiladi, bu yerda x, y - haqiqiy sonlar, i esa $i^2 = -1$ bo'lgan *mavhum birlik*. x- kompleks sonning *haqiqiy qismi*, y esa *mavhum qismi* deb ataladi va $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$ kabi belgilanadi. Agar $y = 0$ bo'lsa, $z = x \in R$, agar $x = 0$ bo'lsa, $z = iy$ *sof mavhum son* hosil bo'ladi.

Geometrik nuqtai nazardan, har bir $z = x + iy$ kompleks songa koordinatalar tekisligida bitta M(x, y) nuqta (yoki $\overrightarrow{OM}$ vektor) va, aksincha, har bir M(x, y) nuqtaga bitta $z = x + iy$ kompleks son mos keladi. Barcha kompleks sonlar to'plami C harfi bilan belgilanadi va $R \subset C$.

$z = x + iy$ va $\bar{z} = x - iy$ sonlar *qo'shma kompleks sonlar* deyiladi.

$z_1 = x_1 + iy_1$ va $z_2 = x_2 + iy_2$ ikkita kompyleks sonlar uchun quyidagi amallar o'rinli:

1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$;

2) $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$;

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

Ma'lumki, har bir $z = x + iy$ kompleks son uchun $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ formulalar o'rinli. $r = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$ son $z = x + iy$ *kompleks sonning moduli* deyiladi, $\overrightarrow{OM}$ vektor va Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan φ burchagi esa *kompleks sonning argumenti* deyiladi va $\varphi = \arg z$ kabi belgilanadi. U quyidagi

$$\varphi = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, \text{ agar } \ x > 0,\ y > 0 \text{ bo`lsa;} \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, \text{ agar } \ x < 0 \ \text{ bo`lsa;} \\ 2\pi + arctg\dfrac{y}{x}, \text{ agar } \ x > 0,\ y < 0 \ \text{ bo`lsa} \end{cases} \tag{1.1}$$

formula bilan hisoblanadi. Har qanday $z = x + iy$ kompleks son

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1.2}$$

trigonometrik shaklda yoki $z = re^{i\varphi}$ *ko'rsatkichli shakl*da ifodalanadi(chunki $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ Eyler formulasi o'rinli).

Agar $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ kompleks sonlar bo'lsa,

[121] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))\,; \quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))\,. \qquad (1.3)$$

$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ kompleks sonni n-*darajaga oshirish* uchun ***Muavr formulasi***

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (1.4)$$

o‘rinli. *n-ildiz chiqarish* uchun esa

$$z_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}),\quad k=0,1,2,...,n-1 \qquad (1.5)$$

formula qo‘llanadi.

Auditoriya topshiriqlari

1. $z_1=2+3i$, $z_2=3-4i$ va $z_3=5-2i$ bo‘lsa, $(2z_1+z_2)z_3$ ni hisoblang. (Javob: $39-4i$.)

2. $z_1=2+3i$, $z_2=3-4i$ va $z_3=1-2i$ bo‘lsa, $((z_1+z_3)z_2)/z_3$ ni hisoblang. (Javob: $\frac{31}{5}+\frac{17}{5}i$.)

3. Kompleks sonlarni trigonometrik shaklda ifodalang: $a)\ z_1=-1+i$, $b)\ z_2=3i$ $d)\ z_3=2-2i$, $e)\ z_4=-4$.

4. $z_1=-2+3i$ bo‘lsa, $|z-z_1|<1$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o‘rni qanday sohani ifodalaydi? (Javob: Markazi z_1 nuqtada bo‘lgan R=1 radiusli doiraning ichki qismi.)

5. $z_1=-1+3i$ bo‘lsa, $|z+z_1|>2$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o‘rni qanday sohani ifodalaydi? (Javob: Markazi $-z_1$ nuqtada bo‘lgan R=2 radiusli doiraning tashqi qismi.)

6. $1<|z-i|<3$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o‘rni qanday sohani ifodalaydi? (Javob: Markazi $z=i$ nuqtada bo‘lgan R_1=1 va R_2=3 radiusli aylanalar orasidagi halqa.)

7. $0<\mathrm{Re}(3iz)<2$ shartni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o‘rni qanday sohani ifodalaydi? (Javob: $y=0$ va $y=-\frac{2}{3}$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi gorizontal polosa.)

8. $(1-\sqrt{3}i)^5$ ni hisoblang.(Javob: $16+16i\sqrt{3}$.)

9. $z^3+1=0$ tenglamaning ildizlarini toping.(Javob: $z_0=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_1=-1,$ $z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.)

10. Hisoblang: 1) $\sqrt[4]{-8-8i\sqrt{3}}$, 2) $\sqrt[3]{-2+2i}$. .

11. Tenglamalarni yeching: 1) $z^3-8=0$, 2) $z^6+64=0$.

12. Eyler formulasidan foydalanib

$$cosx+\cos 2x+\cos 3x+...+\cos nx$$

yig‘indini hisoblang. ($\text{Javob}: \left(\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}\right)\Big/\sin\frac{x}{2}$.)

Mustaqil yechish uchun testlar

1. $z_1=1+3i$ va $z_2=3-2i$ uchun $2z_1+z_2$ ni hisoblang.
   A) $5+4i$, B) $5-8i$, C) $5-4i$, D) $2+3i$.
2. $z_1=2-3i$ va $z_2=3-4i$ berilgan bo‘lsa, z_1z_2 ni hisoblang.
   A) $18-17i$, B) $-6-i$, C) $-6-17i$, D) $6+17i$.
3. $z_1=3-4i$ va $z_2=2-i$ berilgan bo‘lsa, z_1/z_2 ni hisoblang.
   A) $3-2i$, B) $-2-i$, C) $2-i$, D) $0{,}4-i$.
4. $z=2-2i\sqrt{3}$ kompleks sonning modulini toping.
   A) $r=3$; B) $r=4$; C) $r=5$; D) $r=1$.
5. $z=-2+2i\sqrt{3}$ kompleks sonning argumentini toping.
   A) $\varphi=\frac{\pi}{6}$; B) $\varphi=\frac{\pi}{3}$; C) $\varphi=\frac{5\pi}{6}$; D) $\varphi=\frac{2\pi}{3}$.
6. $z=2\sqrt{3}-2i$ kompleks sonning trigonometrik shaklini toping.
   A) $4(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6})$; B) $4(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})$;
   C) $4(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})$; D) $4(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$.
7. $z=2\sqrt{3}+2i$ kompleks sonning ko‘rsatkichli shaklini toping.
   A) $z=4e^{i\frac{\pi}{3}}$; B) $z=4e^{i\frac{\pi}{6}}$; C) $z=4e^{i\frac{5\pi}{6}}$; D) $z=4e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
8. $z=-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$ kompleks sonning ko‘rsatkichli shaklini toping.
   A) $z=e^{i\frac{6\pi}{7}}$; B) $z=e^{i\frac{\pi}{7}}$; C) $z=e^{-i\frac{\pi}{7}}$; D) $z=e^{-i\frac{6\pi}{7}}$.

9. $\left(\sqrt{3}-i\right)^4$ ni hisoblang.

A) $8+8i\sqrt{3}$, B) $8-8i\sqrt{3}$, C) $-8+8i\sqrt{3}$, D) $-8-8i\sqrt{3}$.

10. $z^3+8=0$ tenglamaning yechimi noto'g'ri berilgan javobni aniqlang.

A) $-1+i\sqrt{3}$, B) $1+i\sqrt{3}$, C) -2, D) $1-i\sqrt{3}$.

4.2 Funksiya va uning berilish usullari

Agar ixtiyoriy $x\in D$ elementga biror f qoida bilan yagona y element mos qo'yilgan bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya berilgan deyiladi. x - *erkli o'zgaruvchi* yoki *argument* deyiladi. D - *aniqlanish soha*, y ning qabul qiladigan qiymatlari esa *qiymatlar to'plami* (yoki *o'z garish sohasi*) deyiladi va E harfi bilan belgilanadi.

Funksiya *jadval usulda*, *grafik usulda* va *analitik usulda* beriladi. Analitik usulda berilgan $y=f(x)$ funksiyaning D va E sohalari ko'p hollarda ko'rsatilmaydi, ammo tabiiy ravishda $y=f(x)$ funksiya xossalariga ko'ra aniqlanadi.

1-misol

Ushbu $y=\sqrt{7-6x-x^2}$ funksiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlar to'plamini toping.

► Kvadrat funksiya $7-6x-x^2\geq 0$ da aniqlangan. Kvadrat uchhadning ildizlari $x_1=-7,\ x_2=1$. Yuqoridagi tengsizlik $-(x+7)(x-1)\geq 0$ tengsizlikga teng kuchli bo'lib, $-7\leq x\leq 1$ yechimga ega. Funksiyaning aniqlanish sohasi $D=[-7;\,1]$. D sohada $0\leq 7-6x-x^2\leq 16$ bo'lgani uchun qiymatlar to'plami $E=[0;\,4]$. ◄

$u=\varphi(x)$ funksiya D to'plamda aniqlangan bo'lib, uning qiymatlar to'plami G bo'lsin. Agar $y=f(u)$ funksiya G to'plamda aniqlangan funksiya bo'lsa, u holda $y=f(\varphi(x)$ *murakkab funksiya* deyiladi. $y=f(\varphi(x)$ funksiya ikkita $y=f(u)$ va $u=\varphi(x)$ funksiyalarning kompozitsiyasi yoki φ funksiyaning f funksiyasi deb ataladi. Murakkab funksiya ikki yoki undan ortiq funksiyadan tuzilgan bo'ladi.

2-misol

Quyidagi murakkab funksiyalar nechta funksiyadan tashkil topgan:

$a)\ y=\sin(x^2+1),\quad b)\ y=\ln\sin 3^x.$

► $a)$ $y=\sin(x^2+1)$ ikkita $y=\sin u$ va $u=x^2+1$ funksiyalardan tashkil topgan.

$b)$ $y=\ln\sin 3^x$ funksiya uchta $y=\ln u$, $u=\sin v$ va $v=3^x$ funksiyalardan tashkil topgan.◄

$y = f(x)$ *funksiyaning grafigi*[122] deb Oxy tekisligidagi koordinatalari f qoida bilan bog‘langan $M(x; y)$ nuqtalar to‘plamiga aytiladi.

$\forall x \in D$ uchun $-x \in D$ bo‘lsin. Agar $\forall x \in D$ uchun $f(-x) = f(x)$ bo‘lsa, $y = f(x)$ juft funksiya deyiladi. Agar $\forall x \in D$ uchun $f(-x) = -f(x)$ bo‘lsa, $y = f(x)$ toq funksiya deyiladi.

Agar $y = f(x)$ funksiya D sohani E ga bir qiymatli akslantirsa, u holda x ni y orqali ifodalovchi funksiya $x = g(y)$ mavjud va u $y = f(x)$ ga *teskari funksiya* deyiladi. $x = g(y)$ funksiyaning aniqlanish sohasi E , qiymatlar to‘plami esa D ga teng. $y \equiv f(g(y))$ va $x \equiv g(f(x))$ bolgani uchun $y = f(x)$ va $x = g(y)$ funksiyalar o‘zaro teskari. O‘z aro teskari $y = f(x)$ va $x = g(y)$ funksiyalarning grafigi birinchi va uchinchi chorak bissektrisa chizig‘i $y = x$ ga nisbatan simmetrikdir.

3-misol

Ushbu $y = x^2 - 6x + 11$ funksiyaga $(-\infty; 3]$ oraliqdagi teskari funksiyani toping.

► Berilgan funksiyadan to‘la kvadrat ajratamiz

$$y = (x-3)^2 + 2.$$

Bu tenglikdan x ni topamiz

$$x = 3 \pm \sqrt{y-2}$$

va $x \in (-\infty; 3]$ ekanini e’tiborga olgan holda tanlaymiz

$$x = 3 - \sqrt{y-2}.$$

x ni y ga almashtirib, izlangan funksiyani topamiz

$$y = 3 - \sqrt{x-2}. \blacktriangleleft$$

Auditoriya topshiriqlari

1. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

1) $y = \sqrt{x^2 + 6x + 5}$; 2) $y = \lg(5 - 4x - x^2)$; 3) $y = \arcsin\dfrac{1-x}{3}$; 4) $y = 1/\sqrt{2^{3x} - 4}$.

(Javob: 1) $(-\infty; -1] \cup [-5; \infty)$; 2) $(-5; 1)$; 3) $[-2; 4]$; 4) $(2/3; \infty)$.)

2. Quyidagi murakkab funksiyalar nechta funksiyadan tashkil topgan:

1) $y = \lg\sin x^2$; 2) $y = 2^{|\cos x|}$; 3) $y = \sqrt[3]{arctg 3^{x^2}}$; 4) $y = \cos^3\sqrt{\arcsin e^x}$?

[122] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

(Javob: 1) 3 ta; 2) 3 ta; 3) 4 ta; 4) 5 ta.)

3. $y=\begin{cases} x, \text{ agar } x\le 0 \text{ bo`lsa,} \\ x^2, \text{ agar } x>0 \text{ bo`lsa} \end{cases}$ funksiyaning teskari funksiyasini toping. Berilgan funksiya va uning teskari funksiyasi grafigini yasang.

4. Quyidagi funksiyalarning grafiklarini yasang:

1) $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$; 2) $y=\left|5-4x-x^2\right|$; 3) $y=2\sin 2x$; 4) $y=|x-2|+|x+1|$.

5. Quyidagi funksiyalarning juft yoki toqligini aniqlang:

1) $y=\dfrac{2x^2+3}{x^2-1}$; 2) $y=\left|5-4x-x^3\right|$; 3) $y=2\sin 2x+x$; 4) $y=|x-2|+|x+2|$

(Javob: 1) Juft ; 2) Juft ham, toq ham emas; 3) Toq; 4) Juft funksiya.)

6. Agar $f(x)=\lg x,\ \varphi(x)=\sin 2x,\ g(x)=x^2+x$ bo‘lsa, funksiyani $y=g(f(\varphi(x)))$ toping. (Javob: $y=\lg^2\sin 2x+\lg\sin 2x$.)

Mustaqil yechish uchun testlar

1. $y=\arccos\dfrac{2x}{x+3}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

A) $(-1;\ 1)$; B) $[-1;\ 1]$; C) $(-\infty;-1]\cup[3;\ \infty)$; D) $[-1;\ 3]$.

2. $y=\sqrt[3]{\lg\left|\sin x^3\right|}$ murakkab funksiya nechta funksiyadan tashkil topgan?

A) 3 ta; B) 4 ta; C) 5 ta; D) 2 ta.

3. Quyidagi funksiyalardan qaysilari juft ekanligini aniqlang:

1) $y=x^3\sin 2x$; 2) $y=x\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$; 3) $y=\left|5-4x+x^2\right|$; 4) $y=x^2cos(x+1)$.

A) 1), 3) B) 1), 2) C) 1), 4) D) 3), 4).

4. $y=x^2-4x+7$ funksiyaga $(-\infty;2]$ oraliqdagi teskari funksiyani toping.

A) $y=2+\sqrt{x-3}$; B) $y=2-\sqrt{x-3}$; C) $y=2+\sqrt{x+3}$; D) $y=3-\sqrt{x-2}$

5. $y=\dfrac{x-1}{2-3x}$ funksiyaga teskari funksiyani toping.

A) $y=\dfrac{2x+1}{3x+1}$; B) $y=\dfrac{2-3x}{x-1}$; C) $y=\dfrac{2x-1}{3x+1}$; D) $y=\dfrac{x+1}{2+3x}$.

4.3 Sonli ketma-ketlik va funksiya limiti[123]

Natural sonlar to‘plamida aniqlangan funksiya *sonli ketma-ketlik* deyiladi. $x_n = f(n), n \in N$. $x_n -$ ketma-ketlikning *n*- hadi uning *umumiy hadi* deb ataladi. Sonli ketma-ketlik $\{x_n\}$orqali belgilanadi.

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N = N(\varepsilon) > 0$ son mavjud bo‘lsaki, barcha $n \geq N$ lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a o‘z garmas son $\{x_n\}$ *ketma-ketlikning limiti* deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \ .$$

1-misol

Ushbu $x_n = \dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}$ ketma ketlikning limiti $a = -\dfrac{1}{2}$ ekanini isbotlang.

► $\forall \varepsilon > 0$ son uchun unga mos $N = N(\varepsilon) > 0$ son mavjudligini ko‘rsatamiz:

$$|x_n - a| = \left| \frac{1-2n^2}{2+4n^2} + \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \text{ yoki } \left| \frac{2-4n^2+2+4n^2}{2(2+4n^2)} \right| < \varepsilon, \quad \frac{1}{1+2n^2} < \varepsilon.$$

Bundan, $n > \sqrt{\dfrac{1}{2\varepsilon} - \dfrac{1}{2}}$, demak, $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon} - \dfrac{1}{2} \right]$ deb tanlash kifoya. ◄

$y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lsin.

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son mavjud bo‘lsaki, $0 < |x - x_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, A son *$y = f(x)$ funksiyaning $x \to x_0$ dagi limiti* deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \, .$$

Xuddi shu kabi

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = A \ \left(\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = A \right)$$

[123] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

limit mavjud bo‘lsa, bu limit $y = f(x)$ funksiyaning x_0 *nuqtadagi chap(o‘ng) limiti* deyiladi va $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) \right)$ kabi belgilanadi.

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N = N(\varepsilon) > 0$ son mavjud bo‘lsaki, $|x| > N$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, A son $y = f(x)$ *funksiyaning* $x \to \infty$ *dagi limiti*[124] deb ataladi va $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ kabi belgilanadi.

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x = x_0$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lib, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A,\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$ bo‘lsin. U holda quyidagi tengliklar o‘rinli:

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = A + B;\ \lim_{x \to x_0} \big(f(x) g(x)\big) = A \cdot B \quad \text{va} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B},\ B \neq 0$$

Limitlarni hisoblashda quyidagilardan foydalanamiz:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{0} = \infty,\ \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{a} = \infty,\ \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{\infty} = 0,\ a - \text{chekli son}.$$

2-misol

Quyidagi limitlarni hisoblang:

$$1)\ \lim_{x \to 2} \left(\frac{4}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right); \quad 2)\ \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^3 + x - 2}{x^3 + 4x + 5}.$$

► 1) Bu yerda $\infty - \infty$ tipidagi aniqmaslik, uni yechish uchun kasrga umumiy maxraj beriladi va sodda ko‘rinishga olib kelinadi:

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{4}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right) = \lim_{x \to 2} \frac{2 - x}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \to 2} \left(-\frac{1}{x + 2} \right) = -\frac{1}{4}.$$

2) Bu holda ∞ / ∞ tipidagi aniqmaslik, uni yechish uchun kasrning surat va maxrajini x ning yuqori darajasi x^3 ga bo‘lamiz:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 + x - 2}{x^3 + 4x + 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty} 2 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} - \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{x^3}}{\lim\limits_{x \to \infty} 1 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{4}{x^2} + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{5}{x^3}} = \frac{2 + 0 - 0}{1 + 0 + 0} = 2.$$ ◄

[124] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

Auditoriya topshiriqlari

1. $x_n = \dfrac{3n-1}{n+2}$ ketma ketlikning limiti $a=3$ ekanini isbotlang.

Berilgan funksiyalarning limitlarini hisoblang.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-5n+2}{4-n^2}$. (Javob: -2)

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+5}+2n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+2}}$. (Javob: 9)

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!}$. (Javob: 0)

5. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$. (Javob: 6)

6. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3\left(x^2-3x+2\right)}\right)$. (Javob:$0$)

7. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{3-\sqrt{x+7}}$. (Javob: $-\dfrac{3}{2}$)

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$. (Javob: 2)

Mustaqil yechish uchun testlar

Sonli ketma-ketlik limitlarini hisoblang.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2}-n}$.

A) 1; B) 2; C) 3; D) 0.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3}\right]$.

A) 1; B) 2; C) 3; D) 0.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

A) 2; B) 2,5; C) 3; D) 5.

Funksiya limitlarini hisoblang.

4. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$.

A) 1; B) 2; C) 3; D) 24.

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$.

A) 0; B) 12; C) 24; D) ∞.

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

A) 1; B) 2; C) 3; D) 0.

7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

A) 0; B) -2; C) 3; D) -1.

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$.

A) $1{,}5\sqrt{2}$; B) $2\sqrt{2}/3$; C) $-2\sqrt{2}/3$ D) $-1{,}5\sqrt{2}$

4.4 Ajoyib limitlar[125]

Funksiyalarning limitlarini hisoblashda 1- *ajoyib limit* va 2- *ajoyib limit* deb ataluvchi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{4.1}$$

va

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e\approx 2{,}71828 \tag{4.2}$$

limitlar, hamda ularga asoslangan quyidagi formulalar keng qo‘llanadi:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\dfrac{\alpha}{\beta}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,kx}{x}=k$, 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin kx}{x}=k$, 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgkx}{x}=k$,

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$, 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a\,(a>0)$,

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^m-1}{x}=m$, 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1\pm\dfrac{n}{x}\right)^x=e^{\pm n}$, 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+n}=e$.

1-misol

Quyidagi limitlarni hisoblang:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{tg\,2x}{\sin 3x}$.

[125] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

► 1) Berilgan limitni hisoblashda 1-ajoyib limitdan foydalanamiz. Buning uchun quyidagicha almashtirish bajaramiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\frac{7x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\frac{7}{3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{7}{3}.$$

2) Bu limit va shu kabi limitlarni hisoblashda berilgan funksiya asosiga birni qo'shib ayriladi va 2-ajoyib limitga keltiriladi:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x+2}{3x-1}-1\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}}\right]^{\frac{6x+3}{3x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x+3}{3x-1}}=e^2.$$

3) Bu limitni hisoblashda trigonometrik funksiyalarning davriyligidan va keltirish formulalaridan foydalanib, 1-ajoyib limitga keltiramiz:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{tg\,2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to\pi}\frac{tg(2x-2\pi)}{-\sin(3x-3\pi)}=-\lim_{x\to\pi}\frac{\frac{\sin(2x-2\pi)}{2x-2\pi}}{\frac{\sin(3x-3\pi)}{3x-3\pi}}\cdot\lim_{x\to\pi}\frac{2}{3\cos(2x-2\pi)}=-\frac{2}{3}.$$ ◄

Auditoriya topshiriqlari

Berilgan limitlarni hisoblang.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-5x}{\sin 3x}$. (Javob: $-\frac{5}{3}$.)
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin[\pi(x+2)]}$. (Javob: $1/(2\pi)$.)
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$. (Javob: $\frac{3}{4}$.)
4. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$. (Javob: $\frac{2}{\pi}$.)
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{3x+4}-2}{\cos(\pi(x+1)/2)}$. (Javob: $-\frac{3}{2\pi}$.)
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$. (Javob: $\frac{\sqrt{2}}{8}$.)
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x+2tg^2 x}{x\sin 3x}$. (Javob: $\frac{4}{3}$.)
8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2 x}$. (Javob: 1.)
9. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)^{3x}$. (Javob: ∞.)
10. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^{2-x}$. (Javob: $\sqrt[3]{e^4}$.)
11. $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(2x+3)-\ln(2x-1))$ (Javob:2.)
12. $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(1+3tg^2 x))^{ctg^2 x}$. (Javob: 3.)

13. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{tg^2 2x}$.(Javob: $\frac{1}{\sqrt{e}}$.)

14. $\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.(Javob: $\frac{1}{e}$.)

15. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin 3x}$. (Javob: $\frac{2}{3}$.)

16. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$.(Javob: $-\frac{1}{2}$.)

Mustaqil yechish uchun testlar

Berilgan limitlarni hisoblang.

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+1}-1}$.

A) 1,5; B) 2; C) 3; D) 6.

2. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\sin x}$.

A) 3,5; B) 4; C) 4,5; D) 6.

3. $\lim_{x\to \pi}\frac{1+\cos x}{\sin^2 2x}$.

A) 1,5; B) 0,25; C) 0,125; D) 0.5.

4. $\lim_{x\to \pi}\frac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi}$.

A) 1,5; B) - 0,25; C) - 0,5; D) 0.5.

5. $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

A) 1,5; B) 2; C) 3; D) 6.

6. $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x+3}$.

A) 0; B) 2; C) 0,5; D) ∞.

7. $\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{x-1}{x}}$.

A) e; B) e^2; C) e^3; D) 0.

8. $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2-x}\right)^{x}$.

A) e; B) e^2; C) e^3; D) 0.

9. $\lim_{x\to +\infty}(x+1)(\ln(3x+2)-\ln(3x-1))$.

A) e; B) e^2; C) 1; D) 0.

10. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin 2x}$.

A) 1,5; B) 2; C) 2,5; D) 0.5.

4.5 Funksiya uzluksizligi. Uzilish turlari[126]

Agar $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lib, $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ bo‘lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ *nuqtada uzluksiz* deyiladi. Bu ta’rif uzluksizlikning quyidagi shartlarini o‘z ichiga oladi:

[126] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

1) $f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan;

2) $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x),\ \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ chekli limitlar mavjud;

3) ular o‘z aro teng $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$;

4) bu limit $f(x)$ funksiyaning $x = x_0$ nuqtadagi qiymatiga teng.

$y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lishi uchun argumentning cheksiz kichik orttirmasi Δx ga funksiyaning cheksiz kichik orttirmasi Δy mos kelishi zarur va yetarli, ya’ni uzluksizlik $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ shart bajarilishiga teng kuchli.

1-misol

Berilgan $y = x^2$ funksiya ixtiyoriy $x \in R$ nuqtada uzluksiz ekanini isbotlang.

▶ Argumentning ixtiyoriy Δx orttirmasida funksiya orttirmasi

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

U holda

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(2x\Delta x + \Delta x^2\right) = 0.$$

Bundan, $y = x^2$ funksiya butun sonlar o‘qida uzluksiz ekani kelib chiqadi.◀

x_0 nuqtada yuqoridagi shartlardan kamida bittasi bajarilmasa, x_0 nuqta $y = f(x)$ funksiyaning *uzilish nuqtasi* deyiladi. Agar x_0 nuqtada $f(x_0 - 0),\ f(x_0 + 0)$ chekli limitlar mavjud va $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ bo‘lsa, x_0 *birinchi tur uzilish nuqtasi*[127] deyiladi. Agar $f(x_0 - 0)$ yoki $f(x_0 + 0)$ limitlardan hech bo‘lmaganda bittasi mavjud bo‘lmasa yoki cheksizlikka teng bo‘lsa, x_0 *ikkinchi tur uzilish nuqtasi*[128] deyiladi. Agar x_0 nuqtada $f(x_0 - 0),\ f(x_0 + 0)$ chekli limitlar mavjud va $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ bo‘lib, x_0 nuqtada funksiya aniqlanmagan bo‘lsa, x_0 *yo‘qotish mumkin bo‘lgan uzilish nuqtasi* deyiladi.

2-misol

Ushbu $y = \dfrac{\sin x}{x}$ funksiyaning uzilish nuqtasini toping. Uzilish turini aniqlang.

▶ $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ bo‘lgani holda $x = 0$ da funksiya aniqlanmagan. Demak, $x = 0$ yo‘qotish mumkin bo‘lgan uzilish nuqtadir.◀

---

[127] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008
[128] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

3-misol

Ushbu $y = \dfrac{x-2}{|x-2|}$ funksiyaning uzilish nuqtasini toping. Uzilish turini aniqlang.

► Berilgan funksiya $x = 2$ nuqtada aniqlanmagan. $\lim\limits_{x\to 2-0} y = -1,\ \lim\limits_{x\to 2+0} y = 1$ chekli limitlar mavjud va o‘z aro teng bo‘lmagani uchun $x = 2$ birinchi tur uzilish nuqtasi bo‘ladi.◄

Auditoriya topshiriqlari

1. $y = 2 - \dfrac{|x|}{x}$ funksiyani uzluksizlikga tekshiring va grafigini yasang.(Javob: $x = 0$ birinchi tur uzilish nuqtasi.)

2. $y = \begin{cases} x+1, & \text{agar } x \le 1 \text{ bo`lsa,} \\ 3 - ax^2, & \text{agar } x > 1 \text{ bo`lsa} \end{cases}$ funksiya a ning qanday qiymatida uzluksiz bo‘ladi? (Javob: $a = 1$.)

3. $y = \begin{cases} \dfrac{x-1}{|x-1|}, & \text{agar } x \ne 1 \text{ bo`lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 1 \text{ bo`lsa} \end{cases}$ funksiyani uzluksizlikga tekshiring va uzilish turini aniqlang. (Javob: $x = 1$ - birinchi tur uzilish nuqtasi.)

4. $x = 0$ nuqta $y = \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$ funksiyaning 1-tur uzilish nuqtasi ekanini isbotlang. $x = 0$ nuqta atrofida grafigini chizing.

5. $y = 2^{\frac{1}{3-x}}$ funksiyani $x = 2$ va $x = 3$ nuqtalarda uzluksizlikga tekshiring. (Javob: $x = 2$ da uzluksiz, $x = 3$ - ikkinchi tur uzilish nuqtasi.)

6. $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ funksiyani uzluksizlikga tekshiring va uzilish turini aniqlang. (Javob: $x = -1$ - ikkinchi tur uzilish nuqtasi, $x = 0$ - yo‘qotish mumkin bo‘lgan uzilish nuqtasi.)

7. $y = \dfrac{\sin x}{\pi^2 - x^2}$ funksiyani uzluksizlikga tekshiring va uzilish turini aniqlang. (Javob: $x = \pi$ -yo‘qotish mumkin bo‘lgan uzilish nuqtasi.)

Mustaqil yechish uchun testlar

1. a ning qanday qiymatida $y=\begin{cases} x^2-1, & \text{agar} \quad x\le 2 \text{ bo`lsa,} \\ 7-ax, & \text{agar} \quad x>2 \text{ bo`lsa} \end{cases}$ funksiya uzluksiz bo‘ladi?

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4.

2. $y=arctg\dfrac{1}{x}$ funksiyani $x=0$ nuqtada uzluksizlikka tekshirilsin.

A) Uzluksiz; B) 1-tur uzilish; C) 2-tur uzilish; D) Yo‘qotish mumkin bo‘lgan uzilish.

3. a va b ning qanday qiymatlarida $y=\begin{cases} x-1, & \text{agar} \quad x\le -1 \text{ bo`lsa} \\ ax^2+b, & \text{agar} \quad -1<x<2 \text{ bo`lsa} \\ 5-2x, & \text{agar} \quad x\ge 2 \text{ bo`lsa} \end{cases}$ funksiya uzluksiz bo‘ladi?

A) -4 va 2; B) 2 va -4; C) 1 va -3; D) -3 va 1.

4. $y=\begin{cases} 3x+5, & \text{agar} \quad x\le -1 \text{ bo`lsa,} \\ 1-x, & \text{agar} \quad -1<x\le 1 \text{ bo`lsa,} \\ \ln x, & \text{agar} \quad x>1 \text{ bo`lsa} \end{cases}$ funksiyaning uzilish nuqtalarini toping.

A) $x=1$; B) $x=\pm 1$; C) $x=-1$; D) funksiya uzluksiz.

5. $y=1+2^{\frac{1}{x}}$ funksiyani $x=0$ nuqtada uzluksizlikga tekshiring.

A) Uzluksiz; B) 1-tur uzilish; C) 2-tur uzilish; D) Yo‘qotish mumkin bo‘lgan uzilish.

6. $y=\dfrac{1}{\lg|x|}$ funksiyaning nechta uzilish nuqtasi mavjud?

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3.

Shaxsiy uy topshiriqlari

Berilgan limitlarni hisoblang.

1

1.1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{2x^2+3x-14}$.

1.2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+7x+2}{x^2+5x+6}$.

1.3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-7x-6}{3x^2-5x-12}$.

1.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-2x-1}$.

1.4. $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$.

1.5. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{12+x-x^2}{x^3+27}$.

1.6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x-6}{2x^3-5x^2+4}$.

1.7. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+3x-4}{2x^2-9x-14}$.

1.8. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{4x^2+4x-3}{2x^2+x-1}$.

1.9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-x-4}{1-4x^2-3x^3}$.

1.10. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-10x+25}$.

1.11. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{3x^3-2x+1}$.

1.12. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-8x+7}{x^2-5x-14}$.

1.13. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2x^2+15x-8}{3x^2+25x+8}$.

1.14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-5x^2+11x-2}{3x^2-x-10}$.

1.15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{7x^2-4x-3}{3x^3-2x-1}$.

1.16. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-12}{3x^2-3x-12}$.

1.17. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-3x-10}{2x^2-13x+15}$.

