ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASÍ JOQARÍ HÁM ORTA ARNAWLÍ BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI

BERDAQ ATÍNDAĞÍ QARAQALPAQ MÁMLEKETLIK UNIVERSITETI

TLEUMURATOV S.J.

# Matematikalıq analiz

5140200-fizika tálim bağdarı ushın

## OQIW QOLLANBA

NÓKIS 2020

MATEMATIKALÍQ ANALIZ. Tleumuratov Sarsenbay Jaqsımuratovich. Nókis 2020. -356 bet.

## Annotaciya

Bul oqıw qollanba joqarǵı oqıw orınlarında bilim alıp atırǵan 5140200-fizika tálim baǵdarlarınıń ishki, sırtqı hám keshki bólim studentlerine baǵıshlanǵan bolıp, Matematikalıq analiz páninen tiykarǵı túsinikler menen tanıstırıwǵa arnalǵan.

## Pikir bildiriwshiler:

**A. Arziev** — TITU Nókis filialınıń docenti, fizika-matematika ilimleri kandidatı

**T.Kurbanbaev** — Berdaq atındaǵı QMU docenti, fizika-matematika ilimleri kandidatı

Qaraqalpaq mámleketlik universiteti oqıw metodikalıq keńesiniń 2020 – jıl 4-mart sánesi 8 – sanlı protokolı menen usınıs etilgen.

## MAZMUNI

# KIRISIW

Bul oqıw qollanbada joqarı oqıw orınlarında bilim alıp atırǵan fizika tálim baǵdarı ishki, sırtqı hám keshki studentleri ushın Matematikalıq analiz páninen lekciya materialları keltirilgen.

Ózbekstan Respublikası Joqarı hám orta arnawlı bidimlendiriw ministrliginiń 2018 jıl 25 avgust kúngi № 744 sanlı buyrıǵı menen tastıyıqlanǵan fizika tálim baǵdarı studentleri ushın «Matematikalıq analiz»den pán dástúri tiykarında jazıldı.

Oqıw qollanbanıń baslı wazıypası usı pánniń tiykarǵı túsinikleri, tastıyıqlawları hám basqada matematikalıq maǵlıwmatlar jıyındısı menen tanıstırıwdan ibarat bolmastan, studentlerdi logikalıq pikirlewge, matematikalıq usıllardı ámeliy máselelerdi sheshiwge qollanıwın úyretiwdi óz ishine aladı.

Oqıw qollanba toǵız paragraftan ibarat bolıp, hár bir paragraf temalarǵa bólingen. Bunda tiykarınan;

- haqıyqıy sanlar,
- sanlar izbe-izligi,
- funkciya, funkciyanıń limiti,
- funkciyanıń úzliksizligi,
- funkciyanıń tuwındısı hám differencialları,
- differenciallıq esaptıń bazı bir qollanıwları,
- anıq emes integral,
- anıq integrallar,
- $R^m$ keńislik,
- kóp ózgeriwshili funkciyanıń dara tuwındıları,
- sanlı qatar,
- funktsional qatarlar,
- dárejeli qatarlar,
- menshiksiz integrallar,
- parametrge baylanıslı integrallar,

- eseli integrallar,
- iymek sızıqlı hám betlik integrallar menen tanıstırıwǵa arnalǵan.

Bul ádebiyatı tayarlawda avtorlar Berdaq atındaǵı Qaraqalpaq mámleketlik universiteti fizika fakultetinde matematikalıq analiz pániniń oqıtıw processinde kóp jıllar dawamında jıynalǵan tájriybelerden keń dárejede paydalanıldı.

Bul temalar logikalıq izbe-izlikte, bir-biri menen úzliksiz baylanıslı bolıwına, sanday-aq túsiniklerdiń tolıq bayan etiliwine, tastıyıqlawlar hám dálillewlerdiń anıqlıǵı, ilimiylikke tiykarlanǵan bolıwına itibar qaratılǵan.

Kitapta matematikalıq belgilerden keń paydalanıw menen bir qatarda tastıyıqlawlardıń baslanıwı «◄» belgi, juwmaǵı «►» belgi arqalı ańlatıladı.

Ádebiyat qol jazbasın oqıp shıǵıp, onıń ilimiy hám metodikalıq jaqtan jaqsılawǵa jaqınan járdem bergen docent A.Arziev hám T.Kurbanbaevlarǵa avtolar óz minnetdarshılıǵın bildiredi.

# 1-§. HAQIYQIY SANLAR

## 1.1. Haqıyqıy sanlar túsinigi. Haqıyqıy sanlar kópligi hám onıń qásiyetleri

Haqıyqıy sanlar matematikalıq analiz kursında áhmiyetligin itibarǵa alıp, olar haqqındaǵı maǵlıwmatlardı keltiremiz.

Meyli $\frac{p}{q}$ bazı oń racional san berilgen bolsın. Bóliw qaǵıydasınan paydalanıp $p$ pútin sandı $q$ ǵa bólemiz. Eger $p$ nı $q$ ǵa bóliw processinde bir qádemnen keyin qaldıq nolge teń bolsa, onda bóliw processi toqtap, $\frac{p}{q}$ bólshek onlıq bólshekke aylanadı. Ádette, bunday onlıq bólshek shekli onlıq bólshek delinedi. Máselen, $\frac{59}{40}$ bólshekte 59 dı 40 qa bólip, ol 1,475 teń boladı:

$$\frac{59}{40} = 1{,}475.$$

Eger $p$ nı $q$ ǵa bóliw processi sheksiz dawam etse, málim qádemnen keyin joqarıda aytılǵan qaldıqlardan biri jáne bir márte ushıraydı, soń onnan aldıńǵı sanlar sáykes tártipte qaytalanadı.

Ádette, bunday bólshek sheksiz periodlı onlıq bólshek delinedi. Qaytalanatuǵın sanlar onlıq bólshektiń periodı boladı.

Máselen, $\frac{1}{3}$ bólshekte 1 di 3ke bólsek, 0,333... boladı;

$$\frac{1}{3} = 0{,}333...$$

Bul

$$0{,}333...,\ \ 1{,}4777...,\ \ 2{,}131313...$$

bólshekler sheksiz periodlı onlıq bólshekler. Olardıń periodı sáykes tárizde 3, 7, 13 boladı hám sheksiz periodlı onlıq bólshekler tómendegishe

$$0{,}(3),\ \ 1{,}4(7),\ \ 2{,}(13)$$

jazıladı;

$$0,(3)=0,333...$$

$$1,4(7)=1,4777...$$

$$2,(13)=2,131313...\,.$$

Sonlıqtan, periodı 9 ǵa teń bolǵan sheksiz periodlı onlıq bólshekti shekli onlıq bólshek bolıp jazıladı.

Máselen,

$$0,4999...=0,4(9)=0,5\,,$$

$$2,71999...=2,71(9)=2,72\,.$$

Demek, hár qanday $\frac{p}{q}$ racional san sheksiz periodlı onlıq bólshek kórinisinde ańlatıladı. Kerisinshe, hár qanday sheksiz periodlı onlıq bólshekti $\frac{p}{q}$ kórinisinde jazıw múmkin.

Máselen, bul

$$0,(3)=0,333...\;,\;7,31(06)=7,31060606\;...$$

sheksiz periodlı onlıq bólsheklerdi qarayıq. Olardı

$$0,(3)=0+\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+...\,,$$

$$7,31(06)=7+\frac{3}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{6}{10^4}+\frac{6}{10^6}+...$$

kórinisinde jazıp, soń sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıń qosındısınıń formulasınan paydalanıp tabamız:

$$0,(3)=0,333...=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{1}{3}\,,$$

$$7{,}31(06)=7{,}31060606...=\frac{731}{100}+\frac{\frac{1}{10^4}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{731}{100}+\frac{1}{100}\cdot\frac{6}{99}=$$

$$=\frac{1}{100}\left(731+\frac{2}{33}\right)=\frac{965}{132}.$$

Demek, qálegen racional san sheksiz periodlı onlıq bólshek arqalı hám kerisinshe, qálegen sheksiz periodlı onlıq bólshek racional san arqalı ańlatıladı.

Sheksiz periodlı bolmaǵan onlıq bólshekler hám boladı. Bul kesindilerdi ólshew processinde júzege keliwin kórsetemiz.

Meyli bir $J$ kesindi hám ólshem birligi, máselen metr berilgen bolsın. $J$ kesindiniń uzınlıǵın esaplaw talap etilsin.

Meyli 1 metr $J$ kesindide 5 márte pútin jaylasıp, kesindiniń $J_1$ úlesi artıp qalsın. Bizge belgili $J_1$ nıń uzınlıǵı 1 metrden kem boladı. Bul jaǵdayda $J$ kesindiniń uzınlıǵın shamalap 5 m ǵa teń dep alıw múmkin:

$$J \text{ uzınlıǵı} \approx 5 \text{ m}.$$

Eger anıqlık jeterli bolmasa, ólshew birligining $\frac{1}{10}$ úlesin, yamasa 1 dm di alıp, onı $J_1$ kesindige jaylastıramız. Meyli 1 dm $J_1$ kesindide 7 márte pútinley jaylastırıp, $J_1$ kesindiniń $J_2$ úlesi artıp qalsın. Bunda $J_2$ nıń uzınlıǵı 1 dm den kishi boladı. Bul jaǵdayda $J$ kesindiniń uzınlıǵı shamalap 5,7 m ǵa teń dep alınıwı múmkin:

$$J \text{ uzınlıǵı} \approx 5{,}7 \text{ m}.$$

Bul processti dawam etip barıw nátiyjesinde eki halǵa dus kelemiz:

1) bir qádemnen keyin, máselen $n+1$ qádemnen keyin ólshew birliginiń $\frac{1}{10^n}$ úlesi $J_n$ kesindine $\alpha_n$ márte pútinley jaylasadı. Bul jaǵdayda ólshew processin toqtatıp,

$$J \text{ uzınlıǵı} = 5{,}\underbrace{7\ldots\alpha_n}_{n \text{ сан}}$$

kelip shıǵadı.

2) ólshem processin toqtawsız dawam (sheksiz dawam) etedi. Bul jaǵdayda J kesindiniń uzınlıǵınıń anıq mánisi dep bul

$$5,7...\alpha_n...$$

sheksiz onlıq bólshek alınadı:

$$J \text{ uzınlıǵı} = 5,7...\alpha_n...$$

Meyli tuwrı sızıqta bir $O$ tochka hám ólshew birligi berilgen bolsın. Ol jaǵdayda $O$ tochkadan ońda jaylasqan hár bir $P$ tochkaǵa, $OP$ kesindisin ólshew nátiyjesinde payda bolǵan bul $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$ sheksiz onlıq bólshekti sáykes qoyıw múmkin. Bunda

$$\alpha_0 \in N\bigcup\{0\},\ \alpha_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ n \geq 1.$$

Bul sáykeslik óz-ara bir mánisli sáykeslik boladı. Bunnan, joqardaǵı sheksiz onlıq bólshekler arasında sheksiz periodlı onlıq bólshekler bolıp, olar teris bolmaǵan racional sanlar boladı. Qalǵan bólshekler bolsa racional sanlar bolmaydı.

**1-anıqlama.** Mına

$$a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n....,$$

kórinistegi sheksiz onlıq bólshek teris bolmaǵan haqıyqıy san delinedi, bunda $\alpha_0 \in N\bigcup\{0\},\ \alpha_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ n \geq 1$.

Eger $\exists\, n \geq 0; \alpha_n > 0$ bolsa, onda oń haqıyqıy san delinedi.

Oń haqıyqıy sannıń «–» belgisi menen alınǵan oń haqıyqıy san sıpatında anıqlanadı.

Barlıq haqıyqıy sanlardan ibarat kóplik $R$ háribi menen belgilenedi.

Barlıq natural sanlar kópligi $N$, racional sanlar kópligi $Q$, haqıyqıy sanlar kópligi $R$ ushın $N \subset Q \subset R$ boladı.

**2-anıqlama**. Bul

$$R \setminus Q$$

kóplik elementi irracional san delinedi.

Biz joqarıda, periodı «9» ǵa teń bolǵan sheksiz periodlı onlıq bólshekti shekli onlıq bólshek qılıp alınıwın aytqan edik. Bunıń nátiyjesinde bir san eki kóriniske, máselen, $\frac{1}{2}$ sanı

$$\frac{1}{2} = 0{,}5000...$$

$$\frac{1}{2} = 0{,}4999...$$

kórinislerge iye boladı.

Ulıwma, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ $(\alpha_n \neq 0)$ racional san bul,

1) $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_{n-1}$ $(\alpha_n - 1)999...$,

2) $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n 000...$, eki kórinisinde jazılıwı múmkin. Haqıyqıy sanlardı salıstırıwda racional sannıń 1)- kórinisten paydalanamız.

Eki teris bolmaǵan

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n ....,$$

$$b = \beta_0, \beta_1 \beta_2 ... \beta_n ....$$

haqıyqıy sanlar berilgen bolsın .

**3-anıqlama**. Eger $\forall n \geq 0$ de $\alpha_n = \beta_n$ yamasa

$$\alpha_0 = \beta_0,\ \alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2, ..., \alpha_n = \beta_n, ...$$

bolsa, onda $a$ hám $b$ sanlar teń delinedi hám $a = b$ kóriniste jazıladı.

**4-anıqlama.** Eger

$$\alpha_0 = \beta_0,\ \alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2, ..., \alpha_n = \beta_n, ...$$

teńliklerdiń hesh bolmaǵanda tek birewi hám birinshi orınlanbaǵan teńlik $n = k$ da payda bolsa, onda:

$\alpha_k > \beta_k$ bolǵanda $a$ sanı $b$ sanınan úlken delinedi hám $a > b$ kórinisinde belgilenedi.

$\alpha_k < \beta_k$ bolǵanda $a$ sanı $b$ sanınan kishi delinedi hám $a < b$ kórinisinde belgilenedi.

Meyli tuwrı sızıqta, alınǵan $O$ tochka (koordinata bası) hám ólshem birligi berilgen bolsın .

Haqıyqıy sanlar kópligi $R$ menen tuwrı sızıq tochkaları arasındaǵı bir mánisli sáykeslik ornatıw múmkin:

$O$ tochkadan oń baǵıtında jaylasqan $P$ tochkaǵa $OP$ kesindiniń uzınlıǵına teń $x$ sanı sáykes qoyıladı ($x$ san $P$ tochkanıń koordinatası delinedi);

$O$ tochkadan sol jaǵında jaylasqan $Q$ tochkaǵa $QO$ kesindiniń uzınlıǵına teń $x$ sanınıń minus belgisi menen alınǵan $-x$ sanı sáykes qoyıladı;

$O$ tochkaǵa nol sanı sáykes qoyıladı.

Meyli $a \in R, b \in R, a < b$ bolsın :

$[a,b] = \{x \in R \mid a \le x \le b\}$ – segment delinedi,

$(a,b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$ – interval delinedi,

$[a,b) = \{x \in R \mid a \le x < b\}$ – yarım interval delinedi,

$(a,b] = \{x \in R \mid a < x \le b\}$ – yarım interval delinedi.

Bunda $a$ hám $b$ sanlar $[a,b]$, $(a,b)$, $[a,b)$, $(a,b]$ lerdiń shegaraları delinedi.

Solay etip,

$$[a,+\infty) = \{x \in R \mid x \ge a\},$$

$$(-\infty,a) = \{x \in R \mid x < a\},$$

$$(-\infty,\infty) = R$$

dep qaraymız.

## 1.2. Sanlı kópliklerdiń shegaraları

Haqıyqıy sanlar kópliginiń shegaralanǵanlıǵı, kópliktiń anıq shegaraları túsinikleri matematikalıq analiz kursında áhmiyetli rol oynaydı.

Meyli $E \subset R$ kóplik berilgen bolsın.

**1-anıqlama.** Eger $E$ kópliktiń sonday $x_0$ elementi $(x_0 \in E)$ tabılǵanda, $E$ kópliktiń qálegen $x$ elementleri ushın

$$x \le x_0$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $x_0$ sanı $E$ kópliktiń eń úlken elementi delinedi hám

$$x_0 = \max E$$

kórinisinde belgilenedi.

**2-anıqlama.** Eger $E$ kópliktiń sonday $x_0$ elementi $(x_0 \in E)$ tabılǵanda, $E$ kópliktiń qálegen $x$ elementleri ushın

$$x \ge x_0$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $x_0$ sanı $E$ kópliktiń eń kishi elementi delinedi hám

$$x_0 = \min E$$

kórinisinde belgilenedi.

**3-anıqlama.** Eger sonday $M$ sanı $(M \in R)$ tabılǵanda, $E$ kópliktiń qálegen $x$ elementleri ushın

$$x \le M$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $E$ kóplik joqarıdan shegaralanǵan delinedi, $M$ sanı kópliktiń joqarı shegarası delinedi.

**4-anıqlama.** Eger sonday $m$ sanı $(m \in R)$ tabılǵanda, $E$ kópliktiń qálegen $x$ elementleri ushın

$$x \ge m$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $E$ kóplik tómennen shegaralanǵan delinedi**,** $m$ sanı kópliktiń tómengi shegarası delinedi.

Bunnan, kóplik joqarıdan shegaralanǵan bolsa, onda onıń joqarı shegaraları sheksiz kóp, sonday-aq tómennen shegaralanǵan bolsa, onda onıń tómengi shegaraları sheksiz kóp boladı.

**5-anıqlama.** Eger $E \subset R$ kóplik hám tómennen, hám joqarıdan shegaralanǵan bolsa, onda $E$ shegaralanǵan kóplik delinedi.

**6-anıqlama.** Eger qálegen $M$ sanı $(M \in R)$ alınǵanda hám sonday $x_0$ elementi $(x_0 \in E)$ tabılǵanda,

$$x_0 > M$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $E$ kóplik joqarıdan shegaralanbaǵan delinedi.

**7-anıqlama.** Eger qálegen $m$ sanı $(m \in R)$ alınǵanda hám sonday $x_0 < m$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $E$ kóplik tómennen shegaralanbaǵan delinedi.

Máselen,

1) $E_1 = \{..., -2, -1, 0\}$ kóplik joqarıdan shegaralanǵan;

2) $E_2 = \{1, 2, 3, ...\}$ kóplik tómennen shegaralanǵan;

3) $E_3 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\}$ kóplik shegaralanǵan;

4) $E_4 = \{x \in R \mid x > 0\}$ kóplik joqarıdan shegaralanbaǵan;

5) $E_5 = \{x \in R \mid x < 0\}$ kóplik tómennen shegaralanbaǵan boladı.

Endi sanlar kópliginiń anıq joqarı hám anıq tómengi shegaraları túsiniklerin keltiremiz.

Meyli $E \subset R$ kóplik hám $a \in R$ sanı berilgen bolsın .

**8-anıqlama.** Eger

1) $a$ sanı $E$ kópliktiń joqarı shegarası bolsa, onda

2) $E$ kópliktiń qálegen joqarı shegarası $M$ ushın $a \le M$ teńsizligi orınlı bolsa, onda $a$ sanı $E$ kópliktiń anıq joqarı shegarası delinedi hám $\sup E$ kórinisinde belgilenedi:

$$a = \sup E .$$

Demek, $E$ kópliktiń anıq joqarı shegarası, onıń joqarı shegaraları arasında eń kishisi boladı.

**9-anıqlama.** Meyli $E \subset R$ kóplik hám $b \in R$ sanı berilgen bolsın. Eger

1) $b$ san $E$ kópliktiń tómengi shegarası bolsa, onda

2) $E$ kópliktiń qálegen tómengi shegarası $m$ ushın $b \ge m$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $b$ sanı $E$ kópliktiń anıq tómengi shegarası delinedi hám $\inf E$ kórinisinde belgilenedi:

$$b = \inf E .$$

Demek, $E$ kóplitiń anıq tómengi shegarası, onıń tómengi shegaraları arasında eń úlkeni boladı.

“sup” hám “inf” ler latınsha “supremum” hám “infimum” sózlerden alınǵan bolıp, olar sáykes túrde eń joqarı, eń tómengi degen mánisti ańlatadı.

**1-teorema.** Meyli $E \subset R$ kóplik hám $a \in R$ sanı berilgen bolsın . a sanı $E$ kópliktiń anıq joqarı shegarası bolıwı ushın

1) $a$ sanı $E$ kópliktiń joqarı shegarası,

2) $a$ sanınan kishi bolǵan qálegen $\alpha$ $(\alpha < a)$ ushın $E$ kóplikte $x > \alpha$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı $x$ sanınıń tabılıwı zárúrli hám jetkilikli.

◄ **Zárúrligi.** Meyli

$$a = \sup E$$

bolsın. 8-anıqlamaǵa tiykarlanıp:

1) $\forall x \in E$ ushın $x \leq a$, yamasa $a$ sanı $E$ kópliktiń joqarı shegarası;

2) $a$ sanı joqarı shegaralar arasında eń kishisi. Bunnan $a$ dan kishi $\alpha$ sanı ushın $x > \alpha$ bolǵan $x \in E$ sanı tabıladı.

**Jetkilikligi.** Teoremanıń eki shárti orınlansın. Bul jaǵdayda, $\alpha < a$ shártin qanaatlandırıwshı hár qanday $\alpha$ sanı $E$ kópliktiń joqarı shegarası bola almaydı. Demek, $a$- kópliktiń joqarı shegaraları arasında eń kishisi. Onda anıqlamaǵa karap

$$a = \sup E$$

boladı. ►

Tap usıǵan uqsas tómendegi teorema dálillenedi.

**2-teorema.** Meyli $E \subset R$ kóplik hám $b \in R$ sanı berilgen bolsın. $b$ sanı $E$ kópliktiń anıq tómengi shegarası bolıwı ushın

1) $b$ sanı $E$ kópliktiń tómengi shegarası,

2) $b$ sanınan úlken bolǵan qálegen $\beta$ $(\beta > b)$ ushın $E$ kóplikte $x < \beta$ teńsizligin qanaatlandırıwshı $x$ sanınıń tabılıwı zárúrli hám jetkilikli.

**Eskertiw.** Eger $E \subset R$ kóplik joqarıdan shegaralanbaǵan bolsa, onda

$$\sup E = +\infty \quad ,$$

tómennen shegaralanbaǵan bolsa, onda

$$\inf E = -\infty$$

dep alınadı.

## 1.3. Haqıyqıy sanlar ústinde ámeller

Racional sanlar ústinde ámeller tiykarınan shekli onlıq bólshekler ústinde orınlanatuǵın ámeller hám olardıń qásiyetleri málim dep esaplaymız.

Meyli eki oń

$$a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$$
$$b = \beta_0,\beta_1\beta_2...\beta_n...$$

haqıyqıy sanlar berilgen bolsın. Onda $n \geq 0$ bolǵanda bul

$$a_n^{'} = a_0,a_1a_2...a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n},$$
$$a_n^{''} = a_0,a_1a_2...(a_n + 1) = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n + 1}{10^n}$$

racional sanlar ushın

$$a_n^{'} \leq a \leq a_n^{''}, \tag{1}$$

solay etip,

$$b_n^{'} = \beta_0,\beta_1\beta_2...\beta_n = \beta_0 + \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + ... + \frac{\beta_n}{10^n},$$
$$b_n^{''} = \beta_0,\beta_1\beta_2...(\beta_n + 1) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + ... + \frac{\beta_n + 1}{10^n}$$

racional sanlar ushın

$$b_n^{'} \leq b \leq b_n^{''} \tag{2}$$

boladı.

Endi (1) hám (2) teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı racional sanlardıń qosındısı $a_n^{'} + b_n^{'}$ lerden ibarat $\{a_n^{'} + b_n^{'}\}$ kóplikti qaraymız. Anıqraǵı, bul kóplik joqarıdan shegaralanǵan. Onda $\{a_n^{'} + b_n^{'}\}$ kópliktiń anıq joqarı shegarası bar boladı.

**1-anıqlama.** $\{a_n^{'} + b_n^{'}\}$ kópliktiń anıq joqarı shegarası $a$ hám $b$ haqıyqıy sanlar jıyındısı delinedi hám $a+b$ kórinisinde belgilenedi:

$$a+b=\sup_{n\geq 0}\{a_n^{'}+b_n^{'}\}.$$

(1) hám (2) teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı racional sanlardıń kóbeymesi $a_n^{'}\cdot b_n^{'}$ lerden ibarat $\{a_n^{'}\cdot b_n^{'}\}$ kóplikti qaraymız. Bul kóplik joqarıdan shegaralanǵan boladı. Sonıń ushın onıń anıq joqarı shegarası bar boladı.

**2-anıqlama.** $\{a_n^{'}\cdot b_n^{'}\}$ kópliktiń anıq joqarı shegarası $a$ hám $b$ haqıyqıy sanlar kóbeymesi delinedi hám $a\cdot b$ kórinisinde belgilenedi.

$$a\cdot b=\sup_{n\geq 0}\{a_n^{'}\cdot b_n^{'}\}.$$

(1) hám (2) teńsizliklerdi qanaatlandırıwshı racional sanlardıń qatnası $\dfrac{a_n^{'}}{b_n^{''}}$ lerden ibarat $\left\{\dfrac{a_n^{'}}{b_n^{''}}\right\}$ kóplik joqarıdan shegaralanǵan boladı.

**3-anıqlama.** $\left\{\dfrac{a_n^{'}}{b_n^{''}}\right\}$ kópliktiń anıq joqarı shegarası $a$ sanınıń $b$ sanına qatnası delinedi hám $\dfrac{a}{b}$ kórinisinde belgilenedi.

$$\frac{a}{b}=\sup_{n\geq 0}\left\{\frac{a_n^{'}}{b_n^{''}}\right\}.$$

Meyli $a$ hám $b$ oń haqıyqıy sanlar bolıp, $a>b$ bolsın.

**4-anıqlama.** $\{a_n^{'}-b_n^{''}\}$ kópliktiń anıq joqarı shegarası $a$ sanınan $b$ sanınıń ayırması delinedi hám $a-b$ kórinisinde belgilenedi.

$$a-b=\sup_{n\geq 0}\{a_n^{'}-b_n^{''}\}.$$

**Eskertiw.** 1) Haqıyqıy sanlar ústinde orınlanatuǵın qosıw, kóbeytiw, ayırıw hám bóliw ámellerin kópliktiń anıq tómengi shegarası arqalı ańlatıw múmkin.

Máselen, $a$ hám $b$ haqıyqıy sanlar qosındısı tómendegishe ańlatıladı:

$$a+b=\inf_{n\geq 0}\{a_n^{''}+b_n^{''}\}.$$

Haqıyqıy sanlarda, joqarıda kiritilgen ámeller orta mektep matematika kursında úyrenilgen ámellerdiń barlıq qásiyetlerine iye.

*Haqıyqıy sanınıń dárejesi.* Dáslep haqıyqıy sannıń 0-hám $n$- dárejeleri ($n \in N$) tómendegishe

$$a^0 = 1,$$
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ та}}, \quad (n \in N)$$

anıqlanıwın kórsetemiz.

**Teorema**. Meyli $a > 0$ hám $n \in N$ bolsın, onda sonday jalǵız oń $x$ sanı tabılıp,

$$x^n = a$$

boladı.

**5-anıqlama.** Haqıyqıy oń $a$ sanınıń $n$ dárejeli koreni dep

$$x^n = a$$

teńlikti qanaatlandırıwshı jalǵız $x$ sanına aytıladı hám

$$x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

kórinisinde belgilenedi.

Meyli $a$ teris haqıyqıy san, $r$ bolsa oń racional san bolsın:

$$a > 0, \quad r = \frac{m}{n}, \quad m, n \in N.$$

Bul jaǵdayda $a$ sanınıń $r$ - dárejesi tómendegishe

$$a^r = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$$

anıqlanadı.

**6-anıqlama.** Meyli $a > 1$, $b > 0$ haqıyqıy sanları berilgen bolsın, onda $a$ sanınıń $b$ – dárejesi dep $\left\{a^{b_n'}\right\}$ kóplıktiń anıq joqarı shegarasına aytıladı:

$$a^b = \sup_{n \geq 0}\left\{a^{b_n'}\right\} \text{ bunda } b_n{}' = \beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n, \quad b = \beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n, \ldots$$

**Bernulli teńsizligi.** Qálegen $x \geq -1$ ($x \in R$) hám qálegen $n \in N$ ushın

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \tag{4}$$

teńsizlik orınlı boladı.

◄ Bul teńsizlikti matematikalıq indukciya usılı járdeminde dállileymiz.

Ulıwma aytqanda $n = 1$ de (4) teńsizlik orınlı boladı

$$1 + x = 1 + x.$$

Endi $n \in N$ de (4) qatnas orınlı dep, onı $n + 1$ ushın hám orınlı bolıwın kórsetemiz. (4) teńsizliktiń hár eki tárepin $1 + x$ ge kóbeytip tabamız:

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)\cdot(1+x) = 1+(n+1)x + nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

Matematikalıq indukciya usılına tiykarlanıp (4) qatnas qálegen $n \in N$ ushın orınlı boladı.►

(4) teńsizlik *Bernulli teńsizligi* delinedi.

# 2-§. SANLAR IZBE-IZLIGI

## 2.1. Sanlar izbe-izligi hám onıń limiti

Meyli qálegen $E$ kóplikti $F$ kóplikke sáwlelendiriw $f: E \to F$ berilgen bolsın. Endi $E = N,\ F = R$ dep, hár bir natural $n$ sanǵa bazı bir haqıyqıy $x_n$ sanın sáykes qoyıwshı

$$f: n \to x_n, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

sáwlelendiriwin qaraymız.

**1-anıqlama.** (1) - sáwlelendiriwden ibarat

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \tag{2}$$

kóplik sanlar izbe-izligi delinedi. Onı $\{x_n\}$ yamasa $x_n$ arqalı belgilenedi.

$x_n\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ sanlar (2) izbe-izliktiń aǵzaları delinedi. Máselen,

1) $x_n = \dfrac{1}{n}:\ 1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \ldots,\ \dfrac{1}{n}, \ldots,$

2) $x_n = (-1)^n:\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots,\ (-1)^n, \ldots$

3) $x_n = \sqrt[n]{n}:\ 1,\ \sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \ldots,\ \sqrt[n]{n},\ \ldots$

4) $x_n = 1:\ 1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$

5) $0{,}3;\ 0{,}33;\ 0{,}333; \ldots;\ 0{,}\underbrace{333\ldots3}_{n};\ \ldots$

sanlar izbe-izlikler.

Bazı bir $\{x_n\}$ izbe-izlik berilgen bolsın.

**2-anıqlama.** Eger sonday turaqlı $M$ sanı bar bolıp, qálegen $x_n\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ ushın $x_n \le M$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $\{x_n\}$ izbe-izlik joqarıdan shegaralanǵan delinedi.

**3-anıqlama.** Eger sonday turaqlı $m$ sanı bar bolıp, qálegen $x_n\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ ushın $x_n \ge m$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $\{x_n\}$ izbe-izlik tómennen shegaralanǵan delinedi.

**4-anıqlama.** Eger $\{x_n\}$ izbe-izlik joqarıdan hám tómennen shegaralanǵan bolsa, onda $\{x_n\}$ izbe-izlik shegaralanǵan delinedi.

**1-mısal.** Berilgen

$$x_n = \frac{n}{4+n^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

izbe-izliktiń shegaralanǵanlıǵın dálilleń.

◄ $\forall n \in N$ ushın

$$x_n = \frac{n}{4+n^2} > 0$$

boladı. Demek, izbe-izlik tómennen shegaralanǵan eken. Bizge belgili ,

$$0 \le (n-2)^2 = n^2 - 4n + 4$$

bolıp, bunnan $4n \le 4 + n^2$ yaǵnıy,

$$\frac{n}{4+n^2} \le \frac{1}{4}$$

kelip shıǵadı. Bul izbe-izliktiń joqarıdan shegaralanǵanlıǵın bildiredi.

Demek, izbe-izlik shegaralanǵan. ►

**5-anıqlama.** Eger $\{x_n\}$ izbe-izlik ushın

$$\forall M \in R, \ \exists n_0 \in N : \ x_{n_0} > M$$

bolsa, onda izbe-izlik joqarıdan shegaralanbaǵan delinedi.

Meyli $a \in R$ sanı hám qálegen oń $\varepsilon$ san berilgen bolsın.

**6-anıqlama.** Berilgen

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in R | \ a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = (a - \varepsilon, \ a + \varepsilon)$$

kóplik $a$ noqattıń $\varepsilon$ - dógeregi delinedi.

Meyli $\{x_n\}$ izbe-izlik hám $a \in R$ sanı berilgen bolsın.

**7-anıqlama**. Eger qálegen $\varepsilon > 0$ sanı ushın sonday $n_0$ natural sanı bar bolıp, $n > n_0$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı barlıq natural sanlar ushın

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad (3)$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $a$ sanı $\{x_n\}$ izbe-izliktiń limiti delinedi hám

$$a=\lim_{n\to\infty} x_n \text{ yamasa } n\to\infty \text{ da } x_n\to a$$

arqalı belgilenedi. (3) teńsizlik ushın

$$|x_n-a|<\varepsilon \Leftrightarrow a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$$

yaǵnıy, $x_n\in U_\varepsilon(a), \quad (n>n_0)$ boladı.

**8-anıqlama.** Eger $a$ noqattıń qálegen $U_\varepsilon(a)$ dógeregin alǵanda $\{x_n\}$ izbe-izliktiń bazı bir aǵzasınan keyin barlıq aǵzaları sonday dógeregine tiyisli bolsa, onda $a$ sanı $\{x_n\}$ izbe-izliktiń limiti delinedi.

Joqarıda keltirilgen anıqlamalardan $\varepsilon$ qálegen oń san bolıp, natural $n_0$ sanı bolsa $\varepsilon$ ǵa hám qaralıp atırǵan izbe-izlikke baylanıslı boladı.

**2-mısal.** Berilgen

$$x_n=c \quad (c\in R,\ n=1,2,3,...)$$

izbe-izliktiń limiti c ǵa teń boladı.

◀Haqıyqatanda, bunda $\forall\ \varepsilon>0$ ushın $n_0=1$ bolsa, onda $\forall n>n_0$ ushın $|x_n-c|=0<\varepsilon$ boladı. Demek, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}c=c$ ▶

**3-mısal.** Berilgen

$$x_n=\frac{1}{n} \qquad (n=1,2,3,....)$$

Izbe-izliktiń limiti 0 ge teń bolıwın dálilleń:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

◀ Málim bolǵanınday,

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}$$

bolıp, $\frac{1}{n}<\varepsilon\ (\varepsilon>0)$ teńsizlik barlıq $n>\frac{1}{\varepsilon}$ bolǵanda orınlı boladı. Onda

$$n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$$

delinse, ($[a]-a$ sanınan úlken bolmaǵan onıń pútin bólegi), onda $\forall n>n_0$ ushın

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$$

boladı. Anıqlamaǵa muwapıq

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\,.\ \blacktriangleright$$

**4-mısal.** Meyli $a\in R,\ |a|>1$ bolsın. Onda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=0$$

dálilleń.

◀ Meyli $|a|=1+\delta$ bolsın. Onda $\delta=|a|-1>0$ hám Bernulli teńsiz-liginen $(1+\delta)^n\geq 1+n\delta>n\delta$ bolıp, $\forall n\in N$ da $\frac{1}{|a|^n}<\frac{1}{n\delta}$ boladı. Demek, $\left|\frac{1}{a^n}-0\right|=\frac{1}{a^n}<\varepsilon$ teńsizlik barlıq $n>\frac{1}{\varepsilon\delta}$ bolǵanda orınlı.

Eger $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon\delta}\right]+1$dep, $\forall n>n_0$ ushın

$$\left|\frac{1}{a^n}-0\right|<\varepsilon$$

boladı. Demek,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=0\ \blacktriangleright$$

**5-mısal.** Berilgen $x_n=\frac{n}{n+1}\ (n=1,2,3,...)$ izbe-izliktiń limiti 1 ge teń bolıwın dálilleń.

◀ Qálegen $\varepsilon>0$ sanın alamız. Bunnan soń

$$|x_n-1|<\varepsilon$$

teńsizlikti qaraymız. Onda

$$|x_n-1|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{n}{n+1}\,,\qquad \frac{n}{n+1}<\varepsilon$$

boladı. Keyingi teńsizlikten

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

kelip shıǵadı. Demek, limittiń anıqlamasınan $n_0 \in N$ arqalı $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$ alınsa ($\varepsilon > 0$ ǵa kóre $n_0 \in N$ tabılıp), $\forall n > n_0$ ushın $|x_n - 1| < \varepsilon$ boladı. Bunnan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1. \blacktriangleright$$

**Teorema.** Eger $\{x_n\}$ izbe-izlik limitke iye bolsa, onda jalǵız boladı.

◀Kerisinshe uyǵarayıq. $\{x_n\}$ izbe-izlik eki $a$ hám $b$ $(a \neq b)$ limitlerge iye bolsın:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = b \qquad (a \neq b)$$

limittiń anıqlamasına muwapıq

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in N, \quad \forall n > n_0: \ |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0' \in N, \quad \forall n > n_0': \ |x_n - b| < \varepsilon$$

boladı. Eger $n_0$ hám $n_0'$ sanlarınıń úlkenin $\bar{n}$ desek, onda $\forall n > \bar{n}$ $|x_n - a| < \varepsilon,$ $|x_n - b| < \varepsilon$ bolıp

$$|x_n - a| + |x_n - b| < 2\varepsilon$$

boladı.

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |x_n - a| + |x_n - b|.$$

Demek, $\forall\ \varepsilon > 0$ da $|a - b| < 2\varepsilon$ bolıp, bunnan $a = b$ kelip shıǵadı. ▶

## 2.2. Jıynaqlı izbe-izliklerdiń qásiyetleri

Meyli $\{x_n\}$ sanlar izbe-izligi berilgen bolsın.

**1-anıqlama**. Eger $\{x_n\}$ izbe-izlik shekli limitke iye bolsa, onda jıynaqlı izbe-izlik delinedi.

*1⁰. Jıynaqlı izbe-izliktiń shegaralanǵanlıǵı. Teńsizliklerde limitke ótiw.*

**1-teorema.** Eger $\{x_n\}$ izbe-izlik jıynaqlı bolsa, onda shegaralanǵan boladı.

◀ Meyli

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad (a \in R)$$

bolsın. Limittiń anıqlamasınan

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in N, \ \ \forall n > n_0; \ \ | x_n - a | < \varepsilon$$

boladı. Demek, $n > n_0$ ushın

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

boladı. Eger

$$\max\left\{|a-\varepsilon|, \ \ |a+\varepsilon|, \ |x_1|, \ |x_2|, ..., |x_{n_0}|\right\} = M$$

bolsa, onda $\forall n \in N$ ushın

$$| x_n | \le M$$

teńsizlik orınlı boladı. Bunnan $\{x_n\}$ izbe-izliktiń shegaralanganlıǵın bildiredi. ▶

**2-teorema.** Eger $\{x_n\}$ izbe-izlik jıynaqlı hám

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

bolıp, $a > p \ \ (a < q)$ bolsa, onda sonday $n_0 \in N$ tabılıp, $\forall n > n_0$ bolǵanda

$$x_n > p \ \ (x_n < q)$$

boladı.

◀ Meyli

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad a > p \quad (p \in R)$$

bolsın. ε > 0 sanınıń qálegen ekenligiden paydalanıp, $\varepsilon < a - p$ dep qaraymız. Izbe-izliktiń limitiniń anıqlamasına muwapıq, $\forall \ \varepsilon > 0$ ushın, hám $0 < \varepsilon < a - p$ ushın, sonday $n_0 \in N$ tabıladı, $\forall n > n_0$ bolǵanda

$$| x_n - a | < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

bolıp,

$$0 < \varepsilon < a - p \Rightarrow p < a - \varepsilon,$$
$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n.$$

Bul teńsizliklerden $\forall n > n_0$ bolǵanda

$$x_n > p$$

kelip shıǵadı. ►

($a < q$ ushında teorema joqarıdaǵıday dálillenedi).

**3-teorema.** Eger $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ izbe-izlik jıynaqlı bolıp,

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b;$

2) $\forall n \in N$ ушын $x_n \le y_n \quad (x_n \ge y_n)$

bolsa, onda $a \le b \quad (a \ge b)$ boladı.

◄ Shártke muwapıq

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Izbe-izliktiń limiti anıqlamaǵa muwapıq:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0^{'} \in N,\ \ \forall n > n_0^{'}:\ \ |x_n - a| < \varepsilon,$$
$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0^{''} \in N,\ \ \forall n > n_0^{''}\ \ \ |y_n - b| < \varepsilon$$

boladı. Eger $n_0 = \max\{n_0^{'}, n_0^{''}\}$ bolsa, onda $\forall n > n_0$ ushın bir waqıtta

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad |y_n - b| < \varepsilon$$

teńsizlikler orınlanadı hám

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon\ ,$$
$$|y_n - b| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon.$$

teńsizliklerden hám teoremanıń 2-shártinen paydalanıp tabamız:

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n < b + \varepsilon.$$

Keyingi teńsizliklerden

$$a - \varepsilon < b + \varepsilon, \qquad a - b < 2\varepsilon$$

hám $\forall\varepsilon > 0$ ushın $a - b \le 0$, yaǵnıy $a \le b$ kelip shıǵadı.

Usıǵan uqsas $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ hám $\forall n \in N$ ushın $x_n \ge y_n$ bolǵanlıqtan $a \ge b$ teńsizlikten kelip shıǵıwı kórsetilgen. ►

**4-teorema.** Eger $\{x_n\}$ hám $\{z_n\}$ izbe-izlik jıynaqlı bolıp,

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$

2) $\forall n \in N$ ushın $x_n \le y_n \le z_n$

bolsa, onda $\{y_n\}$ izbe-izlik jıynaqlı hám

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a$$

boladı.

◀ Shártke kóre

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = a.$$

Limittiń anıqlamasına muwapıq:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0^{'} \in N,\ \ \forall n > n_0^{'}:\ \ |x_n - a| < \varepsilon,$$
$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0^{''} \in N,\ \ \forall n > n_0^{''}\ \ \ |z_n - a| < \varepsilon$$

boladı. Eger $n_0 = \max\{n_0^{'},\ n_0^{''}\}$ bolsa, onda $\forall n > n_0$ ushın

$$a - \varepsilon < x_n, \quad z_n < a + \varepsilon$$

teńsizliklar orınlanadı. Teoremanıń 1-shártinen paydalanıp tabamız:

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon\,.$$

keyingi teńsizliklerden

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon, \quad \text{yaǵnıy} \quad |y_n - a| < \varepsilon$$

kelip shıǵadı. Demek,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

orınlı boladı. ▶

**1-mısal.** Berilgen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$$

limitti tabıń.

◀ Barlıq $n \ge 2$ bolǵanda $\sqrt[2n]{n} > 1$ boladı.

Meyli $\sqrt[2n]{n} = 1 + \alpha_n$ bolsın. Onda

$$\sqrt[n]{n} = (1 + \alpha_n)^2 \tag{1}$$

hám $\sqrt{n} = (1 + \alpha_n)^2$ boladı. Bernulli teńsizliginen paydalansaq:

$$\sqrt{n} = (1 + \alpha_n)^n \ge 1 + n\cdot\alpha_n > n\cdot\alpha_n \tag{2}$$

(1) hám (2) qatnaslardan $a_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ hám $1 < \sqrt[n]{n} < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$

teńsizlikleri kelip shıǵadı. Eger $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = 1$ esapqa alsaq, onda 4-teoremaǵa

muwapıq $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$. ►

**2-mısal.** Berilgen

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}$$

limitti tabıń.

◄Bizge belgili,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1,$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n.$$

Demek,

$$1 < \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}} < \sqrt[n]{n}\,.$$

4-teoremadan paydalanıp:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}} = 1. \ ►$$

2. *Jıynaqlı izbe-izliklar ústinde ámeller.* Meyli $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ izbe-izlikler berilgen bolsın:

$$\{x_n\}:\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n, \ldots$$
$$\{y_n\}:\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots, y_n, \ldots$$

Tómendegi

$$x_1 + y_1,\quad x_2 + y_2,\quad x_3 + y_3,\ \ldots,\quad x_n + y_n, \ldots$$

$$x_1 - y_1,\quad x_2 - y_2,\quad x_3 - y_3,\ \ldots,\quad x_n - y_n, \ldots$$

$$x_1 \cdot y_1,\quad x_2 \cdot y_2,\quad x_3 \cdot y_3, \ldots, x_n \cdot y_n, \ldots$$

$$\frac{x_1}{y_1},\ \frac{x_2}{y_2},\ \frac{x_3}{y_3},\ \ldots,\ \frac{x_n}{y_n},\ \ldots \qquad (y_n \neq 0,\quad n = 1, 2, 3, \ldots)$$

izbe-izlikler sáykes túrde $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ izbe-izliklerdiń qosındısı, ayırması, kóbeymesi hám qatnası delinedi hám olar

$$\{x_n + y_n\},\ \{x_n - y_n\},\ \{x_n \cdot y_n\},\ \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$$

arqalı belgilenedi.

**5-teorema.** Meyli $\{x_n\}$ hám $\{y_n\}$ izbe-izlikleri berilgen bolıp,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b, \qquad (a \in R,\quad b \in R)$$

bolsın. Onda $n \to \infty$ da $(c \cdot x_n) \to c \cdot a$;

$$x_n + y_n \to a + b; \qquad x_n \cdot y_n \to ab; \qquad \frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}\ (b = 0),$$ yaǵnıy

a) $\forall c \in R$ да $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot x_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

v) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \quad (b \neq 0)$

boladı. Teoremanıń tastıyıqlawlarınıń birewi, máselen v)-nıń dálillin keltiremiz.

