МУХАММАД АЛ-ХОРАЗМИЙ НОМИДАГИ
ТОШКЕНТ АХБОРОТ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИ УНИВЕРСИТЕТИ
УРГАНЧ ФИЛИАЛИ

«Дастурий инжиниринг»
кафедраси

«ТИЗИМЛИ ТАҲЛИЛ ВА ТАЛАБЛАР»

фанидан лаборатория машғулотларини бажариш бўйича
услубий қўлланма
(2-қисм)

5530600 «Дастурий инжиниринг»
таълим йўналиши талабалари учун

Урганч – 2017 й.

Юсупов Ф. «Тизимли таҳлил ва талаблар» фанидан лаборатория машғулотларини бажариш бўйича услубий қўлланма. 2-қисм. ТАТУ Урганч филиали. Урганч. – 2017. – 94 б.

«Тизимли таҳлил ва талаблар» фанидан лаборатория машғулотларини бажариш бўйича услубий қўлланмамада системавийликнинг асосий тушунмалари - тасниф, моделлар, система чегаралари, чекловлари шунингдек уларни тадқиқ этишнинг техника-иқтисодий математик моделлар (чизиқли программалаштириш методлари моделлари) методологияси қисқача берилди. Системавий ёндашиш асосида техника объектларини лойиҳалаш: лойиҳалаш тамойиллари ва жиҳатлари, техника объектининг конструкциявий тамойиллари, ишлаб чиқариш талаблари системаси, техника объектларидан фойдаланиш ва уларни тугатиш масалалари қисман кўриб чиқилди. Бирор қарорга келиш асоси, мақсадни аниқлаш ва муқобилларни ахтарищ, танловни самаралилаштириш асослари берилди.

Мазкур услубий қўлланманинг долзарблиги шундан иборатки, статистик тасаввурлар замонавий инсоннинг муҳим ташкил этувчи интеллектуал багажини ташкил қилади. Статистик маълумотлар ва улардан фойдаланиш кундалик ҳаётимизда жуда зарур ва муҳимдир.

Ҳозирги интенсив ривожланиш даврида инсонлар эҳтимоллик ҳолатларда яшашни жуда яхши билишлари, ўрганишлари зарур. Бу эса шундан далолат берадики, замонавий инсон статистик маълумотларни таҳлил қилиши ва қайта ишлаши, керакли маълумотларни, билимларни чиқариб олиш усулларини эгаллаши зарур. Бунинг асосида инсон ечими тасодифий ҳолатлар билан боғлиқ бўлган шароитларда асосланган тўғри ечимлар қабул қилишга ўрганади.

Мазкур услубий қўлланма “Тизимли таҳлил ва талаблар” фани бўйича 5330600 – “Дастурий инжениринг” таълим йўналиши талабалари учун мўлжалланган. Таркиби ва мазмуни бўйича мазкур таълим йўналиши талабларига тўлиқ мос келади.

Мазкур услубий қўлланмадан турдош таълим йўналишлари, мустақил ўрганувчилар ҳам фойдаланиши мумкин.

Тақризчилар:

Матлатипов Ғ.Р. — УрДУ “Ахборот технологиялари” кафедраси мудири, т.ф.н., доцент.

Рейимберганов А. — ТАТУ УФ “Ахборот технологиялари” кафедраси мудири, ф.м.ф.н.

«Тизимли таҳлил ва талаблар» фанидан лаборатория машғулотларини бажариш бўйича услубий қўлланма. ТАТУ Урганч филиали “Компьютер инжиниринг” факультетининг илмий-услубий кенгашининг қарори билан чоп этишга тавсия қилингвн (2017 йил “___” ___________ “___” – сонли баённома).

Мундарижа

1-Тажриба иши

Чизиқли программалаш масаласини ечишнинг оддий Симплекс усули.

Мақсад: Техникака-иқтисодий масалаларни оптимал ечимини нормал Симплекс усулидан фойдаланиб ечиш услубини ўзлаштириш.

Топшириклар:
1. масаланинг қўйилиши билан танишиш;
2. масалани каноник кўринишида ифодалаш;
3. масалани жадвал кўринишида ифодалаш;
4. дастлабки симплекс жадвални қуриш;
5. масаланинг оптимал ечимини излаш;
6. лаборатория ишини расмийлаштириш.

Умумий назарий маълумотлар.

Чизиқли дастурлаш математик дастурлашнинг бир йўналиши бўлиб, у чегараланган ресурслар (хом ашё, техника воситалари, капитал қўйилмалар, ер, сув, минерал ўғитлар ва бошқалар) ни рационал тақсимлаб энг кўп фойда олиш йўлларини ўргатади.

Чизиқли дастурлашнинг фан сифатида шаклланиши XX асрнинг иккинчи ярмидаги иқтисодий фикрларнинг такомиллашишига катта таъсир кўрсатди. 1975 йилда чизиқли программалаш назариясини биринчи бор кашф қилган рус олими Л.В.Канторовичга ва математик иқтисодиёт бўйича мутахассис, «Чизиқли дастурлаш» терминининг биринчи муаллифи, америка олими Т.Купмансга Нобел мукофотининг берилиши чизиқли дастурлашнинг иқтисодий назарияга қўшган ҳиссасини тан олишдан иборат деб ҳисоблаш мумкин.

Чизиқли дастурлаш чизиқли функциянинг, унинг таркибига кирувчи номаълумларга чегараловчи шартлар қўйилгандаги, энг катта ва энг кичик қийматини излаш ва топиш услубини ўргатувчи фандир.

Номаълумларга чизиқли чегаралашлар қўйилган чизиқли функциянинг экстремумини топиш чизиқли дастурлашнинг предметини ташкил қилади. Шундай қилиб, чизиқли дастурлаш чизиқли функциянинг шартли экстремумини топиш масалалари туркумига киради.

Чизиқли дастурлаш усулларини қўллаб иқтисодий жараёнларнинг ўзига хос қонуниятларини ўрганиш учун, биринчи навбатда, бу жараёнларни тавсифловчи математик моделларни тузиш керак. ўрганилаётган иқтисодий жараённинг асосий хоссаларини математик муносабатлар ёрдамида тавсифлаш тегишли иқтисодий жараённинг математик моделини тузиш деб аталади.

Иқтисодий жараёнларнинг (масалаларнинг) математик моделини тузиш учун қуйидаги босқичлардаги ишларни бажариш керак:

1) масаланинг иқтисодий маъноси билан танишиб, ундаги асосий шартлар ва мақсадни аниқлаш;
2) масаладаги маълум параметрларни белгилаш;
3) масаладаги номаълумларни (бошқарувчи ўзгарувчиларни) белгилаш;
4) масаладаги чекламаларни, яъни бошқарувчи ўзгарувчиларнинг қаноатлантириши керак бўлган чегаравий шартларни чизиқли тенгламалар ёки тенгсизликлар орқали ифодалаш;
5) масаланинг мақсадини чизиқли функция орқали ифодалаш. Бундай функция мақсад функция деб аталади.

Бошқарувчи ўзгарувчиларнинг барча чекламаларни қаноатлантирувчи шундай қийматини топиш керакки, у мақсад функцияга энг катта (максимум) ёки энг кичик(минимум) қиймат берсин. Бундан кўринадики, мақсад функция бошқарувчи номаълумотларнинг барча қийматлари ичида энг яхшисини (оптималини) топишга ёрдам беради. Шунинг учун ҳам мақсад функцияни фойдалилик ёки оптималлик мезони деб ҳам аталади.

Иқтисодий масалаларнинг математик моделини тузиш жараёнини амалиётда нисбатан кўп учрайдиган қуйидаги иқтисодий масалалар мисолида ўрганамиз.

Симплекс усулни қуйидаги масалани ечиш жараёнида тавсифлаймиз:

1-масала. Қуйидаги ЧПМ ни симплекс усулда ечинг.

Мақсад функцияси

$$F = -2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \min$$

Чекланишлар:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 9$$
$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 7$$
$$x_j \geq 0, \; j = \overline{1,5}.$$

Ечиш. Масаланинг тенгламалар системасини вектор формада ёзиб оламиз:

$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 = P_0$,

бунда

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

C = (-2;-l;l;-l;l).

Берилган P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 векторлар орасида учта бирлик P_3, P_4 ва P_5 векторлар бўлганлиги учун, масаланинг бошланғич таянч режасини бевосита ёзиш мумкин.

$X_0 = (0;0;0;5;9;7)$

Бирлик векторларга мос x_3, x_4 ва x_5 - ўзгарувчилар базис ўзгарувчилар бўлиб, қолган x_1, x_2, x_3 - ўзгарувчилар эса базисмас ўзгарувчилардир. Базис ўзгарувчиларга мос келувчи чизиқли функция коэффициентидан тузилган вектор $C_{баз}$(1;-1; 1) дан иборат.

Масалани қуйидаги симплекс жадвалга жойлаштирамиз. Жадвалнинг m+l қаторига режанинг баҳоси деб аталувчи ва

$$\Delta_j = z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} - c_j, \quad j = \overline{1,n}.$$

формула орқали аниқланувчи кўрсаткичлар жойлаштирилади. Агар барча $\Delta_1 \leq 0$ $\{j = 1,n)$ бўлса, топилган таянч режа оптимал ечим бўлади. Агар бирорта $j = k$ учун $\Delta_k > 0$ бўлса, у ҳолда топилган таянч ечим оптимал режа бўлмайди. Уни бошқа таянч режага алмаштириш керак. Таянч режаларни алмаштириш жараёни оптимал ечим топилгунча ёки унинг ечими йўқ эканлиги аниқлангунча такрорланади.

Симплекс усулни қўллаб, I қадамда $\underline{\max\limits_{\Delta_j > 0} \Delta_j = 3}$ га мос келувчи P_2 базисга киритилиб, P_5 вектор базисдан чиқарилади. II қадамда $\Delta_3 = \frac{1}{2}$ га мос келувчи P_1 вектор базисга киритилиб, P_3 базисдан чиқарилади ва ниҳоят III қадамда оптимал ечим топилади.

				-2	-1	1	-1	1	
i	Базис	$C_б$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	A.K.
1	P_3	1	5	1	1	1	0	0	5
2	P_4	-1	9	2	1	0	1	0	9
3	P_5	1	7	1	2	0	0	1	7/2*
m+l	$\Delta_j = F_j - C_j$		3	2	3*	0	0	0	←
1	P_3	1	3/2	1/2	0	1	0	-1/2	3*
2	P_4	-1	11/2	3/2	0	0	1	-1/2	11/3
3	P_2	-1	7/2	1/2	1	0	0	1/2	7
m+l	$\Delta_j = F_j - C_j$		-15/2	1/2*	0	0	0	-3/2	←

1	P_1	-2	3	1	0	2	0	-1	
2	P_4	-1	1	0	0	-3	1	1	
3	P_2	-1	2	0	1	-1	0	1	
m+l	$\Delta_j=F_j-C_j$		-9	0	0	- 1	0	- 1	←

Бу жадвалдан кўриниб турибдики, берилган масаланинг оптимал режаси X*=(3; 2; 0; 1; 0) бўлиб, унга чизилган функциянинг F_{min}= -9 қиймати мос келади. Топилган ечим ягонадир, чунки нолга тенг Δ_j баҳолар фақат базис векторлар учун ўринлидир.

2. Қуйидаги ЧПМни симплекс усулида ечинг:

$$F = -x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2 \\ 3x_1 + x_3 \le 5 \end{cases}$$

$x_j \ge 0$, j=1,2,3.

Берилган масалани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$F = -x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \le 1$$

$$-4x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2$$

$$3x_1 + x_3 \le 5$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

Чегаравий шартларда қўшимча ўзгарувчилар киритиб тенгсизликлардан тенгликларга ўтамиз. (Қўшимча ўзгарувчиларнинг чизиқли функциядаги коэффицентлари нолга мос келишини эслатиб ўтамиз).

$$2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$-4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2$$
$$3x_1 + x_3 + x_6 = 5$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Системани вектор формада ёзиб оламиз:

$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0$,

бунда

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$C = (1;-l;-3;0;0;0)$, $C_{баз} = (0;0;0)$.

Бирлик векторларга мос x_4, x_5 , x_6 - ўзгарувчиларни мос озод ҳадларга тенглаб, базисмас x_1 , x_2,x_3 ўзгарувчиларни эса нолга тенг деб, бошланғич таянч режани ҳосил қиламиз.

$X = (0;\ 0;\ 0;\ 1;\ 2;\ 5)$

Кейинги ҳисоблаш жараёнларини қуйидаги симплекс жадвалда бажарамиз:

i	Базис	Cб	P0	-1	1	3	0	0	0	
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	P_4	0	1	2	-1	1	1	0	0	
2	P_5	0	2	-4	2	-1	0	1	0	
3	P_6	0	5	3	0	1	0	0	1	
m+l	F_j		0	0	0	0	0	0	0	
m+2	$\Delta_j = F_j - C_j$			1	-1	-3	0	0	0	Min(-1,-3)=-3

1	P_3	3	1	2	-1	1	1	0	0	
2	P_5	0	3	-2	1	0	1	1	0	
3	P_6	0	4	1	3	0	-1	0	1	
m+1	F_j		3	6	-3	3	3	0	0	
m+2	$\Delta_j=F_j-C_j$			7	-4	0	3	0	0	Min(-4)=-4
1	P_3	3	-1/4	7/3	0	1	2/3	0	1/3	
2	P_5	0	5/3	-7/3	0	0	4/3	1	-1/3	
3	P_2	1	4/3	1/3	1	0	-1/3	0	1/3	
m+1	F_j		7/12	22/3	1	3	5/3	0	4/3	
m+2	$\Delta_j=F_j-C_j$			25/3	0	0	5/3	0	4/3	

Учинчи қадамда (m+2) - сатрда $\Delta j = Fj - Cj \leq 0$ манфий қийматлар йўқ, оптималлик шарти бажарилганлиги учун

$$X^* = (0;\ 4/3;\ -1/4;\ 0;\ 5/3;\ 0)$$

режа оптимал бўлиб, унга $F_{maxn}=25/3$ қиймат мос келади.

Бошланғич таянч режаси берилмаган чизиқли программалаш масалаларнинг чегаравий шартларидан иборат тенгламалар системасида элементар алмаштиришлар бажариб, бирор таянч ечимни (номанфий базис ечимни) топиб, сўнгра симплекс усул ёрдамида оптимал ечимни аниқлаш мумкин. Чегаравий шартларда озод ҳади манфий бўлган тенгламалар қатнашса, бундай тенгламаларнинг чап ва ўнг томонини -1 га кўпайтириб, озод ҳадни мусбат қилиб олиш керак.

Назорат саволлари

1.чизиқли программалаш масаласи тушунчаси

2.мақсад функцияси ва чекланишлар

3.чизиқли программалаш масаласини базис ечими тушунчаси

4.масаланинг базис ечимини аниқлаш

5.дастлабки симплекс жадвални қуриш

6.оптимал ечимни излаш алгоритмини симплекс жадвалда бажариш

7.оптимал ечимни таҳлил қилиш

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Ф.И.Перегудов, Ф.П.Тарасенко., “Введение в системный анализ” - Высшая школа - 1989.
2. А.Холл., и др. “Опыт методологии для системотехники” - Советское радио - 1996.
3. Оптнер С.Л. “Системный анализ для решения деловых и промышленных проблем” М-1986.
4. Антонов П. “Системный анализ” М-2004
5. Сафаева Қ. ва бошқалар. «МАТЕМАТИК ПРОГРАММАЛАШТИРИШ» фанидан масалалар тўплами. Тошкент, Молия институти. 2003. – 134 б.
6. Сафаева Қ. ва бошқалар. «Математик дастурлаш». Дарслик. Тошкент, Молия институти. 2007. – 308 б.
7. Акулич И.А. Математическое программирование в примерах и задачах. Учебное пособие для вузов. М. «Высшая школа»,1986.
8. Банди Б. Основы линейного программирования. Учебное пособие. М.: Радио и связь, 1989 .
9. Математическое программирование учебное пособие /Под. ред. Кремера Н.Ш.- М.: Финстатинформ, 1996.
10. Сакович В.А. Исследование операций. Справочное пособие Минск. «Высшэйшая школа», 1991.