1.18. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{3x^3-13x-2}$.

1.19. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+7x-2}{3x^2+8x+4}$.

1.20. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3-7x+6}{3x^2+7x-6}$.

1.21. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{3x^2-2x-40}$.

1.22. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+10x+3}$.

1.23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-5x+1}{x^3-8x+7}$.

1.24. $\lim\limits_{x\to 1/4}\dfrac{12x^2+13x-4}{4x^2-5x+1}$.

1.25. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+5x-18}{3x^3-5x^2-4}$.

1.26. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x+4}{3x^2+5x-2}$.

1.27. $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{27x^3-1}{3x^2+5x-2}$.

1.28. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{2x^2+7x-15}{x^2+10x+25}$.

1.29. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-x-1}{5x^2-2x-3}$.

1.30. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-9x+20}{x^2-x-20}$

2

2.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-2x-1}$.

2.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-5x-1}{5x^3-2x^2+3}$.

2.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-2}{2x^2-3x+1}$.

2.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-5}{2+5x-3x^2}$.

2.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+4x}{x^3-3x+2}$.

2.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x-5}{2x^3+x+7}$.

2.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-3x-2x^2}{x^2+12x+13}$.

2.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-x^2-1}{3x^2-2x^3}$.

2.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-x^3}{3x^3+2x^2+1}$.

2.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x+1}{2x^2-5x-3}$.

2.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2-1}{5-3x^3}$.

2.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x^2+3}{2+2x-x^2}$.

2.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2-5x}{5+3x^2-2x^3}$.

2.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^3-2x+5}$.

2.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-7x^2+1}{3x^2-2x+4}$.

2.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+3x-4x^2}{x^2+2x+3}$.

2.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-3x^2}{x^3+5x-6}$.

2.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7-2x^2}{2x^3+5x-7}$.

2.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-5x^2-3x^5}{x^5+6x+8}$.

2.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+1}{8x^4+5x^2+13}$.

2.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-2x-3x^2}{3x^3+2x-5}$.

2.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x-7}{1-2x^3}$.

2.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-3x-2x^2}{x^2+12x+13}$.

2.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x-2x^2}{2x^2+5x+3}$.

2.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+8x-11}{-x^2+3x+4}$.

2.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+5}{x^3+2x^2+3}$.

2.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+7}{3x^2+x+1}$.

2.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+5}{6x^2+5x+1}$.

2.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-x^2}{x^2+2x+1}$.

2.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+3x-2x^3}{4x^2+2x-6}$.

3

3.1. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{6-x-x^2}{\sqrt{x+7}-2}$.

3.2. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-5x-3}{\sqrt{x+2}-\sqrt{8-x}}$.

3.3. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3-\sqrt{10+x}}{3x^2+2x-1}$.

3.4. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{6+x}-2}{3x^2+4x-4}$.

3.5. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{6+x}-3}{x^3-27}$.

3.6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}$.

3.7. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{7+x}-\sqrt{3-x}}{2x^2+5x+2}$.

3.8. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{x-3}-\sqrt{5-x}}$.

3.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7}x}{\sqrt{x+7}-\sqrt{7-x}}.$

3.10. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-4x}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}.$

3.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+5x}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3-x}}.$

3.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{x^2}.$

3.13. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-7x-15}{\sqrt{x+4}-3}.$

3.14. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{5x+1}-4}.$

3.15. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+64}{4-\sqrt{20+x}}.$

3.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{\sqrt{x+9}-3}.$

3.17. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5-\sqrt{4x+5}}{x^2-3x-10}.$

3.18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2+7x}-3}{3-\sqrt{x+8}}.$

3.19. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{5}}{2-5x-3x^2}.$

3.20. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{3-\sqrt{x+6}}.$

3.21. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+5x+6}{\sqrt{x+4}-\sqrt{7+2x}}.$

3.22. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{3x+4}-4}{x^3-16x}.$

3.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^3-16x}.$

3.24. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{4x}-x}{x^2-4x}.$

3.25. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-x}{3x^2-x-10}.$

3.26. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{2}}{3x^2+5x-2}.$

3.27. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{12-x}+x}{x^3+4x^2}.$

3.28. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{7-x}}{x^3-6x+4}.$

3.29. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}.$

3.30. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}.$

4

4.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos(\pi(x+1)/2)}.$

4.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{5x^2}.$

4.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}.$

4.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}.$

4.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\mathrm{tg}(\pi(2+x))}$.

4.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\mathrm{tg}[2\pi(x+1/2)]}$.

4.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$.

4.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$.

4.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin[\pi(x+2)]}$.

4.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 2x}{\sin(2\pi(x+10))}$.

4.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\left(\pi(x+5)\right)}{1-\cos 2x}$.

4.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x+5\pi/2)tgx}{\arcsin 2x^2}$.

4.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$.

4.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 5x}{1-\cos 4x}$.

4.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$.

4.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$.

4.17. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\mathrm{tg}\pi x}{x+2}$.

4.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3arctgx}$.

4.19. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$.

4.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$.

4.21. $\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$.

4.22. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$.

4.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-tg^2 x}{x^4}$.

4.24. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-\sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}$.

4.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$.

4.26. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos \pi x}{\mathrm{tg}^2 \pi x}$.

4.27. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$.

4.28. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin(x/2)}{\pi-x}$.

4.29. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\mathrm{arctg}(x^2-2x)}{\sin 3\pi x}$.

4.30. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$.

5

5.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3tg^2 x\right)^{ctg^2 x}$.

5.2. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x}{2x+3}\right)^{-4x}$.

5.3. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x\ln\dfrac{x}{x+3}\right)$.

5.4. $\lim\limits_{x \to \pi/2}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{1/(x-\pi/2)}$.

5.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{5x-2}$.

5.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 2x)}{5x^2}$.

5.7. $\lim\limits_{x \to 3}\left(\dfrac{9-2x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$.

5.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-2x}{1-2x}\right)^{3x-2}$.

5.9. $\lim\limits_{x \to 0}\left(5-\dfrac{4}{\cos x}\right)^{1/\sin^2 3x}$.

5.10. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\operatorname{ctg}x}$.

5.11. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin 2x)^{tg^2 2x}$.

5.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$.

5.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{\sin x}$.

5.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x^2)}{3x^2}$.

5.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,2x}{\ln(1+3x)}$.

5.16. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-2}{2x-3}\right)^{ctg\,\pi x}$.

5.17. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{x^2-\pi^2}$.

5.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 3x)}{x^2+5x}$.

5.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 2x)}{\sin^2 x}$.

5.20. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\ln(\cos 2x)}{(x-\pi)\sin x}$.

5.21. $\lim\limits_{x\to 4}(2x-7)^{\frac{3x}{x^2-16}}$.

5.22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+\sin \pi x)}{x^2+2x-3}$.

5.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\ln(1+3x^2)}$.

5.24. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$.

5.25. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x-2}{2x-5}\right)^{2/(3-x)}$.

5.26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{\mathrm{ctg}^2 x}$.

5.27. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4x-7}{5}\right)^{tg\frac{\pi x}{4}}$

5.28. $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\ln(2x+1)-\ln(2x+5)\right)$.

5.29. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x+1}\right)^{2x-3}$.

5.30. $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\ln(3x-1)-\ln(3x-5)\right)$.

6

Berilgan funksiyalarni uzluksizlikka tekshiring, uzluksizlik oraliqlarini va uzilish nuqtalarining turini aniqlang.

6.1. $a)\ f(x)=\begin{cases} x+4, & x\le -2, \\ x^2-2, & -2<x\le 2, \\ 3x-5, & x>2, \end{cases}\qquad b)\ f(x)=2^{\frac{1}{x+3}}+1.$

6.2. $a)\ f(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ x^2+1, & -1\le x\le 2,\\ 3x, & x>2,\end{cases}$ $\qquad b)\ f(x)=3^{\frac{1}{x-2}}+2.$

6.3. $a)\ f(x)=\begin{cases}3x, & x\le -2,\\ x^2+2, & -2<x\le 2,\\ x+3, & x>2,\end{cases}$ $\qquad b)\ f(x)=\dfrac{3}{2^x-1}.$

6.4. $a)\ f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sin x, & 0<x\le \pi,\\ 2x-6, & x>\pi,\end{cases}$ $\qquad b)\ f(x)=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x+3}}+1}.$

6.5. $a)\ f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le -\pi/2,\\ 0, & -\pi/2<x\le \pi/2,\\ 1, & x>\pi/2,\end{cases}$ $\qquad b)\ f(x)=4^{\frac{1}{4-x}}-1.$

6.6. $a)\ f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<-2,\\ x^2-1, & -2\le x\le 2,\\ 3x-2, & x>2,\end{cases}$ $\qquad b)\ f(x)=6^{\frac{1}{x-5}}+3.$

6.7. $a)\ f(x)=\begin{cases}1, & x<-1,\\ -x^2+1, & -1\le x\le 2,\\ x-5, & x>2,\end{cases}$ $\qquad b)\ f(x)=5^{\frac{1}{x+2}}-1.$

6.8. $a)\ f(x)=\begin{cases}1, & x<0,\\ 2^x+1, & 0\le x\le 2,\\ 3x-1, & x>2,\end{cases}$ $\qquad b)\ f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}.$

6.9. $a)\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x<0,\\ x^2-2x, & 0\le x\le 2,\\ x-1, & x>2,\end{cases}$ $\qquad b)\ f(x)=3^{\frac{1}{x+1}}+1.$

6.10. $a)\ f(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \ln x, & 1\le x\le 3,\\ x-1, & x>3,\end{cases}$ $\qquad b)\ f(x)=6^{\frac{x+2}{x-2}}-1.$

6.11. $a)\ f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<-2,\\ x^3+5, & -2\le x\le 1,\\ x+5, & x>1,\end{cases}$ $\qquad b)\ f(x)=2arctg\,\dfrac{1}{x-2}.$

6.12. $a)\ f(x)=\begin{cases}3-2x, & x<-2,\\ x^3+1, & -2\le x\le 2,\\ 2x+5, & x>2,\end{cases}$ $\qquad b)\ f(x)=\dfrac{(1+x)^3-1}{x}.$

6.13. $a)\ f(x)=\begin{cases}2x-3, & x<-2,\\ x^3+1, & -2\le x\le 2,\\ 2^x+1, & x>2,\end{cases}$ $\qquad b)\ f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{|x|}.$

6.14. $a)\ f(x)=\begin{cases}2^x-3, & x<2,\\ \log_2 x, & 2\le x\le 8,\\ 2x-15, & x>8,\end{cases}$ $\qquad b)\ f(x)=\dfrac{1}{1-e^{1-x}}.$

6.15. $a)\ f(x)=\begin{cases}2^x-1, & x<0,\\ 2\sin x, & 0\le x\le \pi,\\ 2x-5, & x>\pi,\end{cases}$ $\qquad b)\ f(x)=\dfrac{1}{1+e^{1/x}}.$

6.16. $a)\ f(x)=\begin{cases}x+\pi, & x<-\pi/2,\\ \sin x+1, & -\pi/2\le x\le \pi/2,\\ 2x+1, & x>\pi,\end{cases}$ $\qquad b)\ f(x)=\dfrac{1}{1+3^{1/(x+1)}}.$

6.17. $a)\ f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 2\cos x, & 0\le x\le \pi,\\ 1-x, & x>\pi,\end{cases}$ $\qquad b)\ f(x)=arctg\,3^{1/x}.$

6.18. $a)\ f(x)=\begin{cases}2x-1, & x<-1,\\ 3x^2, & -1\le x\le 1,\\ 2^x+1, & x>1,\end{cases}$ $\qquad b)\ f(x)=\dfrac{3^{1/x}-1}{3^{1/x}+1}.$

6.19. $a)\ f(x)=\begin{cases}3x+2, & x<-1,\\ -2x^2+1, & -1\le x\le 1,\\ x-2, & x>1,\end{cases}$ $\qquad b)\ f(x)=3^{1/(2-x)}+1.$

6.20. $a)\ f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<-1,\\ -2x^2+1, & -1\le x\le 2,\\ x+5, & x>2,\end{cases}$ $\qquad b)\ f(x)=2^{1/(x-3)}+1.$

6.21. a) $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<-1,\\ -x^2+3, & -1\le x\le 2,\\ 2x-3, & x>2,\end{cases}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{3^{1/(2-x)}+1}$.

6.22. a) $f(x)=\begin{cases}x+2, & x<-2,\\ x^2-4, & -2\le x\le 3,\\ 2x-1, & x>3,\end{cases}$ b) $f(x)=\dfrac{2}{3^{tgx}+1}$.

6.23. a) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<-1,\\ -2x^2+1, & -1\le x\le 2,\\ 2-3x, & x>2,\end{cases}$ b) $f(x)=\dfrac{3^{1/(2-x)}-1}{3^{1/(2-x)}+1}$.

6.24. a) $f(x)=\begin{cases}1-2x, & x<-1,\\ -2\cos\pi x+1, & -1\le x\le 2,\\ 2x-3, & x>2,\end{cases}$ b) $f(x)=5^{1/(x+3)}+1$.

6.25. a) $f(x)=\begin{cases}x-5, & x<-2,\\ -2x^2+1, & -2\le x\le 2,\\ 2x+3, & x>2,\end{cases}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{3^{1/(2-x)}}+1$.

6.26. a) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<-1,\\ x^2-1, & -1\le x\le 2,\\ 4-x, & x>2,\end{cases}$ b) $f(x)=arctg\,\dfrac{2}{3-x}$.

6.27. a) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<-1,\\ x^2, & -1\le x\le 2,\\ \log_2 x+3, & x>2,\end{cases}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$.

6.28. a) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<0,\\ 1-2^x, & 0\le x\le 2,\\ x-5, & x>2,\end{cases}$ b) $f(x)=\dfrac{3^{1/x}-2}{3^{1/x}+2}$.

6.29. a) $f(x)=\begin{cases}\sin x+1, & x<0,\\ 1-x^2, & 0\le x\le 2,\\ x+1, & x>2,\end{cases}$ b) $f(x)=2arctg\,\dfrac{1}{3-x}$.

6.30. a) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<-1,\\ x^2-2, & -1\le x\le 2,\\ 8-3x, & x>2,\end{cases}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{1+4^{tgx}}$.

V BOB DIFFERENSIAL HISOB ELEMENTLARI

5.1 Funksiya hosilasi

$y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan bo‘lib, $x,\ x+\Delta x \in [a,b]$. Funksiyaning $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ orttirmasini argument orttirmasi Δx ga nisbati $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ning Δx nolga intilgandagi limiti $y = f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi *hosilasi* [129]deyiladi. Quyidagi belgilardan biri bilan belgilanadi: $y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx}$. Demak,

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Agar bu limit mavjud bo‘lsa, $y = f(x)$ funksiya x nuqtada *differensiallanuvchi,* hosilani topish jarayoni esa *differensiallash*[130] deyiladi.

$y = f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi hosilasi funksiya grafigiga $M(x, f(x))$ nuqtasida o‘ tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientiga teng.

Fizik nuqtai nazardan $y' = f'(x)$ hosila funksiyaning x nuqtadagi argument x ga nisbatan o‘z garish tezligini aniqlaydi.

Agar $C-$o‘zgarmas son, $u(x)$ va $v(x)-$differensiallanuvchi funksiyalar bo‘lsa, quyidagi *differensiallash qoidalari* o‘rinli:

1) $C' = 0$; 2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$; 3) $(Cu)' = Cu'$; 4) $(uv)' = u'v + uv'$;

5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; 6) $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}$;

7) agar $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, ya’ni $y = f(\varphi(x))-$differensiallanuvchi funksiyalardan tashkil topgan murakkab funksiya bo‘lsa, u holda

$$y'_x = y'_u u'_x \text{ yoki } y' = f'(u)\varphi'(x);$$

8) agar $y = f(x)$ funksiya uchun differensiallanuvchi $x = g(y)$ teskari funksiya mavjud va $g'(y) \neq 0$ bo‘lsa, u holda

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \text{ yoki } f'(x) = \frac{1}{g'(x)};$$

1-misol

[129] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008
[130] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

Ushbu $y = x^3$ funksiya hosilasini ta'rif bo' yicha toping.

►Argumentning ixtiyoriy Δx orttirmasida

$$\Delta y = (x+\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3,$$

u holda

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2\right) = 3x^2 .$$ ◄

Funksiya x nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u shu nuqtada uzluksiz bo'ladi, aksinchasi har doim ham o'rinli emas, ya'ni x nuqtada uzluksiz funksiya shu nuqtada differensiallanuvchi bo'lmasligi ham mumkin.

2-misol

Ushbu $y = |x|$ funksiya $x = 0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'ladimi?

► Funksiya berilgan nuqtada uzluksiz. Argumentning $x = 0$ nuqtadagi ixtiyoriy Δx orttirmasida funksiya orttirmasi

$$\Delta y = \begin{cases} -\Delta x, \text{ agar } \Delta x < 0 \text{ bo`lsa,} \\ \Delta x, \text{ agar } \Delta x > 0 \text{ bo`lsa.} \end{cases}$$

Hosila ta'rifiga ko'ra,

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} -1, \text{ agar } \Delta x < 0 \text{ bo`lsa,} \\ 1, \text{ agar } \Delta x > 0 \text{ bo`lsa.} \end{cases}$$

Bundan kelib chiqadiki, $y = |x|$ funksiya $x = 0$ nuqtada hosilaga ega emas.◄

3-misol

Ushbu $y = \ln^3(\arcsin\sqrt{x})$ funksiyaning hosilasini toping

► Avval $y = u^3$ murakkab funksiyadan hosila hisoblaymiz $y' = 3u^2u'$, bu yerda $u = \ln(\arcsin\sqrt{x})$, hamda $u = \ln v$ bo'lgani uchun, $u' = \frac{1}{v}v'$, $v = \arcsin\sqrt{x}$. O'z navbatida

$$v = \arcsin w, \quad v' = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}w', \quad w = \sqrt{x}, \quad w' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Demak,

$$y' = 3\ln^2(\arcsin\sqrt{x})\frac{1}{\arcsin\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$ ◄

Auditoriya topshiriqlari

1. $y=\dfrac{3x-2}{1+4x}$ funksiya hosilasini ta'rifdan foydalanib toping.

2. $y=\sqrt[3]{x}$ funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz va differensiallanuvchi bo'ladimi?

3. Quyidagi funksiyalarning hosilalarini toping:

$a)\ \ y=3x^3-4\sqrt[5]{x^4}+5/x^2;$ $\qquad b)\ \ y=x^2\cos x\cdot\ln x;$

$c)\ \ y=(x^3+2^x)tgx;$ $\qquad d)\ \ y=e^x/(x^2+1)$

4. Hosilalar jadvali va differensiallash qoidalaridan foydalanib quyidagi funksiyalarning hosilalarini hisoblang:

$a)\ \ y=arctg\sqrt{1+e^{-x}};$ $\qquad b)\ \ y=(2^{\cos 3x}+\sin 3x)^2;$

$c)\ \ y=x^3 tg\sqrt[5]{x}+3^{\sin x};$ $\qquad d)\ \ y=\lg^2(x^5+\sin^2 x);$

5. $y=e^{tg\frac{x}{2}}$ funksiya $y'\sin x=y\ln y$ tenglamani qanoatlantirishini tekshiring.

Mustaqil yechish uchun testlar

Quyidagi funksiyalarning hosilalarini toping:

1. $y=6\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}};$

A) $2\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{3\sqrt{x}};$ B) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^5}};$ C) $2\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^5}};$ D) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}.$

2. $y=\dfrac{2x+3}{x^2+1};$

A) $\dfrac{2(x^2-3x+1)}{(x^2+1)^2};$ B) $\dfrac{2(x^2+3x-1)}{(x^2+1)^2};$ C) $\dfrac{2(3x^2+3x+1)}{(x^2+1)^2};$ D) $\dfrac{2(1-3x-x^2)}{(x^2+1)^2}.$

3. $y=(2x^2-7)\ln(x+1)+\sqrt{a};$

A) $4x\ln(x+1)+\dfrac{2x^2-7}{x+1}$; B) $\dfrac{4x}{x-1}$; C) $4x+\dfrac{2x^2-7}{x+1}$; D) $4x\ln(x+1)+\dfrac{2x^2-7}{x+1}+\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

4. $y=x^2\cos 3x+arctg\sqrt{x-1}$;

A) $-6x\sin 3x+\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}$; B) $2x\cos 3x-3x^2\sin 3x+\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-x}}$;

C) $-6x\sin 3x+\dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}}$; D) $2x\cos 3x-3x^2\sin 3x+\dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}}$.

5. $y=\log_2\sin^2 2^x$;

A) $\dfrac{2\cos 2^x}{\sin^2 2^x}\ln 2$; B) $\dfrac{2^x ctg\, 2^x}{\ln 2}$; C) $2^{x+1}ctg\, 2^x$; D) $\dfrac{2^x ctg\, 2^x}{\sin 2^x}$.

5.2 Logarifmlab differensiallash. Oshkormas va parametrik funksiya hosilalari

Funksiyani ketma-ket logarifmlash va differensiallash jarayoniga *logarifmlab differensiallash*[131] deyiladi: $(\ln f(x))'=f'(x)/f(x)$. Bu qoida funksiyani avval logarifmlash hosila topishni soddalashtiradigan hollarda qo‘llanadi.

1-misol

Ushbu $y=\dfrac{(x+3)^2\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[4]{(x+2)^3}}$ funksiya hosilasini toping.

► Avval logarifmlash maqsadga muvofiq,

$$\ln y=2\ln(x+3)+\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{3}{4}\ln(x+2).$$

Tenglikdan hosila hisoblaymiz

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x+3}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{3}{4(x+2)};$$

$$y'=\frac{(x+3)^2\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[4]{(x+2)^3}}\left(\frac{2}{x+3}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{3}{4(x+2)}\right);$$

[131] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

$$y'=\frac{(x+3)(19x^2+26x+3)}{12(x+2)\sqrt[3]{(x-1)^2}\sqrt[4]{(x+2)^3}}.◄$$

$y=u^v$, bu yerda $u=u(x),\ v=v(x)$, ko‘rinishdagi funksiyaning hosilasini hisoblashda avval logarifmlash quyidagi formulaga olib keladi:

$$y'=u^v\ln u\cdot v'+vu^{v-1}\cdot u'.$$

2-misol

Ushbu $y=x^{\sin x^3}$ funksiya limitini hisoblang.

► $\ln y=\sin x^3\cdot\ln x,\quad y'=x^{\sin x^3}\ln x\cdot 3x^2\cos x^3+\sin x^3\cdot x^{\sin x^3-1}$.◄

Agar y va x orasidagi bog‘lanish oshkormas ko‘rinishda, $F(x,y)=0$ tenglama bilan berilgan bo‘lsa, bunday funksiya *oshkormas funksiya*[132] deyiladi. y' hosila $F(x,y)=0$ tenglikning ikki tarafidan, y x ning funksiyasi ekanligini e’tiborga olgan holda, hosila olib topiladi.

3-misol

Agar $x^3+y^3-3xy=0$ bo‘lsa, y' hosilani hisoblang.

► Tenglikning ikki tarafidan hosila olamiz

$$3x^2+3y^2y'-3y-3xy'=0,$$

so‘ ngra tenglamadan y' ni topamiz

$$y'=(y-x^2)/(y^2-x).\ ◄$$

Agar y funksiyaning x argumentga bog‘liqligi parametrik ko‘rinishda, $x=x(t),\ y=y(t)$ tenglamalar bilan berilgan bo‘lsa, bunday funksiya *parametrik funksiya* deyiladi. y' yoki y'_x hosila $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$ formula bilan hisoblanadi.

4-misol

Quyidagi $\begin{cases}x=\sqrt{1-t^2},\\ y=tg\sqrt{1+t}\end{cases}$ tenglama bilan berilgan funksiyaning y'_x hosilasini toping.

► $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t},\quad x'(t)=\dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}},\quad y'(t)=\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{1+t}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1+t}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1+t}\cos^2\sqrt{1+t}}.$

$$y'_x=-\frac{\sqrt{1-t^2}}{2t\sqrt{1+t}\cos^2\sqrt{1+t}}=-\frac{\sqrt{1+t}}{2t\cos^2\sqrt{1+t}}.◄$$

[132] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

Auditoriya topshiriqlari

1. Quyidagi hosilalarni logarifmlab differerensiallash qoidasi asosida hisoblang:

$a)\ \ y=\dfrac{(x-2)^2}{(x+1)^3\sqrt{x+2}};$ $\qquad d)\ \ y=\dfrac{(x-2)^2\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x-3}};$

$b)\ y=(x^3+2)^{\cos x};$ $\qquad e)\ y=(\ln x)^{tg\,2x}.$

2. Oshkormas ko‘rinishda berilgan funksiyaning y'_x hosilasini toping.

$a)\ x^4+y^4=x^2y^2;$ $\qquad d)\ x^y=y^x;$

$b)\ y=(x^2+3)y+x\cos y=0;$ $\qquad e)\ y=x+arctgy.$

3. Parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning y'_x hosilasini toping.

$a)\ \begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}$ $\qquad b)\ \begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^3, \end{cases}$

$d)\ \begin{cases} x=\dfrac{1-t}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{2t}{1+t^2}, \end{cases}$ $\qquad e)\ \begin{cases} x=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y=\arccos\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$

Mustaqil yechish uchun testlar

1. Quyidagilardan qaysi biriga logarifmlab differensiallash qoidasi qo‘llanadi:

A) $y=tg^2(\sin^2 x);$ B) $y=\sqrt{xtgx\sin^3 x};$

D) $y=\sqrt{tgx+\sin\sqrt{x}};$ E) $y=xtg(x\sin x).$

2. Quyidagilardan qaysi biriga logarifmlab differensiallash qoidasi qo‘llanadi:

A) $y=2^{x^2}+y^{\ln 2};$ B) $y=x^y+(\cos x)^{\ln 2};$ D) $y=x^{1+\ln 2};$ E) $y=2^x x^{\ln x}.$

3. $y=2^{x^2}+y^{\ln 2}$ tenglama bilan berilgan berilgan funksiya …

A) logarifmlab differensiallanadi. B) murakkab funksiya bo‘ladi.

D) oskormas funksiya bo‘ladi. E) parametrik funksiya bo‘ladi.

4. $x^2+y^2+4x-2y-3=0$ tenglama bilan berilgan egri chiziqga $(0,3)$ nuqtasida o‘tkazilgan urinma tenglamasini yozing.

A) $y=3-x$, B) $y=2x+3$, D) $y=x+3$, E) $y=3-2x$.

5. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ tenglama bilan berilgan funksiya hosilasini toping.

A) $y = -ctgx$, B) $y = -tgx$, D) $y = ctg^2 x$, E) $y = tg^2 x$.

Shaxsiy uy topshiriqlari

Berilgan funksiyalarning hosilalarini toping.

1

1.1. $y = \sqrt[3]{x^2} + x\arcsin x - \dfrac{\ln x}{\cos x}.$

1.2. $y = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x^2}} + x arctgx - \dfrac{\sin x}{\ln x}.$

1.3. $y = \dfrac{1}{3x^3} - 2^x ctgx - \dfrac{\arcsin x}{x}.$

1.4. $y = \dfrac{5}{\sqrt[5]{x^2}} + 3^x arcctgx + \dfrac{\log_2 x}{tgx}.$

1.5. $y = \dfrac{1}{2x^2} + 2^x \arcsin x - \dfrac{\cos x}{\lg x}.$

1.6. $y = 3^x \arcsin x - \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{x^2}.$

1.7. $y = \arcsin x \log_3 x - \dfrac{3e^x}{\sqrt[3]{x^2}} - ctgx.$

1.8. $y = \dfrac{\lg x}{\sin x} - 3\sqrt[3]{x^2} - 2^x arctgx.$

1.9. $y = \sin x \ln x - \dfrac{3^x}{arctgx} - \dfrac{3}{x^4}.$

1.10. $y = \dfrac{1}{3x^3} + 3^x \arccos x - \dfrac{tgx}{\lg x}.$

1.11. $y = \dfrac{1}{3\sqrt[5]{x^4}} + 5^x \arccos x - \dfrac{ctgx}{\log_5 x}.$

1.12. $y = tgx \log_3 x - \dfrac{5^x}{\sin x} - \dfrac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}.$

1.13. $y = \dfrac{\lg x}{\cos x} - 4\sqrt[4]{x^3} - e^x \arcsin x.$

1.14. $y = 4^x \log_2 x - \dfrac{\sin x}{arctgx} - \dfrac{2}{3x^3}.$

1.15. $y = 3^x \log_3 x - \dfrac{arctgx}{\cos x} - \dfrac{2}{3\sqrt[4]{x^3}}.$

1.16. $y = \dfrac{\lg x}{\cos x} - 5\sqrt[5]{x^2} - (e^x + x)tgx.$

1.17. $y = arcctgx \lg x - \dfrac{e^x}{\sin x} - \dfrac{5}{4\sqrt[5]{x^3}}.$

1.18. $y = \dfrac{1}{3\sqrt{x^3}} - 3^x \cos x - \dfrac{arctgx}{x}.$

1.19. $y = 2e^x \sin x - \dfrac{\ln x}{arctgx} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}.$

1.20. $y = \arcsin x \log_5 x - \dfrac{3^x}{tgx} - \dfrac{1}{3\sqrt[5]{x^3}}.$

1.21. $y = \dfrac{1}{3x^5} + e^x \cos x - \dfrac{1+x^2}{arctgx}.$

1.22. $y = \dfrac{\ln x}{\sin x} - 8\sqrt[4]{x^5} - e^x arcctgx.$

1.23. $y = x^2 arcctgx - \dfrac{4^x}{\cos x} - \dfrac{5}{x\sqrt[5]{x}}.$

1.24. $y = 3^x ctgx + \dfrac{arctgx}{\lg x} - \dfrac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}.$

1.25. $y = 2^x \arcsin x - \dfrac{ctgx}{\ln x} - \dfrac{3}{x\sqrt[3]{x}}.$

1.26. $y = e^x \sin x - \dfrac{arcctgx}{\ln x} - \dfrac{3}{x\sqrt[3]{x}}.$

1.27. $y = e^x \cos x - \dfrac{\arcsin x}{\log_5 x} - \dfrac{3}{x^7}.$

1.28. $y = \sin x \ln x - \dfrac{arctgx}{1+x^2} + \dfrac{4}{3\sqrt[4]{x^3}}.$

1.29. $y = \dfrac{5}{x\sqrt[5]{x^2}} + 4^x arctgx - \dfrac{\cos x}{\log_3 x}.$

1.30. $y = (x^2+1)arctgx - \dfrac{3^x}{\sin x} - \dfrac{4}{x\sqrt[4]{x}}.$

2

2.1. $y = \sin^3 2x \cdot tg(2x+1)^3.$

2.2. $y = 2^{\sin x} \cdot tg^2(2x^3+1).$

2.3. $y = \lg(\sin^3 2x) \cdot tg\sqrt{2x+1}.$

2.4. $y = 3^{-x^2} \cdot \arcsin\sqrt{2x+1}.$

2.5. $y = \ln^3(2x^2+1) \cdot arctg^2\sqrt{x}.$

2.6. $y = \log_5^2(3x+4) \cdot arcctg^3\sqrt{x+1}.$

2.7. $y = 3^{2x^2+1} \cdot \arcsin^2\sqrt{\ln x}.$

2.8. $y = \arcsin^2 3x \cdot ctg\, 5x^3.$

2.9. $y = 3^{-\cos^2 x} \cdot arctg\sqrt{x^2+1}.$

2.10. $y = 5^{\cos x} \cdot \arcsin 3x^3.$

2.11. $y = \log_3(\sin^2 x) \cdot \arccos^3\sqrt{x}.$

2.12. $y = e^{tgx} \cdot \arcsin(\ln^3 x).$

2.13. $y = tg(3e^x) \cdot \arccos^3\sqrt{\lg x}.$

2.14. $y = 3^{\sin(2x^2+1)} \cdot \ln^2\sqrt{tgx}.$

2.15. $y = tg(x^2+1) \cdot \arccos^2\sqrt{\log_3 x}.$

2.16. $y = 2^{ctgx^2} \cdot \lg^3(\sin^2 x).$

2.17. $y = e^{1/x} \cdot arctg^2(3^x).$

2.18. $y = 5^{tgx} \cdot \sqrt{\arcsin(1/x)}.$

2.19. $y = 5^{-1/x} \cdot \arcsin(2x+1)^3.$

2.20. $y = \log_2(\cos^3 x) \cdot arcctg^2\sqrt{x}.$

2.21. $y = \lg(tg^2 3x) \cdot \arccos\sqrt{1-2x}.$

2.22. $y = arcctg\, 2x^3 \cdot \sin^2(e^x + x^3).$

2.23. $y = \lg^2(3x+4) \cdot \arcsin^3\sqrt{1-x^2}.$

2.24. $y = \cos(2e^{3x}) \cdot arctg^3\sqrt{\log_2 x}.$

2.25. $y = \sin(tg^2 3x) \cdot \ln\sqrt{1+2x^2}.$

2.26. $y = tg(1/x) \cdot \arcsin^3(e^x - x).$

2.27. $y = tg^2(2x+1) \cdot arctg^3\sqrt{\sin x^2}.$

2.28. $y = 2^{\sin x^2} \cdot \lg^3(\sin(1/x)).$

2.29. $y = \ln^2(3x+2) \cdot \arccos^3(1/x).$

2.30. $y = 2^{tgx} \cdot \sqrt{\arccos(1/x)}.$

3

3.1. *a)* $y = (arctg3x)^{\ln(x+3)}$, *b)* $y = \dfrac{(x+5)^3\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}.$