◄ Teoremanıń shártine kóre,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Bunnan,

$$\begin{aligned} |x_n \cdot y_n - ab| &= |x_n \cdot y_n - a \cdot y_n + a \cdot y_n - b| \leq \\ &\leq |x_n - a| \cdot |y_n| + |a| \cdot |y_n - b|. \end{aligned} \tag{3}$$

$\{y_n\}$ izbe-izlik jıynaqlı bolǵanlıǵı sebebli ol 1-teoremaǵa kóre shegaralanǵan boladı:

$$\exists M > 0, \quad \forall n \in N: \quad |y_n| \leq M.$$

Izbe-izliktiń limitiniń anıqlamasınan paydalanıp tabamız:

$\forall \varepsilon > 0$ berilgen hám $\frac{\varepsilon}{2M}$ ǵa kóre sonday $n_0' \in N$ tabıladı, $\forall n > n_0'$ ushın

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

boladı. Sonday-aq, $\frac{\varepsilon}{2(1+|a|)}$ ǵa kóre sonday $n_0'' \in N$ tabılıp, $\forall n > n_0''$ ushın

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(1+|a|)}$$

boladı. Eger $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$ bolsa, onda $\forall n > n_0$ ushın bir waqıtta

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(1+|a|)} \tag{4}$$

boladı. (3) hám (4) qatnaslardan

$$|x_n \cdot y_n - ab| < \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{2(1+|a|)} < \varepsilon$$

kelip shıǵadı. Bunnan

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = ab$$

orınlı eken. ►

3. *Sheksiz kishi hám sheksiz úlken shamalar*. Meyli $\{\alpha_n\}$ izbe-izlik berilgen bolsın.

**2-anıqlama.** Eger $\{\alpha_n\}$ izbe-izliktiń limiti nolge teń, yaǵnıy

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

bolsa, onda $\{\alpha_n\}$ - sheksiz kishi shama delinedi.

Máselen,

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \quad \text{ва} \quad \alpha_n = q^n, \ (|q| < 1)$$

izbe-izlikler sheksiz kishi shamalar boladı.

Meyli $\{x_n\}$ izbe-izlik jıynaqlı bolıp, onıń limiti a ǵa teń bolsın,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Onda $\alpha_n = x_n - a$ sheksiz kishi shama boladı. Keyingi teńlikten tabamız: $x_n = a + \alpha_n$. Bunnan tómendegi nátiyje kelip shıǵadı:

$\{x_n\}$ izbe-izliktiń $a$ $(a \in R)$ limitke iye bolıwı ushın $\alpha_n = x_n - a$ sheksiz kishi shama bolıwı zárúrli hám jetkilikli.

Izbe-izliktiń limitiniń anıqlamasınan paydalanıp tómendegi eki lemmanı dálillew qıyın emes.

**1-lemma.** Shekli sandaǵı sheksiz kishi shamalar jıyındısı sheksiz kishi shama boladı.

**2-lemma.** Shegaralanǵan shama menen sheksizlik kishi shamanıń kóbeymesi sheksiz kishi shama boladı.

**3-anıqlama.** Eger hár qanday $M$ sanın alǵanda da sonday natural $n_0$ sanı tabalıp, barlıq $n > n_0$ ushın

$$|x_n| > M$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $\{x_n\}$ izbe-izliktiń limiti sheksizlik delinedi hám

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

arqalı belgilenedi.

Eger $\{x_n\}$ izbe-izliktiń limiti sheksizlik bolsa, onda $\{x_n\}$ sheksiz úlken shama delinedi.

Máselen $x_n = (-1)^n \cdot n$ izbe-izlik sheksiz úlken shama boladı.

Endi sheksiz kishi hám sheksiz úlken shamalar arasındaǵı baylanıslardı keltiremiz:

1) Eger $\{x_n\}$ sheksiz kishi shama $(x_n \neq 0)$ bolsa, onda $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ sheksiz úlken shama boladı.

2) Eger $\{x_n\}$ sheksiz úlken shama bolsa, onda $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ sheksiz kishi shama boladı.

## 2.3. Monoton izbe-izliklerdiń limiti

Meyli $\{x_n\}$

$$x_1,\ x_2, ...,\ x_n,\ ... \qquad (1)$$

izbe-izlikler berilgen bolsın.

**1-anıqlama.** Eger (1) izbe-izlikte $\forall n \in N$ ushın $x_n \leq x_{n+1}$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $\{x_n\}$ ósiwshi izbe-izlikler delinedi. Eger (1) izbe-izlikte $\forall n \in N$ ushın $x_n < x_{n+1}$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $\{x_n\}$ qatań ósiwshi izbe-izlikler delinedi.

**2-anıqlama.** Eger (1) izbe-izlikte $\forall n \in N$ ushın $x_n \geq x_{n+1}$ tensizlik orınlı bolsa, onda $\{x_n\}$ kemeyiwshi izbe-izlikler delinedi. Eger (1) izbe-izlikte $\forall n \in N$ ushın $x_n > x_{n+1}$ tensizlik orınlı bolsa, onda $\{x_n\}$ qatań kemeyiwshi izbe-izlikler delinedi.

**1-mısal.** Bul

$$x_n = \frac{n+1}{n}: \quad \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ ...$$

izbe-izlikler qatań kemeyiwshi izbe-izlikler boladı.

◀Haqıyqatında da, berilgen izbe-izlikler ushın

$$x_n = \frac{n+1}{n}, \quad x_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

bolıp, $\forall n \in N$ ushın

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

boladı. Onda $x_{n+1} < x_n$ kelip shıǵadı. ▶

Joqarıdaǵı anıqlamalardan tómendegi juwmaqlar kelip shıǵadı:

1) Eger $\{x_n\}$ izbe-izlikler ósiwshi bolsa, onda ol tómennen shegaralanǵan boladı.

2) Eger $\{x_n\}$ izbe-izlikler kemeyiwshi bolsa, onda ol joqarıdan shegaralanǵan boladı.

Ósiwshi hám kemeyiwshi izbe-izlikler ulıwma monoton izbe-izlikler delinedi.

**2-mısal.** $x_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}, \ (n = 1, 2, 3, ...)$ izbe-izliktiń qatań ósiwshi ekenligin dálilleń.

◀ Bul izbe-izliktiń $n$ – hám $(n+1)$ – aǵzaları ushın

$$x_n = \frac{n^2}{n^2+1} = 1 - \frac{1}{n^2+1},$$

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2+1}$$

boladı. Bunnan

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}\ .$$

teńsizlikti esapqa alıp,

$$x_{n+1} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2+1} > 1 - \frac{1}{n^2+1} = x_n.$$

Demek, $\forall n \in N$ ushın $x_n < x_{n+1}$. Bul bolsa qaralıp atırǵan izbe-izliktiń qatań ósiwshi bolıwın bildiredi. ▶

Endi monoton izbe-izliklerdiń limiti haqqında teoremalardı keltiremiz.

**1-teorema.** Eger $\{x_n\}$ izbe-izlikler ósiwshi hám joqarıdan shegaralanǵan bolsa, onda ol shekli limitke iye boladı.

◀ Meyli $\{x_n\}$ izbe-izlikler ushın teoremanıń eki shárti orınlı bolsın. Bul izbe-izliktiń barlıq aǵzalarınan ibarat kóplikti $E$ menen belgileymiz:

$$E = \{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n,\ ...\}.$$

Ulıwma aytqanda, $E$ joqarıdan shegaralanǵan kóplik bolıp, $E \neq \varnothing$. Onda kóplikti anıq shegarasınıń bar bolıwı haqqındaǵı teoremaǵa muwapıq $\sup E$ bar boladı. Onı $a$ menen belgileyik:

$$\sup E = a\,.$$

$\forall\ \varepsilon > 0$ sanın alayıq. Kópliktiń anıq joqarı shegarasınıń anıqlamasına tiykarlanıp:

1) $\forall n \in N$ ushın $x_n \le a$

$$2)\ \exists x_{n_0} \in E, \qquad x_{n_0} > a - \varepsilon$$

boladı. Bunda $\forall n > n_0$ ushın $x_n \geq x_{n_0}$ tensizlik orınlanıp, $x_n > a - \varepsilon$ boladı. Nátijede $\forall n > n_0$ ushın $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ yaǵnıy $|a - x_n| < \varepsilon$ bolıwın tabamız.

Demek $\{x_n\}$ izbe-izlikler shekli limitke iye hám

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \sup E\,. \ ►$$

**2-teorema.** Eger $\{x_n\}$ izbe-izlikler kemeyiwshi hám tómennen shegaralanǵan bolsa, onda ol shekli limitke iye boladı.

**3-mısal.** $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$ izbe-izliktiń limitin tabıń.

◄ $\forall n \geq 1$ ushın $x_n > 0$ boladı. Bul izbe-izliktiń $x_{n+1}$ hám $x_n$ aǵzalardıń qatnasın qaraymız:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n} = \frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1.$$

Demek, $x_{n+1} < x_n$. Bunnan berilgen izbe-izliktiń kemeyiwshi ekenligi kelip shıǵadı.

Bunda $\forall n \geq 1$ de

$$0 < x_n \leq x_1$$

qatnas orınlı boladı. Demek, berilgen izbe-izlikler shegaralanǵan. 1-teoremadan $\{x_n\}$ izbe-izlikler shekli limitke iye. Onı $a$ menen belgileymiz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = a\,. \qquad (a \geq 0)$$

Endi $x_n - x_{n+1}$ ayırmanı qaraymız. Bul ayırma ushın

$$x_n - x_{n+1} = x_n - x_n \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = x_n \frac{(n+1)^n - n^n}{(n+1)^n} \geq$$

$$\geq x_n \cdot \frac{2n^n - n^n}{(n+1)^n} = x_n \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = x_{n+1}$$

bolıp, bunnan

$$x_n \geq 2x_{n+1}$$

kelip shıǵadı. Keyingi qatnaslardan

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq 2\lim_{n\to\infty} x_{n+1}, \qquad a \geq 2a.$$ Bul jaǵdayda $a = 0$ boladı.

Demek,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0. \blacktriangleright$$

$e$ **sanı.** Bul

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{1}$$

izbe-izlikti qaraymız.

**Tastıyıqlaw.** (1) izbe-izlikler ósiwshi hám shegaralanǵan boladı.

**3-anıqlama.** (1) izbe-izliktiń limiti e sanı delinedi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Bul $e$ sanı irracional san bolıp,

$$e = 2{,}7182818284\ 59045\ \ldots$$

boladı.

## 2.4. Ishpe-ish jaylasqan segmentler principi

Meyli $[a_1, b_1]$ va $[a_2, b_2]$ segmentler berilgen bolsın . Eger

$$[a_1, b_1] \subset [a_2, b_2]$$

bolsa, onda $[a_1, b_1]$ segment $[a_2, b_2]$ segmenttiń ishine jaylasqan delinedi. Bul jaǵdayda $a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1$ boladı.

**Anıqlama.** Eger

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], ...., [a_n, b_n], ... \tag{1}$$

cegmentler izbe-izligi ushın tómendegi

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$$

qatnasta, yamasa $\forall n \in N$ de

$$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

bolsa, onda (1) ishpe-ish jaylasqan segmentler izbe-izligi delinedi.

**Teorema**. Meyli

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2],...., [a_n, b_n],...$$

cegmentler izbe-izligi tómendegi shártleri orınlı bolsın:

1) $\forall n \in N: \quad [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$,

2) $\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in N, \ n > n_0: \quad b_n - a_n < \varepsilon$ bolsın, onda sonday $c \in R$ bar bolsa, onda $c \in [a_n, b_n], \ (n = 1, 2, 3, ...)$ bolıp hám bunday can jalǵız boladı.

◀ Teoremada qaralıp atırǵan segmentler izbe-izligi ishpe-ish jaylasqan segmentler izbe-izligi boladı hám bunnan

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_n < b_n \le b_{n-1} \le ... \le b_2 \le b_1$$

qatnas orınlanadı. Endi $a_1, a_2, ..., a_n$ sanlarınan payda bolǵan

$$E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

kóplikti qaraymız. Bul kópliktiń joqarıdan shegaralanǵanlıǵın kórsetemiz.

Qálegen natural m sanın alamız hám onı turaqlı dep uyǵaramız

Eger $n \le m$ bolsa, onda $[a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]$ bolıp, $a_n \le a_m < b_m \le b_n$, yamasa $a_n < b_m$ boladı.

Eger $n > m$ bolsa, $[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m]$ bolıp, $a_m \le a_n < b_n \le b_m$, yamasa $a_n < b_m$ boladı.

Anıq joqarı shegara haqqındaǵı teoremaǵa muwapıq

$$\sup E = c \qquad (c \in R)$$

bar boladı. Kópliktiń anıq joqarı shegarası anıqlamasına tiykarlanıp

$$\forall n \in N \text{ de } a_n \le c \text{ hám } \forall m \in N \text{ de } c \le b_m \text{ boladı.}$$

Demek,

$$\forall n \in N \text{ da } c \in [a_n, b_n].$$

Eger usı tochkadan basqa hám barlıq segmentlerge tiyisli $c' \ (c' \in [a_n, b_n], \ \forall n \in N)$ bar dep uyǵarsaq bolsa, onda onda

$$b_n - a_n \ge |c - c'| > 0$$

bolıp, bul teoremanıń 2-shártine qarsı boladı.

Demek, $c = c'$ ►.

## 2.5. Úles izbe-izlikler. Bol'cano-Veyershtrass teoreması

Meyli

$$\{x_n\}:\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_n,... \tag{1}$$

izbe-izlik berilgen bolsın. Bul (1) izbe-izliktiń bazı $n_1$ nomerli $x_{n_1}$ aǵzasın alamız. Sońınan nomeri $n_1$ den úlken bolǵan $n_2$ nomerli $x_{n_2}$ aǵzasın alamız. Usınday usıl menen $x_{n_3}$, $x_{n_4}$ hám t.b. aǵzaların tańlap alamız. Nátiyjede nomerleri

$$n_1 < n_2 < n_3 < .. < n_k < ...$$

tensizliklerdi qanaatlandırıwshı (1) izbe-izliktiń aǵzaları

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ ...,\ x_{n_k},\ ... \tag{2}$$

izbe-izlikti payda etedi.

(2) izbe-izlik (1) izbe-izliktiń úles izbe-izligi delinedi hám $\{x_{n_k}\}$ kórniste belgilenedi.

Máselen,

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ ...\ ,$$
$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ ...\ ,$$
$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ ...$$

izbe-izlikler $1,\ 2,\ 3,\ 4,..,n,\ ...$ izbe-izliktiń úles izbe-izlikleri,

$$1,\ 1,\ 1,\ ...\ ,\ 1,\ ...,$$
$$-1,\ -1,\ ...,\ -1,\ ...$$

izbe-izlikler $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ ...\ ,\ (-1)^{n+1},\ ...$ izbe-izliktiń úles izbe-izlikleri boladı. Keltirilgen túsinikler hám mısallardan biri izbe-izliktiń hár túrli úles izbe-izlikleri bolıwı kelip shıǵadı.

**1-teorema.** Eger $\{x_n\}$ izbe-izlik limitke iye bolsa, onda onıń hár qanday úles izbe-izligide usı limitke iye boladı.

◀ Bul teoremanıń dálilli izbe-izlik limiti tárepinen kelib shıǵadı. ▶

**Eskertiw.** Izbe-izlik úles izbe-izliklerdiń limiti bar bolıwınan berilgen izbe-izliktiń limitiniń bar bolıwı hár dayım kelip shıqpaydı.

Máselen, $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \dots,\ (-1)^{n+1},\ \dots$ izbe-izliktiń úles izbe-izlikleri

$$1,\ 1,\ 1,\ \dots,\ 1,\ \dots,$$
$$-1,\ -1,\ \dots,\ -1,\ \dots$$

limiti bolǵan jaǵdayda izbe-izliktiń óziniń limitke iye emes.

**2-teorema (Bol'cano-Veyershtrass teoremasi).** Hár qanday shegaralanǵan izbe-izlikten shekli sanǵa umtılıwshı úles izbe-izlik ajratıw múmkin.

◀ $\{x_n\}$ izbe-izlik berilgen bolıp, ol shegaralanǵan bolsın, onda $\{x_n\}$ izbe-izliktiń barlıq aǵzaları $[a,b]$ da jaylasqan dep qaraw múmkin: $x_n \in [a,\ b],\quad n=1,\ 2,\ 3,\dots [a,\ b]$ segmentin

$$\left[a,\ \frac{a+b}{2}\right],\quad \left[\frac{a+b}{2},\ b\right]$$

segmentlerge ajratamız. $\{x_n\}$ izbe-izliktiń sheksiz kóp aǵzaları jaylasqanın $[a_1,\ b_1]$ deymiz. Meyli $[a_1,\ b_1]$ uzınlıǵı $\dfrac{b-a}{2}$ ge teń boladı. Joqarıdaǵıǵa uqsas$[a_1,\ b_1]$ segmentin

$$\left[a_1,\ \frac{a_1+b_1}{2}\right],\quad \left[\frac{a_1+b_1}{2},\ b_1\right]$$

segmentlerge ajratamız. Berilgen izbe-izliktiń sheksiz kóp sandaǵı aǵzaları bolǵanın $[a_2,\ b_2]$ dep belgileymiz. Bunda $[a_2,\ b_2]$ nıń uzınlıǵı $\dfrac{b-a}{2^2}$ ge teń boladı. Bul process dawam ettiriw nátiyjesinde bul

$$[a_1,\ b_1],\ [a_2,\ b_2],\ \dots,\ [a_k,\ b_k],\ \dots$$

segmentler izbe-izligi payda boladı. Bul segmentler izbe-izligi ushın

$$[a_1,\ b_1]\supset[a_2,\ b_2]\supset\dots\supset[a_k,\ b_k]\supset\dots \text{ bolıp, } k\to\infty \text{ de}$$

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \to 0$$

boladı. Ishpe-ish jaylasqan segmentler principi

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = C \qquad (C \in R)$$

boladı. Endi $\{x_n\}$ izbe-izliktiń $[a_1, b_1]$ degi bazı bir $x_{n_1}$ aǵzasın, $[a_2, b_2]$ degi bazı bir $x_{n_2}$ aǵzasın h.t.b. $[a_k, b_k]$ degi bazı bir $x_{n_k}$ aǵzasın h.t.b. aǵzaların alamız. Nátijede $\{x_n\}$ izbe-izliktiń aǵzalarınan tabılǵan bul

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ \ldots,\ x_{n_k},\ \ldots \qquad (n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots)$$

úles izbe-izlik payda boladı. Bul izbe-izlik ushın

$$a_k \le x_{n_k} \le b_k \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

bolıp, onnan $k \to \infty$ de $x_{n_k} \to C$ yaǵnıy $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = C$ kelip shıǵadı. ►

## 2.6. Fundamental izbe-izlikler. Koshi teoreması

Meyli $\{x_n\}$ izbe-izlik berilgen bolsın.

**Anıqlama.** Eger hár qanday $\varepsilon > 0$ alınǵanda da sonday natural $n_0$ sanı tabılıp, barlıq $n > n_0$ hám $m > n_0$ ushın

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $\{x_n\}$ fundamental izbe-izlik delinedi.

Máselen,

$$x_n = \frac{n}{n+1} \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

fundamental izbe-izlik boladı.

◄Haqıyqatında, berilgen izbe-izlik ushın

$$|x_n - x_m| = \left|\frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1}\right| < \frac{n+m}{nm} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

bolıp, $\forall\varepsilon > 0$ sanı ushın $n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$ dep belgilesek, $\forall n > n_0$, $\forall m > m_0$ bolǵanda

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

boladı. ►

**Teorema. (Koshi teoreması).** Izbe-izliktiń jıynaqlı bolıwı ushın onıń fundamental bolıwı zárúrli hám jetkilikli.

◄**Zárúrligi.** $\{x_n\}$ izbe-izlik jıynaqlı bolıp, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ bolsın. Limit anıqlamasına tiykarlanıp

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N,\ \forall n > n_0 : |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Solay etip, $\forall m > n_0 : |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ boladı. Nátijede $\forall n > n_0$, $\forall m > n_0$ uchun

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$$

kelip shıǵadı. Demek, $\{x_n\}$ fundamental izbe-izlik.

**Jetkilikligi.** Meyli $\{x_n\}$ fundamental izbe-izlik bolsın:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N,\ \forall n > n_0,\ \forall m > n_0 :\ |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Eger $m > n_0$ shártti qanaatlandırıwshı $m$ fikserlengen bolsa, onda

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \Leftrightarrow x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$$

bolıp $\{x_n\}$ izbe-izliktiń shegaralanǵanlıǵı kelip shıǵadı.

Bol'cano-Veyershrass teoremasına tiykarlanıp bul izbe-izlikten jıynaqlı úles $\{x_{n_k}\}$ izbe-izlikti ajratıw múmkin $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a.$

Demek,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in N,\ \forall k > k_0 :\ |x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

boladı. Eger $m = n_k$ bolsa, onda

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon$$

boladı. Keyingi eki teńsizliklerden

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < 2\varepsilon$$

kelip shıǵadı. Demek, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$ ►

# 3-§. FUNKCIYA

## 3.1. Funkciya túsinigi

Meyli $E$ kópligin $F$ kóplikke sáwlelendiriw

$$f:\ E\to F$$

berilgen bolıp, $E=F$, $F=R$ dep belgileymiz. Onda hár bir haqıyqıy $x$ sanǵa bazı bir haqıyqıy sandı sáykes qoyıwshı

$$f:\ F\to R\quad (x\xrightarrow{f}y)$$

sáwlelendiriwine kelemiz. Bunnan funkciya túsinigine alıp keledi.

Meyli $X\subset R$, $Y\subset R$ kóplikler berilgen bolıp, $x$ hám $y$ ózgeriwshiler sáykes tárizde usı kópliklerde ózgersin: $x\in X$, $y\in Y$.

**1-anıqlama.** Eger $X$ kópliktegi hár bir $x$ sanǵa bazı bir $f$ qaǵıydaǵa qarata $Y$ ge tek bir $y$ san sáykes qoyılǵan bolsa, onda $X$ kóplikte funkciya berilgen (anıqlanǵan) delinedi hám

$$f: x\to y \text{ yaǵnıy } y=f(x)$$

kórinisinde belgilenedi. Bunda $X$ - funkciyanıń anıqlanıw oblastı, $Y$ - funkciyanıń mánisler kópligi (oblastı) delinedi. $x$ - ǵárezli ózgeriwshi yamasa funkciyanıń argumenti.

**Mısallar.** 1. $X=(-\infty,+\infty)$, $Y=(0,+\infty)$ bolıp, $f$ qaǵıyda

$$f: x\to y=x^2+1$$

bolsın. Bul jaǵdayda hár bir $x\in X$ ge bir $x^2+1\in Y$ sáykes qoyılıp,

$$y=x^2+1$$

funkciyaǵa iye bolamız.

2. Hár bir racional sanǵa 1 di, hár bir irracional sanǵa 0 di sáykes qoyıw nátiyjesinde funkciya payda boladı. Ádette bul Dirixle funkciyası bolıp $D(x)$ kóriniste belgilenedi:

$$D(x)=\begin{cases}1\ , \ eger\ \ x\ \ racional\ \text{san},\\ 0\ ,\ eger\ \ x\ \ irracional\ \ san\end{cases}$$

Solay etip, $y=f(x)$ funkciya ol $X$ kóplik, $Y$ kóplik hám hár bir $x\in X$ bir $y\in Y$ tı sáykes qoyıwshı $f$ qaǵıydanıń beriliwi menen anıqlanadı.

Meyli $y=f(x)$ funkciya $X\subset R$ kóplikte berilgen bolsın. $x_0\in X$ noqatǵa sáykes keliwshi $y_0$ noqat $y=f(x)$ funkciyanıń $x=x_0$ noqatdaǵı mánisi delinedi hám $f(x_0)=y_0$ kóriniste belgilenedi.

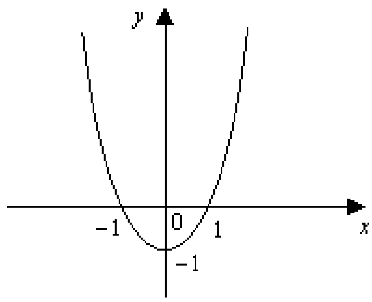
Tegislikte dekart koordinatalar sistemasın alamız. Tegisliktegi $(x, f(x))$ noqatlardan ibarat

$$\{(x, f(x))\}=\{(x, f(x))|\ x\in X\ , f(x)\in Y\}$$

kóplik $y=f(x)$ funkciyanıń grafigi delinedi. Máselen,

$$y=x^2-1\quad (x\in X=[-2,2])$$

funkciyanıń grafigi 1-sızılmada suwretlengen.




1-sızılma.

Funkciya anıqlamasındaǵı $f$ qaǵıyda hár túrli bolıwı múmkin.

a) Kóbinese $x$ hám $y$ ózgeriwshiler arasındaǵı baylanıs formulalar járdeminde belgilenedi. Bul funkciyanıń analitikalıq usılda beriliwshi delinedi. Máselen,

$$y=\sqrt{1-x^2}$$

funkciya analitik usılda berilgen bolıp onın anıqlanıw kópligi

$$X=\{x\in R\,|\,-1\le x\le 1\}=[-1,1]$$

boladı.

Meyli $x$ hám $y$ ózgeriwshiler arasındaǵı baylanıs tómendegi formulalar járdeminde berilgen bolsın:

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, \; eger \; x > 0, \\ -1, \; eger \; x < 0. \end{cases}$$

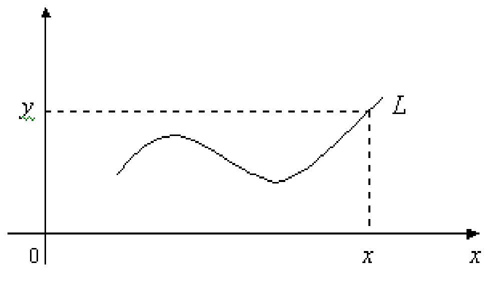
Bul funkciyanıń anıqlanıw kópligi $X = R \setminus \{0\}$ bolıp, mánisleri kópligine iye $Y = \{-1,1\}$ boladı. Ádette bul funkciya $y = \text{sign}x$ kórinistegi belgilenedi.

b) Ayırım jaǵdaylarda $x \in X$, $y \in Y$ ózgeriwshiler arasındaǵı baylanıs tablicalar arqalı bolıwı múmkin. Máselen, kún dawamında hawa temperaturasın baqlaǵanımızda $t_1$ waqıtta hawa temperaturası $T_1$, $t_2$ waqıtta hawa temperaturası $T_2$ h.t.b. bolsın. Nátiyjede tómendegi tablica payda boladı.

| $t-$ waqıt | $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | ... | $t_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $T-$ temperatura | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | ... | $T_n$ |

Bul tablica $t$ waqıt penen hawa temperaturası $T$ arasındaǵı baylanıstı ańlatadı, bunda $t$-argument, $T$ bolsa $t$ nıń funkciyası boladı.

v) $x$ hám $y$ ózgeriwshiler arasındaǵı baylanıs tegislikte bazı bir iymek sızıq arqalı hám ańlatıw múmkin (2-sızılma).




2- sızılma.

Máselen, 2- sızılmada suwretlengen $L$ iymek sızıq berilgen bolsın. $[a,b]$ segmenttegi hár bir noqatdan ótkizilgen perpendikulyar $L$ sızıqtı tek bir noqatda kesilsin. $\forall x \in [a,b]$ noqatdan perpendikulyar shıǵarıp, onıń $L$ sızıq penen kesilisiw noqatın tabamız. Alınǵan $x$ noqatǵa kesilisiw noqatınıń ordinatası $y$ ti sáykes qoyamız. Nátiyjede hár bir $x \in [a,b]$ ǵa bir $y$ sáykes qoyılıp, funkciya payda boladı. Bunda $x$ penen $y$ arasındaǵı baylanıstı berilgen $L$ iymek sızıq orınlaydı.

Meyli $f_1(x)$ funkciya $X_1 \subset R$ kóplikte, $f_2(x)$ funkciya bolsa $X_2 \subset R$ kóplikte anıqlanǵan bolsın.

Eger

1) $X_1 = X_2$

2) $\forall x \in X_1$ da $f_1(x) = f_2(x)$

bolsa, onda $f_1(x)$ hámde $f_2(x)$ funkciyalar óz-ara teń delinedi hám $f_1(x) = f_2(x)$ kóriniste belgilenedi.

*Funkciyanıń shegaralanǵanlıǵı.* $f(x)$ funkciya $X \subset R$ kóplikte berilgen bolsın.

**2-anıqlama.** Eger sonday turaqlı $M$ sanın tabılsa, $\forall x \in X$ ushın $f(x) \le M$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya $X$ kóplikte joqarıdan shegaralanǵan delinedi. Eger sonday turaqlı $m$ sanı tabılsa, $\forall x \in X$ ushın $f(x) \ge m$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya $X$ kóplikte tómennen shegaralanǵan delinedi.

**3-anıqlama.** Eger $f(x)$ funkciya $X$ kóplikte hám joqarıdan, hám tómennen shegaralanǵan bolsa, onda $f(x)$ funkciya $X$ kóplikte shegaralanǵan delinedi.

**1-mısal.** Usı $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ funkciyanı qarayıq. Bul funkciya $R$ de shegaralanǵan boladı.

◀ Solay etip, $\forall x \in R$ de $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4} > 0.$

Demek, berilgen funkciya R de tómennen shegaralanǵan.

Sonıń menen birge, $f(x)$ funkciya ushın

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4} + \frac{x^2}{1+x^4} \le 1 + \frac{x^2}{1+x^4}$$

boladı. Endi

$$0 \le (x^2-1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1 \quad \Rightarrow \ 2x^2 \le x^4 + 1 \ \Rightarrow \ \frac{x^2}{x^4+1} \le \frac{1}{2}$$

itibarǵa alsaq, onda $f(x)\leq 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. Bul $f(x)$ funkciyanıń joqarıdan shegaralanǵanlıǵın bildiredi. Demek, berilgen funkciya $R$ de shegaralanǵan. ►

**4-anıqlama.** Eger hár qanday $M>0$ san alınǵanda hám sonday $x_0\in X$ noqatı tabılsa,

$$f(x_0)>M$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya $X$ kóplikte joqarıdan shegaralanbaǵan delinedi.

*Periodlı funkciyalar. Jup hám taq funkciyalar.* $f(x)$ funkciya $X\subset R$ kóplikte berilgen bolsın.

**5-anıqlama.** Eger sonday turaqlı $T$ $(T\neq 0)$ san bar bolsa, onda $\forall x\in X$ ushın

1) $x-T\in X$, $x+T\in X$
2) $f(x+T)=f(x)$

bolsa, onda $f(x)$ periodlı funkciya delinedi, $T$ san bolsa $f(x)$ funkciyanıń periodı delinedi.

Máselen, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$ funkciyalar periodlı funkciyalar bolıp, olardıń periodı $2\pi$ ga, $f(x)=tgx$, $f(x)=ctgx$ funkciyalardıń periodı bolsa $\pi$ ǵa teń. Periodlı funkciyalar tómendegi qásiyetlerge iye:

a) Eger $f(x)$ periodlı funkciya bolıp, onıń periodı $T$ $(T\neq 0)$ bolsa, onda

$$T_n=nT \quad (n=\pm 1,\pm 2,)$$

sanlar hámusı funkciyanıń periodı boladı.

b) Eger $T_1$ hám $T_2$ sanlar $f(x)$ funkciyanıń periodı bolsa, onda $T_1+T_2\neq 0$ hámde $T_1-T_2$ $(T_1\neq T_2)$ sanlar hám $f(x)$ funkciyanıń periodı boladı.

v) Eger $f(x)$ hámde $g(x)$ funkciyalar periodlı funkciyalar bolıp, olardıń hár biriniń periodı $T$ $(T\neq 0)$ bolsa, onda

$$f(x)+g(x),\quad f(x)-g(x),\quad f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}\quad (g(x)\neq 0)$$

funkciyalar hám periodlı funkciyalar bolıp, $T$ san olardıń hám periodı boladı.

Bizge belgili, $\forall\, x \in X \ \ (X \subset R)$ ushın $-x \in X$ bolsa, onda X kóplik $O$ noqatǵa salıstırǵanda simmetriyalı kóplik delinedi.

Meyli $O$ noqatǵa salıstırǵanda simmetriyalı bolǵan $X$ kóplikte $f(x)$ funkciya berilgen bolsın.

**6-anıqlama.** Eger $\forall\, x \in X$ ushın $f(-x) = f(x)$ teńlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ jup funkciya delinedi. Eger $\forall\, x \in X$ ushın $f(-x) = -f(x)$ teńlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ taq funkciya delinedi.

Máselen, $f(x) = x^2 + 1$ jup funkciya, $f(x) = x^3 + x$ bolsa taq funkciya boladı. Bul $f(x) = x^2 - x$ funkciya jup ta emes, taq ta emes.

Eger $f(x)$ hám $g(x)$ jup funkciyalar bolsa, onda

$$f(x)+g(x), \quad f(x)-g(x), \quad f(x)\cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x)\neq 0)$$

funkciyalar da jup boladı.

Eger $f(x)$ hám $g(x)$ taq funkciyalar bolsa, onda

$$f(x)+g(x), \quad f(x)-g(x)$$

funkciyalar taq boladı,

$$f(x)\cdot g(x), \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x)\neq 0)$$

funkciyalar bolsa jup boladı.

Jup funkciyanıń grafigi ordinatalar kósherine salıstırǵanda, taq funkciyanıń grafigi koordinatalar basına salıstırǵanda simmetrik jaylasqan boladı.

*Monoton funkciyalar*. Meyli $f(x)$ funkciya $X \subset R$ kóplikte berilgen bolsın.

**7-anıqlama.** Eger $\forall\, x_1, x_2 \in X$ ushın $x_1 < x_2$ bolǵanda $f(x_1) \le f(x_2)$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya $X$ kóplikte ósiwshi delinedi. Eger $\forall\, x_1, x_2 \in X$ ushın $x_1 < x_2$ bolǵanda $f(x_1) < f(x_2)$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya $X$ kóplikte qatań ósiwshi delinedi.

**8-anıqlama.** Eger $\forall\, x_1, x_2 \in X$ ushın $x_1 < x_2$ bolǵanda $f(x_1) \geq f(x_2)$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya $X$ kóplikte kemeyiwshi delinedi. Eger $\forall\, x_1, x_2 \in X$ ushın $x_1 < x_2$ bolǵanda $f(x_1) > f(x_2)$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya $X$ kóplikte qatań kemeyiwshi delinedi.

Ósiwshi hám kemeyiwshi funkciyalar ulıwma monoton funkciyalar delinedi.

**2-mısal.** Bul $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ funkciyanıń $X = [1, +\infty)$ kóplikte kemeyiwshi ekenligin dálilleń.

◄ $[1, +\infty)$ da $\forall$ $x_1$ hám $x_2$ noqatların alıp, $x_1 < x_2$ bolsın desek. Onda

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{1+x_1^2} - \frac{x_2}{1+x_2^2} = \frac{x_1 + x_1 x_2^2 - x_2 - x_2 x_1^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} =$$

$$= \frac{x_1 - x_2 + x_1 \cdot x_2 (x_2 - x_1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} = \frac{(x_1 - x_2)(1 - x_1 \cdot x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$

boladı. Keyingi teńlikte $x_1 - x_2 < 0$, $1 - x_1 \cdot x_2 < 0$ esapqa alıp,

$$f(x_1) - f(x_2) > 0$$

yaǵnıy, $f(x_1) > f(x_2)$ ekenin tabamız. Demek,

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2). \blacktriangleright$$

Meyli $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar $X \subset R$ kóplikte ósiwshi (kemeyiwshi) bolıp, $C = const$ bolsın. Bul jaǵdayda

a) $f(x) + C$ funkciya ósiwshi (kemeyiwshi)boladı.

b) $C > 0$ bolǵanda $C \cdot f(x)$ ósiwshi, $C < 0$ bolǵanda $C \cdot f(x)$ kemeyiwshi boladı.

v) $f(x) + g(x)$ funkciya ósiwshi (kemeyiwshi) boladı.

*Keri funkciya. Quramalı funkciyalar.* $y = f(x)$ funkciya $X \subset R$ kóplikte berilgen bolıp, bul funkciyanıń mánislerinen ibarat kóplik

$$Y_f = \{\, f(x) \mid x \in X \,\}$$

bolsın.

Meyli bazı bir qaǵıydasına karap $Y_f$, kóplikten alınǵan hár bir $y$ ke $X$ kóplikte gi bir $x$ sáykes qoyılǵan bolsın. Bunday sáykeslik nátiyjesinde funkciya payda boladı. Ádette, bul funkciya $y = f(x)$ ge salıstırǵanda keri funkciya delinedi hám $x = f^{-1}(y)$ kóriniste belgilenedi.

Máselen, $y = \frac{1}{2}x + 1$ funkciyaǵa salıstırǵanda keri funkciya $x = 2y - 1$ boladı.

Joqarıda aytılǵanlardan $y = f(x)$ de $x$ argument, $y$ bolsa $x$ tıń funkciyası, keri $x = f^{-1}(y)$ funkciyada $y$ argument, $x$ bolsa $y$ tıń funkciyasi bolıwı kórinedi.

Qolaylıq ushın keri funkciya argumenti $x$, onıń funkciyası $y$ penen belgilenedi: $y = g(x)$.

$y = f(x)$ funkciyaǵa keri $g(x)$ funkciya grafigi $f(x)$ funkciya grafigin I hám III sherekler bissektrisası átirapında $180^0$ ǵa aylandırıw nátiyjesinde payda boladı.

Meyli $Y_f$ kóplikte $u = F(y)$ funkciya berilgen bolsın. Nátiyjede $X$ kóplikten alınǵan hár bir $x$ ge $Y_f$ kóplikte bir $y$:

$$f : x \to y \quad (y = f(x)),$$

hám $Y_f$ kópliktegi bunday $y$ sanǵa bir $u$:

$$F : y \to u \quad (u = F(y))$$

san sáykes qoyıladı. Demek, $X$ kóplikten alınǵan hár bir $x$ sanǵa bir $u$ san sáykes qoyılıp, jańa funkciya payda boladı: $u = F(f(x))$. Ádette bunday funkciyalar quramalı funkciya delinedi.

## 3.2. Elementar funkciyalar hám onıń qásiyetleri

Bul paragrafta elementar funkciyalar haqqında tiykarǵı maǵlıwmatlardı keltiremiz.

**1. Pútin racional funkciyalar.**

Bul

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

kórinistegi funkciya pútin racional funkciya delinedi. Bunda $a_0, a_1, ..., a_n -$ turaqlı sanlar, $n \in N$. Bul funkciya $R = (-\infty, \ +\infty)$ de anıqlanǵan.

Pútin racional funkciyanıń bazı dara jaǵdayları:

a) *Sızıqlı funkciya*. Bul funkciya

$$y = ax + b \qquad (a \neq 0)$$

kóriniske iye, bunda $a$ , $b$ turaqlı sanlar.

Sızıqlı funkciya $(-\infty, \ +\infty)$ de anıqlanǵan $a > 0$ bolǵanda ósiwshi, $a < 0$ bolǵanda kemeyiwshi grafigi tegisliktegi tuwrı sızıqtan ibarat.

*b) Kvadrat funkciya*. Bul funkciya

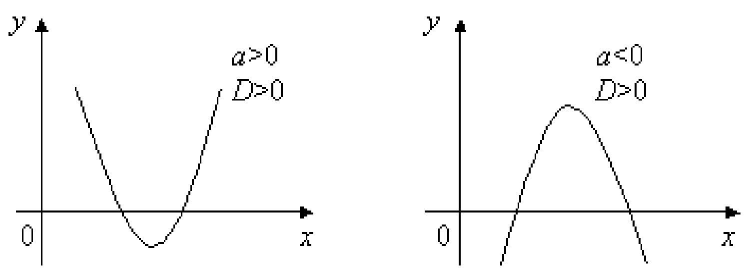
$$y = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

kórinisine iye, bunda $a$ , $b$ , $c$ – turaqlı sanlar.

Kvadrat funkciya $R$ de anıqlanǵan bolıp, onıń grafigi parabolanı ańlatadı. Bunnan

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Parabolanıń tegislikte jaylasıwı $a$ hám $D = b^2 - 4ac$ lerdiń belgisine baylanıslı boladı. Máselen, $a > 0$, $D > 0$ hám $a < 0$, $D < 0$ bolǵanda onıń grafigi 3-sızılmada súwretlengen parabolalar kórinisinde boladı.




3-sızılma.

**2. Bólshek racional funkciyalar.** Bul

$$y=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx^m}$$

kórinistegi funkciya bólshek racional funkciya delinedi. Bunda $a_0,\ a_1,...,a_n$ hám $b_0,\ b_1,\ ...,b_m$ ler turaqlı sanlar $n\in N$, $m\in N$. Bul funkciya

$$X=(-\infty,\ +\infty)\ \setminus\ \{x|b_0+b_1x+...+b_mx^m=0\}$$

kóplikte anıqlanǵan.

Bólshek racional funkciyanıń bazı bir jaǵdayları:

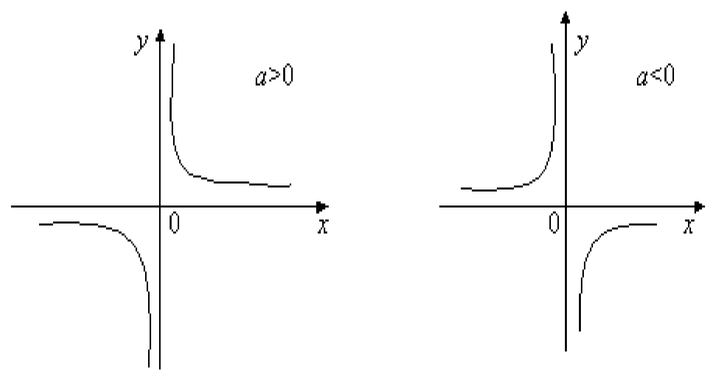
*a) Keri proporcional baylanıs*. Ol

$$y=\frac{a}{x}\qquad (x\neq 0\quad a=const)$$

kóriniske iye. Bul funkciya

$$X=(-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)=R\setminus\{0\}$$

kóplikte anıqlanǵan, taq funkciya, $a$ nıń belgisine qarap funkciya $(-\infty,\ 0)$ hám $(0,\ +\infty)$ aralıqlardıń hár birinde kemeyiwshi yamasa ósiwshi boladı (4-sızılma).




4-sızılma

*b) Bólshek sızıqlı funkciya*. Ol tómendegi

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

kóriniske iye boladı. Bul funkciya

$$X=R\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}\qquad (c\neq 0)$$

kóplikte anıqlanǵan.

Bizge belgili,

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{x+\frac{d}{c}}+\frac{a}{c}.$$

Demek,

$$y=\frac{\alpha}{x+\beta}+\gamma,\quad \left(\alpha=\frac{bc-ad}{c^2},\ \ \beta=\frac{d}{c},\ \ \gamma=\frac{a}{c}\right).$$

Onıń grafigin $y=\frac{a}{x}$ funkciya grafigi járdeminde sızıw múmkin.

**3. Dárejeli funkciya.** Bul

$$y=x^a,\quad (x\geq 0)$$

kórinistegi funkciya dárejeli funkciya delinedi.

Bul funkciyanıń anıqlanıw kópligi $a$ ǵa baylanıslı. Dárejeli funkciya $a>0$, bolǵanda (0, $+\infty$) de ósiwshi, $a<0$ bolǵanda kemeyiwshi boladı. $y=x^a$ funkciya grafigi tegisliktiń $(0,0)$ hám $(1,1)$ noqatlarınan ótedi.

**4. Kórsetkishli funkciya.** Bul

$$y=a^x$$

kórinistegi funkciya kórsetkishli funkciya delinedi. Bunda $a\in R$, $a>0$, $a\neq 1$. Kórsetkishli funkciya ($-\infty$, $+\infty$) anıqlanǵan, $\forall x\in R$ de $a^x>0$; $a>1$ bolǵanda ósiwshi; $0<a<1$ bolǵanda kemeyiwshi boladı.

Dara jaǵdayda, $a=e$ bolsa, onda matematikada áhmiyetli rol tutatuǵın $y=e^x$ funkciya payda boladı.

Kórsetkishli funkciyanıń grafigi $Ox$ kósherinen joqarıda jaylasqan hám tegisliktiń $(0,1)$ noqatsınan ótedi.

**5. Logarifmlik funkciya.** Bul

$$y=\log_a x$$

kórinistegi funkciya logarifmlik funkciya delinedi, bunda $a>0$, $a\neq 1$.

Logarifmlik funkciya (0, $+\infty$) de anıqlanǵan, $y=a^x$ funkciyasına salıstırǵanda keri; $a>1$ bolǵanda ósiwshi, $0<a<1$ bolǵanda kemeyiwshi boladı.

Logarifmlik funkciyanıń grafigi $Oy$ kósheriniń oń tárepinde jaylasqan hám tegisliktiń $(0,1)$ noqatsınan ótedi.

**6. Trigonometriyalıq funkciyalar.** Bul

$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=tgx,\quad y=ctgx,$$
$$y=\sec x,\quad y=\operatorname{cosec} x$$

funkciyalar trigonometriyalıq funkciyalar delinedi

$y=\sin x,\ y=\cos x$ funkciyalar $R=(-\infty,\ +\infty)$ de anıqlanǵan, $2\pi$ periodlı funkciyalar $\forall x\in R$ de

$$-1\le \sin x\le 1,\quad -1\le \cos x\le 1$$

boladı. $y=tgx$ funkciya

$$X=R\setminus\left\{x\in R\,|\,x=(2k+1)\frac{\pi}{2};\ \ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ ...\right\}$$

kóplikte anıqlanǵan $\pi$ periodlı funkciya, ctg$x$, sec$x$, cosec$x$ funkciyalar sin $x$, cos$x$, tg$x$ lar arqalı tómendegishe ańlatıladı:

$$ctgx=\frac{1}{tgx},\quad \sec x=\frac{1}{\cos x},\quad \operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}.$$

**7. Giperbolikalıq funkciyalar.** Kórsetkishli $y=e^x$ funkciya járdeminde dúzilgen bul

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\quad \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

funkciyalar giperbolikalıq (sáykes túrde giperbolikalıq sinus, giperbolikalıq kosinus, giperbolikalıq tangens, giperbolikalıq kotangens) funkciyalar delinedi hám olar tómendegishe

$$shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad thx=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\quad cthx=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

belgilenedi.