2-Тажриба иши

Сунъий базис усули. М симплекс усулининг қўлланилиши.

Мақсад: Техника-иқтисодий масалаларни оптимал ечимини М (суний базис) Симплекс усулидан фойдаланиб ечиш услубини ўзлаштириш.

Топшириклар: 1. масаланинг қўйилиши билан танишиш;

2. масалани каноник кўринишида ифодалаш;

3.суний базис ўзгарувчиларини аниқлаш;

4.масалани жадвал кўринишида ифодалаш;

4. дастлабки симплекс жадвални қуриш;

5. масаланинг оптимал ечимини излаш;

6. лаборатория ишини расмийлаштириш.

Умумий назарий маълумотлар

Маълумки, каноник шаклда берилган чизиқли программалаш масаласининг шартларидан иборат бўлган системанинг ҳар бир тенгламасида базис ўзгарувчилар қатнашса, у ҳолда масаланинг таянч режасини осонликча кўрсатиш мумкин. Лекин, таянч ечимларга эга бўлган кўпгина чизиқли программалаш масалаларининг шартларида базис ўзгарувчилар (ёки бирлик векторлар) қатнашмаган бўлади. Албатта, бундай ҳолларда элементар алмаштиришлар ёрдамида берилган системага тенг кучли бўлган ҳамда базис ўзгарувчилар қатнашган тенгламалар системасини ҳосил қилиш ва дастлабки таянч режани топиш мумкин.

Каноник кўринишда берилган чизиқли программалаш масалаларининг бошланғич таянч режаини, сунъий базис усули деб аталувчи усул ёрдамида ҳам топиш мумкин ва топилган таянч режани симплекс жадвалга ёзиб, масалани симплекс усули ёрдамида ечиш мумкин бўлади.

Сунъий базис усулининг алгоритми қуйидагича:

Чизиқли программалаш масаласи шартларидаги базис ўзгарувчиси бўлмаган ҳар бир тенгламага сунъий равишда базис ўзгарувчилар қўшамиз ва бу ўзгарувчиларни мақсад функциясига (минимал қийматни топиш масаласи учун) етарлича катта бўлган мусбат М коэффициент билан киритамиз. Бундай ўзгарувчилар «сунъий базис ўзгарувчилар» деб аталади. Ҳосил бўлган масала эса берилган масалага нисбатан кенгайтирилган масала деб аталади. Масалани ечиш жараёнини симплекс жадвалда симплекс усул билан бажарамиз.

Сунъий базис усулининг иккита босқичдан (фазадан) иборат бўлиши, фазаларни бирлаштириш ва ечимини симплекс усулида топиш ғоясини юзага келтиради. Бу ғояни америкалик олим Т.Купманс амалга оширган бўлиб, у қуйидагича ифодаланади. Берилган ушбу

$$
\begin{aligned}
& c^{'}x \to \max \\
& [Ax]_i = b_i,\ i = \overline{1,m}, \\
& x \ge 0,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

каноник масала ўрнига
қуйидаги

$$
\begin{aligned}
& c^{'}x - M\sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \max \\
& [Ax]_i + x_{n+i} = b_i,\ i = \overline{1,m}, \\
& x \ge 0,
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

масалани қарайлик. Бу ерда М-етаралича даражада катта қилиб олса бўладиган мусбат сон, $x_{n+i},\ i = \overline{1,m}$, m- сунъий ўзгарувчилар. Тузилган ёрдамчи масалани симплекс усул ёрдамида ечиш мумкин, чунки $x_0 = (0,0,...,0,b_1,...,b_m)$ дастлабки базис режа.

Етарли шартлар. Ёрдамчи масалани симплекс усул ёрдамида ечимини излаганда қуйидаги ҳолатлар келиб чиқиши мумкин. Жараённинг охирги итерациясида, яъни охирги жадвалда қуйидаги ҳоллар мавжуд бўлиши мумкин:

1. Сўнги сатрдаги барча $Z_i - C_j \geq 0,\ j = \overline{1, n+m}$, барча сунъий ўзгарувчилар нолга тенг. Бу ҳолда оптимал режадан барча сунъий ўзгарувчиларни ташлаб юборсак, берилган масалани ечимига эга бўламиз;
2. Барча $Z_i - C_j \geq 0,\ j = \overline{1, n+m}$, бироқ ечимда сунъий ўзгарувчилар ичида мусбатлари бор. Бу ҳолда масала ечимга эга бўлмайди, чунки бу ҳолат, масала шартларининг биргаликда эмаслигини англатади;
3. Сўнгги сатрда манфий $Z_i - C_j < 0,\ j = \overline{1, n+m}$ мавжуд бўлиб, унга мос устундаги барча координаталар мусбат эмас, яъни $x_{ij} \leq 0,\ i = \overline{1, m}$. Бу ҳолда мақсад функцияси режалар тўпламида юқоридан чегараланмаган.

Изоҳ. М-метод ёрдамида масала ечиш жараёнида, М сонининг аниқ қиймати ҳисобланмайди. Шу сабабли, жадвалда $Z_i - C_j$ ни $Z_i - C_j = M\alpha_j + \beta_j$ кўринишида ифодалаб, унга иккита сатр ажрвтиш қулай бўлади. Биринчи сатрга α_j лар жойлаштирилса, иккинчисига β_j лар жойлаштирилади.

Мисол. Қуйидаги масалани М-метод билан ечамиз:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 5,$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 1,$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$$

Энди ёрдамчи М-масалани тузиб оламиз:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - M\sum_{i=1}^{2} x_i \to \max$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 5,$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 1,$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$$

Бу масалани $x_0 = (0,0,0,5,1)$ базис режа асосида симплекс метод билан ечамиз:

	$C_Б$ C_j		1	-2	1	-M	-M
$x_Б$ x_j		x_j	x_1	← x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	-M	5	1	4	1	1	0
x_5 →	-M	1	-1	2	1	0	1
Z	M	-6	0	-6	-2	-1	-1
	1	0	0	0	0	0	0
Z-C	M		0	-6	-2	0	0
	1		-1	2	-1	0	0
x_4 →	-M	3	3	0	-1	1	-2
x_2	-2	½	-1/2	1	½	0	½
Z	M	-3	-3	0	1	-1	2
	1	-1	1	-2	-1	0	-1
Z-C	M		-3	0	1	0	3
	1		0	0	-2	0	-1

x_1	1	1	1	0	-1/3	1/3	-2/3
x_2 →	-2	1	0	1	1/3	1/6	1/6
Z		0	0	0	0	0	0
		-1	1	-2	-1	0	-1
Z-C			0	0	0	1	1
			0	0	-2	0	-1
x_1	1	2	1	1	0	½	-1/2
x_3	1	3	0	3	1	½	½
Z		5	1	4	1	5/2	½
Z-C			0	6	0	+	+

$X_{opt} = (2,0,3)$. $c' x_{opt} = 5$.

Назорат саволлари

1.чизиқли программалашнинг М масаласи тушунчаси

2.мақсад функцияси ва чекланишлар

3.М масаланинг базис ечими тушунчаси

4.М масаланинг базис ечимини аниқлаш

5.дастлабки симплекс жадвални қуриш

6.оптимал ечимни излаш алгоритмини симплекс жадвалда бажариш

7.оптимал ечимни таҳлил қилиш

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Ф.И.Перегудов, Ф.П.Тарасенко., “Введение в системный анализ” - Высшая школа - 1989.
2. А.Холл., и др. “Опыт методологии для системотехники” - Советское радио - 1996.

3. Оптнер С.Л. “Системный анализ для решения деловых и промышленных проблем” М-1986.
4. Антонов П. “Системный анализ” М-2004
5. Сафаева Қ. ва бошқалар. «МАТЕМАТИК ПРОГРАММАЛАШТИРИШ» фанидан масалалар тўплами. Тошкент, Молия институти. 2003. – 134 б.
6. Сафаева Қ. ва бошқалар. «Математик дастурлаш». Дарслик. Тошкент, Молия институти. 2007. – 308 б.
7. Акулич И.А. Математическое программирование в примерах и задачах. Учебное пособие для вузов. М. «Высшая школа»,1986.
8. Банди Б. Основы линейного программирования. Учебное пособие. М.: Радио и связь, 1989 .
9. Математическое программирование учебное пособие /Под. ред. Кремера Н.Ш.- М.: Финстатинформ, 1996.
10. Сакович В.А. Исследование операций. Справочное пособие Минск. «Высшэйшая школа», 1991.

3-4 -Тажриба иши

Excel жадвал процессори муҳитида чизиқли программалаш масалаларини ечиш

Мақсад: Excel жадвал процессорининг чизиқли программалаш масалаларини ечиш имкониятларини ўрганиш.

Топшириқлар: «Поиск решения» воситаси ёрдамида чизикл программалаш масаласини ечимини топиш.

Бунинг учун қуйидагиларни бажармоқ зарур:

1. Масалани шартларини киритиш учун форма яратиш.
2. Дастлабки маълумотларни киритиш.
3. Алоҳида ячейкаларга математик формулаларни киритиш.

4. Поиск решения/меню Данные командаси билан масаланинг оптимал ечимини топиш.
5. Масаланинг оптимал ечимини олиш.
6. Тажриба ишини расмийлаштириш

1. оптималлаш масаласига мисол

В качестве примера задачи, связанной с поиском наилучшего решения, рассмотрим задачу выбора оптимальной структуры посевных площадей нескольких сельскохозяйственных культур. Эта задача является типичным примером задачи оптимального распределения ресурсов, часто возникающей при производстве различной продукции.

Описание задачи: в овощеводческом хозяйстве набор выращиваемых культур и объемы их производства определяются наличием пригодных для использования земель, допустимых затрат труда, заказами на отдельные виды культур, спросом на них, а также экономической эффективностью производства. При определении структуры посевных площадей необходимо обеспечить максимальную экономическую эффективность, исходя из имеющихся ресурсов.

Мазкур масалани ечиш учун қуйидаги маълумотлар зарур:

- Экиш учун ажратиладиган ер майдони;
- Меҳнат ресурсларининг мавжудлиги, забзавотларни ишлаб чиқариш учун ажратиладиган, йил давомида ва сезон (забзавотларни йиғиб олиш) даврида;
- Ҳар бир забзавот турига сарфланадиган меҳнат ресурслари;
- Ҳар бир экин турининг ҳосилдорлиги;
- Ҳар бир тур экинга талаблар ва етиштиришнинг максимум ҳажми;
- Ҳар бир экин турини ишлаб чиқаришдан келадиган фойда;
- Оптималлик мезони, қайси ечим оптимал эканлигини аниқловчи.

Айтайлик, масалани ечиш мобайнида қуйидаги маълумотлардан фойдаланамиз:

а) етиштириладиган маҳсулотлар:

- карам;
- бодринг;
- помидор;
- ошқовоқ;
- бошқа тур забзавотлар.

Ҳар бир экин тури учун қуйидагилар аниқланган:

б) фойдаланиладиган ермайдони 313 га.

в) меҳнат ресурслари забзавот етиштириш учун зарур бўлган бир йиллик 45000 одам-кун, шу жумладан сезон пайтиад - 8600 одам-кун.

г) оптималлик критерияси забзавотларни етиштириш натижасида олинадиган максимум фойда.

Масалани ечиш учун зарур бўлган барча маълумотлар (устунлар A дан G гача) жойлаштирилади расм 1, электрон жадвалда “Пользователь” номи билан жойлаштирилган.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1				Исходные данные					Оптимальное решение		
2	Наименование	Заказ	Максим.	Урожай-	Затраты труда		Прибыль		Площадь	Выход	
3			спрос	ность	всего	особо	с 1 га		посева	продукции	
4	культуры	(ц)	(ц)	(ц/га)	(чел.-дн./га)		(у.е.)		(га)	(ц)	
5	Капуста	31000	45000	325	75	26	69		130,00	42250,00	13
6	Огурцы	4500	7000	92	138	22	39		70,00	6440,00	7
7	Помидоры	6500	10000	176	346	35	38		40,00	7040,00	4
8	Свекла	5900	9500	206	158	34	14		30,00	6180,00	3
9	Другие овощи	1500	8000	52	91	40	10		30,00	1560,00	3
10											
11	Посевная площадь:			313	га				Прибыль:	13940	у.е.
12	Трудовые ресурсы (всего):			45000	чел.-дн.						
13	Трудовые ресурсы (особо):			8600	чел.-дн.						

Расм. 1. Масалани ечиш учун дастлабки маълумотлар ва уларнинг электрон жадвалнинг листида жойлашиши.

2. Масаланинг математик модели

Масалани математик расмийлаштириш, қуйидаги белгилашлардан фойдаланамиз:

N – етиштириладиган экин турлари, $j \in \mathbf{N}$;

M – ресурслар тўплами (ер майдони, меҳнат ресурслари ва бошқалар), $i \in \mathbf{M}$;

$\mathbf{A}_{ij}$ – j – экин турини етиштириш учун сарфланадиган i-чи ресурс харажати, 1 гектар учун;

$\mathbf{B}_i$ – i-чи тур ишлаб чиқариш ресурсларини ҳажми;

$\mathbf{C}_j$ – j-чи экин туридан олинадиган фойда, 1 гектардан;

dj – j-чи маҳсулотга бўлган талабнинг ҳажми;

Dj – j-чи маҳсулотга бўлган талабнинг энг юқори ҳажми;

Uj – j-чи экиннинг ҳосилдорлиги.

Масаланинг ўзгарувчилари (бошқарувчи, изланадиган миқдорлар):

$\mathbf{X}_j$ – j-чи экин учун ажратиладиган ер майдони, 10 марта кичрайтирилган.

Масаланинг модели умумий кўринишда қуйидагича бўлади.

Мақсад функцияси:

$$\sum_{j \in N} 10 * \mathbf{C}_j * \mathbf{X}_j \rightarrow \max$$

Ресурсларга бўлган чекланишлар:

$$\sum_{j \in N} 10 * \mathbf{A}_{jj} * \mathbf{X}_j \le \mathbf{B}_i \qquad \forall\, i \in \mathbf{M}$$

Маҳсулот ҳажмига бўлган чекланишлар:

$$\mathbf{d}j \le \sum_{j \in N} 10 * \mathbf{U}_j * \mathbf{X}_j \le \mathbf{D}_j \qquad \forall\, j \in \mathbf{N}$$

бутун сон кўринишидаги ечимларни олиш учун қуйидаги ўзгарувчини киритамиз (бутун қийматли ўзгарувчи):

$$\mathbf{X}_j \in Z \qquad \forall\, j \in \mathbf{N}$$

Деимак, тузган масаламиз аралаш туипдаги бутун сонли чизиқли программалаш масаласи ҳисобланади.

Умумий математик модель асосида конкрет моделни ҳосил қиламиз ва унинг ечимини излаймиз.

Ўзгарувчилар::

$\mathbf{X}_1$ – карам экиш учун ажратиладиган ер майдони (га);

$\mathbf{X}_2$ – бодринг экиш учун ажратиладиган ер майдони (га)

$\mathbf{X}_3$ – помидор экиш учун ажратиладиган ер майдони (га);

$\mathbf{X}_4$ – қовоқ экиш учун ажратиладиган ер майдони (га);

$\mathbf{X}_5$ – бошқа тур забзовотлар экиш учун ажратиладиган ер майдони (га).

Изоҳ: ер майдонини 10 марта кичрайтириб олинганлигини ҳисобга олиш керак.