3.2. *a)* $y = (tg3x)^{\arccos(2x+3)}$, *b)* $y = \dfrac{(x-3)^2\sqrt{x+2}}{\sqrt[5]{(x+3)^2}}.$

3.3. *a)* $y = (\lg(3x+2))^{arctg(2x+1)}$, *b)* $y = \dfrac{(x+3)^2\sqrt[3]{(x-3)^2}}{\sqrt{x+4}}.$

3.4. *a)* $y = (\log_3(3x+2))^{tg5x}$, *b)* $y = \dfrac{(x-5)^3\sqrt[3]{(x+3)^2}}{\sqrt{x+2}}.$

3.5. $a)\quad y=\left(\cos(3x+2)\right)^{\sin^2 3x},\quad b)\; y=\dfrac{(x-2)^3\sqrt[5]{(x-3)^3}}{(x+5)^5}.$

3.6. $a)\quad y=\left(tg(2x+5)\right)^{\ln(3x+2)},\quad b)\; y=\dfrac{(x+3)^3(x-2)^2}{\sqrt[3]{(x-5)^2}}.$

3.7. $a)\quad y=\left(\arccos 3x\right)^{\lg 5x},\quad b)\; y=\dfrac{(x-5)^3\sqrt{(x-2)^3}}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}.$

3.8. $a)\quad y=\left(\log_2(x+2)\right)^{\arcsin 2x},\quad b)\; y=\dfrac{(x-5)^3(x+6)^5}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}.$

3.9. $a)\quad y=\left(arctg(2x+1)\right)^{\cos(3x+2)},\quad b)\; y=\dfrac{(x+2)^3(x+5)^4}{\sqrt[5]{(x-5)^4}}.$

3.10. $a)\quad y=\left(\log_3(2x+7)\right)^{\sin(x+3)},\quad b)\; y=\dfrac{(x+3)^5}{\sqrt[3]{(x+5)^2\,(x-2)^2}}.$

3.11. $a)\quad y=\left(arcctg\,2x\right)^{\ln(5x+3)},\quad b)\; y=\dfrac{(x+3)^2\sqrt{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{x+7}}.$

3.12. $a)\quad y=\left(\sin(2x+5)\right)^{arctgx},\quad b)\; y=\dfrac{(x+3)^5(x-5)^3}{\sqrt[3]{x-7}}.$

3.13. $a)\quad y=\left(\cos(3x+5)\right)^{\arcsin 2x},\quad b)\; y=\dfrac{(x+3)^2\sqrt[7]{(x-5)^3}}{(x+7)^5}.$

3.14. $a)\quad y=\left(\ln(3x+4)\right)^{\sin(2x+5)},\quad b)\; y=\dfrac{(x-3)^3\sqrt[5]{(x-5)^4}}{(x+5)^7}.$

3.15. $a)\quad y=\left(ctg\,3x\right)^{\ln(5x-2)},\quad b)\; y=\dfrac{\sqrt{x+3}\cdot\sqrt[3]{(x+2)^4}}{(x-2)^5}.$

3.16. $a)\quad y=\left(\arcsin 3x\right)^{\lg(7x+3)},\quad b)\; y=\dfrac{\sqrt{x+3}\cdot(x+7)^5}{\sqrt[6]{(x-2)^5}}.$

3.17. $a)\quad y=\left(tg\,3x\right)^{1/x^2},\quad b)\; y=\dfrac{\sqrt{(x+3)^3}\cdot\sqrt[3]{(x-3)^4}}{(x+2)^5}.$

3.18. $a)\quad y=\left(\arccos 3x\right)^{\log_3(2x+1)},\quad b)\; y=\dfrac{(x-6)^3(x+3)^5}{\sqrt[3]{(x+4)^4}}.$

3.19. $a)\quad y=\left(tg\,3x\right)^{\arccos(x-2)},\quad b)\; y=\dfrac{\sqrt[3]{(x+5)^4}}{(x-4)^5(x+3)^3}.$

3.20. $a)\quad y=\left(\sin(5x+3)\right)^{\cos^2 x},\quad b)\; y=\dfrac{\sqrt[5]{(x+3)^4}}{(x-2)^3(x+5)^5}.$

3.21. $a)\quad y=(\sin(3x+1))^{arctg2x}, \quad b)\ y=\dfrac{(x-3)^5\sqrt[4]{(x-5)^3}}{(x+7)^6}.$

3.22. $a)\quad y=(ctg\,2x)^{1/x^3}, \quad b)\ y=\dfrac{\sqrt{(x+3)^3}\cdot\sqrt[4]{(x-2)^3}}{(x+2)^7}.$

3.23. $a)\quad y=(\sin 3x)^{\log_2 x}, \quad b)\ y=\dfrac{\sqrt{(x-3)^5}\cdot\sqrt[3]{(x-5)^2}}{(x+3)^3}.$

3.24. $a)\quad y=(tg(2x+3))^{arcctgx}, \quad b)\ y=\dfrac{\sqrt[5]{(x+3)^4}(x-5)^3}{\sqrt[3]{x-7}}.$

3.25. $a)\quad y=(1/x)^{arctg3x}, \quad b)\ y=\dfrac{(x+5)^5(x-2)^3}{\sqrt[3]{(x-7)^2}}.$

3.26. $a)\quad y=(3x+5)^{tg^2 3x}, \quad b)\ y=\dfrac{(x+7)^5\sqrt{(x+2)^3}}{\sqrt[3]{(x-5)^4}}.$

3.27. $a)\quad y=(\log_3(3x+1))^{\arccos 2x}, \quad b)\ y=\dfrac{(x+3)^2\cdot\sqrt[4]{(x-5)^3}}{(x+1)^5}.$

3.28. $a)\quad y=(\cos^2 x)^{\log_2(3x+2)}, \quad b)\ y=\dfrac{(x-3)^3(x+5)^5}{\sqrt[3]{(x+2)^5}}.$

3.29. $a)\quad y=(1/x)^{\arccos 5x}, \quad b)\ y=\dfrac{(x+7)^4(x-2)^5}{\sqrt[5]{(x-5)^3}}.$

3.30. $a)\quad y=(\sin^2 x)^{\log_5(3x+5)}, \quad b)\ y=\dfrac{(x-3)^3\sqrt{(x+5)^5}}{\sqrt[6]{(x+3)^5}}.$

4

Oshkormas shaklda berilgan funksiyalarning hosilalarini hisoblang.

4.1. $2^{x+y}=2^x+2^y.$

4.2. $y^2=\sin x+x\cos y.$

4.3. $y=7x+ctgy.$

4.4. $tgy=3x+5y.$

4.5. $y^2+x^2=\sin y.$

4.6. $xy=x^2+ctgy.$

4.7. $xy-6=\cos y.$

4.8. $e^y=4x-7y.$

4.9. $y^2x^2+x=5y.$

4.10. $y^2=(x-y)/(x+y).$

4.11. $xy=ctgy.$

4.12. $\sin y=xy^2+5.$

4.13. $\sin(xy)+\cos(xy)=tg(x+y).$

4.14. $y=x+arctgy.$

4.15. $x-y=\arcsin x-\arcsin y.$

4.16. $x\sin y-\cos y+\cos 2y=0.$

4.17. $x^3+5x^2y+4xy^2+.y^3=0$

4.18. $y=1+xe^y.$

4.19. $y^2 = (x-y)/(x+y)$.

4.20. $y = e^y + 4x$.

4.21. $y^2 = x + \ln(y/x)$.

4.22. $y\sin x - \cos(x+y) = 0$.

4.23. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

4.24. $y = \cos(x+y)$.

4.25. $\cos y = 5x - 3y$.

4.26. $x^3 + y^3 = 7xy^2 + 2x^2y$.

4.27. $3^x + 3^y = 3^{x+y}$.

4.28. $xy = \cos y$.

4.29. $x^4 + y^4 = x^2y^2$.

4.30. $x^y = y^x$.

5

Parametrik shaklda berilgan funksiyalarning hosilalarini hisoblang.

5.1. $\begin{cases} x = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right), \\ y = t\sqrt{t^2+1}. \end{cases}$

5.2. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = tg\sqrt{t+1}. \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} x = \sqrt{2t-t^2}, \\ y = \arcsin(t-1). \end{cases}$

5.4. $\begin{cases} x = \arcsin(\sin t), \\ y = \arccos(\cos t). \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} x = \sqrt{2t-t^2}, \\ y = 1/\sqrt[3]{(1-t)^2}. \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} x = \ln(ctgt), \\ y = 1/\cos^2 t. \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} x = ctg(2e^t), \\ y = \ln(tge^t). \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} x = arcctg(e^{t/2}), \\ y = \sqrt{e^t+1}. \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} x = \left(3t^2+1\right)/(3t^2), \\ y = \sin\left(t^3/3+t\right). \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} x = \arcsin(1/t), \\ y = \sqrt{t^2-1} + \arccos(1/t). \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} x = 1/\ln t, \\ y = \ln\left(\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)/t\right). \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} x = \arcsin\sqrt{t}, \\ y = \sqrt{1+\sqrt{t}}. \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} x = \ln(tgt), \\ y = 1/\sin^2 t. \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} x = \ln(1-t^2), \\ y = \arcsin\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} x = arctgt \\ y = \ln\left(\sqrt{1-t^2}/(t+1)\right). \end{cases}$

5.16. $\begin{cases} x = \ln((1-t)/(1+t)), \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} x = \arccos(1/t), \\ y = \sqrt{t^2-1} + \arcsin(1/t). \end{cases}$

5.18. $\begin{cases} x = tg(2e^t), \\ y = \ln(ctge^t). \end{cases}$

5.19. $\begin{cases} x = (\arcsin t)^2, \\ y = t/\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

5.20. $\begin{cases} x = t(t\cos t - 2\sin t), \\ y = t(t\sin t + 2\cos t). \end{cases}$

5.21. $\begin{cases} x = \arcsin\left(t/\sqrt{1+t^2}\right), \\ y = \arccos(1/\sqrt{1+t^2}). \end{cases}$

5.22. $\begin{cases} x = 6t/\left(1+t^2\right), \\ y = 6t^2/\left(1+t^2\right). \end{cases}$

5.23. $\begin{cases} x = a(t\cos t + \sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$

5.24. $\begin{cases} x = tgt, \\ y = 1/\sin 2t. \end{cases}$

5.25. $\begin{cases} x = \ln\left(1+t^2\right), \\ y = arctg\sqrt{1+t^2}\,. \end{cases}$

5.26. $\begin{cases} x = (1+t^3)/(t^2-1), \\ y = t/(t^2-1). \end{cases}$

5.27. $\begin{cases} x = (2t+t^2)/(t^3+1), \\ y = \left(2t-t^2\right)/(t^3+1). \end{cases}$

5.28. $\begin{cases} x = 2tgt, \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t. \end{cases}$

5.29. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1-\cos t). \end{cases}$

5.30. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - arctgt. \end{cases}$

5.3 Funksiya differensiali. Yuqori tartibli hosilalar.Yuqori tartibli differensiallar

$y = f(x)$ *funksiyaning differensiali*[133] deb, funksiya orrtirmasining argument orttirmasi $\Delta x = dx$ ga nisbatan chiziqli bosh qismiga aytiladi. $dy = f'(x)dx$ kabi belgilanadi.

Differensial ta'rifidan va hosila hisoblash qoidalaridan foydalanib, quyidagi formulalarni hosil qilamiz($u = u(x),\ v = v(x)$):

$$1)\ dC = 0;\quad 2)\ d(u \pm v) = du \pm dv;\quad 3)\ d(Cu) = Cdu;\quad 4)\ d(uv) = vdu + udv;$$

$$5)\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2};\quad 6)\ d\ f(u) = f'(u)u'dx = f'(u)du,\ 7)\ dx = \Delta x.$$

Funksiya orttirmasi uning differensialidan Δx ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdorga farq qiladi. Shuning uchun, argumentning x_0 nuqtadagi cheksiz kichik orttirmasida, funksiyaning orttirmasi uning shu nuqtadagi differensialiga taqriban teng bo'ladi, ya'ni $\Delta y \approx dz,\ f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x,$ bundan

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \tag{3.1}$$

taqribiy hisoblash formulasiga ega bo'lamiz. Bu formula yordamida funksiyaning $x = x_0 + \Delta x$ nuqtadagi qiymati taqribiy hisoblanadi. Hisoblashdagi funksiyaning nisbiy xatoligi

$$\delta = \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)}\right| \cdot 100\% \tag{3.2}$$

formula bilan topiladi.

1-misol

Ushbu $tg\,44°$ ni differensial yordamida taqribiy hisoblang va nisbiy xatolikni toping.

► $f(x) = tgx,\ f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ x = 44°,\ x_0 = 45°,\ \Delta x = -1° = -1° \cdot \dfrac{\pi}{180°} \approx -0{,}017.$

Taqribiy hisoblash formulasi (3.1)dan foydalansak,

$$tg\,44° \approx tg\,45° - \frac{1}{\cos^2 45°} \cdot 0{,}017 = 1 - 2 \cdot 0{,}017 = 0{,}966.$$

Nisbiy xatolik, $\delta = \left|\dfrac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)}\right| \cdot 100\% = \dfrac{0{,}034}{1} \cdot 100\% = 3{,}4\%.$ ◄

[133] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning hosilasidan olingan hosila *ikkinchi tartibli hosila*, $(n-1)-$tartibli hosilasidan olingan hosila $n-$*tartibli hosila* deyiladi va mos ravishda $y''=(y')'=f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}$, $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'=f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}$ kabi belgilanadi.

Yuqori tartibli hosila hisoblashda quyidagi formulalar o'rinli $u=u(x),\ v=v(x)$):

$$1)\ (u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)};\quad 2)\ (Cu)^{(n)}=Cu^{(n)};$$

$$3)\ (uv)^{(n)}=u^{(n)}\cdot v+\frac{n}{1!}u^{(n-1)}\cdot v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}\cdot v''+...+u\cdot v^{(n)}.$$

Oxirgi 3) formula *Leybnits formulasi*[134] deb ataladi.

2-misol

Leybnits formulasi yordamida hisoblang: $y=\left(x^2+1\right)\cdot\log_2 x,\ y^{(10)}-?$

► Qulaylik uchun quyidagicha belgilashlar kiritamiz va hosilalarini hisoblaymiz:

$$u=\log_2 x,\ v=x^2+1.$$

$$u'=\frac{1}{x\ln 2},\ u''=-\frac{1}{x^2\ln 2},u'''=\frac{2!}{x^3\ln 2},u^{(4)}=-\frac{3!}{x^4\ln 2},...,u^{(9)}=\frac{8!}{x^9\ln 2},u^{(10)}=-\frac{9!}{x^{10}\ln 2}.$$

$$v'=2x,\ v''=2,\ v'''=v^{(4)}=...=v^{(10)}=0.$$

Leybnits formulasini $n=10$ uchun yozib olamiz

$$(uv)^{(10)}=u^{(10)}\cdot v+\frac{10}{1!}u^{(9)}\cdot v'+\frac{10\cdot 9}{2!}u^{(8)}\cdot v''+...+u\cdot v^{(10)}.$$

Yuqoridagi hosilalarni hisobga olsak, yig'indining birinchi uchta hadi qoladi, ya'ni

$$y^{(10)}=-\frac{9!}{x^{10}\ln 2}\left(x^2+1\right)+\frac{10\cdot 8!}{x^9\ln 2}\cdot 2x-\frac{90\cdot 7!}{x^8\ln 2},$$

$$y^{(10)}=-\frac{2\cdot 7!}{x^{10}\ln 2}(x^2+36).◄$$

$F(x,y)=0$ tenglama x ga bog'liq y funksiyani aniqlasa, bu funksiyadan yuqori tartibli hosila olish uchun y va uning hosilalari x ning funksiyasi ekanini e'tiborga olgan holda, tegishli marta differensiallash kerak.

Parametrik ko'rinishda berilgan $x=x(t),\ y=y(t)$ funksiyadan ikkinchi tartibli hosila quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t},\ y''_{xx}=\left(y'_x\right)'_t\cdot x'_t=\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t\cdot\frac{1}{x'_t}\ \text{yoki}\ y''_{xx}=\frac{y''_{tt}x'_t-y'_tx''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$

3-misol

[134] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

Quyidagi $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1-t^2) \end{cases}$ parametrik funksiya berilgan bo‘lsa $y''_{xx} - ?$

► $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t},\ x'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}},\ y'_t = \dfrac{-2t}{1-t^2},\quad y'_x = \dfrac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}.$

$$y''_{xx} = (y'_x)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{-2\cdot\dfrac{-t}{\sqrt{1-t^2}} + 2t\sqrt{1-t^2}}{1-t^2}\cdot\sqrt{1-t^2} = \frac{2t + 2t(1-t^2)}{1-t^2} = \frac{2t(2-t^2)}{1-t^2}. \blacktriangleleft$$

Funksiyaning differensialidan olingan differensial *ikkinchi tartibli differensial*, $(n-1)-$tartibli differensialdan olingan differensial $n-$*tartibli differensial* deyiladi va mos ravishda

$$d^2y = d(dy) = f''(x)dx^2,\ d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^n$$

formulalar bilan hisoblanadi.

4-misol

Agar $y = 4^{-x^2}$ bo‘lsa d^2y ni hisoblang

► $y' = -2x\cdot 4^{-x^2}\ln 4,\ y'' = 4^{1-x^2}x^2\ln^2 4 - 2\cdot 4^{-x^2}\ln 4,$

$d^2y = f''(x)dx^2,\ d^2y = (4^{1-x^2}x^2\ln^2 4 - 2\cdot 4^{-x^2}\ln 4)dx^2. \blacktriangleleft$

Auditoriya topshiriqlari

1. $y = arctg\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini hisoblang.
2. Oshkormas tenglama bilan berilgan funksiyalarning y'' hosilasini toping.

$a)\ \ln y = x + y$, $\qquad b)\ arctgy = x + y.$

3. Parametrik tenglama bilan berilgan funksiyalardan y'' hosilasini hisoblang.

$a)\ \begin{cases} x = t^4 \\ y = \ln t, \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1-\cos t). \end{cases}$

4. $y = 2^{3x+1}$ funksiyaning $n-$tartibli hosilasini toping.
5. Quyidagi funksiyalarning birinchi va ikkinchi tartibli differensiallarini toping:

$a)\ y = xe^{x^2},\quad b)\ y = \sqrt{1-x^2}\arcsin x,\quad d)\ y = x^3\ln x,\quad e)\ y = \dfrac{\ln x}{x^2}.$

6. Leybnits formulasidan foydalanib ko‘rsatilgan tartibli hosilalarni toping.

$a)\ y = x^2e^x,\ y^{(5)} - ? \qquad b)\ y = (x^2+1)\sin x,\ y^{(20)} - ?$

7. Differensial yordamida taqribiy hisoblang, absolyut va nisbiy xatolikni toping.

$a)$ $y=\sqrt[3]{x^2+2x+5},\ x=0{,}97$ $b)$ $y=\sqrt{\dfrac{x^2-3}{x^2+5}},\ x=2{,}037.$

Mustaqil yechish uchun testlar

1. Quyidagilardan qaysi biri $y=x^3+\ln x$ tenglama bilan berilgan funksiyaning uchinchi tartibli hosilasi bo‘ladi?

A) $y''=6-2/x^3$, B) $y''=6+1/(2x^3)$, C) $y''=6-4/x^3$, D) $y''=6+2/x^3$.

2. Quyidagilardan qaysi biri $y^2=4x$ tenglama bilan berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi bo‘ladi?

A) $y''=-2/y^2$, B) $y''=2/y^2$, C) $y''=-4/y^3$, D) $y''=4/y^3$.

3. Quyidagilardan qaysi biri $y=t^2+1,\ x=\ln t$ parametrik tenglamalar bilan berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi bo‘ladi?

A) $y''=-2t^3$, B) $y''=-4t^2$, C) $y''=-4t$, D) $y''=-2t^2$.

4. Quyidagilardan qaysi biri noto‘g‘ri ?

A) $d^2(\sin x)=\sin x dx^2$, B) $d^2(e^x)=e^x dx^2$, C) $d^2(cosx)=-\cos x dx^2$, D) $d^2(x^3)=6xdx^2$.

5. $\sqrt{2{,}07^3+1}$ ni differensial yordamida taqribiy hisoblang.

A) $3{,}21$ B) $3{,}14$ C) $3{,}22$ D) $3{,}15$.

5.4 O‘rta qiymat haqidagi teoremalar. Lopital qoidasi

1-teorema ***(Roll teoremasi)***[135]. *$y = f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. Agar funksiya $(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi bo‘lib, $f(a) = f(b)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda kamida bitta shunday bir $c \in (a;b)$ nuqta topiladiki, $f'(c) = 0$ bo‘ladi.*

2-teorema ***(Lagranj teoremasi)***. *$y = f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, $(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda kamida bitta shunday bir $c \in (a;b)$ nuqta topiladiki, $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.*

Bu tenglikga *Lagranjning chekli orttirmalar formulasi* deyiladi.

Teoremani geometrik izohlaydigan bo‘lsak, uning har bir sharti o‘rinli bo‘lganda, $y = f(x)$ funksiya grafigida $A(a; f(a))$ va $B(b; f(b))$ nuqtalarini tutashturuvchi AB yoyiga tegishli hech bo‘lmaganda bitta nuqta topiladiki, chiziqning shu nuqtasiga o‘ tkazilgan urinma AB vatarga parallel bo‘ladi.

3-teorema*(Koshi teoremasi)*. *$y = f(x)$ va $y = g(x)$ funksiyalar $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo‘lib, $(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi va $g'(x) \neq 0$, $x \in (a;b)$ bo‘lsa, u holda kamida bitta shunday bir $c \in (a;b)$ nuqta topiladiki, $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.*

Lopital qoidasi[136] ($\dfrac{0}{0}$ va $\dfrac{\infty}{\infty}$ tipidagi aniqmasliklarni ochish uchun). $f(x), g(x)$ funksiyalar $x = x_0$ nuqtaning biror atrofida uzluksiz va differensiallanuvchi bo‘lsin. Agar $x \to x_0$ da $f(x), g(x)$ funksiyalar nolga (yoki $\pm\infty$ ga) intilsa va $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ham mavjud va bu limitlar teng, ya’ni $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Lopital qoidasi $x_0 = \pm\infty$ da ham o‘rinli.

1-misol

Ushbu $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\sin 3x}$ limitni hisoblang

[135] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008
[136] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

►Kasrning surati ham, maxraji ham uzluksiz, differensiallanuvchi va $x \to x_0$ da nolga intiluvchi funksiyalar bo‘lgani uchun Lopital qoidasini qo‘llaymiz,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{3\cos 3x}=\frac{2}{3}. \blacktriangleleft$$

Agar $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nisbat $x \to x_0$ da yana $\frac{0}{0}$ va $\frac{\infty}{\infty}$ tipidagi aniqmaslik bo‘lsa va $f'(x), g'(x)$ funksiyalar ham yuqoridagi shartlarni qanoatlantirsa, qoidani yana bir bor qo‘llab ikkinchi tartibli hosilaga o‘tish mumkin, va hakozo. Lekin hosilalar nisbatining limiti mavjud bo‘lmasa ham funksiyalar nisbatining limiti mavjud bo‘lishi mumkin.

2-misol

Ushbu $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}$ limitni hisoblang

► $\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x+\cos x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1-\sin x}$, bu limit mavjud emas, chunki kasrning surati va maxraji $[0;2]$ kesmadagi ixtiyoriy sonni, kasrning o‘z i esa ixtiyoriy musbat sonni qabul qila oladi. Demak, Lopital qoidasini qo‘llab bo‘lmaydi. Lekin

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sin x/x}{1+\cos x/x}=1. \blacktriangleleft$$

$0\cdot\infty$ va $\infty-\infty$ tipidagi aniqmasliklar osonlik bilan $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ tipidagi aniqmasliklarga keltiriladi. Masalan, agar $f(x)g(x)$, $f(x)\to 0, g(x)\to\infty$ bo‘lsa, bu ko‘paytma $\frac{f(x)}{1/g(x)}$ yoki $\frac{g(x)}{1/f(x)}$ lardan biriga almashtiriladi, agar $f(x)-g(x)$, $f(x)\to\infty, g(x)\to\infty$ bo‘lsa, $f(x)-g(x)=f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)$, bu esa $0\cdot\infty$ tipidagi aniqmaslikdir.

3-misol

Ushbu $\lim_{x\to\infty}x^2e^{-3x}$ limitni hisoblang

►Bu esa $0\cdot\infty$ tipidagi aniqmaslik.

$$\lim_{x\to\infty}x^2e^{-3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{3x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3e^{3x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{9e^{3x}}=0. \blacktriangleleft$$

$f(x)^{g(x)}$ ko‘rinishdagi funksiya limitini hisoblashda $1^\infty, 0^0, \infty^0$ tipidagi aniqmasliklar mavjud. Bunday aniqmasliklarni avval logarifmlab, $0\cdot\infty$ tipiga keltiriladi: $A=\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}$,

$\ln A = \lim\limits_{x\to x_0} \ln f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\left(g(x)\cdot \ln f(x)\right)$. So‘ ngra yuqoridagi kabi almashtitirish bajarilib, Lopital qoidasi qo‘llanadi.

4-misol

Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$ limitni hisoblang

►Bu yerda ∞^0 tipidagi aniqmaslik.

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x},\quad \ln A = \lim_{x\to 0}\left(\sin x \ln\frac{1}{x}\right) = -\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/\sin x} = -\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-\cos x/\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\cos x - x\sin x} = 0,\qquad A = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1.$$ ◄

Auditoriya topshiriqlari

1. $y = x - x^3$ funksiya uchun $[-1;0]$ va $[0;1]$ kesmalarda Roll teoremasi shartlari bajarilishini ko‘rsating va mos c nuqta qiymatlarini aniqlang.
2. $y = x^2$ parabolaninig $A(1;1)$ va $B(3;9)$ nuqtalari orasidagi yoyida yotuvchi shunday bir nuqtani topingki, bu nuqtadan o‘tkazilgan urunma AB vatarga parallel bo‘lsin.

Quyidagi limitlarni Lopital qoidasi yordamida hisoblang:

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4 - 3x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x(e^{1/x} - 1)\right)$
5. $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{1 - 2\cos x}{\sin 3x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2} + 3x^2 - 1}{\sin^2 x}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi - 2arctgx}{\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)}$
11. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)^{tg\pi x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + x)^{1/x}$
12. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(ctgx)^{2x-\pi}$

Mustaqil yechish uchun testlar

Quyidagi limitlarni hisoblang:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-6x^2-3x-18}{x^3-27}$;

A) $2\frac{5}{9}$, B) $2\frac{4}{9}$, C) $3\frac{5}{9}$, D) $3\frac{4}{9}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{e^{2x}-1}$;

A) 2, B) $1\frac{1}{2}$, C) 1, D) $\frac{1}{6}$.

3. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(tgx)^{2x-\pi}$;

A) 2, B) $1\frac{1}{2}$, C) 1, D) $\frac{1}{6}$.

4. $\lim\limits_{x\to\pi}(x-\pi)tg\dfrac{x}{2}$;

A) 0, B) 1, C) 2, D) ∞.

5. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$;

A) 2, B) $1\frac{1}{3}$, C) 1, D) $\frac{1}{5}$.

Shaxsiy uy topshiriqlari

1

Quyidagi funksiyalarning $n-$ tartibli hosilasini toping.

1.1. $y=\ln(2x+1)$

1.2. $y=x\sqrt{e^x}$

1.3. $y=\dfrac{1}{2x+1}$

1.4. $y=e^{4x}$

1.5. $y=\ln(3+x^2)$

1.6. $y=\dfrac{x}{3x+1}$

1.7. $y=\log_3(x+4)$

1.8. $y=\lg(5x+1)$

1.9. $y=\sin 3x$

1.10. $y=\sqrt[3]{e^{2x+1}}$

1.11. $y=\dfrac{1+x}{1-x}$

1.12. $y=\sqrt{x-7}$

1.13. $y=\cos 2x$

1.14. $y=\dfrac{5x+1}{13(2x+3)}$

1.15. $y=\dfrac{4}{x+3}$.

1.16. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$

1.17. $y=\dfrac{4+15x}{5x+1}$

1.18. $y=xe^{6x}$

1.19. $y=\sin^2 x$

1.20. $y=\log_5(2x-1)$

1.21. $y=xe^{x}$

1.22. $y=\cos^2 x$

1.23. $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

1.24. $y=\dfrac{1}{x-7}.$

1.25. $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$

1.26. $y=x\ln x$

1.27. $y=3e^{-3x}.$

1.28. $y=\cos(3x+1)$

1.29. $y=3^{x}$

1.30. $y=a^{2x}$

2

Berilgan parametrik funksiyalarning ikkinchi tartibli y''_{xx} hosilasini toping.

2.1. $\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=2\sec^2 t. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} \\ y=1/t \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} x=\sin^2 t, \\ y=1/ch^2t. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} x=t+\sin t, \\ y=2-\cos t. \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} x=1/t, \\ y=1/(1+t^2). \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=1/\sqrt{1-t}. \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\sec t. \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} x=sh^2t, \\ y=th^2t. \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} x=tgt, \\ y=1/\sin 2t. \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} x=\sqrt{t-1}, \\ y=t/\sqrt{1-t}. \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=arctgt. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=\sqrt[3]{t-1} \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} x=\cos t/(1+2\cos t), \\ y=\sin t/(1+2\cos t). \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} x=\sqrt[3]{t-1}, \\ y=\ln t. \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} x=t+\sin t, \\ y=2+\cos t. \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} x=\cos^2 t, \\ y=tg^2 t. \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} x=\sqrt{t-3} \\ y=\ln(t-2) \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\ln\cos t. \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\ln\sin t. \end{cases}$

2.21. $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t. \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} x=e^t \\ y=\arcsin t. \end{cases}$

2.23. $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=2-\cos t. \end{cases}$

2.24. $\begin{cases} x=cht \\ y=\sqrt[3]{sh^2 t}. \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin 2t. \end{cases}$

2.26. $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin^4(t/2). \end{cases}$

2.27. $\begin{cases} x=arctgt \\ y=t^2/2. \end{cases}$

2.28. $\begin{cases} x=1/t^2, \\ y=1/(t^2+1). \end{cases}$

2.29. $\begin{cases} x=\cos t-t\sin t \\ y=cost+t\sin t. \end{cases}$

2.30. $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=4(2+\cos t). \end{cases}$

3

Differensial yordamida 0,01 aniqlikda taqribiy hisoblang va nisbiy xatolikni toping.

3.1. $a)\ \sqrt[3]{27{,}5}$; $b)\ arctg1{,}02.$

3.2. $a)\ \sqrt[7]{130}$; $b)\ \arcsin 0{,}54.$

3.3. $a)\ 2{,}9/\sqrt{2{,}9^2+16}$; $b)\ \sin 92°.$

3.4. $a)\ \sqrt[5]{200}$; $b)\ arctg\sqrt{3{,}2}.$

3.5. $a)\ 4{,}01^{1{,}5}$; $b)\ arctg\sqrt{0{,}97}.$

3.6. $a)\ \sqrt[3]{70}$; $b)\ \ln tg 46°.$

3.7. $a)\ \sqrt[4]{16.64}$; $b)\ \sin 29°.$

3.8. $a)\ \left(0{,}98+\sqrt{5-0{,}98^2}\right)/2$; $b)\ e^{0{,}2}.$

3.9. $a)\ 0{,}98^{1{,}5}$; $b)\ arctg\sqrt{1{,}02}.$

3.10. $a)\ \sqrt[3]{26{,}19}$; $b)\ \cos 59°.$

3.11. $a)\ 3{,}02^4+3{,}02^3$; $b)\ ctg 29°.$

3.12. $a)\ \sqrt{(2{,}037^2-3)/(2{,}037^2+5)}$; $b)\ tg 44°.$

3.13. $a)\sqrt{(4-3{,}02)/(1+3{,}02)}$; $\quad b) arctg\sqrt{3{,}1}$.