**8. Keri trigonometriyalık funkciyalar**. Meyli $y=\sin x$ funkciya $R$ de anıqlanǵan hám onıń mánisleriniń kópligi

$$Y_f=[-1,\ 1]$$

boladı. Eger $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ bolsa, onda $X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ hám $Y_f = [-1, 1]$ kópliklerdiń elementleri óz-ara bir mánisli sáykeslikte boladı.

$y = \sin x$ funkciyaǵa keri funkciya

$$y = arc\sin x$$

kóriniste belgilenedi.

Usıǵan uqsas $y = \cos x,\ \ y = tgx,\ \ y = ctgx$ funkciyalarǵa salıstırǵanda keri funkciyalar sáykes túrde

$$y = \arccos x,\ \ y = arctgx,\ \ y = arcctgx,$$

kóriniste belgilenedi.

Bul $y = arc\sin x$, $y = arc\cos x$, $y = arctgx$ , $y = arcctgx$ funkciyalar keri trigonometriyalıq funkciyalar delinedi.

# 4-§. FUNKCIYANIŃ LIMITI

## 4.1. Funkciya limitiniń anıqlamaları

Meyli $f(x)$ funkciya $X \subset R$ kóplikte berilgen bolıp, $x_0$ noqatta $X$ kópliktiń limit noqatı bolsın. $x_0$ noqatga umtılıwshı qálegen $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, ..., x_n, ... \qquad (x_n \in X, \ x_n \neq x_0)$$

izbe-izlikti alıp, funkciya mánislerinen ibarat $\{f(x_n)\}$:

$$f(x_1), \ \ f(x_2), ..., \ f(x_n), ...$$

izbe-izlikti payda etemiz.

**1-anıqlama.** (Geyne). Eger $n \to \infty$ de $x_n \to x_0$ $(x_n \in X, \ x_n \neq x_0)$ bolatuǵın qálegen $\{x_n\}$ izbe-izlik ushın $n \to \infty$ de $f(x_n) \to b$ bolsa, onda $b$ ǵa $f(x)$ funkciyanıńg $x_0$ noqatdaǵı limiti delinedi hám $x \to x_0$ de $f(x) \to b$ yaǵnıy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$$

kóriniste belgilenedi.

**Eskertiw.** Eger $n \to \infty$ de $x_n \to x_0$ $(x_n \in X, \ x_n \neq x_0)$ hám $y_n \to x_0$ $(y_n \in X, \ y_n \neq x_0)$ bolatuǵın túrli $\{x_n\}, \{y_n\}$ izbe-izlikler ushın $n \to \infty$ de $f(x_n) \to b_1, f(y_n) \to b_2$ bolıp, $b_1 \neq b_2$ bolsa, onda $f(x)$ funkciya $x \to x_0$ de limitke iye emes delinedi.

**1-mısal.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$ funkciyanıń $x_0 = 4$ noqatdaǵı limitin tabıń.

◀ Meyli $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 4, \ (x_n \neq 4, \ n = 1, 2, ...)$ izbe-izlikti alayıq. Onda

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 16}{x_n^2 - 4x_n} = \frac{x_n + 4}{x_n}$$

bolıp, $n \to \infty$ da $f(x_n) \to 2$ boladı. Demek,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = 2. ▶$$

**2-mısal.** $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ funkciyanıń $x\to 0$ degi limitke iye emesligi kórsetiń.

◀ $\forall\, n\to\infty$ de $x_n^{'}=\frac{2}{(4n-1)\pi}\to 0,\quad x_n^{''}=\frac{2}{(4n+1)\pi}\to 0$ boladı. Bul izbe-izlikler ushın $f(x_n^{'})=\frac{4n-1}{2}\pi=-1,\qquad f(x_n^{''})=\frac{4n+1}{2}\pi=1$ bolıp, $n\to\infty$ de

$$f(x_n^{'})\to -1,\quad f(x_n^{''})\to 1$$

boladı. Demek, berilgen funkciya $x_0=0$ noqatda limitke iye emes. ▶

**2-anıqlama.** (Koshi). Eger $\forall\varepsilon>0$ san alınǵanda hám sonday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tabılsa, $\forall x\in X\bigcap(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\})$ ushın

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $b$ sanı $f(x)$ funkciyanıń $x_0$ noqatdaǵı limiti delinedi:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b.$$

**3-mısal.** $f(x)=C=\text{const}\quad (C\in R)$ bolsın. Bul funkciya ushın

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=C$$

boladı.

**4-mısal.** Bul $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ funkciyanıń $x_0=1$ noqatdaǵı limiti 2 ge teń ekenligii kórsetiń.

◀ $\forall\varepsilon>0$ sanına karap $\delta=\varepsilon$ dep alsaq, onda $|x-1|<\delta\quad(x\neq 1)$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı qálegen $x$ te

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|=|x+1-2|=|x-1|<\delta=\varepsilon$$

boladı. Demek, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$ ▶

**3-anıqlama.** Eger $\forall\varepsilon>0$ san alınǵanda hám sonday $\delta>0$ san tabılsa, $\forall x\in X\bigcap(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\})$ ushın $f(x)>\varepsilon$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciyanıń $x_0$ noqatdaǵı limiti $+\infty$ dep ataladı hám

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

kóriniste belgilenedi.

Meyli $f(x)$ funkciya $X \subset R$ kóplikte berilgen bolıp, $x_0 = +\infty$ noqat $X$ kópliktiń limit noqatı bolsın.

**4-anıqlama.** Eger $\forall \varepsilon > 0$ san alınǵanda da sonday $\delta > 0$ tabılsa $\forall x \in X$, $x > \delta$ ushın

$$| f(x) - b | < \varepsilon$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $b$ sanı $f(x)$ funkciyanıń $x_0 = +\infty$ degi limiti delinedi hám

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = b$$

kórinisinde belgilenedi.

**5-mısal.** Meyli $X = (0, +\infty)$, $x_0 = +\infty$, $f(x) = \frac{1}{x}$ bolsın, onda

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

boladı.

◀Haqıyqatında da $\forall \varepsilon > 0$ sanın alayıq. $\forall x > 0$ ushın

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Demek, $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ bolsa, onda $\forall x > \delta$ ushın

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x} < \frac{1}{\delta} = \varepsilon$$

boladı. ▶

*Funkciya limiti anıqlamalarınıń ekvivalentligi.*

**Teorema.** Funkciya limitiniń Koshi hám Geyne anıqlamaları ekvivalent anıqlama boladı.

*Funkciyanıń ońı hám shep limitleri.* Meyli $f(x)$ funkciya $X \subset R$ kóplikte berilgen, $x_0$ noqat $X$ tıń shep limit noqatı bolıp,

$$(x_0 - \gamma,\ x_0) \subset X \quad (\gamma > 0)$$

bolsın.

**5-anıqlama.** Eger

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0):\ \ |\, f(x) - b \,| < \varepsilon$$

bolsa, onda $b$ san $f(x)$ funkciyanıń $x_0$ noqatdağı shep limiti delinedi hám

$$b = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$$

kóriniste belgilenedi.

Meyli $f(x)$ funkciya $X \subset R$ kóplikte berilgen, $x_0$ noqat $X$ tıń oń limit noqatı bolıp,

$$(x_0, x_0 + \gamma) \subset X \qquad (\gamma > 0)$$

bolsın.

**6-anıqlama.** Eger

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in (x_0,\ x_0 + \delta):\ \ |\, f(x) - b \,| < \varepsilon$$

bolsa, onda $b$ san $f(x)$ funkciyanıń $x_0$ noqatdağı oń limiti delinedi hám

$$b = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

kóriniste belgilenedi.

Máselen,

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ eger \ x > 0 \ \ bolsa, \\ 0, \ eger \ x = 0 \ \ bolsa, \\ -1, \ eger \ x < 0 \ \ bolsa \end{cases}$$

funkciyanıń 0 noqatdağı oń limiti 1, shep limiti -1 boladı.

## 4.2. Limitke iye bolǵan funkciyalardıń qásiyetleri. Limittiń bar bolıwı

Shekli limitke iye bolǵan funkciyalar da jıynaqlı izbe-izlik sıyaqlı qásiyetlerge iye.

Meyli $f(x)$ funkciya $X \subset R$ kóplikte berilgen bolıp, $x_0 \in R$ noqat $X$ tıń limit noqatı bolsın.

**1-qásiyet.** Eger $x \to x_0$ da $f(x)$ funkciya limitke iye bolsa, onda ol jalǵız boladı.

**2-qásiyet.** Eger $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$, ($b-$shekli san) bolsa, onda $f(x)$ funkciya shegaralanǵan boladı.

**3-qásiyet.** Eger $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$ bolıp, $b < p$ bolsa, onda $f(x) < p$ boladı.

Meyli $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar $X \subset R$ kóplikte berilgen bolıp, $x_0 \in R$ noqat $X$ kópliktiń limit noqatı bolsın.

**4-qásiyet.** Eger $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b_2$ bolıp, $\forall x \in X$ de $f(x) \le g(x)$ teńsizlik orınlı bolsa, onda $b_1 \le b_2$, yaǵnıy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} g(x)$$

boladı.

**5- qásiyet.** Meyli

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b_1, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = b_2, \quad (b_1, b_2 \in R)$$

limitler bar bolsın. Onda

a) $\forall c \in R$ da $\lim\limits_{x \to x_0}(c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

b) $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

v) $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

g) Eger $b_2 \ne 0$ bolsa, onda $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$

boladı.

**1-mısal.** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n - n}{x - 1}$ limitti esaplań.

◄ Bul limitti joqarıdaǵı qásiyetlerden paydalanıp esaplaymız:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3+...+x^n-n}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+(x^3-1)+...+(x^n-1)}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)[1+(x+1)+(x^2+x+1)+...+(x^{n-1}+x^{n-2}+x+1)]}{x-1}$$

$$=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}\ .\blacktriangleright$$

**2-mısal.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ limitt esaplań.

◀ Bizge belgili, $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$. Sonı esapqa alıp tabamız:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]=\frac{1}{2}.\ \blacktriangleright$$

**Funkciya limitiniń bar bolıwı.** Meyli $f(x)$ funkciya $X\subset R$ kóplikte berilgen bolıp, $(x_0-\gamma,\ x_0)\subset X$ bolsın $(\gamma>0)$. $\forall$, $x_0\in R$ noqat $X$ kópliktiń limit noqatı boladı.

**1-teorema.** Eger $f(x)$ funkciya $X$ kóplikte ósiwshi bolıp, ol joqarıdan shegaralanǵan bolsa, onda funkciya $x_0$ noqatda

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

limitke iye boladı.

◀ Meyli $f(x)$ funkciyanıń mánislerinen ibarat bolǵan bul

$$F=\{\,f(x)|\ x\in X\cap\{x<x_0\}\}$$

kóplikti qaraymız. Teoremanıń shártin boyınsha bul kóplik joqarıdan shegaralanǵan boladı. Onda kópliktiń anıq shegarasınıń bar bolıwı haqqındaǵı teoremaǵa muwapıq $F$ kóplik anıq joqarı shegaraǵa iye boladı. Onı $b$ menen belgileymiz:

$$\sup F = b.$$

Endi, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = b$ bolıwın dálilleymiz. Anıq joqarǵı shegaranıń anıqlaması boyınsha:

1) $\forall x \in X \cap \{x < x_0\}$ ushın $f(x) \le b$;

2) $\exists\, x^* \in X \cap \{x < x_0\}$, $x^* < x_0$ : $f(x^*) > b - \varepsilon$, $(\forall\, \varepsilon > 0)$boladı.

Eger $\delta = x_0 - x^* > 0$ bolsa, onda $\forall x \in (x_0 - \delta,\, x_0) \cap (x_0 - \gamma,\, x_0)$ ushın

$$b - \varepsilon < f(x^*) \le f(x) \le b < b + \varepsilon$$

bolıp,

$$|\, f(x) - b\,| < \varepsilon$$

teńsizlik orınlı bolsın. Bunnan

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = b. \blacktriangleright$$

Meyli $f(x)$ funkciya $X \subset R$ kóplikte berilgen bolıp, $(x_0, x_0 + \gamma) \subset X$ bolsın $(\gamma > 0)$. Onda $\forall\, x_0 \in R$ noqat $X$ kópliktiń limit noqatı boladı.

**2-teorema.** Eger $f(x)$ funkciya $X$ kóplikte kemeyiwshi bolıp, ol tómennen shegaralanǵan bolsa, onda funkciya $x_0$ noqatda

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

limitke iye boladı.

Endi funkciya limitiniń bar bolıwı haqqındaǵı ulıwma teoremanı keltiremiz.

Meyli $f(x)$ funkciya $X \subset R$ kóplikte berilgen bolıp, $x_0 \in R$ noqat $X$ kópliktiń limit noqatı bolsın.

**Anıqlama.** Eger $\forall \varepsilon > 0$ alınǵanda hám sonday $\delta > 0$ san tabılǵanda,

$$\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}),\quad \forall y \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$$

ler ushın

$$|\, f(x) - f(y)\,| < \varepsilon \tag{1}$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ ushın $x_0$ noqatda Koshi shárti orınlanadı delinedi.

**3-mısal.** $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ funkciya ushın $x_0=0$ noqatda Koshi shárti orınlanadı.

◀Haqıyqatında da, $\forall\varepsilon>0$ sanǵa $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ bolsa, onda

$$\forall x\in X\bigcap(U_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)\setminus\{0\}),\quad \forall y\in X\bigcap(U_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)\setminus\{0\})$$

ushın (yaǵnıy $|x|<\delta,\ |y|<\delta$ ushın)

$$|f(x)-f(y)|=|x\sin\frac{1}{x}-y\sin\frac{1}{y}|\le|x\sin\frac{1}{x}|+|y\sin\frac{1}{y}|\le$$

$$\le|x|+|y|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

boladı.

**3-teorema (Koshi).** $f(x)$ funkciya $x_0$ noqatda shekli limitke iye bolıwı ushın bul funkciya $x_0$ noqatda Koshi shártiniń orınlanıwı zárúrli hám jetkilikli.

◀ **Zárúrligi.** $f(x)$ funkciya $x_0$ noqatda shekli limitke iye bolsın

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=b.$$

Limit anıqlamasına tiykarlanıp

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in X\cap\left(U_\delta\left(x_0\right)\setminus\left\{x_0\right\}\right)\text{ ushın}$$

$$|f(x)-b)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

boladı. Solay etip, $\forall y\in X\cap(U_\delta(x_o)\setminus\{x_o\})$ ushın hám

$$|f(y)-b)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

boladı. (2) hám (3) qatnaslardan

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-b|+|b-f(y)|<\varepsilon$$

kelip shıǵadı.

**Jetkilikligi.** Meyli $f(x)$ funkciya ushın (1) shárt orınlı bolsın. $x_0$ noqatǵa umtılıwshı eki

$$x_n \to x_0 \ (x_n \neq x_0,\ n=1,2,\ldots),\ x_n \in X,$$

$$y_n \to x_0 \ (y_n \neq x_0,\ n=1,2,\ldots),\ y_n \in X,$$

izbe-izliklerin alamız. Bul izbe-izliklerden paydalanıp, tómendegi

$$x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ \ldots,\ x_n,\ y_n,\ \ldots$$

izbe-izlikti payda etemiz. Onı $z_n$ menen belgileymiz. $\forall\ z_n$ izbe-izlik ushın

$$z_n \to x_0 \ (z_n \neq x_0,\ n=1,2,\ldots),\ z_n \in X$$

boladı. Teorema shártine tiykarlanıp $\forall \varepsilon > 0$ sanına karap $\delta > 0$ sanın alamız. Solay etip, $n \to \infty$ de $z_n \to x_0$ eken, onda limit anıqlamasına muwapıq

$$\delta > 0,\ \exists n_0 \in N,\ \forall\ n > n_0 : |\, z_n - x_0 \,| < \varepsilon$$

boladı. Onda $\forall m > n_0$, $\forall n > n_0$ ushın

$$|\, f(z_m) - f(z_n) | < \varepsilon$$

teńsizlik orınlanadı. Bynnan $f(z_n)$ izbe-izliktiń fundamental ekenligi kelip shıǵadı. Demek $f(z_n)$ izbe-izlik jıynaqlı

$$n \to \infty \text{ da } \ f(z_n) \to b.$$

onda

$$f(x_n) \to b, \quad f(y_n) \to b$$

bolıp, funkciya limitiniń Geyne anıqlamasına tiykarlanıp

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b.$$

boladı. ►

## 4.3. Sheksiz úlken hám sheksiz kishi funkciyalap

Meyli $\alpha(x)$ hám $\beta(x)$ funkciyalap $X \subset R$ kóplikte bepilgen bolıp, $x_0 \in R$ noqat $X$ kópliktiń limit noqatı bolsın.

**1-anıqlama.** Egep

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0$$

bolsa, onda $\alpha(x)$ funkciya $x\to x_0$ de sheksiz kishi funkciya delinedi.

Máselen, $x\to 0$ de $\alpha(x)=\sin x$ funkciya sheksiz kishi funkciya boladı.

**2-anıqlama.** Egep

$$\lim_{x\to x_0}\beta(x)=\infty$$

bolsa, onda $\beta(x)$ funkciya $x\to x_0$ de sheksiz úlken funkciya delinedi.

Máselen, $x\to 0$ de $\beta(x)=\frac{1}{x}$ funkciya sheksiz úlken funkciya boladı.

Sheksiz kishi hám sheksiz úlken funkciyalap sheksiz kishi hámde sheksiz úlken shamalar kórinisinde qásiyetlerine iye boladı:

1) Shekli sandaǵı sheksiz kishi funkciyalap jıyındısın sheksiz kishi funkciya boladı;

2) Shegapalanǵan funkciyanıń sheksiz kishi funkciya menen kóbeymesi sheksiz kishi funkciya boladı;

3) Egep $\alpha(x)$ $(\alpha(x)\neq 0)$ sheksiz kishi funkciya bolsa, onda $\frac{1}{\alpha(x)}$ sheksiz úlken funkciya boladı.

4) Egep $\beta(x)$ sheksiz úlken funkciya bolsa, onda $\frac{1}{\beta(x)}$ sheksiz kishi funkciya boladı.

## 4.4. Funkciyalardı salıstırıw

Meyli $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalardı $X\subset R$ kóplikte berilgen bolıp, $x_0$ noqat $X$ kópliktiń limit noqatı bolsın.

**1-anıqlama.** Eger turaqlı $C>0$ sanı hám $\delta>0$ san tabılǵanda, $\forall x\in X\bigcap(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\})$ ushın

$$|f(x)|\leq C|g(x)|$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $x \to x_0$ da $f(x)$ funkciya $g(x)$ funkciyaǵa qarata shegaralanǵan delinedi hám $f(x) = O(g(x))$ kóriniste belgilenedi.

Eger

$$\exists C \in R,\ \exists d \in R_+,\ \forall x,\ |x| > d:\ |f(x)| \le C|g(x)|$$

bolsa, onda $x \to x_0 = \infty$ te $f(x)$ funkciya $g(x)$ funkciyaǵa salıstırǵanda shegaralanǵan delinedi hám joqarıdaǵıday $f(x) = O(g(x))$ kóriniste belgilenedi.

Máselen, $x \to 0$ da $x^2 = O(x)$ boladı, sebebi $x \in (-1,1)$ da $|x^2| \le |x|$.

Eger $f(x)$ funkciya $x_0$ noqat dógereginde shegaralanǵan bolsa, onda $x \to x_0$ da $f(x) = O(1)$ kóriniste jazıladı

**«$O$» nıń qásiyetleri:**

1) Eger $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = b$ bolsa, onda $x \to x_0$ da $f(x) = O(g(x))$ boladı.

2) Eger $x \to x_0$ de $f(x) = O(g(x))$ hám $g(x) = O(h(x))$ bolsa, onda $x \to x_0$ de $f(x) = O(h(x))$ boladı. Demek, $x \to x_0$ de $O(O(h(x))) = O(h(x))$.

3) Eger $x \to x_0$ de $f(x) = O(g(x))$ hám $h(x) = O(g(x))$ bolsa, onda $x \to x_0$ de $f(x) + h(x) = O(g(x))$ boladı.

4) Eger $x \to x_0$ de $f_1(x) = O(g_1(x))$ hám $f_2(x) = O(g_2(x))$ bolsa, onda $x \to x_0$ de $f_1(x) \cdot f_2(x) = O(g_1(x) \cdot g_2(x))$ boladı.

**2-anıqlama.** Eger hár qanday $\varepsilon > 0$ san alınǵanda hám sonday $\delta > 0$ san tabılǵanda,

$$\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$$

ushın

$$|f(x)| \le \varepsilon |g(x)|$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $x \to x_0$ de $f(x)$ funkciya $g(x)$ funkciyaǵa qarata joqarı tártipli sheksiz kishi funkciya delinedi hám $f(x) = o(g(x))$ yaki $f = o(g)$ kóriniste belgilenedi.

«$o$» nıń qásiyetleri:

1) Eger $x \to x_0$ de $f = o(g)$ bolsa, onda $x \to x_0$ de $f = O(g)$ boladı.

2) Eger $x \to x_0$ de $f = o(g)$, $g = o(h)$ bolsa, onda $x \to x_0$ de $f = o(h)$ boladı. Demek, $o(o(h)) = o(h)$.

3) Eger $x \to x_0$ de $f_1 = o(g)$, $f_2 = o(g)$ bolsa, onda $x \to x_0$ de $f_1 + f_2 = o(g)$ boladı.

4) Eger $x \to x_0$ de $f_1 = o(g_1)$, $f_2 = o(g_2)$ bolsa, onda $x \to x_0$ de $f_1 \cdot f_2 = o(g_1 \cdot g_2)$ boladı. Demek, $o(g_1) \cdot o(g_2) = o(g_1 \cdot g_2)$.

*Funkciyalardıń ekvivalentligi.* Meyli $f(x)$ hám g(x) funkciyaları $X \subset R$ kóplikte berilgen bolıp, $x_0$ noqat $X$ kópliktiń limit noqatı bolsın.

**3-anıqlama.** $x \to x_0$ da $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar ($x \neq x_0$ de $g(x) \neq 0$) ushın

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

bolsa, onda $x \to x_0$ de $f(x)$ hám $g(x)$ ekvivalent funkciyalar delinedi hám $f(x) \sim g(x)$ $(x \to x_0)$ kórinisinde belgilenedi.

Máselen, $x \to 0$ de $f(x) = \sin x$ hám $g(x) = x$ funkciyalar ekvivalent funkciyalar boladı $\sin x \sim x$ $(x \to 0)$.

**Teorema.** $x \to x_0$ de $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar ($x \neq x_0$ de $g(x) \neq 0$) ekvivalent bolıwı ushın

$$g(x) - f(x) = o(g(x))$$

teńliktiń orınlı bolıwı zárúrli hám jetkilikli.

◄**Zárúrligi.** $x \to x_0$ de $f(x) \sim g(x)$ bolsın. Anıqlamaǵa tiykarlanıp

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

bolıp, onnan

$$\lim_{x \to x_0} \left[ 1 - \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - f(x)}{g(x)} = 0$$

kelip shıǵadı. Demek, $g(x)-f(x)=o(g(x))$.

**Jetkilikligi.** $x\to x_0$ de $g(x)-f(x)=o(g(x))$ bolsın. Ol jaǵdayda $x\to x_0$ de

$$1-\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{g(x)-f(x)}{g(x)}=\frac{o(g(x))}{g(x)}$$

bolıp, onnan

$$\lim_{x\to x_0}\left[1-\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-f(x)}{g(x)}=0$$

kelip shıǵadı. Bul bolsa

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

yaǵnıy $f(x)\sim g(x)$ ekenin bildiredi. ►

**« ~ » nıń qásiyetleri:**

1) $x\to x_0$ de $f(x)\sim g(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,

2) Hár qanday funkciya ushın $x\to x_0$ de $f(x)\sim f(x)$ boladı.

3) Eger $x\to x_0$ de $f(x)\sim g(x)$, $g(x)\sim h(x)$ bolsa, onda $x\to x_0$ de $f(x)\sim h(x)$ boladı.

4) Eger $x\to x_0$ de $f_1(x)\sim g_1(x)$, $f_2(x)\sim g_2(x)$ bolsa, onda $x\to x_0$ de $f_1(x)\cdot f_2(x)\sim g_1(x)\cdot g_2(x)$ boladı.

## 5-§. Funkciyanıń úzliksizligi

### 5.1. Funkciyanıń úzliksizligi anıqlamaları. Úzliksiz funkciyalar ústinde ámeller

Meyli $f(x)$ funkciya $X \subset R$ kóplikte berilgen bolıp, $x_0 \in X$ tochka $X$ kópliginiń limit tochkası bolsın.

**1-anıqlama.** Eger

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

bolsa, onda $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada úzliksiz delinedi.

Demek, $f(x)$ funkciyanıń $x_0$ tochkada úzliksizligi bul

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$ nıń barlıǵı,

2) $b = f(x_0)$ shártleriniń orınlanıw menen ańlatıladı.

**Mısallar** 1. $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ funkciya $\forall x_0 \in R$ tochkada úzliksiz boladı, sebebi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0}(x^4 + x^2 + 1) = x_0^4 + x_0^2 + 1 = f(x_0).$$

**2**. Berilgen

$$f(x) = (signx)^2 = \begin{cases} 1, & \textit{егер} \quad x \neq 0 \quad \textit{болса}, \\ 0, & \textit{егер} \quad x = 0 \quad \textit{болса}, \end{cases}$$

funkciyanı qarayıq. Bizge málim, $\forall x_0 \in R$ tochkada $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$ boladı. Demek, qaralıp atırǵan funkciya $\forall x_0 \in R,\ \ x_0 \neq 0$ tochkada úzliksiz boladı. Biraq $f(0) = 0$ bolǵanlıǵı sebepli

$$\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$$

boladı. Demek, $f(x)$ funkciya $x_0 = 0$ tochkada úzliksiz bolmaydı.

Funkciya limitiniń Geyne hám Koshi anıqlamalarına tiykarlanıp funkciyanıń $x_0$ tochkadaǵı úzliksizligin tómendegishe táriyplew múmkin.

**2-anıqlama.** Eger

$$n \to \infty \ \text{да} \ \ x_n \to x_0 \qquad (x_n \in X, \ \ n = 1, 2, \ldots)$$

bolatuǵın qálegen $\{x_n\}$ izbe-izlik ushın

$$n \to \infty \ \text{да} \ \ f(x_n) \to f(x_0)$$

bolsa, onda $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada úzliksiz delinedi.

**3-anıqlama.** Eger $\forall\varepsilon>0$ san alınǵanda hám sonday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ san tabılǵanda,

$$\forall x\in X\bigcap U_\delta(x_0)$$

ushın

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada úzliksiz delinedi.

Ádette, $x-x_0$ ayırma argumenttiń ósimi, al $f(x)-f(x_0)$ bolsa funkciyanıń ósimi delinip, olar sáykes túrde $\Delta x$ hám $\Delta f$ kóriniste belgilenedi:

$$\Delta x=x-x_0, \qquad \Delta f=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

Onda funkciya úzliksizliginiń 1-anıqlamasındaǵı (1) qatnastan

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=0 \tag{2}$$

kóriniske keledi. Demek, (2) qatnastı funkciyanıń $x_0$ tochkada úzliksizligi anıqlaması sıpatında qaraw múmkin.

Meyli $f(x)$ funkciya $X\subset R$ kóplikte berilgen bolıp, $x_0\in X$ tochka $X$ kópliktiń oń (shep) limit tochkası bolsın.

**4-anıqlama.** Eger

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0) \qquad \left(\lim_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)\right)$$

bolsa, onda $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada ońnan (shepten) úzliksiz delinedi.

Demek, $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada ońnan (sheptpn) úzliksiz bolǵanda funkciyanıń oń (shep) limiti onıń $x_0$ tochkadaǵı mánisine teń boladı

$$f(x_0+0)=f(x_0) \qquad (f(x_0-0)=f(x_0)).$$

Keltirilgen anıqlamalardan, $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada hám ońnan, hám shepten bir waqıtta úzliksiz bolsa, onda funkciya usı tochkada úzliksiz boladı.

**5-anıqlama.** Eger $f(x)$ funkciya $X\subset R$ kópliktiń hár bir tochkasında úzliksiz bolsa, onda $f(x)$ funkciya $X$ kóplikte úzliksiz delinedi.

**6-anıqlama.** $X\subset R$ kóplikte úzliksiz bolǵan funkciyalardan ibarat kóplik úzliksiz funkciyalar kópligi delinedi hám $C(X)$ kórinisinde belgilenedi.

Máselen, $f(x)\in C[a,\ b]$ bolıwı, $f(x)$ funkciyanıń $[a,\ b]$ segmentiniń hár bir tochkasında úzliksiz, yamasa $f(x)$ funkciya $(a,b)$ intervaldıń hár bir tochkasında úzliksiz, $a$ tochkada ońnan, $b$ tochkada bolsa shepten úzliksiz bolıwın bildiredi.

*Úzliksiz funkciyalar ústinde ámeller.* Úzliksiz funkciyalardıń qosındısı, kóbeymesi hám qatnasınıń úzliksiz funkciya bolıwı haqqındaǵı tastıyqlawdı keltiremiz.

**1-teorema.** $f(x)$ va $g(x)$ funkciyalardı $X\subset R$ kóplikte berilgen bolıp, $x_0\in X$ tochkada úzliksiz bolsın. Bul jaǵdayda

a) $\forall c\in R$ da $c\cdot f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada úzliksiz boladı;

b) $f(x)+g(x)$ funkciya $x_0$ tochkada úzliksiz boladı;

v) $f(x)\cdot g(x)$ funkciya $x_0$ nuqtada úzliksiz boladı;

g) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ funkciya $x_0$ tochkada úzliksiz boladı.

**1-mısal.** $f(x)=c,\ \ c\in R$ bolsın. Onda $f(x)\in C(R)$ boladı.

◄ Haqqıyqattan da $\forall\varepsilon>0$ ge muwapıq $\delta=\varepsilon$ bolsa, onda

$$\forall x,\ |x-x_0|<\delta:\quad |f(x)-f(x_0)|=|c-c|=0<\varepsilon$$

boladı. ►

**2-mısal.** Eger $f(x)=x,\ \ x\in R$ bolsa, onda $f(x)\in C(R)$ boladı.

◄ Haqıyqattan da $\forall\varepsilon>0$ ge muwapıq $\delta=\varepsilon$ bolsa, onda

$$\forall x,\ |x-x_0|<\delta:\quad |f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\delta=\varepsilon$$

boladı. ►

**3-mısal.** $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_{m-1}x+a_m;\ m\in N,\ \ a_0,a_1,...,a_m\in R$ bolsın. Bul jaǵdayda $f(x)\in C(R)$ boladı.

◄ Bunıń dállileniwi 1- hám 2-mısallar hám 1-teoremadan kelip shıǵadı.►

Usıǵan uqsas bul

$$f(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_{n-1}x+b_n}$$

funkciyanı (bunda $m,\ n\in N;\ a_0,\ a_1,...,a_m,\ b_0,b_1,...,b_n\in R$)

$$\{x\in R\setminus b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_{n-1}x+b_n=0\}$$

kóplikte úzliksiz ekenligi kelip shıǵadı.

**4-mısal.** Meyli $f(x)=\sin x$ bolsın. Onda $f(x)\in C(R)$ boladı.

◀ $x_0\in R$ tochkanı alıp, $\forall\varepsilon>0$ ge muwapıq $\delta=\varepsilon$ deymiz.

Onda $\forall x,\ |x-x_0|<\delta$:

$$|\sin x-\sin x_0|=2|\cos\frac{x+x_0}{2}\cdot\sin\frac{x-x_0}{2}|\le|x-x_0|<\delta=\varepsilon$$

boladı. ▶

Tap usıǵan uqsas $f(x)=\cos x$ funkciya $R$ de, $f(x)=tgx$ hám $f(x)=ctgx$ funkciyalardıń bolsa óz anıqlanıw kópliklerinde úzliksiz bolıwı kelip shıǵadı.

**5-mısal.** $f(x)=a^x,\quad a>0$ bolsın. Onda $f(x)\in C(R)$ boladı.

◀ Bunnan,

$$\lim_{x-x_0\to0}(a^{x-x_0}-1)=0.$$

Onda

$$0=\lim_{x-x_0\to0}(a^{x-x_0}-1)\ \Leftrightarrow\ \lim_{x-x_0\to0}a^{x_0}(a^{x-x_0}-a^{x_0})=0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^{x_0}\lim_{x\to x_0}(a^x-a^{x_0})=0\ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$$

boladı. ▶

**6-mısal.** Meyli

$$f(x)=\begin{cases}-1, & eger\ \ x<0\ \ bolsa,\\ 0, & eger\ \ x=0\ \ bolsa,\\ 1, & eger\ \ x>0\ \ bolsa\end{cases}$$

bolsın. Bul funkciya ushın

$$f(+0)=1,\qquad f(-0)=-1$$

bolıp, berilgen funkciya $X=R\setminus\{0\}$ kóplikte úzliksiz boladı.

*Quramalı funkciyanıń úzliksizligi.* Meyli $y=f(x)$ funkciya $X\subset R$ kóplikte, $u=F(y)$ funkciya bolsa $Y_f$ kóplikte anıqlanǵan bolıp, olar arqalı $u=F(f(x))$ quramalı funkciya dúzilgen bolsın.

**2-teorema.** Eger $y=f(x)$ funkciya $x_0\in X$ tochkada, $u=F(y)$ funkciya bolsa $y_0\in Y_f$ tochkada $(y_0=f(x_0))$ úzliksiz bolsa, onda $F(f(x))$ funkciya $x_0$ tochkada úzliksiz boladı.

◀ $u=F(y)$ funkciya $y_0\in Y_f$ tochkada $(y_0=f(x_0))$ úzliksiz bolǵanı ushın

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\sigma>0,\ \forall y,\ |y-y_0|<\sigma:\ |F(y)-F(y_0)|<\varepsilon \qquad (5)$$

yamasa $|F(f(x))-F(f(x_0))|<\varepsilon$ boladı.

Shártke muwapıq $y=f(x)$ funkciya $x_0\in X$ tochkada úzliksiz. Bul jaǵdayda joqarıdaǵı $\sigma>0$ ǵa muwapıq

$$\exists\delta>0,\ \forall x,\ |x-x_0|<\delta:\ |f(x)-f(x_0)|<\sigma$$

yamasa

$$|y-y_0|<\sigma \qquad (6)$$

boladı. (5) hám (6) qatnaslardan

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x,\ |x-x_0|<\delta:\ |F(f(x))-F(f(x_0))|<\varepsilon$$

kelip shıǵadı. Demek, $F(f(x))$ funkciya $x_0$ tochkada úzliksiz. ►

## 5.2. Úzliksiz funkciyalardıń lokal qásiyetleri. Funkciyanıń úzilisi, úzilistiń noqatları

Meyli $f(x)$ funkciya $X\subset R$ kóplikte berilgen bolıp, $x_0\in X$ bolsın.

1. Eger $f(x)$ funkciya $x_0\in X$ tochkada úzliksiz bolsa, onda sonday $\delta>0$ hám $M>0$ sanları tabılǵanda, $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkanıń $U_\delta(x_0)$ dógereginde shegaralanǵan boladı.

2. Eger $f(x)$ funkciya $x_0\in X$ tochkada úzliksiz, $f(x_0)\neq 0$ bolsa, onda sonday $\delta>0$ san tabılsa, $f(x)$ funkciyanıń $U_\delta(x_0)$ degi belgisi $f(x_0)$ niń belgisi kórinisinde boladı.

Bul tastıyıqlawlardıń dállileniwi limitke iye bolǵan funkciyanıń qásiyetlerinen kelip shıǵadı.

3. Meyli $y=f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b \qquad (b\in R) \qquad (1)$$

ge iye bolıp, $g(y)$ funkciya $Y$ kóplikte berilgen $\{f(x)|x\in X\}\cup\{b\}\subset Y$ hám $y=b$ tochkada úzliksiz bolsın. Bul jaǵdayda

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))=g(b),$$

yamasa

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)) \tag{2}$$

boladı.

◀ $n\to\infty$ da $x_n \to x_0$ $(x_n \in X,\ x_n \neq x_0,\ n=1,2,...)$ bolatuǵın qálegen $\{x_n\}$ izbeizlikti alayıq. Onda (1) qatnasqa muwapıq

$$n\to\infty \text{ da } f(x_n)\to b$$

boladı. Shártke karap $g(f(x))$ funkciya $b$ tochkada úzliksiz. Demek,

$$n\to\infty \text{ da } g(f(x_n))\to g(b)$$

boladı. Keyingi qatnastan (2) teńliktiń orınlı bolıwı kelip shıǵadı. ▶

**1-mısal.** Bul

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \qquad (a>0,\quad a\neq 1) \tag{3}$$

qatnastı dállileń.

◀ (2) qatnastan paydalanıp,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \log_a e.$$

Tiykarı $a=e$ bolǵanda $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ boladı. ▶

**2-mısal.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a,\ (a>0)$ qatnastı dállileń.

◀ Keltirilgen teńlikti dállilew ushın $a^x-1=t$ dep alamız. Onda $x\to 0$ de $t\to 0$ boladı. Usını hám (3) qatnastı itibarǵa alıp,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a. \ ▶$$

**3-mısal.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\ (\alpha\in R)$ dállileń.

◀ Bunnan,

$$(1+x)^\alpha = e^{\alpha\ln(1+x)}$$

hám $x\to 0$ da $\ln(1+x)\to 0$ boladı. Onda

$$\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \frac{(e^{\alpha\ln(1+x)}-1)\cdot\ln(1+x)\cdot\alpha}{\alpha\cdot\ln(1+x)\qquad x}$$

bolıp, bunnan

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\alpha=\alpha$$

kelip shıǵadı. ►

*Funkciyanıń úzilis noqatları.*

Meyli $f(x)$ funkciya $(a, b)$ de $(-\infty\leq a<b\leq+\infty)$ berilgen bolıp, $x_0\in(a, b)$ bolsın. Bizge málim, $f(x)$ funkciyanıń $x_0$ tochkadaǵı oń hám shep limitleri

$$f(x_0+0),\qquad f(x_0-0)\tag{3}$$

bar bolıp,

$$f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0)\tag{4}$$

teńlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada úzliksiz boladı.

Eger $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada úzliksiz bolmasa, onda $x_0$ tochka $f(x)$ funkciyanıń úzilis tochkası delinedi.

**Anıqlama.** Eger (3) limitler bar hám shekli bolıp, (4) teńliklerdiń bazı birewleri orınlı bolmasa, onda $x_0$ tochka $f(x)$ funkciyanıń birinshi túr úzilis tochkası delinedi.

Bunda

$$f(x_0+0)-f(x_0-0)$$

ayırma funkciyanıń $x_0$ noqattaǵı sekiriwi delinedi.

Máselen, $f(x)=[x]$ funkciya $x=p$ $(p\in Z)$ tochkada birinshi túr úziliske iye, sebebi

$$f(p+0)=p,\quad f(p_0-0)=p-1$$

bolıp,

$$f(p+0)\neq f(p_0-0)$$

boladı. Eger hesh bolmaǵanda (3) limitlerdiń birewi bar bolmasa yamasa sheksiz bolsa, $x_0$ tochka $f(x)$ funkciyanıń ekinshi *túr úzilis tochkası* delinedi.

Máselen, bul

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & eger\ \ x\neq 0\ \ bolsa,\\ 0, & eger\ \ x=0\ \ bolsa\end{cases}$$

funkciya $x=0$ tochkada ekinshi túr úziliske iye boladı, sebebi bul funkciyanıń $x=0$ tochkadaǵı oń hám shep limitleri joq.

## 5.3. Úzliksiz funkciyalardıń global qásiyetleri. Monoton funkciya úzliksizligi hám úzilisi

Meyli $f(x)$ funkciya $[a, b]$ segmentte berilgen bolsın. Eger $f(x)$ funkciya $(a, b)$ da úzliksiz, $a$ tochkada ońnan, $b$ tochkada shepten úzliksiz bolsa, onda $f(x)$ funkciya $[a, b]$ segmentte úzliksiz boladı.

Endi segmentte úzliksiz bolǵan funkciyalardıń qásiyetlerin keltiremiz.

**1-teorema.** (Veyershtrasstıń birinshi teoreması). Eger $f(x)$ funkciya $[a, b]$ segmentte úzliksiz bolsa, onda funkciya $[a, b]$ da shegaralanǵan boladı.

◄ Bizge málim, $f(x)$ funkciyanıń $[a, b]$ da shegaralanǵanlıǵı

$$\exists M \in (0,+\infty), \quad \forall x \in [a, b]: \ |f(x)| \leq M$$

ańlatadı. Kerisinshe uyǵarayıq, $f(x) \in C[a, b]$ bolıp, $[a, b]$ da shegaralanbaǵan bolsın. Bul jaǵdayda

$$\forall n \in N, \ \exists x_n \in [a, b]: \ |f(x_n)| > n \ \ (n = 1, 2, ...) \tag{4}$$

boladı. Onda $\{x_n\}$ izbe-izlik ushın $x_n \in [a, b]$ $(n = 1, 2, ...)$ bolǵanlıǵı sebepli ol shegaralanǵan boladı. Onda Bol'cano-Veyershtrass teoremasına muwapıq bul $\{x_n\}$ izbe-izlikten jıynaqlı úles $\{x_{n_k}\}$ izbe-izlik ajıratıw múmkin:

$$k \to \infty \text{ da } x_{n_k} \to x_0 \qquad (x_0 \in [a, b]).$$

Shártke muwapıq $f(x)$ funkciya $[a, b]$ da úzliksiz. Bunnan,

$$k \to \infty \text{ da } f(x_{n_k}) \to f(x_0) \tag{5}$$

boladı. Bul (5) qatnas joqarıda aytılǵan uyǵarıwǵa qarama-qarsı (sebebi, uyǵarıw boyınsha

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = +\infty$$

bolıwı lazım edi). Demek, $f(x)$ funkciya $[a, b]$ da shegaralanǵan boladı. ►

Meyli $f(x)$ funkciya $X \subset R$ kóplikte berilgen bolsın.

**Anıqlama.** Eger $X$ kóplikte sonday $x_0 \in X$ tochka tabılsa, $\forall x \in X$ ushın

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad (f(x) \geq f(x_0))$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada eń úlken (eń kishi) mániske erisedi delinedi hám

$$f(x_0) = \max_X f(x) \qquad (f(x_0) = \min_X f(x))$$

kórinisinde belgilenedi.

**2-teorema.** (Veyershtrasstıń ekinshi teoreması). Eger $f(x) \in C[a,\, b]$ bolsa, onda $f(x)$ funkciya $[a,\, b]$ segmentte eń úlken hám eń kishi mánislerge erisedi, yamasa

$$\exists c_1 \in [a,\, b], \quad \forall x \in [a,\, b]: \qquad f(x) \le f(c_1),$$

$$\exists c_2 \in [a,\, b], \quad \forall x \in [a,\, b]: \qquad f(x) \ge f(c_2)$$

boladı.

◀ Meyli $f(x) \in C[a,\, b]$ bolsın. Veyershtrasstıń 1-teoremasına muwapıq $f(x)$ funkciya $[a,\, b]$ segmentte shegaralanǵan boladı. Onda kópliktiń anıq shegarası haqqındaǵı teoremaǵa muwapıq

$$\sup_{x \in [a,\, b]} f(x) = M \qquad (M \in R)$$

bar boladı. Kópliktiń anıq joqarı shegarası anıqlamasına muwapıq:

$$\forall x \in [a,\, b]: \quad f(x) \le M,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x(\varepsilon) \in [a,\, b]: \quad f(x(\varepsilon)) > M - \varepsilon$$

boladı. Keyingi teńsizlikte $\varepsilon = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$ dep alınatuǵın bolsa, onda

$x_n = x\left(\frac{1}{n}\right) \in [a,\, b]$ izbe-izlik payda bolıp, onıń ushın

$$f(x_n) > M - \frac{1}{n}$$

teńsizlik orınlanadı. Demek, $\forall n \in N$ de

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M$$

boladı. Bul qatnastan

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = M \qquad (6)$$

kelip shıǵadı. Joqarıda payda bolǵan $\{x_n\}$ izbe-izlik shegaralanǵan. Onnan jıynaqlı úles izbe-izlikti ajıratıw múmkin. Onı $\{x_{n_k}\}$ desek:

$$k \to \infty \text{ da } x_{n_k} \to c_1 \qquad (c_1 \in [a,\, b]).$$

Berilgen $f(x)$ funkciyanıń úzliksizliginen paydalanıp tabamız:

$$k \to \infty \text{ da } f(x_{n_k}) \to f(c_1).$$

Bunnan, $\{f(x_{n_k})\}$ izbe-izlik $\{f(x_n)\}$ izbe-izliktiń úles izbe-izligi.

Demek, (6) qatnasqa muwapıq

$$k \to \infty \text{ da } f(x_{n_k}) \to M$$

bolıp, $f(c_1) = M$ kelip shıǵadı. Tap usıǵan uqsas, $f(x)$ funkciyanıń eń kishi mániske erisiwi kórsetiledi. ►

**3-teorema.** Meyli $f(x)$ funkciya $[a, b]$ segmentte berilgen bolıp, tómendegi shártlerdi orınlı bolsın:

1) $f(x) \in C[a, b]$;

2) segmenttiń shetki tochkaları $a$ hám $b$ lerde hár qıylı mánislerge iye, yamasa

$$f(a) < 0 < f(b) \text{ yamasa } f(a) > 0 > f(b)$$

bolsın. Onda $(a, b)$ da sonday $x_0$ tochka $(a < x_0 < b)$ tabılsa, $f(x_0) = 0$ boladı.

◄ Meyli $f(x) \in C[a, b]$ bolıp, $f(a) < 0 < f(b)$ bolsın. $[a, b]$ segmenttiń $f(x)$ funkciyaǵa teris mánisler beretuǵın tochkalardan ibarat kóplikti $E$ desek:

$$E = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}.$$

Bunnan, $a \in E$, $E \subset [a, b]$. Demek, $E$ kóplik shegaralanǵan hám $E \neq \varnothing$.