Мақсад функцияси:

$$690*\mathbf{X}_1 + 390*\mathbf{X}_2 + 380*\mathbf{X}_3 + 140*\mathbf{X}_4 + 100*\mathbf{X}_5 \rightarrow \max$$

Чекланишлар:

- Умумий ер майдонига:

$10 * (\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_4 + \mathbf{X}_5) \leq 313$

- Умумий меҳнат ресурсларига:

$750*\mathbf{X}_1 + 1380*\mathbf{X}_2 + 3460*\mathbf{X}_3 + 1580*\mathbf{X}_4 + 910*\mathbf{X}_5 \leq 45000$

- Сезон давридаги ресурс ҳажмига:

$260*\mathbf{X}_1 + 220*\mathbf{X}_2 + 350*\mathbf{X}_3 + 340*\mathbf{X}_4 + 400*\mathbf{X}_5 \leq 8600$

- Ҳар бир экинга бўлган талабга:

$3250 * \mathbf{X}_1 \geq 31000$

$920 * \mathbf{X}_2 \geq 4500$

$1760 * \mathbf{X}_3 \geq 6500$

$2060 * \mathbf{X}_4 \geq 5900$

$520 * \mathbf{X}_5 \geq 1500$

- Ҳар бир экиннинг энг юқори талабига:

$3250 * \mathbf{X}_1 \leq 45000$

$920 * \mathbf{X}_2 \leq 7000$

$1760 * \mathbf{X}_3 \leq 10000$

$2060 * \mathbf{X}_4 \leq 9500$

$520 * \mathbf{X}_5 \leq 8000$

- Бутун сонли қийматга:

$\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3$, $\mathbf{X}_4$, $\mathbf{X}_5$ - бутун.

3. масалани ечишни ташкил қилиш

Даставвал электро жадвалнинг битта листига “Пользователь” номини беринг ва электрогн жадвални расмийлаштиринг 1-расмга асосан (в колонки I, J ва K колонкаларга сон қийматларни киритиш зарур эмас!).

Ўзгарувчилар сифатида K5:K9 катаклардан фойдаланамиз ва унга дастлабки маълумот сифатида нол қийматларни ёзамиз.

I5 катакга “=K5∗10” формулани ёзамиз ва унинг нусхасини K6:K9 катакларга кўчирамиз. Бу катакларда экин турлари учун ажратилган ер майдонларининг ҳажми акс этади.

J5 катакга “=I5∗D5” формулани ёзамиз ва унинг нусхасини J6 : J9 катакларга кўчирамиз. Бу катакларда хар бир тур экиннинг ер майдонидан олинадиган ҳосилдорлик акс этади.

J11 катакга фойдани оптимал қийматини аниқлайдиган формулани киритамиз =СУММПРОИЗВ(G5 : G9 ; I5 : I9). Бу мақсад функциясининг қиймати ҳисобланади.

Электрон жадвалнинг бирорта листига “Модель” номини берамиз. Бу листда моделни чекланишларини ўнг томонини формулалари жойлашади.

“Модель” листида тушунтириш матнлари ва формулалари жойлашади 2-расмда кўрсатилган.

	A
1	Ограничение на площадь посевов
2	=СУММ(Пользователь!$I$5 : $I$9)
3	Ограничение на общий объем трудовых ресурсов
4	=СУММПРОИЗВ(Пользователь!$I$5 : $I$9 ; Пользователь!$E$5 : $E$9)
5	Ограничение на объем трудовых ресурсов в напряженный период
6	=СУММПРОИЗВ(Пользователь!$I$5 : $I$9 ; Пользователь!$F$5 : $F$9)

Расм. 2. Электрон жадвалнинг “Модель” номли листида тушунтириш матнлари ва формулаларини жойлашиши.

Excel нинг оптималлаш блокини ишини инициализация қилиш зарур менюнинг “Сервис, Поиск решения...” командалари ёрдамида. Натижада экранда “Поиск решения” ойнаси пайдо бўлади.

“Установить целевую ячейку” ойнаси майдонида оптималлаш критериясини ячейкасини адреси кўрсатилади – бизнинг мисолимизда бу ячейка J11. Бу ячейканинг ёнида оптималлаш белгиси ўрнатилади (максимум ёки минимум).

“Изменяя ячейки” майдонида масаланинг ўзгарувчиларига мос келадиган ячейкалар соҳаси кўрсатилади, яъни К5:К9. “Предположить” кнопкаси босилганда қаралаётган майдонда мақсад функциясини қийматини расмийлаштириш билан боғлиқ ячейкалар кўрсатилади.

Масаланинг чекланишлари “Ограничения” майдонида кўрсатилади.

Янги чекланишлар “Добавить...” кнопкасини босиш билан расмийлаштирилда, натижада “Добавление ограничения” дарчаси очилади, ўнг ва чап томонларининг жойлари кўрсатилади.

Бизнинг ечаётган мисолимизда 14 та чекланишни аниқлаш зарур:

1. $K$5 : $K$9 = целое
2. Модель!$A$3 <= $D$11 экин майдонига чекланиш
3. Модель!$A$5 <= $D$12 меҳнат ресурсларига чекланиш
4. Модель!$A$7 <= $D$13 меҳнат ресурсларига чекланиш сезон пайтидаги
5. $J$5 >= $B$5 ишлаб чиқариш маҳсулоти ҳажмига чекланишлар гурухи (не менее, не более)

6. $J$6 >= $B$6
7. $J$7 >= $B$7
8. $J$8 >= $B$8
9. $J$9 >= $B$9
10. $J$5 <= $C$5
11. $J$6 <= $C$6
12. $J$7 <= $C$7
13. $J$8 <= $C$8
14. $J$9 <= $C$9

“Добавить” кнопкасини босиш билан расмийлаштирилган чекланишлар масалани шартига қўшилади.

Масаланинг барча параметрларини расмийлаштириб бўлгандан кейин “Выполнить” кнопкаси босилади. “Выполнить” кнопкасини босиш пайтида жорий лист “Пользователь” бўлиши зарур.

Натижада оптимал ечим олинади, Расм 1. да кўрсатилган.

4. Параметры поиска решения

Иногда, после формирования модели, приходится уточнять параметры метода решения задачи. Для получения такой возможности следует нажать кнопку “Параметры...”, в результате чего открывается окно “Параметры поиска решения”.

С помощью данного окна можно уточнить некоторые параметры используемого метода решения. Изменять стандартные установки целесообразно лишь в том случае, если Вы достаточно хорошо разбираетесь в методах математического программирования. В большинстве случаев при решении задач небольшой размерности вполне подходят стандартные установки.

Тем не менее дадим краткие пояснения смысла некоторых параметров.

“Максимальное время” определяет предельное время поиска решения (не более 32767 секунд). Если в течение указанного времени оптимальное решение не будет найдено, процесс поиска прерывается и следует запрос о необходимости продолжить или прекратить решение задачи. В последнем случае Вы получите некоторое промежуточное, возможно, недопустимое решение.

“Итерации”. Процесс поиска оптимального решения носит пошаговый, итеративный характер (не более 32767 итераций). Решение, получаемое в ходе очередной итерации, основывается на полученном при выполнении предыдущей. При исчерпании числа итераций процесс поиска решения прерывается (см. предыдущий пункт).

Время решения и требуемое число итераций зависят от начальных значений переменных. Чем ближе они к оптимальным, тем быстрее будет получено решение.

“Относительная погрешность”. Данное поле должно содержать число из интервала (0, 1). Точность определяет близость полученного значения целевой функции оптимальному. Чем больше точность (т.е. чем ближе указанное число к нулю), тем большее число итераций и большее время требуется для поиска оптимального решения.

“Допустимое отклонение” определяет допуск на отклонение от оптимального решения, если на переменные наложено условие целочисленности.

Из остальных возможностей стоит отметить лишь пункт “Линейная модель” - линейность всегда стоит указывать явно, поскольку это позволяет в несколько раз сократить время решения задачи и, скорее всего, получить более точный ответ.

Кнопки “Сохранить модель...” и “Загрузить модель...” позволяют сохранять параметры сформированной модели в какой-либо области электронной таблицы.

Более детальные пояснения Вы можете получить из документации на Excel 7.0 или пользуясь справочной системой Excel.

Задание: обнулите значения переменных (клетки K5:K9), установите признак линейности и снова выполните поиск решения. Теперь он займет гораздо меньше времени.

MS Excel дан фойдаланиб оптималлаш масаласини ечиш

Мисол: Стол ва шкафларни ишлаб чиқаришга мўлжалланган мебел фабрикаси зарурий ресурслардан фойдаланади. Ресурслардан фойдаланиш нормативи қуйидаги жадвалда келтирилган:

Ресурслар	Битта маҳсулот учун ресурсни сарфлаш ноормаси		Ресурснинг умумий миқдори
	Стол	Шкаф	
Ёғоч :			
1 тип	0,2	0,1	40
2 тип	0,1	0,3	60
Трудоемкость (одам-соат)	1,2	1,5	371,4
Маҳсулотни битта бирлигини сотишдан келадиган фойда (сўм)	6	8	

Аниқлаш талаб қилинади, мебел фабрикаси қанча стол ва шкаф ишлаб чиқариши зарур энг кўп фойда олиш учун.

Масалани ечиш учун унинг математик моделини қуриш зарур:

1. математик расмийлаштириш:

x1 – ишлаб чиқариладиган столлар сони,

x2 – ишлаб чиқариладиган шкафлар сони

фабрикада ишлаб чиқариладиган стол ва шкафлардан олинадиган жамий фойда қуйидагича ифодаланади, мақсад функцияси:

z=6*x1+8*x2→максимум.

Ўзгарувчи x1 и x2 параметрларга қўйиладиган чекланишлар:

- Стол ва шкафларни ишлаб чиқариш манфий сон бўлиши мумкин эмас, демак: x1, x2 ≥ 0.

- Ресурсларни норма сарф-харажатлари имкони бор захирадан ошиб кетмаслиги зарур, демак:

$0.2x1 + 0.1x2 \le 40$

$0.1x1 + 0.3x2 \le 60$

$1.2x1 + 1.5x2 \le 371.4$

Шундай қилиб, масаланинг математик модели қуйидаги кўринишга келади:

Максималлаштирилсин

$z = 6x1 + 8x2$

қуйидаги чекланишларда:

$0.2x1 + 0.1x2 \le 40$

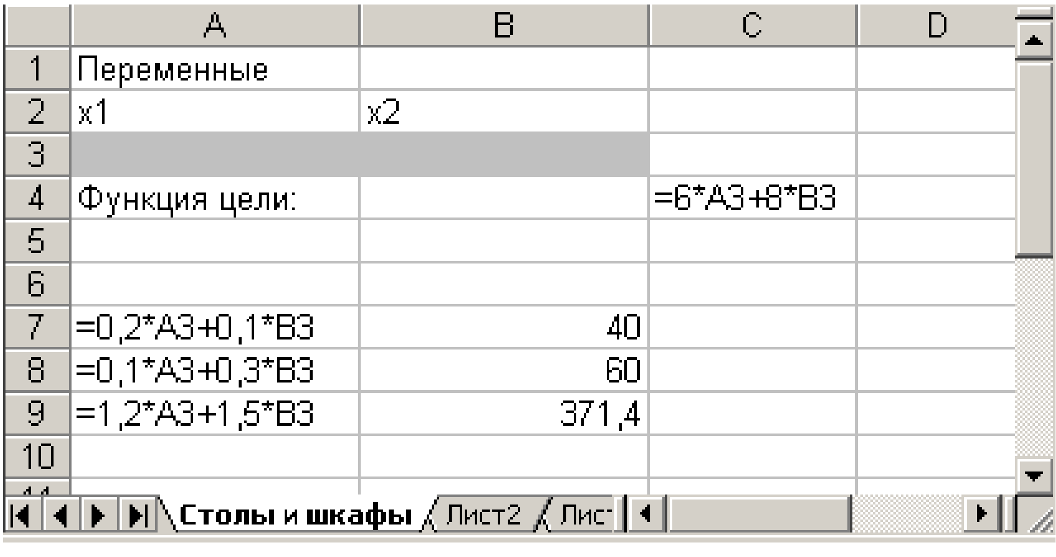
$0.1x1 + 0.3x2 \le 60$

$1.2x1 + 1.5x2 \le 371.4$

Тузилган модел чизиқли программалаш масаласи ҳисобланади.

MS Excel ёрдамида тмасалани ечиш.

1. A3 ва B3 ячейкалар x1 ва x2 ўзгарувчилар учун ажратилсин (рис. 1).



	A	B	C	D
1	Переменные			
2	x1	x2		
3				
4	Функция цели:		=6*A3+8*B3	
5				
6				
7	=0,2*A3+0,1*B3	40		
8	=0,1*A3+0,3*B3	60		
9	=1,2*A3+1,5*B3	371,4		
10				

Расм. 1. Мақсад функцияси, чекланишлар ва ўзгарувчилар учун ажратилган диапазонлар.

2. C4 ячейкага мақсад функциясини формуласи киритилсин: =6*A3+8*B3, ячейкалар A7:A9 га чекланишларни чап томони киритилсин:

=0,2*A3+0,1*B3

=0,1*A3+0,3*B3

= 1,2*A3+1,5*B3,

ячейкалар B7:B9 – чекланишларнинг ўнг томони киритилсин. (расм.1.)

3. **Сервис/Поиск решения** командаси танлансин ва очилган **Поиск решения** мулоқот ойнаси тўлдирилсин расм 2 да кўрсатилгандек.

Агар **Сервис** менюсида **Поиск решения** командаси бўлмаса, у ҳолда ўрнатишни қуйидагича амалга ошириш зарур

Сервис/ Надстройки/ Поиск решения.

Чекланишларни киритиш учун **Добавить** кнопкасини босинг.

Внимание! В диалоговом окне **Параметры поиска решения** необходимо установить флажок **Линейная модель** (Рис.3.)

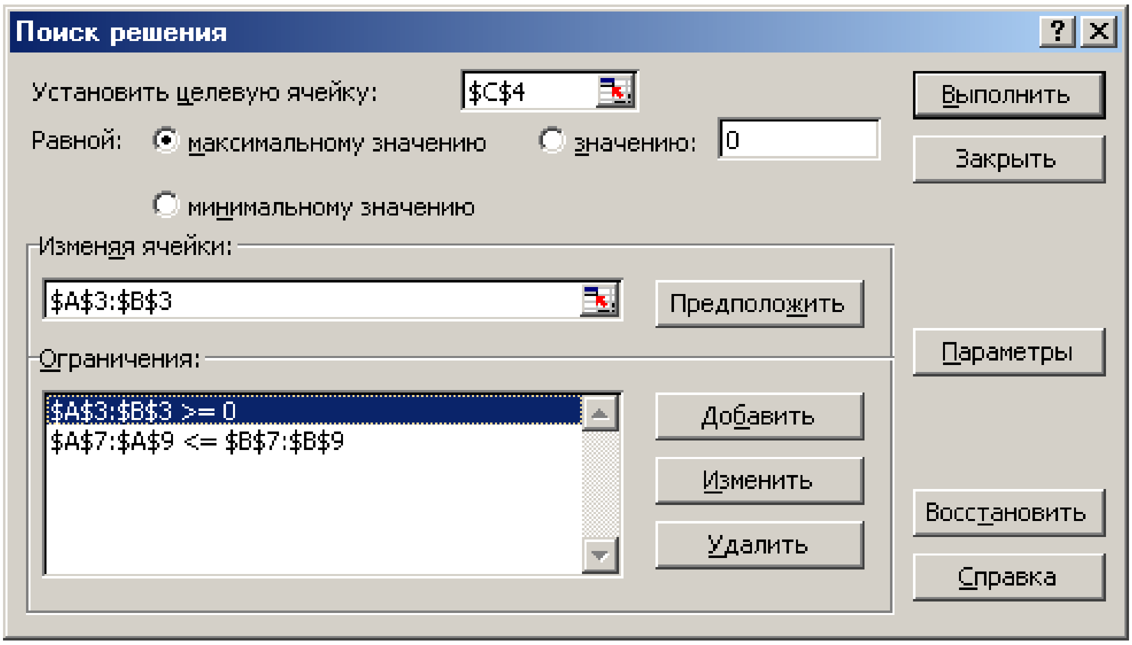


Рис. 2. **Поиск решения** мулоқот ойнаси, фабрикадаги фойдани максималлаш масаласи

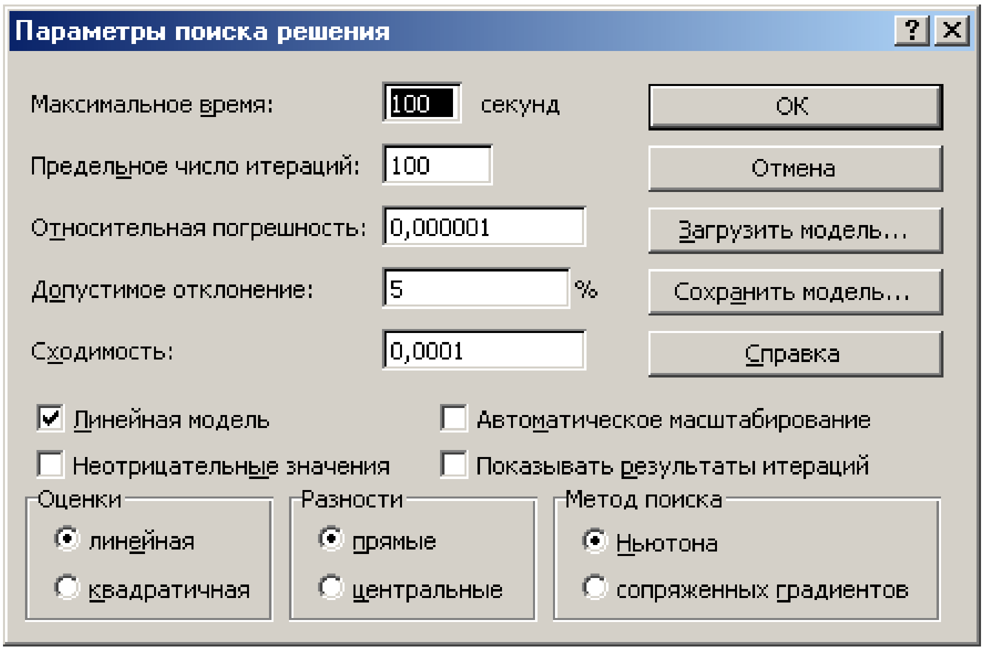


Рис 3. Ечимни излаш параметрлари

4. После нажатия кнопки **Выполнить** открывается окно **Результаты поиска решения**, которое сообщает, что решение найдено (рис. 4).