3.14. $a) 4{,}16^{-0{,}5}$; $\quad b)\ln tg\, 47°15'$.

3.15. $a) 3{,}03^{5}$; $\quad b)\arcsin 0{,}4983$.

3.16. $a)\sqrt[3]{65}$; $\quad b) arctg\, 0{,}98$.

3.17. $a)\sqrt[5]{237}$; $\quad b)\sin 31°$.

3.18. $a) 4{,}1/\sqrt{4{,}1^2+9}$; $\quad b) e^{0{,}25}$.

3.19. $a)\sqrt[3]{150}$; $\quad b) arctg\sqrt{2{,}9}$.

3.20. $a) 4{,}01^3+4{,}01^2$; $\quad b)\ln tg\, 44°$.

3.21. $a) 1{,}05+\sqrt{3+1{,}05^2}$; $\quad b)\ln ctg\, 46°$.

3.22. $a)\sqrt[4]{85}$; $\quad b)\ln arctg\sqrt{0{,}97}$.

3.23. $a)\sqrt[3]{8{,}36}$; $\quad b)\arcsin 0{,}08$.

3.24. $a)\sqrt[5]{1{,}03^2}$; $\quad b)\sqrt[3]{0{,}01+3\cos 0{,}01}$.

3.25. $a)\sqrt{1{,}97^2+5}$; $\quad b)\cos 61°$.

3.26. $a) 5{,}02^3+5{,}02^2$; $\quad b) ctg\, 44°$.

3.27. $a)\sqrt{1+0{,}01+\sin 0{,}01}$; $\quad b) arctg\sqrt[3]{1{,}02}$.

3.28. $a)\sqrt[3]{8{,}24}$; $\quad b) arcctg\sqrt{3{,}1}$.

3.29. $a) 9{,}16^{-0{,}5}$; $\quad b)\ln ctg\, 47°15'$.

3.30. $a) 2{,}03^6$; $\quad b)\arcsin 0{,}512$.

4

Quyidagi limitlarni Lopital qoidasi yordamida hisoblang.

4.1. $a)\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1/\cos^2 x-2tgx}{1+\cos 4x}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to 0}(\ln(x+e))^{1/x}$.

4.2. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{1/x^2}-1}{2arctgx^2-\pi}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

4.3. $a)\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1+\cos 4x}{2tgx-\sec^2 x}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}arctgx\right)^x$.

4.4. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^2}{tg^2 2x}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to\infty}(\cos(4/\sqrt{x}))^x$

4.5. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$; $b)\lim\limits_{x\to 1/2}\left(\ln 2x\ln(2x-1)\right)$

4.6. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{tg^2 2x}$; $b)\lim\limits_{x\to\infty}\left((\pi-2arctgx)\cdot\ln x\right)$

4.7. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{x\sqrt{1-x^2}}$; $b)\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

4.8. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{5-5e^{-3x}}$; $b)\lim\limits_{x\to a}\left(a^2-x^2\right)\cdot tg\,\dfrac{\pi x}{2a}$

4.9. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$; $b)\lim\limits_{x\to 2}\left(2-\dfrac{x}{2}\right)^{tg\frac{\pi x}{4}}$

4.10. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-2\arcsin x}{x\sqrt{1-x^2}}$; $b)\lim\limits_{x\to 0}x^{1/\ln(e^x-1)}$

4.11. $a)\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt[3]{\cos 2x}-1}{2\sin^2(x/4)-1}$; $b)\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\cdot ctgx$

4.12. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-\cos 3x}{e^{2x}-\cos 2x}$; $b)\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2\left(1-\sqrt{x}\right)}-\dfrac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\right)$

4.13. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(e^{x^2}-1)}{\cos x-1}$; $b)\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos(\pi x/2)}$

4.14. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x^2/2-x-1}{\cos x-x^2/2-1}$; $b)\lim\limits_{x\to\infty}x^{5/(1+2\ln x)}$

4.15. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi/x}{\cos(5x/2)}$; $b)\lim\limits_{x\to\infty}(\ln 2x)^{1/\ln x}$

4.16. $a)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-x)+tg(\pi x/2)}{ctg\,\pi x}$; $b)\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{5}{6x}$

4.17. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^3}{\sin^2 2x}$; $b)\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\log_2 x}$

4.18. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctgx}{x^3}$; $b)\lim\limits_{x\to 1}\left(ctg\,\dfrac{\pi x}{4}\right)^{tg(\pi x/2)}$

4.19. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 5x}$; $b)\lim\limits_{x\to 0}(ctg\,2x)^{1/\ln x}$

4.20. $a)\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}-1}$; $b)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\cos(\pi x/2)\ln(1-x)}$

4.21. $a)\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{1-\sin 3x}{(6x-\pi)^2}$; $b)\lim\limits_{x\to\pi/4}(tg\,2x)^{4x-\pi}$

4.22. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin 2x}}$; $b)\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2 e^{1/x^2}\right)$

4.23. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-3^{\sin x}}{x^3}$; $b)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}arctgx\right)^x$

4.24. $a)\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{(1-\pi)^2}{1-tg(x/4)}$; $b)\lim\limits_{x\to 1}\ln x\ln(x-1)$

4.25. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; $b)\lim\limits_{x\to 1}(tg\pi x)^{2arctgx-1}$

4.26. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{tgx}-e^x}{tgx-x}$; $b)\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin 6x}$

4.27. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin 2x}$; $b)\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)^{1/\ln 2(x-1)}$

4.28. $a)\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{2+5x}+2}{\sqrt{3+x}-1}$; $b)\lim\limits_{x\to\infty}x^3\sin(a/x)$

4.29. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{tg2x}$; $b)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx}$

4.30. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sin 3x}$; $b)\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{6}{7x}$

5.5 Funksiyaning monotonligi, ekstremumni topish. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymati

Differensial hisobning asosiy vazifalardan biri funksiyalarni tekshiririshning umumiy usullarini ishlab chiqishdir.

Agar $y=f(x)$ funksiya argumentining $(a;b)$ oraliqdagi katta qiymatiga funksiyaning katta(kichik) qiymati mos kelsa, ya’ni $x_1<x_2$ bo‘lganda $f(x_1)<f(x_2)\big(f(x_1)>f(x_2)\big)$ bo‘lsa, u holda bu funksiya shu oraliqda *o‘suvchi(kamayuvchi)*[137] deyiladi.

1-teorema. *Agar $[a;b]$ kesmada hosilaga ega bo‘lgan $f(x)$ funksiya shu kesmada o‘suvchi(kamayuvchi) bo‘lsa, uning hosilasi $[a;b]$ kesmada manfiy(musbat) bo‘lmaydi, ya’ni* $f'(x)\ge 0\big(f'(x)\le 0\big)$.

[137] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

2-teorema. *Agar* $[a;b]$ *kesmada uzluksiz va* $(a;b)$ *oraliqda differensiallanuvchi* $f(x)$ *funksiya uchun* $a<x<b$ *da* $f'(x)>0$ *bo'lsa, bu funksiya* $[a;b]$ *da o'suvchi(kamayuvchi) bo'ladi.*

Biror oraliqdan olingan ixtiyoriy $x_1<x_2$ uchun $f(x_1)\le f(x_2)\big(f(x_1)\ge f(x_2)\big)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya shu oraliqda *kamaymaydigan(o'smaydigan)* funksiya deyiladi.

Funksiyaning kamaymaydigan yoki o'smaydigan oraliqlari uning *monotonlik oraliqlari* deyiladi.

Funksiyaning hosilasi nolga teng bo'ladigan va mavjud bo'lmaydigan nuqtalar *kritik nuqtalar* deyiladi.

1-misol

Ushbu $f(x)=2x^2-\ln x$ funksiyaning kritik nuqtasini, o'sish va kamayish oraliqlarini toping.

►Funksiya $x>0$ qiymatlarda aniqlangan, hosilasi $f'(x)=4x-\dfrac{1}{x}$. Kritik nuqtasini topamiz: $f'(x)=0,\quad 4x-\dfrac{1}{x}=0,\quad x=\dfrac{1}{2}$.

Agar $f'(x)>0$, ya'ni $4x-\dfrac{1}{x}>0$ bo'lsa, funksiya o'suvchi bo'ladi. Demak, $(1/2;\infty)$ oraliqda funksiya o'suvchi ekan.

Agar $f'(x)<0$ yoki $4x-\dfrac{1}{x}<0$ bo'lsa, funksiya kamayuvchi bo'ladi. Demak, $(0;1/2)$ oraliqda funksiya kamayuvchi ekan.◄

Agar absolyut miqdori bo'yicha yetarlicha kichik bo'lgan ixtiyoriy Δx uchun $f(x_0+\Delta x)<f(x_0)\ \big(f(x_0+\Delta x)>f(x_0)\big)$ bo'lsa, $x=x_0$ nuqta $f(x)$ funksiyaning *maksimum(minimum) nuqtasi* deyiladi. Funksiyaning maksimum(minimum) nuqtalardagi qiymatlari esa *maksimum(minimum)qiymatlari*[138] deyiladi.

Maksimum va minimum nuqtalari *funksiyaning ekstremumlari*, maksimal va minimal qiymatlari esa *funksiyaning ekstremal qiymatlari* deyiladi.

3-teorema. *Agar differensiallanuvchi* $y=f(x)$ *funksiya* $x=x_0$ *nuqtada maksimumga yoki minimumga ega bo'lsa, u holda* $f'(x_0)=0$ *bo'ladi yoki* $f'(x_0)$ *mavjud bo'lmaydi.*

Bu ekstremumning zaruriy shartidir. Chunki funksiya biror nuqtada ekstremumga erishsa, shu nuqta har doim kritik nuqta bo'ladi. Ammo har bir kritik nuqta ham ekstremum nuqta bo'la olmaydi. Masalan, $y=x^3$ funksiyadagi $x=0$ nuqta.

Quyida biz funksiya ekstremumining ikkita yetarlilik sharti bilan tanishamiz

[138] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

4-teorema *(funksiya ekstremumining 1-yetarlilik sharti).* *$f(x)$ funksiya $x=x_0$ kritik nuqtani o'z ichiga olgan birorta intervalda uzluksiz va shu intervalning hamma nuqtalarida differensiallanuvchi bo'lsin.Agar $f'(x)$ hosila $x<x_0$ da musbat, $x>x_0$ da manfiy bo'lsa, $x=x_0$ maksimum nuqta, $x<x_0$ da manfiy, $x>x_0$ da musbat bo'lsa, $x=x_0$ minimum nuqta bo'ladi.*

Bu yerda ko'rsatilgan tengsizlik $x=x_0$ nuqtaning yetarlicha kichik atrofida bajarilishi mumkin Bu teorema birinchi tartibli hosila yordamida funksiyani ekstremumga tekshirish qoidasini aniqlaydi, uni quyidagi sxemada ifodalaymiz:

Kritik nuqta x_0 dan o'tishda $f'(x)$ ning ishorasi			Kritik nuqtaning xarakteri
$x<x_0$	$x=x_0$	$x>x_0$	
$+$	$f'(x_0)=0$ yoki mavjud emas	$-$	Maksimum nuqtasi
$-$	$f'(x_0)=0$ yoki mavjud emas	$+$	Minimum nuqtasi
$+$	$f'(x_0)=0$ yoki mavjud emas	$+$	Ekstremum mavjud emas (funksiya o'suvchi)
$-$	$f'(x_0)=0$ yoki mavjud emas	$-$	Ekstremum mavjud emas (funksiya kamayuvchi)

2-misol

Ushbu $f(x)=x^2-4\ln(1+x)$ funksiyani ekstremumga tekshiring.

►Funksiya $x>-1$ da aniqlangan. Funksiya hosilasini hisoblaymiz:

$$f'(x)=2x-\frac{4}{1+x}=\frac{2(x^2+x-2)}{1+x}.$$

Funksiya aniqlanish sohasiga tegishli bitta $x=1$-kritik nuqta mavjud ekan. $-1<x<1$ da $f'(x)<0$ va $x>1$ da $f'(x)<0$ bo'lgani uchun $x=1$-minimum nuqta; $y_{\min}=1-4\ln 2$.
◄

5-teorema (*funksiya ekstremumining 2-yetarlilik sharti*)[139]. *$f(x)$ funksiya ikki marta differensiallanuvchi, $f'(x_0)=0$ va $f''(x_0)\neq 0$ bo'lsa, $x=x_0$ da ekstremum mavjud. Agar*

[139] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

$f''(x_0)<0$ bo'lsa, $x=x_0$ maksimum nuqta, $f''(x_0)>0$ bo'lsa $x=x_0$ minimum nuqta bo'ladi.

3-misol

Ushbu $f(x)=x^2e^{-x}$ funksiyani ikkinchi tartibli hosila yordamida ekstremumga tekshiring.

►Funksiya $x\in R$ da aniqlangan. Funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini hisoblaymiz:

$$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=(2x-x^2)e^{-x},$$
$$f''(x)=(2-2x)e^{-x}-(2x-x^2)e^{-x}=(2-4x+x^2)e^{-x}.$$

$f'(x)=0,\ \left(2x-x^2\right)e^{-x}=0$ tenglamadan funksiyaning $x_1=0$ va $x_2=2$ kritik nuqtalari topiladi. Bu nuqtalardagi ikkinchi tartibli hosila qiymatlarini hisoblaymiz: $f''(0)=2>0$, ya'ni $x_1=0$ - minimum nuqta, $f''(2)=-2e^{-2}<0$, ya'ni $x_2=2$ - maksimum nuqta; $y_{\min}=0,\ y_{\max}=4e^{-2}$.◄

$[a;b]$ kesmada uzluksiz funksiya bu kesmada o'z ining eng katta va eng kichik qiymatlaruga erishadi va bu qiymatlarga yoki $(a;b)$ intervalda yotuvchi kritik nuqtalarda, yoki $[a;b]$ kesma oxirlarida erishadi.

4-misol

Ushbu $y=2x+3\sqrt[3]{x^2}$ funksiyaning $[-3;1]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

►Funksiya hosilasi $y'=2+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}=\dfrac{2(\sqrt[3]{x}+1)}{\sqrt[3]{x}}$. U holda $x_1=-1$ hosila $y'=0$ bo'ladigan, $x_2=0$ hosila y' mavjud bo'lmagan, ya'ni uziladigan nuqtalar bo'ladi. Ikkila kritik nuqtalar ham intervalga tegishli. Funksiyaning kritik nuqtalardagi va kesma oxiridagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$y(-1)=1,\ y(0)=0,\ y(-3)=3(\sqrt[3]{9}-2)\approx 0{,}24,\ y(1)=5.$$

Topilganlarni taqqoslab, berilgan funksiya $[-3;1]$ kesmadagi eng katta qiymatiga $x=1$ nuqtada, eng kichik qiymatiga $x=0$ nuqtada erishadi, degan xulosaga kelamiz. Demak, $[-3;1]$ kesmada $y_{eng\,kat.}=5,\ y_{eng\,kich.}=0$ bo'lar ekan.◄

5-misol

Radiusi R ga teng bo'lgan sharga ichki chizilgan eng katta hajmli aylanma konusning balandligini aniqlang.

►Konus hajmi: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$. Bu yerda konus balandligi H sharning o‘qkesimida hosil bo‘lgan aylanaga ichki chizilgan teng yonli uchburchak balandligi hamdir, konus asosining radiusi esa shu uchburchak asosining yarmiga teng. Demak,

$$r^2 = R^2 - (H - R)^2 = 2RH - H^2.$$

Bundan

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(2RH - H^2\right)H = \frac{\pi}{3}\left(2RH^2 - H^3\right) = V(H).$$

H ning qanday qiymatida hajm eng katta bo‘lishini topish uchun hosil bo‘lgan funksiyadan hosila olib, nolga tenglaymiz:

$$V' = \frac{\pi}{3}\left(4RH - 3H^2\right) = 0.$$

$H = \frac{4}{3}R$ nuqtani topib, uni $V'' = \frac{\pi}{3}(4R - 6H)$ hosilaga qo‘ysak, $V''\left(\frac{4R}{3}\right) = -\frac{4\pi R}{3} < 0$.

Demak, $H = \frac{4}{3}R$ da konus hajmi eng katta bo‘lar ekan.◄

Auditoriya topshiriqlari

1. $y = x^4 - 2x^2 + 3$ funksiyaning kritik nuqtalari va monotonlik oraliqlarini toping.
2. $y = \sqrt[3]{x^2(x+3)}$ funksiyaning kritik nuqtalari va monotonlik oraliqlarini toping.
3. $y = x/(x^2 - 6x - 16)$ funksiyaning kritik nuqtalari va monotonlik oraliqlarini toping.
4. $y = \sqrt[3]{(x^2 - 6x + 5)^2}$ funksiyani ekstremumga tekshiring.
5. $y = x\ln^2 x$ funksiyani ekstremumga tekshiring.
6. $y = (2x-1)/(x-1)^2$ funksiyani ekstremumga tekshiring.
7. $y = e^{-x^2/2}$ funksiyani ekstremumga tekshiring.
8. $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$ funksiyaning $[-2;\, 2]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.
9. $y = x + 3\sqrt[3]{x}$ funksiyaning $[-1;\, 1]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.
10. Sig‘imi $V = 16\pi \approx 50m^3$ bo‘lgan silindr shakldagi yopiq idish tayyorlash talab qilingan bo‘lsin. Tayyorlashga eng kam material sarflash uchun idishning o‘lchamlari(R-radiusi va H-balandligi) qanday bo‘lishi kerak?

Mustaqil yechish uchun testlar

1. Quyidagilardan qaysi biri $y = x^2 - 2\ln x$ funksiyaning kritik nuqtalari bo‘ladi?

   A) $x = 1$, B) $x = \pm 1$, C) $x = 1,\ x = 0$, D) $x = \pm 1,\ x = 0$

2. $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 1$ funksiyaning o‘sish oralig‘ini aniqlang.

   A) $(-\infty;\ \infty)$, B) $(-\infty;\ 0) \cup (1/2;\ 1)$, C) $(0;\ 1/2) \cup (1;\ \infty)$, D) $(-\infty;\ 0) \cup (1/2;\ \infty)$

3. $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 1$ funksiyaning kamayish oralig‘ini aniqlang.

   A) $(-\infty;\ \infty)$, B) $(-\infty;\ 0) \cup (1/2;\ 1)$, C) $(0;\ 1/2) \cup (1;\ \infty)$, D) $(-\infty;\ 0) \cup (1/2;\ \infty)$

4. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ funksiyaning minimum nuqtasini aniqlang.

   A) $x = -1$, B) $x = 3$, C) $x = -1,\ x = 3$, D) mavjud emas.

5. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ funksiyaning $[-2;\ 2]$ kesmadagi eng katta qiymatini toping.

   A) 5 B) 10 C) 12 D) 15

5.6 Funksiya grafigining qavariqligi va botiqligi. Assimptotalar. Funksiyani to‘la tekshirish va grafigini yasash

Agar $y = f(x)$ funksiyaning grafigi $(a;b)$ oraliqning ixtiyoriy nuqtasida o‘tkazilgan urunmadan pastda(yuqorida) yotsa u holda funksiya grafigi shu oraliqda *qavariq(botiq)*[140] deyiladi.

Funksiya grafigining qavariq qismini botiq qismidan ajratuvchi $M(x_0, f(x_0))$ nuqta grafikning *egilish nuqtasi* deyiladi.

1-teorema. *Agar $(a;b)$ oraliqning hamma nuqtalarida $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$ bo‘lsa, u holda bu oraliqning $y = f(x)$ funksiya grafigi qavariq (botiq) bo‘ladi.*

2-teorema. *Agar $f''(x_0) = 0$ bo‘lsa yoki $f''(x_0)$ mavjud bo‘lmasa va $x = x_0$ nuqtadan o‘tishida $f''(x)$ ishorasini o‘zgartirsa, u holda absissasi x_0 ga teng bo‘lgan nuqta $y = f(x)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi bo‘ladi.*

1-misol

Ushbu $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$ funksiya grafigining qavariq, botiqlik oraliqlari va egilish nuqtasi topilsin.

►Funksiya $x \in R$ da aniqlangan. Funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini hisoblaymiz:

[140] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

$$y' = 4x^3 - 36x^2 + 96x,\quad y'' = 12x^2 - 72x + 96 = 12(x^2 - 6x + 8),$$

$$y'' = 0,\ x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4) = 0.$$

$x_1 = 2$ va $x_2 = 4$ nuqtalar yordamida funksiya aniqlanish sohasini oraliqlarga ajratib, quyidagi jadvalni tuzamiz:

x	$(-\infty;\,2)$	2	$(2;\,4)$	4	$(4;\,\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		62		206	
	botiq	egilish n.	qavariq	egilish n.	botiq

Javob: $(-\infty;\,2)$ va $(4;\,\infty)$-funksiya grafigining botiqlik oraliqlari, $(2;\,4)$-funksiya grafigining qavariqlik oralig‘i, $M(2;\,62)$ va $N(4;\,206)$ -egilish nuqtalari.◄

2-misol

Ushbu $y = \sqrt[3]{(x+3)x^2}$ funksiya grafigining qavariq, botiqlik oraliqlari va egilish nuqtasi topilsin.

►Funksiya $x \in R$ da aniqlangan. Funksiyaning birinchi tartibli hosilasini hisoblaymiz:

$$y' = \left(\sqrt[3]{x+3}\cdot\sqrt[3]{x^2}\right)' = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}} + \frac{2\sqrt[3]{x+3}}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x(x+3)^2}}.$$

Ikkinchi tartibli hosila hisoblashda logarifmlab differensiallash qoidasini qo‘llaymiz:

$$\ln y' = \ln\frac{x+2}{\sqrt[3]{x(x+3)^2}} = \ln(x+2) - \frac{1}{3}\ln x - \frac{2}{3}\ln(x+3),$$

$$y'' = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x(x+3)^2}}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{3x} - \frac{2}{3(x+3)}\right) = -\frac{2}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^5}}.$$

$f''(x)$ nolga teng bo‘la olmaydi, egilish nuqtalarini hosila mavjud bo‘lmagan $x_1 = -3$ va $x_2 = 0$ nuqtalardan qidiramiz:

x	$(-\infty;\,-3)$	-3	$(-3;\,0)$	0	$(0;\,\infty)$
$f''(x)$	$+$	mavjud emas	$-$	mavjud emas	$-$

$f(x)$	$\cup$	0	$\cap$	0	$\cap$
	botiq	egilish nuqta	qavariq	egil.nuqta emas	qavariq

Javob: $(-\infty;-3)$ oraliqda funksiya grafigi botiq, $(-3;0)$ va $(0;\ \infty)$ oraliqlarda funksiya grafigi qavariq, $M(-3;0)$- funksiya grafigining egilish nuqtasi.◄

Agar $y=f(x)$ funksiya grafigining o‘zgaruvchi nuqtasi cheksiz uzoqlashganda undan biror to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa nolga intilsa, bu to‘g‘ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining *assimptotasi*[141] deyiladi.

1) Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ bo‘lsa, $x=a$ to‘g‘ri chiziq funksiya grafigining *vertikal assimptotasi* deyiladi.

2) Agar $k=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ va $b=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-kx)$ yoki

$k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ va $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)$ limitlar mavjud bo‘lsa, u holda $y=kx+b$ funksiya grafigining *og‘ma assimptotasi* deyiladi.

Xususan, $k=0$ da $y=b$ *gorizontal assimptota* hosil bo ladi.

3-misol

Ushbu $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ funksiya grafigining assimptotalari topilsin.

►Funksiya $x\neq 2$ da aniqlangan. $\lim\limits_{x\to\pm2}\dfrac{x^3}{x^2-4}=\pm\infty$ bo‘lgani uchun, $x=-2$ va $x=2$ to‘g‘ri chiziqlar funksiya grafigining vertikal assimptotalari bo‘ladi.

Og‘ma assimptotalarni qidiramiz:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-4}=1,\ b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2-4}=0.$$

Demak, yagona $y=x$ og‘ma assimptotasi mavjud.◄

Quyida funksiyani to‘la tekshirish va grafigini yasash uchun umumiy sxemani keltiramiz:

1. Funksiya aniqlanish sohasi va uzilish nuqtalari topiladi.
2. Juft, toqligi, davriyligi tekshiriladi.
3. Koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalari topiladi.
4. Assimptotalari topiladi.

[141] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

5. O‘sish, kamayish oraliqlari, ekstremumlari topiladi.
6. Qavariqlik, botiqlik oraliqlari va egilish nuqtalari topiladi.
7. Ayrim nuqtalardagi qiymatlari hisoblanadi.
8. Funksiya grafigi yasaladi.

4-misol

Quyidagi $y=\dfrac{(x+3)^2}{x-4}$ funksiyani to‘la tekshiring va grafigini yasang.

►Yuqoridagi sxema bo‘ yicha tekshiramiz:

1. Funksiya $x\in(-\infty;4)\cup(4;\infty)$ da aniqlangan.
2. Funksiya juft ham, toq ham, davriy ham emas.
3. Koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalari: $(-3;0)$ va $(0;-2{,}25)$.
4. $x=4$ to‘g‘ri chiziq funksiya grafigining vertikal assimptosi, chunki

$$\lim_{x\to4-0}\frac{(x+3)^2}{x-4}=-\infty \text{ va } \lim_{x\to4+0}\frac{(x+3)^2}{x-4}=+\infty.$$

Og‘ma assimptotalarni qidiramiz:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+3)^2}{x^2-4x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}{1-\frac{4}{x}}=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x+3)^2}{x-4}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{10x+9}{x-4}=10.$$

Demak, funksiya grafigining og‘ma assimptotasi $y=x+10$.

5. O‘sish, kamayish oraliqlari, ekstremumlari topamiz :

$$y'=\frac{x^2-8x-33}{(x-4)^2},\quad x^2-8x-33=0 \text{ yoki } x_1=-3 \text{ va } x_2=11.$$

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;4)$	4	$(4;11)$	11	$(11;\infty)$
y'	$+$	0	$-$	mavjud emas	$-$	0	$+$
y	↗	0	↘	mavjud emas	↘	28	↗
	o‘suvchi		kamayuvchi		kamayuvchi		o‘suvchi

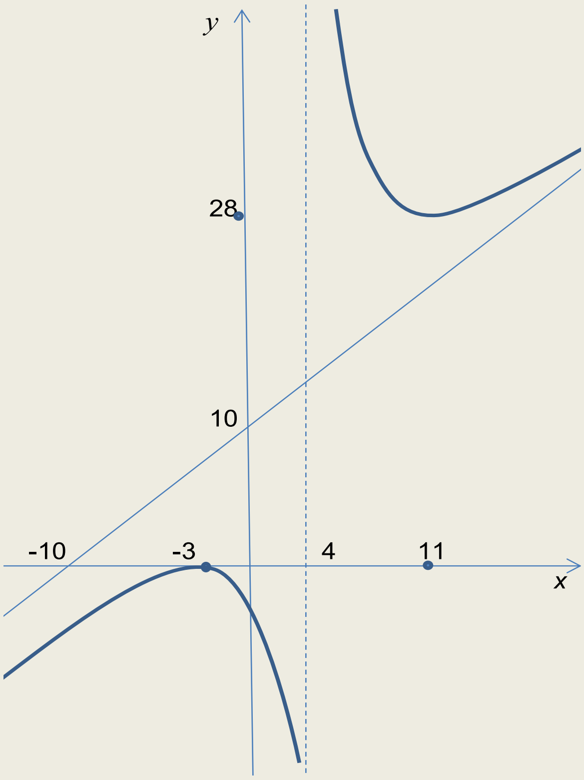
6. Qavariqlik, botiqlik oraliqlari va egilish nuqtalari topamiz:

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 8x - 33}{(x-4)^2}\right)' = \frac{98}{(x-4)^3}.$$

y'' nolga teng bo‘la olmaydi, y'' mavjud bo‘lmaydigan nuqta esa aniqlanish sohasiga tegishli emas. Bundan egilish nuqta mavjud emasligini aniqlaymiz. $x \in (-\infty;\ 4)$ da $y'' < 0$, funksiya grafigi qavariq, $x \in (4;\ \infty)$ da $y'' > 0$, funksiya grafigi botiq bo‘ladi.

7. Ayrim nuqtalardagi funksiya qiymatlarini hisoblaymiz: $(-10;\ -3{,}5)$, $(-4; -1/8)$, $(2;\ -12{,}5)$, $\left(10;\ 28\frac{1}{6}\right)$ va $\left(12;\ 28\frac{1}{8}\right)$.

8. Yuqoridagi tekshirishlardan foydalanib funksiya grafigini yasaymiz:



◀

Auditoriya topshiriqlari

1. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$ funksiya grafigining qavariq, botiqlik oraliqlari va egilish nuqtalari topilsin.

2. $y = \ln(1 + x^2)$ funksiya grafigining qavariq, botiqlik oraliqlari va egilish nuqtalari topilsin.

3. $y = arctgx - x$ funksiya grafigining qavariq, botiqlik oraliqlari va egilish nuqtalari topilsin.

4. $y = e^{-x^2/2}$ funksiyaning assimptotalarini toping.

5. $y = x^3/\left(2(1+x)^2\right)$ funksiyaning assimptotalarini toping.

6. $y = x\ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$ funksiyaning assimptotalarini toping.

7. $y = \sqrt[3]{x^2(x+3)}$ funksiyani to‘la tekshiring va grafigini yasang.

8. $y = x^3/\left(4(2-x)^2\right)$ funksiyani to‘la tekshiring va grafigini yasang.

Mustaqil yechish uchun testlar

1. Quyidagilardan qaysi biri $y = x^2 - 2\ln x$ funksiya grafigining egilish nuqtasi bo‘ladi?

A) $(1;1)$ B) $(e; e^2 - 2)$ C) $(e^{-1}; e^{-2} + 2)$ D) mavjud emas.

2. Quyidagilardan qaysi biri $y = x^3 - 3x^2$ funksiya grafigining egilish nuqtalari bo‘ladi?

A) $(0;0)$ va $(2;-4)$ B) $(2;-4)$ C) $(1;-2)$ D) $(0;0)$

3. $y = x^3 - 3x^2$ funksiya grafigining qavariqlik oraliqlarini toping.

A) $(1;\ \infty)$, B) $(-\infty;\ 0)\cup(2;\ \infty)$, C) $(0;\ 2)$, D) $(-\infty;\ 1)$

4. $y = xe^{-x}$ funksiya grafigining botiqlik oralig‘ini toping.

A) $(1;\ \infty)$, B) $(2;\ \infty)$, C) $(-\infty;\ 2)$, D) $(-\infty;\ 1)$

5. $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-2}$ funksiyaning og‘ma asimptotasini toping.

A) $y = -x$, B) $y = x + 4$, C) $y = x$, D) $y = x - 4$

Shaxsiy uy topshiriqlari

1

Funksiyalarning berilgan oraliqdagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

1.1. $y = 2\sin x + \cos 2x,\ [0;\ \pi/2]$

1.2. $y = x^3 e^{x+1},\ [-4;\ 0]$

1.3. $y = e^{4x-x^2},\ [1;\ 3]$

1.4. $y = (x+1)\sqrt[3]{x^2},\ [-4/5;\ 3]$

1.5. $y = 4 - e^{-x^2},\ [0;\ 1]$

1.6. $y = \sqrt[3]{x - x^3},\ [-2;\ 2]$

1.7. $y=(x-2)e^{x}$, $[-2;1]$

1.8. $y=x/(9-x^2)$, $[-2;\ 2]$

1.9. $y=(1+\ln x)/x$, $[1/e;\ e]$

1.10. $y=x^2+2x+2/(x-1)$, $[-1;\ 3]$

1.11. $y=(x^5-8)/x^4$, $[-3;\ 1]$

1.12. $y=(e^{2x}+1)/e^{x}$, $[-1;\ 2]$

1.13. $y=e^{6x-x^2}$, $[-3;\ 3]$

1.14. $y=((x+1)/x)^3$, $[1;\ 2]$

1.15. $y=(x+2)e^{1-x}$, $[-2;\ 2]$

1.16. $y=\ln(x^2-2x+4)$, $[-1;\ 3/2]$

1.17. $y=3x^4-16x^3+2$, $[-3;\ 1]$

1.18. $y=\ln(x^2-2x+2)$, $[0;\ 3]$

1.19. $y=x^4/4-6x^3+7$, $[-2;\ 4]$

1.20. $y=(3-x)e^{-x}$, $[0;\ 5]$

1.21. $y=(x^3+4)/x^2$, $[1;\ 2]$

1.22. $y=3x/(1+x^2)$, $[0;\ 5]$

1.23. $y=x^5-5x^4+5x^3+1$, $[-1;\ 2]$

1.24. $y=108x-x^4$, $[-1;\ 4]$

1.25. $y=(x-1)e^{-x}$, $[0;\ 3]$

1.26. $y=x^3/(x^2-x+1)$, $[-2;\ 2]$

1.27. $y=(2x-1)/(x-1)^2$, $[-1/2;\ 0]$

1.28. $y=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$, $[-3;\ 2]$

1.29. $y=2x^3+3x^2+2x+1$, $[-1;\ 5]$

1.30. $y=xe^{x}$, $[-2;\ 0]$.