Kópliktiń anıq joqarı shegarası haqqındaǵı teoremaǵa muwapıq

$$\sup E = x_0 \qquad (x_0 \in (a, b))$$

bar boladı. Anıq joqarı shegaranıń anıqlamasına muwapıq,

$$\forall n \in N, \ \exists x_n \in E: \quad x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0$$

boladı. Demek,

$$f(x_n) < 0. \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$f(x)$ funkciyanıń $[a, b]$ da úzliksiz bolǵanlıǵınan paydalanıp,

$$n \to \infty \text{ da } x_n \to x_0 \text{ bolıp, } f(x_n) \to f(x_0).$$

Bir tárepten

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) \leq 0,$$

ekinshi tárepten

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

bolıwınan

$$f(x_0) \le 0 \qquad (7)$$

kelip shıǵadı. Bunnan, $x > x_0$ da $x \notin E$ hám $f(x) \ge 0$. Sonıń ushın

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \ge 0$$

bolıp,

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \ge 0 \qquad (8)$$

boladı. (7) hám (8) qatnaslardan $f(x_0) = 0$ kelip shıǵadı. Tap usıǵan uqsas, $f(x) \in C[a, b]$ hám $f(a) > 0 > f(b)$ bolǵan jaǵdayda teorema dállilenedi. ►

**4-teorema.** Eger $f(x) \in C[a, b]$ bolsa, onda shegaraları $f(a)$ hám $f(b)$ bolǵan segmentke tiyisli qálegen $l$ sanı alınǵanda $[a, b]$ da sonday $x_0$ tochka tabılǵanda, $f(x_0) = l$ boladı.

◄ $f(a) < f(b)$ dep, $f(a) \le l \le f(b)$ni alayıq. Bunnan, $f(a) = l$ yamasa $f(b) = l$ bolǵan jaǵdayda teorema dállilengen esaplanadı.

Endi $f(a) < l < f(b)$ bolsın. Bul $g(x) = f(x) - l, \ (x \in [a, b])$ funkciyanı alayıq. Bul funkciya ushın:

1) $g(x) \in C[a, b]$;

2) $g(a) < 0 < g(b)$

boladı. Onda 3-teoremaǵa muwapıq sonday $x_0 \in (a, b)$ tabılsa, $g(x_0) = 0$ yamasa

$$f(x_0) = l$$

boladı. ►

*Monoton funkciya úzliksizligi hám úzilisi.*

**5-teorema.** $[a,b] \subset R$ da monoton bolǵan $f(x)$ funkciya usı $[a,b]$nıń qálegen tochkasında úzliksiz boladı yamasa birinshi túr úzliksizlikke iye boladı.

◄ Meyli $f(x)$ funkciya $[a,b]$ da ósiwshi bolsın. Meyli

$$x_0 \in [a,b], \ (x_0 - \delta, \ x_0 + \delta) \subset [a,b] \quad (\delta > 0)$$

bolsın. Monoton funkciyanıń limiti hakqındaǵı teoremaǵa muwapıq

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \le f(x_0),$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) \ge f(x_0)$$

boladı. Eger

$$f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0)$$

bolsa, onda $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada úzliksiz, Eger

$$f(x_0-0)<f(x_0+0)$$

bolsa, onda $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada birinshi túr úzliksizlikke iye boladı. Tap usıǵan uqsas $f(x)$ funkciya $[a,b]$ de kemeyewshi bolǵanda da tastıyıqlaw dállilenedi. ►

Usı lekciyanıń tiykarında berilgen funkciyaǵa keri bolǵan funkciyanıń barlıǵı haqqındaǵı teoremanı dállilsiz keltiremiz.

**6-teorema.** Eger $f(x)$ funkciya $X\subset R$ aralıqta úzliksiz hám qatań ósiwshi (qatań kemeyiwishi) bolsa, onda $Y_f=\{f(x)|x\in X\}$ aralıqta keri $f^{-1}(y)$ funkciya bar bolıp, ol úzliksiz qatań ósiwshi (qatań kemeywishi) boladı.

## 5.4. Teń ólshewli úzliksizlik. Kantop teopeması

Meyli $f(x)$ funkciya $X\subset R$ kóplikte bepilgen bolsın.

**Anıqlama.** Eger qálegen $\varepsilon>0$ san alınǵanda hám sonday $\delta>0$ san tabılsa,

$$|x'-x''|<\delta$$

teńsizlikti qanaatlandırıwshı qálegen $x',\ x''\in X$ ushın

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya $X$ kóplikte teń ólshewli úzliksiz delinedi.

**1-mısal.** $f(x)=x,\quad x\in R$ bolsın. Onda $R$ de teń ólshewli úzliksiz boladı.

◄ Eger $\forall\varepsilon>0$ ge muwapıq $\delta=\varepsilon$ dep alınsa, onda $\forall x',\ x''\in X,\ |x'-x''|<\delta$ da

$$|f(x')-f(x'')|=|x'-x''|<\delta=\varepsilon$$

boladı. ►

**2-mısal.** $f(x)=\sin x,\quad x\in R$ bolsın. Onda $R$ de teń ólshewli úzliksiz boladı.

◄ Eger $\forall\varepsilon>0$ ge muwapıq, $\delta=\varepsilon$ bolsa, onda $\forall x',\ x''\in R,\ |x'-x''|<\delta$ da

$$|\sin x'-\sin x''|=2\left|\cos\frac{x'+x''}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x'-x''}{2}\right|\le|x'-x''|<\delta=\varepsilon$$

boladı. ►

**3-mısal.** $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\in X=(0,\,1]$ bolsın. Onda $X=(0,\,1]$ da teń ólshewli úzliksiz bolmaydı.

◀ $\forall\varepsilon>0$ sandı, máselen, $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ dep alınıp, $x'$ hám $x''$ tochkalar sıpatında

$$x'=\frac{1}{n},\ \ x''=\frac{1}{n+1}\quad (n\in N)$$

dep alınsa, bul jaǵdayda $|x'-x''|$ ayırma tómendegishe

$$|x'-x''|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n(n+1)}$$

boladı. Bunnan $(|x'-x''|<\delta)$ $\delta$ nı háp qansha kishi qılıp alıw múmkin bolsa, onda

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|=|n-(n+1)|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon$$

boladı. Demek, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ funkciya $X=(0,\,1]$ de teń ólshewli úzliksiz emes. ►

**Teopema (Kantop teopeması).** Eger $f(x)\in C[a,\,b]$ bolsa, onda $f(x)$ funkciya $[a,\,b]$ da teń ólshewli úzliksiz boladı.

◀ Meyli $f(x)\in C[a,\,b]$ bolıp hám funkciya $[a,\,b]$ da ólshewli úzliksizligi bolmasın. Onda bazı $\varepsilon>0$ hám qálegen $\delta>0$ ushın $[a,\,b]$ da sonday $x'$ hám $x''$ tochkalar tabılsa,

$$|x'-x''|<\delta\quad\Rightarrow\quad|f(x')-f(x'')|\ge\varepsilon$$

boladı. $n\to+\infty$ da $\delta_n\to 0$ $(\delta_n>0,\ n=1,\,2,\,...)$ bolatuǵın qálegen $\{\delta_n\}$ izbe-izlikti alamız. Onda

$$\begin{gathered}
|x_1'-x_1''|<\delta_1\Rightarrow|f(x_1')-f(x_1'')|\ge\varepsilon,\\
|x_2'-x_2''|<\delta_2\Rightarrow|f(x_2')-f(x_2'')|\ge\varepsilon,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
|x_n'-x_n''|<\delta_n\Rightarrow|f(x_n')-f(x_n'')|\ge\varepsilon,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered}$$

boladı. Bunnan, $\{x_n'\}$ ushın $x_n'\in[a,\,b]$ $(n=1,\,2,\,3,\,...)$ bolıp, onnan

$$k\to+\infty\ \text{da}\ x_{n_k}'\to x_0\qquad (x_0\in[a,\,b])$$

bolatuǵın úles izbe-izlik ajıpatıw múmkin. Usı waqıtta, $x_{n_k}''$ ushın hám

$$k\to+\infty\ \text{da}\ x_{n_k}''\to x_0$$

boladı. $f(x)\in C[a,\ b]$ bolıwınan $k\to+\infty$ da $f(x_{n_k}^{'})\to f(x_0)$, $f(x_{n_k}^{''})\to f(x_0)$ bolıp, olardan $k\to+\infty$ de $f(x_{n_k}^{'})-f(x_{n_k}^{''})\to 0$ kelip shıǵadı. Bul bolsa $\forall n\in N$ ushın

$$|\,f(x_n^{'})-f(x_n^{''})|\geq\varepsilon$$

dep alınǵanǵa qarama-qarsı keledi. Demek, $f(x)$ funkciya $[a,\ b]$ da teń ólshewli úzliksiz boladı. ►

# 6-§. FUNKCIYANIŃ TUWINDISI HÁM DIFFERENCIALLARI

## 6.1. Funkciyanıń tuwındısı. Funkciya tuwındısınıń geometriyalıq hám mexanikalıq mánisleri

Meyli $f(x)$ funkciya $(a,b)\subset R$ da berilgen bolıp, $x_0\in(a,b)$, $x_0+\Delta x\in(a,b)$ bolsın. $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ ayırma $f(x)$ funkciyanıń $x_0$ tochkadağı ósimi delinedi.

**1-anıqlama.** Eger

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

limit bar hám shekli bolsa, onda $f(x)$ funkciyanıń $x_0$ tochkadağı tuwındısı delinedi hám $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ $f'(x_0)$ yamasa $(f(x))'_{x_0}$ kórinisinde belgilenedi. Demek,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Eger $x_0+\Delta x=x$ bolsa, onda $\Delta x=x-x_0$ hám $\Delta x\to 0$ da $x\to x_0$ bolıp, (1) qatnas tómendegi

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (2)$$

kóriniske keledi.

**1-mısal.** $f(x)=x,\ x_0\in R$ bolsın. Bul funkciya ushın

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$$

bolıp,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=1$$

boladı. Demek, $f'(x)=(x)'=1$.

**2-mısal.** $f(x)=|x|$ , $x\in R$ bolsın.

Eger $x>0$ bolsa, onda $f(x)=x$ bolıp, $f'(x)=1$ boladı.

Eger $x<0$ bolsa, onda $f(x)=-x$ bolıp, $f'(x)=-1$ boladı.

Eger $x_0=0$ bolsa, onda $\frac{f(x)-0}{x-0}=\frac{|x|}{x}$ bolıp, $x\to 0$ da bul qatnaslardıń limiti bolmaydı. Demek, berilgen funkciya $x_0=0$ tochkada tuwındığa iye bolmaydı.

*Funkciyanıń oń hám shep tuwındıları.* Meyli $f(x)$ funkciya $X\subset R$ kóplikte berilgen bolıp, $(x_0-\delta,\ x_0)\subset X\ (\delta>0)$ bolsın.

**2-anıqlama.** Eger

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

limit bar bolsa, bul limit $f(x)$ funkciyanıń $x_0$ tochkadağı shep tuwındısı delinedi hám $f'(x_0-0)$ kórinisinde belgilenedi:

$$f'(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Meyli $f(x)$ funkciya $X\subset R$ kóplikte berilgen bolıp, $(x_0,\ x_0+\delta)\subset X$ $(\delta>0)$ bolsın.

**3-anıqlama.** Eger

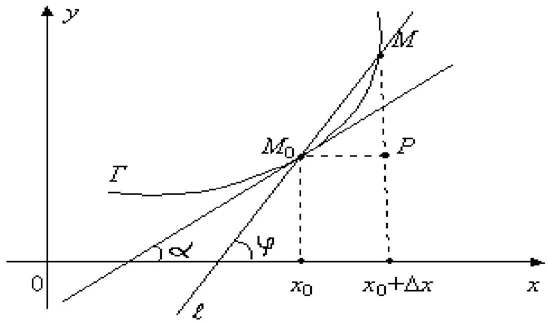
$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

limit bar bolsa, onda bul limit $f(x)$ funkciyanıń $x_0$ tochkadağı oń tuwındısı delinedi hám $f'(x_0+0)$ kórinisinde belgilenedi:

$$f'(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Máselen, $f(x)=|x|$ funkciyanıń $x_0=0$ tochkadağı oń tuwındısı $f'(+0)=1$, shep tuwındısı $f'(-0)=-1$ boladı.

*Funkciya tuwındısınıń geometriyalıq hám mexanikalıq mánisleri.* Meyli $f(x)$ funkciya $(a,b)$ da berilgen bolıp, $x_0\in(a,b)$ tochkada $f'(x_0)$ tuwındıga iye bolsın. Bul $f(x)$ funkciyanıń grafigi 5-sızılmada súwretlengen $\Gamma$ iymek sızıqtı belgileymiz:




5-sızılma.

Bul $\Gamma$ sızıqta $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$ tochkalardı alıp, olar arqalı ótiwshi $l$ tuwrı sızıǵın qaraymız.

$M_0(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$, $M(x, f(x)) \in \Gamma$, $M \to M_0$ da $l$ tuwrı sızıqtıń limit jaǵdayı $\Gamma$ sızıqqa $M_0$ tochkada ótkizilgen urınba delinedi.

Bunnan, $\varphi$ múyesh $\Delta x$ qa baylanıslı, $\varphi = \varphi(\Delta x)$ hám $f(x)$ funkciyanıń grafigine $M_0$ tochkada ótkizilgen urınbanıń bar bolıwı ushın

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \alpha$$

teńliktiń orınlanıwı lazım. Bunda $\alpha -$ urınbanıń $OX$ kósheriniń oń baǵdarı menen payda bolǵan múyesh. $M_0MP$ úshmúyeshlikten:

$$tg\varphi(\Delta x) = \frac{MP}{M_0P} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bolıp, onnan

$$\varphi(\Delta x) = arctg \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

kelip shıǵadı. Funkciya úzliksizliginen paydalanıp,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} arctg \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= arctg\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right] = arctgf'(x_0).$$

Demek, $\Delta x \to 0$ da $\varphi(\Delta x)$ niń limiti bar hám

$$\alpha = arctgf'(x_0).$$

Keyingi teńlikten

$$f'(x_0) = tg\alpha$$

kelip shıǵadı. Demek, funkciyanıń $x_0$ tochkadaǵı $f'(x_0)$ tuwındısı urınbanıń múyeshlik koefficentin belgileydi. Bunda urınbanıń teńlemesi

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

kórinisinde boladı.

Meyli $P$ tochka tuwrı sızıq boylap $s = s(t)$ nızam menen háreket qılsın, bunda $t$ – waqıt, $s$ – ótilgen jol. Eger waqıttıń $t_1$ hám $t_2$ $(t_1 < t_2)$ mánislerindegi ótilgen jol $s(t_1)$, $s(t_2)$ bolsa, onda bul qatnas

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$[t_1, t_2]$ waqıt aralıǵındaǵı ortasha tezlikti ańlatadı.

Tómendegi

$$\lim_{t_2 \to t_1 + 0} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

limit háreketdegi tochkanıń $t_1$ waqıttaǵı tezligin bildiredi.

Demek, háreketegi $P$ tochkanıń $t$ waqıttaǵı tezligi $v(t)$, óttilgen $s(t)$ joldıń tuwındısınan ibarat boladı:

$$v(t) = s'(t).$$

Meyli $f(x)$ funkciya $(a, b) \subset R$ da berilgen bolsın.

**Teorema.** Eger $f(x)$ funkciya $x_0 \in (a, b)$ tochkada shekli $f'(x_0)$ tuwındıǵa iye bolsa, onda $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada úzliksiz boladı.

◄ Meyli $f(x)$ funkciya $x_0 \in (a, b)$ tochkada shekli $f'(x_0)$ tuwındıǵa iye bolsın. Anıqlamaǵa tiykarlanıp

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

yamasa

$$\Delta x \to 0 \text{ da } \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0)$$

boladı. Endi $\alpha = \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$ dep belgilemiz. Bunnan $\Delta x \to 0$ da $\alpha \to 0$.

Keyingi teńliklerden

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \Delta x.$$

Ádette, bul teńlik funkciya ósiminiń formulası delinedi. Onnan

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$$

kelip shıǵadı. Bul $f(x)$ funkciyanıń $x_0$ tochkada úzliksiz ekenin bildiredi. ►

**Eskertiw.** Funkciyanıń bazı tochkada úzliksiz bolıwınan onıń usı tochkada shekli tuwındıǵa iye bolıwı hár dayım hám kelip shıǵa bermeydi. Máselen, $f(x) = |x|$ funkciya $x = 0$ tochkada úzliksiz, biraq usı tochkada tuwındıǵa iye emes.

## 6.2. Tuwındını esaplaw qaǵıydaları hám formulaları

Meyli $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyaları $(a,b) \subset R$ da berilgen bolıp, $x_0 \in (a,b)$ tochkada $f'(x_0)$ hám $g'(x_0)$ tuwındılarǵa iye bolsın. Tuwındınıń anıqlamasına muwapıq

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0), \tag{1}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0) \tag{2}$$

boladı.

1) $f(x) \pm g(x)$ funkciya $x_0$ tochkada tuwındıǵa iye bolıp,

$$(f(x) \pm g(x))'_{x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

boladı.

2) $f(x) \cdot g(x)$ funkciya $x_0$ tochkada tuwındıǵa iye bolıp,

$$(f(x) \cdot g(x))'_{x_0} = f'(x_0) \cdot g(x_0) \pm f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

boladı.

3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ funkciya $(g(x_0)\neq 0)$ $x_0$ tochkada tuwındıǵa iye bolıp,

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x_0}=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

boladı.

**1-nátiyje.** Eger $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada $f'(x_0)$ tuwındıǵa iye bolsa, onda $c\cdot f(x)$ funkciya $(c=const)$ $x_0$ tochkada tuwındıǵa iye bolıp,

$$(c\cdot f(x))'_{x_0}=c\cdot f'(x_0)$$

boladı.

**2-nátiyje**. Eger $f_1(x),\ f_2(x),\ldots,\ f_n(x)$ funkciyalar $x_0$ tochkada tuwındılarǵa iye bolıp, $c_1,\ c_2,\ldots,\ c_n$ turaqlı sanlar bolsa, onda

$$(c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)+\ldots+c_n f_n(x))'_{x_0}=c_1 f_1'(x_0)+c_2 f_2'(x_0)+\ldots+c_n f_n'(x_0)$$

boladı.

*Quramalı funkciyanıń tuwındısı.* Meyli $y=f(x)$ funkciya $X\subset R$, $g(y)$ funkciya $\{f(x)|x\in X\}$ kóplikte berilgen bolıp, $x_0\in X$ tochkada $f'(x_0)$ tuwındıǵa, $y_0\in\{f(x)|\,x\in X\}$ tochkada $(y_0=f(x_0))$ $g'(y_0)$ tuwındıǵa iye bolsın. Onda $g(f(x))$ quramalı funkciya $x_0$ tochkada tuwındıǵa iye bolıp,

$$(g(f(x)))'_{x_0}=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

boladı.

*Keri funkciyanıń tuwındısı.* Meyli $y=f(x)$ funkciya $(a,b)$ da berilgen, úzliksiz hám qatań ósiwshi (qatań kemeywshi) bolıp, $x_0\in(a,b)$ tochkada $f'(x_0)$ $(f'(x_0)\neq 0)$ tuwındıǵa iye bolsın. Onda $x=f^{-1}(y)$ funkciya $y_0$ $(y_0=f(x_0))$ tochkada tuwındıǵa iye hám

$$\left[f^{-1}(y)\right]'_{x_0}=\frac{1}{f'(x_0)}$$

boladı.

**1-mısal.** $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$ boladı, bunda $\alpha \in R$, $x > 0$.

◀ Meyli $x > 0$ bolsın. Onda $f(x) = x^{\alpha}$ funkciya ushın

$$\frac{(x+\Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x} = x^{\alpha-1} \cdot \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{\Delta x}{x}}$$

bolıp, $\Delta x \to 0$ da $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$ boladı. ▶

**2-mısal.** $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \ln a$ boladı, bunda $a > 0$, $x \in R$.

◀ $f(x) = a^{x}$ funkciya ushın

$$\frac{a^{x+\Delta x} - a^{x}}{\Delta x} = a^{x} \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

bolıp, $\Delta x \to 0$ da $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \ln a$ boladı. ▶

**3-mısal.** $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ boladı, bul jerde $x \in R$.

◀ $f(x) = \sin x$ funkciya ushın

$$\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = 2 \cdot \frac{1}{\Delta x} \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

bolıp, $\Delta x \to 0$ da $(\sin x)' = \cos x$ boladı. Tap usıǵan uqsas $(\cos x)' = -\sin x$ bolıwı tabıladı. ▶

**Tuwındılar kestesi.** Tómende ápiwayı funkciyalardıń tuwındıların ańlatıwshı formulalardı keltiremiz:

1. $(C)' = 0, \quad C = const.$

2. $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in R, \quad x > 0.$

   $(x^{n})' = nx^{n-1}, \quad n \in N, \quad x \in R.$

3. $(a^{x})' = a^{x} \ln a, \; a > 0, \; a \neq 1, \; x \in R$

   $(e^{x})' = e^{x}, \quad x \in R.$

4. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}, \quad a>0, \ \ a\neq 1, \ \ x>0.$

$\left(\log_a |x|\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}, \quad a>0, \ \ a\neq 1, \ \ x\neq 0.$

$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}, \quad x>0.$

$\left(\ln |x|\right)' = \dfrac{1}{x}, \quad x\neq 0.$

5. $(\sin x)' = \cos x, \quad x\in R.$

6. $(\cos x)' = -\sin x, \quad x\in R.$

7. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x\neq \dfrac{\pi}{2}+n\pi, \quad n\in Z.$

8. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x\neq n\pi, \quad n\in Z.$

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1$

10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1$

11. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x\in R.$

12. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}, \quad x\in R.$

13. $(shx)' = chx, \quad x\in R.$

14. $(chx)' = shx, \quad x\in R.$

15. $(thx)' = \dfrac{1}{ch^2 x}, \quad x\in R.$

16. $(cthx)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}, \quad x\neq 0.$

## 6.3. Funkciyanıń differenciallanıwshılıǵı. Funkciyanıń differencialı

Meyli $f(x)$ funkciya $(a,\, b)$ da berilgen bolıp, $x_0 \in (a,b)$, $x_0 + \Delta x \in (a,b)$ bolsın. $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ayırma $f(x)$ funkciyanıń $x_0$ tochkadaǵı ósimi delinedi.

**1-anıqlama.** Eger $\Delta f(x_0)$ nı

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha \Delta x$$

kóriniste anıqlaw múmkin bolsa, onda $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada differenciallanıwshı delinedi, bunda $A = const$, $\Delta x \to 0$, da $\alpha \to 0$.

**Teorema.** $f(x)$ funkciya $x \in (a,\, b)$ tochkada differenciallanıwshı bolıwı ushın onıń usı tochkada shekli $f'(x)$ tuwındıǵa iye bolıwı zárúrli hám jetkilikli.

◀**Zárúrligi.** $f(x)$ funkciya $x \in (a,\, b)$ tochkada differenciallanıwshı bolsın. Anıqlamaǵa tiykarlanıp,

$$\Delta f(x) = A \cdot \Delta x + \alpha \Delta x$$

boladı, bunda $A = const$, $\Delta x \to 0$, da $\alpha \to 0$.

Bul teńlikten paydalanıp, $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = A + \alpha,$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha) = A.$$

Demek, $f'(x)$ bar bolıp hám $f'(x) = A.$

**Jetkilikligi.** $f(x)$ funkciya $x \in (a,\, b)$ da shekli $f'(x)$ tuwındıǵa iye bolsın. Anıqlamaǵa muwapıq

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

boladı. Eger $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} - f'(x) = \alpha$ bolsa, onnan

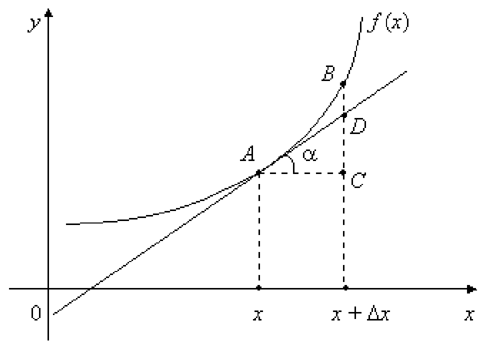
$$\Delta f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \Delta x$$

kelip shıǵadı, bunda $\Delta x \to 0$ da $\alpha \to 0$. Demek, $f(x)$ funkciya differenciallanıwshı.►

**2-anıqlama.** Funkciya ósimindegi $f'(x_0)\cdot\Delta x$ ańlatpa $f(x)$ funkciyanıń $x_0$ tochkadaǵı differencialı delinedi hám $df(x_0)$ kórinisinde belgilenedi

$$df(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

Meyli $x \in (a, b)$ tochkada differenciallanıwshı $f(x)$ funkciyanıń grafigi 6-sızılmada súwretlengen iymek sızıqtı ańlatsın:




6-sızılma

Keltirilgen sızılmadan kórinip turǵanday,

$$\frac{DC}{AC} = tg\alpha$$

bolıp, $DC = tg\alpha \cdot AC = f'(x)\cdot\Delta x$ boladı.

Demek, $f(x)$ funkciyanıń $x$ tochkadaǵı differencialı funkciya grafigine $(x,\ f(x))$ tochkada ótkizilgen urınba ósimi $DC$ nı ańlatadı.

Meyli $f(x) = x,\ \ x \in R$ bolsın. Bul funkciya differenciallanıwshı bolıp, $df(x) = (x)'\cdot\Delta x = \Delta x$, yamasa $dx = \Delta x$ boladı. Demek, $(a, b)$ da differenciallanıwshı $f(x)$ funkciyanıń differencialın

$$df(x) = f'(x)\cdot dx$$

kóriniste ańlatıw múmkin.

Endi ápywayı funkciyalardıń differencialların keltiremiz:

1. $d(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}dx, \quad (x > 0);$

2. $d(a^x) = a^x \cdot \ln a \cdot dx, \quad (a > 0, \quad a \neq 1);$

3. $d(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e dx, \quad (x > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1);$

4. $d(\sin x) = \cos x dx;$

5. $d(\cos x) = -\sin x dx;$

6. $d(tgx) = \frac{1}{\cos^2 x}dx, \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \ldots);$

7. $d(ctgx) = -\frac{1}{\sin^2 x}dx, \quad (x \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \ldots);$

8. $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad (-1 < x < 1);$

9. $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad (-1 < x < 1);$

10. $d(arctgx) = \frac{1}{1+x^2}dx;$

11. $d(arcctgx) = -\frac{1}{1+x^2}dx;$

12. $d(shx) = chxdx;$

13. $d(chx) = shxdx;$

14. $d(thx) = \frac{1}{ch^2 x}dx;$

15. $d(cthx) = -\frac{1}{sh^2 x}dx \quad (x \neq 0)$

Meyli $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyaları $(a, b)$ da berilgen bolıp, $x \in (a, b)$ tochkada differenciallanıwshı bolsın. Onda $x \in (a, b)$ da

1) $d(c \cdot f(x)) = cdf(x), \quad c = const;$

2) $d(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x);$

3) $d(f(x)g(x)) = g(x)df(x) + f(x)dg(x);$

4) $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}, \quad (g(x) \neq 0).$

boladı.

Meyli $y=f(x)$ funkciya $X\subset R$ kóplikte, $g(y)$ funkciya $Y\supset\{f(x): x\in X\}$ kóplikte berilgen bolıp, $f'(x)$ hám $g'(y)$ tuwındılarǵa iye bolsın. Bul jaǵdayda

$$d(g(f(x)))=g'(f(x))\cdot df(x)$$

boladı.

◄ Quramalı funkciyanıń tuwındısın esaplaw qaǵıydasınan paydalanıp tabamız:

$$d(g(f(x)))=[g(f(x))]'dx=g'(f(x))\cdot f'(x)dx=g'(f(x))\cdot df(x).$$ ►

**Mısal.** Anıqlamadan paydalanıp, $f(x)=x-3x^2$ funkciyanıń $x_0=2$ tochkadaǵı differencialın tabıń.

◄ Bul funkciyanıń $x_0=2$ tochkadaǵı ósimin tabamız:

$$\Delta f(2)=f(2+\Delta x)-f(2)=2+\Delta x-3(2+\Delta x)^2-2+12=$$

$$=-11\cdot\Delta x-3\Delta x^2=-11\cdot\Delta x+(-3\Delta x)\cdot\Delta x.$$

Demek, $d\,f(2)=-11\cdot dx$. ►

## 6.4. Juwıq esaplaw formulaları

Funkciya differencialı járdeminde juwıq formulalarǵa alıp kelinedi.

Meyli $f(x)$ funkciya $(a,b)$ da berilgen bolıp, $x_0\in(a,b)$ tochkada shekli $f'(x_0)$ tuwındıǵa $(f'(x_0)\neq 0)$ iye bolsın. Onda $\Delta x\to 0$ da

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

boladı. Onda $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada differenciallanıwshı bolıp, onıń differencialı

$$d\,f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x$$

boladı. Bunnan $\Delta f(x_0)-df(x_0)=o(\Delta x)$ bolıp, $\Delta x\to 0$ da

$$\frac{\Delta f(x_0)-df(x_0)}{\Delta x}\to 0$$

boladı. Nátiyjede

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0),$$

yamasa

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x \qquad (1)$$

juwıq formula payda boladı. (1) formula $x_0 \in (a, b)$ tochkada differenciallanıwshı $f(x)$ funkciyanıń $x_0$ tochkadaǵı ósimi $\Delta f(x_0)$ dı onıń usı tochkadaǵı differencialı $df(x_0)$ menen almastırıw múmkinligin kórsetedi. Bul almastırıwdıń áhmiyeti funkciya ósimi argument ósiminiń, ulıwma aytqanda quramalı funkciyası bolǵan jaǵdayda, funkciya differencialı bolsa argument ósiminiń sızıqlı funkciyası boladı. (1) formulada $\Delta x = x - x_0$ bolsa, onda

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \qquad (2)$$

boladı.

**Mısal.** Bul $\sin 29^0$ muǵdar juwıq esaplań.

◀ Eger $f(x)=\sin x,\quad x_0=30^0$ bolsa, onda (2) formulaǵa muwapıq

$$\sin 29^0 \approx \sin 30^0 + \cos 30^0\cdot(29^0-30^0)\cdot\frac{2\pi}{360^0} = 0{,}5 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\pi}{360^0} \approx 0{,}4848$$

boladı. ►

Bizge málim, $x_0 \in (a, b)$ tochkada differenciallanıwshı $f(x)$ funkciya grafigine $(x_0,\ f(x_0))$ tochkada ótkizilgen urınbanıń teńlemesi tómendegi kóriniste jazıladı:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

Demek, (2) juwıq formula geometriyalıq kóz-qarastan, $f(x)$ funkciya belgilengen iymek sızıqtı $x_0$ tochkanıń jeterli kishi dógereginde funkciya grafigine $(x_0,\ f(x_0))$ tochkada ótkizilagen urınba menen almastırılıwı múmkinligin bildiredi.

(2) formulada $x_0 = 0$ delinse olusı

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x \qquad (3)$$

kóriniske keledi.

$f(x)$ funkciya sıpatında $(1+x)^{\alpha}$, $\sqrt{1+x}$, $e^{x}$, $\ln(1+x)$, $\sin x$, $tgx$ funkciyalardı alıp, olarǵa (3) formulanı qollaw nátiyjesinde tómendegi juwıq formulalar payda boladı:

$$(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x,$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x,$$

$$e^{x} \approx 1+x,$$

$$\ln(1+x) \approx x,$$

$$\sin x \approx x,$$

$$tgx \approx x.$$

## 6.5. Joqarı tártipli tuwındı hám differenciallar

Meyli $f(x)$ funkciya $(a, b)$ da berilgen bolıp, $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ tuwındıǵa iye bolsın. Bul $f'(x)$ funkciyanı $g(x)$ arqalı belgileymiz:

$$g(x) = f'(x) \qquad (x \in (a, b)).$$

**1-anıqlama.** Eger $x_0 \in (a, b)$ tochkada $g(x)$ funkciya $g'(x_0)$ tuwındıǵa iye bolsa, bul tuwındı $f(x)$ funkciyanıń $x_0$ tochkadaǵı ekinshi tártipli tuwındısı delinedi hám $f''(x_0)$ yamasa $\dfrac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$ kórinisinde belgilenedi.

Tap usıǵan uqsas, $f(x)$ tiń 3-tártipli $f'''(x)$, 4-tártipli $f^{IV}(x)$ h.t.b. tártipli tuwındıları anıqlanadı.

Ulıwma, $f(x)$ funkciyanıń $n-$tártipli tuwındısı $f^{(n)}(x)$ tiń tuwındısı $f(x)$ funkciyanıń $(n+1)-$tártipli tuwındısı delinedi:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'.$$

Ádette, $f(x)$ funkciyanıń $f''(x)$, $f'''(x)$, ... tuwındıları onıń joqarı tártipli tuwındıları delinedi. Sonı aytıp ótiw kerek, $f(x)$ funkciyanıń $x \in (a, b)$ da $n-$tártipli tuwındınıń barlıǵı bul funkciyanıń usı tochka dógereginde

1–, 2–, ..., $(n-1)$–tártipli tuwındıları barlıǵın kórsetedi. Biraq bul tuwındılardıń $n$–tártipli tuwındı barlıǵı, ulıwma aytqanda, kelip shıqpaydı.

Máselen,

$$f(x)=\frac{x|x|}{2}$$

funkciyanıń tuwındısı $f'(x)=|x|$ bolıp, bul funkciya $x=0$ tochkada tuwındıǵa iye emes, yamasa berilgen funkciyanıń $x=0$ da birinshi tártipli tuwındısı bar, ekinshi tártipli tuwındısı bolmaydı.

**1-mısal.** $f(x)=a^x$ bolsın, $a>0$, $x\in R$. Bul funkciya ushın

$$(a^x)'=a^x\ln a,$$

$$(a^x)''=(a^x\ln a)'=a^x(\ln a)^2,$$

ulıwma

$$(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n \tag{1}$$

boladı. (1) qatnastıń orınlı bolıwı matematikalıq indukciya usılı menen dállilenedi.

**2-mısal.** $f(x)=\sin x$ bolsın. Bul funkciya ushın

$$(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\sin x)''=(\cos x)'=-\sin x=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right),$$

Ulıwma,

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

boladı. Usıǵan uqsas,

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

boladı.

**3-mısal.** $f(x)=x^\alpha$ bolsın, $x>0$, $\alpha\in R$. Bul funkciya ushın

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1},$$

$$(x^\alpha)''=(\alpha x^{\alpha-1})'=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$

ulıwma,

$$(x^{\alpha})^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

boladı. Tiykarınan $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $(x>0)$ funkciya ushın

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

bolıp, onnan

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

kelip shıǵadı.

Meyli $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar $(a, b)$ da berilgen bolıp, $\forall x \in (a, b)$ da $f^{(n)}(x)$ hám $g^{(n)}(x)$ tuwındılarǵa iye bolsın. Onda:

1) $(c\cdot f(x))^{(n)} = c\cdot f^{(n)}(x),\quad c=const$;

2) $(f(x)\pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x)\pm g^{(n)}(x)$;

3) $$(f(x)\cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-k)}(x) \qquad (2)$$

$$\left(C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\right),\qquad f^{(0)}(x)=f(x)$$

boladı. Ádette, (2) Leybnic formulası delinedi.

**4-mısal.** $y = x^2\cos 2x$ funkciyanıń $n-$tártipli tuwındısın tabıń.

◀Leybnic formulasında $f(x)=\cos 2x$, $g(x)=x^2$ dep alamız. Onda bul formulaǵa muwapıq, $g(x)=x^2$ funkciya ushın $k>2$ bolǵanda

$$g^{(k)}(x) = (x^2)^{(k)} = 0, \qquad (k>2)$$

bolıwın itibarǵa alıp,

$$(x^2\cos 2x)^{(n)} = C_n^0 x^2(\cos 2x)^{(n)} + C_n^1(x^2)'\cdot(\cos 2x)^{(n-1)} + C_n^2(x^2)''(\cos 2x)^{(n-2)}.$$

Bunnan,

$$(\cos 2x)^{(n)} = 2^n\cos\left(2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\cos 2x)^{(n-1)}=2^{n-1}\cos\left(2x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)=2^{n-1}\sin\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\cos 2x)^{(n-2)}=2^{n-2}\cos\left(2x+(n-2)\frac{\pi}{2}\right)=-2^{n-1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Demek,

$$(x^2\cos 2x)^{(n)}=2^n\left(x^2-\frac{n(n-1)}{4}\right)\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)+2^n nx\sin\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right). \ ►$$

*Joqarı tártipli differencialı.* Meyli $f(x)$ funkciya $(a,b)$ da berilgen bolıp, $\forall x\in(a,b)$ tochkada $f''(x)$ tuwındıǵa iye bolsın. Bunnan, $f(x)$ funkciyanıń differencialı

$$df(x)=f'(x)dx \tag{3}$$

bolıp, bunda $dx=\Delta x$ funkciya argumentiniń ıqtıyarlı ósimi boladı.

**2-anıqlama.** $f(x)$ funkciyanıń $x\in(a,b)$ tochkadaǵı differencialı $df(x)$ tiń differencialı $f(x)$ funkciyanıń $x\in(a,b)$ tochkadaǵı ekinshi tártipli differencialı delinedi hám $d^2f(x)$ kórinisinde belgilenedi:

$$d^2f(x)=d(df(x)).$$

Tap usıǵan uqsas $f(x)$ funkciyanıń úshinshi $d^3f(x)$, tórtinshi $d^4f(x)$ h. t.b. tártiptli differenciallarıı anıqlanadı.

Ulıwma, $f(x)$ funkciyanıń $n-$tártipli differencialı $d^nf(x)$ tiń differencialı $f(x)$ funkciyanıń $(n+1)-$tártipli differencialı delinedi:

$$d^{n+1}f(x)=d(d^nf(x)).$$

**5-mısal.** $f(x)=xe^{-x}$ funkciyanıń ekinshi tártipli differencialın tabıń.

◄ Berilgen funkciyanıń ekinshi tártipli differencialın anıqlamaǵa muwapıq tabamız:

$$d^2f(x)=d(df(x))=d(d(xe^{-x}))=d(xde^{-x}+e^{-x}dx)==d(-xe^{-x}dx+e^{-x}dx)=$$

$$=-d(xe^{-x})dx+(de^{-x})dx=-(xde^{-x}+e^{-x}dx)dx-e^{-x}(dx)^2=xe^{-x}(dx)^2-$$

$$=x\cdot e^{-x}(dx)^2-e^{-x}(dx)^2-e^{-x}(dx)^2=(x-2)e^{-x}(dx)^2. \ ►$$

Differenciallaw qaǵıydasınan paydalanıp tabamız:

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = dx \cdot d(f'(x)) = dx \cdot f''(x)dx = f''(x)(dx)^2, \qquad (4)$$

$$d^3 f(x) = d(d^2 f(x)) = f'''(x)(dx)^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)(dx)^n$$

Meyli $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar $(a, b)$ da berilgen bolıp, $\forall x \in (a, b)$ tochkada $n-$tártipli differenciallarǵa iye bolsın. Bul jaǵdayda:

1) $d^n(c \cdot f(x)) = c \cdot d^n f(x), \quad c = const;$

2) $d^n(f(x) \pm g(x)) = d^n f(x) \pm d^n g(x);$

3) $d^n(f(x) \cdot g(x)) = d^n f(x) \cdot g(x) + C_n^1 d^{n-1} f(x) \cdot dg(x) +$

$+ \ldots + C_n^k d^{n-k} f(x) \cdot d^k g(x) + \ldots + f(x) \cdot d^n g(x)$

boladı.

## 6.6. Differenciallıq esaptıń tiykarǵı teoremaları

Tuwındıǵa iye bolǵan funkciyalar haqqındaǵı teoremalar keltirilgen. Bul teoremalar funkciyalardı tekseriwde áhmiyetli rol oynaydı.

**1-teorema (Ferma teoreması).** Meyli $f(x)$ funkciya $X \subset R$ kóplikte berilgen bolsın. Onda $x_0 \in X$ tochkanıń dógeregi ushın $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \subset X$ $(\delta > 0)$ bolıp, tómendegi shártler orınlı bolsın:

1) $\forall x \in U_\delta(x_0)$ da $f(x) \le f(x_0)$ $\quad (f(x) \ge f(x_0)),$

2) $f'(x_0)$ bar hám shekli bolsın.

Onda $f'(x_0) = 0$ boladı.

◀ Meyli $\forall x \in U_\delta(x_0)$ da $f(x) \le f(x_0)$ bolsın. Bunnan

$$f(x) - f(x_0) \le 0$$

boladı.

Shártke muwapıq $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada shekli $f'(x_0)$ tuwındıǵa iye. Sonıń ushın

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

boladı. Bul jerde, $x>x_0$ bolǵanda

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\le 0,$$

$x<x_0$ bolǵanda

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\ge 0$$

bolıwınan $f'(x_0)=0$ kelip shıǵadı. ►

**2-teorema (Roll teoreması).** Meyli $f(x)$ funkciya $[a, b]$ da berilgen bolıp, tómendegi shártlerin orınlı bolsın

1) $f(x)\in C[a, b]$,

2) $\forall x\in(a, b)$ da $f'(x)$ bar hám shekli,

3) $f(a)=f(b)$ bolsın.

Onda sonday $x_0\in(a, b)$ tochka tabılıp, $f'(x_0)=0$ boladı.

◄ Shártke muwapıq $f(x)\in C[a, b]$. Onda Veyershtrasstıń ekinshi teoremasına muwapıq $f(x)$ funkciya $[a, b]$ da óziniń eń úlken hám eń kishi mánislerge erisedi, yamasa sonday $c_1,\ c_2$ tochkalar $(c_1, c_2\in[a, b])$ tabılsa,

$$f(c_1)=\max\{f(x)\mid x\in[a, b]\},$$
$$f(c_2)=\min\{f(x)\mid x\in[a, b]\}$$

boladı. Eger $f(c_1)=f(c_2)$ bolsa, onda $[a, b]$ da $f(x)=const$ bolıp, $\forall x_0\in(a, b)$ da $f'(x_0)=0$ boladı.

Eger $f(c_1)>f(c_2)$ bolsa, onda $f(a)=f(b)$ bolǵanlıǵı sebepli $f(x)$ funkciya $f(c_1)$ hámde $f(c_2)$ mánisleriniń keminde bir $[a, b]$ segmenttiń ishki $x_0$ $(a<x_0<b)$ tochkasında erisedi. Ferma teoremasına tiykarlanıp $f'(x_0)=0$ boladı. ►

**3-teorema (Lagranj teoreması).** Meyli $f(x)$ funkciya $[a, b]$ da berilgen bolıp, tómendegi shártlerin orınlasın:

1) $f(x) \in C[a, b]$,

2) $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ tuwındı hám shekli bolsın.

Bul jaǵdayda sonday $c \in (a, b)$ tochka tabılsa,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

boladı.

◀ Bul

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad (1)$$

funkciyanı qaraymız. Bul funkciya Roll teoremasınıń barlıq shártlerin qanaatlandıradı. Bunnan, onıń tuwındısı

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

boladı. Roll' teoremasına tiykarlanıp, sonday $c$ $(c \in (a, b))$ tochka tabılsa,

$$F'(c) = 0 \qquad (2)$$

boladı. (1) hám (2) qatnaslardan

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

yamasa

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

kelip shıǵadı. ►

**1-nátiyje.** Meyli $f(x)$ funkciya $(a, b)$ da $f'(x)$ tuwındıǵa iye bolıp, $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x) = 0$ bolsın. Onda $\forall x \in (a, b)$ da $f(x) = const$ boladı.

◀ $\forall x, x_0 \in (a, b)$ nı alıp, shetki tochkaları $x$ hám $x_0$ bolǵan segmentte $f(x)$ funkciyaǵa Lagranj teoremasın qollap $f(x) = f(x_0) = const$. ►

**2-nátiyje.** $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyaları $(a, b)$ da $f'(x)$, $g'(x)$ tuwındılarǵa iye bolıp, $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x) = g'(x)$ bolsın. Bul jaǵdayda $\forall x \in (a, b)$ da $f(x) = g(x) + const$ boladı.

◀ Bul nátiyjeniń dállili $f(x) - g(x)$ funkciyaǵa salıstırǵanda 1-nátiyjeni qollaw menen kelip shıǵadı. ►

**4-teorema (Koshi teoreması).** Meyli $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar tómendegi shártlerdi qanaatlandırsın.

1) $f(x) \in C[a, b]$, $g(x) \in C[a, b]$,

2) $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ hám $g'(x)$ tuwındılar bar hám shekli;

3) $\forall x \in (a, b)$ da $g'(x) \neq 0$ bolsın.

Onda sonday $c \in (a, b)$ tochka tabılıp,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

boladı.

◀ Birinshiden $g(b) \neq g(a)$ bolıwın aytıp ótemiz, sebebi $g(b) = g(a)$ bolatuǵın bolsa, onda Roll' teoremasına muwapıq sonday $c \in (a, b)$ tochka tabılsa, $g'(c) = 0$ boladı. Bul 3)-shártke qarsı.

Tómendegi

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)] \quad (x \in [a, b])$$

funkciyanı qaraymız. Bul funkciya Roll' teoremasınıń barlıq shártlerin qanaatlandırıwshı. Onda Roll' teoremasına tiykarlanıp sonday $c \in (a, b)$ tochka tabılsa,

$$\Phi'(c) = 0 \qquad (3)$$

boladı. Bunnan

$$\Phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x) \qquad (4)$$

(3) hám (4) qatnaslardan

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0$$

yamasa

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

kelip shıǵadı. ►

**1-mısal.** $\forall x',\ x''\in R$ ushın $|\sin x'-\sin x''|\le|x'-x''|$ teńsizlikti dállileń.

◀ Meyli $x'<x''$ bolsın. $f(x)=\sin x$ ǵa $[x',\ x'']$ da Lagranj teoremasın qollaymız. Onda sonday $c\in(x',\ x'')$ tochka tabılıp,

$$|\sin x'-\sin x''|=|\cos c|\cdot(x''-x')$$

boladı. Eger $\forall t\in R$ da $|\cos t|\le 1$ ekenin itibarǵa alsaq, onda joqardaǵı qatnastan

$$|\sin x'-\sin x''|\le|x'-x''| \qquad (\forall x',\ x''\in R)$$

kelip shıǵadı. ▶

**2-mısal.** $e^x\ge 1+x$ teńsizlikti dállileń.

◀ Meyli $x>0$ bolsın. Onda $f(t)=e^t$ funkciyaǵa $[0,\ x]$ da Lagranj teoremasın qollap,

$$e^x-e^0=e^c(x-0). \qquad c\in(0,\ x)$$

Eger $c>0$ da $e^c>1$ bolıwın esapqa alsaq, onda keyingi qatnastan bolıwı kelip shıǵadı.