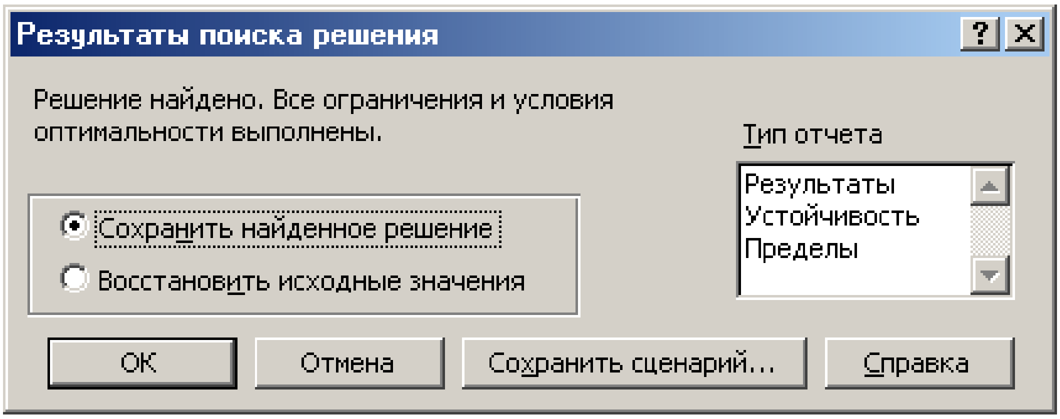
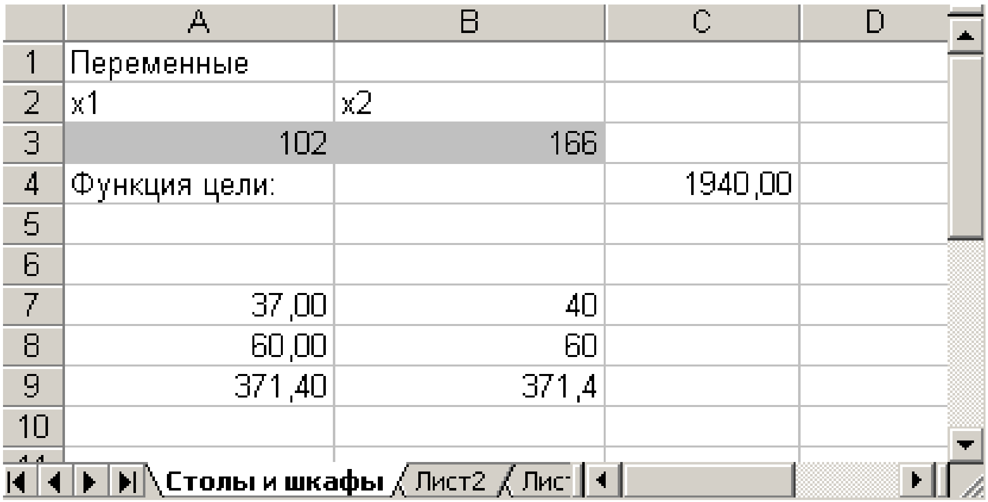


Рис. 4. Ечимни излаш натижаси

5. Результаты расчета задачи представлены на рис. 5, из которого видно, что оптимальным является производство 102 столов и 166 шкафов Этот объем производства принесет фабрике 1940 руб. прибыли.



	A	B	C	D
1	Переменные			
2	x1	x2		
3	102	166		
4	Функция цели:		1940,00	
5				
6				
7	37,00	40		
8	60,00	60		
9	371,40	371,4		
10				

Расм. 5. Ҳисоблаш натижаси

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. Фратер Г. Excel 5.0: Пер. с нем. Киев: Торгово-издательское бюро BHV, 1995. 560 с.
2. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. СПб.: BHV-Санкт-Петербург, 1997. 384 с.
3. Поляков В.В., Карпов А.В., Кузнецов В.А. Решение оптимизационных задач в среде табличного процессора Quattro Pro: Методические указания. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 1994. 37 с.

5-тажриба иши
Функциянинг эктремум нуқталарини аниқлаш

Мақсад: Функцияни экстремумини топишнинг аналитик усули, алгоритмик усулини ўрганиш.

Топшириқлар: 1. Функцияни таҳлил қилиш;

2. аналитик усулда экстремум нуқталарини аниқлаш;

3. алгоритмик усулда экстремум нуқталарини аниқлаш;

4. алгоритмни ишлаб чиқиш;

5. алгоритмни кодини ёзиш;

6.дастурни отладка ва тестлаш;

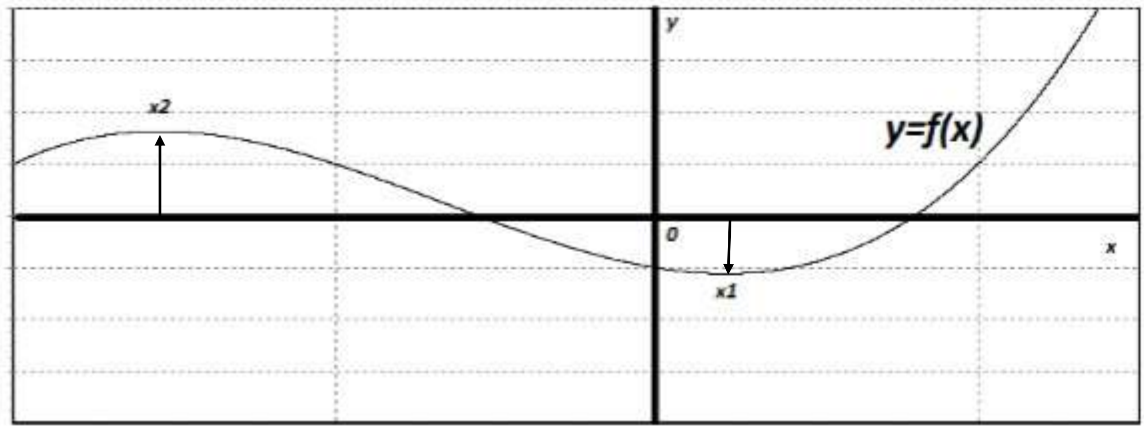
7.лаборатория ишини расмийлаштириш.

Умумий назарий маълумотлар

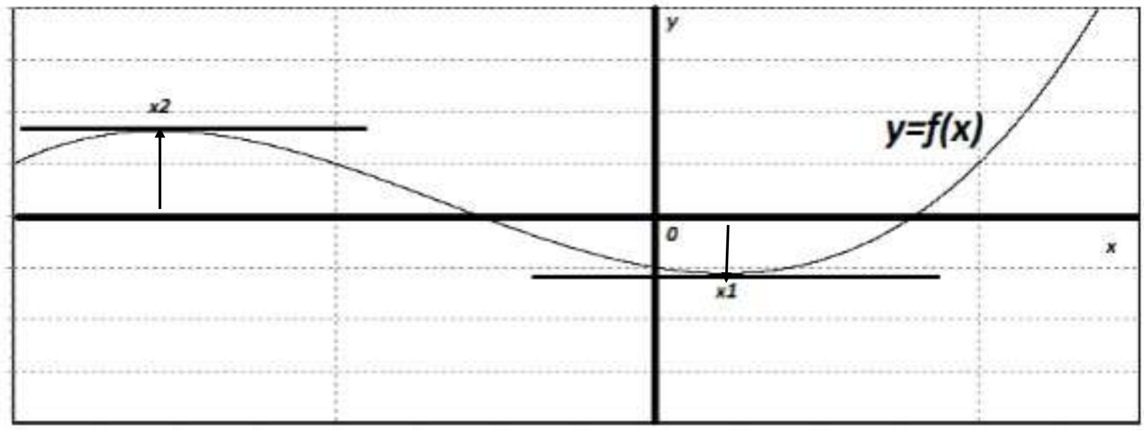
1. Функцияни экстремумини топишнинг аналитик усули

Функциянинг экстремумини аниқлашнинг содда алгоритми қуйидаги сайтда келтирилган: bugaga.net.ru.

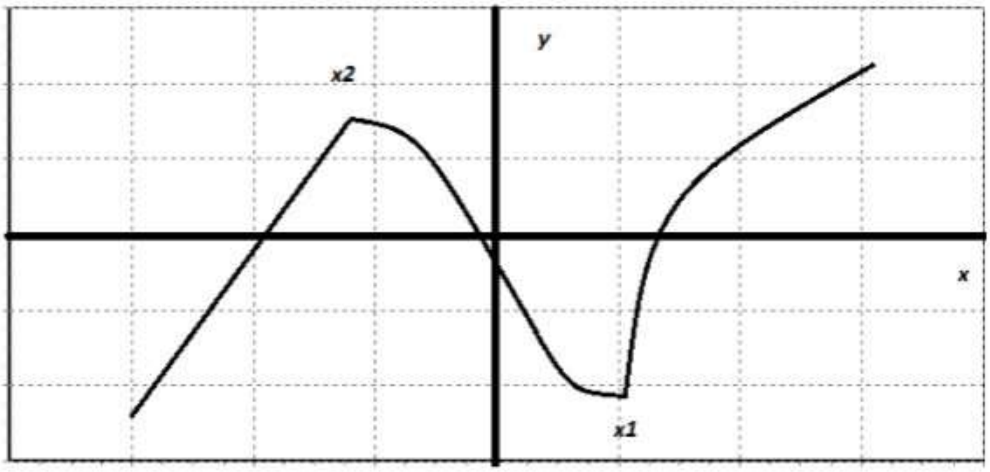
Фукциянинг экстремумини аниқлашга мисоллар:



Функция х2 нуқтада максимумга эга, ч1 нуқтада эса минимумга эга.



Экстремум нуқталарда функция графигига ўтказилган уринмалар 0Х ўқи билан параллел бўлади, бурчак коэффциенти нолга тенг бўлади.



Функциянинг минимум ва максимум нуқталари

Лемма: нуқта **x= x0 y=f(x) фнукциянинг минимуми дейилади, агар x) нуқта атрофида шундай нуқта топиладики унда қуйидаги тенгсизлик бажарилади: f(x) ≥ f(x0) (f(x01)≤f(x) ≥ f(x02)).**

Лемма: нуқта **x= x0 y=f(x) фнукциянинг максимуми дейилади, агар x(0) нуқта атрофида шундай нуқта топиладики унда қуйидаги тенгсизлик бажарилади:**

f(x)≤ f(x0), (f(x01) ≥ f(x) ≤ f(x02)).

Нуқта x0 атрофида деган тушунча, бу x0 нуқтани ўз ичига олган ва жуда яқин бўлагн нуқталар ҳисобланади.

Масалан, x=2, нуқта учун унинг атрофидаги энг яқин нуқталар бўлиши мумкин 1 ва 3 ёки 1.5 ва 2.5.

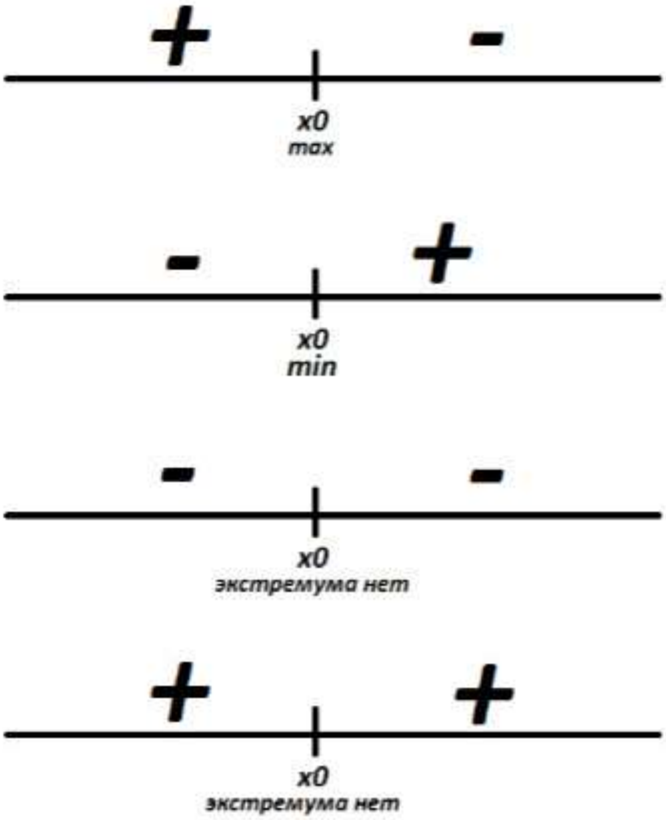
Функциянинг экстремумлари

Теорема: Экстремумнинг етарлилик шарти**: айтайлик функция y=f(x) бирорта аниқланган интервалда узликсиз ва дифференциалланувчи бўлсин ва критик нуқтага эга бўлсин, яни x0. У ҳолда:**

- **Агар бу нуқтанинг атрофида шундай нуқта топилсаки унда x < x0 қийматда f'(x) < 0 бўлади, яна x > x0 нуқтада f'(x)>0 бажарилса, у ҳолда x0 – нуқта**
  y= f(x) функциянинг минимум нуқтаси дейилади.

- **Агар бу нуқтанинг атрофида шундай нуқта топилсаки унда $x < x0$ қийматда $f'(x) > 0$ бўлади, яна $x > x0$ нуқтада $f'(x) < 0$ бажарилса, у ҳолда x0 – нуқта**
  $y= f(x)$ функциянинг максимум нуқтаси дейилади.
- **Агар x0 нуқтанинг ўнг ва чап томонида функциянинг биринчи тартибли ҳосиласи ўзининг ишорасини ўзгартирмаса, демак функция бу нуқтада экстремумга эга эмас дейилади.**

Мисол:



Узликсиз дифференциалланувчи $y= f(x)$ функцияни экстремумини аниқлашнинг аналитик алгоритми:

- Функциянинг биринчи тартибли ҳосиласини аниқлаймиз y'.
- Ҳосилани нолга неглаб критик нқталарини топамиз x01 ва x02 критик нуқталарда фуункциянинг ишоралари қарама қарши бўлса бу оралиқда экстремум мавжуд, акс ҳолда экстремум йўқ..