Berilgan funksiyalarni to'la tekshiring va grafigini yasang.

2

2.1. $y=\dfrac{4x-x^2-4}{x}$	**2.16.** $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x-1}$
2.2. $y=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$	**2.17.** $y=\dfrac{x^2}{4x^2-1}$
2.3. $y=e^{\frac{1}{5+x}}$	**2.18.** $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$
2.4. $y=\dfrac{x^2}{9-x}$	**2.19.** $y=\dfrac{x^3}{x^2-x+1}$
2.5. $y=x-\ln(1+x^2)$	**2.20.** $y=x^2-2\ln x$
2.6. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$	**2.21.** $y=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{x}}$
2.7. $y=x^3e^{-x^2/2}$	**2.22.** $y=(x-1)e^{3x+1}$
2.8. $y=\dfrac{4-2x}{1-x^2}$	**2.23.** $y=\dfrac{5x}{4-x^2}$

2.9. $y=\frac{x^3+4}{x^2}$	**2.24.** $y=\frac{x^3}{x^4-1}$
2.10. $y=\frac{(x+1)^2}{x-2}$	**2.25.** $y=\frac{x^4}{x^3-1}$
2.11. $y=\frac{4x^3+1}{x^4}$	**2.26.** $y=x+\frac{4}{x+2}$
2.12. $y=\frac{3x^2-1}{x^3}$	**2.27.** $y=x^2e^{-x}$
2.13. $y=\sqrt{x}e^{-x/2}$	**2.28.** $y=\frac{e\ln x}{x}$
2.14. $y=\frac{1+\ln x}{x}$	**2.29.** $y=\frac{x^3}{x^2-1}$
2.15. $y=\frac{3-x^2}{x+2}$	**2.30.** $y=\frac{(4-x)^3}{9(2-x)^2}$.

VI BOB ANIQMAS INTEGRAL. ANIQ INTEGRAL. XOSMAS INTEGRAL

6.1 Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral

Agar $(a;b)$ oraliqda aniqlangan $y=f(x)$ funksiya uchun $F'(x)=f(x)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning *boshlang‘ich funksiyasi*[142] deyiladi.

$f(x)$ funksiyaning ikkita boshlang‘ich funksiyasi bir biridan faqat o‘z garmas songa farq qiladi.

Boshlang‘ich funksiyalar to‘plami $F(x)+C$, bu yerda C o‘z garmas son, $f(x)$ funksiyadan $(a;b)$ oraliq bo‘ yicha olingan *aniqmas integral* [143] deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C .$$

Quyida biz integrallashning asosiy qoidalari bilan tanishamiz:

1) $\int f'(x)\,dx = \int df(x) = f(x)+C,$

$d\int f(x)\,dx = d(F(x)+C) = f(x)dx$;

2) $\int (f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;

3) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)dx,\ k$ - o‘z garmas son;

4) agar $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ bo‘lsa, u holda $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$, bu yerda *a* va *b* - o‘z garmas sonlar, $a\neq 0$;

5) agar $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ va $u=\varphi(x)$ bo‘lsa, u holda $\int f(u)\,dx = F(u)+C$;

Aniqmas integralning ta’rifi, integrallash qoidalari va asosiy elementar funksiyalarning hosilalari jadvalidan foydalanib aniqmas **integrallar jadvalini** tuzamiz:

[142] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008
[143] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

1. $\int u^a\,du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1.$

2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$

3. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C.$

4. $\int e^u\,du = e^u + C.$

5. $\int \sin u\,du = -\cos u + C.$

6. $\int \cos u\,du = \sin u + C.$

7. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C.$

8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C.$

9. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} arctgu + C \\ -\frac{1}{a} arcctgu + C. \end{cases}$

10. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \begin{cases} \frac{1}{a} \arcsin u + C \\ -\frac{1}{a} \arccos u + C. \end{cases}$

11. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$

12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+k}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+k}\right| + C.$

13. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C.$

14. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

15. $\int shu\,du = chu + C.$

16. $\int chu\,du = shu + C.$

17. $\int \frac{du}{ch^2 u} = thu + C.$

18. $\int \frac{du}{ch^2 u} = thu + C.$

1-misol

Quyidagi $\int\left(3x^2+2\sqrt{x}-\frac{5}{x^2}\right)dx$ integralni hisoblang.

$$\blacktriangleright \int\left(3x^2+2\sqrt{x}-\frac{5}{x^2}\right)dx=3\int x^2dx+2\int x^{1/2}dx-5\int x^{-2}dx=x^3+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{10}{x^3}+C\,.\blacktriangleleft$$

2-misol

Quyidagi $\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$ integralni hisoblang.

$$\blacktriangleright \int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{\left(1+x^2\right)+x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{1+x^2}dx=-\frac{1}{x}+arctgx+C\,.\blacktriangleleft$$

3-misol

Quyidagi $\int(3x-5)^7\,dx$ integralni hisoblang.

$$\blacktriangleright \int(3x-5)^7\,dx=\frac{1}{3}\int(3x-5)^7\,d(3x-5)=\frac{1}{24}(3x-5)^8+C\,.\blacktriangleleft$$

4-misol

Ushbu $\int\frac{8x-arctg\,2x}{1+4x^2}dx$ integralni hisoblang.

$\blacktriangleright$

$$\int\frac{8x-arctg\,2x}{1+4x^2}dx=\int\frac{8x}{1+4x^2}dx-\int\frac{arctg\,2x}{1+4x^2}dx=\int\frac{d\left(1+4x^2\right)}{1+4x^2}+\int arctg\,2x d(arctg\,2x)=$$

$$=\ln\left|1+4x^2\right|-\frac{1}{2}arctg^2\,2x+C.\blacktriangleleft$$

5-misol

Ushbu $\int\frac{\sin 2x}{4+\sin^2 x}dx$ integralni hisoblang.

$$\blacktriangleright \int\frac{\sin 2x}{4+\sin^2 x}dx=\int\frac{d(4+\sin^2 x)}{4+\sin^2 x}=\ln\left(4+\sin^2 x\right)+C\,.\blacktriangleleft$$

Yuqorida biz biror ifodani differensial ostiga kiritib, yoddan bu ifodani u deb almashtirib *bevosita integrallash* usulidan foydalandik.

Bu yerda $\varphi(x)=u$ deb almashtirish olinib, u yangi o'zgaruvchili integral $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f(u)du$ ko'rinishga keltirilgan bo'ladi.

Agar $x=\varphi(u)$, $dx=\varphi'(u)du$ deb almastirsak, $\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(u))\varphi'(u)du$ integralni hosil qilamiz. Bu *o'z garuvchini almashtirish usuli* deyiladi.

6-misol

Ushbu $\int x^2\sqrt[3]{2-5x^3}dx$ integralni hisoblang.

► $2-5x^3=u,\ -15x^2dx=du,\ x^2dx=-\frac{1}{15}du$ almashtirishlarni bajaramiz:

$$\int x^2\sqrt[3]{2-5x^3}dx=-\frac{1}{15}\int\sqrt[3]{u}du=-\frac{1}{20}u^{\frac{4}{3}}+C=-\frac{1}{20}\sqrt[3]{\left(2-5x^3\right)^4}+C.◄$$

7-misol

Ushbu $\int x\sqrt{x-1}dx$ integralni hisoblang.

► $x-1=t^2,\quad x=t^2+1,\ dx=2tdt$ deb almashtiramiz.

$$\int x\sqrt{x-1}dx=\int\left(t^2+1\right)t\cdot 2tdt=2\int\left(t^4+t^2\right)dt=\frac{2}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3+C=\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C.◄$$

8-misol

Ushbu $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ integralni hisoblang.

► Bunday keyin har qanday almashtirishlarni vertikal chiziqlar orasida berib ketamiz.

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\left|\begin{matrix}x=a\sin t\\ dx=a\cos tdt\end{matrix}\right|=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos tdt=a^2\int\cos^2 tdt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C=\left|\begin{matrix}\sin t=\frac{x}{a},\ t=\arcsin\frac{x}{a}\\ \cos t=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\end{matrix}\right|=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.◄$$

Bo'laklab integrallash usuli quyidagi formulaga asolangan:

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

bu yerda $u(x)$ va $v(x)$ - differensiallanvchi funksiyalar. Bu formula *bo'laklab integrallash formulasi* deyiladi. Bo'laklab integrallash formulasi ko'pincha quyidagi ko'rinishdagi integrallarni hisoblashda ishlatiladi:

$$1)\ \int p(x)e^{ax}dx,\ \int p(x)\sin mx dx,\ \int p(x)\cos ax dx;$$

$$2)\ \int p(x) arctgx dx, \int p(x) arcctgx dx, \int p(x)\arcsin x dx,$$

$$\int p(x)\arccos x dx,\ \int p(x)\ln x dx$$

Bu integrallarni hisoblashda, 1 – turdagi integrallarda ***u*** uchun ***p(x)*** ko'phad, qolgan qismi ***dv*** uchun olinib, 2 - turdagi integrallarda ***u*** uchun mos ravishda *arctgx*, *arcctgx*, *arcsinx*, *arccosx* va *lnx*lar, qolgan qismi ***dv*** uchun olinadi.

9-misol

Ushbu $\int x\cos x dx$ integralni hisoblang.

►Bu 1-turdagi integral bo'lgani uchun quyidagicha bo'laklab integrallaymiz:

$$\int x\cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x; & du = dx \\ dv = \cos x dx; & v = \int \cos x dx = \sin x \end{matrix} \right|$$

$$= x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C. ◄$$

10-misol

Ushbu $\int x arctgx dx$ integralni hisoblang.

$$► \int x arctgx dx = \left| \begin{matrix} u = arctgx, & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2} arctgx - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} arctgx - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} arctgx + C = \frac{x^2+1}{2} arctgx - \frac{x}{2} + C. ◄$$

Bo'laklab integrallash qoidasini bir necha marta qo'llash mumkin.

11-misol

Ushbu $\int x^2 e^x dx$ integralni hisoblang.

► Bu yerda ikki marta bo'laklab integrallash qoidasi qo'llanadi:

$$\int x^2 e^x dx = \begin{vmatrix} u = x^2, \ dv = e^x dx \\ du = 2xdx, \quad v = e^x \end{vmatrix} = x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2xdx = x^2 \cdot e^x - 2\int xe^x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x, \ dv = e^x dx \\ du = dx, v = e^x \end{vmatrix} = x^2 \cdot e^x - 2\left[xe^x - \int e^x dx\right] = x^2 \cdot e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

◄

Ayrim integralni ikki marta bo‘laklab integrallansa o‘z iga qaytib keladi. Bu holda integralni noma’lum sifatida qarab, tenglama yechiladi.

12-misol

Ushbu $\int e^{2x} \sin xdx$ integralni hisoblang.

$$\blacktriangleright \int e^{2x} \sin xdx = \begin{vmatrix} u = \sin x, \quad du = \cos xdx \\ dv = e^{2x} dx, \ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos xdx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \cos x, \quad du = -\sin xdx \\ dv = e^{2x} dx, \ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} e^{2x} \cos x + \frac{1}{2} \int e^{2x} \sin xdx\right) =$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{4} e^{2x} \cos x - \frac{1}{4} \int e^{2x} \sin xdx.$$

Oxirgi integralni chap tomonga o‘ tkazamiz

$$\frac{5}{4} \int e^{2x} \sin xdx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin x - \frac{1}{4} e^{2x} \cos x.$$

Demak,

$$\int e^{2x} \sin xdx = \frac{2}{5} e^{2x} \sin x - \frac{1}{5} e^{2x} \cos x + C. \blacktriangleleft$$

Ko‘pincha bo‘laklashni vertikal chiziqlar orasida bermay, integral ostida ham bajarish mumkin. Buning uchun biror funksiyani differensial octiga kiritiladi va bu differensialni *dv* sifatida qaraladi.

13-misol

Ushbu $\int xe^{3x} dx$ integralni hisoblang.

$$\blacktriangleright \int xe^{3x} dx = \int xd\left(\frac{1}{3} e^{3x}\right) = x \cdot \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} dx = \frac{1}{3} xe^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C. \blacktriangleleft$$

Ayrim misollarda differensial funksiya dv oshkor ko‘rinishda bo‘lmasligi mumkin.

14-misol

Ushbu $\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx$ integralni hisoblang.

$$\blacktriangleright \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx = \int \frac{x\cdot x}{(x^2+a^2)^2}dx = \int xd\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}\right) =$$

$$= -\frac{x}{2(x^2+a^2)} + \int \frac{1}{2(x^2+a^2)}dx = -\frac{x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a}arctg\frac{x}{a} + C . \blacktriangleleft$$

Auditoriya topshiriqlari

1. Bevosita integrallab yoki o‘zgaruvchini almashtirib hisoblang

1. $\int \frac{\sqrt{\arcsin x} - 4x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ 5. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$

2. $\int x\sqrt[5]{(5x^2-3)^7}\,dx.$ 6. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$

3. $\int 2^x e^{2x}dx.$ 7. $\int \sqrt[3]{1+\sin x}\cos xdx$

4. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx.$ 8. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$

2. Bo‘laklab integrallash usuli yordamida hisoblang

1. $\int xc0s(2x-1)dx.$ 5. $\int e^{\sqrt{x}}dx$

2. $\int x\cdot 2^x dx.$ 6. $\int x^2\ln^2 xdx$

3. $\int \ln^2(x+1)dx.$ 7. $\int \sin(\ln x)dx$

4. $\int \arccos xdx.$ 8. $\int e^x\cos 2xdx$

Mustaqil yechish uchun testlar

1. Hisoblang: $\int \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}}dx$

A) $3\arcsin\frac{x}{3} + \sqrt{9-x^2} + C$, B) $\arcsin\frac{x}{3} - \sqrt{9-x^2} + C$,

C) $\arcsin\frac{x}{3} + \sqrt{9-x^2} + C$, D) $3\arcsin\frac{x}{3} - \sqrt{9-x^2} + C$.

2. Integralni hisoblang: $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$

A) $-\frac{1}{\ln x}+C$ B) $\ln(\ln x)+C$, C) $\frac{\ln^2 x}{2}+C$, D) $-\frac{1}{\ln^2 x}+C$.

3. Integralni hisoblang: $\int xe^{\frac{x}{4}}dx$

A) $4e^{\frac{x}{4}}(x-4)+C$, B) $4e^{\frac{x}{4}}(x-1)+C$, C) $e^{\frac{x}{4}}(x-4)+C$, D) $4e^{\frac{x}{4}}(x-16)+C$

4. $\int x^2e^{3x}dx$ integralni hisoblashda necha marta bo‘laklab integrallanadi?

A) 1 marta, B) 2 marta, C) 3 marta, D) Bo‘laklab integrallanmaydi.

5. $\int 2^x e^{3x}dx$ integralni hisoblashda necha marta bo‘laklab integrallanadi?

A) 1 marta, B) 2 marta, C) 3 marta, D) Bo‘laklanmaydi.

6.2 Kasr-ratsional funksiyalarni integrallash

Quyidagi

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_{m-1}x+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+b_{n-1}x+b_n} \qquad (2.1)$$

ko‘rinishdagi kasrga *kasr-ratsional funksiya*[144] yoki qisqacha *ratsional funksiya* deyiladi. Bu yerda $m, n\in N$ va $a_i, b_j \in R,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}$.

Agar $m<n$ bo‘lsa, to‘g‘ri kasr, $m\geq n$ bo‘lsa, noto‘g‘ri kasr deyiladi.

Har qanday noto‘g‘ri kasr ko‘phadlarni bo‘lish qoidasi yordamida qandaydir ko‘phad va to‘g‘ri kasr yig‘indisi shaklida ifodalanadi:

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=M_{m-n}(x)+\frac{r(x)}{P_n(x)}\,. \qquad (2.2)$$

Masalan, $\dfrac{x^4+2}{x^2+3x-1}=x^2-3x+10+\dfrac{-33x+12}{x^2-3x+10}$, chunki

$$\begin{array}{rr|l}
- & x^4+2 & x^2+3x-1 \\ \cline{3-3}
 & x^4+3x^3-x^2 & x^2-3x+10 \\ \cline{1-2}
- & -3x^3+x^2+2 & \\
 & -3x^3-9x^2+3x & \\ \cline{1-2}
- & 10x^2-3x+2 & \\
 & 10x^2+30x-10 & \\ \cline{1-2}
 & -33x+12 &
\end{array}$$

$M_{m-n}(x)$ ko‘phadni integrallash oson bo‘lgani uchun, ratsional funksiyani integrallash $\dfrac{r(x)}{P_n(x)}$ to‘g‘ri kasrni integrallash masalasiga keltiriladi.

Quyidaqi to‘g‘ri kasrlar *oddiy ratsional kasrlar* deyiladi:

I. $\dfrac{A}{x-a}$,

II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}\cdot(k\geq 2\,\text{va butun son})$

[144] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (maxrajning diskreminanti $D=p^2-4q<0$).

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ ($k\geq 2$ va butun, $D<0$).

Bu yerda A, B, a, p, q - haqiqiy sonlar.

Endi bu kasrlarning integrallarini hisoblaymiz:

1. $\int \dfrac{A}{x-a}dx = A\ln|x-2|+C$.

2. $\int \dfrac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}dx = -\dfrac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}}+C$.

3. $\int \dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ integralda $A\neq 0$ bo‘lsa, suratida maxrajining hosilasini hosil qilib olamiz:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)+\left(\frac{2B}{A}-p\right)}{x^2+px+q}dx == \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx +$$
$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}.$$

Oxirgi integralda $q-\dfrac{p^2}{4}=\dfrac{4q-p^2}{4}>0(D<0)$ bo‘lgani uchun, jadvaldagi $\int \dfrac{du}{u^2+a^2}$ integralga keladi. Demak,

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C. \qquad (2.3)$$

4. $$\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}\right)^k}.$$

Bunda

$$\frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = -\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{(k-1)\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}, \qquad (2.4)$$

oxirgi integralda esa $u=x+\dfrac{p}{2}$, $a=\dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$ almashtirish bajaramiz.

$$\int \frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\left(u^2+a^2\right)-u^2}{\left(u^2+a^2\right)^k}du = \frac{1}{a^2}\int \frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^{k-1}}-\frac{1}{a^2}\int \frac{u^2}{\left(u^2+a^2\right)^k}du.$$

Birinchi integral berilgan integralning tartibi bittaga kamaygan holi, ikkinchi integralni bo‘laklab integrallash mumkin. Natijada, quyidagi rekkurent formulani hosil qilamiz:

$$\int \frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^k} = -\frac{u}{2a^2(k-1)\left(u^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)}\int \frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^{k-1}}. \qquad (2.5)$$

Eslatma. *Agar maxrajda* ax^2+bx+c *ko‘phad bo‘lsa, avval* a *qavsdan chiqariladi:* $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$

1-misol

Ushbu $\int \frac{3x-2}{2x^2+8x+26}dx$ integralni hisoblang.

►Avval maxrajidan 2 ko‘paytuvchi qavsdan chiqaramiz, suratida maxrajining hosilasini hosil qilib olamiz.

$$\frac{1}{2}\int \frac{3x-2}{x^2+4x+13}dx = \frac{3}{4}\int \frac{2x+4-4-\frac{4}{3}}{x^2+4x+13}dx = \frac{3}{4}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+13}dx - 4\int \frac{dx}{(x+2)^2+3^2} =$$

$$= \frac{3}{4}\ln\left(x^2+4x+13\right) - \frac{4}{3}arctg\,\frac{x+2}{3} + C. ◄$$

2-misol

Ushbu $\int \frac{7x+3}{\left(x^2+2x+5\right)^2}dx$ integralni hisoblang.

$$► \int \frac{7x+3}{\left(x^2+2x+5\right)^2}dx = \frac{7}{2}\int \frac{2x+2-2+\frac{6}{7}}{\left(x^2+2x+5\right)^2}dx = \frac{7}{2}\int \frac{2x+2}{\left(x^2+2x+5\right)^2}dx - 4\int \frac{dx}{\left((x+1)^2+2^2\right)^2}.$$

Birinchi qo‘shiluvchi (4) formulaga ko‘ra,

$$\frac{7}{2}\int \frac{2x+2}{\left(x^2+2x+5\right)^2}dx = -\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+5}.$$

Ikkinchi integral uchun (5) rekkurent formulani qo‘llasak,

$$\int \frac{dx}{\left((x+1)^2+2^2\right)^2} = -\frac{x+1}{2\cdot 2^2(2-1)\left((x+1)^2+2^2\right)} + \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2^2(2-1)}\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2} =$$

$$= -\frac{x+1}{8\left(\left(x^2+2x+5\right)^2\right.} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}arctg\,\frac{x+1}{2}.$$

Demak,

$$\int \frac{7x+3}{\left(x^2+2x+5\right)^2}dx = -\frac{7}{2\left(x^2+2x+5\right)} - \frac{x+1}{8(x^2+2x+5)^2} + \frac{1}{16}arctg\,\frac{x+1}{2} + C. ◄$$

Ma'lumki, har qanday haqiqiy koeffitsientli ko'phad quyidagi ko'paytma shaklida ifodalanadi:

$$P_n(x)=a_0(x-\alpha_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_\beta)^{k_\beta}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_sx+q_s)^{t_s}, \qquad (2.6)$$

bu yerda $\alpha_1,\ldots,\alpha_\beta$ lar ko'phadning $k_1,\ldots,k_\beta$ karrali haqiqiy ildizlari, $p_i^2-4q_i<0,\ (i=\overline{1,s})$ va $k_1+\ldots+k_\beta+2t_1+\ldots+2t_s=n$.

Teorema (*to'g'ri kasrni oddiy kasrlar yig'ndisiga ajratish haqida)* *Maxraji (2.6) shaklda tasvirlangan har qanday to'g'ri ratsional kasrni I-IV turdagi oddiy kasrlar yig'indisiga yoyish mumkin. Bu yoyilmada* $P_n(x)$ *ko'phadning har bir* k_r *karrali* α_r *haqiqiy ildiziga (* $(x-\alpha_r)^{k_r}$ *ko'paytuvcisiga)*

$$\frac{A_1}{x-\alpha_r}+\frac{A_2}{(x-\alpha_r)^2}+\frac{A_3}{(x-\alpha_r)^3}\ldots+\frac{A_{k_r}}{(x-\alpha_r)^{k_r}} \qquad (2.7)$$

ko'rinishdagi k_r *ta oddiy kasrlar yig'indisi mos keladi.* $P_n(x)$ *ko'phadning har bir juft qo'shma- kompleks ildiziga* $((x^2+p_\gamma x+q_\gamma)^{t_\gamma}$ *ko'paytuvchisiga)*

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_\gamma x+q_\gamma}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_\gamma x+q_\gamma)^2}+\frac{M_3x+N_3}{(x^2+p_\gamma x+q_\gamma)^3}+\ldots+\frac{M_{t_\gamma}x+N_{t_\gamma}}{(x^2+p_\gamma x+q_\gamma)^{t_\gamma}} \qquad (2.8)$$

ko'rinishdagi t_γ *ta oddiy kasrlar yig'indisi mos keladi.*

Demak, integral ostidagi $R(x)$ to'g'ri ratsional kasrni (2.7) va (2.8) formulalarni e'tiborga olib noma'lum koeffitsientli oddiy kasrlarga yoyiladi. So'ng bu kasrlarga umumiy maxraj beriladi. Yoyilmadagi A, M, N koeffitsientlarning qiymatlari esa

1) *noma'lum koeffitsientlar usuli*;
2) *o'rniga qo'yish usuli*dan biri yoki ikkalasini qo'llab aniqlanadi.

Noma'lum koeffitsientlari usulida $R(x)$ to'g'ri ratsional kasrning suratidagi ko'phad hosil bo'lgan kasrning suratidagi ko'phadga aynan tengligidan x ning bir xil daragalari oldidagi koeffitsientlar tenglab, n ta noma'lum uchun n ta tenglamalar sistemasi hosil qilinib noma'lum koeffitsientlar topiladi.

O'rniga qo'yish usulida ko'phadlar, x ning barcha qiymatlarida aynan teng bo'lgani uchun, x ning tayin xususiy qiymatlarida tenglab noma'lum koeffitsientlar topiladi.

3-misol

Ushbu $\int\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}dx$ integralni hisoblang.

► Maxrajdagi ko'phadning $x=0$ bir karrali haqiqiy va $x=-1$ ikki karrali ildizlari bor bo'lgani uchun

$$\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}.$$

mumiy maxraj berib, suratdagi ko‘phadlarni tenglaymiz
$x^2-3x+2\equiv Ax^2+2xA+A+Bx+Cx^2+Cx$ yoki $x^2-3x+2\equiv x^2\left(A+C\right)+x\left(2A+B+C\right)+A$
.

Noma’lum koeffitsientlari usulidan foydalanamiz, x ning darajalari oldidagi koeffitsintlarni tenglaymiz:

$$x^2:\quad A+C=1;$$
$$x:\quad 2A+B+C=-3;$$
$$x^0:\quad A=2.$$

Bundan , $A=2,\ B=-6,\ C=-1$.

Demak,

$$\int\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}dx=\int\frac{2}{x}dx-\int\frac{6}{(x+1)^2}dx-\int\frac{1}{x+1}dx=$$
$$=2\ln|x|+\frac{6}{x+1}-\ln|x+1|+C=\ln\frac{x^2}{|x+1|}+\frac{6}{x+1}+C\ .◄$$

4-misol

Ushbu $\int\frac{(x^2+3)dx}{x(x-1)(x+2)}$ integralni hisoblang.

► Integral ostida to‘g‘ri ratsional kasr va u I turdagi sodda kasrlar yig‘indisiga ajraladi

$$\frac{x^2+3}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{D}{x+2},$$

bundan $x^2+3=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Dx(x-1).$

A, B, D koeffutsientlarni topish uchun o‘rniga qo‘yish usulidan foydalanamiz:

$x=0$ bo‘lganda $3=-2A$, bundan $A=-\frac{3}{2}$;

$x=1$ bo‘lganda $4=3B,$ bundan $B=\frac{4}{3}$;

$x=-2$ bo‘lganda, $7=6D,$ bundan $D=\frac{7}{6}$.

Shunday qilib , quyidagini hosil qilamiz :

$$\int\frac{(x^2+3)dx}{x(x-1)(x+2)}=-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x}+\frac{4}{3}\int\frac{d(x-1)}{x-1}+\frac{7}{6}\int\frac{d(x+2)}{x+2}=$$
$$=-\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{4}{3}\ln|x-1|+\frac{7}{6}\ln|x+2|+C=\ln\sqrt[6]{\frac{(x-1)^8|x+2|^7}{|x|^9}}+C\ .◄$$

5-misol

Ushbu $\int \frac{dx}{x^3+8}$ integralni hisoblang.

► Integral ostida to‘g‘ri ratsional kasrning maxrajidagi ko‘phad ko‘paytuvchilarga ajratiladi va sodda kasrlar yig‘indisi shaklida ifodalanadi

$$\frac{1}{x^3+8}=\frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Mx+N}{x^2-2x+4}.$$

Umumiy maxraj berib suratlari tenglanadi

$$A(x^2-2x+4)+Bx(x+2)+C(x+2)\equiv 1$$

A, M, N koeffitsientlarni topish uchun yuqoridagi usullarni birga qo‘llaymiz:

$$x=-2: \quad 12A=1$$

$$x^2: \quad A+B=0;$$

$$x^0: \quad 4A+2C=1.$$

Bundan , $A=1/12$, $B=-1/12$, $C=1/3$ va

$$\frac{1}{x^3+8}=\frac{1}{12(x+2)}-\frac{x-4}{12(x^2-2x+4)}.$$

Endi integralni hisoblaymiz:

$$\int\frac{dx}{x^3+8}=\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x+2}-\frac{1}{12}\int\frac{x-4}{x^2-2x+4}dx=\frac{1}{12}\ln|x+2|-\frac{1}{12\cdot 2}\int\frac{(2x-2)-6}{x^2-2x+4}dx=$$

$$=\frac{1}{12}\ln|x+2|-\frac{1}{24}\int\frac{(2x-2)dx}{x^2-2x+4}+\frac{1}{4}\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{12}\ln|x+2|-\frac{1}{24}\ln\left|x^2-2x+4\right|+\frac{1}{4\sqrt{3}}arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\ln\sqrt[24]{\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$$ ◄

Shunday qilib ratsional kasrni integrallash uchun

1) uning to‘g‘ri yoki noto‘g‘ri kasr ekanligini tekshiriladi, aks holda(ya’ni noto‘g‘ri kasr bo‘lganda) butun qismi ajratiladi, ko‘phad va to‘g‘ri ratsional kasr hosil qilinadi;

2) to‘g‘ri ratsional kasrni oddiy kasrlar yig‘indisiga ajratiladi;

3) yoyilmaning koeffitsientlari topiladi;

4) ifoda integrallanadi.

Auditoriya topshiriqlari

Integrallarni hisoblang.

1. $\int \frac{x^3}{x-2}dx.$
2. $\int \frac{x^4}{x^2+2}dx.$
3. $\int \frac{3x+5}{x^2-4x+5}dx.$
4. $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx.$
5. $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx$
6. $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$
7. $\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5}dx$
8. $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$
9. $\int \frac{2x+1}{(x^2+2x+5)^3}dx$
10. $\int \frac{x+1}{x^4+4x^2+4}dx$

Mustaqil yechish uchun testlar

1. $\frac{2x^2+x+3}{x^2(x+1)^3(x^2+4)}$ ratsional kasrning oddiy kasrlarga yoyilmasi to‘g‘ri ko‘rsatilgan variantni aniqlang

A) $\frac{A}{x^2}+\frac{B}{(x+1)^3}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$,
B) $\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}+\frac{B_3}{(x+1)^3}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$,
C) $\frac{A}{x^2}+\frac{B}{(x+1)^3}+\frac{C}{x^2+4}$,
D) $\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}+\frac{B_3}{(x+1)^3}+\frac{C}{x^2+4}$.

2. $\frac{x+3}{x^3+2x^2}$ ratsional kasrning oddiy kasrlarga yoyilmasi to‘g‘ri ko‘rsatilgan variantni aniqlang.

A) $\frac{A}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+2}$, B) $\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$, C) $\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2+2}$, D) $\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+2}$.

3. Integralni hisoblang: $\int \frac{x^2+2x}{x+3}dx$.

A) $\frac{x^2}{2}-x+3\ln|x+3|+C$,
B) $\frac{x^2}{2}+x+3\ln|x+3|+C$,
C) $x^2-3x+\ln|x+3|+C$,
D) $\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x+3|+C$.

4. Integralni hisoblang: $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$.

A) $\ln\frac{(x-3)^2}{|x-2|}+C$, B) $\ln\frac{(x-2)^2}{|x-3|}+C$, C) $\ln(x-3)^2|x-2|+C$, D) $\ln(x-2)^2|x-3|+C$.

5. Integralni hisoblang: $\int\frac{2x+1}{x^2+2x+5}dx$.

A) $\ln|x^2+2x+5|+C$, B) $\ln|x^2+2x+5|+\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}+C$,

C) $\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5|+C$, D) $\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5|+\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}+C$.

6.3 Trigonometrik funksiyalarni integrallash

Barcha trigonometrik funksiyalarni *sinx* va *cosx* orqali ifodalash mumkin. *sinx* va *cosx* ning ratsional funksiyasini $R(\sin x,\cos x)$ ko‘rinishda belgilaymiz.