Eger $x<0$ bolsa, onda $f(t)=e^t$ funkciyaǵa $[x,\ 0]$ da Lagranj teoremasın qollap,

$$e^x-e^0=e^c(0-x)$$

ni hám $-x>0$, $e^c<1$ esapqa alıp, $e^x\ge 1+x$.

Bunnan, $x=0$ da $e^0=1$. Demek, $\forall x\in R$ da $e^x\ge 1+x$. ▶

**3-mısal.** Bul

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b} \qquad (0<b<a)$$

teńsizlikti dállileń.

◀ $[b,\ a]$ segmentte $f(x)=\ln(x)$ funkciyanı qaraymız. Bul funkciya usı segmentte úzliksiz hám $(b,\ a)$ da $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ tuwındıǵa iye. Onda Lagranj teoremasına muwapıq sonday $c$ $(b<c<a)$ tochka tabılıp,

$$\frac{\ln a-\ln b}{a-b}=\frac{1}{c} \qquad (5)$$

boladı. Bunnan,

$$b<c<a \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a}<\frac{1}{c}<\frac{1}{b}. \tag{6}$$

(5) hám (6) qatnaslardan

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$$

kelip shıǵadı. ►

## 6.7. Teylor formulası. Bazı bir elementar funkciyanıń Makloren formulaları

Meyli $f(x)$ funkciyanıń Peano kórinisindegi qaldıq aǵzalı Teylor formulasın keltiremiz:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n), \qquad (x\to x_0)$$

Bul teńlikte $x_0=0$ dep,

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n), \quad (x\to 0) \tag{1}$$

formulaǵa kelemiz. (1) formula $f(x)$ funkciyanıń Makloren formulası delinedi.

1) $f(x)=e^x$ bolsın. Bul funkciya ushın $f(0)=1$, $f^{(n)}(0)=1$ bolıp,

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+..+\frac{x^n}{n!}+o(x^n), \quad x\to 0$$

boladı.

2) $f(x)=(1+x)^\alpha$, $\alpha\in R$ bolsın. Bul funkciya ushın

$$f(0)=1, \quad f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$$

bolıp,

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+o(x^n), \quad x\to 0$$

boladı. Tiykarınan,

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n),\quad x\to 0$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o(x^n),\quad x\to 0$$

boladı.

3) $f(x)=\ln(1+x)$ bolsın. Bul funkciya ushın

$$f(0)=0,\quad f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$$

bolıp,

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k x^k}{k}+o(x^n),\quad x\to 0$$

boladı. Bunnan,

$$\ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+o(x^n),\quad x\to 0$$

boladı.

4) $f(x)=\sin x$ bolsın. Bul funkciya ushın $f(0)=0,\quad f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k$ bolıp,

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2}),\quad x\to 0$$

boladı.

5) $f(x)=\cos x$ bolsın. Bul funkciya ushın $f(0)=1,\quad f^{(2k)}(0)=(-1)^k$ bolıp,

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1}),\quad x\to 0$$

boladı.

**Mısal.** Bul

$$f(x)=\frac{1}{3x+2}$$

funkciyanıń Teylor (Makloren) formulasın jazıń.

◄ Bul funkciyanı tómendegishe

$$f(x) = \frac{1}{3x+2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{3}{2}x\right)}$$

jazıp

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n), \quad x \to 0$$

paydalanıp,

$$\frac{1}{3x+2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{3^k}{2^{k+1}} x^k + o(x^n), \quad x \to 0. \blacktriangleright$$

## 7-§. DIFFERENCIALLIQ ESAPTIŃ BAZI BIR QOLLANÍWLARÍ

### 7.1. Funkciyanıń monotonlıǵı. Funkciyanıń ekstremumları

Meyli $f(x)$ funkciya $(a,\ b)$ da $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ berilgen bolsın. Bunnan, $\forall x_1,\ x_2 \in (a,\ b)$, ushın $x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \le f(x_2)$ $\quad (f(x_1) < f(x_2))$ bolsa, $f(x)$ funkciya $(a,\ b)$ da ósiwshi (qatań ósiwshi), $\forall x_1,\ x_2 \in (a, b)$ ushın $x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \ge f(x_2)$ $\quad (f(x_1) > f(x_2))$ bolsa, onda $f(x)$ funkciya $(a,\ b)$ da kemeyiwshi (qatań kemeyiwshi) delinedi.

**1-teorema.** Meyli $f(x)$ funkciya $(a,\ b)$ da berilgen bolıp, $\forall x \in (a,\ b)$ da $f'(x)$ tuwındıǵa iye bolsın. $f(x)$ funkciyanıń $(a,\ b)$ da ósiwshi bolıwı ushın $\forall x \in (a,\ b)$ da

$$f'(x) \ge 0$$

zárúrli hám jetkilikli.

◀ **Zárúrligi.** $f(x)$ funkciya $(a,\ b)$ da ósiwshi bolsın. Onda $\Delta x > 0$ bolǵanda

$$f(x+\Delta x) - f(x) \ge 0$$

boladı. Tuwındı anıqlamasınan paydalanıp tómendegini tabamız:

$$f'(x) = f'(x+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \ge 0.$$

**Jetkilikliligi.** Meyli $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ bar bolıp, $f'(x) \ge 0$ bolsın. $[x_1,\ x_2]$ da $(x_1,\ x_2 \in (a,\ b),\ x_1 < x_2)$ $f(x)$ funkciyaǵa Lagranj teoremasın qollap tabamız:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) \ge 0.$$

Demek, $x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \le f(x_2)$, $\quad f(x)$ ósiwshi. ▶

**2-teorema.** Meyli $f(x)$ funkciya $(a,\ b)$ da berilgen bolıp, $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ tuwındıǵa iye bolsın. $f(x)$ funkciya $(a,\ b)$ da kemeyiwshi bolıwı ushın $\forall x \in (a, b)$ da

$$f'(x) \le 0$$

zárúrli hám jetkilikli.

Demek, $(a,\ b)$ da

$f'(x)\geq 0\ \Rightarrow\ f(x)$ ósiwshi $\Rightarrow\ f'(x)\geq 0,$

$f'(x)\leq 0\ \Rightarrow f(x)$ kemeyiwshi $\Rightarrow\ f'(x)\leq 0,$

$f'(x)>0\ \Rightarrow f(x)$ qatań ósiwshi $\Rightarrow\ f'(x)\geq 0,$

$f'(x)<0\ \Rightarrow f(x)$ qatań kemeyiwshi $\Rightarrow\ f'(x)\leq 0$

boladı.

**1-mısal.** $f(x)=\dfrac{x^2}{2^x}$ funkciyanıń ósiwshi, kemeyiwshi aralıqların tabıń.

◄ Tuwındısı $f'(x)=x\cdot 2^{-x}(2-x\ln 2)$ boladı.

Bul $f'(x)>0,\ \ x\cdot 2^{-x}(2-x\ln 2)>0$ teńsizlik $x\in\left(0,\ \dfrac{2}{\ln 2}\right)$ da orınlı boladı. Demek, $f(x)$ funkciya $x\in\left(0,\ \dfrac{2}{\ln 2}\right)$ da ósiwshi, $(-\infty,\ 0)\bigcup(\dfrac{2}{\ln 2},\ +\infty)$ da kemeyiwshi boladı. ►

*Funkciyanıń ekstremumları.* Meyli $f(x)$ funkciya $X\subset R$ kóplikte berilgen bolıp, $x_0\in X$ bolsın.

**1-anıqlama.** Eger sonday $\delta>0$ san tabılıp, $\forall x\in U_\delta(x_0)\subset X$ tochkalarda

$$f(x)\leq f(x_0)\qquad \big(f(x)\geq f(x_0)\big)$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada maksimumǵa (minimumǵa) erisedi delinedi, al $x_0$ tochkası $f(x)$ funkciyasınıń maksimum (minimum) tochkası delinedi.

**2-anıqlama.** Eger sonday $\delta>0$ san tabılıp, $\forall x\in U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$ $\big(U_\delta(x_0)\subset X\big)$ tochkalarda

$$f(x)<f(x_0)\qquad \big(f(x)>f(x_0)\big)$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada qatań maksimumǵa (qatań minimumǵa) erisedi delinedi, Funkciyanıń maksimum hám minimumı ulıwma atı menen onıń ekstremumları, maksimum hám minimum tochkaları bolsa onıń ekstremum tochkaları delinedi.

**3-teorema.** Meyli $f(x)$ funkciya $X \subset R$ kóplikte berilgen bolıp, $x_0 \in X$ tochkada ekstremumǵa iye bolsın.

Eger $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada $f'(x_0)$ tuwındıǵa iye bolsa, onda

$$f'(x_0) = 0$$

boladı.

◀Meyli $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada maksimumǵa erisip, usı tochkada tuwındıǵa iye bolsın. Bul jaǵdayda

$$\exists \delta > 0: \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \subset X \text{ da } f(x) \le f(x_0)$$

boladı. $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ intervalda $f(x)$ funkciyaǵa Ferma teoremasın qollanıp tabamız:

$$f'(x_0) = 0. \blacktriangleright$$

**3-anıqlama.** Funkciya tuwındısın nolge aylandıratuǵın tochka onıń stancionar (kritikalıq) tochkası delinedi.

**Eskertiw.** Eger $f(x)$ funkciya bazı tochkada ekstremumǵa erisse, ol usı tochkada tuwındıǵa iye bolıwı shárt emes.

Máselen, $f(x) = |x|$ funkciya $x_0 = 0$ tochkada minimumǵa erisedi, bazı tochkada tuwındıǵa iye emes.

Demek, $f(x)$ funkciyanıń ekstremum tochkaları onıń stacionar hám tuwındıǵa iye bolmaǵan tochkaları bolıwı múmkin.

**4-anıqlama.** Eger sonday $\delta > 0$ san tabılıp,

$$\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0) \ \ da \ \ g(x) > 0 \ \ yamasa$$
$$\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0) \ \ da \ \ g(x) < 0$$

bolsa, onda $g(x)$ funkciya $x_0$ tochkanıń shep tárepindegi belgisin saqlaydı delinedi. Eger sonday $\delta > 0$ san tabılıp,

$$\forall x \in (x_0,\ x_0 + \delta) \ \ da \ \ g(x) > 0 \ \ yamasa$$
$$\forall x \in (x_0,\ x_0 + \delta) \ \ da \ \ g(x) < 0$$

bolsa, onda $g(x)$ funkciya $x_0$ tochkanıń oń tárepinde belgi saqlaydı delinedi.

**4-teorema.** Meyli $f(x)$ funkciya $X \subset R$ kóplikte berilgen bolıp, tómendegi shártleri orınlansın:

1) $\exists\delta > 0,\ \forall x \in U_\delta(x_0) \subset X$ да $f'(x)$ tuwındısı bar;

2) $f'(x_0) = 0$;

3) $f'(x)$ tuwındı $x_0$ tochkanıń oń hám shep táreplerinde belgisin saqlansın.

Eger $f'(x)$ tuwındısı $x_0$ tochkanı ótiwde belgisin ózgertse, $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada ekstremumǵa erisedi.

Eger $f'(x)$ tuwındısı $x_0$ tochkanı ótiwde belgisi ózgertpese $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada ekstremumǵa erispeydi.

**5-teorema.** Meyli $f(x)$ funkciya $X \subset R$ kóplikte berilgen hám $m \in N$, $m \geq 2$, $x_0 \in X$ bolıp, tómendegi shártler orınlı bolsın:

1) $\exists\delta > 0,\ \forall x \in U_\delta(x_0) \subset X$ да $f^{(m-1)}(x)$ tuwındısı bar bolıp;

2) $f^{(m)}(x_0)$ tuwındısı bar bolıp;

3) $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(m-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(m)}(x_0) \neq 0.$

Onda $m = 2k,\ k \in N$ bolǵanda $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada ekstremumǵa erisip, $f^{(m)}(x_0) < 0$ bolǵanda $x_0$ tochkada maksimumǵa, $f^{(m)}(x_0) > 0$ da minimumǵa erisedi.

Eger $m = 2k + 1,\ k \in N$ bolsa, onda $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada ekstremumǵa erispeydi.

Tiykarınan eger $x_0$ tochka $f(x)$ funkciyanıń stacionar tochkası bolıp, $f(x)$ funkciya $x_0$ tochkada shekli $f''(x_0) \neq 0$ tuwındıǵa iye bolsa, onda bul tochkada $f(x)$ funkciya $f''(x_0) < 0$ bolǵanda maksimumǵa, al $f''(x_0) > 0$ bolǵanda minimumǵa iye boladı.

**2-mısal.** Funkciyanı ekstremumǵa tekseriń

$$f(x) = 2\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^2} + 1$$

.◀ Bul funkciya $R=(-\infty;+\infty)$ anıqlanǵan bolıp, usı kóplikte úzliksiz. Onıń tuwındısı

$$f'(x)=2\cdot\frac{5}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}}-5\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} \qquad (1)$$

Bunnan, funkciyanıń tuwındısı $x_1=1$ tochkada nolge aylanadı, $f'(1)=0$; $x_2=0$ tochkada bolsa funkciyanıń tuwındısı bolmaydı.

Tuwındı ańlatpası (1) den kórinip turǵanday, $x=1$ tochkanıń shep tárepindegi tochkalarda $f'(x)<0$ oń tárepindegi tochkalarda $f'(x)>0$ boladı. Demek, berilgen funkciya $x=1$ tochkada minimumǵa erisedi hám $\min f(x)=f(1)=-2$ boladı.

Jáne tuwındı belgisi (1) den kórinip turǵanday, $x=0$ tochkanıń shep tárepindegi tochkalarda $f'(x)>0$, oń tárepindegi tochkalarda $f'(x)<0$ boladı.

Demek, $f(x)$ funkciya $x=0$ tochkada maksimumǵa erisedi hám $\max f(x)=f(0)=1$ boladı. ▶

## 7.2. Funkciya grafiginiń dóńesligi hám oyıslıǵı. Funkciya grafiginiń asimptotaları

**Funkciyanıń dóńesligi hám oyıslıǵı.** Meyli $f(x)$ funkciya $(a,b)$ da berilgen bolıp, $x_1, x_2\in(a,b)$ ushın $x_1<x_2$ bolsın.

$f(x)$ funkciya grafiginiń $(x_1,\ f(x_1))$, $(x_2,\ f(x_2))$ tochkalarınan ótiwshi tuwrı sızıqtı $y=l(x)$ desek, ol tómendegishe

$$l(x)=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$$

boladı.

**1-anıqlama.** Eger hár qanday aralıq $(x_1,x_2)\subset(a,b)$ da jaylasqan $\forall x\in(x_1,x_2)$ ushın

$$f(x)\le l(x) \quad (f(x)<l(x))$$

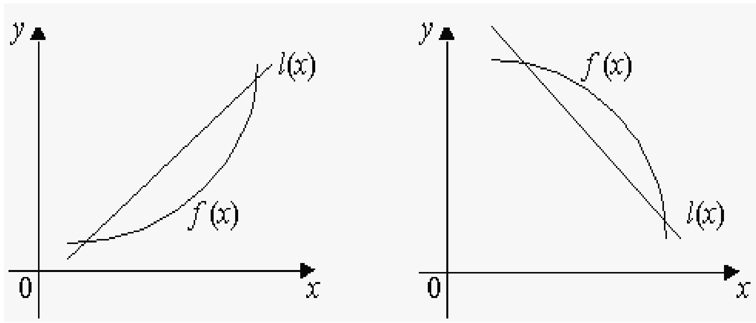
bolsa, onda $f(x)$ funkciya $(a, b)$ da oyıs (qatań oyıs) funkciya delinedi.

**2-anıqlama.** Eger har qanday aralıq $(x_1, x_2) \subset (a, b)$ da jaylasqan $\forall x \in (x_1, x_2)$ ushın

$$f(x) \geq l(x) \qquad \left(f(x) > l(x)\right)$$

bolsa, onda $f(x)$ funkciya $(a, b)$ da dóńes (qatań dóńes) funkciya delinedi.

Oyıs hám dóńes funkciyalardıń grafikleri 7-sızılmada suwretlengen:




7-sızılma.

Meyli $\alpha_1 \geq 0,\ \alpha_2 \geq 0,\ \alpha_1 + \alpha_1 = 1$ bolıp, $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ bolsın. Funkciyanıń oyıslıǵı hám dóńesligi tómendegishe anıqlaw hám múmkin.

**3-anıqlama.** Eger

$$f(\alpha_{1.} x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

$$\left(f(\alpha_{1.} x_1 + \alpha_2 x_2) < \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)\right)$$

bolsa, onda $f(x)$ funkciya $(a, b)$ da oyıs (qatań oyıs) delinedi.

**4-anıqlama.** Eger

$$f(\alpha_{1.} x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

$$\left(f(\alpha_{1.} x_1 + \alpha_2 x_2) > \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)\right)$$

bolsa, onda $f(x)$ funkciya $(a, b)$ da dóńes (qatań dóńes) delinedi.

**1-mısal.** $f(x) = x^2$ funkciya $R$ da qatań oyıs funkciya boladı.

◀ 3-anıqlamadan paydalanıp,

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^2 = (\alpha_1 x_1)^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 x_1 x_2 + (\alpha_2 x_2)^2 <$$

$$<\alpha_1^2 x_1^2+\alpha_1\alpha_2(x_1+x_2)^2+\alpha_2^2 x_2^2=\alpha_1 x_1^2(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_2 x_2^2(\alpha_1+\alpha_2)=$$

$$=\alpha_1 x_1^2+\alpha_2 x_2^2=\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2) \ ►$$

**1-teorema.** Meyli $f(x)$ funkciya $(a, b)$ da berilgen bolıp, onda $f'(x)$ tuwındıǵa iye bolsın. $f(x)$ funkciyanıń $(a, b)$ da oyıs (qatań oyıs) bolıwı ushın $f'(x)$ tiń $(a, b)$ da ósiwshi (qatań ósiwshi) bolıwı zárúrli hám jeterli.

◄ **Zárúrligi.** $f(x)$ funkciya $(a, b)$ da oyıs bolsın. Bul jaǵdayda $\forall x_1, x_2 \in (a, b), \ \ x_1 < x_2, \ \forall x \in (x_1, x_2)$ ushın

$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

bolıp, onnan

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

kelip shıǵadı. ($\left(x_2 - x_1\right) = (x_2 - x) + (x - x_1)$ delinedi). Keyingi teńsizlikte $x \to x_1$ soń $x \to x_2$ da limitke ótip,

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$f'(x_2) \ge \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

bolıwın tabamız. Onnan $f'(x_1) \le f'(x_2)$ kelip shıǵadı. Demek, $f'(x)$ funkciya (a,b) da ósiwshi boladı.

Meyli $f(x)$ funkciya $(a, b)$ da qatań oyıs bolsın. Bul jaǵdayda

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

boladı. Lagranj teoremasına muwapıq

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), \quad x_1 < c_1 < x;$$

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2), \quad x < c_2 < x_2$$

bolıp, onnan $f'(x_1) < f'(x_2)$ kelip shıǵadı.

**Jetkilikligi**. $f'(x)$ funkciya $(a,b)$ da ósiwshi (qatań ósiwshi) bolsın, $\forall x_1, x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2$ da

$$f'(x_1) \le f'(x_2) \quad (f'(x_1) < f'(x_2)).$$

Lagranj teoremasınan paydalanıp

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1), \quad x_1 < c_1 < x;$$

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(c_2), \quad x < c_2 < x_2.$$

Bunnan $x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2 \Rightarrow c_1 < c_2$. Demek, $f'(c_1) \le f'(c_2)$ $(f'(c_1) < f'(c_2))$ bolıp, joqarıdaǵı qatnaslardan

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \qquad \left(\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\right)$$

kelip shıǵadı. Onda $f(x)$ funkciyanıń $(a,b)$ oyıs (qatań oyıs) ekenin bildiredi. ►

**2-teorema.** $f(x)$ funkciya $(a,b)$ da berilgen bolıp, $f'(x)$ tuwındıǵa iye bolsın. $f(x)$ funkciyanıń $(a,b)$ da dóńes (qatań dóńes) bolıwı ushın $f'(x)$ tıń $(a,b)$ da kemeyiwshi (qatań kemeyiwshi) bolıwı zárúrli hám jetkilikli.

Meyli $f(x)$ funkciya $(a,b)$ da berilgen bolıp, ol usı intervalda $f''(x)$ tuwındıǵa iye bolsın. Bunnan tısqarı $(a,b)$ intervaldıń hár qanday $(\alpha,\beta)$ $((\alpha,\beta) \subset (a,b))$ bóliminde $f''(x)$ tek nolge teń bolmasın.

**3-teorema.** $f(x)$ funkciya $(a,b)$ intervalda oyıs (dóńes) bolıwı ushın $(a,b)$ da

$$f''(x) \ge 0 \quad (f''(x) \le 0)$$

bolıwı zárúrli hám jeterli.

**2-mısal.** $f(x) = \ln x,\ (x > 0)$ funkciya dóńes boladı.

◄Bul funkciya ushın $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ boladı. 2-teoremaǵa qarap berilgen $f(x) = \ln x$ funkciya $(0, +\infty)$ da qatań dóńes boladı. ►

*Funkciyanıń iyiliw tochkaları.* Meyli $f(x)$ funkciya $X \subset R$ kóplikte berilgen bolıp, $x_0 \in X$, $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \subset X$, $\delta > 0$ bolsın.

**5-anıqlama**. Eger $f(x)$ funkciya $(x_0 - \delta,\ x_0)$ da oyıs (dóńes), $(x_0,\ x_0 + \delta)$ da dóńes (oyıs) bolsa, onda $x_0$ tochka $f(x)$ funkciyanıń iyiliw tochkası delinedi.

Meyli $f(x)$ funkciya $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ da $f''(x)$ tuwındıǵa iye bolsın. Eger $\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$ da $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) \leq 0)$, $\forall x \in (x_0,\ x_0 + \delta,)$ da $f''(x) \leq 0$ $(f''(x) \geq 0)$ bolsa, onda $f'(x)$ funkciya $x_0$ tochkada ekstremumga erisedi hám demek, $f''(x_0) = 0$ boladı. Demek, $f(x)$ funkciya iyiliw tochkasında $f''(x) = 0$ boladı.

**3-mısal.** $f(x) = x^3$ funkciya $x_0 = 0$ tochkada iyiledi.

◀Bul funkciya ushın $f''(x) = 6x$ bolıp,

$$\forall x \in (-\delta, 0) \text{ da } f''(x) < 0$$

$$\forall x \in (0,\ \delta,) \text{ da } f''(x) > 0 \qquad (\delta > 0)$$

boladı. ▶

**Funkciya grafiginiń asimptotaları.** Meyli $f(x)$ funkciya $X \subset R$ kóplikte berilgen bolıp, $x_0$ tochka $X$ kópliktiń limit tochkası bolsın.

**6-anıqlama.** Eger

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x), \quad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

limitlerden birewi yamasa ekinshiside sheksizlik bolsa, onda $x = x_0$ tuwrı sızıq $f(x)$ funkciya grafiginiń vertikal asimptotası delinedi.

Máselen, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ funkciya grafigi ushın $x = 0$ tuwrı sızıq vertikal asimptota boladı.

Meyli $f(x)$ funkciya $(x_0, +\infty)$ da anıqlanǵan bolsın.

**7-anıqlama.** Eger sonday $k$ hám $b$ sanları tabılsa,

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \qquad (x \to +\infty \text{ да } \alpha(x) \to 0)$$

bolsa, onda $y = kx + b$ tuwrı sızıq $f(x)$ funkciya grafiginiń qıya asimptotası delinedi.

**4-teorema.** $f(x)$ funkciya grafigi $y = kx + b$ qıya asimptotaǵa iye bolıwı ushın

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = b$$

bolıwı zárúrli hám jeterli.

◀ **Zárúrligi.** $y = kx + b$ tuwrı sızıq $f(x)$ funkciya grafiginıń qıya asimptotası bolsın. Onda

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

bolıp, $x \to +\infty$ да $\alpha(x) \to 0$ boladı. Bul teńlikti itibarǵa alıp

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{kx + b + \alpha x}{x} = k;$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty}(b + \alpha(x)) = b.$$

**Jetkilikligi**. Meyli $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = k, \quad \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = b$

qatnaslar orınlı bolsın. Bul qatnaslardan

$$(f(x) - kx) - b = \alpha(x) \to 0 \;\Rightarrow\; f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

kelip shıǵadı. ▶

**4-mısal.** $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ funkciyanıń qıya asimptotasın tabıń.

◀ Bul funkciya ushın

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x\right) = 2$$

boladı. Demek, $y = x + 2$ tuwrı sızıq berilgen funkciya grafiginiń qıya asimptotası boladı. ▶

## 7.3. Lopital qaǵıydaları

Belgili shártlerde funkciyanıń limitin esaplaw qaǵıydaları úyrenilgen edi. Kóp jaǵdaylarda bunday shártler orınlanbaǵanda, yamasa

$$x \to x_0 \; da \;\; f(x) \to 0, \;\; g(x) \to 0: \;\; \frac{f(x)}{g(x)} \; \lim iti \; \left(\frac{0}{0}\right),$$

$$x \to x_0 \; da \;\; f(x) \to +\infty, \;\; g(x) \to +\infty: \frac{f(x)}{g(x)} \lim iti \; \left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

$$x \to x_0 \; da \;\; f(x) \to +\infty, \;\; g(x) \to +\infty: f(x) - g(x) \lim iti \; (\infty - \infty),$$

$$x \to x_0 \; da \;\; f(x) \to 0, \; g(x) \to 0: (f(x))^{g(x)} \lim iti \; \left(0^0\right),$$

$$x \to x_0 \; da \;\; f(x) \to 1, \;\; g(x) \to +\infty: (f(x))^{g(x)} \text{ limiti } \left(1^{\infty}\right)$$

$x \to x_0$ da $f(x) \to \infty, g(x) \to 0$: $f(x)\, g(x)$ ti limiti $\infty^0$ni tabıwda funkciyanıń tuwındılarına tiykarlanǵan nızamına muwapıq esaplaw qolay boladı. Bunday usıl menen funkciya limitin tabıw **Lopital** qaǵıydaları delinedi.

**1.** $\frac{0}{0}$ *hám* $\frac{\infty}{\infty}$ **kórinisindegi jaǵdaylar.**

**1-teorema**. Meyli $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar $(a, b)$ da berilgen bolıp, tómendegi shártlerin orınlı bolsın:

1) $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = 0, \;\; \lim\limits_{x \to b-0} g(x) = 0;$

2) $\forall x \in (a, b)$ да $f'(x)$ ва $g'(x)$ tuwındılar boladı;

3) $\forall x \in (a, b)$ да $g'(x) \neq 0;$

4) Bul $\lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell, \;\; (\ell \in R)$ boladı. Onda $\lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$ boladı.

◄ $f(b) = 0, \;\; g(b) = 0$ dep alamız. Onda $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar $(b - \delta, \; b]$ да $(\delta > 0)$ úzliksiz bolıp qaladı. Teoremanıń 4-shártine muwapıq

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \delta > 0, \;\; \forall x \in (b - \delta, \; b): \;\; \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell \right| < \varepsilon$$

boladı. Endi $(b - \delta, \; b]$ da Koshi teoremasınan paydalanıp tabamız:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\ell\right|=\left|\frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)}-\ell\right|=\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}-\ell\right|<\varepsilon$$

$$(c\in(x,\,b)\subset[b-\delta,\ b]).$$

Demek,

$$\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell\ .\blacktriangleright$$

**1-mısal.** $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{(\ln x)^{\alpha}-\left(\frac{x}{e}\right)^{\beta}}{x-e}=\dfrac{\alpha-\beta}{e}$ dállileń.

$\blacktriangleleft$ $f(x)=(\ln x)^{\alpha}-\left(\frac{x}{e}\right)^{\beta}$, $g(x)=x-e$ funkciyaları ushın $(1,\ e)$ da 1-teoremanıń barlıq shártleri orınlanadı

1) $\lim\limits_{x\to e}f(x)=\lim\limits_{x\to e}\left[\ ((\ln x)^{\alpha}-\left(\frac{x}{e}\right)^{\beta}\ )\right]=0,$

$\lim\limits_{x\to e}g(x)=\lim\limits_{x\to e}(x-e)=0;$

2) $f'(x)=\alpha(\ln x)^{\alpha-1}\cdot\dfrac{1}{x}-\dfrac{\beta}{e}\left(\dfrac{x}{e}\right)^{\beta-1}$, $g'(x)=1;$

3) $g'(x)=1\neq 0;$

4) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\alpha(\ln x)^{\alpha-1}\cdot\frac{1}{x}-\frac{\beta}{e}\cdot\left(\frac{x}{e}\right)^{\beta-1}}{1}=\dfrac{\alpha-\beta}{e}.$

Demek,

$$\lim_{x\to e}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to e}\frac{(\ln x)^{\alpha}-\left(\frac{x}{e}\right)^{\beta}}{x-e}=\frac{\alpha-\beta}{e}.\blacktriangleright$$

**2-teorema.** Meyli $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar $(a,+\infty)$ da berilgen bolıp, tómendegi shártlerdi orınlı bolsın:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0;$

2) $\forall x\in(a,\ +\infty)$ da $f'(x),\ g'(x)$ tuwındılar boladı;

3) $\forall x \in (a, +\infty)$ da $g'(x) \neq 0;$

4) Eger $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ bolsa, onda $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$ boladı.

**2-mısal.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2\mathrm{arctg}x^2 - \pi}$ limitti esaplań.

◄Eger $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} - 1, \quad g(x) = 2\mathrm{arctg}x^2 - \pi$ bolsa, onda 2-teoremanıń barlıq shártleri orınlanadı, tiykarınan $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}},\ g'(x) = \dfrac{4x}{1+x^4}$ bolıp,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\dfrac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}}{\dfrac{4x}{1+x^4}} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^4}{2x^4} = -\frac{1}{2}$$

boladı. 2-teoremaǵa muwapıq

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2\mathrm{arctg}x^2 - \pi} = -\frac{1}{2}$$

boladı. ►

**3-teorema.** Meyli $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar $(a, b)$ da berilgen bolıp, tómendegi shártlerdi orınlı bolsın:

1) $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to b-0} g(x) = \infty;$

2) $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x),\ g'(x)$ tuwındılar boladı;

3) $\forall x \in (a, b)$ da $g'(x) \neq 0;$

4) $\lim\limits_{x\to b-0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell, \quad (\ell \in R)$ boladı. Onda

$$\lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

boladı.

**4-teorema.** Meyli $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar $(a, +\infty)$ da berilgen bolıp, tómendegi shártlerdi orınlı bolsın:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\infty;$

2) $\forall x\in(a,+\infty)$ da $f'(x),\ g'(x)$ tuwındılar boladı;

3) $\forall x\in(a,+\infty)$ da $g'(x)\neq 0;$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\ell,\ (\ell\in R)$ boladı. Onda $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\ell$ boladı.

**2.** $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ 0^{0}$ kórinisindegi jaǵdaylar**.** Bul kórinistegi anıq emeslikler $\dfrac{0}{0},\ \dfrac{\infty}{\infty}$ jaǵdaylarǵa keltirilip, keyin joqarıdaǵı teoremalar qollanıladı.

1) $x\to x_0$ da $f(x)\to 0,\ g(x)\to\infty$ bolǵanda $f(x)\cdot g(x)$ funkciyanıń limitin tabıw ushın onı

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

dep, keyin 1- yamasa 2-teoremalar qollanıladı.

2) $x\to x_0$ da $f(x)\to+\infty,\ g(x)\to+\infty$ bolǵanda $f(x)-g(x)$ funkciyanıń limitin tabıw ushın onı

$$f(x)-g(x)=\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}\cdot\dfrac{1}{g(x)}}$$

dep, keyin 1-teorema qollanıladı.

3) $x\to x_0$ da $f(x)\to 0,\ g(x)\to 0$ hám $x\to x_0$ da $f(x)\to 1,\ g(x)\to+\infty$ bolǵanda $\left(f(x)\right)^{g(x)}$ funkciyanıń limitin tabıw ushın

$$y=(f(x))^{g(x)}$$

funkciya logarifmlenedi, keyin joqarıdaǵı teoremalar qollanıladı.

**3-mısal.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ limitti esaplań.

◀ $y=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ dep alamız. Bunnan, $x\to 0$ da

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}\to 1, \qquad g(x)=\frac{1}{x^2}\to +\infty.$$

Ápiwayı esaplawlar járdeminde tómendegin tabamız:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln\frac{\sin x}{x}\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\left(x\cos x-\sin x\right)'}{\left(x^3\right)'}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

Demek, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$ ►

# 8-§. ANÍQ EMES INTEGRAL

## 8.1. Dáslepki funkciya hám anıq emes integral túsinikleri

Meyli $f(x)$ hám $F(x)$ funkciyaları $(a,b)\subset R$ intervalda (bul interval shekli yamasa sheksiz bolıwı múmkin) berilgen bolıp, $F(x)$ funkciya $(a,b)\subset R$ da differenciallanıwshı bolsın.

**1-anıqlama.** Eger $(a,b)$ intervalda $F'(x)=f(x)$ $(x\in(a,b))$ bolsa, onda $(a,b)$ da $F(x)$ funkciya $f(x)$ nıń dáslepki funkciyası delinedi.

Máselen, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ funkciyanıń $(0,+\infty)$ da dáslepki funkciyası $F(x)=\ln x$ boladı, sebebi $(0,+\infty)$ da $F'(x)=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}=f(x)$.

Meyli $f(x)$ hám $F(x)$ funkciyaları $[a,b]$ segmentte berilgen bolıp, $F(x)$ funkciya usı $[a,b]$ da differenciallanıwshı bolsın.

**2-anıqlama.** Eger $(a,b)$ intervalda $F'(x)=f(x)$ $(x\in(a,b))$ bolıp, $a$ hám $b$ tochkalarda bolsa

$$F'(a+0)=f(a),\quad F'(b-0)=f(b)$$

teńlikler orınlı bolsa, onda $[a,b]$ segmentte $F(x)$ funkciya $f(x)$ nıń dáslepki funkciyası delinedi.

**1-teorema.** Eger $(a,b)$ intervalda $F(x)$ hám $\Phi(x)$ funkciyalardıń hár biri $f(x)$ funkciyanıń dáslepki funkciyası bolsa, onda $F(x)$ hám $\Phi(x)$ funkciyaları $(a,b)$ da bir-birinen turaqlı sanǵa parq qıladı:

$$\Phi(x)-F(x)=C.\ (C=const)$$

◄ Shártke muwapıq $(a,b)$ da $\Phi'(x)=f(x)$, $F'(x)=f(x)$ .

Demek, $(a,b)$ da $\Phi'(x)=F'(x)$. Onda

$$\Phi(x)=F(x)+C,\ (C=const)$$

boladı. ►

Bul teoremadan tómendegi nátiyje kelip shıǵadı.

**Nátiyje.** Eger $(a,b)$ da $F(x)$ funkciya $f(x)$ tiń bazı bir dáslepki funkciyası bolsa, onda $f(x)$ funkciyanıń $(a,b)$ dagi qálegen dáslepki funkciyası $\Phi(x)$ ushın

$$\Phi(x)=F(x)+C. \quad (C=const)$$

boladı.

**1-eskertiw.** $(a,b)$ da berilgen hár qanday funkciya dáslepki funkciyaǵa iye bolmaydı.

**1-mısal.** $(-1,1)$ intervalda

$$f(x)=\begin{cases}-1, \ eger \ -1<x<0, \\ 0, \ eger \ x=0, \\ 1, \ eger \ 0<x<1\end{cases}$$

funkciyanı qarayıq. Bul funkciyanıń $(-1,1)$ intervalda dáslepki funkciyaǵa iye bolmaydı.

◀Kerisinshe boljayıq, yaǵnıy berilgen funkciya $(-1,1)$ da dáslepki funkciya $F(x)$ ǵa iye bolsın $F'(x)=f(x)$ $(x\in(-1,1))$. Bunnan,

$$F'(0)=f(0)=0 \qquad (1)$$

boladı. $F(x)$ funkciyaǵa $[0,x]$ segmentte $(0<x<1)$ Lagranj teoremasın qollanıp

$$F(x)-F(0)=F'(c)\cdot x=f(c)\cdot x=x \quad (c\in(0,x)).$$

Keyingi teńlikten

$$\frac{F(x)-F(0)}{x}=1, \quad \lim_{x\to+0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=1$$

bolıp, $F'(+0)=1$ kelip shıǵadı. Bul bolsa (1) qatnasqa qarsı boladı.

Demek, qaralıp atırǵan $f(x)$ funkciya $(-1,1)$ da dáslepki funkciyaǵa iye bolmaydı. ►

**2-teorema.** Eger $f(x)\in C(a,b)$ bolsa, onda $f(x)$ funkciya $(a,b)$ da dáslepki funkciyaǵa iye boladı.

Meyli $(a,b)$ da $f(x)$ funkciya berilgen bolıp, $F(x)$ funkciya onıń bazı bir dáslepki funkciyası bolsın

$$F'(x)=f(x) \quad (x\in(a,b)).$$

Onda berilgen $f(x)$ funkciyanıń qálegen dáslepki funkciyası

$$F(x)+C \qquad (C=const)$$

kórinisinde ańlatıladı.

**3-anıqlama.** $F(x)+C \quad ,(x\in(a,b))$ ańlatpa $f(x)$ funkciyanıń anıq emes integralı delinedi hám

$$\int f(x)dx$$

kórinisinde belgilenedi. Bunda $\int$ - integral belgisi, $f(x)$ integral astındaǵı funkciya, $f(x)dx$ integral belgisi astındaǵı ańlatpa delinedi.

Demek,

$$\int f(x)dx = F(x)+C \qquad (C=const)$$

Solay etip, $(a,b)$ intervalda $f(x)$ funkciyanıń anıq emes integralı $(a,b)$ da tuwındısı usı $f(x)$ ka teń bolǵan funkciyanıń ulıwma kórinisin ańlatadı.

**2-mısal.** $\int x^3dx$ integraldı tabıń.

◄ Anıq emes integral anıqlamasına muwapıq, sonday $F(x)$ funkciya tabılıw kerek, $F'(x)=x^3$ bolsın. Eger $F(x)=\frac{1}{4}x^4$ bolsa, bunnan, $F'(x)=x^3$ boladı. Demek, $\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4+C \qquad (C=const)$. ►

**3-mısal.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$ anıq emes integraldı tabıń.

◄ Bunnan, $F(x)=\sqrt{1+x^2}$ funkciya ushın

$$F'(x)=(\sqrt{1+x^2})'=\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

boladı. Demek,

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{1+x^2}+C. \text{ ►}$$

## 8.2. Integraldıń ápiwayı qásiyetleri

Endi anıq emes integraldıń qásiyetlerin keltiremiz. Bunnan bılay anıq emes integral haqqında gáp barǵanda onı qaralıp atırǵan aralıqta bar dep, yaǵnıy integral belgisi astındaǵı funkciya qaralıp atırǵan aralıqta dáslepki funkciyaǵa iye dep qaraymız hám aralıqtı kórsetip otırmaymız.

1) Bul

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

orınlı boladı.

◀ Meyli $F(x)$ funkciya $f(x)$tiń dáslepki funkciyası bolsın,

$$F'(x) = f(x).$$

Onda

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (C = const)$$

boladı. Bul teńlikke differencial ámelin qollanıp

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx \ ▶$$

Bul tuwındı birinshiden differencial belgisi $d$, soń integral belgisi $\int$ kelip, olar izbe-iz turǵanda óz-ara bir-birewin joǵaltıwdı ańlatadı.

2) Bul

$$\int dF(x) = F(x) + C \qquad (C = const)$$

orınlı boladı.

◀ Meyli $F(x)$ funkciya $f(x)$ nıń dáslepki funkciyası bolsın,

$$F'(x) = f(x).$$

Onda

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (C = const)$$

boladı.

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x)$$

bolıp, bul teńliklerden

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

kelip shıǵadı. ►

Bul tuwındı birinshi integral belgisi $\int$ soń differencial belgisi $d$ kelip, olar izbe-iz turǵanda óz-ara bir-birewin joǵaltıwdı ańlatadı hám $F(x)$ ǵa turaqlı $C$ tı qosıp qoyıw kerekligin kórsetedi.

3) Bul

$$\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx \qquad (2)$$

teńlik orınlı boladı.

◄ Meyli $F(x)$ hám $\Phi(x)$ funkciyalar sáykes tárizde $f(x)$ hám $g(x)$ lerdiń dáslepki funkciyaları bolsın

$$F'(x)=f(x)\ ,\ \ \Phi'(x)=g(x).$$

Bul jaǵdayda $\int f(x)dx=F(x)+C_1,\ \ \int g(x)dx=\Phi(x)+C_2$ bolıp,

$$\int f(x)dx+\int g(x)dx=F(x)+\Phi(x)+C_1+C_2 \qquad (3)$$

boladı. $[F(x)+\Phi(x)]'=f(x)+g(x)$ bolǵanlıǵı sebepli

$$\int\ [f(x)+g(x)]dx=F(x)+\Phi(x)+C_3 \qquad (4)$$

boladı. (3) hám (4) qatnaslardan, olardaǵı $C_1, C_2$ hám $C_3$ lerdiń qálegen turaqalı ekenligin itibarǵa alıp

$$\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx. \blacktriangleright$$

Bul tuwındı anıq emes integraldıń additivlik tuwındısı delinedi.

4)

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx \qquad (5)$$

teńlik orınlı boladı, bunda $k$ turaqlı san hám $k\neq 0$.

Bul tuwındı joqarıdaǵı 3)-tuwındı kórinisinde dállilenedi.

**Eskertiw.** (2) hám (5) teńliklerin oń hám shep tárep lerindegi ańlatpalar arasındaǵı ayırma turaqlı sanǵa teńligi mánisindegi teńlikler dep qaraladı.

**Mısal.** $J=\int(\frac{5}{1+x^2}-3\sin x)dx$ integraldı tabıń.

◄ Anıq integraldıń 3)- hám 4)- tuwındılarınan paydalansaq, onda

$$\int\left(\frac{5}{1+x^2}-3\sin x\right)dx=5\int\frac{1}{1+x^2}dx-3\int\sin xdx$$

kelip shıǵadı. Endi $(-\cos x)'=\sin x,\quad (\text{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ itibarǵa alıp,

$$5\int\frac{1}{1+x^2}dx-3\int\sin xdx=5\text{arctg}x+3\cos x+C.$$

Demek,

$$J=5\text{arctg}x+3\cos x+C\ .\blacktriangleright$$

**Anıq emes integrallar tablicası.**

Elementar funkciyalardıń tuwındıları tablicası hám anıq emes integraldıń anıqlamasınan paydalanıp, ápywayı funkciyalardıń anıq emes integralları tabıladı. Olardı jámlep, tablica kóriniske keltiremiz:

1) $\int 0\cdot dx=C,\qquad C=const.$

2) $\int 1\cdot dx=x+C.$

3) $\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\qquad (\alpha\neq-1).$

4) $\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C,\qquad (x\neq0).$

5) $\int a^{x}dx=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C,\qquad (a>0,\ a\neq1).$
$\int e^{x}dx=e^{x}+C.$

6) $\int\sin xdx=-\cos x+C.$

7) $\int\cos xdx=\sin x+C.$

8) $\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\text{tg}x+C,\qquad (x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z).$

9) $\int\dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\text{ctg}x+C,\qquad (x\neq\pi n,\ n\in Z).$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases} \qquad (-1 < x < 1).$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \begin{cases} \mathrm{arctg} x + C, \\ -\mathrm{arcctg} x + C. \end{cases}$

12) $\int shxdx = chx + C.$

13) $\int chxdx = shx + C.$

14) $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -chx + C, \qquad (x \neq 0).$

15) $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C.$

### 8.3. Integrallaw usılları

**1. Ózgeriwshini almastırıp integrallaw usılı.**

Meyli $f(x)$ funkciyanıń anıq emes integralı

$$\int f(x)dx \tag{1}$$

berilgen bolıp, onı esaplaw talap etilsin.

Kóbinese, ózgeriwshi $x$ tı belgili qaǵıydaǵa muwapıq basqa ózgeriwshige almastırıw nátiyjesinde berilgen integral ápiwayı integralǵa keledi hám onı esaplaw ańsat boladı.

Meyli (1) integraldaǵı ózgeriwshi $x$ taza ózgeriwshi $t$ menen usı

$$t = \varphi(x)$$

qatnasta bolıp, tómendegi shártler orınlı bolsın:

1) $\varphi(x)$ funkciya differenciallanıwshı bolsın;

2) $g(t)$ funkciya baslanǵısh funkciya $G(t)$ ga iye, yamasa

$$G'(t) = g(t), \qquad \int g(t)dt = G(t) + C; \tag{2}$$

3) $f(x)$ funkciya ushın

$$f(x)=g(\varphi(x))\cdot\varphi'((x) \qquad (3)$$

dállileń. Onda

$$\int f(x)dx=\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx=G(\varphi(x))+C$$

boladı.

◀Quramalı funkciyanıń tuwındısın esaplaw nızamınan paydalanıp, (2) hám (3) qatnaslardı esapqa alıp

$$[G(\varphi(x))+C]'=G'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=g(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=f(x).$$

Bunnan

$$\int f(x)dx=G(\varphi(x))+C$$

kelip shıǵadı. ▶

Usı jol menen (1) integraldı esaplaw ózgeriwshini almastırıp integrallaw usılı delinedi.

Bul usılda, ózgeriwshini júdá kóp qatnas penen almastırıw imkaniyatı bolǵan jaǵdayda olar arasınan qaralıp atırǵan integraldı ápiwayı, esaplaw ushın qolay jaǵdayǵa keltiretuǵın tańlap alıw áhmiyetli.