Функциянинг экстремум қийматларини аниқлашга мисоллар

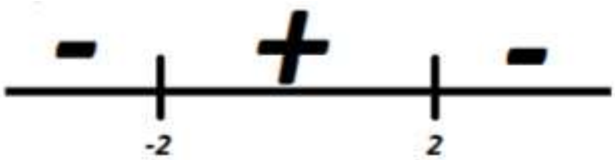
1) $y= 7+ 12*x - x^3$ функцияни экстремуми аниқлансин.

Ечиш:

а) $y' = 12 - 3x^2$,

б) $y' = 0$, бундан $x = \pm 2$,

в) сонлар ўқида тасвирланиши:



Нуқта= -2 – функциянинг минимум нуқтаси, нуқта x= 2 – функциянинг максимум нуқтаси.

Жавоб: x= -2 - функциянинг минимум нуқтаси, x= 2 - функциянинг максимум нуқтаси.

2) Қуйидаги функциянинг эктемумлари аниқлансин.

$$y = x - 2\sqrt{x-2}$$

Ечиш: Берилган функция узликсиз. Функцияни ҳосиласини топиш алгоритмидан фойдаланамиз:

а)

$$y' = 1 - \frac{2}{2\sqrt{x-2}}$$

$$y' = 1 - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

$$y' = \frac{\sqrt{x-2} - 1}{\sqrt{x-2}}$$

б) x = 2 нуқтада ҳосила мавжуд эмас, чунки нолга бўлиш мумкин эмас,

$$y'(2) = 1 - \frac{2}{2 \times 0}$$

функцияни аниқланиш соҳаси: [2; +∞], бу нуқтада экстремум йўқ, чунки нуқтанинг атрофи аниқланмаган. Ҳосилани нолга тенглаб аргументнинг қийматини аниқлаймиз:

$$\frac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{x-2}}=0$$

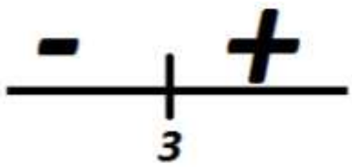
$$\sqrt{x-2}-1=0$$

$$\sqrt{x-2}=1$$

$$x-2=1$$

$$x=3$$

в) сонлар ўқида стационар нуқталарни белгилаб ҳосилани ишорасини аниқлаймиз:



г) экстремум нуқтаси кўрсатилган графикни таҳлил қиламиз.

Нуқта x= 3 - функциянинг минимум нуқтаси.

Жавоб: x= 3 - функциянинг минимум нуқтаси.

3) функциянинг экстркмум нуқтаси аниқлансин y= x - 2cos(x) , аргументнинг аниқланиш соҳаси -π ≤ x ≤ π.

Ечиш: Фунцкия узликсиз, дифференциалланувчи, ҳосла олиш алгоритмидан фойдаланамиз:

а) y'= 1 + 2sin(x),

б) ҳосилани нолга тенглаб аргументнинг қийматларини аниқлаймиз:

1 + 2sin(x)= 0, sin(x)= -1/2,

яъни -π ≤ x ≤ π, у ҳолда: x= -π/6, -5π/6,

в) аниқланган стационар нуқтани сонлар ўқида ифодалаб ҳосилани ишорасини аниқлаймиз (стационар нуқта атрофида):

г) графикга асосан экстремум нуқталарни аниқлаймиз.

Нуқта x= -5π/6 - функциянинг максимум нуқтаси.

Нуқта x= -π/6 - функциянинг минимум нуқтаси.

Жавоб: x= -5π/6 - функциянинг максимум нуқтаси,

x= -π/6 - функциянинг минимум нуқтаси.

4) Қуйидаги функциянинг экстремум нуқталарини аниқлансин:

$$y = \frac{x^4 + 16}{x^2}$$

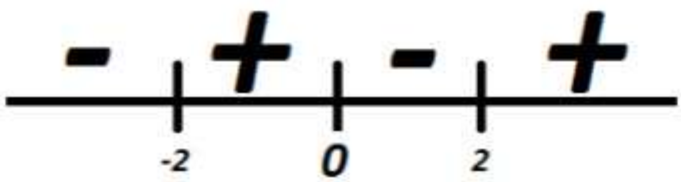
Ечим: Мазкур функция x= 0 нуқтада узилишга эга. Ҳосила олиш алгоритмидан фойдаланамиз:

а)

$$y' = \frac{(x^4+16)'x^2 - 2x(x^4+16)}{x^4} = \frac{4x^3x^2 - 2x^5 - 32x}{x^4}$$
$$= \frac{2x^5 - 32x}{x^4} = \frac{2x(x^4-16)}{x^4} = \frac{2x(x^2-4)(x^2+4)}{x^4}$$
$$= \frac{2(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x^3}$$

б) ҳосилани нолга айлантирадиган аргументнинг кийматини аниқлаймиз: y'= 0 при x= ±2,

в) стационар нуқтани сонлар ўқида ифодалаб ҳосилани ишорасини аниқлаймиз (нуқта атрофидаги):



г) графикдан экстремум нуқталарни аниқлаймиз.

Нуқта x= -2 функциянинг минимум нуқтаси.

Нуқта x= 2 - функциянинг минимум нуқтаси.

Нуқта x= 0 да функция мавжуд эмас.

Ответ: x= ±2 - точки минимума функции.

Экстремумни аниқлаш. Функция y = f(x) бирор интервалда ўсувчи (камаювчи) деб аталади, агар $x_1 < x_2$ да $(f(x_1) < f(x_2))$ $(f(x_1) > f(x_2))$ тенгсизлик ўринли бўлса.

Агар дифференциалланувчи функция $y = f(x)$ $[a, b]$ кесмада ўсувчи (кмаювчи), у ҳолда унинг ҳосиласи бу кесмада $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$).

Нуқта x_o – функциянинг локал максимум (минимум) нуқтаси деб аталади, агар x_o, нуқтанинг атрофидаги барча нуқталарда $f(x) \leq f(x_o)$ ($f(x) \geq f(x_o)$) тенгсизлик ўринли бўлса.

Функциянинг минимум ва максимум нуқталари функциянинг экстремум нуқталари деб аталади, функциянинг бу гуқталардаги қиймати унинг экстремумлари дейилади.

Экстремума нуқта.

Экстремумнинг етарлилик шарти. Агар нуқта x_o $f(x)$ функциянинг экстремум нуқтаси бўлса, у ҳолда $f'(x_o) = 0$, ёки $f(x_o)$ мавжуд эмас. Бундай туқталар критик нуқталар дейилади, функция критик нуқталарда аниқланган бўлади. Функциянинг экстремумини критик нуқталар орасидан излаш зарур.

Первое достаточное условие. Айтайлик x_o - критик нуқта. Агар $f'(x)$ критик нуқтадан x_o ўтиш мобайнида ишорасини ўзгартирса плюсдан минусга, у ҳолда x_o нуқтада функция максимум эга, акс ҳолда - минимум. Агар функция ишорасини ўзгартирмаса x_o нуқтада экстремум йўқ.

Второе достаточное условие. Айтайлик функция $f(x)$ биринчи ттартибли ҳосилага эга, $f'(x_0)$ мавжуд, x_o нуқта атрофида иккинчи тартибли ҳосилани аниқлаймиз. Агар $f''(x_o) = 0$, $f''(x_o) > 0$ ($f''(x_o) < 0$), у ҳолда x_o нуқта функциянинг локал минимуми (максимуми) бўлади.

$[a,b]$ кесмада $y = f(x)$ функция энг кичик ёки энг катта қийматига ёки критик нуқталарга эга бўлиши мумкин, ёки $[a,b]$ кесманинг чегаравий нуқталарида.

Мисол. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14$. Функциянинг экстремум қийматлари аниқлансин.

Ечиш. Функция дифференциалланувчи бўлганлиги сабабли $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x - 2)(x - 3)$, унинг критик нуқталари $x_1 = 2$ ва $x_2 = 3$. Экстремумлар фақат манашу нуқталарда бўлиши мумкин. Шундай қилиб

$x_1 = 2$ нуқтадан ўтишда ҳосила ишорасини плюсдан минусга ўзгртирса, у ҳолда бу нуқтада функция максимумга эга. $x_2 = 3$ нуқтадан ўтишда ҳосила ишорасини минусдан плюсга ўзгартиради, демак бу $x_2 = 3$ нуқтада функции минимумга эга. Функциянинг қийматларини бу $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$ нуқталарда ҳисоблаб, функциянинг экстремумларини аниқлаймиз: максимум $f(2) = 14$ ва минимум $f(3) = 13$.

Функциянинг экстремум нуқталарини аниқлашнинг алгоритмик усули:

```
//Lab-5. Algoritmik  usul
//C++ da funktciyaning Max va Min nuqtalarini  aniqlash dasturi
// IF buyrug'i bilan
#include<iostream.h>
//#include<conio.h>
#include<math.h>
int main()
 {
    float a,b,x,h,y1,y2,y3;
    int i,k,n;
    cout<<" a,b,n= "<<endl;
    cin>> a>>b>>n;
    cout<<endl;
     h=(b-a)/n;
     cout<<"   h="<<h<<endl;
     i=1;k=0;
     x=a;
     y1=x*x*x*x+20*sin(x)-6*x*x-10;
     x=x+h;i=i+1;
     y2=x*x*x*x+20*sin(x)-6*x*x-10;
     x=x+h;i=i+1;
     y3=x*x*x*x+20*sin(x)-6*x*x-10;
  m6://cout<<"   "<<y1<<"   "<<y2<<"   "<<y3<<endl;
    if ((y1<y2)&&(y2>y3)) { x=x-h; cout<<"  x = "<<x<<"  y2 = "<<y2<<"  k=1
maximum"<<endl;k=1;}
    if ((y1>y2)&&(y2<y3)) { x=x-h; cout<<"  x = "<<x<<"  y2 = "<<y2<<"  k=2
minimum"<<endl;k=2;}
     y1=y2; y2=y3;
     x=x+h;
     y3=x*x*x*x+20*sin(x)-6*x*x-10;
     i=i+1;
```

```
   if (i<=n) goto m6;
   if (k=0) cout<<"   v intervale [a,b] min  i max net"<<endl;
m7:k=0;
return 0;
}
```

Назорат саволлари

1. фунцкциянинг критик нуқталари

2.функциянинг экстремум нуқталари

3. функциянинг критик нуқталарини аниқлашнинг аналитик усуллари

4. функциянинг критик нуқталарини аниқлашнинг алгоритмик усули

5. Функциянинг биринчи, иккинчи тартибли ҳосилалари

6. функциянинг ўсувчилиги ёки камаювчилигини аниқлаш.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1. *Кудрявцев Л. Д.* Гл. 1. Дифференциальное исчисление функций одного переменного // Математический анализ. Т. 1. С. 190—195.
2. *Фихтенгольц Г. М.* Гл. IV. Исследование функций с помощью производных // Курс дифференциального и интегрального исчисления. — 8-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — Т. 1. — С. 294—305. — 5000 экз. — ISBN 5-9221-0156-0

6-Тажриба иши

Чизиқли алгебраик тенгламалр системасини ечишнинг тўғри методлари

Мақсад *Чизиқли тенгламалар системасини (ЧТС) Гаусс усулида ечиш услубини ўрганиш, ҳисоблаш алгоритмини қуриш, программасини ёзиш, программани отладка қилиш, ЭҲМда натижани олиш ва текшириш.*

Топширик *А) Чизиқли тенгламалар системасини Гаусс усулида ечиш методикасини, кетма-кетлигини тавсифлаш;*

Б) ЧТС учун Гаусс усулини алгоритмини қуриш;

С) программасини ёзиш ва ЭХМда отладка килиш;

Д) берилган вариантни отладка килинган программа ердамида ЭХМда натижани олиш;

Е) натижани ЭҲМ ҳамда калькулятор ёрдамида текшириш;

З) ҳисобот езиш

1. Чизиқли тенгламалар системасини Гаусс усулида ечиш

Бизга қуйидаги чизиқли тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

Белгилаймиз:

$$Ax = B, \quad A = \{a_{ij}\}, \quad B = \{b_i\}, \quad i, j = 1,2,\ldots,N.$$

A матрицага *B* вектор устунни бириктириб кенгайтирилган *C* матрицани ҳосил қиламиз:

$$C = \{c_{ij}\},\ i = 1,2,\ldots,N,\ j = 1,2,\ldots,N+1,$$

бу ерда $c_{ij} = a_{ij}\ ,\ \ i, j = 1,2,\ldots,N;\ \ c_{i\,n+1} = b_i,\ i = 1,2,\ldots,N.$

ЧТСни Гаусс усулида ечиш икки босқичда амалга оширилади:

I. Боскич: Гауссни тўғри йўли. Бу боскич асосан номаълумларни йўқотиш деб аталади ва бу икки кисмдан иборат бўлиб *N-1* марта амалга оширилади:

А) *C* матрицани ҳар бир қаторини, қаторнинг биринчи элементига бўлиб (БЎЛИШ) чиқамиз

$$R = c_{il};\ c_{ij} = c_{ij} / R;\ i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,n+1;$$

Б) Матрицани l+1 – чи каторидан бошлаб барча каторларнинг ўрнига мазкур қаторни l-қатордан айирмаси ёзилади, яъни

$$c_{ij} = c_{lj} - c_{ij}\ ,\ i = l+1, l+2, \ldots, N;\ j = 1,2,\ldots, n+1;$$

Натижада C матрицанинг ўрнида учбурчак матрица ҳосил бўлади.

II. Боскич. Гаусснинг тескари йўли деб аталади ва номаълумларнинг қийматлари аниқланади:

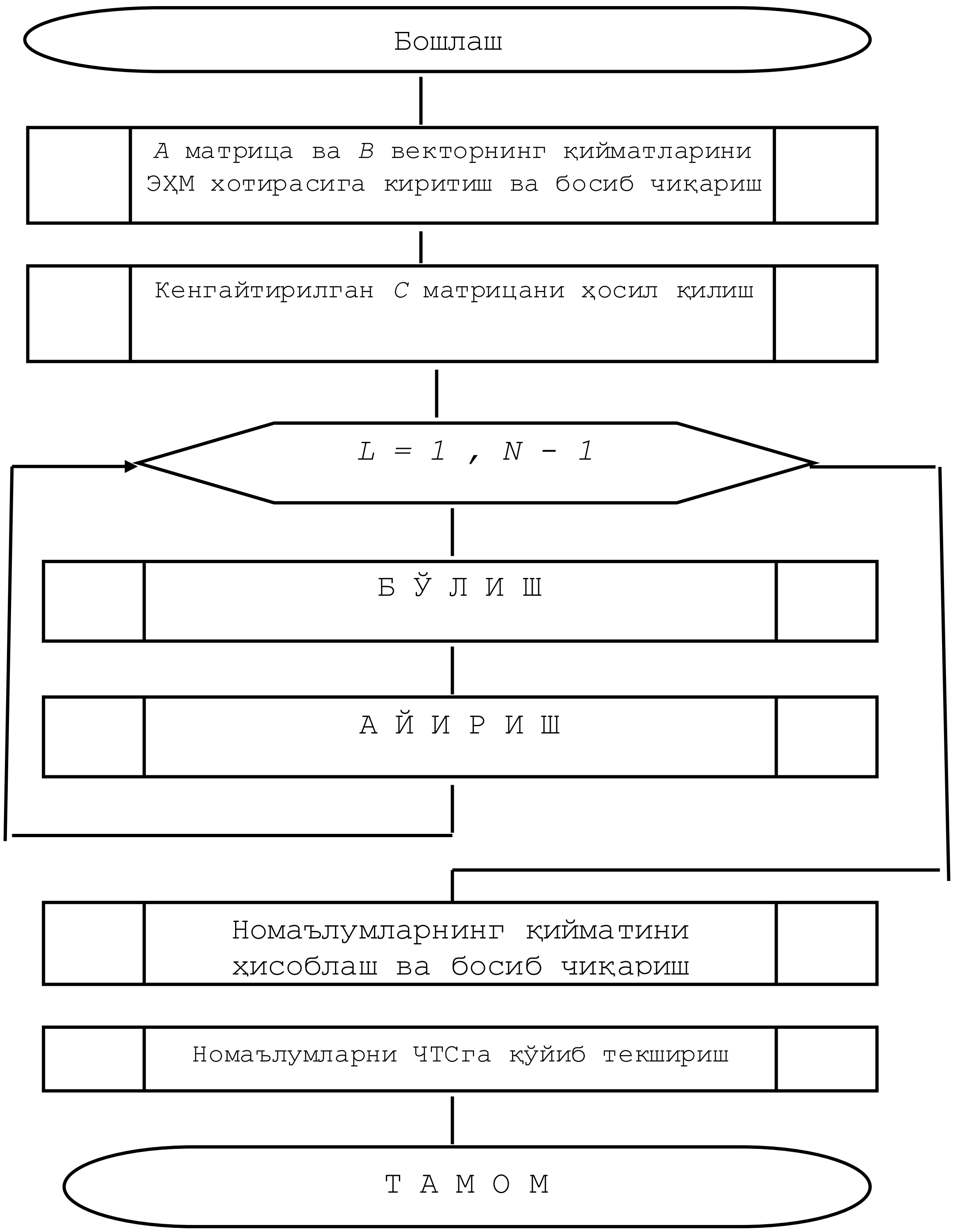
$$x_n = \frac{c_{n\,n+1}}{c_{nn}}$$ ни қиймати ҳисобланади;

Гаусснинг тескари йўли бўйича қолган номаълумларнинг қийматлари қуйидагича аниқланади:

$$x_i = c_{in-1} - S;\ S = \sum_{j=i+1}^{n} x_j c_{ij}\ ,\quad i = n-1, n-2, n-3, \ldots, 1.$$

ЧТСни Гаусс усулида ечишнинг йириклашган алгоритми блок-схема кўринишида қуйидаги расмда келтирилган.