Quyidagi

$$\int R(\sin x,\cos x)dx$$

integralni $tg\frac{x}{2}=z$ belgilash yordamida z o‘z garuvchili ratsional funksiyaning integraliga almashtirish mumkin. Integralni bunday almashtirish ratsionallashtirish deyiladi. Haqiqatdan ham, $tg\frac{x}{2}=z$ desak,

$$\cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-z^2}{1+z^2};\ \sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

$$\frac{x}{2}=arctgz,\quad x=2arctgz,\quad dx=\frac{2dz}{1+z^2}.$$

Shuning uchun

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2z}{1+z^2};\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\cdot\frac{2dz}{1+z^2}=\int R_1(z)dz$$

hosil bo‘ladi, bunda $R_1(z)$ - z o‘z garuvchili ratsional funksiya.

Bunday almashtirish $R(\sin x,\cos x)$ ko‘rinishdagi har qanday funksiyani integrallashga imkon beradi, shuning uchun bunday almashtirish *universal trigonometrik almashtirish*[145] deyiladi.

---

[145] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

1-misol

Ushbu $I=\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$ integralni hisoblang.

► $tg\frac{x}{2}=z$ almashtirishdan foydalanamiz:

$$\sin x=\frac{2z}{1+z^2};\ \ \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2};\ \ dx=\frac{2dz}{1+z^2}.$$

$$I=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{4\cdot\frac{2z}{1+z^2}+3\cdot\frac{1-z^2}{1+z^2}+5}=\int\frac{2dz}{(1+z^2)\cdot\frac{8z+3-3z^2+5+5z^2}{1+z^2}}=\int\frac{2dz}{2z^2+8z+8}=$$

$$=\int\frac{2dz}{2(z^2+4z+4)}=\int\frac{dz}{(z+2)^2}=-\frac{1}{z+2}+C=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2}+C. ◄$$

Ko‘pincha, universal trigonometrik almashtirish murakkab ratsional funksiyaga olib keladi. Shuning uchun, xususiy sodda almashtirishlardan bir nechtasini keltirib o‘tamiz.

1. Agar $R(\sin x,\cos x)$ funksiya *sinx* ga nisbatan toq bo‘lsa, ya’ni

$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ bo‘lsa, u holda $z=\cos x,\ dz=-\sin x dx$ almashtirish bu funksiyani ratsionallashtiradi.

2. Agar $R(\sin x,\cos x)$ funksiya *cosx* ga nisbatan toq bo‘lsa, ya’ni

$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ bo‘lsa, u holda $z=\sin x,\ dz=\cos x dx$ almashtirish bu funksiyani ratsionallashtiradi.

3. Agar $R(\sin x,\cos x)$ funksiya *sinx* va *cosx* ga nisbatan juft bo‘lsa, ya’ni $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ bo‘lsa. U holda $z=tgx$ almashtirish bu funksiyani ratsionallashtiradi.

Bu holda,

$$\sin^2 x=\frac{tg^2x}{1+tg^2x}=\frac{z^2}{1+z^2};\ \ \cos^2 x=\frac{1}{1+tg^2x}=\frac{1}{1+z^2};$$

$$x = arctgz,\ dx = \frac{dz}{1+z^2}$$

almashtirishlar o'rinli bo'ladi.

2-misol

Ushbu $I = \int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ integralni hisoblang.

►Integral belgisi ostidagi funksiya juft funksiya, shuning uchun $z = tgx$ almashtirishni bajaramiz. U holda, $x = arctgz,\ dx = \frac{dz}{1+z^2};\ \sin^2 x = \frac{z^2}{1+z^2}$.

Natijada ,

$$I = \int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+z^2}}{1+\frac{z^2}{1+z^2}} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{1+z^2+z^2}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{1+2z^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\frac{1}{2}+z^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + z^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} arctg\frac{z}{\sqrt{\frac{1}{2}}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2} arctg\sqrt{2}Z + C = \frac{\sqrt{2}}{2} arctg\sqrt{2}tgx + C\ .◄$$

3-misol

Ushbu $I = \int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx$ integralni hisoblang.

► Integral ostidagi funksiya *sinx* ga nisbatan toq funksiya . Shuning uchun $z = \cos x,\ dz = -\sin xdx$ almashtirishni bajaramiz:

$$I = \int \frac{\sin^2 x\cdot\sin xdx}{2+\cos x} = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin xdx}{2+\cos x} = -\int \frac{(1-z^2)dz}{2+z} = \int \frac{z^2-1}{2+z}dz =$$

$$= \int\left(z-2+\frac{3}{z+2}\right)dz = \frac{z^2}{2} - 2z + 3\ln|z+2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln|\cos x+2| + C$$

.◄

4. Agar $R(\sin x, \cos x)$ funksiya *sinx* va *cosx* darajalarining ko'paytmasi bo'lsa, ya'ni $\int \sin^n x\cdot\cos^m xdx$ ko'rinishdagi integralni hisoblashda, *m* va *n* ga bog'liq holda turli almashtirishlar bajariladi:

a) agar $n>0$ va toq bo‘lsa, u holda $\cos x = z, \sin x dx = -dz$ almashtirish bajariladi;

b) agar $m>0$ va toq bo‘lsa, u holda $\sin x = z, \cos x dx = dz$ almashtirish bajariladi.

4-misol

Ushbu $I=\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$ integralni hisoblang.

► $\cos x = z, \sin x dx = -dz$ almashtirishni bajaramiz:

$$I=\int \frac{\sin^2 x \sin x}{\cos^4 x}dx=\int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x dx}{\cos^4 x}=-\int \frac{(1-z)^2 dz}{z^4}=-\int \frac{dz}{z^4}+\int \frac{z^2}{z^4}dz=$$

$$=\frac{1}{3z^3}-\frac{1}{z}+C=\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C. ◄$$

d) agar ikkala n va m ko‘rsatkichlar juft va nomanfiy bo‘lsa, u holda trigonometriyadan ma’lum bo‘lgan

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

darajani pasaytirish formulalaridan foydalanamiz.

5-misol

Ushbu $I=\int \sin^4 x dx$ integralni hisoblang.

► Darajani pasaytirish formulasidan foydalanamiz:

$$I=\int \sin^4 x dxd=\int (\sin^2 x)^2 dx=\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int \left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2}+\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin 4x}{4}+C=$$

$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C. ◄$$

e) agar $m+n=-2k\le 0$ (juft, nomusbat) bo‘lsa, u holda $tgx=z$ yoki $ctgx=z$ almashtirish integralni darajali funksiyalarning integrallari yig‘indisiga olib keladi. Xususan, $n<0$, $m<0$ va $m+n=-2k\le 0$ bo‘lsa, kasrning suratini $1=(\sin^2 x+\cos^2 x)^s$ ifodaga almashtirish mumkin, bu yerda $s=\frac{|m+n|}{2}-1$.

6-misol

Ushbu $I=\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$ integralni hisoblang.

►Bu yerda $n=2,\ m=-6,\ m+n=-4<0$, $tgx=z,\ x=arctgz,\ dx=\dfrac{dz}{1+z^2}$ almashtirishni bajaramiz.

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^4 x}=tg^2x\left(\frac{1}{\cos^4 x}\right)=tg^2x(1+tg^2x)^2=z^2(1+z^2)^2,$$

Natijada ,

$$I=\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx=\int z^2(1+z^2)^2\frac{dz}{1+z^2}=\int (z^2+z^4)dz=$$

$$=\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+C=\frac{tg^3x}{3}+\frac{tg^5x}{5}+C.$$ ◄

7-misol

Ushbu $I=\int \frac{dx}{\sin^3 x\cdot\cos x}$ integralni hisoblang.

►Bu yerda $n=-3,\ m=-1,\ m+n=-4<0$

$$I=\int \frac{dx}{\sin^3 x\cdot\cos x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x\cdot\cos x}dx=\int\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}dx+\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx=$$

$$=2\int\frac{dx}{\sin 2x}+\int\frac{d(\sin x)}{\sin^3 x}=\ln|tgx|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C.$$ ◄

f) agar darajalardan biri nolga teng, ikkinchisi manfiy toq son bo‘lsa, u holda $tg\dfrac{x}{2}=z$ almashtirish bajariladi.

8-misol

Ushbu $I=\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ integralni hisoblang.

►Quyidagicha almashtirish bajaramiz:

$$tg\frac{x}{2}=z;\ dx=\frac{2dz}{1+z^2};\ \sin x=\frac{2z}{1+z^2}$$

Natijada, $I=\int\dfrac{dx}{\sin^3 x}=\int\dfrac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^3}=\dfrac{1}{4}\int\dfrac{(1+z^2)^2}{z^3}dz=$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1+2z^2+z^4}{z^3}dz=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{z^3}+\frac{2}{z}+z\right)dz=-\frac{1}{8z^2}+\frac{1}{2}\ln|z|+\frac{1}{4}\cdot\frac{z^2}{2}+C=$$

$$=-\frac{1}{8}ctg^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8}tg^2\frac{x}{2}+C. \blacktriangleleft$$

5. Quyidagi ko‘rinishdagi integrallarni qarab chiqamiz:

$$\int\cos nx\cdot\cos mx dx,$$

$$\int\sin nx\cdot\cos mx dx,$$

$$\int\sin nx\cdot\sin mx dx.$$

Bunday integrallarni hisoblash uchun trigonometrik funksiyalarning ko‘paytmasini yig‘indiga almashtiruvchi formulalar qo‘llanadi:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

9-misol

Ushbu $I=\int\sin 3x\cdot\cos 2x dx$ integralni hisoblang.

►Integral ostidagi ko‘paytmani yig‘indiga almashtirib integrallaymiz.

$$I=\int\sin 3x\cdot\cos 2x dx=\frac{1}{2}\int(\sin 5x+\sin x)dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos 5x}{5}-\frac{1}{2}\cdot\cos x+C=$$

$$=-\frac{1}{10}\cdot\frac{\cos 5x}{1}-\frac{1}{2}\cdot\cos x+C. \blacktriangleleft$$

Auditoriya topshiriqlari

Integrallarni hisoblang.

1. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.
2. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$.
3. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.
4. $\int \cos^3 x\sin^{10} xdx$.
5. $\int \sin^4 3xdx$
6. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}dx$
7. $\int tg^3 xdx$
8. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$
9. $\int \frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx$
10. $\int \sin 3x\sin 5xdx$

Mustaqil yechish uchun testlar

1. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x+3\sin^2 x}$ integralni hisoblashda qaysi almashtirish qo‘llanadi?

A) $tg\frac{x}{2}=t$, B) $\sin x=t$, C) $\cos x=t$, D) $tgx=t$.

2. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$ integralni hisoblashda qaysi almashtirish qo‘llanadi?

A) $tgx=t$, B) $\sin x=t$, C) $\cos x=t$, D) To‘g‘ri javob yo‘q.

3. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$ integralni hisoblashda qaysi almashtirish qo‘llanadi?

A) $tgx=t$, B) $tg\frac{x}{2}=t$, C) $\cos x=t$, D) $\sin x=t$.

4. Integralni hisoblang: $\int \frac{\cos xdx}{\sin^3 x}$

A) $-\frac{2}{\sin^3 x}+C$, B) $-\frac{3}{\sin^2 x}+C$, C) $\frac{3}{\sin^2 x}+C$, D) $-\frac{1}{2\sin^2 x}+C$.

5. Integralni hisoblang: $\int cos5x\sin 3xdx$.

A) $\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$, B) $\frac{1}{16}\sin 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$,

C) $-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$, D) $\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

6.4 Ba'zi irratsional funksiyalarni integrallash

Har qanday irratsional funksiyalar ucnun ham elementar funksiyalar ko'rinishidagi boshlang'ich funksiyalarni aniqlab bo'lmaydi. Biz quyida ayrim almashtirishlar yordamida ratsional funksiyalar integrallariga olib kelinadigan irratsional funksiyalarning integrallarini ko'rib chiqamiz.

Quyidagi

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_2}{s_2}},\ldots\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_n}{s_n}}\right)dx, \tag{1}$$

bu yerda R-ratsional funksiya, a, b, c , d - o'zgarmas sonlar, r_i , s_i musbat butun sonlar, integral

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^m \tag{2}$$

almashtirish yordamida ratsionallashtiriladi. Bu yerda m - $\frac{r_1}{s_1},\frac{r_2}{s_2},\ldots\frac{r_n}{s_n}$ kasrlarning umumiy maxraji, ya'ni $m=EKUB(s_1,s_2,\ldots s_n)$.

Xususan,

$$\int R\left(x,x^{\frac{r_1}{s_1}},x^{\frac{r_2}{s_2}},\ldots x^{\frac{r_n}{s_n}}\right)dx$$

Integral $x=t^m$ almashtirish yordamida ratsionallashtiriladi.

1-misol

Ushbu $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+4}}dx$ integralni hisoblang.

► $EKUK(2,4)=4$ bo'lgani uchun,

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+4}}dx=\left|\begin{matrix}x=t^4\\ dx=4t^3dt\end{matrix}\right|=4\int\frac{t^5}{t^3+4}dt=4\int\left(t^2-\frac{4t^2}{t^3+4}\right)dt=\frac{4}{3}t^3-\frac{16}{3}\ln\left|t^3+4\right|+C=$$

$$=\left|t=\sqrt[4]{x}\right|=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-\frac{16}{3}\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+4\right|+C.◄$$

Integral

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

ko'rinishida berilgan bo'lsin. Avval kasr suratida ildiz ostidagi kvadrat uchhadning differensiali hosil qilinadi($A\neq0$), kvadrat uchhaddan to'la kvadrat ajratiladi va quyidagi amallar bajariladi:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= \frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}}.$$

Agar $c \neq \frac{b^2}{4a}$, $a>0$ bo‘lsa, oxirgi integralni

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+k}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+k}\right| + C$$

integralga keltirib hisoblash mumkin.

Agar $c > \frac{b^2}{4a}$, $a<0$ bo‘lsa,

$$\int \frac{du}{\sqrt{k^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{k} + C$$

integralga keltirib hisoblash mumkin.

Eslatma. *Qulaylik uchun, kvadrat uchhadni to‘la kvadratga ajratishdan avval a ning modulini ildizdan chiqarish kerak.*

2-misol

Ushbu $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx$ integralni hisoblang.

► $$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+8}}dx + \left(3-\frac{5\cdot 4}{2}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+8}} =$$

$$= 5\sqrt{x^2-4x+8} - 7\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+4}} = 5\sqrt{x^2-4x+8} - 7\ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2+4}\right| + C$$

.◄

3-misol

Ushbu $\int \frac{3x-2}{\sqrt{10-8x-2x^2}}dx$ integralni hisoblang.

► Qulaylik uchun, avval 2 ni ildizdan chiqarib olamiz.

$$\int \frac{3x-21}{\sqrt{5-8x-2x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{3x-2}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}I_1.$$

Hosil bo‘lgan integralni hisoblaymiz.

$$I_1=\int\frac{3x-2}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx=\int\frac{-\frac{3}{2}(-4-2x)+8}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx=-\frac{3}{2}\int\frac{(-4-2x)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}+$$

$$+8\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x+2)^2}}=-3\sqrt{5-4x-x^2}+8\arcsin(x+2)+C_1.$$

Demak,

$$\int\frac{3x-2}{\sqrt{10-8x-2x^2}}dx=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{5-4x-x^2}+4\sqrt{2}\arcsin(x+2)+C.\blacktriangleleft$$

Agar integral

$$\int\frac{Ax+B}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

ko‘rinishda bo‘lsa, $x-\alpha=\frac{1}{t}$ almashtirish yordamida hisoblanadi.

4-misol

Ushbu $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+10}}$ integralni hisoblang.

$$\blacktriangleright\ \int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+10}}=\left|\begin{array}{l}x+1=\frac{1}{t}\\ dx=-\frac{1}{t^2}dt\end{array}\right|=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+9}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{9t^2+1}}=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|3t+\sqrt{9t^2+1}\right|+C=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3}{x+1}+\sqrt{\frac{9}{(x+1)^2}+1}\right|+C.\blacktriangleleft$$

Agar integral

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

ko‘rinishda bo‘lsa, kvadrat uchhadni to‘la kvadratga ajratib, quyidagi

1) $\int R\left(u,\sqrt{k^2-u^2}\right)du$, $u=k\sin t\,(u=k\cos t)$ almashtirish;

2) $\int R\left(u,\sqrt{k^2+u^2}\right)du$, $u=k\,tgt\,(u=k\,ctgt)$ almashtirish;

3) $\int R\left(u,\sqrt{u^2-k^2}\right)du$, $u=\frac{k}{\sin t}\left(u=\frac{k}{\cos t}\right)$ almashtirish

yordamida hisoblanadigan integrallardan biriga keltirish mumkin.

5-misol

Ushbu $\int\sqrt{3+2x-x^2}\,dx$ integralni hisoblang.

$$\blacktriangleright \int\sqrt{3+2x-x^2}\,dx=\int\sqrt{4-(x-1)^2}\,dx=\left|\begin{array}{l}x-1=2\sin t\\ dx=2\cos t dt\end{array}\right|=$$

$$=\int\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt=4\int\cos^2 t dt=2\int(1+\cos 2t)dt=2t+\sin 2t+C=$$

$$=2t+2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}+C=2\arcsin\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}}{2}+C.\blacktriangleleft$$

6-misol

Ushbu $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+5)^3}}$ integralni hisoblang.

$$\blacktriangleright \int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+5)^3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{((x+2)^2+1)^3}}=\left|\begin{array}{l}x+2=tgt\\ dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}\end{array}\right|=\int\frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{(tg^2 t+1)^3}}=$$

$$=\int\frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{(tg^2 t+1)^3}}=\int\cos t dt=\sin t+C=\frac{tgt}{\sqrt{tg^2 t+1}}+C=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}+C.\blacktriangleleft$$

Auditoriya topshiriqlari

Aniqmas integrallarni hisoblang.

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x+3}+3\sqrt[3]{2x+3}}$

2. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$

3. $\int\frac{(3x+5)dx}{\sqrt{x^2+6x+7}}$

4. $\int\frac{(2x-7)dx}{\sqrt{9-8x-x^2}}$

5. $\int\frac{(2x+3)dx}{\sqrt{2x^2-x+6}}$

6. $\int \frac{(3x+4)dx}{\sqrt{2+3x-x^2}}$

7. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$

8. $\int \sqrt{12-4x-x^2}$

9. $\int \sqrt{6x-x^2}dx$

10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$

Mustaqil yechish uchun testlar

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}$ integralda qanday almashtirish bajariladi?

A) $x=t^2$; B) $\sqrt[3]{x}=t$; C) $x=t^5$; D) $\sqrt[6]{x}=t$

2. Quyidagi $\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ integralning yechimini toping

A) $2\sqrt{x^2-2x+5}+C$; B) $2\sqrt{x^2-2x+5}-\frac{1}{2}arctg\frac{x-1}{2}+C$;

C) $2\sqrt{x^2-2x+5}+\frac{1}{2}arctg\frac{x-1}{2}+C$; D) $2\sqrt{x^2-2x+5}-arctg\frac{x-1}{2}+C$;

3. $\int \sqrt{4-x^2}dx$ integral yechimini toping

A) $2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+C$; B) $2\arcsin\frac{x}{2}+x\sqrt{4-x^2}+C$;

C) $2\arcsin\frac{x}{2}-x\sqrt{4-x^2}+C$; D) $2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+C$;

4. Quyidagi $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$ integralda qanday almashtirish bajariladi?

A) $x+1=t^2$; B) $\sqrt{x^2+2x+1}=t$; C) $x+1=1/t$; D) $x=tgt$.

5. Quyidagi $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$ integralda qanday almashtirish bajariladi?

A) $x=3/\cos t$; B) $x=3\sin t$; C) $x^2-9=t^2$; D) $x=3tgt$.

Shaxsiy uy topshiriqlari

Aniqmas integrallarni hisoblang.

1

1.1. a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

b) $\int (4-3x)e^{-3x}dx$.

d) $\int \frac{12-6x}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$

1.2. a) $\int \frac{1+\ln x}{x}dx$.

b) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}dx$.

d) $\int \frac{x^3+6x^2+13x+8}{x(x+2)^3}dx$.

1.3. a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

b) $\int (3x+4)e^{3x}dx$.

d) $\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}dx$.

1.4. a) $\int \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$.

b) $\int (4x-2)\cos 2x dx$.

d) $\int \frac{2x^3-2x^2+5}{(x-1)^2(x^2+4)}dx$

1.5. a) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

b) $\int e^{-2x}(4x-3)dx$.

d) $\int \frac{x^3-6x^2+11x-10}{(x+2)(x-2)^3}dx$.

1.6. a) $\int \frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

b) $\int (5x-2)e^{3x}dx$.

d) $\int \frac{x^3+6x^2+11x+7}{(x+1)(x+2)^3}dx$.

1.7. a) $\int \operatorname{tg} x \ln\cos x dx$.

b) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$.

d) $\int \frac{x^3+8x-2}{x^2(x^2+4)}dx$

1.8. a) $\int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$.

b) $\int \ln(x^2+4)dx$.

d) $\int \frac{2x^3+x+1}{(x+1)x^3}dx$.

1.9. a) $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}dx$.

b) $\int (2-4x)\sin 2x dx$.

d) $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2}dx$

1.10. a) $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$.

b) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{6x-1}dx$.

d) $\int \frac{x^2-2x+4}{x^3(x^2+1)}dx$

1.11. a) $\int \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}dx$.

b) $\int (4-16x)\sin 4x dx$.

d) $\int \frac{x^3+x+2}{(x+2)x^3}dx$.

1.12. a) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}$.

b) $\int e^{-3x}(2-9x)dx$.

d) $\int \frac{2x+22}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx$

1.13. a) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{tg^3 x}}$

b) $\int \mathrm{arctg}\sqrt{3x-1}dx$.

d) $\int \frac{x^3-3x^2+5}{x^3(x^2+1)}dx$

1.14. a) $\int \frac{1/(2\sqrt{x})+1}{(\sqrt{x}+x)^2}dx$.

b) $\int \mathrm{arctg}\sqrt{5x-1}dx$.

d) $\int \frac{6x}{x^3-1}dx$

1.15. a) $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^5}$.

b) $\int (5x+6)\cos 2xdx$.

d) $\int \frac{x^3+3x^2-12x+4}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$

1.16. a) $\int \frac{4\mathrm{arctg}\, x-x}{1+x^2}dx$.

b) $\int (3x-2)\cos 5xdx$.

d) $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+1}{(x-1)(x+1)^3}dx$.

1.17. a) $\int \frac{x-(\mathrm{arctg}\, x)^4}{1+x^2}dx$.

b) $\int \left(x\sqrt{2}-3\right)\cos 2xdx$.

d) $\int \frac{x^3-6x^2+10x-10}{(x+1)(x-2)^3}dx$.

1.18. a) $\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$.

b) $\int (4x+7)\cos 3xdx$.

d) $\int \frac{2x^3+6x^2+7x}{(x-2)(x+1)^3}dx$.

1.19. a) $\int \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}dx$.

b) $\int \ln(\cos x)dx$

d) $\int \frac{x^2-2x+4}{x^3(x^2+1)}dx$

1.20. a) $\int \frac{3x-\arccos 2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

b) $\int arctg\sqrt{2x+1}dx$

d) $\int \frac{2x^3+6x^2+5x}{(x+2)(x+1)^3}dx$.

1.21. a) $\int \frac{x^3+x}{x^4+1}dx$.

b) $\int \frac{\ln(\cos x)dx}{\sin^2 dx}$

d) $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+4}{(x+2)(x+1)^3}dx$.

1.22. a) $\int \frac{5x-(\arcsin 3x)^3}{\sqrt{1-9x^2}}dx$

b) $\int cos(\ln x)dx$

d) $\int \frac{x^3+6x^2+10x+10}{(x-1)(x+2)^3}dx$.

1.23. a) $\int \frac{x+\cos 2x}{\sqrt{x^2+\sin 2x}}dx$

b) $\int \frac{\ln(\sin x)dx}{\cos^2 dx}$

d) $\int \frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3}dx.$

1.24. a) $\int \frac{3x\sin 3x-\cos 3x}{(x\cos 3x)^3}dx$

b) $\int \sin(\ln x)dx$

d) $\int \frac{x^3-6x^2+13x-8}{x(x-2)^3}dx.$

1.25. a) $\int \frac{\sqrt[3]{ctg^2 3x}}{\sin^2 3x}dx$

b) $\int x arctg 2x dx$

d) $\int \frac{x^3-6x^2+13x-7}{(x+1)(x-2)^3}dx.$

1.26. a) $\int \frac{3x-(arcctgx)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

b) $\int x^2 arctgx dx$

d) $\int \frac{x^3+6x^2+14x+10}{(x+1)(x+2)^3}dx.$

1.27. a) $\int \frac{3x+x^3}{x^4+2}dx$

b) $\int (1-6x)e^{2x}dx.$

d) $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+2}{x(x+1)^3}dx.$

1.28. a) $\int \frac{x^2-\ln^2 x}{x}dx$

b) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$

d) $\int \frac{3x^3+9x^2+10x+2}{(x-1)(x+1)^3}dx.$

1.29. a) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{(arctgx)^3}}$

b) $\int xe^{-6x}dx$

d) $\int \frac{x^3-6x^2+14x-6}{(x+1)(x-2)^3}dx.$

1.30. a) $\int \frac{3\arcsin^2 x+4x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

b) $\int (2x-5)\cos 4x dx.$

d) $\int \frac{2x^3+6x^2+5x+4}{(x-2)(x+1)^3}dx.$

2

2.1. a) $\int \frac{\sin^3 2x}{cos^2 2x}dx$

b) $\int tg^4 3x dx$

d) $\int \frac{dx}{3+cosx+\sin x}$

2.2. a) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{cos^4 x}}dx$

b) $\int \sin^4 2x dx$

d) $\int \frac{dx}{3cos^2 x+4\sin^2 x}$

2.3. a) $\int \sin 4x \sin x dx$

b) $\int ctg^4 5x dx$

d) $\int \frac{dx}{2-3cosx+\sin x}$

2.4. a) $\int cos^4 3x \sin^2 3x dx$

b) $\int \sin^3 4x dx$

d) $\int \frac{dx}{4+3cosx-4\sin x}$

2.5. a) $\int \cos 4x \sin x dx$

b) $\int tg^3(4-x)dx$

d) $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3cosx}$

2.6. a) $\int \sqrt[3]{\cos^4 x}\sin^3 xdx$

b) $\int tg^2(5x+1)dx$

d) $\int \frac{6\sin x+\cos x}{1+cosx}dx$

2.7. a) $\int \sqrt[3]{\sin^4 x}\cos^3 xdx$

b) $\int tg^5 4xdx$

d) $\int \frac{dx}{5-3cosx}$

2.8. a) $\int cos^3 2x\sin^3 2xdx$

b) $\int ctg^3 \frac{x}{2}dx$

d) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$

2.9. a) $\int cos^3 2x\sin^5 2xdx$

b) $\int \cos^4 3xdx$

d) $\int \frac{dx}{8+4cosx}$

2.10. a) $\int \cos x\sin 9xdx$

b) $\int \cos^3 4xdx$

d) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x-5cos^2 x}$

2.11. a) $\int \cos 2x\cos 5xdx$

b) $\int xtg^2 x^2dx$

d) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$

2.12. a) $\int \cos^4 x\sin xdx$

b) $\int (1-tg2x)^2dx$

d) $\int \frac{dx}{3+2cosx-\sin x}$

2.13. a) $\int \sin 5x\sin 7xdx$

b) $\int (1+ctg2x)^2dx$

d) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+7\cos^2 x}$

2.14. a) $\int \sin^4 5x\cos 5xdx$

b) $\int (tg2x+ctg2x)^2dx$

d) $\int \frac{dx}{8+7cosx-4\sin x}$

2.15. a) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^5 x}}dx$

b) $\int (1+\cos 3x)^2dx$

d) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x+8\cos x\sin x}$

2.16. a) $\int \cos^4 x\sin 2xdx$

b) $\int ctg^2 \frac{x}{3}dx$

d) $\int \frac{dx}{3+3cosx+2\sin x}$

2.17. a) $\int \cos^3 x\sin 2xdx$

b) $\int tg^4 \frac{x}{3}dx$

d) $\int \frac{dx}{5\sin^2 x-3\cos^2 x}$

2.18. a) $\int \sin 5xcos7xdx$

b) $\int tg^3 \frac{x}{2}dx$

d) $\int \frac{dx}{5+3cosx+\sin x}$

2.19. a) $\int \cos 5x\sin 7xdx$

b) $\int ctg^4 \frac{x}{2} dx$

d) $\int \frac{dx}{3 + cosx + \sin x}$

2.20. a) $\int \cos^5 x \sin^3 x dx$

b) $\int tg^4 3x dx$

d) $\int \frac{dx}{16\sin^2 x + 7\cos^2 x}$

2.21. a) $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$

b) $\int ctg^3 (x+2) dx$

d) $\int \frac{dx}{7\sin x - 3cosx}$

2.22. a) $\int \sqrt[5]{\cos^4 x} \sin 2x dx$

b) $\int \cos^4 (x+3) dx$

d) $\int \frac{dx}{4cosx - 6\sin x}$

2.23. a) $\int \cos^2 3x \sin^2 3x dx$

b) $\int (1 - tg3x)^2 dx$

d) $\int \frac{dx}{3 - 2\sin^2 x}$

2.24. a) $\int \cos^2 3x \sin^3 3x dx$

b) $\int (1 - \sin 3x)^2 dx$

d) $\int \frac{2 - \sin x + 3\cos x}{1 + cosx} dx$

2.25. a) $\int \cos 5x \cos 7x dx$

b) $\int tg^3 (2x+3) dx$

d) $\int \frac{dx}{5 + 3\sin^2 x}$

2.26. a) $\int \cos^3 x \sin^7 x dx$

b) $\int (2 + \sin 5x)^2 dx$

d) $\int \frac{7 + 6\sin x - 5\cos x}{1 + cosx} dx$

2.27. a) $\int \cos 2x \sin^2 x dx$

b) $\int (tg3x - ctg3x)^2 dx$

d) $\int \frac{dx}{6 - 3\cos^2 x}$

2.28. a) $\int \sqrt[3]{\cos^2 3x} \sin 3x dx$

b) $\int ctg^3 (2x-3) dx$

d) $\int \frac{dx}{2 + 3cosx + 4\sin x}$

2.29. a) $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin^3 x dx$

b) $\int tg^2 \frac{2x}{3} dx$

d) $\int \frac{\sin^2 x dx}{3\sin^2 x - \cos^2 x}$

2.30. a) $\int \cos 2x \cos 7x dx$

b) $\int tg^4 (x+3) dx$

d) $\int \frac{dx}{8 - 3\sin^2 x}$

3

3.1. a) $\int \frac{\sqrt{x+1} dx}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[6]{x+1}}$

b) $\int \frac{(x+3) dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 6}}$

3.2. a) $\int \frac{xdx}{2+\sqrt{x+4}}$

b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-2}}$

3.3. a) $\int \frac{\sqrt[6]{x+2}dx}{\sqrt[3]{x+2}+\sqrt{x+2}}$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$

3.4. a) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}-\sqrt{2x+3}}$

$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+25}}$

3.5. a) $\int \frac{(x-1)dx}{x\sqrt{x-2}}$

b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}$

3.6. a) $\int \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{x+3}}{\sqrt[3]{(x+3)^2}+\sqrt[6]{x+3}}dx$

b) $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{2x^2-4x+1}}$

3.7. a) $\int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$

b) $\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{1+x-3x^2}}$

3.8. a) $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$

b) $\int \frac{(2x-10)dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$

3.9. a) $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+5}}$

b) $\int \frac{(2x+5)dx}{\sqrt{9+8x+4x^2}}$

3.10. a) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$

b) $\int \frac{(3x+4)dx}{\sqrt{13+6x+x^2}}$

3.11. a) $\int \frac{\sqrt{x+1}-2\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x+1}+2\sqrt[3]{x+1}}dx$

b) $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{2x^2-5x+1}}$

3.12. a) $\int \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-1}}$

b) $\int \frac{(5x+2)dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$

3.13. a) $\int \frac{\sqrt{x+2}dx}{\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[6]{x+2}}$

b) $\int \frac{(x-4)dx}{\sqrt{2x^2-x+7}}$

3.14. a) $\int \frac{\sqrt{x+3}dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$

b) $\int \frac{(4x+1)dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$

3.15. a) $\int \frac{(x+3)dx}{x\sqrt{x-4}}$

b) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x-x^2}}$

3.16. a) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}dx$

b) $\int \frac{(5x-3)dx}{\sqrt{2x^2+4x-5}}$

3.17. a) $\int \frac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}}dx$

b) $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{4+2x-x^2}}$

3.18. a) $\int \frac{(x^3-1)dx}{\sqrt{x+2}}$

b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-3}}$

3.19. a) $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1}dx$

b) $\int \frac{(x+5)dx}{\sqrt{3-6x-x^2}}$

3.20. a) $\int \frac{\sqrt[6]{3x+1}+1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}dx$

b) $\int \frac{(x-9)dx}{\sqrt{4+2x-x^2}}$

3.21. a) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x-2}}$

b) $\int \frac{(3x-4)dx}{\sqrt{2x^2-6x+1}}$

3.22. a) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}}dx$

b) $\int \frac{(7x-1)dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$

3.23. a) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-4\sqrt[3]{x^2}}dx$

b) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}$

3.24. a) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-3}}$

b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x-x^2}}$

3.25. a) $\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[6]{x})}dx$

b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3x+2}}$

3.26. a) $\int \frac{\sqrt{x-2}dx}{3+\sqrt{x-2}}$

b) $\int \frac{(7x+1)dx}{\sqrt{2-4x-x^2}}$

3.27. a) $\int \frac{\sqrt{x}}{3x+\sqrt[3]{x^2}}dx$

b) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-3x+2}}$

3.28. a) $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x-5}}$

b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-3x-2x^2}}$

3.29. a) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$

b) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2-x-x^2}}$

3.30. a) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx$

b) $\int \frac{(5x+1)dx}{\sqrt{3-6x-x^2}}$

6.5 Aniq integral va uni hisoblash

$y = f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan bo‘lsin. Bu kesmani ixtiuoriy $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ nuqtalar bilan *n ta* uzunliklari $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \left(i = \overline{1,n}\right)$ bo‘lgan qismiy bo‘laklarga bo‘lamiz va har bir bolakdan bittadan ixtiyoriy ξ_i nuqtalarni tanlab olamiz, bu yerda $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ $i = \overline{1,n}$. Quyidagi ko‘rinishdagi yig‘indini tuzamiz:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \qquad (5.1)$$

Bu yig‘indi $y = f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ kesmadagi *integral yig‘indisi* [146]deyiladi. Integral yig‘indi asosi Δx_i balandligi $f(\xi_i)$ bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklarning yuzalarining algebraik yig‘indisini beradi.