**1-mısal.** $\int \sin 5xdx$ integraldı esaplań.

◀Bul integraldı ózgeriwshisin almastırıp esaplaymız,

$$\int \sin 5xdx=\begin{vmatrix} 5x=t \\ 5dx=dt \end{vmatrix}=\frac{1}{5}\int \sin tdt=-\frac{1}{5}\cos t+C=-\frac{1}{5}\cos 5x+C. \text{ ▶}$$

**2-mısal.** $J=\int \dfrac{dx}{e^x+e^{-x}}$ integraldı esaplań.

◀Berilgen integraldı $\int \dfrac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int \dfrac{e^x dx}{e^{2x}+1}$ jazıp alamız. Bul integraldı ózgeriwshini almastırıw usılınan paydalaıp esaplaymız,

$$J=\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}=\begin{vmatrix} e^x=t \\ e^x dx=dt \end{vmatrix}=\int \frac{dt}{1+t^2}=arctgt+C=arctge^x+C \text{ ▶}$$

**3-mısal.** $J=\int \dfrac{dx}{\cos x}$ integraldı esaplań.

◀ Bunnan, $\frac{1}{\cos x}=\frac{\cos x}{\cos^2 x}=\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$. Onda

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos x dx}{1-\sin^2 x}=\begin{vmatrix}\sin x=t\\ \cos x dx=dt\end{vmatrix}=\int\frac{dt}{1-t^2}$$

bolıp,

$$\frac{1}{1-t^2}=\frac{1}{(1-t)(1+t)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+t)}+\frac{1}{(1-t)}\right]$$

bolǵanlıǵı sebepli

$$J=\frac{1}{2}(\int\frac{dt}{(1+t)}+\int\frac{dt}{(1-t)})=\frac{1}{2}(\int\frac{d(1+t)}{(1+t)}-\int\frac{d(1-t)}{(1-t)})=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C$$

boladı. Eger $\frac{1+t}{1-t}=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=\mathrm{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})$ esapqa alsaq, onda

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\mathrm{tg}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})\right|+C\ . ▶$$

**4-mısal.** $J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ $(a\neq 0,\ a\in R)$ integraldı esaplań.

◀Integralda ózgeriwshini tómendegishe almastıramız:

$$x+\sqrt{x^2+a}=t\,.$$

Onda

$$dt=d(x+\sqrt{x^2+a})=(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}})dx=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}dx=\frac{t}{\sqrt{x^2+a}}dx$$

bolıp, onnan

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{dt}{t}$$

kelip shıǵadı. Nátiyjede

$$J=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C\ .▶ \qquad (4)$$

**2. Bóleklep integrallaw usılı.** Meyli $u(x)$ hám $v(x)$ funkciyalar úzliksiz $u'(x)$, $v'(x)$ tuwındılarǵa iye bolsın. Bunnan

$$(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

boladı. Demek, $F(x) = u(x)\cdot v(x)$ funkciya $f(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$ funkciyanıń dáslepki funkciyası boladı. Bunnan

$$\int [u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)]dx = u(x)\cdot v(x) + C$$

kelip shıǵadı. Anıq emes integraldıń 3)- hám 4)- tuwındılarınan paydalanıp

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)dx \qquad (5)$$

kelip shıǵadı. (5) formulanı

$$\int u(x)\cdot dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)du(x)$$

hám jazıw múmkin. Bul (5) formula bóleklep integrallaw formulası delinedi. Onıń járdeminde $\int u(x)\cdot v'(x)dx$ integraldı esaplaw $\int u'(x)\cdot v(x)dx$ integraldı esaplawǵa keltiriledi.

**5-mısal.** $\int x\cos xdx$ integralın esaplań.

◀Bóleklep integrallaw formulasınan paydalanıp tabamız:

$$\int x\cos xdx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ \cos xdx = dv & v = \sin x \end{vmatrix} = x\sin x - \int \sin xdx =$$

$$= x\sin x + \cos x + C.$$ ▶

**6- mısal.** $J = \int \sqrt{x^2 + a}dx$ integralın esaplań.

◀ Qaralıp atırǵan integralda $u = \sqrt{x^2 + a}$ , $dv = dx$ bolsa, onda

$$du = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}}dx\ , \quad v = x$$

boladı. Bóleklep integrallaw formulasınan paydalanıp tabamız:

$$J = x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}}dx = x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2 + a - a}{\sqrt{x^2 + a}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}\,dx + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} =$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - J + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} .$$

Demek,

$$J = x\sqrt{x^2+a} - J + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} ,$$

$$J = \frac{1}{2}\left[ x\sqrt{x^2+a} + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} \right] .$$

Bunnan

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + C .$$

Nátiyjede

$$J = \int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln\left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + C$$

kelip shıǵadı. ►

**7-mısal.** $J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ $(n \in N,\ a \in R,\ a \neq 0)$ integraldı esaplań.

◄ Bul integralda

$$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n} \quad , dv = dx$$

dep alsaq, onda

$$du = -\frac{2nxdx}{(x^2+a^2)^{n+1}} , \quad v = x$$

boladı. (5) formuladan paydalanıp tabamız:

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\left[ \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2 \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \right] .$$

Nátiyjede

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \cdot J_n - 2na^2 \cdot J_{n+1}$$

boladı. Bul teńlikten

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\frac{1}{a^2} \cdot J_n \qquad (6)$$

kelip shıǵadı. ►

Ádette, (6) qatnas rekkurent formula delinedi.

Bunnan, $n=1$ bolǵanda

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$$

boladı. $n \geq 2$ bolǵanda sáykes $J_n$ integrallar (6) rekkurent formula járdeminde tabıladı. Máselen,

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2} \cdot J_1 = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

boladı. ►

## 8.4. Racional funkciyalardı integrallaw

Meyli $f(x)$ racional funkciya bolıp, onıń integralın esaplaw talap etilsin.

Meyli $f(x)$ pútin racional funkciya

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

bolsın. Onda

$$\int f(x)dx = \int (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n)dx = a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \ldots + a_n\frac{x^n}{n} + C$$

boladı. Meyli $f(x)$ bólshek racional funkciya

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m} = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$
$$(n \in N, \quad m \in N)$$

bolsın. Eger $n \geq m$ bolsa, onda $P_n(x)$ kópağzanıń $Q_m(x)$ kópağzalığa bóliw menen $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ tiń pútin bólegin ajıratıp, pútin racional funkciya hám durıs bólshek jıyındısı kórinisinde ańlatıp alınadı:

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=R(x)+\frac{\bar{P}_n(x)}{Q_m(x)}.$$

Bunnan

$$\int f(x)dx=\int R(x)dx+\int\frac{\bar{P}_n(x)}{Q_m(x)}dx.$$

Demek, $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(n>m)$ racional funkciyanı integrallaw durıs bólshekti integrallawğa keledi.

**1-mısal.** $\displaystyle\int\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$ integraldı esaplań.

◄ Integral astındağı racional funkciyanı ápiwayı bólsheklerge jayamız:

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{10}{(x+2)^2}.$$

Demek,

$$\int\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx=2\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x+2}-10\int\frac{dx}{(x+2)^2}=$$

$$=2\ln|x|+\ln|x+2|+\frac{10}{x+2}+C.\blacktriangleright$$

**2-mısal.** $\displaystyle\int\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}dx$ integralın esaplań.

◄ Integral astındağı funkciya racional funkciya bolıp, ol durıs emes bólshek boladı. Bul bólshekte $x^6+2x^4+2x^2-1$ kópağzalını bólimi $x(x^2+1)^2$ kópağzalığa bólip, onıń pútin bólegin ajıratamiz:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^6+2x^4+2x^2-1 \\ x^6+2x^4+x^2 \end{array} & \underline{\;x^5+2x^3+x\;} \\
\hline
x^2-1 & \quad x
\end{array}
$$

Demek,

$$\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}=x+\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}.$$

Endi $\dfrac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}$ durıs bólshekti ápiwayı bólshekke jayamız:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

$$x^2-1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)x(x^2+1)+(Dx+E)x=$$

$$=(A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A.$$

Keyingi teńlikten

$$A=-1,\ B=1,\quad C=0,\quad D=2,\quad E=0.$$

Demek,

$$\frac{x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Nátiyjede,

$$\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}=x-\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

bolıp,

$$\int\frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\int xdx-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{x}{x^2+1}dx+$$

$$+\int\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx=\frac{x^2}{2}-\ln|x|+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{x^2}{2}-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{x^2+1}+C$$

boladı. ►

## 8.5. Trigonometriyalıq funkciyalardı integrallaw

Meyli $R(u,v)$ eki ózgeriwshiniń racional funkciyası bolsın.

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx \qquad (1)$$

integraldı qaraymız. Bul integralda $t = tg\frac{x}{2}$ almastırıwdı orınlaymız. Onda

$$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\,\mathrm{arctg}\,t, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

bolsa, onda

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = 2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

boladı. Bunnan,

$$R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}$$

ańlatpa $t$ nıń racional funkciyası boladı.

Demek, (1) integraldı esaplaw $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ almastırıw menen racional funkciyanı integrallawǵa keledi.

**1-mısal.** $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ integraldı esaplań.

◀ Bul integralda $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ almastırıwdı orınlap tabamız:

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} = -\frac{2}{1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}} + C. \text{▶}$$

Ayırım jaǵdaylarda $t = \cos x$, $t = \sin x$, $t = \mathrm{tg}x$ almastırıwlar qolay boladı.

Meyli $R(u,v)$ racional funkciya ushın $R(-u,v) = -R(u,v)$ bolsın. Onda

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R_2(\sin^2 x, \cos x) \sin x\, dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{matrix} \right| = -\int R_2(1-t^2, t)\, dt$$

boladı. Meyli $R(u,v)$ racional funkciya ushın $R(u,-v) = -R(u,v)$ bolsın. Onda

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R_3(\sin x, \cos^2 x) \cos x\, dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right| = \int R_3(t, 1-t^2)\, dt$$

boladı. Meyli $R(u,v)$ racional funkciya ushın

$$R(-u,-v) = R(u,v)$$

bolsın. Onda

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R_2(tgx, \cos^2 x)\, dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = tgx \\ dx = \dfrac{1}{1+t^2} dt \end{matrix} \right| = \int R_2\left(t, \frac{1}{1+t^2}\right) \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

boladı.

**2-mısal.** $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$ integraldı esaplań.

◀ Integral astındaǵı funkciya ushın $R(-u,v) = -R(u,v)$ boladı. Sonıń ushın $\cos x = t$ delinse, onda $-\sin x dx = dt$ bolıp, onda

$$\int \sin^3 x \cos^4 x dx = \int (t^2-1) t^4 dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

boladı. ▶

## 8.6. Ayırım irracional funkciyalardı integrallaw

**1.** $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ **kórinisindegi integrallardı esaplaw.**

Meyli $R(u,v)$ eki ózgeriwshiniń racional funkciyası bolıp, $a,b,c,d$ lar haqıyqıy sanlar, $n\in N$ bolsın.

$$\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx \quad , \quad ad-bc\neq 0,$$

kórinisindegi integrallardı qaraymız. Bul integral ózgeriwshini almastırıw járdeminde racional funkciyanıń integralına keledi:

$$\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}} = t, x = \dfrac{b-t^n d}{ct^n - a} \\ dx = \dfrac{(ad-bc)n}{(a-ct^n)^2} t^{n-1}dt \end{array} \right| =$$

$$= \int R\left(\frac{dt^n - b}{a-ct^n}, t\right)\cdot \frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2} dt .$$

**1-mısal.** $\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{1}{1-x}dx$ integraldı esaplań.

◀Bul integralda $t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ almastırwın orınlaymız. Onda

$$x=\frac{t^2-1}{t^2+1} \quad , \quad dx=\frac{4tdt}{(t^2+1)^2}$$

bolıp,

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{1}{1-x}dx = 2\int\frac{t^2dt}{t^2+1}$$

boladı. Bunnan,

$$\int\frac{t^2dt}{t^2+1} = t - \text{arctg}t + C .$$

Demek,

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{1}{1-x}dx = 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2\text{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$$ ▶

**2.** $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ **kórinisindegi integrallardı esaplaw.** Integralda $a,b,c$-haqıyqıy sanlar bolıp, onda $ax^2+bx+c$ kvadrat úshaǵzalıǵa teń korenlerge iye emes.

Qaralıp atırǵan

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx \qquad (1)$$

integral tómendegi úsh almastırıw járdeminde racional funkciya integrallawǵa keledi.

a) $\boldsymbol{a>0}$ bolsın. (1) integralda bul

$$t=\sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+bx+c} \qquad (\text{yoki } t=-\sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+bx+c})$$

almasıtırıwın orınlaymız. Onda

$$ax^2+bx+c=t^2-2\sqrt{a}\,xt+ax^2,$$

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b} \quad , \quad dx=\frac{2(\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}$$

boladı. Nátiyjede

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx=$$

$$=\int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, \frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}\right)\cdot\frac{2(\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}dt$$

boladı.

**2-mısal.** $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$ integraldı esaplań.

◀ Integralda $t=x+\sqrt{x^2+x+1}$ almastırıwın orınlaymız. Nátiyjede

$$x=\frac{t^2-1}{1+2t} \quad , \quad dx=2\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}dt$$

bolsa, onda

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=2\int\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2t}dt$$

boladı. Eger

$$\frac{2(t^2+t+1)}{t(1+2t)^2}=\frac{2}{t}-\frac{3}{1+2t}-\frac{3}{(1+2t)^2}$$

esapqa alsaq, onda

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \int \left( \frac{2}{t} - \frac{3}{1+2t} - \frac{3}{(1+2t)^2} \right) dt =$$

$$= 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|1+2t| + \frac{3}{2(1+2t)} + C =$$

$$= 2\ln\left|x+\sqrt{x^2+x+1}\right| - \frac{3}{2}\ln\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right| +$$

$$+ \frac{3}{2(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1})} + C$$

kelip shıǵadı. ►

b) $c > 0$ bolsın. Bul jaǵdayda (1) integralda

$$t = \frac{1}{x}(\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{c}) \text{ yamasa } t = \frac{1}{x}\left(\sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{c}\right)$$

almasıtırıwın orınlaymız. Onda

$$x = \frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2}, \quad dx = \frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}\,a}{(a+t)^2}dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{c}\;t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}$$

bolıp, (1) integral racional funkciyanıń integralına keledi:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx =$$

$$= \int R\left( \frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2}, \frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2} \right) \left( \frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}\,a}{(a+t)^2} \right) dt$$

**v) $ax^2+bx+c$ kvadrat úshaǵzalını hár qıylı $x_1$ hám $x_2$ haqıyqıy korenlerge iye bolsın:**

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)\cdot(x-x_2).$$

Bul jaǵdayda (1) integralda $t = \frac{1}{x-x_1}\sqrt{ax^2+bx+c}$ almastırıwdı orınlaymız.

Nátiyjede

$$x = \frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{a(x_1-x_2)}{t^2-a}t$$

$$dx=\frac{2a(x_1-x_2)t}{(t^2-a)^2}dt$$

bolsa, onda

$$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})dx=$$

$$=\int R\left(\frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a}\quad,\quad\frac{a(x_1-x_2)}{t^2-a}t\right)\cdot\frac{2a(x_1-x_2)t}{(t^2-a)^2}dt$$

boladı.

**3-mısal.** $I=\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$ integraldı esaplań.

◀ Bunnan, $x^2+3x+2=(x+1)\cdot(x+2)$. Usını itibarǵa alıp berilgen integralda $t=\frac{1}{x+1}\sqrt{x^2+3x+2}$ almastırıwın orınlaymız. Bul jaǵdayda

$$x=\frac{2-t^2}{t^2-1},\quad dx=-\frac{2tdt}{(t^2-1)^2}$$

bolsa, onda

$$\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx=\int\frac{-2t^2-4t}{(t-2)\cdot(t-1)\cdot(t+1)^3}dt$$

boladı. Endi

$$\frac{-2t^2-4t}{(t-2)\cdot(t-1)\cdot(t+1)^3}=\frac{\frac{3}{4}}{t-1}-\frac{\frac{16}{27}}{t-2}-\frac{\frac{17}{108}}{t+1}+\frac{\frac{5}{18}}{(t+1)^2}+\frac{\frac{1}{3}}{(t+1)^3}$$

esapqa alıp tabamız,

$$I=\int\frac{-2t^2-4t}{(t-2)\cdot(t-1)\cdot(t+1)^3}dt=\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{16}{27}\int\frac{dt}{t-2}-$$
$$-\frac{17}{108}\int\frac{dt}{t+1}+\frac{5}{18}\int\frac{dt}{(t+1)^2}+\frac{1}{3}\int\frac{dt}{(t+1)^3}=\frac{3}{4}\ln|t-1|-$$
$$-\frac{16}{27}\ln|t-2|-\frac{17}{108}\ln|t+1|-\frac{5}{18}\cdot\frac{1}{t+1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(t+1)^2}+C.$$ ▶

# 9-§. ANIÍQ INTEGRAL

## 9.1. Anıq integraldıń anıqlamaları

Meyli $[a,b]\subset R$ segmenti berilgen bolsın. Bul segmenttiń tómendegi

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots x_{n-1}<x_n=b$$

qatnasta bolǵan

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots x_{n-1},\ x_n \tag{1}$$

tochkaları kópligin alayıq. Bunnan, (1) kóplik $[a,b]$ segmentti

$$B_1=[x_0,x_1],\ B_2=[x_1,\ x_2],\ \ldots,\ B_n=[x_{n-1},x_n]$$

bóleklerge ajıratamız.

**1-anıqlama.**

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots x_{n-1}<x_n=b$$

qatnasta bolǵan

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots x_{n-1},\ x_n$$

tochkalar kópligi $[a,b]$ segmentti bóleklew delinedi hám

$$P=\{x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots x_{n-1},\ x_n\}$$

kóriniste belgilenedi.

Bunda hár bir $x_k$ $(k=0,1,2,\ldots,n)$ tochka $[a,b]$ segmenttiń bóliwshi tochkası, $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=0,1,2,\ldots,n-1)$ segment bolsa $P$ bóleklewdiń aralıǵı delinedi. $\lambda_p=\max\{\Delta x_k\}$, $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$ shama $P$ bóleklewdiń diametri delinedi.

Joqarıda keltirilgen anıqlama hám mısallardan kórinip turǵanday, $[a,b]$ segmenttiń túrli usıllar menen qálegen sandaǵı bóleklewlerin dúziw múmkin. Bul bóleklewlerden ibarat kópligi menen belgileymiz:

*Darbu hám integral qosındılar.* $f(x)$ funkciya $[a,b]$ da anıqlanǵan hám shegaralanǵan bolsın.

Meyli

$$P=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n\}$$

$[a,b]$ segmenttiń bazı bir bóleklewi bolsın. Bul jaǵdayda bóleklewdiń hár bir $[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0,1,2,\dots,n-1)$ aralıǵında

$$\begin{matrix} m_k = \inf\{f(x)\}, & x\in[x_k\ x_{k+1}]\ , \\ M_k = \sup\{f(x)\}, & x\in[x_k\ x_{k+1}] \end{matrix} \quad (k=0,1,2,\dots,n-1)$$

payda bolıp

$$\inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\}\le m_k \le M_k \le \sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\} \qquad (2)$$

boladı.

**2-anıqlama.** $s=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\cdot\Delta x_k$ qosındı $f(x)$ funkciyanıń $[a,b]$ segmenttiń $P$ bóleklewge salıstırǵanda Darbunnıń tómengi qosındısı delinedi.

Bull $s=s(f;P)$ qosındı $f(x)$ funkciyaǵa hám $[a,b]$ nıń $P$ bóleklewine baylanıslı boladı

**3-anıqlama.** $S=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\cdot\Delta x_k$ qosındı $f(x)$ funkciyanıń $[a,b]$ segmentiniń $P$ bóleklewine salıstırǵanda Darbudıń joqarı qosındısı delinedi.

Bul qosındı $f(x)$ funkciyaǵa hám $[a,b]$ nıń $P$ bóleklewine baylanıslı boladı

$$S=S(f;P)\ .$$

Endi hár bir $k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$ diń mánisinde $[x_k,x_{k+1}]$ segmentte qálegen $\xi_k$ tochkanı belgileymiz: $\xi_k\in[x_k,x_{k+1}]$ $(k=0,1,2,\dots,n-1)$. Nátiyjede $[a,b]$ nıń $P$ bóleklewine salıstırǵanda

$$\{\xi_0,\ \xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{n-1}\}$$

tochkalar kópligi payda boladı. Bul tochkalardaǵı $f(x)$ funkciyanıń

$$f(\xi_k) \qquad (k=0,1,2,\dots,n-1)$$

mánisleri járdeminde

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

qosındısın dúzemiz.

**4-anıqlama.** Tómendegi

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

qosındı $f(x)$ funkciyanıń $[a,b]$ segmentiniń $P$ bóleklewine salıstırǵanda integral qosındısı delinedi.

Integral qosındı, $f(x)$ funkciyaǵa, $P$ bóleklewge hám hár bir $[x_k, x_{k+1}]$ da alınǵan $\xi_k$ tochkalarǵa baylanıslı boladı:

$$\sigma = \sigma(f; P; \xi_k).$$

Bunnan, $\xi_k \in [x_k \ , \ x_{k+1}]$ ushın $m_k \le f(\xi_k) \le M_k$ bolıp, tómendegi

$$s(f;P) \le \sigma(f;P;\xi_k) \le S(f;P) \tag{3}$$

teńsizlikler orınlanadı.

Meyli $f(x)$ funkciya $[a,b]$ da berilgen hám shegaralanǵan bolsın. Onda $[a,b]$ aralıqtıń hár qanday $P$ bóleklewi hám hár qanday $\xi_k$ $(\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0,1,2,\ldots,n-1)$ lerde joqarıdaǵı (2) hám (3) qatnaslar orınlı bolıp,

$$\begin{aligned}(b-a)\cdot \inf_{[a,b]}\{f(x)\} \le s(f;P) \le \sigma(f;P;\xi_k) \le \\ \le S(f;P) \le (b-a)\cdot \sup_{[a,b]}\{f(x)\}\end{aligned} \tag{4}$$

boladı.

Endi $[a,b]$ segmenttiń bóleklewler kópligi $\{P\}$ nıń hár bir $P \in \wp$ bóleklewge salıstırǵanda $f(x)$ funkciyanıń Darbu qosındıları $s(f,P)$ hám $S(f;P)$ nı dúzip ,bul

$$\{s(f;P)\} \ , \ \{S(f;P)\}$$

kópliklerdi qaraymız. Bul kóplikler (4) qatnasqa karap shegaralanǵan boladı.

**5-anıqlama.** $\{s(f;P)\}$ kópliktiń anıq joqarı shegarası $f(x)$ funkciyanıń $[a,b]$ aralıqtaǵı tómengi integralı delinedi hám

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx$$

kórinisinde belgilenedi.

Demek,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P \{s(f;P)\}.$$

**6-anıqlama.** $\{S(f;P)\}$ kópliktiń anıq tómengi shegarası $f(x)$ funkciyanıń $[a,b]$ aralıqtağı joqarı integralı delinedi hám

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx$$

kórinisinde belgilenedi.

Demek,

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_P \{S(f;P)\}.$$

**7-anıqlama.** Eger $f(x)$ funkciyanıń tómengi hám joqarı integralları bir-birine teń

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

bolsa, onda $f(x)$ funkciya $[a,b]$ aralıq boyınsha integrallanıwshı (Riman mánisinde integrallanıwshı) delinedi.

Bunda tómengi hám joqarı integrallardıń ulıwma mánisi $f(x)$ funkciyanıń $[a,b]$ aralıq boyınsha anıq integralı (Riman integralı) delinedi hám

$$\int_a^b f(x)dx$$

kórinisnde belgilenedi.

Demek,

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

$a$ sanı integraldıń tómengi shegarası, $b$ sanı bolsa integraldıń joqarı shegarası, $[a,b]$ segment integrallaw aralığı delinedi.

**Eskertiw.** Joqarıda keltirilgen $f(x)$ funkciyanıń integralı anıqlamasına muwapıq integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

turaqlı sandı ańlatadı. Bul integral astında ózgeriwshiniń qanday jazılıwına baylanıslı bolmaydı:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt\ .$$

*Integral qosındınıń limiti.* Meyli $f(x)$ funkciya $[a,b]$ segmentte berilgen bolıp, ol usı segmentte shegaralanǵan bolsın.

$[a,b]$ segmentti bazı bir

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$$

bóleklewin alayıq.

Bizge belgili, $f(x)$ funkciyanıń bul bóleklewine salıstırǵanda integral qosındısı

$$\sigma(f;P;\xi_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

boladı.

**8-anıqlama.** Eger $\lambda_P \to 0$ da $f(x)$ funkciyanıń integral qosındısı $\sigma(f;P;\xi_k)$ shekli $J$ limitke iye bolsa, onda $f(x)$ funkciya $[a,b]$ segmentte integrallanıwshı (Riman mánisinde integrallanıwshı) delinedi, $J$ sanına $f(x)$ funkciyanıń $[a,b]$ segment boyınsha anıq integralı delinedi. Onı

$$\int_a^b f(x)dx$$

kórinisinde belgileymiz.

Demek,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k\quad .$$

Solay etip, $f(x)$ funkciyanıń anıq integralı eki túrli anıqlanadı. Bul anıqlamalar ekvivalent anıqlamalar boladı.

Ádette, $[a,b]$ segment boyınsha integrallanıwshı funkciyalar kópligi $R([a,b])$ kórinisnde belgilenedi:

$f(x)\in R([a,b]) \Leftrightarrow f(x)$ funkciya $[a,b]$ da integrallanıwshı boladı.

## 9.2. Anıq integraldıń bar bolıwı hám integrallanıwshı funkciyalar klassı

Meyli $[a,b]$ segmentte berilgen hám shegaralanǵan $f(x)$ funkciyanıń anıq integralınıń bar bolıw máselesin qaraymız.

**1-teorema.** $f(x)$ funkciya $[a,b]$ da integrallanıwshı bóliwshi ushın $\forall\varepsilon>0$ san alınǵanda hám $[a,b]$ segmentiniń sonday $P$ bóleklewi tabılıp, oǵan salıstırǵanda

$$S(f;P)-s(f;P)<\varepsilon$$

teńsizlikniń orınlanıwı zárúrli hám jetkilikli.

◄ **Zárúrligi.** Meyli $f(x)\in R([a,b])$ bolsın. Anıqlamaǵa tiykarlanıp

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx=\int_{a}^{\overline{\overline{b}}} f(x)dx=\int_{a}^{b} f(x)dx$$

boladı.

Qálegen oń $\varepsilon$ sandı alayıq. Onda tómengi hám joqarı integrallardıń anıqlamalarına muwapıq

$$\exists P_1\in\{P\}\ :\qquad \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx-s(f;P_1)<\frac{\varepsilon}{2}\quad ;$$

$$\exists P_2\in\{P\}\ :\quad S(f;P_2)-\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx<\frac{\varepsilon}{2}$$

boladı. Endi $[a,b]$ segmentiniń $P_1$ hám $P_2$ bóleklewlerdiń barlıq bóliwshi tochkalarınan $[a,b]$ nıń $P$ bóleklewlerin payda etemiz.

Bunnan, $P_1 \subset P$ , $P_2 \subset P$ boladı. Darbu qosındılarınıń 1) hám 2) qásiyetlerinen paydalanıp $P$ bóleklew ushın

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(f;P_1) \le s(f;P) \le S(f;P) \le S(f;P_2) <$$

$$< \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Keyingi qatnaslardan

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$$

kelip shıǵadı.

**Jetkilikligi.** Meyli

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ , } \exists P \in \{P\} : \ S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$$

bolsın. Onda joqarıda keltirilgen nátiyjege muwapıq

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

bolıp,

$$s(f;P) \le \underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx \le S(f;P)$$

boladı. Bul teńsizliklerden

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \le S(f;P) - s(f;P)$$

kelip shıǵadı.

Demek,

$$\forall \varepsilon > 0 \ : \ 0 \le \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon$$

Keyingi teńsizlikten

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Demek, $f(x) \in R([a,b])$ ►

*Integrallanıwshı funkciyalar klassı.* Meyli $f(x)$ fukciya $[a,b]$ aralıqta anıqlanǵan bolsın.

**2-teorema.** Eger $f(x)$ funkciya $[a,b]$ da úzliksiz bolsa, onda $[a,b]$ da integrallanıwshı boladı.

**3-teorema.** Eger $f(x)$ fukciya $[a,b]$ segmentti shegaralanǵan hám monoton bolsa, onda usı segmentte integrallanıwshı boladı.

◀ Meyli $f(x)$ fukciya $[a,b]$ segmentte ósiwshi bolıp, $f(a) < f(b)$ bolsın. $\forall\varepsilon > 0$ sandı alıp, oǵan muwapıq $\delta > 0$ nı

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

deymiz. Bul jaǵdayda $[a,b]$ segmentiniń diametri $\lambda_P < \delta$ bolǵan qálegen $P$ bóleklew ushın

$$S(f;P) - s(f;P) = \sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)\cdot\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_{k+1}) - f(x_k)\right]\cdot\Delta x_k \le$$

$$\le \lambda_P \sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_{k+1}) - f(x_k)\right] = \lambda_P\cdot\left[f(b) - f(a)\right] < \frac{\varepsilon}{f(b - f(a)}\cdot\left[f(b) - f(a)\right] = \varepsilon$$

boladı. Demek, $f(x) \in R([a,b])$. ▶

**4-teorema.** Eger $f(x)$ fukciya $[a,b]$ segmentte shegaralanǵan hám usı segmenttiń shekli sandaǵı tochkalarında úziliske iye bolıp, qalǵan barlıq tochkalarda úzliksiz bolsa, funkciya $[a,b]$ da integrallanıwshı boladı.

## 9.3. Integraldıń qásiyetleri hám onı esaplaw

**1-qásiyet.** Eger $f(x) \in R([a,b])$ hám $C \in R$ bolsa, onda $(C\cdot f(x)) \in R([a,b])$ bolıp,

$$\int_a^b C\cdot f(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$$

boladı.

**2-qásiyeti.** Eger

$$f(x) \in R([a,b]),\ g(x) \in R([a,b])$$

bolsa, onda

$$(f(x)+g(x)) \in R([a,b])$$

bolıp,

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

boladı (additivlik qásiyeti)

**3-qásiyet.** Eger

$$f(x) \in R([a,c]),\ f(x) \in R([c,b])$$

bolsa, onda

$$f(x) \in R([a,b])$$

bolıp,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$

boladı.

**4-qásiyet.** Eger $f(x) \in R([a,b])$, $g(x) \in R([a,b])$ bolsa, onda $f(x) \cdot g(x) \in R([a,b])$ boladı.

Meyli $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar $[a,b]$ da qálegen integrallanıwshı funkciyalar bolsın.

**Nátiyje.** Eger $f(x) \in R([a,b])$ bolsa, onda $[f(x)]^n \in R([a,b])$ boladı, bunda $n \in N$.

*Integraldıń teńsizlikler menen baylanıslı qásiyetleri.*

**5-qásiyet.** Eger $f(x) \in R([a,b])$ bolıp, $\forall x \in [a,b]$ da $f(x) \geq 0$ bolsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

boladı.

**1-nátiyje.** Eger $f(x) \in R([a,b])$, $g(x) \in R([a,b])$ bolıp, $\forall x \in [a,b]$ da $f(x) \leq g(x)$ bolsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

boladı.

**2-nátiyje.** Eger $f(x) \in R([a,b])$, $g(x) \in R([a,b])$ bolsa, onda

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx} \qquad (2)$$

boladı.

(2) teńsizlik Koshi-Bunyakovskiy teńsizligi delinedi.

**6-qásiyet.** Eger $f(x) \in R([a,b])$ bwlsa, $|f(x)| \in R([a,b])$ bolıp,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

boladı.

*Orta mánis haqqındağı teoremalar.* Meyli $f(x)$ funkciya $[a,b]$ da berilgen hám shegaralanǵan bolsın.

**1-teorema.** Eger $f(x) \in R([a,b])$ bolsa, onda sonday turaqlı $\mu (m \le \mu \le M)$ san boladı,

$$\int_a^b f(x)dx = \mu \cdot (b-a)$$

boladı.

◀ Bunnan,

$$m \le f(x) \le M \Rightarrow \int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Keyingi teńsizliklerden

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$$

kelip shıǵadı. Eger

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

bolsa, onnan

$$\int_a^b f(x)dx = \mu \cdot (b-a)\,. \blacktriangleright$$

**3-nátiyje.** Eger $f(x) \in C[a,b]$ bolsa, onda sonday $\theta \in [a,b]$ tabılǵanda,

$$\int_a^b f(x)dx = f(\theta) \cdot (b-a)$$

boladı.

**2-teorema.** Eger $f(x) \in R([a,b]),\ g(x) \in R([a,b])$ bolıp, $[a,b]$ da $g(x)$ funkciya óz belgisin ózgertpese, onda ol sonday turaqlı $\mu (m \le \mu \le M)$ san bar bolıp,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx \qquad (3)$$

boladı.

◀ Meyli $\forall x \in [a,b]$ da $g(x) \ge 0$ bolsın. Bunnan,

$$m \le f(x) \le M \Rightarrow mg(x) \le f(x) \cdot g(x) \le Mg(x)$$

boladı. Bul qatnastan hám anıq integral qásiyetlerinen paydalanıp,

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx\,.$$

a) $\int_a^b g(x)dx = 0$ bolsın. Bul jaǵdayda

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

bolıp, qálegen $\mu (m \le \mu \le M)$ da (3) orınlı boladı.

b) $\int_a^b g(x)dx > 0$ bolsın. Bul jaǵdayda

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$$

bolıp,

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

bolsa, onda

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

kelip shıǵadı. ►

**4-nátiyje.** Eger $f(x) \in C[a,b]$ bolıp, $g(x) \in R([a,b])$ hám $g(x)$ funkciya $[a,b]$ da óz belgisin ózgertpese, onda sonday $\theta \in [a,b]$ tabılsa,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\theta)\int_a^b g(x)dx$$

boladı.

**Anıq integrallardı esaplaw.**

*1. Anıq integrallardı anıqlamasına muwapıq esaplaw.*

Meyli $f(x) \in R([a,b])$ bolsın. Onda integral anıqlamasına muwapıq

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

boladı.

*2. N'yuton-Leybnic formulası.* Meyli $f(x)$ funkciya $[a,b]$ segmentte berilgen hám usı segmentte úzliksiz bolsın. Bul jaǵdayda $f(x)$ dáslepki funkciya

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

iye boladı. Bunnan, $\Phi(x)$ funkciya $f(x)$ nıń qálegen dáslepki funkciyası bolsa, onda

$$\Phi(x) = F(x) + C \qquad (C = const)$$

boladı. Bul teńlikte, dáslep $x = a$ dep

$$\Phi(a) = C,$$

sońń $x = b$

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx + C.$$

Demek,

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a). \qquad (1)$$

(1) formula N'yuton-Leybnic formulası delinedi.

Ádette, $\Phi(b) - \Phi(a)$ ayırma $\Phi(x)\Big|_a^b$ kórinisnde jazıladı. Demek,

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Máselen,

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a}. \qquad (a > 0, b > 0)$$

3. *Ózgeriwshilerdi almastırıw formulası.* Meyli $f(x) \in C[a,b]$ bolsın. Bunda

$$\int_a^b f(x)dx$$

integral bar boladı.

Bunnan funkciya $[a,b]$ da dáslepki $\Phi(x)$ funkciyaǵa iye bolıp,

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

boladı. Meyli anıq integralda $x$ ózgeriwshi $x = \varphi(t)$ formula menen almastırıp bolıp, $\varphi(t)$ funkciya tómendegi shártlerdi qanaatlandırsın:

1) $\varphi(t) \in C[\alpha, \beta]$ bolıp, $\varphi(t)$ funkciyanıń barlıq mánisleri $[a,b]$ ǵa tiyisli;

2) $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b$;

3) $\varphi(t)$ funkciya $[\alpha,\beta]$ da úzliksiz $\varphi'(t)$ tuwındıǵa iye bolsın.

Onda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \qquad (2)$$

boladı.

**2-mısal.** $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ integraldı esaplań.

◀ Berilgen integralda $x=\sin t$ almastırıwdı orınlaymız. Onda

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t)dt = (\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

boladı. ▶

4. *Bóleklep integrallaw formulası.* Meyli $u(x)$ hám $v(x)$ funkciyalardıń hár biri $[a,b]$ segmentte úzliksiz $u'(x)$ hám $v'(x)$ tuwındılarǵa iye bolsın. Bunda

$$\int_a^b u(x)dv(x) = (u(x)\cdot v(x))\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x) \qquad (5)$$

boladı.

**3-mısal.** $\int_1^2 x\ln xdx$ integraldı esaplań.

◀ Bul intervalda $u(x)=\ln x, dv(x)=x$ dep $du(x)=\frac{1}{x}dx, v(x)=\frac{x^2}{2}$ iye bolamız. Onda (5) formulaǵa muwapıq:

$$\int_1^2 x\ln xdx = (\frac{x^2}{2}\ln x)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = 2\ln 2 - \frac{1}{2}\int_1^2 xdx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$ boladı. ▶

## 9.4. Integraldı juwıq esaplaw formulaları

Ádette, anıq integrallar N'yuton-Leybnic formulası járdeminde esaplanadı. Bul formula dáslepki funkciyaǵa tiykarlanadı. Biraq dáslepki funkciyanı tabıw máselesi ańsat sheshilmeydi. Eger integral astındaǵı funkciya quramalı bolsa, onda tiyisli anıq integraldı juwıq esaplawǵa tuwrı keledi.

**1. Tuwrı tórtmúyeshlikler formulası.** Meyli $f(x)$ funkciya $[a,b]$ segmentte berilgen hám úzliksiz bolsın. Demek, $f(x) \in R([a,b])$.

Máselen $\int\limits_a^b f(x)dx$ integraldı juwıq esaplawdan ibarat.

$[a,b]$ aralıqtı $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$ tochkalar $\left(x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n\right)$ járdeminde $n$ da teń bólekke bólip, hár bir $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0,1,2,...,n-1)$ boyınsha integraldı tómendegishe

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \cdot (x_{k+1} - x_k) = \frac{b-a}{n} f(x_{k+\frac{1}{2}})$$

juwıq esaplaymız, bunda

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}\ , \quad x_{k+\frac{1}{2}} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = a + (k + \frac{1}{2})\frac{b-a}{n}, \quad x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} \quad (k = 0,1,2,...,n-1).$$

Anıq integral qásiyetinen paydalanıp tabamız:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx + ...$$

$$... + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} f(x_{\frac{1}{2}}) + \frac{b-a}{n} f(x_{1+\frac{1}{2}}) + \frac{b-a}{n} f(x_{2+\frac{1}{2}}) + ...$$

$$... + \frac{b-a}{n} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + ... + \frac{b-a}{n} f(x_{n-\frac{1}{2}}) = \frac{b-a}{n}[f(x_{\frac{1}{2}}) +$$

$$+ f(x_{1+\frac{1}{2}}) + ... + f(x_{k+\frac{1}{2}}) + ... + f(x_{n-\frac{1}{2}})].$$

Nátiyjede

$$\int_a^b f(x)dx$$

integraldı juwıq esaplaw ushın tómendegi

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) \qquad (1)$$

formulaǵa kelemiz.

(1) formula durıs tórtmúyeshlikler formulası delinedi.

Endi (1) juwıq formulanıń qáteligin anıqlaymız.

(1) formulanıń qáteligin

$$R_n = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) \qquad (2)$$

boladı.

Meyli $f(x)$ funkciya $[a,b]$ segmentte úzliksiz $f''(x)$ tuwındıǵa iye bolsın. $R_n$ dı tómendegishe jazıp alamız:

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx -$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_{k+\frac{1}{2}})dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int [f(x) - f(x_{k+\frac{1}{2}})]dx.$$

Teylor formulasınan paydalanıp tómendegini tabamız:

$$f(x) - f(x_{k+\frac{1}{2}}) = f'(x_{k+\frac{1}{2}})\cdot(x - x_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}f''(\xi_k)\cdot(x - x_{k+\frac{1}{2}})^2$$

(bunda $\xi_k$ san $x$ hám $x_{k+\frac{1}{2}}$ sanlar arasında). Nátiyjede

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f'(x_{k+\frac{1}{2}})\cdot(x - x_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}f''(\xi_k)\cdot(x - x_{k+\frac{1}{2}})^2)dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(f'(x_{k+\frac{1}{2}})\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x - x_{k+\frac{1}{2}})dx + \frac{1}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(\xi_k)\cdot(x - x_{k+\frac{1}{2}})^2)dx$$

boladı. Bunnan, $\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(x - x_{k+\frac{1}{2}}\right)dx = 0$.

Demek, $R_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(\xi_k)\cdot\left(x - x_{k+\frac{1}{2}}\right)dx.$

Orta mánis haqqındaǵı teoremaǵa tiykarlanıp

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(\xi_k)\cdot(x - x_{k+\frac{1}{2}})^2 dx = f''(\xi_k^*)\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x - x_{k+\frac{1}{2}})^2 dx =$$

$$= \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{12} f''(\xi_k^*) = \frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi_k^*) \ \ (\xi_k^* \in [x_k, x_{k+1}])$$

boladı. Solay etip, $R_n$ ushın bul

$$R_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi_k) = \frac{(b-a)^3}{24n^2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k^*)$$

ańlatpasına kelemiz.

Bunnan,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k^*) = \frac{f''(\xi_0^*) + (\xi_1^*) + ... + f''(\xi_{n-1}^*)}{n}$$

muǵdar $(\xi_k^* \in [a,b],\ k = 0,1,2,...,n-1)$ $f''(x)$ nıń $[a,b]$ aralıqtaǵı eń kishi $m''$ hám eń úlken $M''$ mánisler arasında,

$$m'' \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k^*) \le M$$

boladı. Shártke muwapıq $f''(x)$ funkciya $[a,b]$ da úzliksiz. Úzliksiz funkciyanıń qásiytine muwapıq $(a,b)$ da sonday $\zeta$ tochka tabılsa,

$$f''(\zeta) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k^*)$$

boladı. Nátiyjede $R_n$ ushın tómendegi

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\zeta)$$

teńlikke kelemiz.

Demek,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\zeta)$$

boladı. Solay etip, $[a,b]$ aralıqta ekinshi tártipli úzliksiz qásiyetke iye bolǵan $f(x)$ funkciyanıń $\int_a^b f(x)dx$ integralın (1) durıs tórtmúyeshlikler formulası járdeminde juwıq esaplansa, bul juwıq esaplaw qáteligi tómendegi

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\zeta) \qquad (\zeta \in (a,b))$$

formula menen ańlatıladı..

**2. Trapeciyalar formulası.** $f(x)$ funkciyanıń

$$\int_a^b f(x)dx$$

integralın juwıq esaplaw ushın, $[a,b]$ segmentin

$$a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$$

tochkalar járdeminde $n$ teń bólekke bólinedi. Soń hár bir $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0,1,2,...,n-1)$ boyınsha integraldı tómendegishe

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\cdot(x_{k+1}-x_k) \qquad (k = 0,1,2,...,n-1)$$

juwıq esaplanadı. Nátiyjede tómendegi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}(x_1-x_0) + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}(x_2-x_1) + ...$$

$$... + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}(x_n - x_{n-1}) = \frac{b-a}{2}[\ \frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} +$$

$$+ f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1})\ ]$$

formulaǵa kelemiz. Demek,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \quad (3)$$
$$+ f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1})].$$

(3) formula trapeciyalar formulası delinedi.

Bul juwıq formulanıń qáteligigi $R'_n$, $f(x)$ funkciya $[a,b]$ da úzliksiz $f''(x)$ tuwındıǵa iye bolıp ,

$$R'_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\zeta) \qquad (\zeta \in (a,b))$$

boladı. Demek,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) +$$

$$+ f(x_2) + ... + f(x_{n-1})] - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\zeta).$$

**3. Simpson formulası.** Bul jaǵdayda $f(x)$ funkciyanıń

$$\int_a^b f(x)dx$$

integraldı juwıq esaplaw ushın $[a,b]$ segmentti $a = x_0,\ x_1,..., x_{2k},\ x_{2k+1}$, $x_{2k+2},..., x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n} = b$ tochkalar járdeminde $2n$ ge teń bólekke bólip, hár bir $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ $(k = 0,1,2,..., n-1)$ boyınsha integraldı tómendegishe

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx \approx \frac{x_{2k+2} - x_{2k}}{6}\left[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})\right] =$$

$$= \frac{b-a}{6n}\left[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})\right] \qquad (k = 0,1,..., n-1)$$

juwıq esaplanadı. Nátiyjede

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + ... + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{6n}[(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + (f(x_2) + 4f(x_3) +$$

$$+ f(x_4)) + ... + (f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}))] =$$

$$= \frac{b-a}{6n}[(f(x_0) + f(x_{2n})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + ...$$

$$... + f(x_{2n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + ... + f(x_{2n-2}))].$$

payda boladı. Demek,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}[f(x_0)+f(x_{2n})+4(f(x_1)+f(x_3)+...$$

$$...+f(x_{2n-1}))+2(f(x_2)+f(x_4)+...+f(x_{2n-2}))]. \qquad (4)$$

(4) formula Simpson formulası delinedi.

Bul juwıq formulanıń qáteligi $R_n''$, $f(x)$ funkciya $[a,b]$ da úzliksiz $f^{(iv)}(x)$ tuwındıǵa iye bolıw shártinde,

$$R_n'' = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(iv)}(\zeta) \qquad (\zeta \in (a,b))$$

boladı. Demek,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n}[f(x_0)+f(x_{2n})+4(f(x_1)+f(x_3)+...+f(x_{2n-1}))+$$

$$+2(f(x_2)+f(x_4)+...+f(x_{2n-2}))] - \frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(iv)}(\zeta).$$

**Mısal.** $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ integral durıs tórtmúyeshlikler, trapeciyalar hám Simpson formulaları járdeminde juwıq esaplań.