Номаълумларнинг сон қийматлари босиб чиқарилади. Натижа $x = \{x_i\}, i = 1,2,..,n$ ларни ЧТС га қўйиб текширамиз. Агар $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, $i = 1,2,\ldots, n$ тенглик 0.001 аниқлик билан бажарилса ечим тўғри деб ҳисобланади, акс ҳолда масала ечилмаган деб ҳисобланади.


Бошлаш
A матрица ва B векторнинг қийматларини ЭҲМ хотирасига киритиш ва босиб чиқариш
Кенгайтирилган C матрицани ҳосил қилиш
L = 1 , N - 1
Б Ў Л И Ш
А Й И Р И Ш
Номаълумларнинг қийматини ҳисоблаш ва босиб чиқариш
Номаълумларни ЧТСга қўйиб текшириш
Т А М О М

2. Чизиқли тенгламалар системасини тескари матрицадан фойдаланиб ечиш

Мақсад: *Чизиқли тенгламалар системасини тескари матрицани хисоблаш усулидан фойдаланиб ечиш кўникмасини ҳосил қилиш*

Топшириқ: *Матрицанинг тескарисини ҳисоблаш алгоритмини Гаусс усулидан фойдаланиб ишлаб чиқиш, натижани ЭҲМ ёрдамида олиш ва текшириш*

Бизга қуйидаги чизиқли тенгламалар системаси (ЧТС) берилган бўлсин:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}
$$

Чизиқли тенгламалар системасини матрица кўринишида ифодаланиши:

$$Ax = B, \quad A = \{a_{ij}\}, \quad B = \{b_i\}, \quad i, j = 1,2,\ldots,N.$$

$$X = A^{-1}B.$$

$A^{-1} - A$ матрицанинг тескарисини Гаусс усулидан фойдаланиб ҳисоблаган мақсадга мувофиқдир. Маълумки, дастлабки матрицани унинг тескарисига кўпайтмаси бирлик матрицани ҳосил қилади, яъни

$A \cdot A^{-1} = E,$ бу ерда E - бирлик матрица.

N – тартибли ЧТС ни озод ҳадларини кетма-кет N – тартибли бирлик матрицанинг устун элементлари билан алмаштириб, мос равишда N маротаба Гаусс усулида ечамиз:

K=1

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0
\end{aligned}
$$

K=2

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0
\end{aligned}
$$

. . . .

K=N

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 1
\end{aligned}
$$

Натижада олинган ечимлар тўплами $X = \{x_{ik}\},\ i,k = 1,2,\ldots,N$ тескари матрицанинг элементларини ҳосил қилади, яъни

$$A^{-1} = \{x_{ik}\},\ i,k = 1,2,\ldots,N,$$

x_{i1} –	Е матрицани 1-устунини ЧТС озод ҳадлари қилиб олингандаги ечимлар, I = 1,2, . . . , n;
x_{i2} –	Е матрицани 2-устунини ЧТС озод ҳадлари қилиб олингандаги ечимлар, I = 1,2, . . . , n;
x_{in} –	Е матрицани n-устунини ЧТС озод ҳадлари қилиб олингандаги ечимлар,

	I = 1,2, . . . , n.

Берилган ЧТС учун A^{-1}- тескари матрицани Гаусс усулида ҳисоблаш ва номаълумларни аниқлашнинг йириклашган, модуллик алгоритмини блок-схемаси қуйидаги 13-расмда келтирилган.

Белгилашлар:

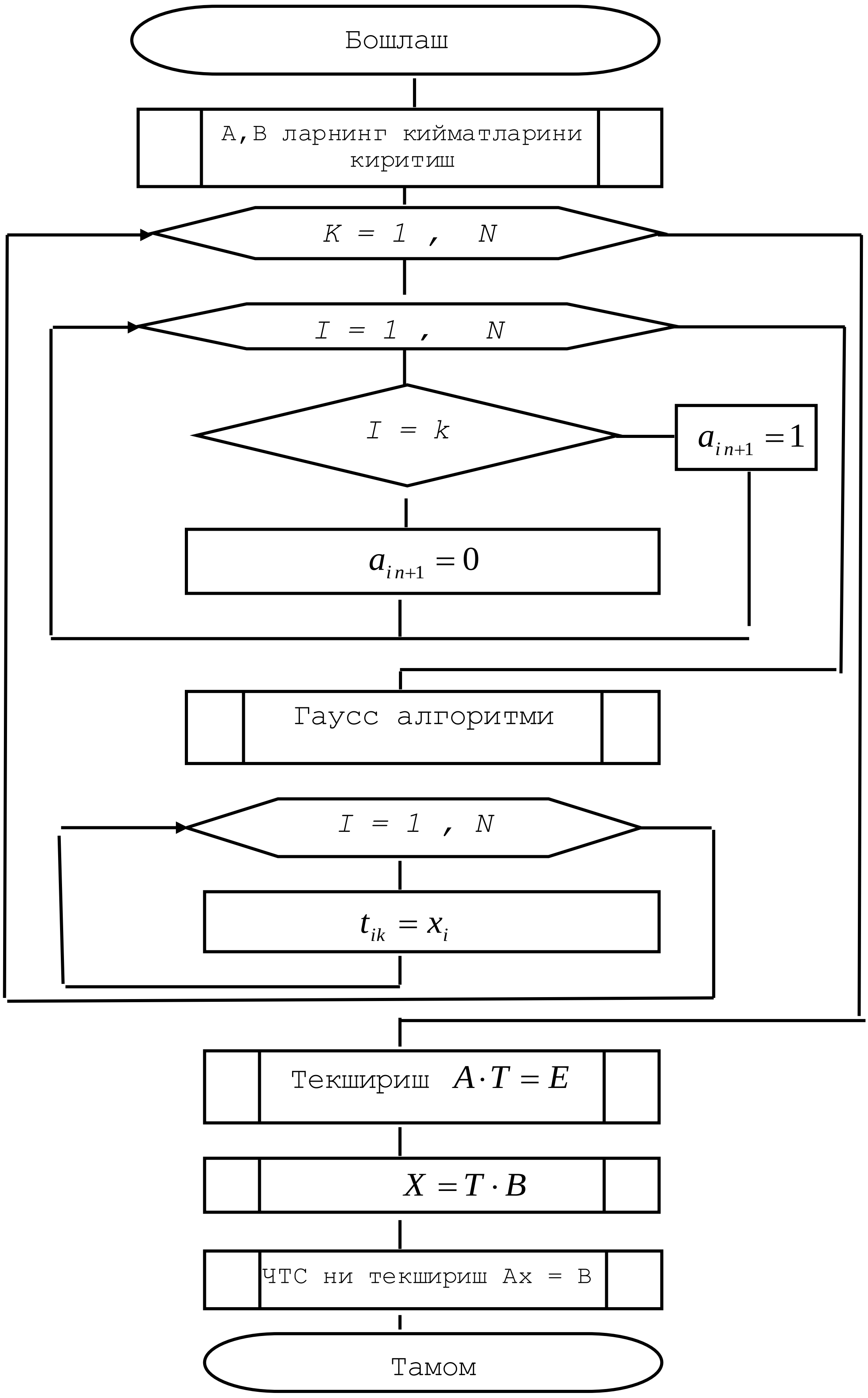
$$A=\{a_{ij}\},\quad B=\{b_i\},\ E=\{e_{ij}\},\ i,j=1,2,\ldots,N.$$

$$T=A^{-1};\ T=\{t_{ij}\},\ t_{ij}=x_{ik},\quad i,k=1,2,\ldots,N,\ j=k$$

$$X=T\cdot B;\quad X=\{x_i\},\quad i=1,2,\ldots,N.$$

ЧТС ни ечишнинг тўғри усуллари (мустақил ўзлаштирилади)

1. ЧТС ни Крамер (детерминантлар) формуласидан фойдаланиб ечиш
2. ЧТС ни Тескари матрицадан фойдаланиб ечиш
3. ЧТС ни Гаусс усулидан фойдаланиб ечиш
4. ЧТС ни Бош элементлар методидан фойдаланиб ечиш
5. ЧТС ни Квадрат илдиз методидан фойдаланиб ечиш
6. ЧТС ни Халецкий схемасидан фойдаланиб ечиш
7. ЧТС ни Итерация (оддий) усулидан фойдаланиб ечиш
8. ЧТС ни Зейдел методидан фойдаланиб ечиш
9. ЧТС ни Тескари матрицасини Халецкий усулида аниқлаб ечиш
10. ЧТС ни Тескари матрицасини Гаусс усулида аниқлаб ечиш


Бошлаш
A,B ларнинг кийматларини киритиш
K = 1 , N
I = 1 , N
I = k
$a_{i\,n+1} = 1$
$a_{i\,n+1} = 0$
Гаусс алгоритми
I = 1 , N
$t_{ik} = x_i$
Текшириш $A \cdot T = E$
$X = T \cdot B$
ЧТС ни текшириш Ax = B
Тамом

Назорат саволлари

1. ЧТС ни Крамер (детерминантлар) формуласидан фойдаланиб ечиш алгоритми
2. ЧТС ни Тескари матрицадан фойдаланиб ечиш алгоритми
3. ЧТС ни Гаусс усулидан фойдаланиб ечиш алгоритми
4. ЧТС ни Бош элементлар методидан фойдаланиб ечиш алгоритми
5. ЧТС ни Квадрат илдиз методидан фойдаланиб ечиш алгоритми
6. ЧТС ни Халецкий схемасидан фойдаланиб ечиш алгоритми
7. ЧТС ни Итерация (оддий) усулидан фойдаланиб ечиш алгоритми
8. ЧТС ни Зейдел методидан фойдаланиб ечиш алгоритми
9. ЧТС ни Тескари матрицасини Халецкий усулида аниқлаб ечиш алгоритми
10. ЧТС ни Тескари матрицасини Гаусс усулида аниқлаб ечиш алгоритми

Ҳисоботнинг таркиби:

1. Масаланинг қўйилиши, мақсаднинг аниқланиши
2. Бажариш топшириғи
3. Масалани ечишнинг қискача назарий кисми
4. Масалани ЭХМда ечиш алгоритми, блок-схемаси
5. Масалани алгоритмик тилда ёзилган программаси
6. Программани отладка ва тестлаш жараени
7. ЭХМ ёрдамида олинган натижалар
8. Натижаларни калькулятор ёрдамида текшириш натижалари
9. Хулоса
10. Адабиётлар

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати

1.Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 665 с.

2.Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике: Учеб.пособие для техникумов. – 2-е изд., перераб. И доп. – М. Высш.школа, 1990. – 208 с.

3. Соловейчик Ю.Г. и др. Численные методы решения систем уравнений. Новосибирский ГТУ, 2004.

4. http://www.pdffactory.com

7-Тажриба иши
Ўйинлар назарияси

Мақсад: Ўйинлар назарияси методлари ва алгоритмларини қарор қабул қилиш масалаларига тадбиқ қилиш амалиётини ва кўникмасини ҳосил қилиш.

Топшириқлар: 1. Тизимли таҳлил ва ўйинлар назарияси.

2. Матрицали ўйинлар.

3. Ўйиннинг қуйи ва юқори баҳолари.

4. Матрицали ўйиннинг ечими.

5. Матрицали ўйинларни симплекс усулида ечимини топиш

Ўйинлар назарияси ҳақида қисқача маълумот

Чизиқли, чизиқсиз ва динамик дастурлаш масалаларида ечимлар қабул қилиш маълумотларнинг тўлалигини назарда тутган ҳолда амалга оширилади. Бошқача айтганда, масаладаги номаълум параметрларни топиш учун зарур бўлган дастлабки маълумотлар аниқ бўлади. Бу масалаларда ечимлар қабул қилиш аниқлик шароитида амалга оширилади.

Иқтисодий амалиётдаги кўп масалаларда ноаниқликда ечим қабул қилиш зарурияти туғилади. Ноаниқликда ечим қабул қилиш икки хил ҳолатда амалга оширилиши мумкин:

1. Ечим қабул қилувчи шахс (ЕҚҚШ) об-ҳавога, инфляция даражасига, бозордаги нарх-навога, давлатдаги сиёсий ҳолатга ва бошқа «табиат» ҳолатларига қараб ечим қабул қилади. Бу ерда «табиат» деганда ечим қабул қилиш учун зарур бўлган ташқи ҳолатлар мажмуасини тушунамиз. ЕҚҚШнинг «табиат»ни турли ҳолатига қараб ечим қабул қилиш жараёнини ўйин деб қараш мумкин. Бундай ўйин, яъни рақобат мавжуд бўлмагандаги ечимлар қабул қилиш назарияси «табиатга қарши

ўйин» деб аталади. Бу ўйинда «табиат» ечим қабул қилувчи шахс учун рақиб ролини бажарса ҳам, у онгли рақиб бўла олмайди, у ўз ютуғига бефарқ бўлади ва ўз рақиби хатоларидан фойдаланиш нияти ҳам бўлмайди.

2. Ечимлар қабул қилиш рақобат мавжуд бўлган вазиятда амалга оширилади. Бу ҳолда икки ёки ундан кўпроқ қатнашувчилар ўзаро рақобатда бўлиб, уларнинг ҳар бири рақибидан иложи борича кўпроқ ютуқ олишга ҳаракат қилади. Улардан ҳар бирининг эришган натижалари қолган томонларнинг ўз мақсадига эришиш йўлидаги ҳаракатига боғлиқ бўлади. Бундай иқтисодий жараёнлар «рақобатли» деб аталади.

Шахмат, шашка, домино ва бошқа ўйинлар рақобатли жараёнларни ифодаловчи ўйинлар ҳисобланади. Бундай ўйиндаги ҳар бир юришда бир ўйинчининг ютуғи иккинчисининг юришига боғлиқ бўлади. Ўйиннинг мақсади ўйинчиларнинг биттасини ютишидан иборат.

Иқтисодиётдаги рақобатли ҳолатларга таъминотчи ва истеъмолчилар, сотувчилар ва харидорлар, банклар ва мижозлар ораларидаги муносабатлар мисол бўлаолади. Бу муносабатлардаги рақобатли ҳолатлар томонларнинг интилишлари зиддиятлилигидан келиб чиқади. Рақобатли ҳолатларда ечим қабул қилувчи шахс фақат ўз мақсадини кўзлашдан ташқари рақибининг мақсадини назарга олиши ҳамда унинг қабул қилиши мумкин бўлган ечимини олдиндан кўра билиши керак. Шундай қилиб, рақобатли ҳолатлардаги масалаларни ечиш учун илмий асосланган усуллар талаб қилинади.