Integral yig‘indi σ_n ning qismiy bo‘laklar uzunliklarining eng kattasi nolga intilgandagi limiti $f(x)$ funksiyadan a dan b gacha olingan *aniq integral* deyiladi va $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi, ya’ni ta’rif bo‘yicha

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \qquad (5.2)$$

Teorema *Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u shu kesmada integrallanuvchidir, ya’ni bunday funksiya uchun (5.1) integral yig‘indining limiti mavjud va bu limit $[a;b]$ kesmani qismiy bo‘laklarga bo‘lish va ulardan ξ_i nuqtalarni tanlash usuliga bog‘liq emas.*

Agar $[a;b]$ kesmada $f(x) \geq 0$ bo‘lsa, $\int_a^b f(x)dx$ aniq integral $f(x)$ funksiya gafigi, Ox o‘qi va $x = a,\ x = b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan *egri chiziqli trapetsiya yuzi*ni ifodalaydi.

1-Izoh. *Aniq integral integrallash o‘zgaruvchisiga bog‘liq emas:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz.$$

[146] Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008

2-Izoh. *Aniq integralning chegaralari almashtirilsa, integralning ishorasi o'zgaradi:*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

3-Izoh. *Agar aniq integralning integrallash chegaralari teng bo'lsa, uning qiymati nolga teng:*

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Aniq integralning asosiy xossalari ($f(x), \varphi(x)$ funksiyalarni mos kesmalarda integrallanuvchi deb faraz qilamiz):

1. *Bir nechta funksiyaning algebraik yig'indisining aniq integrali qo'shiluvchilar integrallarining yig'indisiga teng. Ikki qo'shiluvchi bo'lgan hol bilan cheklanamiz:*

$$\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx.$$

2. *O'zgarmas ko'paytuvchini aniq integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, agar* $k = const$ *bo'lsa, u holda*

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

3. *Agar* $[a;b]$ *kesmada funksiya o'z ishorasini o'zgartirmasa, u holda bu funksiya aniq integralining ishorasi funksiya ishorasi bilan bir xil bo'ladi, ya'ni:*

a) *agar* $[a;b]$ *kesmada* $f(x) \geq 0$ *bo'lsa, u holda*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

b) *agar* $[a;b]$ *kesmada* $f(x) \leq 0$ *bo'lsa, u holda*

$$\int_a^b f(x)dx \leq 0$$

4. *Agar* $[a;b]$ *kesmada ikki* $f(x)$ *va* $\varphi(x)$ *funksiya* $f(x) \geq \varphi(x)$ *shartni qanoatlantirsa, u holda*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx$$

5. *Agar* $[a;b]$ *kesma bir necha qismlarga bo'linsa, u holda* $[a;b]$ *kesma bo'yicha aniq integral har bir qism bo'yicha olingan aniq integrallar yig'indisiga teng.* $[a;b]$ *kesma ikki qismga bo'lingan hol bilangina cheklanamiz, ya'ni agar* $a < c < b$ *bo'lsa, u holda*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

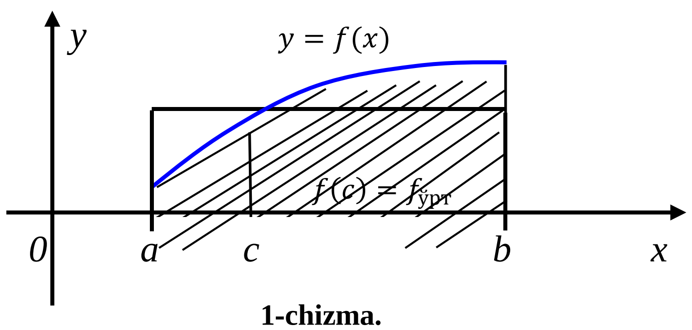
6. *Agar* m *va* M *sonlar* $f(x)$ *funksiyaning* $[a;b]$ *kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari bo'lsa, u holda*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Teorema *(o'rta qiymat haqida).* *Agar* $f(x)$ *funksiya* $[a;b]$ *kesmada uzluksiz bo'lsa, bu kesmaning ichida shunday* $x = c$ *nuqta topiladiki,*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Funksiyaning bu nuqtadagi qiymati uning shu kesmadagi o'rta qiymati bo'ladi.



1-chizma.

O‘rta qiymat haqidagi teoremaning geometrik ma’nosi quyidagicha(1-chizma): yuqoridan integral osti funksiyasi $f(x)$ ning grafigi bilan chegaralangan, $(b-a)$ asosli egri chiziqli trapesiyaning yuzi o‘shanday asosli va balandligi funksiyaning $f(c)$ o‘rta qiymatiga teng to‘g‘ri to‘rtburchakning yuziga tengdosh.

9. *Agar $f(x)$ funksiya kesmada uzluksiz va $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(x)dx$ bo‘lsa, quyidagi tenglik o‘rinli*

$$\Phi'(x)=\left(\int\limits_a^x f(x)dx\right)' = f(x)$$

10. *Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning qandaydir boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa,*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a) \qquad (5.3)$$

tenglik o‘rinli. Bu formula *Nyuton-Leybnits formulasi* deyiladi.

1-misol

Aniq integralni hisoblang: $\int\limits_1^4 \frac{x^2-2}{\sqrt{x}}dx$.

►Integral ostidagi funksiyani hadlab bo‘lamiz va yuqoridagi xossalardan foydalanib integralni hisoblaymiz.

$$\int\limits_1^4\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\limits_1^4 x^{3/2}dx-2\int\limits_1^4\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_1^4-\sqrt{x}\Big|_1^4=\frac{2}{5}(32-1)-(2-1)=11\frac{2}{5}.$$ ◄

2-misol

Aniq integralni hisoblang: $\int\limits_1^2 \frac{3x-4}{x^3+4x}dx$.

►Integral ostidagi funksiyani sodda kasrlarga ajratamiz:

$$\frac{3x-4}{x^3+4x}=\frac{3x-4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4},\ A(x^2+4)+Bx^2+Cx\equiv 3x-4,$$

$$\begin{array}{c|c} x^2 & A+B=0 \\ x^1 & C=3 \\ x^0 & 4A=-4 \end{array}$$

Bundan, $A=-1,\ B=1,\ C=3$. Natijada,

$$\int_1^2 \frac{2x-3}{x^3+4x}dx=\int_1^2\left(-\frac{1}{x}+\frac{x+3}{x^2+4}\right)dx=-\int_1^2\frac{dx}{x}+\int_1^2\frac{xdx}{x^2+4}+3\int_1^2\frac{dx}{x^2+4}=$$

$$=-\ln x\Big|_1^2+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)\Big|_1^2+\frac{3}{2}arctg\frac{x}{2}\Big|_1^2=-\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}+\frac{3}{2}\left(arctg1-arctg\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\ln\frac{\sqrt{10}}{5}+\frac{3}{2}arctg\frac{1}{3}.◄$$

$y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz, $x=\varphi(t)$ funksiya hosilasi bilan $[\alpha;\ \beta]$ kesmada uzluksiz va monoton, $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$ va $y=f(\varphi(t))$ murakkab funksiya $[\alpha;\ \beta]$da uzluksiz bo‘lsa, u holda quyidagi

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \qquad (5.4)$$

aniq integralda o‘zgaruvchini almashtirish[147] formulasi o‘rinli.

3-misol

Aniq integralni hisoblang: $\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$.

► $x=2\sin t$ deb almashtirish bajaramiz. U holda $dx=2\cos tdt$, $x=0$ da $\alpha=0$ va $x=2$ da $\beta=\pi/2$ ni hosil qilamiz. Natijada, (5.4) formulaga ko‘ra,

$$\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{4-4\sin^2 x}\cdot 2\cos tdt=\int_0^{\pi/2}4\cos^2 tdt=2\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt=$$

$$=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2}=\pi.◄$$

Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $[a;\ b]$ kesmada uzluksiz hosilalarga ega bo‘lsa, quyidagi

$$\int_a^b u(x)dv(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x)$$

yoki qisqacha

---

147 Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du \qquad (5.5)$$

aniq integralda bo'laklab integrallash formulasi o'rinli.

4-misol

Aniq integralni hisoblang: $\int_1^e x^2 \ln x dx$.

► $\int_1^e x^2 \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx, & v = x^3/3 \end{matrix} \right| = \dfrac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^e - \dfrac{1}{3}\int_1^e x^2 dx = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{x^3}{9}\Big|_1^e = \dfrac{2e^3+1}{9}$. ◄

Auditoriya topshiriqlari

Berilgan aniq integrallarni hisoblang.

1. $\int_1^2 \dfrac{2x^6+2}{x^4} dx$.

2. $\int_{-1}^2 \dfrac{dx}{x^2+4x+5}$.

3. $\int_1^{e^3} \dfrac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

4. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$.

5. $\int_1^2 \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$

6. $\int_{-2}^2 \dfrac{dx}{1+\sqrt{x+2}}$

7. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \dfrac{dx}{\sin^3 x}$

8. $\int_0^3 \dfrac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}$

9. $\int_1^{\sqrt{3}} arctg \dfrac{1}{x} dx$

10. $\int_0^{\pi/4} x tg^2 x dx$.

Mustaqil yechish uchun testlar

1. Aniq integralni hisoblang: $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx$

$A)\ \frac{1}{2}+\ln 2 \qquad B)\ \frac{1}{2}+\ln\sqrt{2} \qquad C)\ \frac{1}{2}-\ln\sqrt{2} \qquad D)\ 1$

2. Aniq integralni hisoblang: $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$

$A)\ \frac{\pi}{2}-1 \qquad B)\ \frac{\pi}{2}+1 \qquad C)\ \frac{\pi}{2} \qquad D)\ 1$

3. Aniq integralni hisoblang: $\int_e^5 \frac{3}{x\ln x}dx$.

$A)\ 3\ln(\ln 5) \qquad B)\ 5\ln(\ln 3) \qquad C)\ 3\ln(5e) \qquad D)\ 5\ln(3e)$

4. Aniq integralni hisoblang: $\int_0^{\pi/4} \sin^3 2x dx$.

$A)\ -\frac{1}{3} \qquad B)\ \frac{1}{3} \qquad C)\ -\frac{2}{3} \qquad D)\ \frac{2}{3}$

5. Aniq integralni hisoblang: $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$

$A)\ \ln\frac{2}{3} \qquad B)\ \ln\frac{4}{3} \qquad C)\ \ln\frac{3}{2} \qquad D)\ \ln 2$

6.6 Aniq integralning tatbiqlari

6.6.1 Yassi shakllar yuzlarini hisoblash.

Yuqorida berilganidek, $[a;b]$ kesmada $f(x)\geq 0$ bo‘lsa aniq integral geometrik nuqtai nazardan egri chiziqli trapetsiyaning yuzini ifodalaydi. Ixtiyoriy yassi shaklni esa bir nechta egri chiziqli trapetsiyalar yuzlarining yig‘indisi yoki ayirmasi deb qarash mumkin. Bundan har qanday yassi shakllarning yuzini aniq integral yordamida hisoblash mumkinligi kelib chiqadi.

1-misol

Berilgan $y=x^2-2x$ funksiya grafigi, Ox koordinata chizig‘i va $x=-1,\ x=1$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzini hisoblang.

►Avval berilgan chiziqlar bilan chegaralangan yassi shaklni yasaymiz (1-chizma). Izlanayotgan yuza $S=|S_1|+|S_2|$ yoki $S=S_1-S_2$ dan iborat,

$$S=\int_{-1}^{0}(x^2-2x)dx-\int_{0}^{1}(x^2-2x)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0}-\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_{0}^{1}=-\left(-\frac{1}{3}-1\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)=2.$$ ◄

Umumiy holda, agar yassi shakl ikkita $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ funksiyalar grafiklari va $x=a,\ x=b$ vertikal chiziqlar bilan chegaralangan bo‘lib, $f_1(x)\le f_2(x), x\in[a;b]$ bo‘lsa, bu yassi figura yuzi

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx \tag{6.1}$$

formula bilan hisoblanadi.

Agar egri chiziqli trapetsiyaning chegarasidagi egri chiziq $x=x(t),\ y=y(t)$ parametrik tenglamalar bilan berilsa, u holda bu yassi shakl yuzi

$$S=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt \tag{6.2}$$

formula bilan hisoblanadi. Bu yerda α va β chegara $a=x(\alpha), b=x(\beta)$ $(y(t)\ge 0, t\in[\alpha;\beta])$ tenglamalardan aniqlanadi.

2-misol

Ellips$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right)$ chizig‘i bilan chegaralangan shakl yuzuni toping.

►Avval ellipsning parametrik tenglamasini yozamiz: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$. Shaklning simmetrikligini va (6.2) formulani e’tiborga olib quyidagini hosil qilamiz:

$$S=4\int_0^a ydx=4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t\cdot(-a\sin t)dt=4ab\int_0^{\pi/2}\sin^2 tdt=2ab(t-\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\pi/2}=\pi ab$$

.◄

Egri chiziq qutb koordinatalar sistemasidagi $r=r(\varphi)$ tenglama bilan berilgan bo‘lsin. Agar OM_1M_2 yassi shakl $r=r(\varphi)$ tenglama bilan berilgan M_1M_2 egri chiziq va φ_1, φ_2 qutb burchaklariga mos keluvchi OM_1, OM_2 qutb radiuslari bilan chegaralangan egri chiziqli sektor bo‘lsa, uning yuzi

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi \tag{6.3}$$

formula bilan hisoblanadi.

3-misol

Qutb koordinatasida berilgan chiziq bilan chegaralangan shakl yuzini hisoblang: $r=4\cos 3\varphi$.

► $S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi$,

Qutb radiusi $r \geq 0$, ya'ni $4\cos 3\varphi \geq 0$, $\cos 3\varphi \geq 0$ bo'ladi.
Bundan,

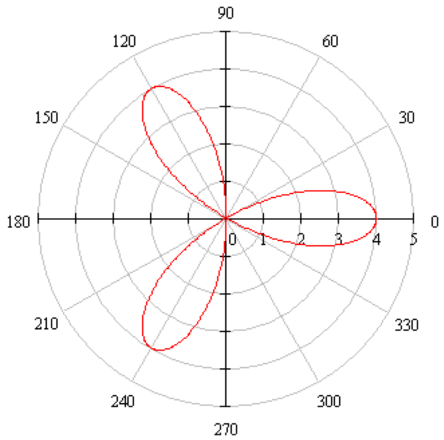
$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 3\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z,$$

$$-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z$$

Topilgan oraliqda $r = 4\cos\varphi$ shaklni yasaymiz(2-chizma):

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi/6}^{0} 16\cos^2 3\varphi d\varphi = 24 \int_{-\pi/6}^{0} (1 + \cos 6\varphi) d\varphi = 24(\varphi + \frac{1}{6}\sin 6\varphi)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{0} =$$

$$= 24(0 + 0 + \frac{\pi}{6} + \frac{1}{6} \cdot 0) = 4\pi. \blacktriangleleft$$



2-chizma

6.6.2 Egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash.

AB egri chiziq yoyi $y = f(x)$ tenglama bilan berilgan bo'lsin, bu yerda $f(x)$ uzluksiz differensiyalanuvchi funksiya. U holda uning $l = AB$ uzunligi quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \qquad (6.4)$$

Bu yerda $A(a;\ f(a))$ va $B(b;\ f(b))$ yoy uchlari bo'ladi.

Agar silliq egri chiziq $x = x(t),\ y = y(t)$ tenglamalar bilan berilgan bo'lib, $x(t),\ y(t)$ - uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsa, AB egri chiziq yoyi uzunligi l quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \qquad (6.5)$$

Bu yerda α va β chegara t parametrning yoyning A va B chegaralariga mos keluvchi qiymatlaridir.

Agar silliq egri chiziq yoyi qutb koordinatalar sistemasidagi $r = r(\varphi)$ tenglama bilan berilgan bo‘lsa, u holda yoy uzunligi

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + \left(r'(\varphi)\right)^2}\, d\varphi \tag{6.6}$$

formula bilan hisoblanadi, bu yerda φ_1 va φ_2 yoyning A va B chegaralariga mos qutb burchaklaridir.

4-misol

Ushbu $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ egri chiziqning $x_1 = 3,\ x_2 = 8$ absissali uchlari orasidagi yoyi uzunligini toping.

►(6.4)dan foydalanamiz.

$$l = \int_3^8 \sqrt{1 + \left(\sqrt{x}\right)^2}\, dx = \int_3^8 \sqrt{1+x}\, dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_3^8 = \frac{2}{3}\left(9^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{38}{3} = 12\frac{2}{3}.$$ ◄

5-misol

Ushbu $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t)$ sikloidaning 1-arkasi uzunligini toping.

► $x'_t = a(1 - \cos t),\ \ y'_t = a \sin t$. Sikloidaning 1-arkasida $0 \le t \le 2\pi$ ekanligidan va (6.5)dan foydalanib hisoblaymiz.

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt =$$

$$= -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4a(-1-1) = 8a.$$ ◄

6.6.3 Jism hajmini hisoblash.

Fazoda Ox o‘qiga proyeksiyasi $[a;\, b]$ kesma bo‘lgan qandaydir jism berilgan bo‘lsin. $x \in [a;\, b]$ nuqtadan o‘tuvchi Ox o‘qiga perpendikulyar har qanday tekislikning kesm bilan kesishmasi yuzi $S(x)$ ga teng bo‘lgan shaklni hosil qiladi. U holda bu jismning hajmi quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$V = \int_a^b S(x)\, dx \tag{6.7}$$

Xususiy holda, $y = f(x)$ funksiya gafigi bilan berilgan AB egri chiziq, Ox o‘qi va $x = a,\ x = b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyani Ox o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jismning ko‘ndalang kesimi yuzi $S(x) = \pi f^2(x)$ bo‘ladi. Shuning uchun bu *aylanma jismning hajmi*

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\, dx \tag{6.8}$$

formula bilan hisoblanadi. Qisqacha, $V=\pi\int_a^b y^2dx$.

Xuddi shu kabi, yassi shaklni Oy o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini topish uchun $V=\pi\int_c^d x^2dy$ formula qo‘llanadi.

Eslatma. *Qutb koordinatalar sistemasining* $(r;\varphi)$ *o‘zgaruvchilari o‘rniga* $(\rho;\varphi)$ *o‘zgaruvchilarini ishlatish ham mumkin. U holda yuqoridagi (6.3) va (6.6) formulalar quyidagi ko‘rinishni oladi:*

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)d\varphi \quad va \quad l=\int\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi$$

Auditoriya topshiriqlari

1. Berilgan egri chiziqlar bilan chegaralangan shakl yuzini toping:

$$a)\ \ y^2=x+5,\ \ y^2=-x+4$$

$$b)\ \ y=(x-4)^2,\ \ y=16-x^2$$

2. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos 3t)$ sikloidaning 1-arkasi va Ox o‘qi bilan chegaralangan shakl yuzini hisoblang.

3. $r=a(1-\cos\varphi)$ kardioida chizig‘i bilan chegaralangan shakl yuzini toping.

4. $y=\frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3}$ tenglama bilan berilgan egri chiziqning $x_1=2,\ x_2=8$ absissali uchlari orasidagi yoyi uzunligini hisoblang.

5. $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ ellips chizig‘ining yoy uzunligini toping.

6. $r=a(1-\cos\varphi)$ kardioida chizig‘i yoy uzunligini hisoblang.

7. $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}$, $z=1$ sirtlar bilan chegaralangan jism hajmini toping.

8. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos 3t)$ sikloidaning 1-arkasi va Ox o‘qi bilan chegaralangan shaklni absissa o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini toping.

Mustaqil yechish uchun testlar

1. Quyidagilardan qaysi biri yuzani topish formulasi emas?

A) $\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$ B) $\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi$ C) $\int_\alpha^\beta f^2(x)dx$ D) $\int_\alpha^\beta x(t)y'(t)dt$

2. Berilgan $f(x)=\sqrt{x^3}$ funksiyani $x=0$ va $x=5$ chiziqlar orasidagi yoyi uzunligini toping

$A)\ 12$ $B)\ 12\frac{5}{27}$ $C)\ 12\frac{7}{27}$ $D)\ 12\frac{11}{27}$

3. Quyidagi $r^2=4\cos 2\varphi$ chiziq bilan chegaralangan figuraning yuzini hisoblang

$A)\ 12$ $B)\ 8$ $C)\ 4$ $D)\ 16$

4. $x=4(t-\sin t)$, $y=4(1-\cos t)$, $0\le \text{t} \le \pi$ parametrik tenglama bilan berilgan egri chiziq yoy uzunligini hisoblang

$A)\ 12$ $B)\ 8$ $C)\ 4$ $D)\ 16$

5. Aniq integral yordamida hajm hisoblash formulasi berilgan variantni aniqlang

$A)\ \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$ $B)\ \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi$ $C)\ \int_\alpha^\beta f^2(x)dx$ $D)\ \int_\alpha^\beta x(t)y'(t)dt$

6.7 Birinchi va ikkinchi tur xosmas integrallar, ularni hisoblash va yaqinlashishga tekshirish

6.7.1 Chegarasi cheksiz xosmas integrallar[148].

Ta'rif. *Yarim* $[a,+\infty)$ *intervalda uzluksiz bo'lgan funksiyaning xosmas integrali quyidagicha belgilanadi:*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

va ushbu tenglik bilan aniqlanadi:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad (7.1)$$

Agar (7.1) formulada o'ngda turgan limit mavjud bo'lsa, u holda xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi. Bu limit integralning qiymati sifatida qabul qilinadi.

Agar ko'rsatilgan limit mavjud bo'lmasa, xosmas integral uzoqlashuvchi deb ataladi.

Agar integral ostidagi $f(x)$ funksiya uchun $F(x)$ boshlang'ich funksiya ma'lum bo'lsa, u holda xosmas integralning yaqinlashuvchimi yoki yo'qmi ekanini aniqlash mumkin. N'yuton-Leybnis formulalari yordamida quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}F(x)\Big|_a^b=\lim_{b\to+\infty}[F(b)-F(a)]=F(+\infty)-F(a).$$

Shunday qilib, agar $x\to+\infty$ da $F(x)$ boshlang'ich funksiya ma'lum bo'lsa (biz uni $F(+\infty)$ bilan belgiladik), u holda xosmas integral yaqinlashuvchi, agar bu limit mavjud bo'lmasa, u holda xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

1-misol

[148] Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008

►Berilgan $f(x)=e^{-kx}$ funksiya uchun $F(x)=-\frac{1}{k}e^{-kx}$ funksiya boshlang‘ich funksiya bo‘ladi.
N’yuton-Leybnis formulasini qo‘llaymiz:

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-kx}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{k}e^{-kx}\Big|_0^b\right)=-\frac{1}{k}\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-kb}-1\right).$$

Agar $k>0$ bo‘lsa, $I=\frac{1}{k}$ integral yaqinlashuvchi.

Agar $k\le 0$ bo‘lsa, $I=\infty$ integral uzoq lashuvchi. ◄

Xosmas integral $(-\infty,b]$ yarim cheksiz integralda ham shunga o‘xshash aniqlanadi:

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(-\infty).$$

bu yerda $F(-\infty)$ $F(x)$ boshlang‘ich funksiyaning $x\to-\infty$ dagi limiti.

Agar $f(x)$ funksiya butun sonlar o‘qida uzluksiz bo‘lsa, u holda umumlashgan xosmas integral quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{s}f(x)dx+\int_{s}^{+\infty}f(x)dx \qquad (7.2)$$

bu yerda s –ixtiyoriy tayinlangan nuqta.

Agar (7.2) formulada o‘ng tomonda turgan ikkala integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda chap tomondagi xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.

2-misol

Ushbu

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$$

integralni yaqinlashuvchiligini tekshiring.

► (7.2) formulada $s=0$ deb faraz qilib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$$

Tenglikning o‘ng qismidagi xosmas integrallar yaqinlashuvchi bo‘ladi, chunki

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=arctgx\Big|_{-\infty}^{0}=arctg0-arctg(-\infty)=\frac{\pi}{2}\ ,$$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=arctgx\Big|_{0}^{+\infty}=arctg(+\infty)-arctg0=\frac{\pi}{2}.$$

Shuning uchun ushbuga ega bo‘lamiz:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Integarl yaqinlashuvchi va uning qiymati π ga teng. ◄

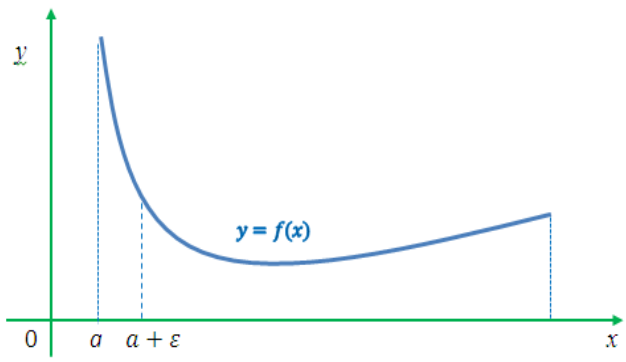
6.7.2 Cheksiz funksiyalarning xosmas integrallari.

Ta'rif. $(-\infty, b]$ *intervalda uzluksiz va* $x=a$ *da aniqlanmagan yoki uzilishga ega bo'lgan* $f(x)$ *funksiyaning (1-shakl) xosmas integrali quyidagicha belgilanadi:*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

va ushbu tenglik bilan aniqlanadi:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+\infty} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \qquad (27.3)$$



1-chizma

Agar (7.3) formulada o'ngda turgan limit mavjud bo'lsa, u holda xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar ko'rsatilgan limit mavjud bo'lmasa, u holda xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

Agar integral ostidagi $f(x)$ funksiya uchun $F(x)$ boshlang'ich funksiya ma'lum bo'lsa, u holda N'yuton-Leybnis formulasini qo'llash mumkin:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0} F(x)\Big|_{a+\varepsilon}^{b} = \lim_{\varepsilon\to0}\left[F(b)-F(a+\varepsilon)\right] = F(b)-F(a)$$

Spunday qilib, agar $x\to a$ da $F(x)$ boshlang'ich funksiyaning limiti mavjud bo'lsa (biz uni $F(a)$ bilan belgiladik), u holda xosmas integral yaqinlashuvchi, agarda bu limit mavjud bo'lmasa, u holda xosmas integral uzoqlashuvchi bo'ladi.

$[a, b)$ intervalda uzluksiz va $x=b$ da aniqlanmagan yoki **II** tur uzilishga ega bo'lgan $f(x)$ funksiyaning xosmas integrali ham shunga o'xshash aniqlanadi:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0} F(x)\Big|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to0}\left[F(b-\varepsilon)-F(a)\right] = F(b)-F(a),$$

bu yerda $F(b)-F(x)$ boshlang'ich funksiyaning $x\to b$ dagi limiti.

Agarda $f(x)$ funksiya $[a,\, b]$ kesmaning biror-bir $x=s$ oraliq nuqtasida cheksiz uzilishga ega yoki aniqlanmagan bo‘lsa, u holda xosmas integral quyidagi integral bilan aniqlanadi:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^s f(x)dx+\int_s^b f(x)dx \qquad (27.4)$$

Agar (7.4) formulaning o‘ng tomonida turgan intervalardan aqalli bittasi uzoqlashuvchi bo‘lsa, u holda xosmas integral uzoqlashuvchi bo‘ladiyu

Agar (7.4) ning o‘ng tomonidagi ikkala integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda tenglikning chap tomonidagi xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.

3-misol

Ushbu

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

integral ning yaqinlashuvchanligini tekshiring.

► $x\to 0$ da $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\to\infty$. $x=0$ nuqta $[0,4]$ kesmaning chap oxirida yotadi. Shuning uchun quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}=4-0=4.$$

Integral yaqinlashuvchi. ◄

6.7.3 Absolyut va shartli yaqinlashuvchanlik.

Ishorasini saqlamaydigan funksiyalarning xosmas integrallarini izlashni ba’zida nomanfiy funksiya bo‘lgan holga olib kelishga imkon beradigan alomatni keltiramiz.

Agar $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ integral ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Bunda oxirgi integral ***absolyut*** yaqinlashuvchi interval deb ataladi.

Agarda $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi, $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ integral esa uzoqlashuvchi bo‘lsa, u holda $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ integral ***shartli*** yaqinlashuvchi integral deb ataladi.

4-misol

Ushbu

$$\int_0^{+\infty}\frac{cosx}{1+x^2}dx, \qquad \int_0^{+\infty}\frac{sinx}{1+x^2}dx.$$

integrallarning yaqinlashuvchanligini tekshiring.

►Integral ostidagi funksiyalar ushbu shartlarni qanoatlantiradi:

$$\left|\frac{\cos x}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2}, \qquad \left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^{+\infty} = arctg(+\infty) - arctg0 = \frac{\pi}{2}$$

integral yaqinlashuvchi, shuning uchun

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right|dx \qquad \int_0^{\infty}\left|\frac{\cos x}{1+x^2}\right|dx$$

integrallar ham yaqinlashuvchi bo‘ladi. ◄

Auditoriya topshiriqlari

Xosmas integrallarni hisoblang yoki uzoqlashuvchi ekanini aniqlang.

1. $\int_e^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^5}$ (Javob: $0{,}25$).

2. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ (Javob: Uzoqlashuvchi).

3. $\int_0^{\infty} x^5 e^{-x^2}dx$ (Javob: 1).

4. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2xdx}{x^2+1}$ (Javob: Uzoqlashuvchi).

5. $\int_{\sqrt{2}}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ (Javob: $\frac{\pi}{4}$).

6. $\int_0^{1}\frac{dx}{x^3}$ (Javob: Uzoqlashuvchi).

7. $\int_0^{1/e}\frac{dx}{x(\ln x)^2}$ (Javob: 1).

8. $\int_0^{2}\frac{dx}{x^2-4x+3}$ (Javob: Uzoqlashuvchi).

Xosmas integrallarni yaqinlashishga tekshiring.

9. $\int_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln\ln x}$ (Javob: Uzoqlashuvchi).