◀ $[0,1]$ segmentti 5 ta teń bólekke bólemiz. Bunda bóliniw tochkaları

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0{,}2,\ x_2 = 0{,}4,\ x_3 = 0{,}6,\ x_4 = 0{,}8,\ x_5 = 1{,}0$$

bolıp, bul tochkalarda $f(x) = e^{-x^2}$ funkciyanıń mánisleri tómendegishe boladı:

$$f(x_0) = 1{,}00000,$$
$$f(x_1) = 0{,}96079,$$
$$f(x_2) = 0{,}85214,$$
$$f(x_3) = 0{,}69768,$$
$$f(x_4) = 0{,}52729,$$
$$f(x_5) = 0{,}36788.$$

Hár bir bólektiń ortasın ańlatıwshı tochkalar

$$x_{\frac{1}{2}} = 0{,}1,\quad x_{\frac{3}{2}} = 0{,}3,\quad x_{\frac{5}{2}} = 0{,}5,\quad x_{\frac{7}{2}} = 0{,}7,\quad x_{\frac{9}{2}} = 0{,}9$$

bolıp, bul tochkalardaǵı funkciyanıń mánisleri tómendegishe boladı:

$$f(x_{\frac{1}{2}}) = 0{,}99005 \quad ,$$

$$f(x_{\frac{3}{2}}) = 0{,}91393 \quad ,$$

$$f(x_{\frac{5}{2}}) = 0{,}77680 \quad ,$$

$$f(x_{\frac{7}{5}}) = 0{,}61263 \quad ,$$

$$f(x_{\frac{9}{5}}) = 0{,}44486 \quad .$$

**a) Durıs tórtmúyeshlikler formulası boyınsha**

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{5}(0{,}99005 + 0{,}91393 + 0{,}77680 +$$

$$+ 0{,}61263 + 0{,}44486) = \frac{1}{5} \cdot 3{,}74027 \approx 0{,}74805$$

bolıp,

$$|R_n| \le \frac{1}{12 \cdot 25} = \frac{1}{300} \approx 0{,}003$$

boladı.

**b) Trapeciyalar formulası boyınsha**

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{5}(\frac{1{,}00000 + 0{,}36788}{2} + 0{,}96079 + 0{,}85214 +$$

$$+ 0{,}69768 + 0{,}52729) = \frac{1}{5}(0{,}68394 + 3{,}03790) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 3{,}72184 \approx 0{,}74437$$

bolıp,

$$|R_n'| \le \frac{1}{6 \cdot 25} = \frac{1}{150} \approx 0{,}006$$

boladı.

**v) Simpson formulası boyınsha**

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{30}[(1{,}00000 + 0{,}36788) + 4(0{,}99005 +$$

$$+ 0{,}91393 + 0{,}77680 + 0{,}61263 + 0{,}44486) + 2(0{,}96079 +$$

$$+0{,}85214+0{,}69768+0{,}52729)]=\frac{1}{30}(1{,}36788+4\cdot 3{,}74027)+$$

$$+2\cdot 3{,}03790)=\frac{1}{30}(1{,}36788+6{,}07580+14{,}96108)\approx 0{,}74682$$

bolıp,

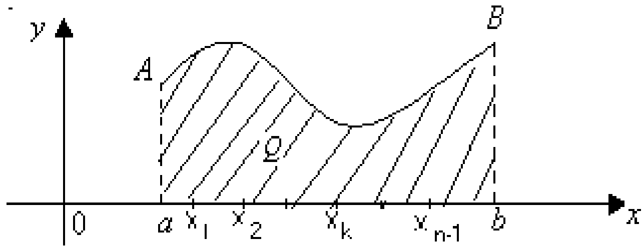
$$|R_n''|\leq \frac{12}{2880\cdot 5^4}=0{,}7\cdot 10^{-5}$$

boladı.

## 9.5. Anıq integraldıń geometriyaǵa, fizikaǵa hám mexanikaǵa qollanılıwları

*Iymek sızıqlı trapeciyanıń maydanın esaplaw.*

Meyli $f(x)\in C[a,b]$ bolıp, $\forall x\in[a,b]$ da $f(x)\geq 0$ bolsın. Joqarıda $f(x)$ funkciya grafigi, qaptal táreplerden $x=a$, $x=b$ vertikal sızıqlar hám tómennen abcissa kósheri menen shegaralanǵan $Q$ figuranı qarayıq. (10-sızılma)




10- sızılma

Ádette, bul figura iymek sızıqlı trapeciya delinedi. $[a,b]$ segmentti qálegen

$$P=\{x_0,x_1,x_2,...,x_n\}\quad (a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b)$$

bóleklewdi alamız. Bul bóleklewdiń hár bir $[x_k,x_{k+1}]$ aralıǵında

$$\inf\{f(x)\}=m_k,\quad \sup\{f(x)\}=M_k\quad (k=0,1,2,...,n-1)$$

payda boladı.

Endi tiykarı $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, biyikligi $m_k$ bolǵan $(k = 0,1,2,...,n-1)$ durıs tórtmúyeshliklerdiń birikpelerin payda tapqan durıs kópmúyeshlikti $A$ deyik.

Sonday-aq, tiykarı $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, biyikligi $M_k$ bolǵan $(k = 0,1,2,...,n-1)$ durıs tórtmúyeshliklerdiń birikpelerinen payda bolǵan durıs kópmúyeshlikti $B$ dep alayıq. Bunnan,

$$A \subset Q \ , \ \ Q \subset B$$

bolıp, olardıń maydanları

$$\mu(A) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k, \ \ \mu(B) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k$$

boladı. Bul qosındılardı $f(x)$ funkciyanıń $[a,b]$ segmentiniń $P$ bóleklewine salıstırǵanda Darbudıń tómeni hám joqarı qosındıları ekenligin anıqlaw qıyın emes:

$$\mu(A) = s(f;P) \quad , \quad \mu(B) = S(f;P).$$

$f(x) \in C[a,b]$ bolǵanı ushın $f(x)$ funkciya $[a,b]$ da integrallanıwshı boladı. Onda integrallanıwshılıq kriteriysına muwapıq, $\forall \varepsilon > 0$ alınǵanda hám $[a,b]$ segmenttiń sonday $P$ bóleklewi tabılǵanda,

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$$

boladı. Sebebi, bul

$$\mu(B) - \mu(A) < \varepsilon$$

teńsizlik orınlanadı. Bul bolsa, onda 1-teoremaǵa sáykes, qaralıp atırǵan iyrek sızıqlı trapeciyanıń maydanına iye bolıwın bildiredi. Onda anıqlamaǵa sáykes

$$\sup\{\mu(A)\} = \inf\{\mu(B)\}$$

boladı. Usı waqıtta,

$$\sup\{\mu(A)\} = \int_a^b f(x)dx, \quad \inf\{\mu(B)\} = \int_a^b f(x)dx$$

bolǵanlıǵı sebepli $Q$ iymek sızıqlı trapeciyanıń maydanı

$$\mu(Q) = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

ǵa teń boladı.

**1-mısal.** Tegislikte

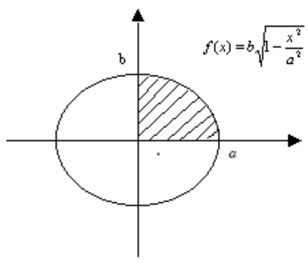
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ellips penen shegaralanǵan $Q$ figuranıń maydanın tabıń.

◀Ellips penen shegaralanǵan $Q$ figuranıń maydanı $OX$ hám $OY$ koordinata kósherleri hám

$$f(x)=b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ ,\ 0\le x\le a$$

sızıqlar menen shegaralanǵan iymek sızıqlı trapeciya maydanınıń 1/4 ne teń boladı. (11-sızılma ).




11-sızılma

Onda (1) formuladan paydalanıp tómendegini tabamız

$$\mu(Q)=4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx=\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x=a\sin t\ , \\ \qquad\qquad 0\le t\le\frac{\pi}{2} \\ dx=a\cos tdt\ , \end{array}\right|=$$

$$=\frac{4b}{a}\cdot a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=4ab\cdot\frac{\pi}{4}=ab\pi.\blacktriangleright$$

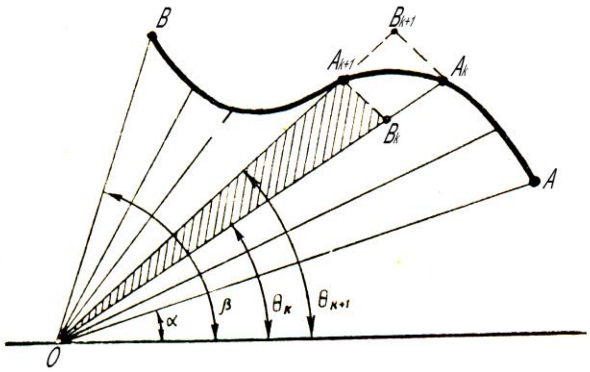
*Iymek sızıqlı sektordıń maydanın esaplaw.* Meyli $\breve{AB}$ iymek sızıq polyar koordinatalar sistemasında bul

$$\rho=\rho(\theta)\ ,\quad \alpha\le\theta\le\beta\quad (\alpha\in R,\beta\in R)$$

teńleme menen berilgen bolsın. Bunda

$$\rho(\theta) \in C[\alpha,\beta] \ , \quad \forall\theta \in [\alpha,\beta] \quad \text{да} \quad \rho(\theta) \geq 0 \ .$$

Tegislikte $\breve{AB}$ iymek sızıq hám $OA$ hám $OB$ radius-vektorlar menen shegaralanǵan $Q$ figuranı qaraymız. (12 -sızılma).




12- sızılma

$[\alpha,\beta]$ segmentti qálegen

$$P = \{\theta_0, \theta_1, ..., \theta_n\} \qquad (\alpha = \theta_0 < \theta_1 < ... < \theta_n = \beta)$$

bóleklewdi alamız. $O$ tochkadan hár bir polyar múyeshi $\theta_k$ ga sáykes $OA_k$ radius-vektor ótkizemiz. Nátiyjede $OAB$ -iymek sızıqlı sektor

$$OA_k A_{k+1} \left(k = 0,1,2,...,n-1 \ \ ; \ A_0 = A \ , \ A_n = B\right)$$

iymek sızıqlı sektorlarǵa ajıraladı.

Bunnan, $\rho = \rho(\theta) \in C[\alpha,\beta]$

bolǵanlıǵı ushın $[\theta_k \ , \theta_{k+1}]$ da $(k = 0,1,2,...,n-1)$

$$m_k = \inf\{\rho(\theta)\} \ \ , \quad M_k = \sup\{\rho(\theta)\}$$

ler bar boladı.

Endi hár bir $[\theta_k, \theta_{k+1}]$ segment ushın radius-vektorları sáykes tárizde $m_k$ hám $M_k$ bolǵan dóngelek sektorlardı payda etemiz. Bunday dóngelek sektorlar maydanǵa iye bolıp, olardıń maydanı sáykes tárizde

$$\frac{1}{2} m_k^2 \cdot \Delta\theta_k \quad , \ \frac{1}{2} M_k^{2\cdot} \cdot \Delta\theta_k \qquad (\Delta\theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k)$$

boladı. Radius-vektorları $m_k$ $\quad (k = 0,1,2,...,n-1)$ bolǵan barlıq dóngelek sektorlar birikpesinen payda bolǵan figuranı $Q_1$ desek, onda $Q_1 \subset Q$ bolıp, onıń maydanı

$$\mu(Q_1)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}m_k^2\cdot\Delta\theta_k \tag{3}$$

boladı.

Sonıń menen birge, radius-vektorları $M_k$ $(k=0,1,2,...,n-1)$ bolǵan barlıq dóngelek sektorlar birikpesinen payda bolǵan figuranı $Q_2$ desek, onda $Q\subset Q_2$ bolıp, onıń maydanı

$$\mu(Q_2)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}M_k^2\cdot\Delta\theta_k \tag{4}$$

boladı. (3) hám (4) qosındılar $\frac{1}{2}\rho^2(\theta)$ funkciyanıń Darbu qosındıları boladı. Bul jaǵdayda, $\frac{1}{2}\rho^2(\theta)$ funkciya $[\alpha,\beta]$ da úzliksiz bolǵanı ushın ol integrallanıwshı boladı. Demek, $\forall\varepsilon>0$ alınǵanda hám $[\alpha,\beta]$ segmenttiń sonday $P$ bóleklewi tabılǵanda,

$$S(\frac{1}{2}\rho^2(\theta);P)-s(\frac{1}{2}\rho^2(\theta);P)<\varepsilon$$

boladı. Sebebi, bul

$$\mu(Q_2)-\mu(Q_1)<\varepsilon$$

teńsizlik orınlanadı. Bul bolsa, onda 2-teoremaǵa muwapıq, qaralıp atırǵan iymek sızıqlı sektordıń maydanına iye bolıwın bildiredi. Onda anıqlamasına muwapıq

$$\sup\{\mu(Q_1)\}=\inf\{\mu(Q_2)\}$$

boladı. Házirgi waqıtta,

$$\sup\{\mu(Q_1)\}=\int_\alpha^\beta\rho^2(\theta)d\theta,$$

$$\inf\{\mu(Q_2)\}=\int_\alpha^\beta\rho^2(\theta)d\theta$$

bolǵanı sebepli $Q$ iymek sızıqlı sektordıń maydanı

$$\mu(Q)=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2(\theta)d\theta$$

ga teń boladı.

**Doǵanıń uzınlıǵı hám onı esaplaw**.

$y=f(x)$ *teńleme menen berilgen iymek sızıq uzınlıǵın esaplaw*. Meyli $\breve{AB}$ iymek sızıq

$$y=f(x), \quad a\le x\le b$$

teńleme menen berilgen bolsın. Bunda $f(x)$ funkciya $[a,b]$ segmentte úzliksiz hám úzliksiz $f'(x)$ tuwındıǵa iye. $[a,b]$ segmenttiń qálegen

$$P=\{x_0,x_1,...,x_n\} \quad (a=x_0<x_1<...<x_n=b)$$

bóleklewin alıp, oǵan sáykes $\breve{AB}$ doǵaǵa sızılǵan $l$ sınıq sızıqtı payda etemiz. Bul sınıq sızıqtıń perimetri

$$\mu(l)=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+[f(x_{k+1})-f(x_k)]^2}$$

boladı. Hár bir $[x_k,x_{k+1}]$ segmentte $f(x)$ funkciyaǵa Lagranj teoremasın qollap

$$\mu(l)=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+[f'(\tau_k)\cdot(x_{k+1}-x_k)]^2}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\cdot(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\,\Delta x_k \quad ,$$

Bunda $\tau_k\in[x_k,x_{r+1}]$.

Bul teńliktegi qosındınıń $\sqrt{1+f'^2(x)}$ funkciyanıń integral qosındısınan parqı sonda, integral qosındıda $\xi_k\in[x_k,x_{k+1}]$ tochka qálegen jaǵdayda joqarıdaǵı qosındıdıda bolsa $\tau_k$ tochka Lagranj teoremasına muwapıq alınǵan tayın tochka boladı. Biraq $\sqrt{1+f'^2(x)}$ funkciya integrallanıwshı bolǵanlıǵı sebepli $\xi_k=\tau_k$ dep alınıwı múmkin. Nátiyjede

$$\mu(l)=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k$$

bolıp, onnan

$$\lim_{\lambda_p\to0}\mu(l)=\lim_{\lambda_p\to0}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

kelip shıǵadı.

Demek, $\breve{AB}$ doǵanıń uzınlıǵı

$$\mu(A\breve{B})=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx \qquad (2)$$

boladı. Bul formula járdeminde doǵa uzınlıǵı esaplanadı.

*Parametrlik kóriniste berilgen iymek sızıq uzınlıǵın esaplaw.*

Meyli, $A\breve{B}$ iymek sızıq bul

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \qquad (\alpha\le t\le\beta)$$

teńlemeler sisteması menen berilgen bolıp, (1) shártlerdiń orınlanıwı menen birge $\varphi(t),\psi(t)$ funkciyaları $[\alpha,\beta]$ da úzliksiz $\varphi'(t)$ hám $\psi'(t)$ tuwındılarǵa iye bolsın. $[\alpha,\beta]$ segmenttiń qálegen

$$P=\{t_0,t_1,...,t_n\} \qquad (\alpha=t_0<t_1<...<t_n=\beta)$$

bóleklewdi alıp, olarǵa sáykes $A\breve{B}$ doǵanıń $A_k=A_k(x_k,y_k)$ $(x_k=\varphi(t_k)\,,\ \ y_k=\varphi(t_k))$ tochkaların bir-biri menen tuwrı sızıq kesilispesi járdeminde birlestiriwden payda bolǵan $l$ sınıq sızıq perimetri

$$\mu(l)=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{[\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)]^2+[\psi(t_{k+1})-\psi(t_k))]^2}$$

ni qaraymız. Lagranj teoremasınan paydalanıp tabamız:

$$\mu(l)=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)\cdot(t_{k+1}-t_k)^2+\psi'^2(\theta_k)\cdot(t_{k+1}-t_k)^2}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\theta_k)}\cdot\Delta t_k \qquad (\Delta t_k=t_{k+1}-t_k)$$

Bunda

$$\tau_k\in[t_k,t_{k+1}]. \qquad \theta_k\in[t_k,t_{k+1}].$$

keyingi teńlikti tómendegishe jazıp alamız:

$$\mu(l)=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\xi_k)}\cdot\Delta t_k+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}[\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\theta_k)}-\sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\xi_k)}]\cdot\Delta t_k \qquad (*)$$

Bunda $\xi_k\in[t_k,t_{k+1}]$. Cebebi $\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\in C[\alpha,\beta]$ bolsa, onda

$$\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)} \in R[\alpha,\beta]$$

bolıp,

$$\lim_{\lambda_p\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\xi_k)}\cdot\Delta t_k = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \tag{3}$$

boladı. Qálegen $a$, $b$, $c$, $d$ haqıyqıy sanlar ushın bul

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}\right| \le |a-c|+|b-d|$$

teńsizlik orınlı boladı.

◀ Haqıyqattan

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}\right| = \left|\frac{(a^2-c^2)+(b^2-d^2)}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}}\right| \le |a-c|\cdot$$

$$\cdot\frac{|a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}}+|b-d|\cdot\frac{|b+d|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}} \le$$

$$\le |a-c|+|b-d|. \;\blacktriangleright$$

Bul teńsizlikten paydalanıp

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}[\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\theta_k)}-\sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\xi_k)}]\Delta t_k\right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1}|\varphi'(\tau_k)-\varphi'(\xi_k)|\Delta t_k+\sum_{k=0}^{n-1}|\psi'(\theta_k)-\psi'(\xi_k)|\Delta t_k \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(\varphi')\cdot\Delta t+\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(\psi')\cdot\Delta t.$$

$$\varphi'(t)\in R[\alpha,\beta], \qquad \psi'(t)\in R[\alpha,\beta]$$

bolǵanlıǵı sebepli

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda_p\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}[\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\theta_k)}-\\ &-\sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\xi_k)}]\Delta t_k = 0\end{aligned} \tag{4}$$

boladı. (3) hám (4) qatnaslardı itibarǵa alıp, $\lambda_p \to 0$ da (*) teńlikte limitke ótsek, onda $\breve{AB}$ doǵanıń uzınlıǵı ushın

$$\mu(A\breve{B}) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt \qquad (5)$$

kelip shıǵadı. Bul formula járdeminde doǵa uzınlıǵı esaplanadı.

**Aylanba bettiń maydanı hám onı esaplaw.**

Meyli $f(x) \in C[a,b]$ bolıp, ol $[a,b]$ segmentte úzliksiz $f'(x)$ tuwındıǵa iye bolsın. Bul funkciya grafigi $A\breve{B}$ doǵanı $Ox$ kósheri átirapında aylandırıwdan payda bolǵan $\Pi$ aylanba betiniń maydanın tabamız.

◀ $[a,b]$ segmenttiń qálegen $P$ bóleklewin alıp, joqarıdaǵıday

$$\mu(K) = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \cdot \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}$$

qosındını dúzemiz. Lagranj teoremasına muwapıq

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = f'(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

boladı, bunda $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Nátiyjede

$$\mu(K) = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k$$

boladı. Keyingi teńlikti tómendegishe jazıp alamız:

$$\mu(K) = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k + \pi \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} [(f(x_k) - \right.$$
$$\left. - f(\xi_k)) + (f(x_{k+1}) - f(\xi_k))]\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k \right\}. \qquad (1)$$

$f'(x) \in C[a,b]$ bolǵanlıǵı sebepli $f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)} \in R[a,b]$

boladı. Demek, $\lambda_p \to 0$ da

$$2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k \to 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx \qquad (2)$$

Bunnan, $\sqrt{1 + f'^2(x)} \in C[a,b]$.

Demek, bul funkciya $[a,b]$ da óziniń maksimum mánisine iye boladı. Onı $M$ deymiz:

$$M = \max_{a \le x \le b} \sqrt{1 + f'^2(x)}.$$

$f(x)$ funkciya $[a,b]$ segmentte teń ólshewli úzliksiz boladı. Onda $\forall\varepsilon > 0$ alınǵanda hám, $\dfrac{\varepsilon}{2M(b-a)}$ ga muwapıq sonday $\delta > 0$ san tabılsa, $\lambda_p < \delta$ bolǵanda

$$|f(x_k) - f(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}, \quad |f(x_{k+1}) - f(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}$$

boladı. Solardı esapqa alıp tómendegini tabamız

$$\left|\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left[(f(x_k) - f(\xi_k)) + (f(x_{k+1}) - f(\xi_k))\right]\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k\right\}\right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1}\left[|f(x_k) - f(\xi_k)| + |f(x_{k+1}) - f(\xi_k)|\right]\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k <$$

$$< M\left[\frac{\varepsilon}{2M(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}\right]\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k < \varepsilon \ .$$

Bunnan $\lambda_p \to 0$ da kelip shıǵadı. $\lambda_p \to 0$ da (1) teńlikte limitke ótip, (bunda (2) hám (3) qatnaslardı itibarǵa alıp) aylanba betiniń maydanı ushın

$$\mu(\Pi) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \ . \blacktriangleright \tag{4}$$

Meyli $A\breve{B}$ iymek sızıq joqarı yarım tegislikte jaylasqan bolıp, ol usı

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

parametrlik teńlemeler sisteması menen berilgen bolsın. Bunda $\varphi(t)$, $\psi(t)$ funkciyaları $[\alpha,\beta]$ da úzliksiz hám úzliksiz $\varphi'(t),\psi'(t)$ tuwındılarǵa iye. Bul iymek sızıqtı $Ox$ kósheri átirapında aylandırıwdan payda bolǵan aylanba betiniń maydanı

$$\mu(\Pi) = 2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \tag{5}$$

boladı.

**2-mısal.** $x^2 + (y-2)^2 = 1$ sheńberdi $Ox$ kósheri átirapında aylandırıwdan payda bolǵan aylanba bettiń (tordıń) maydanın tabıń.

◄ Sheńberdiń teńlemesin tómendegishe

$$x = \varphi(t) = \cos t \qquad\qquad (0 \le t \le 2\pi)$$
$$y = \psi(t) = 2 + \sin t$$

parametrlik kóriniste jazamız.

Izlenip atırǵan aylanba bettiń maydanı, (5) formulaǵa muwapıq

$$\mu(\Pi) = 2\pi \int_0^{2\pi} (2 + \sin t)\sqrt{(\cos t)'^2 + (2 + \sin t)'^2}\, dt =$$
$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (2 + \sin t) dt = 8\pi^2$$

boladı. ►

**Anıq integraldıń mexanika hám fizikaǵa qollanıwları.**

*1. Inerciya momenti.* Mexanikada materiallıq tochka háreketi áhmiyetli túsiniklerinin biri esaplanadı.

Ádette, ólshemi jeterli dárejede kishi hám massaǵa iye bolǵan dene materiallıq tochka dep qaraladı.

Meyli tegislikte $m$ massaǵa iye bolǵan $A$ materiallıq tochka berilgen bolıp, bul tochkadan bazı bir $l$ kósherine shekem (yamasa $O$ tochkaǵa shekem) bolǵan aralıq $r$ qa teń bolsın.

Bul

$$J = mr^2$$

muǵdar $A$ materiallıq tochkanıń $l$ kósherge ($O$ tochkaǵa) salıstırǵanda inerciya momenti delinedi.

Máselen, $A = A(x, y)$ materiallıq tochkanıń koordinata kósherlerine hám koordinata basına salıstırǵanda inerciya momentleri sáykes tárizde

$$J_x = my^2 \ , \ J_y = mx^2 \ , \ J_0 = m\sqrt{x^2 + y^2}$$

boladı. Tegislikte, hár biri sáykes tárizde $m_0, m_1, m_2, ...., m_{n-1}$ massaǵa iye bolǵan materiallıq tochkalar sisteması

$$\{A_0, A_1, A_2, ...., A_{n-1}\}$$

nıń bazıbir $l$ kósherine ($O$ tochkaǵa) salıstırǵanda inerciya momenti bul

$$J_n = \sum_{k=0}^{n-1} m_k r_k^{\ 2}$$

qosındı menen anıqlanadı, bunda $r_k - A_k$ tochkadan $l$ kósherge shekem ($O$ tochkaǵa) bolǵan aralıq $(k = 0,1,2,...,n-1)$.

Meyli $y = f(x)$ iymek sızıq doǵa $\breve{AB}$ boyınsha tıǵızlıǵı $\rho = 1$ ga teń massa tarqatılǵan bolıp, bunda $f(x)$ funkciya $[a,b]$ segmentte úzliksiz hám úzliksiz $f'(x)$ tuwındıǵa iye bolsın.

Bunnan, bul jaǵdayda massa doǵa uzınlıǵına teń boladı:

$$m = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\ dx .$$

$[a,b]$ segmenttiń qálegen

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$$

bóleklewin alamız. Bul bóleklew $\breve{AB}$ doǵanı

$$A_k = A_k(x_k, f(x_k)) \quad (k = 0,1,2,...,n-1)$$

tochkalar menen $n$ ta $A_k\breve{A}_{k+1}$ $(A_0 = A,\ A_{n-1} = B)$ bólekke ajıratadı. Bunda $A_k\breve{A}_{k+1}$ bólektiń massası

$$m_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sqrt{1 + f'^2(x)}\ dx \qquad (k = 0,1,2,...,n-1)$$

boladı. Orta mánis haqqındaǵı teoremadan paydalanıp tabamız:

$$m_k = \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k ,$$

bunda, $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Bizge belgili,

$$(\xi_k, f(\xi_k)) \quad (k = 0,1,2,...,n-1)$$

materiallıq tochkanıń koordinata kósherlerine hám koordinata basına salıstırǵanda inerciya momentleri sáykes tárizde

$$J'_{x_k} = m_k \cdot f^2(\xi_k) = f^2(\xi_k) \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k ,$$

$$J'_{y_k} = m_k \cdot \xi_k^2 = \xi_k^2 \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k ,$$

$$J_0' = m_k(\xi_k^2 + f^2(\xi_k)) = (\xi_k^2 + f^2(\xi_k)) \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k$$

boladı. Onda bul

$$\{(\xi_0, f(\xi_0)),\ (\xi_1, f(\xi_1),...,(\xi_{n-1}, f(\xi_{n-1}))\}$$

materiallıq tochkalar sistemasınıń inerciya momentleri sáykes tárizde

$$J_x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} f^2\left(\xi_k\right) \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k,$$

$$J_y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^2 \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k,$$

$$J_0^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} (\xi_k^2 + f^2(\xi_k)) \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot \Delta x_k,$$

teńlikler menen belgilenedi.

Agar $P$ bóleklewdiń diametri $\lambda_p$ nol'ge talpınıp barsa, onda hár bir $A_k\breve{A}_{k+1}$ doǵanıń uzınlıǵı hám nol' ge talpınıp, joqarıdaǵı

$$J_x^{(n)},\ J_y^{(n)},\quad J_0^{(n)},$$

qosındılardıń limitin massaǵa iye bolǵan $A\breve{B}$ iymek sızıqtıń sáykes koordinata bası hám koordinata kósherlerine salıstırǵanda inerciya momentlerin belgileydi dep qaraw múmkin.

Házirgi waqıtta,

$$\lim_{\lambda_p \to 0} J_x^{(n)} = \int_a^b f^2\left(x\right)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx\ ,$$

$$\lim_{\lambda_p \to 0} J_y^{(n)} = \int_a^b x^2\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx\ ,$$

$$\lim_{\lambda_p \to 0} J_0^{(n)} = \int_a^b (x^2 + f^2(x))\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$$

boladı.

Demek, massaǵa iye bolǵan $A\breve{B}$ iymek sızıqtıń koordinata kósherlerine hám koordinata basına salıstırǵanda inerciya momentleri anıq integrallar járdeminde tabıladı:

$$J_x = \int_a^b f^2\left(x\right)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx\ ,$$

$$J_y = \int_a^b x^2 \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx\ ,$$

$$J_0 = \int_a^b (x^2 + f^2(x))\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx\,.$$

*2. Ózgeriwshi kúshtiń orınlaǵan jumısı.* Bazı bir deneni $Ox$ kósheri boylap, usı kósher jónelisinde bolǵan $F = F(x)$ kúsh tásiri astında $a$ tochkadan $b$ tochkaǵa $(a < b)$ ótkiziw ushın orınlaǵan jumıstı tabıw kerek bolsın.

Bunnan, denege tásir etiwshi kúsh turaqlı, yamasa

$$F(x) = C - const$$

bolsa, onda deneni $a$ tochkadan $b$ tochkaǵa ótkiziw ushın orınlaǵan jumıs

$$A = C \cdot (b-a)$$

ǵa teń boladı.

Meyli denege tásir etiwshi kúsh $x$ ga $(x \in [a,b])$ baylanıslı bolıp, ol $[a,b]$ da úzliksiz bolsın:

$$F = F(x) \in C[a,b].$$

$[a,b]$ segmenttiń qálegen

$$P = \{x_0\,,\ x_1\,,...,\ x_n\} \quad (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$$

bóleklewdi alıp, bul bóleklewdiń hár bir

$$[x_k\,, x_{k+1}] \qquad\qquad (k = 0,1,2,...,n-1)$$

bólekshesinde qálegen $\xi_k$ $\quad \xi_k \in [x_k\,, x_{k+1}];\ \ (k = 0,1,2...,n-1)$ tochka alamız.

Eger hár bir $[x_k\,, x_{k+1}]$ da denege tásir etiwshi kúshti turaqlı hám ol $F(\xi_k)$ ǵa teń delinse, ol jaǵdayda $[x_k\,, x_{k+1}]$ aralıqta orınlanǵan jumıs (kúsh tásirinde deneni $x_k$ tochkadan $x_{k+1}$ tochkaǵa ótkiziw ushın orınlaǵan jumıs)

$$F(\xi_k)\cdot(x_{k+1} - x_k)$$

formula menen, $[a,b]$ aralıqta orınlanǵan jumıs bolsa, onda

$$A \approx \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\cdot(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\cdot \Delta x_k \qquad (1)$$

formula menen belgilenedi.

$P$ bóleklewdiń diametri $\lambda_p$ nol'ge talpınǵanda joqarıdaǵı qosındınıń mánisi izlenip atırǵan jumıs muǵdarın anıǵıraq belgileydi. Bul jaǵday $\lambda_p \to 0$ da (1) qosındınıń shekli limitin orınlanǵan jumıs deliniwi múmkinligin kórsetedi.

Demek,

$$A = \lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \cdot \Delta x_k .$$

Bunnan, $F(x) \in C[a,b]$ eken,

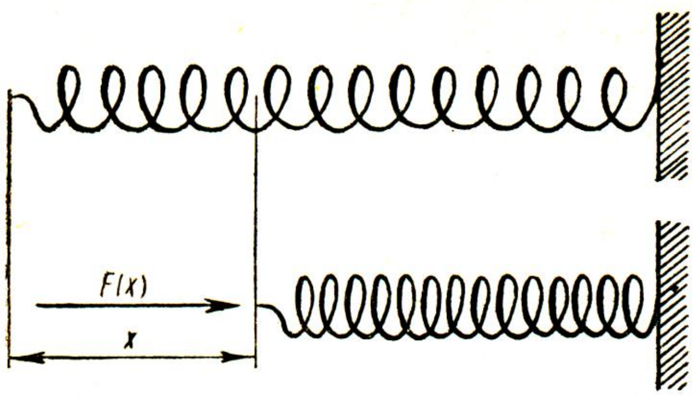
$$\lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b F(x)dx$$

boladı. Bunnan, ózgeriwshi $F(x)$ kúshtiń $[a,b]$ daǵı orınlaǵan jumısı

$$A = \int_a^b F(x)dx \qquad (2)$$

formula menen belgilenedi.

**Mısal.** Vintsimon prujinanıń bir ushı bekkemlengen, ekinshi ushına bolsa $F = F(x)$ kúsh tásir etip, prujina qısılǵan (13-sızılma)




13-sızılma

Eger prujinanıń qısılıwı oǵan tásir etip atırǵan $F(x)$ kúshke proporcional bolsa, prujinanı $a$ birlikke qısıw ushın $F(x)$ kúshtiń orınlaǵan jumıstı tabıń.

◄ Eger $F(x)$ kúsh tásirinde prujinanıń qısılıw muǵdarın $x$ arqalı belgilesek, onda

$$F(x) = kx$$

boladı, bunda $k$ -proporcionallıq koefficienti (qısılıw koefficienti). $(2)$ formulaǵa muwapıq orınlanǵan jumıs

$$A=\int_0^a kxdx=\frac{ka^2}{2}$$

boladı. ►

# 10-§. $R^m$ KEŃISLIK

## 10.1. $R^m$ keńislik hám onıń áhmiyetli kóplikleri

$R^m$ *keńislik.* Haqıyqıy sanlar kópligi $R$ járdeminde

$$\underbrace{R\times R\times\cdots\times R}_{m\ ma}=\left\{\left(x_1,x_2,...,x_m\right): x_1\in R, x_2\in R,...,x_m\in R\right\} \qquad (1)$$

kóplikti ($R$ dıń dekart kóbeymelerinen dúzilgen kóplikti) payda eteyik. (1) kópliktıń hár bir elementi $x_1, x_2, ..., x_m$ haqıyqıy sanlardan ibarat bolǵan tártiplengen $m$ lik

$$(x_1, x_2, ..., x_m)$$

ibarat boladı. Onı (1) kópliktiń noqatı deb, bir hárib penen belgilenedi,

$$x=(x_1, x_2, ..., x_m).$$

Bunda $x_1, x_2, ..., x_m$ sanlar $x$ noqattıń sáykes túrde birinshi, ekinshi, ... , $m$-koordinataları delinedi.

Eger $x=(x_1, x_2, ..., x_m)$, $y=(y_1, y_2, ..., y_m)$ noqatlar ushın $x_1=y_1$, $x_2=y_2, ..., x_m=y_m$ bolsa, onda $x=y$ delinedi.

Meyli $x=(x_1, x_2, ..., x_m)$, $y=(y_1, y_2, ..., y_m)$ lar (1) kópliktiń qálegen eki noqatı bolsın. Bul

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\left(y_k-x_k\right)^2}$$

shama $x$ hám $y$ noqatlar arasındaǵı aralıq delinedi hám onı $\rho(x, y)$ arqalı belgilenedi

$$\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\left(y_k-x_k\right)^2}. \qquad (2)$$

Endi aralıqtıń qáseytlerin keltiremiz:

1) Hár dayım $\rho(x,y)\geq 0$ hám $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ boladı.

2) $\rho(x,y)$ aralıq $x$ hám $y$ larǵa salıstırǵanda simmetriyalı boladı,

$\rho(x,y)=\rho(y,x)$.

3) (1) kóp liktiń qálegen

$$x=(x_1,x_2,...,x_m),\ y=(y_1,y_2,...,y_m),\ z=(z_1,z_2,...,z_m)$$

noqatları ushın

$$\rho(x,z)\leq \rho(x,y)+\rho(y,z)$$

teńsizlik orınlı boladı.

Ádette, (1) kóp lik $R^m$ keńislik delinedi. Demek,

$$R^m=\{(x_1,x_2,...,x_m): x_1\in R,\ x_2\in R,...,x_m\in R\}.$$

Endi $R^m$ keńisliktegi bazı bir kóp liklerdi keltiremiz.

Meyli bazı bir $a=(a_1,a_2,...,a_m)\in R^m$ noqat hám $r>0$ san berilgen bolsın.

Bul

$$B_r(a)=\left\{(x_1,x_2,...,x_m)\in R^m : \sqrt{(x_1-a_1)^2+...+(x_m-a_m)^2}<r\right\}$$

qısqasha,

$$B_r(a)=\{x\in R^m : \rho(x,a)<r\}$$

kóp lik orayı $a$ noqat, radiusı $r$ bolǵan shar ($m$ ólshewli shar) delinedi.

$\overline{B}_r(a)=\{x\in R^m : \rho(x,a)\leq r\}$ kóp lik $R^m$ keńislikte tuyıq shar,

$$B_r^0(a)=\{x\in R^m : \rho(x,a)=r\}$$

kóp lik bolsa, onda $R^m$ keńislikte sfera ($m$ ólshewli sfera) delinedi.

Bunnan $\overline{B_r}(a)=B_r(a)\cup B_r^0(a)$ boladı.

$R^m$ *keńislikte noqattıń dógeregi.* Bazı bir $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)\in R^m$ noqat hám $\varepsilon>0$ san berilgen bolsın.

**1-anıqlama**. Orayı $x^0$ noqatta radiusı $\varepsilon$ bolǵan $R^m$ keńislikte shar, $x^0\in R^m$ noqattıń sferalıq dógeregi delinedi hám $U_\varepsilon(x^0)$ arqalı belgilenedi:

$$U_\varepsilon(x^0)=\{x\in R^m:\rho(x,x^0)<\varepsilon\}.$$

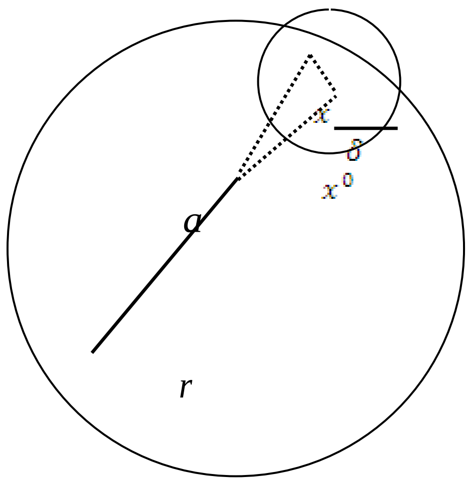
$R^m$ keńislikte ashıq hám tuyıq kóplikler. Meyli $R^m$ keńislikte bazı bir $G$ kóplik $(G\subset R^m)$ berilgen bolıp, $x^0\in G$ bolsın.

Eger $x^0$ noqat $G$ kóplikke tiyisli bolǵan $U_\varepsilon(x^0)$ dógerekke iye bolsa, onda $(U_\varepsilon(x^0)\subset G)$ $x^0$ noqat $G$ kópliktiń ishki noqatı delinedi.

**2-anıqlama**. $G$ kópliktiń hár bir noqatı onıń ishki noqatı bolsa, ol ashıq kóplik delinedi.

**1-mısal**. $R^m$ keńisliktegi $B_r(a)=\{x\in R^m:\rho(x,a)<r\}$ shardıń ashıq kóplik ekenin kórsetiń.

◀ $\forall x^0\in B_r(a)$ noqattı alamız. Onda $r-\rho(x^0,a)$ shama oń boladı. Onı $\delta$ deymiz $\delta=r-\rho(x^0,a)$ (22-sızılma).




22-sızılma

Endi $x^0$ noqattıń

$$U_\delta\left(x^0\right)=\left\{x\in R^m : \rho\left(x,x^0\right)<\delta\right\}$$

dógeregin qaraymız.Bunda $U_\delta\left(x^0\right)\subset B_r(a)$ boladı. Haqıyqatan da,

$$\forall x\in U_\delta\left(x^0\right)\Rightarrow \rho\left(x,x^0\right)<\delta$$

bolıp, aralıqtıń 3)-qáseytine muapıq

$$\rho(x,a)\le \rho\left(x,x^0\right)+\rho\left(x^0,a\right)<\delta+\rho\left(x^0,a\right)=r$$

boladı. Demek,

$$\forall x\in U_\delta\left(x^0\right)\Rightarrow x\in B_r\left(x^0\right)$$

Bunnan $U_\delta\left(x^0\right)\subset B_r\left(x^0\right)$ kelip shıgadı.

Demek, $B_r(a)$ kópliktiń hár bir noqatı onıń ishki noqatı boladı. Onda $B_r(a)$ ashıq kóplik.►

Meyli $F\subset R^m$ kóplik hám $x^0\in R^m$ noqat berilgen bolsın. Eger $x^0$ noqattıń qálegen $U_\varepsilon\left(x^0\right)$ dógereginde $(\forall\varepsilon>0)$ $F$ kópliktiń $x^0$ den parıqlı keminde bir noqatı bolsa, onda $x^0$ noqatı $F$ kópliktiń limit noqatı delinedi.

Máselen, $B_r(a)=\left\{x\in R^m : \rho(x,a)<r\right\}$ kópliktiń hár bir noqatı onıń limit noqatı boladı. Al $B_r^0=\left\{x\in R^m : \rho(x,a)=r\right\}$ kópliktiń barlıq noqatları da usı $B_r(a)$ kópliktiń limit noqatı boladı. Biraq, bul limit noqatlar $B_r(a)$ kóplikke tiyisli bolmaydı.

**3-anıqlama**. Eger $F\subset R^m$ kópliktiı barlıq limit noqatları usı kóplikke tiyisli bolsa, onda $F$ tuyıq kóplik delinedi.

Máselen, $\overline{B}_r(a)=\left\{x\in R^m : \rho(x,a)\le r\right\}$ kóplik ($R^m$ keńisliktegi tuyıq shar) tuyıq kóplik boladı.

Bazı bir $M\subset R^m$ kóplik hám $x^0\in R^m$ noqattı qarayıq.

Eger $x^0$ noqattıń qálegen $U_\varepsilon(x^0)$ dógereginde $M$ kópliktiń hám $R^m \setminus M$ kópliktiń noqatları bolsa, onda $x^0$ noqat $M$ kópliktiń shegaralıq noqatı delinedi. $M$ kópliktiń barlıq shegaralıq noqatları onıń shegarası boladı. $M$ kópliktiń shegarası $\partial(M)$ arqalı belgilenedi. Máselen, $B_r^0(a)=\{x\in R^m : \rho(x,a)=r\}$ kóplik

$$B_r(a)=\{x\in R^m : \rho(x,a)<r\}$$

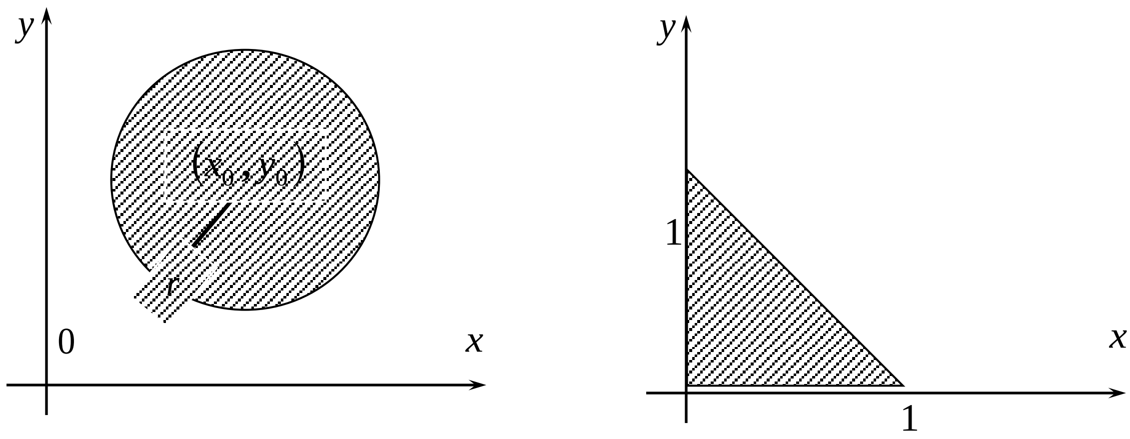
kópliktiń shegarası boladı $\partial(B_r(a))=B_r^0(a)$.

Eger $F\subset R^m$ kópliktiń shegarası $\partial(F)$ usı kóplikke tiyisli bolsa, onda $F$ tuyıq kóplik boladı. Máselen, $\overline{B}_r(a)=\{x\in R^m : \rho(x,a)\le r\}$ tuyıq kóplik boladı, sebebi

$$\partial(\overline{B}_r(a))=B_r^0(a)\subset \overline{B}_r(a).$$

**4-anıqlama**. Eger $M\subset R^m$ kóplik ashıq hám baylamlı kóplik bolsa, ol oblast delinedi.

Máselen, $B_r(a)=\{x\in R^m : \rho(x,a)<r\}$ oblast boladı.




23-sızılma

## 10.2. $R^m$ keńislikte izbe-izlik hám onıń limiti

Meyli bazı bir qaǵıydaǵa muapıq hár bir натурал san $n$ ge $R^m$ keńisliktiń tek bir

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_m^{(n)}) \qquad\qquad (n = 1,2,...)$$

noqatı sáykes qoyılǵan bolsın. Bul sáykeslik nátiyjesinde $R^m$ keńisliktiń noqatlarınan payda bolǵan

$$(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_m^{(1)}),\ (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_m^{(2)}),\ ...,\ (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_m^{(n)}),\ ...$$

qısqasha

$$x^{(1)},\ x^{(2)}, ...,\ x^{(n)}, ...$$

kóplik boladı. Onı $R^{(m)}$ keńislikte izbe-izlik деб, $\{x^{(n)}\}$ arqalı belgilenedi. Demek, $\{x^{(n)}\}$ izbe-izliktiń aǵzaları $R^m$ keńisliktiń noqatlarınan ibarat bolıp, bul noqatlardıń koordinataları $m$ та

$$\{x_1^{(n)}\}, \qquad \{x_2^{(n)}\}, \ ... \ \{x_m^{(n)}\}, \qquad (n = 1,2,..)$$

sanlar izbe-izliklerin júzege keltiredi.

Meyli $R^m$ keńislikte $\{x^{(n)}\}$:

$$x^{(1)},\ x^{(2)}, .....,\ x^{(n)}, .... \tag{1}$$

izbe-izlik hám

$$a = (a_{1,}, a_2, ... a_m) \in R^m$$

noqatı berilgen bolsın.