Рақобатли ҳолатларнинг математик назарияси **«Ўйинлар назарияси»** деб аталади.

Ўйинлар назариясининг асосий тушунчалари. Математиканинг рақобатли ҳолатларини, яъни қанташувчиларнинг манфаатлари қарама-қарши ёки бир-бирига мос келмайдиган ҳолатларни ўрганувчи бўлими - **«ўйинлар назарияси»** деб аталади. Ўйинлар назарияси - рақобатли ҳолатда қатнашаётган ҳар бир ўйинчига энг катта ютуққа (ёки энг кичик ютқазишга) эришиш учун қилинадиган ҳаракатларнинг энг яхшисини (оптималини) аниқлаш учун йўлланма беришга имкон берувчи математик назариядир.

Кўпгина иқтисодий жараёнларга ҳам ўйинлар назарияси нуқтаи-назаридан қараш мумкин. Масалан, ўйин иштирокчилари - бир хил турдаги маҳсулот ишлаб чиқарувчи корхоналар, таъминотчилар ва истеъмолчилар бўлиб, ўйининг ютуғи - ишлаб чиқариш фондларининг самарадорлиги, даромад маблағлари, маҳсулотнинг баҳоси ёки таннархи бўлиши мумкин.

Ўйинлар назарияси нисбатан ёш фанлар қаторига киради. Унинг пайдо бўлиши фон Нейман ва Моргенштернларнинг 1944 йил нашр этилган «Иқтисодий жараёнлар ва ўйинлар назарияси» монографияси билан боғлиқ. Кейинчалик ўйинлар назарияси амалий тадбиқларга эга бўлган мустақил йўналиш сифатида ривожланди.

Шуни таъқидлаш лозимки, ўйинлар назариясининг усуллари ва хулосалари кўп марта такрорланадиган рақобатли ҳолатларга нисбатан ишлатилади.

Амалда, рақобатли ҳолатларни математик усуллар ёрдамида тадқиқ этишда, муҳим бўлмаган фактларни ташлаб юбориб, ҳолатларнинг содда модели тузилади.

Ўйин - рақобатли ҳолатларни ифодаловчи моделдан иборат бўлиб, унинг ҳақиқий рақобатдан фарқи шундан иборатки, у маълум бир қоида асосида амалга оширилади.

Ҳар бир ўйинчининг маълум мақсадга эришиш ниятида бажариши мумкин бўлган ҳаракатлари **ўйиннинг қоидалари** деб аталади.

Ўйиннинг натижаларини миқдорий баҳолаш **тўлов** деб аталади. Ўйиннинг моҳияти шундан иборатки, унда ҳар бир ўйинчи ўзига энг яхши натижа берувчи ечимни танлашга ҳаракат қилади.

Ўйинда иккита ёки ундан кўп иштирокчиларнинг манфаатлари тўқнашиши мумкин. Шунга мувофиқ, у **икки ўйинчили** ва **кўп ўйинчили** бўлиши мумкин.

Агар ўйинда фақат иккита ўйинчи қатнашса, бундай ўйин **«жуфтли ўйин»** деб аталади.

Агар жуфтли ўйинда бир ўйинчининг ютуғи иккинчи ўйновчининг ютқазувига тенг бўлса, бундай ўйин **«0- суммали ўйин»** деб аталади. 0-суммали ўйинда ўйинчиларнинг умумий капитали ўзгармайди, фақат ўйин давомида қайта тақсимланади ва шу сабабли ютуқлар йиғиндиси нолга тенг бўлади, яъни В1+ В 2+...+ В н=0 бу ерда в н - н-ўйинчининг ютуғи.

Нол суммали бўлмаган ўйинда ўйинчилар ютуқлари йиғиндиси нолдан фарқли бўлади. Масалан, лоторея ўйинида, ўйинчилар қўйган бадалнинг бир қисми лоторея ташкилотчиларига берилади. Шунинг учун

В 1+ В 2+.+ В н<0 тенгсизлик ўринли бўлади.

Биз бу ерда амалий аҳамияти катта бўлган ўйинлар - жуфт ўйинларни қараш билан чекланамиз. Ўйин иштирокчиларини А ва Б орқали белгилаймиз.

Ўйин жараёнида рўй бериши мумкин ҳар қандай ҳолатга мувофиқ равишда ўйновчининг қўллаши мумкин бўлган қоидалар бирлашмаси **«стратегия»** деб аталади. Стратегиянинг сонига қараб, ўйинлар **чекли** ёки **чексиз** ўйинларга бўлинади. **Оптимал стратегия** деб, тайин бир ўйинчига, ўйин бир неча марта такрорланганда энг катта мумкин бўлган ўртача ютуқни таъминловчи стратегияга айтилади.

Матрицали ўйинни чизиқли программалаш усули билан ечиш.

Ҳар қандай *а* - суммали жуфт ўйинни қуйидаги матрица кўринишида ифодалаш мумкин:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Бу матрицанинг қаторлари I ўйинчининг мумкин бўлган A_1, A_2 ... , A_m юришларини устунлари эса II ўйинчининг мумкин бўлган B_1, B_2, ... ,B_n юришларига мос келади. $A=(a_{ij})$ матрица тўловлар матрицаси ёки ютуқ матрицаси деб аталади. Матрицанинг ҳар бир a_{ij} элементи I ўйинчи A_i юришни танлаб, II ўйинчи B_j юришни танлагандаги I ўйинчининг ютуғини (II ўйинчининг ютқазувини) англатади.

Ўйиннинг мақсади I ўйинчини максимал ютуққа ва II ўйинчини минимал ютқазувга эришишларини таъминловчи энг маъқул стратегияни танлашдан иборат.

Агар I ўйинчи бирор A_i стратегияни танласа у ҳеч бўлмаганда

$$a_i = \min_j a_{ij}$$

ютуққа эришади. Буни ҳисобга олиб бу ўйинвчи ўзининг энг кам ютуқларини максималлаштирувчи, яъни

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} \qquad (1)$$

тенгликни таъминловчи юришни танлайди.

Бу ерда α катталик I ўйновчининг кафолатланган ютуғидан иборат бўлади ва ўйиннинг қуйи баҳоси деб аталади. Бу баҳони таъминловчи i_0 стратегия махмин деб аталади.

II ўйновчи, ўз навбатида, ўзининг энг катта мумкин бўлган ютқазувларини минималлаштирувчи, яъни

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} \qquad (2)$$

тенгликни таъминловчи юришни танлайди β катталик ўйининг юқори баҳоси деб аталади: бу баҳони таъминловчи j_0 стратегия минимах дейилади. Агар α = β бўлса, яъни

$$V = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

тенглик бажарилса, у ҳолда V ўйиннинг бахоси деб аталади. Бу шартни қаноатлантирувчи A матрицанинг $a_{j_0 i_0}$ элементи ўйиннинг эгар нуқтаси деб аталади.

Демак матрицали ўйин эгар нуқтага эга бўлса, унинг ечимини махсмин ва минимахс усуллари билан топилади.

1-мисол. Берилган матрицали ўйин учун қуйи ва юқори баҳоларни ҳамда ўйиннинг оптимал бахосини топинг.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Матрицанинг каторларидаги энг кичик элементлар қуйидагидан иборат:

$$\min_j (3, \ 1, \ 2) = 1,$$

$$\min_j (2, \ 4, \ -1) = -1,$$

$$\min_j (5, \ 7, \ 6) = 5$$

Демак ўйиннинг қуйи баҳоси

$$\alpha = \max_i(\min_j a_{ij}) = \max_i(1, \ -1, \ 5) = 5$$

бўлади. Энди ҳар бир устундаги энг катта элементларни топамиз.

$$\max_i (3, \ 2, \ 5) = 5,$$

$$\max_i (1, \ 4, \ 7) = 7,$$

$$\max_i (2, \ -1, \ 6) = 6$$

У ҳолда ўйиннинг юқори баҳоси қуйдагига тенг бўлади.

$$\beta = \min_j (\max_i a_{ij}) = \min_j(5, \ 7, \ 6) = 5$$

Ушбу ўйиндаги қуйи ва юқори баҳолар ўзаро тенг. Демак, ўйиннинг оптимал баҳоси

$V = \alpha = \beta = 5$ бўлади.

Ушбу бахони (ечимни) таъминловчи a_{31} элемент ўйиннинг эгар нуқтаси ва A_3 ва B_1 стратегиялар оптимал стратегия бўлади.

Агар ютуқлар матрицаси эгар нуқтага эга бўлмаса, у холда махмин ва минимах усуллар билан ўйиннинг ечимини топиб бўлмайди. Бу ҳолда ўйиннинг ечимини топишда аралаш стратегиялардан топилади. I ўйновчининг аралаш стратегияси деб компонентлари қуйидаги

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m} \qquad (4)$$

шартларни қаноатлантирувчи $X = (x_1, x2, \ldots, x_m)$ векторга айтилади. Бунда ҳар бир x_i I ўйинчининг A_i юришни танлаш эҳтимолини билдиради. II ўйинчининг аралаш стратегияси деб компонентлари қуйидаги

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, x_y \geq 0, \quad j = \overline{1,n} \qquad (5)$$

шартларни қаноатлантирувчи $Y=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ векторга айтилади. Бунда ҳар бир y_j II ўйинчининг B_j юришни танлаш эҳтимолини билдиради.

Аралаш стратегиялар усулида I ўйинчи A_i юришни танлаб, II ўйинвчи B_j юришни танлагандаги I ўйинчининг ютуғи сифатида унинг ютишининг математик кутилиши олинади, яъни у қуйидагига тенг бўлади

$$V = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \qquad (6)$$

Агар I ўйинчи ўзининг $X^* = (x^*_1,\ x^*_2,\ \ldots,\ x^*_m)$ оптимал стратегиясни қўлласа, у ҳолда II ўйинчи қандай стратегияни танлашидан қатъий назар, унинг ютуғи ўйиннинг бахоси V дан кам бўлмайди, яъни

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \geq V, \quad j = \overline{1,n} \qquad (7)$$

Худди шунингдек, агар II ўйинчи ўзининг

$Y^* = (y^*_1,\ y^*_2,\ \ldots,\ y^*_n)$ оптимал стратегиясини қўлласа, у ҳолда I ўйинчи қандай стратегияни танлашдан қатъий назар, унинг ютқазуви ўйиннинг баҳоси V дан ошмайди, яъни:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \leq V, \quad i = \overline{1,m} \qquad (8)$$

Ўйинлар назарияси масаласини чизиқли программалаш масаласига келтириб ечиш методикаси.

Энди матрицали ўйинни чизиқли программалаш усули билан ечиш жараёнини кўрамиз. Энг аввал I ўйинчининг оптимал аралаш стратегияси ва ўйининг баҳоси V ни топамиз. Унинг учун (7) тенгсизликлар системасини ва (4) шартларни умумлаштириб, қуйдаги кўринишда ёзамиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \geq V \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \geq V \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \geq V \end{cases} \qquad (9)$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1 \qquad (10)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m} \qquad (11)$$

Уйиннинг баҳоси V ни мусбат деб ҳисоблаб, ($V>0$) (9) системанинг ҳамма тенгсизликларини V габўлиб қуйидаги система ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \cdots + a_{m1}t_m \geq 1 \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{m2}t_m \geq 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \cdots + a_{mn}t_m \geq 1 \end{cases} \qquad (12)$$

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_m = \frac{1}{V}, \qquad (13)$$

$$t_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m} \qquad (14)$$

бу ерда $t_i = \dfrac{x_i}{V}, i = \overline{1, m}$ (15)

I ўйинчи ўз ютуғини, яъни ўйиннинг баҳоси V ни максимум қилишга ҳаракат қилади. Демак, I ўйинчи учун

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_m = \frac{1}{V},$$

энг кичик (минимум) қиймат қабул қилиш керак. Ушбу талабларда (12) - (14) система қуйидаги чизиқли программалаш масаласига айланади:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \cdots + a_{m1}t_m \geq 1 \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{m2}t_m \geq 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \cdots + a_{mn}t_m \geq 1 \end{cases} \qquad (15)$$

$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, \dots, t_m \geq 0 \qquad (16)$$

$$Z = t_1 + t_2 + \cdots + t_m \rightarrow \min \qquad (17)$$

Худди шундай йўл билан II ўйинчининг оптимал аралаш стратегияси ва V ўйиннинг баҳосини топиш учун қуйидаги чизиқли программалаш масаласини ечиш керак.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \geq V \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \geq V \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \geq V \end{cases} \qquad (18)$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_n \geq 0 \qquad (19)$$

$$F = \frac{1}{V} = y_1 + y_2 + \cdots + y_n \rightarrow \max \qquad (20)$$

(15)-(17) ва (18-20) масалалар ўзаро иккиланган чизиқли программалаш масалаларидан иборат бўлади. Улардан ихтиёрий бирини ечиб, иккиласини ечимини осонликча топиш мумкин.

2-мисол.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

матрицали ўйинни аралаш стратегиялардаги ечимни топинг.

Ечиш. I ўйинчи учун ўйинни чизиқли программалаш масаласига айлантирамиз.

Бунинг учун энг аввал қуйидаги системани ҳосил қиламиз.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \geq V \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq V \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \geq V \end{cases} \qquad (21)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \qquad (22)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \qquad (23)$$

(21) системадаги ҳар бир тенгсизликнинг икки томонини ($V>0$) га бўлиб ва $t_i = \frac{x_i}{V}$ белгилаш киритиб қуйдаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 5t_1 + 3t_2 + 6t_3 \geq 1 \\ 3t_1 + 5t_2 + 3t_3 \geq 1 \\ 2t_1 + 5t_2 + 4t_3 \geq 1 \end{cases} \qquad (24)$$

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{1}{V} \qquad (25)$$

$$t_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \qquad (26)$$

Бу системани қуйидаги чизиқли программалаш масаласи кўринишида ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} 5t_1 + 3t_2 + 6t_3 \geq 1 \\ 3t_1 + 5t_2 + 3t_3 \geq 1 \\ 2t_1 + 5t_2 + 4t_3 \geq 1 \end{cases} \qquad (27)$$

$$t_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \qquad (28)$$

$$Z = \frac{1}{V} = t_1 + t_2 + t_3 \rightarrow \min \qquad (29)$$

II ўйинчи учун берилган матрицали ўйин қуйидаги чизиқли программалаш масаласига айланади.

$$\begin{aligned} 5u_1 + 3u_2 + 2u_3 &\leq 1 \\ 3u_1 + 5u_2 + 5u_3 &\leq 1 \\ 6u_1 + 3u_2 + 4u_3 &\leq 1 \end{aligned} \qquad (30)$$

$$u_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \qquad (31)$$

$$Z = \frac{1}{V} = u_1 + u_2 + u_3 \rightarrow \max \qquad (32)$$

(27)-(29) ва (30)-(32) масалалар ўзаро иккиланган масалалардир. Шунинг учун улардан ихтиёрий бирини ечиб, иккинчисининг ечимини осонликча топиш мумкин.