10. $\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos x}{x^k}$ (Javob: $k \le 2$ da yaqinlashuvchi, $k > 2$ da uzoqlashuvchi).

Mustaqil yechish uchun testlar

1. Quyidagi $\int_1^{\infty} \frac{2}{x^2} dx$ xosmas integralni hisoblang

$A)$ 2 $B)$ 1 $C)$ 0 $D)$ 3

2. Quyidagi $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ xosmas integralni hisoblang yoki uzoqlashuvchi ekanini aniqlang

$A)$ 1 $B)$ 2 $C)$ 3 $D)$ *uzoqlashuvchi*

3. Quyidagi $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ xosmas integralni hisoblang yoki uzoqlashuvchi ekanini aniqlang

$A)$ 1 $B)$ 2 $C)$ 3 $D)$ *uzoqlashuvchi*

4. Quyidagi $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$ xosmas integralni hisoblang yoki uzoqlashuvchi ekanini aniqlang

$A)$ $\ln 2$ $B)$ $-\ln 4$ $C)$ $-\ln 2$ $D)$ *uzoqlashuvchi*

5. Quyidagi $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$ xosmas integralni hisoblang yoki uzoqlashuvchi ekanini aniqlang

$A)$ 1 $B)$ 2 $C)$ 3 $D)$ *uzoqlashuvchi*

Shaxsiy topshiriqlar

1-topshiriq. Aniq integrallarni hisoblang.

1.1 a) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$ b) $\int_0^{\pi/4} \frac{xdx}{\cos^2 x}$

1.2 a) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$ b) $\int_0^2 arctg\sqrt{x+1}dx$

1.3 a) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x + 3\sin^2 x}$ b) $\int_1^3 \ln(3x+2)dx$

1.4 a) $\int_0^{\ln 3} \frac{dx}{e^x(1+3e^{-2x})}$ b) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx$

1.5 a) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x - 3\sin x}$ b) $\int_{1}^{2} x^2 \ln x dx$

1.6 a) $\int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln x dx}{x(1+\ln^2 x)}$ b) $\int_{0}^{1} \frac{\arccos x}{\sqrt{x+1}} dx$

1.7 a) $\int_{0}^{4} x^2\sqrt{16-x^2}dx$ b) $\int_{0}^{\pi/4} xtg^2 xdx$

1.8 a) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{3\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$ b) $\int_{0}^{1} \left(x^2+x\right)e^x dx$

1.9 a) $\int_{0}^{\pi/2} \sin^4 x \cos^5 xdx$ b) $\int_{1}^{2} (x-1)\ln xdx$

1.10 a) $\int_{0}^{\sqrt{5}} \sqrt{5-x^2}dx$ b) $\int_{1}^{\sqrt{3}} arctg\frac{1}{x}dx$

1.11 a) $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5x-1}}$ b) $\int_{0}^{\pi/2} x\sin x\cos xdx$

1.12 a) $\int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ b) $\int_{0}^{\pi/4} x\sin^2 xdx$

1.13 a) $\int_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$ b) $\int_{0}^{\pi} x^2 \sin xdx$

1.14 a) $\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$ b) $\int_{-2}^{0} x^2 e^{-\frac{x}{2}}dx$

1.15 a) $\int_{\ln 2}^{\ln\sqrt{2}} \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$ b) $\int_{2/3}^{1} arctg(3x-2)dx$

1.16 a) $\int_{0}^{\pi/3} \frac{dx}{2+\cos x}$ b) $\int_{1}^{e^2} \sqrt{x}\ln xdx$

1.17 a) $\int_{3}^{6} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$ b) $\int_{0}^{1} \frac{\ln(x+2)}{(x+2)^2}dx$

1.18 a) $\int_{2}^{4} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ b) $\int_{0}^{1} \frac{\arcsin(x/2)}{\sqrt{2-x}}dx$

1.19 a) $\int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}dx$ b) $\int_{0}^{\pi/6} \frac{xdx}{\cos^2 2x}$

1.20 a) $\int_{1}^{13} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$ b) $\int_{1/2}^{1} arc\sin(1-x)dx$

1.21 a) $\int_{0}^{5} \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$ b) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} xctg^2 xdx$

1.22 a) $\int_{3}^{6} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$ b) $\int_{1}^{e} (x+3)\ln^2 xdx$

1.23 a) $\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$ b) $\int_{1}^{e} x\ln^2 xdx$

1.24 a) $\int_{0}^{\sqrt{6}} \sqrt{6-x^2}dx$ b) $\int_{1}^{3} \ln(2x+3)dx$

1.25

2-topshiriq. Quyidagi tenglama bilan berilgan chiziqlar bilan chegaralangan figura yuzini hisoblang.

2.1. $r=4\sin^2\varphi$

2.2. $x=3(\cos t+t\sin t),\ y=3(\sin t-t\cos t), y=0\ (0\le t\le\pi)$

2.3. $r=3\sin 4\varphi$

2.4. $r=4\cos 3\varphi,\ r=2\ (r\ge 2)$

2.5. $x=4(t-\sin t),\ y=4(1-\cos t)$

2.6. $y=x+1, y=\cos x,\ y=0$

2.7. $r=6\sin 3\varphi,\ r=3\ (r\ge 3)$

2.8. $r=\cos\varphi+\sin\varphi$

2.9. $r=1/2+\sin\varphi$

2.10. $r=6\cos 3\varphi,\ r=3\ (r\ge 3)$

2.11. $r=\cos 3\varphi$

2.12. $r=\sin\varphi,\ r=2\sin\varphi$

2.13. $r=1/2+\cos\varphi$

2.14. $x=7\cos^3 t,\ y=7\sin^3 t$

2.15. $y^2=x^3, x=4, y=0$

2.16. $r=\cos\varphi-\sin\varphi$

2.17. $r=1+\sqrt{2}\sin\varphi$

2.18. $r=5(1-\cos\varphi)$

2.19. $r=\sqrt{3}\cos\varphi,\ r=\sin\varphi, 0\le\varphi\le\pi/2$

2.20. $x=5\cos^3 t,\ y=5\sin^3 t$

2.21. $r=3(1-\cos\varphi)$

2.22. $r=6\cos 3\varphi,\ r=3\ (r\le 3)$

2.23. $r=\sin 3\varphi$

2.24. $r=2(1-\cos\varphi), r=2 (r\ge 2)$

2.25. $r=5(1+\cos\varphi)$

3-topshiriq. Quyidagi tenglamalar orqali berilgan chiziqning yoyi uzunligini hisoblang.

3.1. $r=5(1+\cos\varphi)$

3.2. $\begin{cases} x=3(2\cos t-\cos 2t), \\ y=3(2\sin t-\sin 2t), \end{cases}$

$$0\le t\le 2\pi.$$

3.3. $y=1+\ln(\cos x),\ (0\le x\le \pi/6)$

3.4. $\begin{cases} x=4(\cos t+t\sin t), \\ y=4(\sin t-t\cos t), \end{cases}$

$$0\le t\le 2\pi.$$

3.5. $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases}$

$$0\le t\le \pi.$$

3.6. $\begin{cases} x=2\sin^3 t \\ y=2\cos^3 t \end{cases}\quad 0\le t\le\pi$

3.7. $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t), \\ y=e^t(\cos t-\sin t), \end{cases}$

$$0\le t\le \pi.$$

3.8. $\begin{cases} x=4\sin^3 t \\ y=4\cos^3 t \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} x=3{,}5(2\cos t-\cos 2t), \\ y=3{,}5(2\sin t-\sin 2t), \end{cases}$

$$0\le t\le \pi/2.$$

3.10. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/3.$

3.11. $\begin{cases} x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t, \\ y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/3.$

3.12. $\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t), \\ y = 8(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/4.$

3.13. $r = 2\sin^3(\varphi/3),\ (0 \le \varphi \le \pi/6)$

3.14. $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/3.$

3.15. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$ $\pi \le t \le 2\pi.$

3.16. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $\pi/2 \le t \le \pi.$

3.17. $\begin{cases} x = 2{,}5(t - \sin t), \\ y = 2{,}5(1 - \cos t), \end{cases}$ $\pi/2 \le t \le \pi.$

3.18. $\begin{cases} x = 3{,}5(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3{,}5(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2.$

3.19. $\begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t), \\ y = 6(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi.$

3.20. $\begin{cases} x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t, \\ y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2.$

3.21. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$

$0 \le t \le \pi/6.$

3.22. $\begin{cases} x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t, \\ y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$

$0 \le t \le 2\pi.$

3.23. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$

$\pi/2 \le t \le 2\pi/3.$

3.24. $y^2 = x^3$ ning $x = 4$ bilan kesilgan qismi.

3.25. $\begin{cases} x = 5\sin^3 t \\ y = 5\cos^3 t \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$

4-topshiriq. Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan figuraning Ox o‘qi(1-12 variantlar uchun), Oy o‘qi(13-25 variantlar uchun) atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini toping.

4.1. $y^2 = x^3, x = 0, y = 4$

4.2. $x = 4(t - \sin t),\ y = 4(1 - \cos t), y = 0$

4.3. $y = 5\cos x, y = \cos x, x = 0, x \ge 0$

4.4. $y = 2x - x^2, y = 4x - 2x^2$

4.5. $y = \sin^2 x, x = \pi/2, y = 0$

4.6. $x = \sqrt[3]{y-2}\ x = 1, y = 1$

4.7. $y = xe^x, y = 0,\ x = 1$

4.8. $y = 2x - x^2, y = -x + 2, x = 0$

4.9. $y = 3\sin x, y = \sin x, 0 \le x \le \pi$

4.10. $x = 3\cos^2 t,\ y = 2\sin^2 t$

4.11. $y = \arccos x,\ y = \arcsin x, x = 0$

4.12. $(y-1)^2 = x,\ y = x - 1$

4.13. $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t$

4.14. $y = \arccos x,\ y = \arcsin x, y = 0$

4.15. $y = (x-1)^2,\ y = 1$ $y = (x-1)^2,\quad y = 1.$

4.16. $y^2 = x - 2,\ y = x^3,\ y = 0, y = 1$

4.17. $y = x^3, y = x^2$

4.18. $y=\arccos(x/5),\ y=\arcsin(x/3), y=0$

4.19. $(y-1)^2=x,\ y=x-1$

4.20. $y=(x-2)^2,\ y=4-x$

4.21. $y=\arccos x,\ y=\arcsin x, x=0$

4.22. $y=(x-1)^2,\ x=0,\ x=3,\ y=0$

4.23. $x=2\cos^2 t,\ y=5\sin^2 t$

4.24. $y=x^3, y=x$

4.25. $y=(x-1)^2,\ x=3,\ y=0$

5-topshiriq. Xosmas integrallarni hisoblang yoki uzoqlashuvchi ekanini isbotlang.

5.1. a) $\int_0^{\infty}\frac{xdx}{16x^2+1}$ b) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2-4x}}$

5.2. $\int_1^{\infty}\frac{16xdx}{16x^4-1}$ b) $\int_{-1}^{3}\frac{2x-3}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

5.3. a) $\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}}$ b) $\int_0^1\frac{e^{1/x}}{x^2}dx$

5.4. a) $\int_1^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{16x^4-1}}$ b) $\int_1^3\frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$

5.5. a) $\int_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$ b) $\int_{1/2}^{2}\frac{\ln(2x-1)}{2x-1}dx$

5.6. a) $\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+1)^4}}$ b) $\int_{1/4}^{1}\frac{dx}{20x^2-9x+1}$

5.7. a) $\int_0^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt[4]{(x^2+16)^5}}$ b) $\int_{1/2}^{1}\frac{dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}$

5.8. a) $\int_4^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$ b) $\int_0^{2/3}\frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x}dx$

5.9. a) $\int_1^{\infty}\frac{xdx}{x^2-4x+5}$ b) $\int_0^1\frac{xdx}{1-x^4}$

5.10. a) $\int_{-1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$ b) $\int_0^{\pi/6}\frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{(1-\sin 3x)^2}}dx$

5.11. a) $\int_1^{\infty}\frac{arctg\,2x}{4x^2+5}dx$ b) $\int_0^1\frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$

5.12. a) $\int_0^{\infty}\frac{dx}{4x^2+4x+5}$ b) $\int_0^{1/3}\frac{\cos xdx}{\sqrt[7]{\sin^2 x}}$

5.13. a) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{9x^2+6x+5}$ b) $\int\limits_{4/5}^{1}\frac{5dx}{\sqrt[3]{4-5x}}$

5.14. a) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{(x+3)dx}{\sqrt[3]{x^2+6x+5}}$ b) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{e^{tgx}dx}{\cos^2 x}$

5.15. a) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{3-x^2}{x^2+4}dx$ b) $\int\limits_{0}^{1}\frac{e^{\pi-\arcsin x}dx}{\pi\sqrt{1-x^2}}$

5.16. a) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{3+\sqrt{arctg\,3xdx}}{9x^2+1}$ b) $\int\limits_{1}^{2}\frac{3dx}{\sqrt[3]{4x-x^{2.}-4}}$

5.17. a) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)}$ b) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin 2xdx}{\sqrt[3]{1-\cos^2 x}}$

5.18. a) $\int\limits_{0}^{\infty}x\sin xdx$ b) $\int\limits_{0}^{1/3}\frac{5dx}{\sqrt[3]{1-3x}}$

5.19. a) $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{5dx}{\left(x^2-4x\right)\ln 3}$ b) $\int\limits_{1}^{3}\frac{xdx}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}}$

5.20. a) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\pi dx}{(1+4x^2)arctg^2 2x}$ b) $\int\limits_{0}^{1/3}\frac{dx}{9x^2-9x+2}$

5.21. a) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{(2x+1)dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$ b) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{3\sin^3 xdx}{\sqrt{\cos x}}$

5.22. a) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+2x\right)\ln 5}$ b) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^4dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$

5.23. a) $\int\limits_{0}^{\infty}2xe^{-3x}dx$ b) $\int\limits_{0}^{\sqrt{5}}\frac{\sqrt[3]{5}xdx}{\sqrt[3]{5-x^2}}$

5.24. a) $\int\limits_{-\infty}^{0}3xe^{2x}dx$ b) $\int\limits_{0}^{3}\frac{2x^2dx}{\sqrt{9-x^6}}$

5.25. a) $\int\limits_{0}^{\infty}x^3e^{-x^2}dx$ b) $\int\limits_{0}^{1/5}\frac{3xdx}{\sqrt[5]{1-25x^2}}$

Foydalanilgan asosiy darsliklar va o‘quv qo‘llanmalar ro‘yxati

1. Claudio Canuto, Anita Tabacco “Mathematical Analysis”, Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010.
2. W W L Chen “LINAR ALGEBRA”, London, Chapter 1-12, 1983, 2008.
3. W W L Chen “Introduction to Fourier Series”, London, Chapter 1-8, 2004, 2013.
4. W W L Chen “Fundamentales of Analysis”, London, Chapter 1-10, 1983, 2008.
5. Жўраев Т., Саъдуллаев А., Худойберганов Г., Мансуров Х., Ворисов А. Олий математика асослари. Т.1., Тошкент, “Ўқитувчи”, 1995.
6. Жўраев Т., Саъдуллаев А., Худойберганов Г., Мансуров Х., Ворисов А. Олий математика асослари. Т.2., Тошкент, “Ўзбекистон”, 1999.
7. Соатов Ё.У Олий математика. Т., Ўқитувчи, 1995. 1- 5 қисмлар.
8. N.M.Jabborov, E.«Oliy matematika». 1-2 qism. Qarshi, 2010.
9. Латипов Х.Р., Таджиев Ш. Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра. Тошкент, "Ўзбекистон". 1995.
10. Азларов Т., Мансуров Х. Математик анализ, - Тошкент.: Ўқитувчи, 1-қисм, 1989.
11. Латипов Х.Р., Носиров Ф.У., Таджиев Ш.А. Аналитик геометрия ва чизиқли алгебрадан масалалар ечиш бўйича қўлланма. Тошкент, Фан, 1999.

Internet saytlari

1. www.Ziyonet.uz
2. www.tuit.uz
3. www.Math.uz
4. www.bilim.uz
5. www.gov.uz

“Oliy matematika.Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika”
fanidan amaliy mashg‘ulotlar o‘tkazishga doir o‘quv qo‘llanma

Ikki jildlik, 1-jild

TATU va uning xududiy filiallari talabalari uchun mo‘ljallangan

TATU ilmiy-uslubiy kengashida
ko‘rib chiqildi va nashrga tavsiya etildi
№ 10(91) bayonnoma, 28.06.2016 y.)

Mualliflar: Raxmatov R.R.,
Tadjibaeva Sh. E.,
Shoyimardonov S.K.

Mas’ul muharrir: “Oliy matematika” kafedrasi
dotsenti T.X.Adirov

Taqrizchilar:

TDTU “Matematika va mexanika”
kafedrasi dotsenti, f.m.f.n. Sujarov A.M.,

TATU “Komp’yuter tizimlari”
kafedrasi professori, t.f.d. Usmanov R.N.

Muharrir:

Bichimi 60x84 1/16
Bosma tabog‘i- 13 Adadi- ______
Buyurtma- № _______

Toshkent axborot texnologiyalari universiteti
“ALOQACHI” nashriyot-matbaa markazida chop
etildi.

Toshkent sh., Amir Temur ko‘chasi, 108-uy

GLOSSARIY

Inglizcha	O‘zbekcha	Ruscha	Izoh
Numeral sequence	Sonli ketma-ketlik.	Числовая последова-тельность	**Sonli ketma-ketlik.** Natural sonlar to‘plamini haqiqiy sonlar to‘plamiga mos qo‘yuvchi akslantirishga sonli ketma-ketlik deyiladi. Hamda $\{x_n\}_{n\geq 1}$ ko‘rinishida yoziladi.
Limit of Numeral sequence	Sonli ketma-ketlik limiti.	Предел числовой последова-тельности	**Sonli ketma-ketlik limiti.** a soni $\{x_n\}_{n\geq 1}$ ketma-ketlik limiti deyiladi, agar $\forall\varepsilon > 0$ soniga ko‘ra $\exists n_0 \in N$ son topilib, $\forall n > n_0$ natural son uchun $\lvert x_n - a\rvert < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa. $\{x_n\}_{n\geq 1}$ ketma-ketlik limiti quyidagicha yoziladi: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$
Converges	Yaqinlashuvchi.	Сходящийся	**Yaqinlashuvchi.** $\{x_n\}_{n\geq 1}$ ketma-ketlik uchun yuqoridagi shartni qanoatlantiruvchi a soni mavjud bo‘lsa, bunday ketma-ketlik ***yaqinlashuvchi*** deyiladi.
Uniqueness of the limit	Limitning yagonaligi	Единственность предела	**Limitning yagonaligi.** Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning limiti yagonadir.
Bounded	Chegaralangan.	Ограниченный	**Chegaralangan.** $\{x_n\}_{n\geq 1}$ ketma-ketlik chegaralangan deyiladi, agar $\forall n \in N$ uchun $\exists M > 0$ soni topilib $\lvert x_n\rvert \leq M$ tengsizlik bajarilsa.
Finite	Chekli.	Конечный	**Chekli.** Aniq bir qiymatga ega bo‘lgan kattalik.
Infinite	Cheksiz.	Бесконечный	**Cheksiz.** Haqiqiy sonlar to‘plamining yuqori chegarasi , quyi chegarasi. Shartli ravishda cheksiz deyiladi.
Compactness	Kompaktlik	Компактный	**Kompaktlik.** Agar $\{x_n\}_{n\geq 1}$ ketma-ketlik chegaralangan bo‘lib, limiti o‘ziga tegishli bo‘lsa u holda bunday ketma-ketlikka ***kompakt*** deyiladi.

Continuity	Uzluksizlik.	Непрерывность	**Uzluksizlik.** $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi, agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ o‘rinli bo‘lsa.
Cauchy sequences	Koshi ketma-ketligi.	Последовательность Коши	**Koshi ketma-ketligi.** Quyidagi shartni qanoatlantiruvchi $\{x_n\}_{n\geq 1}$ ketma-ketlikka Koshi ketma-ketligi deyiladi. $\forall\varepsilon>0$ soniga ko‘ra $\exists n_0\in N$ son topilib, $\forall n>n_0$ va $\forall m>n_0$ natural sonlar uchun $\lvert x_n-x_m\rvert<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa.
Fundamental sequences	Fundamental ketma-ketliklar	Фундаментальные последовательности	**Fundamental ketma-ketliklar.** Quyidagi shartni qanoatlantiruvchi $\{x_n\}_{n\geq 1}$ ketma-ketlikka ***fundamental ketma-ketlik*** deyiladi. $\forall\varepsilon>0$ soniga ko‘ra $\exists n_0\in N$ son topilib, $\forall n>n_0$ va $\forall m>n_0$ natural sonlar uchun $\lvert x_n-x_m\rvert<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa.
inverse function	Teskari funksiya	Обратная функция	**Teskari funksiya.** $y=f^{-1}(x)$ funksiya $y=f(x)$ funksiyaning teskarisi deyiladi, agar $x=f(y)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa.
Increasing function	Kamayuvchi funksiya	Убывающая функция	**Kamayuvchi funksiya.** $y=f(x)$ funksiya o‘zining D sohasida kamayuvchi deyiladi, agar $\forall x_1,x_2: x_1>x_2$ ekanidan $f(x_1)\leq f(x_2)$ ekani kelib chiqsa.
Decreasing function	O‘suvchi funksiya	Возрастающая функция	**O‘suvchi funksiya.** $y=f(x)$ funksiya o‘zining D sohasida o‘suvchi deyiladi, agar $\forall x_1,x_2\in D: x_1>x_2$ ekanidan $f(x_1)\geq f(x_2)$ ekani kelib chiqsa.

a map	**Akslantirish**	**Отображение**	**Akslantirish.** X to‘plamning har bir elementiga Y to‘plamning yagona elementini mos qo‘yishga aytiladi.
Function	**Funksiya**	**Функция**	**Funksiya.** R haqiqiy sonlar to‘plamini haqiqiy sonlar to‘plamiga mos qo‘yuvchi akslantirishga aytiladi
Domain region	**Aniqlanish soha**	**Область определения**	**Aniqlanish soha.** Argumentning qabul qila olishi mumkin bo‘lgan qiymatlari to‘plamiga aytiladi.Hamda $domf$ bilan belgalaymiz.
Image region	**Qiymatlar sohasi**	**Область значения**	**Qiymatlar sohasi.** Funksiyaning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlari sohasiga aytiladi.
Odd function	**Toq funksiya**	**Нечетная функция**	**Toq funksiya.** $\forall x \in domf$ uchun $f(-x) = -f(x)$ tenglikni qanoatlantiradigan funksiyalarga aytiladi.
Even function	**Juft funksiya**	**Четная функция**	**Juft funksiya.** $\forall x \in domf$ uchun $f(-x) = f(x)$ tenglikni qanoatlantiradigan funksiyalarga aytiladi.
Period of function	**Funksiyaning davri**	**Период функции**	**Funksiyaning davri.** $\forall x \in domf$ uchun $\exists T \in R$ topilib $f(x+T) = f(x)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa , u holda T soni funksiyaning davri deyiladi.
Bounded function	**Chegeralangan funksiya**	**Ограниченная функция**	**Chegeralangan funksiya.** $y = f(x)$ funksiya chegaralangan deyiladi, agar $\exists M > 0$ soni topilib $\lvert f(x)\rvert \le M$ tengsizlik bajarilsa.
The limit of a function on a point (Heyne definition)	**Funksiyaning nuqtadagi limiti (Geyne bo‘yicha)**	**Предел функции в точке (определение Гейне)**	**Funksiyaning nuqtadagi limiti (Geyne bo‘yicha).** Agar $n \to \infty$ da $x_n \to x_0$ $(x_n \in X,\ x_n \ne x_0)$ bo‘ladigan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $n \to \infty$ da $f(x_n) \to b$ bo‘lsa, b ga $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti deyiladi va $x \to x_0$

			da $f(x)\to b$ yoki $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$ kabi belgilanadi.
The limit of a function on a point (Cauchy definition)	**Funksiyaning nuqtadagi limiti (Koshi bo'yicha)**	**Предел функции в точке (определение Коши)**	**Funksiyaning nuqtadagi limiti (Koshi bo'yicha).** Agar $\forall\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ topilsaki, $\forall x\in X\bigcap(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\})$ uchun $\lvert f(x)-b\rvert<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b soni $f(x)$ **funksiyaning** x_0 **nuqtadagi limiti** deyiladi: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$. Bu ta'rifni qisqacha quyidagicha ham aytish mumkin: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$, $\forall x\in X\bigcap(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\})$: $\lvert f(x)-b\rvert<\varepsilon$ bo'lsa, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$.
Limit point	**Limit nuqta**	**Предельная точка**	**Limit nuqta.** Agar x_0 nuqtaning ixtiyoriy $U_\varepsilon(x_0)=(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$, $(\forall\varepsilon>0)$ atrofida X to'plamning x_0 nuqtadan farqli kamida bitta nuqtasi bo'lsa, ya'ni $\forall\varepsilon>0,\ \exists x\in X,\ \ x\neq x_0:\ \lvert x-x_0\rvert<$ bo'lsa, x_0 nuqta X to'plamning limit nuqtasi deyiladi.
Increment of argument	**Argument orttirmasi**	**Приращение аргумента**	**Argument orttirmasi.** Argument orttirmasi deb argument yangi qiymatidan dastlabki qiymatning ayirmasi tushuniladi va u quyidagicha belgilanadi.ar $\Delta x=x-x_0$
Real function	**Haqiqiy funksiya**	**Действительная функция**	**Haqiqiy funksiya.** Faqat haqiqiy qiymatlarni qabul qila oladigan funksiyalarga haqiqiy funksiya deb ataladi.
Real variable	**Haqiqiy o'zgaruvchili**	**Действительная переменная**	**Haqiqiy o'zgaruvchili.** Haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan

			funksiyaga haqiqiy o‘zgaruvchili funksiya deyiladi.
neighborhood	Atrof	Окрестность	**Atrof .** x_0 nuqtaning ε atrofi deb quyidagi tengsizlikni qanoatlantiruvchi $x \in R$ nuqtalar to‘plamiga aytiladi: $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$
Independent variable	Erkli o‘zgaruvchi	Независимая переменная	**Erkli o‘zgaruvchi.** Erkli o‘zgaruvchi deb ixtiyoriy qiymatni mustaqil qabul qila oladigan o‘zgaruvchiga aytiladi.
Derivative	Hosila	Производная	**Hosila.**Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi qiymatiga funksiya hosilasi deyiladi.
Secant	Kesuvchi	Секущий	**Kesuvchi.** Funksiya grafigining ixtiyoriy ikkita nuqtasidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqqa aytiladi.
Tangent	Urinma	Касательный	**Urinma.** Kesuvchining limit holatiga urinma deyiladi.
time	Vaqt	Время	**Vaqt.** Nisbiy tushuncha bo‘lib, o‘lchov birligi soat,sekund,minut kabilar bilan o‘lchanadigan skalyar o‘suvchi miqdordir.
Tangent line	Urinma chiziq	Касательная прямая	**Urinma.** Kesuvchining limit holatiga urinma deyiladi.
Velocity	Tezli	скорость	**Tezlik.** Jismning bir sekund ichida bosib o‘tgan yo‘liga son jihardan teng bo‘lgan kattalikka aytiladi, O‘lchov birligi ***metr/sekund***
komposition	kompozitsiya	Композиция	**kompozitsiya.** $f: X \to Y$ va $g: Y \to Z$ akslantirishlar kompozitsiyasi deb quyidagi akslantirishga aytiladi. $h = g \circ f$, bu yerda $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ bo‘lib $h: X \to Z$
Continuous function	Uzluksiz funksiya	Непрерывная функция	**Uzluksiz funksiya.** $y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz deyiladi, agar $\forall x_0 \in [a,b]$ uchun

			$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ bo‘lsa.
Invertible map	**Bir qiymatli akslantirish**	**Однозначная отображение**	**Bir qiymatli akslantirish.** $f:X\to Y$ akslantirish bir qiymatli deyiladi , agar $\forall x_1,x_2\in X$ uchun $f(x_1)=f(x_2)$ ekanidan $x_1=x_2$ kelib chiqsa.
Logarithmic derivative	**Logarifmik hosila**	**Логарифмическ ая производная**	**Logarifmik hosila.** $y=f(x)$ funksiyaning logarifmik hosilasi deb $F(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ funlsiyaga aytiladi.
Independent variable	**Erkli o‘zgaruvchi**	**Независимая переменная**	**Bir qiymatli akslantirish.** Erkli o‘zgaruvchi deb ixtiyoriy qiymatni mustaqil qabul qila oladigan o‘zgaruvchiga aytiladi.
Limit point	**Limit nuqta.**	**Предельная точка**	**Limit nuqta.** Agar x_0 nuqtaning ixtiyoriy $U_\varepsilon(x_0)=(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon)$, $(\forall\varepsilon>0)$ atrofida X to‘plamning x_0 nuqtadan farqli kamida bitta nuqtasi bo‘lsa, ya’ni $\forall\varepsilon>0,\ \exists x\in X,\ \ x\neq x_0:\ \lvert x-x_0\rvert<$ bo‘lsa, x_0 nuqta X to‘plamning limit nuqtasi deyiladi.
The theorem of de l’Hopital	**Lopital teoremasi**	**Теорема Лопиталя**	**Lopital teoremasi.** Quyidagi aniqmasliklarni ochishda foydalaniladi. $\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},1^\infty,\infty^0$ **Agar** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ bo‘lsa u holda $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ o‘rinli.
Taylor polynomial	**Teylor yoyilmasi**	**Разложение Тейлора**	**Teylor yoyilmasi.** n -tartibli teylor yoyilmasi deb $Tf_{n,x_0}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ ko‘phadga aytiladi.
Remainder	**Qoldiq**	**Остаток**	**Qoldiq .** n -tartibli teylor qoldig‘i deb $o((x-x_0)^n)$ qiymatga aytiladi.

Higher-order derivatives	Yuqori tartibli hosila	Производная высших порядков	**Yuqori tartibli hosila.** $y=f(x)$ funksiyaning n -tartibli hosilasi deb quyidagi xossani qanoatlantiruvchi funksiyaga aytiladi: $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'$, xususiy holda $f^{(0)}(x)=f(x), f^{(1)}(x)=f'(x)$
Continuous function	Uzluksiz funksiya	Непрерывная функция	**Uzluksiz funksiya.** $y=f(x)$ funksiya $\left[a,b\right]$ kesmada uzluksiz deyiladi, agar $\forall x_0\in\left[a,b\right]$ uchun $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ bo'lsa.
Invertible map	Bir qiymatli akslantirish	Однозначная отображение	**Bir qiymatli akslantirish.** $f:X\to Y$ akslantirish bir qiymatli deyiladi , agar $\forall x_1,x_2\in X$ uchun $f(x_1)=f(x_2)$ ekanidan $x_1=x_2$ kelib chiqsa.
Independent variable	Erkli o'zgaruvchi	Независимая переменная	**Erkli o'zgaruvchi.** Erkli o'zgaruvchi deb ixtiyoriy qiymatni mustaqil qabul qila oladigan o'zgaruvchiga aytiladi.
Primitive function	Boshlang'ich funksiya	Первообразная функция	**Boshlang'ich funksiya.** $y=F(x)$ funksiya $y=f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deyiladi, agar $F'(x)=f(x)$ tenglik bajarilsa.
Indefinite integral	Aniqmas integral	Неопределенный интеграл	**Aniqmas integral.** $y=f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deb $y=F(x)+C$ funksiyalar oilasiga aytiladi, bu yerda $C=const$ va quyidagicha belgilanadi. $\int f(x)dx$
Linearity of the integral	Integralning chiziqliligi	Линейность интеграла	**Integralning chiziqliligi.** Bu quyidagichadir. $\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int f(x)dx+$ Bu yerda $\alpha,\beta=const$
Integration by	Bo'laklab integrallash	Интегрирование по частям	**Bo'laklab integrallash.** Bu quyidagicha xossaga ega.

parts			$\int udv = uv - \int vdu$
Real variable	**Haqiqiy o‘zgaruvchili**	**Действительная переменная**	**Haqiqiy o‘zgaruvchili.** Haqiqiy sonlar to‘plamida aniqlangan funksiyaga haqiqiy o‘zgaruvchili funksiya deyiladi.
neighborhood	**Atrof**	**Окрестность**	**Atrof .** x_0 nuqtaning ε atrofi deb quyidagi tengsizlikni qanoatlantiruvchi $x \in R$ nuqtalar to‘plamiga aytiladi: $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$