Биз (30) - (32) масалани симплекс усули билан ечамиз. Бунинг учун уни нормал ҳолга келтириб, симплекс жадвалга жойлаштирамиз:

$$\begin{cases} 5u_1 + 3u_2 + 2u_3 + u_4 = 1 \\ 3u_1 + 5u_2 + 5u_3 + u_5 = 1 \\ 6u_1 + 3u_2 + 4u_3 + u_6 = 1 \end{cases}$$

$$u_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

$$F_{min} = -u_1 - u_2 - u_3$$

Б.в	**С.б**	P_0	**-1**	**-1**	**-1**	**0**	**0**	**0**
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_4	**0**	**1**	**5**	**3**	**2**	**1**	**0**	**0**
P_5	**0**	**1**	**3**	**5**	**5**	**0**	**1**	**0**
P_6	**0**	**1**	**6**	**3**	**4**	**0**	**0**	**1**
Δ_j		**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
P_4	0	**1/6**	**0**	**1/2**	**-4/3**	**1**	**0**	**-5/6**
P_5	0	**1/2**	**0**	**7/2**	**3**	**0**	**1**	**-1/2**
P_1	-1	**1/6**	**1**	**1/2**	**2/3**	**0**	**0**	**1/6**
Δ_j		**-1/6**	**0**	**1/2**	**1/3**	**0**	**0**	**-1/6**
P_4	0	2/21	0	0	-25/21	1		-16/21
P_2	-1	1/7	0	1	6/7	0		-1/7
P_1	-1	2/21	1	0	5/21	0		5/21
Δ_j		-5/21	0	0	-2/21	0		

Оптимал ечим:

$$U = \left(\frac{2}{21};\ \frac{1}{7};\ 0\right)$$

$$F_{max} = \frac{1}{V} = \frac{5}{21}$$

$$V = \frac{21}{5}$$

$$y_1 = V \cdot U_1 = \frac{21}{5} \cdot \frac{2}{21} = \frac{2}{5}$$

$$y_2 = V \cdot U_2 = \frac{21}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{5}$$

$$y_3 = V \cdot U_3 = \frac{21}{5} \cdot 0 = 0$$

$$Y = \left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}; 0\right)$$

Энди I-ўйинчи учун оптимал аралаш стратегияни топамиз. Бунинг учун (30) - (32) масалага иккиланган масала ечимини топамиз:

$$T = (t_1; t_2; t_3) = \left(0; \frac{1}{7}; \frac{2}{21}\right)$$

ҳамда қуйидаги муносабатлар асосида X=(x_1, x_2, x_3) аралаш стратегия топамиз:

$$x_1 = V \cdot t_1 = \frac{21}{5} \cdot 0 = 0 \qquad x_2 = V \cdot t_2 = \frac{21}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{5}$$

$$x_3 = V \cdot t_3 = \frac{21}{5} \cdot \frac{2}{21} = \frac{2}{5} \qquad X^* = \left(0; \frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right)$$

Жавоб:

$$X^* = \left(0; \frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right); \; Y^* = \left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}; 0\right) \qquad V = \frac{21}{5}$$

Назорат саволлари

1. Ўйин деганда нимани тушунасиз?
2. Стратегия деб нимага айтилади?
3. Нол суммали жуфтлик ўйин деб қандай ўйинга айтилади?
4. Ўйиннинг қуйи ва юқори чегара баҳоси қандай аниқланади?
5. Қандай ҳолатларда ўйиннинг ечими соф стратегияларда олинади?
6. Қандай ўйинлар жуфт, қайсилари кўплик ўйинлар ҳисобланади?
7. Қандай ўйинлар нол аниқликдаги ўйинлар дейилади?
8. Аралаш стратегия тушунчаси?
9. Чизиқли дастурлаш масаласига ўтишнинг моҳияти?
10. Ўйинлар назариясининг методлари қаерларда қўлланилади?

11. Ҳарбий ҳаракатлар билан боғлиқ қандай масалаларини(ўйинларни) биласиз?

Фойдаланилган адабиётлар

1. Ф.И.Перегудов, Ф.П.Тарасенко., “Введение в системный анализ” - Высшая школа - 1989.
2. Оптнер С.Л. “Системный анализ для решения деловых и промышленных проблем” М-1986.
3. Антонов П. “Системный анализ” М-2004
4. Сафаева Қ. ва бошқалар. «МАТЕМАТИК ПРОГРАММАЛАШТИРИШ» фанидан масалалар тўплами. Тошкент, Молия институти. 2003. – 134 б.
5. Сафаева Қ. ва бошқалар. «Математик дастурлаш». Дарслик. Тошкент, Молия институти. 2007. – 308 б.
6. Акулич И.А. Математическое программирование в примерах и задачах. Учебное пособие для вузов. М. «Высшая школа»,1986.
7. Математическое программирование учебное пособие /Под. ред. Кремера Н.Ш.- М.: Финстатинформ, 1996.
8. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978.
9. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.
10. Губко М.В. Механизмы управления организационными системами с коалиционным взаимодействием участников. М.: ИПУ РАН, 2003. – 118 с.
11. Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002. – 148 с.

8-Тажриба иши

Табиатга қарши ўйин.

Мақсад: Ўйинлар назарияси методлари ва алгоритмларини қарор қабул қилиш масалаларига тадбиқ қилиш амалиётини ва кўникмасини ҳосил қилиш.

Топшириқлар: 1. Тизимли таҳлил ва ўйинлар назарияси.

2. ютиқлар Матрицаси.

3. тўловлар матрицаси.

4. “Табиат” ва “ўйинчи” тушунчаси.

5. табиатга қарши ўйиннинг моҳияти.

6. Гурвиц, Севидж, Вальд, Лаплас, Байес мезонлари.

Қисқача назарий маълумот

“Табиат”га қарши ўйинда “табиат” ва ечим қабул қилувчи шахс (ЕҚҚШ) қатнашади. Табиатнинг $T_1, T_2, \ldots T_n$ ҳоллари мавжуд бўлиб, уларга қарши ЕҚҚШнинг m-та $A_1, A_2, \ldots A_m$ тадбирлари мавжуд. Табиатга қарши ўйинни қуйидаги матрица кўринишида ифодалаш мумкин:

T_j / A_j	T_1	T_2	…	T_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Бу ерда a_{ij} - табиатнинг T_j ҳолатига қарши ЕҚҚШнинг A_i чора тадбирини амалга оширгандаги кўрадиган фойдаси ёки зарарини ифодалайди. Агар матрица a_{ij} - фойда (ютуқ) бўлса, у ҳолда бу матрица «ютуқлар матрицаси» дейилади. Агар a_{ij}- ютқазув (зарар)ни ифодаси бўлса. Ушбу матрица «тўловлар матрицаси» деб аталади. «Ютуқлар матрицаси» асосида ЕҚҚШ ўзининг фойдасини максималлаштирувчи йўлни (соф стратегияни) танлайди. «Тўловлар матрицаси» асосида эса у ўзининг зарарини минималлаштирувчи йўлни танлайди. Бундай соф стратегияларни танлаш учун Лаплас, Байес, Вальд Сэвидж ва Гурвиц мезонларидан фойдаланилади.

1. **<u>Лаплас мезонида</u>** табиатнинг барча ҳолатлари тенг эҳтимолли деб ҳисобланади, яъни $P_1 = P_2 = \ldots = P_n = 1/n$
деб қабул қилинади. У ҳолда ЕҚҚШ A_i қўллагандаги ютуғи қуйидагига тенг бўлади:

$$Q_i = \frac{1}{n}(a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in}) \ (i = \overline{1,m}) \text{ бўлади.} \ (1)$$

ЕҚҚШ максимал фойда (минимал зарар) берувчини танлайди.

2. **<u>Байес мезонида</u>** табиатнинг ҳар бир T_j ҳолати маълум P_j эҳтимол билан рўй бериши аниқланган бўлади. У ҳолда ЕҚҚШнинг A_i йўлини (стратегияни) танлангандаги ютуғи қуйидагига тенг бўлади:

$$Q_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \ldots + a_{in}p_n \ (i = \overline{1,m}) \text{ бўлади.} \ (2)$$

ЕҚҚШ max Q_i (min Q_i) берувчи йўлни танлайди.

3. <u>Вальд мезони</u> максимин - минимакс усулидан иборат. Бунда ЕҚҚШ

max (min a_{ij}) [min (max a_{ij})] (3)

таъминловчи йўлни танланади

4. <u>Сэвидж мезони</u> ҳам минимах - махмин принципига асосланган бўлиб, унда ($\mathbf{a_{ij}}$) - ютуқлар (тўловлар) матрицаси ўрнига «таваккалчилик матрицаси» деб аталувчи ($\mathbf{r_{ij}}$) матрица ишлатилади. Бу матрицани элементлари қуйидагича топилади:

r_{ij}=max a_{ij} – a_{ij}= □ - a_{ij}, агар a_{ij} - ютуқ бўлса, (4)

r_{ij} = a_{ij} - min a_{ij} = a_{ij} - □, агар a_{ij} - ютқазув бўлса, (5)

5. <u>Гурвиц мезони</u> ясама мезондан иборат бўлиб, унга асосан оптимал стратегия сифатида қуйидаги шартни қаноатлантирувчи стратегия танланади.

$\mathbf{a_{ij}}$ - даромадни билдирганда:

$$\gamma = \max_i [\alpha \max_j a_{ij} + (1-\alpha) \min_j a_{ij}], \alpha \in [0,1] \quad (6)$$

$\mathbf{a_{ij}}$ - ютуқни (зарарни) билдирганда:

$$\gamma = \min_i [\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha) \max_j a_{ij}], \alpha \in [0,1] \quad (7)$$

Бу ерда γ ечим қабул қилиш жараёнини субъектив баҳоловчи параметр. Агар X=1 бўлса вазият оғир бўлган бўлади ва уни тўғрилаш учун чора-тадбирларни қўллаш керак бўлади. X=0 бўлганда вазият жуда яхши ва унга ҳеч қандай чора табдирлар қўллаш зарур бўлмайди.

1-мисол. Қуйидаги ютуқлар матрица кўринишида берилган табиатга қарши ўйинни Лаплас, Вальд, Сэвидж мезонлари ёрдамида ечинг.

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	1	5	8	18
A_2	10	6	4	12
A_3	2	1	3	16
A_4	5	13	5	1

Ечиш: Лаплас мезони бўйича ўйинни ечиш учун табиатнинг T_1, T_2, T_3, T_4 ҳолатлари тенг эҳтимол билан рўй беради, яъни $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 1/4$ деб қабул қилиб қуйидаги жадвални тузамиз:

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3	T_4	$Q_i = (a_{i1}+ a_{i2}+\ldots+a_{in})P_i$
A_1	1	5	8	18	8

A_2	10	6	4	12	8
A_3	2	1	3	16	5,5
A_4	5	13	5	1	6
P_i	¼	1/4	¼	1/4	max Q_i=8

Демак, бу усулда ЕҚҚШ энг катта (8) ютуқни таъминловчи A_2 соф стратегияни танлайди.

Вальд мезони бўйича ўйинни ечиш жараёнини қуйидаги жадвалда тасвирлаймиз:

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3	T_4	$\min\limits_j a_{ij}$
A_1	1	5	8	18	1
A_2	10	6	4	12	4
A_3	2	1	3	16	1
A_4	5	13	5	1	1
					$\min\limits_i \left(\min\limits_j a_{ij}\right) = 4$

Бу мезон бўйича ҳам энг катта ютуқни таъминловчи стратегия A_2 экан.

Севидж мезонини қўллаб ўйинни ечишдан аввал таваккалчилик матрицасини тузамиз. Унинг элементларини (4) формула ёрдамида топамиз:

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3	T_4	$\min\limits_j (r_{ij})$
A_1	9	8	0	0	9
A_2	0	7	4	6	7

A_3	8	12	5	2	12
A_4	5	0	3	17	17
					$\min_i\left(\max_j r_{ij}\right) = 7$

Демак, таваккалчиликдан кўрадиган зарарни минималлаштирувчи энг яхши стратегия A_2 дан иборат экан.

Ушбу ўйин Байес мезони асосида ечиш учун табиатнинг T_1 ҳолати 0,2 эҳтимол билан T_2, T_3, T_4, ҳолатлари эса мос равишда 0,3; 0,4; 0,1 эҳтимоллар билан рўй беради деб фараз қиламиз. У ҳолда ўйинни ечиш қуйидаги жадвалда кўрсатилганидек топилади:

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3	T_4	$Q_i = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \ldots + a_{in}p_n$
A_1	1	5	8	18	6,7
A_2	10	6	4	12	6,6
A_3	2	1	3	16	3,5
A_4	5	13	5	1	7
P_i	0,2	0,3	0,4	0,1	$\max Q_i = 7$

Демак, Байес мезони асосида энг оптимал стратегия A_4 экан.

Гурвиц мезонини қўллаш учун ечим қабул қилиш жараёни ўртача, яъни X=0,5 деб қабул қиламиз ва ҳисоблаш жараёнини қуйидаги кўринишдаги жадвалда бажарамиз:

T / A_i	T_1	T_2	T_3	T_4	$\min_j a_{ij}$	$\max_j a_{ij}$	Ўртачаси
A_1	1	5	8	18	1	18	9,5
A_2	10	6	4	12	4	12	8
A_3	2	1	3	16	1	16	8,5

A_4	5	13	5	1	1	13	7
							$\max_i y = 9{,}5$

Ушбу мезон бўйича оптимал стратегия энг катта кўрсаткични берувчи A_1 стратегия эканлиги аниқланади.

Мустақил ечиш учун масалалар.

1. Савдо корхонасида 500 бирлик мавсумий маҳсулот сотилмай қолган бўлсин. Бу маҳсулотнинг олдинги нархи 20 бирликни ташкил этган бўлсин. Энди савдо корхонаси олдида маҳсулотнинг нархини тушириш масаласи турибди. Маҳсулот нархини неча фоизга туширганда корхонанинг кўрадиган зарари минимал бўлади?

Савдо корхонаси маҳсулот нархини 20% (A_1 йўл), 30% (A_2 йўл), 40% (A_3 йўл), 50% (A_i йўл) тушириш мўлжаллайди. Бу йўлларни ЕҚҚШнинг стратегиялари деб қараймиз. «Табиат»нинг иккита йўли бор: 1) Табиатнинг кам эгилувчанлиги (T_1 йўл); 2) Табиатнинг кўп эгилувчанлиги (T_2 йўл). Ана шуларни назарга олиб тўловлар матрицаси тузилсин ва ўйиннинг ечимини турлича мезонлар асосида топилсин.

2. Қуйидаги жадвалда берилган маълумотлар асосида ютуқларни максималлаштирувчи стратегияни Байес мезони асосида топинг:

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3
A_1	15	17	20
A_2	25	27	23
P_i	0,2	0,7	0,1

Жавоб:

A_2 ; 26,2

3. Қуйидаги ютуқлар матрицаси ёрдамида берилган ўйинни:

а) табиатнинг турли ҳолатлари номаълум бўлган;

б) табиатнинг турли ҳолатларининг рўй бериши эҳтимоллари P_1=0,5, P_2=0,3 ва P_3=0,2 бўлган ҳоллар учун ечинг.

T_j / A_i	T_1	T_2	T_3
A_1	7	5	6
A_2	9	2	8
A_3	3	5	4
P_i	0,5	0,3	0,2

Жавоб: а) A_2; $6\frac{1}{3}$ б) A_2; 6,7

Назорат саволлари

1. табиатга қарши ўйин тушунчаси?
2. ўйинчининг стратегияси
3. стратегия матрицаси
4. Гурвис мезони
5. Севидж мезони
6. Вальд мезони
7. Байес мезони
8. Лаплас мезони
9. ўйинчининг оптимал стратегияси
10. рўй бериш ҳолатларнинг эҳтимоллиги

Фойдаланилган адабиётлар

1. Ф.И.Перегудов, Ф.П.Тарасенко., “Введение в системный анализ” - Высшая школа - 1989.
2. Оптнер С.Л. “Системный анализ для решения деловых и промышленных проблем” М-1986.
3. Антонов П. “Системный анализ” М-2004

4. Сафаева Қ. ва бошқалар. «МАТЕМАТИК ПРОГРАММАЛАШТИРИШ» фанидан масалалар тўплами. Тошкент, Молия институти. 2003. – 134 б.
5. Сафаева Қ. ва бошқалар. «Математик дастурлаш». Дарслик. Тошкент, Молия институти. 2007. – 308 б.
6. Акулич И.А. Математическое программирование в примерах и задачах. Учебное пособие для вузов. М. «Высшая школа»,1986.
7. Математическое программирование учебное пособие /Под. ред. Кремера Н.Ш.- М.: Финстатинформ, 1996.
8. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978.
9. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.
10. Губко М.В. Механизмы управления организационными системами с коалиционным взаимодействием участников. М.: ИПУ РАН, 2003. – 118 с.
11. Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002. – 148 с.