**1-anıqlama**. Eger $\forall \varepsilon > 0$ alǵanda, sonday $n_0 \in N$ san tabılıp, barlıq $n > n_0$ ushın

$$\rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon$$

yaǵniy

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists n_0 \in N, \qquad \forall n > n_0 : \quad \rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon$$

bolsa, onda $a$ noqatı $\{x^{(n)}\}$ izbe-izliktiń limiti delinedi hám

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a \quad \text{yamasa } n\to\infty \text{ da } x^{(n)} \to a$$

arqalı belgilenedi. $\forall n > n_0$ da

$$\rho(x^{(n)}, a) < \varepsilon$$

teńsizliktiń orınlanıwı, (1) izbe-izliktiń $n_0$ dan úlken nomerli aǵzaları $a$ noqattıń $U_\varepsilon(a)$ dógeregine tiyisli bolıwın bildiredi.

**2-anıqlama**. Eger $a\in R^m$ noqattıń qálegen $U_\varepsilon(a)$ dógeregi alınǵanda, $\{x^{(n)}\}$ izbe-izliktiń bazı bir aǵzasınan keyingi barlıq aǵzaları usı dógerekke tiyisli bolsa, onda $a$ noqat $\{x^{(n)}\}$ izbe-izliktiń limiti delinedi.

**1-mısal**. $R^m$ keńislikte $\{x^{(n)}\} = \left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots \frac{1}{n}\right\}$ izbe-izliktiń limiti $a = (0,0,\dots,0)$ ekenligin kórsetin.

◀ $\forall\varepsilon > 0$ sanın alıp, $n_0 = \left[\frac{\sqrt{m}}{\varepsilon}\right] + 1$ alamız. Onda $\forall n > n_0$ ushın

$$\rho(x^{(n)}, a) = \rho((\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}),\ (0,0,\dots,0)) = \frac{\sqrt{m}}{n} < \frac{\sqrt{m}}{n_0} = \frac{\sqrt{m}}{\left[\frac{\sqrt{m}}{\varepsilon}\right]+1} < \varepsilon$$

boladı. Demek,

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = a\ .\ ▶$$

Meyli $R^m$ keńislikte $\{x^{(n)}\}$ izbe-izlik hám $a\in R^m$ noqat berilgen bolsın.

**1-teorema**. Eger $R^m$ keńislikte $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}),\ (n = 1,2,\dots)$ izbe-izlik $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ limitke iye bolsa, onda

$$\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = a_1,$$
$$\lim_{n\to\infty} x_2^{(n)} = a_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\lim_{n\to\infty} x_m^{(n)} = a_m,$$

boladı.

**2-teorema**. Eger $R^m$ keńisliktegi $\{x^n\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}, (n = 1, 2\dots)$ izbe-izlik hám $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ noqatı ushın

$$\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = a_1,$$
$$\lim_{n\to\infty} x_2^{(n)} = a_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\lim_{n\to\infty} x_m^{(n)} = a_m$$

bolsa, onda $\{x^{(n)}\}$ izbe-izlik limitine iye bolıp $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = a,$ boladı.

Bul teoremalardan tómendegiler kelip shıgadı.

$R^m$ keńislikte $\{x^{(n)}\} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ izbe-izlik $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ limitke $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = a$ iye bolıwı ushın

$$\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = a_1,$$
$$\lim_{n\to\infty} x_2^{(n)} = a_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\lim_{n\to\infty} x_m^{(n)} = a_m,$$

bolıwı zárúrli hám jetkilikli.

Eger (1) izbe-izlik limitke iye bolsa, onda jıynaqlı izbe-izlik delinedi.

**3-anıqlama**. $R^m$ keńislikte $\{x^{(n)}\}$ izbe-izlik berilgen bolsın. Eger $\forall \varepsilon > 0$ hám sonday $n_0 \in N$ tabılıp $\forall n > n_0$, $\forall p > n_0$ ushın

$$\rho(x^{(n)}, x^{(p)}) < \varepsilon$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $\{x^{(n)}\}$ fundamental izbe-izlik delinedi.

**3-teorema** (Koshi teoreması). $\{x^{(n)}\}$ izbe-izliktiń jıynaqlı bolıwı ushın onıń fundamental bolıwı zárúrli hám jetkilikli.

*Dara izbe-izlikler.* $R^m$ keńislikte $\{x^{(n)}\}$:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots$$

izbe-izlik berilgen bolsın. Bul izbe-izlik

$$x^{(n_1)}, x^{(n_2)}, \ldots, x^{(n_k)}, \ldots,$$

Bunda,

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots; n_k \in N, \quad k = 1,2,\ldots,$$

berilgen $\{x^{(n)}\}$ izbe-izliktiń dara izbe-izligi delinedi. Onı $\{x^{(n_k)}\}$ arqalı belgilenedi.

Eger $\{x^{(n)}\}$ izbe-izlik jıynaqlı bolıp, $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = a$ bolsa, bul izbe-izliktiń hár qanday dara izbe-izligi $\{x^{(n_k)}\}$ da jıynaqlı bolıp, $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(n_k)} = a$ boladı.

Meyli $R^m$ keńislikte bazı bir $M$ kóplik berilgen bolsın $M \subset R^m$. Eger $R^m$ keńislikte orayı $(0,0,..,0) \in R^m$, radiusı $r > 0$ bolǵan shar

$$U^0 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m : \rho((x_1, x_2, \ldots, x_m,)\ (0,0,\ldots 0)) < r\}$$

$M \subset U^0$ bolsa, onda $M$ shegaralanǵan kóplik delinedi.

**5-teorema (Boltsano-Veyershtrass).** $R^m$ keńislikte hár qanday shegaralanǵan izbe-izlikten jıynaqlı dara izbe-izlik ajıratıp alıw múmkin.

## 10.3. Kóp ózgeriwshili funkciya hám onıń limiti

Meyli $R^m$ keńislikte $E$ kóplik berilgen bolsın $E \subset R^m$.

**1-anıqlama**. Eger $E$ kópliktegi hár bir $x=(x_1,x_2,...x_m)$ noqatqa bazı bir $f$ qağıydağa kóre bir haqıyqıy $u$ sanı sáykes qoyılğan bolsa, onda $E$ kóplikte kóp ózgeriwshili ($m$ ózgeriwshili) funkciya berilgen delinedi. Onı

$$f: x=(x_1,x_2,...,x_m)\to u \text{ yamasa } u=f(x)=f(x_1,x_2,...,x_m)$$

$$(x=(x_1,x_2,...,x_m)\in R^m\ ,\ u\in R)$$

arqalı belgilenedi. Bunda $E$ funkciyanıń anıqlanıw kópligi, $x_1,x_2,...,x_m$ lar (erkli ózgeriwshiler) funkciya argumentleri, $u$ bolsa $x_1,x_2,...,x_m$ lardıń funkciyası delinedi. Máselen, $f$ - hár bir

$$x=(x_1,x_2,...x_m)\in M,$$
$$M=\{x\in R^m : \rho(x,0)\le 1\}$$

noqatqa bul

$$(x_1,x_2,...,x_m)\to\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-...-x_m^2}$$

qağıyda menen bir haqıyqıy $u$ sanın sáykes qoysın. Onda $M\subset R^m$ kóplikte anıqlanğan

$$u=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-...-x_m^2}$$

funkciya payda boladı.

Meyli $u=f(x_1,x_2,...x_m)$ funkciya $E\subset R^m$ kóplikte berilgen bolsın. $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)\in E$ noqatqa sáykes keliwshi $u_0$ san $u=f(x)$ funkciyanıń $x^0$ noqattağı menshikli mánisi delinedi $u_0=f(x^0)$.

Berilgen funkciyanıń barlıq menshikli mánislerinen ibarat bul

$$\{u=f(x): x\in E\} \tag{1}$$

sanlar kópligi $u=f(x)$ funkciyanıń mánisler kópligi delinedi. Eger (1) kóplik shegaralanğan bolsa, onda $u=f(x)=f(x_1,x_2,...x_m)$ funkciya $E$ kóplikte shegaralanğan delinedi.

Meyli $f(x_1,x_2,...x_m)$ funkciyada

$$x_1=\varphi_1(t)=\varphi_1(t_1,t_2,...,t_k),$$
$$x_2=\varphi_2(t)=\varphi_2(t_1,t_2,...,t_k),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_m=\varphi_m(t)=\varphi_m(t_1,t_2,...,t_k),$$

bolsın, bunda $\varphi_i(t)$ funkciya $(i=1,2,...,m)$ $T\subset R^k$ kóplikte anıqlanǵan bolıp, $t=(t_1,t_2,...,t_k)\in T$ bolǵanда oǵan sáykes $x=(x_1,x_2,...x_m)\in E$ bolsın. nátiyjede

$$f(x(t))=f(\varphi_1(t_1,...,t_k),\varphi_2(t_1,...,t_k),....,\varphi_m(t_1,...,t_k))=F(t_1,t_2,...,t_k)$$

funkciya payda boladı. Onı quramalı funkciya delinedi.

*Kóp ózgeriwshili funkciyanıń eseli limiti.* Meyli $f(x)$ funkciya $E\subset R^m$ kóplikte berilgen, $x^0\in R^m$ noqat $E$ nıń limit noqatı bolsın. Onda $R^m$ keńislikte sonday $\{x^{(n)}\}$:

$$x^{(1)},x^{(2)},....,x^{(n)},....$$

izbe-izlik tabılıp:

1) $\forall n\in N$ да $x^{(n)}\in E,\quad x^{(n)}\neq x^0$,

2) $n\to\infty$ да $x^{(n)}\to x^0$

boladı.

**2-anıqlama (Geyne).** Eger

1) $\forall n\in N$ да $x^{(n)}\in E,\quad x^{(n)}\neq x^0$;

2) $n\to\infty$ да $x^{(n)}\to x^0$

shartlerin qanaatlandırıwshı qálegen $\{x^{(n)}\}$ izbe-izlik ushın

$$n\to\infty \text{ да } f(x^{(n)})\to A$$

bolsa, onda $A$ $f(x)=f(x_1,x_2,....,x_m)$ funkciyanıń $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ noqattaǵı limiti (eseli limiti) delinedi. Onı $\lim\limits_{x\to x^0}f(x)=A$ yamasa

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m \to x_m^0}} f(x_1, x_2, ..., x_m) = A$$

arqalı belgilenedi.

**Esletpe**. Eger

$$\left\{x^{(n)}\right\} \quad (x^{(n)} \in E, \quad x^{(n)} \neq x^0, \, n = 1,2,....),$$
$$\left\{y^{(n)}\right\} \quad (y^{(n)} \in E, \quad y^{(n)} \neq x^0, \, n = 1,2,....)$$

izbe-izlikler ushın $n \to \infty$ da $x^{(n)} \to x^0$ , $y^{(n)} \to x^0$ bolıp,

$$f(x^{(n)}) \to A, \quad f(y^{(n)}) \to B, \; A \neq B$$

bolsa, onda $f(x)$ funkciya $x^0$ noqatta limitke iye bolmaydı.

**3-anıqlama (Koshi)**. Eger $\forall \varepsilon > 0$ sanın alǵanda sonday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tabılıp $0 < \rho(x, x^0) < \varepsilon$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı $\forall x \in E \; \left(E \subset R^m\right)$ da

$$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $A$ sanı $f(x)$ funkciyanıń $x^0$ noqattaǵı limiti (eseli limiti) delinedi.

Meyli $f(x) = f\,(x_1, x_2, ... x_m)$ funkciya $E \subset R^m$ kóplikte berilgen bolıp, $x^0 = (x_1^0, \, x_2^0, ..., x_m^0) \in R^m$ noqat $E$ kópliktiń limit noqatı bolsın.

**1-teorema** (**Koshi**). $f(x)$ funkciyası $x^0$ noqatta limitke iye bolıwı ushın $\forall \varepsilon > 0$ sanın alǵanda sonday $\delta > 0$ san tabılıp,

$$\forall x' \in E \cap \left(U_\delta(x^0) \setminus \left\{x^0\right\}\right), \quad \forall x'' \in E \cap \left(U_\delta(x^0) \setminus \left\{x^0\right\}\right)$$

noqatlarda

$$\left| f(x'') - f(x') \right| < \varepsilon$$

teńsizliktiń orınlı bolıwı zárúrli hám jetkilikli.

Meyli funkciya $x_1 \to x_1^0$ limitke iye bolsın

$$\lim_{x_1\to x_1^0} f(x_1,x_2,...,x_m)=\varphi_1(x_2,x_3,...,x_m).$$

Endi $\varphi_1(x_2,x_3,...,x_m)$ funkciyada $x_3,x_4,...,x_m$ ózgeriwshilerin fikserlep, soń $x_2\to x_2^0$ limitke otilse

$$\lim_{x_2\to x_2^0} \varphi_1(x_2,x_3,...,x_m)=\varphi_2(x_3,x_4,...,x_m)$$

bolıp, berilgen funkciyanıń

$$\lim_{x_2\to x_2^0}\lim_{x_1\to x_1^0} f(x_1,x_2,...,x_m)$$

limiti payda boladı. Usıǵan uqsas $f(x_1,x_2,...,x_m)$ funkciyanıń

$$x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$$

ózgeriwshileri sáykes túrde $x_{i_1}^0, x_{i_2}^0,...,x_{i_k}^0$ larǵa umtılǵanda limiti

$$\lim_{x_{i_k}\to x_{i_k}^0}\dots\lim_{x_{i_1}\to x_{i_1}^0} f(x_1,x_2,...,x_m)$$

dep qaraw múmkin.

Kóp ózgeriwshili funkciyanıń limiti (eseli limiti) hám onıń tákrariy limitleri hár qıylı qatnasta boladı.

*Dara jaǵdaylar.*

Meyli $f(x,y)$ funkciya $E\subset R^2$ kóplikte berilgen bolıp, $(x_0,y_0)\in R^2$ noqat $E$ tıń limit noqatı bolsın. Bul eki ózgeriwshili funkciya limiti anıqlamaları tómendegi boladı. Eger

1) $\forall_n\in N$ da $(x_n,y_n)\in E,\ (x_n,y_n)\neq(x_0,y_0)$

2) $n\to\infty$ da $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$

shartti qanaatlandırıwshi qálegen $\{(x_n,y_n)\}$ noqatlar izbe-izligi ushın

$$n\to\infty \quad \text{да} \quad f(x_n,y_n)\to A$$

bolsa, onda $A$ funkciyanıń $(x_0,y_0)$ noqattagı limiti (eseli limiti) delinedi hám

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \quad \text{yamasa} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

arqalı belgilenedi.

Eger $\forall\varepsilon>0$ alǵanda hám sonday $\delta>0$ tabılıp, $0<\rho\big((x,y),(x_0,y_0)\big)<\delta$ teńsizlikti qanaatlandırıwshi $\forall(x,y)\in E$ da

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $A$ san $f(x,y)$ funkciyanıń $(x_0,y_0)$ noqattaǵı limiti (eseli limiti) delinedi. Berilgen funkciyanıń eki tákrariy limitleri

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)\ ,\ \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

bolıwı múmkin.

**1-mısal.** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, eger\ x^2+y^2\neq 0\ bolsa\\ 0 \quad , eger\ x^2+y^2=0\ bolsa\end{cases}$ funkciyanıń $(x,y)\to(0,0)$ limiti 0 bolıwın kórsetiń.

◄ Koshi anıqlamasınan paydalanıp $\forall\varepsilon>0$ san ushın $\delta=2\varepsilon$ dep

$$0<\rho\big((x,y),(0,0)\big)<\delta$$

teńsizlikti qanaatlandırıwshi $\forall(x,y)\in R^2$ da

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\rho\big((x,y),(0,0)\big)<\frac{1}{2}\delta=\varepsilon$$

boladı. Demek, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$ .►

**2-mısal.** $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ funkciyanıń $(0,0)$ noqatta limitke iye emesligin kórsetiń.

◄ funkciya $R^2\setminus\{(0,0)\}$ kóplikte anıqlanǵan hám $(0,0)$ noqat usı kópliktiń limit noqatı. $(0,0)$ noqatqa umtılıwshı $\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\},\left\{\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)\right\}$ izbe-izliklerdi alayıq

$$\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0)\ ,\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)\to(0,0)\ .$$

$\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ hám $\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)$ noqatlarda $(n=1,2,3,....)$ berilgen funkciyanıń mánisleri

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=1 \quad , \; f\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{4n^2+1} \qquad (n=1,2,....)$$

bolıp,

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to 1 \quad , \; f\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)\to 0$$

boladı. Funkciya limitiniń Geyne anıqlamasın paydalanıp, berilgen funkciyanıń $(x,y)\to(0,0)$ da limitke iye emes.►

**3-mısal.** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, eger\ x^2+y^2\neq 0\ bolsa,\\ 0 \quad\quad , eger\ x^2+y^2=0\ bolsa\end{cases}$

funkciyanıń $(0,0)$ da tákrariy limitlerin tabıń.

◄Berilgen funkciyanıń tákrariy limitlerin tabamız:

$$\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0, \; \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0,$$

$$\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0, \; \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=0$$

.

Demek, berilgen funkciyanıń $(0,0)$ noqattağı tákrariy limitleri bir-birine teń bolıp, olar 0 ge teń.►

Meyli $f(x,y)$ funkciya $R^2$ keńisliktegi

$$E=\{(x,y)\in R^2 : |x-x_0|<a, |y-y_0|<b\}$$

kóplikte berilgen bolsın.

**2-teorema**. Eger

1) $(x,y)\to(x_0,y_0)$ da $f(x,y)$ funkciyanıń limiti (eseli limiti) bar bolıp hám

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A,$$

2) hár bir fikserlengen $x$ da

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x) \tag{2}$$

bar bolsa, onda

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

tákrariy limit bar bolıp hám

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=A$$

boladı.

**3-teorema**. Eger

1) $(x,y)\to(x_0,y_0)$ da $f(x,y)$ funkciyanıń limiti (eseli limiti) bar bolıp hám

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$
,

2) hár bir fikserlengen $y$ da

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\phi(y)$$

bar bolsa bolsa, onda $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ tákrariy limit bar bolsa hám

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=A$$

boladı.

**Saldar**. Eger $f(x,y)$ funkciya ushın bir waqıtta 2,3-teoremalarınıń shartleri orınlı bolsa, onda

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

boladı.

## 10.4. Kóp ózgeriwshili funkciyanıń úzliksizligi. Teń ólshewli úzliksizlik. Kantor teoreması

Meyli $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_m)$ funkciya $R^m$ keńisliktegi $E$ kóplikte berilgen bolıp, $x^0\in E$ noqatı $E$ kópliktiń limit noqatı bolsın.

**1-anıqlama**. Eger

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f\left(x^0\right) \tag{1}$$

bolsa, onda $f(x)$ funkciya $x^0$ noqatta úzliksiz delinedi.

**2-anıqlama** (Geyne). Eger

1) $\forall n\in N$ da $x^{(n)}\in E$;

2) $n\to\infty$ da $x^{(n)}\to x^0$

shartlerdi qanaatlandırıwshi qálegen $\left\{x^{(n)}\right\}$ izbe-izlik ushın

$$n\to\infty \text{ да } f\left(x^{(n)}\right)\to f\left(x^0\right)$$

bolsa, onda $f(x)$ funkciya $x^0$ noqatta úzliksiz delinedi.

**3-anıqlama (Koshi).** Eger

$$\forall\varepsilon>0\,,\exists\delta>0\ ,\ \ \forall x\in E\cap U_\delta\left(x^0\right),\ \left|\,f(x)-f\left(x^0\right)\right|<\varepsilon$$

bolsa, onda $f(x)$ funkciya $x^0$ noqatta úzliksiz delinedi.

Ulıwma $u=f(x)$ funkciyanıń $x^0\in E$ noqattaǵı úzliksizligi tómendegishe ańlatıladı

$$\forall\varepsilon>0\,,\exists\delta>0\ ,\ \ \forall x\in E\cap U_\delta\left(x^0\right),\ f(x)\in U_\varepsilon\left(f\left(x^0\right)\right).$$

Ádette, bul

$$\Delta u=f(x)-f\left(x^0\right),\left(x=(x_1,x_2,....,x_m),x^0=\left(x_1^0,...,x_k^0\right)\right)$$

ayırma, $u=f(x)$ funkciyanıń $x^0$ noqattaǵı ósimi (tolıq ósimi) delinedi.

Eger

$$\Delta x_1=x_1-x_1^0\,,\ \Delta x_2=x_2-x_2^0\ ,\ ...,\ \Delta x_m=x_m-x_m^0$$

bolsa, onda

$$\Delta u=f\left(x_1^0+\Delta x_1,\ x_2^0+\Delta x_2\ ,...,\ x_m^0+\Delta x_m\right)-f\left(x_1^0\ x_2^0\ ...,x_m^0\right)$$

boladı. $f(x)$ funkciyanıń $x^0$ noqatta úzliksiz bolıwı ushın

$$\lim_{x\to x_0}\Delta u = 0, \quad \text{яъни} \quad \lim_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \Delta x_2\to 0\\ \dots\dots\dots\\ \Delta x_m\to 0}} \Delta u = 0$$

bolıwı zárúrli hám jetkilikli.

Eger (1) qatnas orınlı bolmasa $f(x)$ funkciya $x^0$ noqatta úzilizke iye delinedi.

**4-anıqlama.** Eger $f(x)$ funkciya $E$ kópliktıń hár bir noqatta úzliksiz bolsa, onda funkciya usı $E$ kóplikte úzliksiz delinedi.

Kóp ózgeriwshili funkciyalarda funkciyanıń noqattaǵı tolıq ósimi túsinigi menen bir qatarda onıń menshikli ósimi túsinikleride kiriteledi.

Bul

$$\Delta_{x_1} u = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, x_3^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0),$$
$$\Delta_{x_2} u = f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2, x_3^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta_{x_m} u = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{m-1}^0, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0),$$

ayırmalarǵa sáykes túrde $f(x)$ funkciyanıń $x^0$ noqattaǵı $x_1, x_2, \dots, x_m$ ózgeriwshilar boyınsha menshikli ósimleri delinedi.

$$\lim_{x\to x^0}\Delta u = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{\Delta x_1\to 0} \Delta_{x_1} u = 0\ , \\ \lim\limits_{\Delta x_2\to 0} \Delta_{x_2} u = 0\ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lim\limits_{\Delta x_m\to 0} \Delta_{x_m} u = 0 \end{cases}$$

boladı. Biraq, $\Delta x_k \to 0$ da $\Delta_{x_k} u \to 0\ (k = 1, 2, \ .\ , m)$ bolıwınan

$$\lim_{x\to x_0}\Delta u = 0$$

bolıwı hár dayım kelip shıgabermeydi.

*Úzliksiz funkciyalardıń ápiwayı qáseytleri.* Meyli $f(x)$ hám $g(x)$ funkciyalar $E \subset R^m$ kóplikte berilgen bolıp, $x^0 \in E$ noqatta úzliksiz bolsın. Onda

$$c\cdot f(x),\quad f(x)\pm g(x),\quad f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}\quad \left(g\left(x^0\right)\neq 0\right)$$

funkciyalar $x^0$ noqatta úzliksiz boladı, bunda $c=const$.

Meyli

$$\begin{aligned}
&x_1=\varphi_1(t_1,t_2,....,t_k)=\varphi_1(t),\\
&x_2=\varphi_2(t_1,t_2,....,t_k)=\varphi_2(t),\\
&.......................................\\
&x_m=\varphi_m(t_1,t_2,....,t_k)=\varphi_m(t)
\end{aligned}\tag{2}$$

funkciyalardıń hár biri $M\subset R^k$ kóplikte anıqlanǵan bolsın. Bul (2) qatnas nátiyjede $M$ kópliktiń hár bir $t=(t_1,t_2,....,t_k)$ noqatına sáykes keliwshi $R^m$ keńisliktiń $x=(x_1,x_2,....,x_m)$ noqatı payda boladı. Bunday noqatlar kópligin $E$ deymiz hám $E\subset R^m$ boladı.

Meyli $E$ kóplikte $u=f(x)=f(x_1,x_2,....,x_m)$ funkciya anıqlanǵan bolsın. Natiyjede

$$t\in M\to x\in \mathrm{E}\to u\in R,$$

yaǵniy

$$(t_1,t_2,....,t_k)\in M\to (x_1,x_2,....,x_m)\in \mathrm{E}\to u\in R$$

bolıp,

$$u=f(x(t))=f\left(\varphi_1(t_1,...,t_k),\varphi_2(t_1,...,t_k),...,\varphi_m(t_1,...,t_k)\right)=\Phi(t)=\Phi(t_1,t_2,...,t_k)$$

funkciya payda boladı. Onı quramalı funkciya delinedi.

**1-teorema**. Eger $x_1=\varphi_1(t),\ x_2=\varphi_2(t),....,x_m=\varphi_m(t)\quad (t=(t_1,....,t_k))$ funkciyalar $t^0=(t_1^0,...,t_k^0)\in M\subset R^k$ noqatta úzliksiz, $u=f(x)$ funkciya $x^0=(x_1^0,.x_2^0,...,x_m^0)\in E\subset R^m$ noqatta $(x_1^0=\varphi_1(t^0),\ x_2^0=\varphi_2(t^0),...,x_m^0=\varphi_m(t^0))$ úzliksiz bolsa, onda $f(x(t))=f(\varphi_1,\varphi_2,....,\varphi_m)$ quramalı funkciya $t^0$ noqatta úzliksiz boladı.

Kóplikte úzliksiz bolǵan funkciyalardıń qáseytleri. Endi kóplikte úzliksiz bolǵan funkciyalardıń keltiremiz.

**2-teorema**. Eger $f(x)$ funkciya shegaralanǵan tuyıq $E \subset R^m$ kóplikte úzliksiz bolsa, onda funkciya $E$ да shegaralanǵan boladı.

**3-teorema**. Eger $f(x)$ funkciya shegaralanǵan tuyıq $E \subset R^m$ kóplikte úzliksiz bolsa, onda funkciya usı kóplikte ózinii anıq joqarı hám anıq tómengi shegaralarǵa erisedi, yaǵniy

$$\exists x^{(*)} \in E, \quad \sup_{x \in E}\{f(x)\} = f(x^{(*)}),$$
$$\exists x^{(**)} \in E, \quad \inf_{x \in E}\{f(x)\} = f(x^{(**)})$$

boladı.

**4-teorema**. Meyli $f(x) = f(x_1, x_2, ...., x_m)$ funkciya baylamlı $E \subset R^m$ kóplikte berilgen bolsın. Eger

1) $f(x)$ funkciya $E$ da úzliksiz,

2) $a = (a_1, a_2, ...., a_m) \in E,\ b = (b_1, b_2, ...., b_m) \in E$

noqatlarda túrli belgidegi mánislerige iye

$$(f(a) > 0,\ f(b) < 0 \text{ yamasa } f(a) < 0,\ f(b) > 0)$$

bolsa, onda sonday $c = (c_1, c_2, ...., c_m) \in E$ noqat tabılıp

$$f(c) = 0$$

boladı.

**Funkciyanıń teń ólshewli úzliksizligi. Kantor teoreması.**

Meyli $f(x)$ funkciya $E \subset R^m$ kóplikte berilgen bolsın.

**5-anıqlama**. Eger $\forall \varepsilon > 0$ san alǵanda hám sonday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ san tabılıp,

$$\rho(x', x'') < \delta$$

teńsizlikti qanaatlandırıwshi qálegen $x' \in E, x'' \in E$ ushın

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x)$ funkciya $E$ kóplikte teń ólshewli úzliksiz delinedi.

Eger $f(x)$ funkciya $E$ kóplikte teń ólshewli úzliksiz bolsa, onda usı kóplikte úzliksiz boladı.

**Teorema. (Kantor).** Eger $f(x)$ funkciya shegaralanǵan tuyıq $E \subset R^m$ kóplikte úzliksiz bolsa, onda funkciya usı kóplikte teń ólshewli úzliksiz boladı.

## 11-§. KÓP ÓZGERIWSHILI FUNKCIYANÍŃ DARA TUWÍNDÍLARÍ

### 11.1. Kóp ózgeriwshili funkciyanıń differenciallanıwshılıǵı

Meyli $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_m)$ funkciya $E\subset R^m$ kóplikte berilgen bolıp, $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)\in E,\ (x_1^0+\Delta x_1,x_2^0,...,x_m^0)\in E\quad (\Delta x_1 \gtrless 0)$ bolsın. Bul funkciyanıń $x^0$ noqattaǵı $x_1$ ózgeriwshi boyınsha dara ósimi

$\Delta_{x_1} f(x^0)=f(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0,...,x_m^0)-f(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ $\Delta x_1$ ǵa baylanıslı boladı.

**1-anıqlama.** $\lim\limits_{\Delta x_1\to 0}\dfrac{\Delta_{x_1} f(x^0)}{\Delta x_1}$ limit bar bolsa, bul limit $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_m)$ funkciyanıń $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ noqattaǵı $x_1$ ózgeriwshisi boyınsha dara tuwındısı delinedi. Onı $\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}$ yamasa $f'_{x_1}(x^0)$ arqalı belgilenedi:

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}=f'_{x_1}=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{\Delta_{x_1} f(x^0)}{\Delta x_1}=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{f(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0,...,x_m^0)-f(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)}{\Delta x_1}$$

Berilgen funkciyanıń dara tuwındısın anıqlawǵa

$$f'_{x_1}(x^0)=\lim_{x_1\to x_1^0}\frac{f(x_1,x_2^0,...,x_m^0)-f(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)}{x_1-x_1^0}$$

boladı. Usıǵan uqsas $f(x_1,x_2,...,x_m)$ funkciyanıń basqa $x_2,x_3,...,x_m$ ózgeriwshileri boyınsha dara tuwındıları anıqlanadı:

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}=\lim_{\Delta x_2\to 0}\frac{\Delta_{x_2} f(x^0)}{\Delta x_2}=\lim_{\Delta x_2\to 0}\frac{f(x_1^0,x_2^0+\Delta x_2,x_3^0,...,x_m^0)-f(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)}{\Delta x_2},...,$$

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_m}=\lim_{\Delta x_m\to 0}\frac{\Delta_{x_m} f(x^0)}{\Delta x_m}=\lim_{\Delta x_m\to 0}\frac{f(x_1^0,x_2^0,x_3^0,...,x_m^0+\Delta x_m)-f(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)}{\Delta x_m}.$$

Joqarıda keltirilgen anıqlamalardan kóp ózgeriwshili funkciyanıń dara tuwındıları bir ózgeriwshili funkciyanıń tuwındısı arqalı ekenligi kórinedi. Demek, kóp ózgeriwshili funkciyanıń dara tuwındıların tabıwda málim bolǵan tablitsa hám qaǵiydalardan paydalanıw mumkin. Eger $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_m), g(x)=g(x_1,x_2,...,x_m)$ funkciyalar $E\subset R^m$ kóplikte berilgen bolıp, $x\in E$ noqatta dara tuwındılarǵa iye bolsa, onda

1) $\forall c\in R$: $$\frac{\partial(c f(x))}{\partial x_k}=c\frac{\partial f(x)}{\partial x_k};$$

2) $$\frac{\partial(f(x)+g(x))}{\partial x_k}=\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}+\frac{\partial g(x)}{\partial x_k};$$

3) $$\frac{\partial(f(x)\cdot g(x))}{\partial x_k}=\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}g(x)+f(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x_k};$$

4) $$\frac{\partial\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\partial x_k}=g^{-2}(x)\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}g(x)-f(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x_k}\right)$$

$(g(x)\neq 0),\quad k=1,2,...,m$

boladı.

*Kóp ózgeriwshili funkciyanıń differenciallanıwshılıǵı.*

Meyli $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_m)$ funkciya $E\subset R^m$ kóplikte berilgen bolıp, $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)\in E,\ (x_1^0+\Delta x_1,x_2^0+\Delta x_2,...,x_m^0+\Delta x_m)\in E$ bolsın. Маълумки, berilgen funkciyanıń $x^0$ noqattaǵı tolıq ósimi

$$\Delta f(x^0)=f(x^0+\Delta x_1,x_2^0+\Delta x_2,...,x_m^0+\Delta x_m)-f(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$$

bolıp, ol $\Delta x_1,\Delta x_2,...,\Delta x_m$ larǵa baylanıslı boladı.

**2-anıqlama.** Eger $\Delta x_1,\Delta x_2,...,\Delta x_m$ ósimlerge baylanıslı bolmaǵan sonday $A_1,A_2,....,A_m$ sanları tabılıp, funkciyanıń $x^0$ noqattaǵı tolıq ósimi

$$\Delta f(x^0)=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+....+A_m\Delta x_m+\alpha_1\Delta x_1+\alpha_2\Delta x_2+...+\alpha_m\Delta x_m \tag{1}$$

kóriniste ańlatılsa, $f(x)$ funkciya $x^0$ noqatta differenciallanıwshı delinedi, bunda $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ lar $\Delta x_1,\Delta x_2,\dots,\Delta x_m$ larǵa baylanıslı hám $\Delta x_1\to 0,\ \Delta x_2\to 0,...,\ \Delta x_m\to 0$ da sheksiz kishi shamalar.

Eger $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0\right)$ hám $\left(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, ..., x_m^0 + \Delta x_m\right)$ noqatlar arasındaǵı aralıq $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + ... + \Delta x_m^2}$ ushın, $\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0, ..., \Delta x_m \to 0$ da $\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + ... + \alpha_m \Delta x_m = 0(\rho)$ bolıwın esapqa alsaq, (1) qatnas

$$\Delta f\left(x^0\right) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + .... + A_m \Delta x_m + 0(\rho) \qquad (2)$$

kóriniske keledi.

Ádette (1) hám (2) qatnaslar $f(x)$ funkciyanıń $x^0$ noqatta differenciallanıwshılıq shárti delinedi.

**1-mısal.** $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_m) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_m^2$ funkciyanıń $\forall\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0\right) \in R^m$ noqatta differenciallanıwshı bolıwı kórsetiń.

◀Berilgen funkciyanıń $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0\right)$ noqattaǵı tolıq ósimin tabamız

$$\Delta f\left(x^0\right) = \left(x_1^0 + \Delta x_1\right)^2 + \left(x_2^0 + \Delta x_2\right)^2 + ... + \left(x_m^0 + \Delta x_m\right)^2 -$$
$$-\left(x_1^{0^2} + x_2^{0^2} + ... + x_m^{0^2}\right) = 2x_1^0 \Delta x_1 + 2x_2^0 \Delta x_2 + ... + 2x_m^0 \Delta x_m + \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + ... + \Delta x_m^2.$$

Eger $A_1 = 2x_1^0,\ A_2 = 2x_2^0, ...,\ A_m = 2x_m^0, \alpha_1 = \Delta x_1, \alpha_2 = \Delta x_2, ...,\ \alpha_m = \Delta x_m$ bolsa, onda

$$\Delta f\left(x^0\right) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + .... + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + ... + \alpha_m \Delta x_m$$

boladı. Demek, berilgen funkciya $\forall x^0 \in R^m$ noqatta differenciallanıwshı.▶

Eger $f(x)$ funkciya $E \subset R^m$ kópliktiń hár bir noqattında differenciallanıwshı bolsa, onda funkciya $E$ kóplikte differenciallanıwshı delinedi.

**1-teorema**. Eger $f(x)$ funkciya $x^0 \in E \subset R^m$ noqatta differenciallanıwshı bolsa, onda funkciya usı noqatta úzliksiz boladı.

**2-teorema**. Eger $f(x)$ funkciya $x^0$ noqatta differenciallanıwshı bolsa, onda funkciya usı noqatta barlıq dara tuwındılarǵa iye hám

$$f'_{x_1}\left(x^0\right) = A_1,\ f'_{x_2}\left(x^0\right) = A_2, ...,\ f'_{x_m}\left(x^0\right) = A_m$$

boladı.

Bul teoremadan $x^0$ noqatta differenciallanıwshı $f(x)$ funkciyanıń ósimi ushın

$$\Delta f(x^0)=f'_{x_1}(x^0)\cdot\Delta x_1+f'_{x_2}(x^0)\Delta x_2+...+f'_{x_m}(x^0)\Delta x_m+0(\rho)$$

kelip shıǵadı.

**Eskertiw.** $f(x)$ funkciyanıń bazıbir $x^0$ noqatta barlıq dara tuwındıları $f'_{x_1}(x^0), f'_{x_2}(x^0), f'_{x_3}(x^0),..., f'_{x_m}(x^0)$ nıń bar bolıwınan, onıń usı noqatta differenciallanıwshı bolıwı hár dayım kelip shıǵabermeydi.

Joqarıda keltirilgen teorema hám eskertiwden $f(x)$ funkciyanıń $x^0$ noqatta barlıq dara tuwındılarǵa iye bolıwı funkciyanıń usı noqatta differenciallanıwshı bolıwınıń zárúriy shárti ekenligi kelip shıǵadı.

Meyli $f(x)$ funkciya $E\subset R^m$ kóplikte berilgen bolıp, $U_\delta(x^0)\subset E$ bolsın.

**3-teorema**. Eger $f(x)$ funkciya $U_\delta(x^0)$ da barlıq dara tuwındılarǵa iye bolıp, bul dara tuwındılar $x^0$ noqatta úzliksiz bolsa, onda $f(x)$ funkciya $x^0$ noqatta differenciallanıwshı boladı.

Bul teorema $f(x)$ funkciyanıń $x^0$ noqatta differenciallanıwshı bolıwınıń jetkilikli shártin ańlatadı.

*Quramalı funkciyanıń tuwındısı*. Meyli

$$\begin{aligned} x_1&=\varphi_1(t)=\varphi_1(t_1,t_2,...,t_k)\ , \\ x_2&=\varphi_2(t)=\varphi_2(t_1,t_2,...,t_k)\ , \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m&=\varphi_m(t)=\varphi_m(t_1,t_2,...,t_k) \end{aligned}$$

funkciyalardıń hár bir $M\subset R^k$ kóplikte $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$ funkciya bolsa, onda

$$E=\{(x_1,x_2,...,x_m)\in R^m; x_1=\phi_1(t), x_2=\phi_2(t),....,x_m=\phi_m(t)\}$$

kóplikte berilgen bolıp, olar arqalı $f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),...,\varphi_m(t))=F(t_1,t_2,...,t_k)$ quramalı funkciya payda bolsın.

**4-teorema.** Eger $x_i=\varphi_i(t_1,t_2,...,t_k)$ funkciyalarnıń hár biri $(i=1,2,....m)$, $(t_1^0,t_2^0,...,t_k^0)\in M$ noqatta differenciallanıwshı bolıp, $f(x_1,x_2,...,x_m)$ funkciya sáykes $(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ noqatta

$$\left(x_1^0=\phi_1(t_1^0,t_2^0,...,t_k^0),x_2^0=\phi_2(t_1^0,...,t_k^0),...,x_m^0=\phi_m(t_1^0,...,t_k^0)\right)$$

differenciallanıwshı bolsa, onda quramalı $f(\phi_1(t_1,...,t_k),\phi_2(t_1,...,t_k),...,\phi_m(t_1,...,t_k))$ funkciya $(t_1^0,t_2^0,...,t_k^0)$ noqatta differenciallanıwshı boladı.

Meyli $f(x(t))$ quramalı funkciya joqarıdaǵı teoremanıń shártlerin qanaatlandırsın. Onda

$$\Delta f(t)=\frac{\partial f}{\partial t_1}\Delta t_1+\frac{\partial f}{\partial t_2}\Delta t_2+...+\frac{\partial f}{\partial t_k}\Delta t_k+0(\rho)$$

boladı. Bunan quramalı funkciyanıń dara tuwındıları tómendegishe

$$\frac{\partial f}{\partial t_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1}+...+\frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_1}\ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_2}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2}+...+\frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_2}\ ,$$

..............................................................................

$$\frac{\partial f}{\partial t_k}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_k}+...+\frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_k}$$

bolıwı kelip shıǵadı.

Meyli $m=2$ bolsın. Onda eki ózgeriwshili $u=f(x,y)$ $\left((x,y)\in E\subset R^2\ ,\ u\in R\right)$ funkciyanıń dara tuwındıları

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

hám

$$\Delta f=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y$$

differenciallanıwshılıq shártine iye bolamız.

**2-mısal.** $f(x,y)=\ln tg\dfrac{x}{y}$ funkciyanıń dara tuwındılarin tabıń.

◀Berilgen funkciyanıń dara tuwındıları tómendegishe boladı

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln tg\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{tg\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln tg\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{tg\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=\frac{-2}{y^2\sin\frac{2x}{y}}$$ ▶

**3-mısal.** $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ funkciyanıń dara tuwındıların tabıń.

◀Meyli $(x,y)\neq(0,0)$ bolsın. Onda

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

boladı. Meyli $(x,y)=(0,0)$ bolsın. Anıqlamaǵa kore

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{|\Delta y|}{\Delta y}$$

bolıp, bul limitlerge iye emesligi sebebli berilgen funkciya $(0,0)$ noqatta dara tuwındılarǵa iye bolmaydı. ▶

**4-mısal.** Eger $f(x,y)$ funkciya $R^2$ differenciallanıwshı bolıp, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ bolsa, onda $\dfrac{\partial f}{\partial r}$, $\dfrac{\partial f}{\partial\varphi}$ tabıń.

◀ Meyli $f(x,y)=f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$ quramalı funkciyanıń dara tuwındıların tabıw qaǵıydasına muwapıq

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

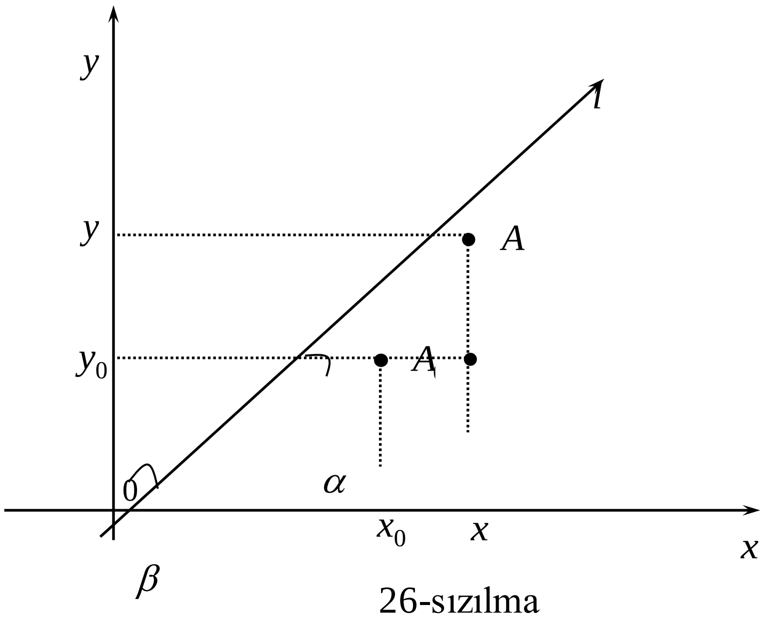
$$\frac{\partial f}{\partial \varphi}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}=-r\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial y}=-y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}.\ \blacktriangleright$$

## 11.2. Baǵıt boyınsha tuwındı

Meyli $f(x,y)$ funkciyanıń tegisliktegi qálegen baǵıtı boyınsha tuwındısı túsinigin keltiremiz. $f(x,y)$ funkciya $E\subset R^2$ kóplikte berilgen bolsın. Bul funkciyanı Dekart koordinatalar sistemasında $A_0=(x_0,y_0)$ noqattıń $U_\delta(A_0)\subset E,(\delta>0)$ dógerende qaraymız. $A=(x,y)\subset U_\delta(A_0)$ noqattı alıp, $A_0$ hám $A$ noqatları arqalı tuwrı sızıq ótkizemiz. Ondaǵı eki baǵıttan birine óń baǵıt (26-sızılmada kórsetilgen), ekinshisini bolsa teris baǵıt dep qabıl qılamız. Bul baǵıtlanǵan tuwrı sızıqtı $l$ menen belgileymiz. $A_0$ hám $A$ noqatlar arasındaǵı aralıq

$$\rho=\rho(A_0,A)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

bolıp, bul aralıq $\overrightarrow{A_0A}$ vektorınıń baǵıtı $l$ nıń baǵıtı menen birdey bolsa, óń belgi menen keri jaǵdayda teris belgi menen alınadı.




26-sızılma

Eger $l$ nıń óń baǵıtı menen $OX$ hám $OY$ koordinata kósherleriniń óń baǵıtıları arasındaǵı múyeshti sáykes túrde $\alpha$ hám $\beta$ delinse, (26-sızılma) onda

$$\frac{x-x_0}{\rho}=\cos\alpha,\ \frac{y-y_0}{\rho}=\cos\beta$$

kelip shıǵadı.

**1-anıqlama.** Eger $\lim\limits_{A\to A_0}\frac{f(A)-f(A_0)}{\rho}$ limit bar bolsa, onda bul limit $f(x,y)$ funkciyanıń $A_0=(x_0,y_0)$ noqattaǵı $l$ baǵıt boyınsha tuwındı delinedi. Onı $\frac{\partial f(A_0)}{\partial l}$ yamasa $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}$ arqalı belgilenedi.

Demek, $\frac{\partial f(A_0)}{\partial l}=\lim\limits_{A\to A_0}\frac{f(A)-f(A_0)}{\rho}$.

**1-teorema.** Eger $f(x,y)$ funkciya $A_0=(x_0,y_0)$ noqatta differenciallanıwshı bolsa, onda funkciya usı noqatta hár qanday baǵıt boyınsha tuwındıǵa iye hám

$$\frac{\partial f(A_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cos\beta \qquad (5)$$

boladı.

◀ Meyli $f(x,y)$ funkciya $A_0=(x_0,y_0)$ noqatta differciallanıwshı bolsın. Onda $f(A)-f(A_0)=f(x,y)-f(x_0,y_0)$ ósimi ushın

$$f(A)-f(A_0)=\frac{\partial f(A_0)}{\partial x}\cdot(x-x_0)+\frac{\partial f(A_0)}{\partial y}\cdot(y-y_0)+0(\rho)$$

boladı, bunda $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

Keyingi teńliktiń hár eki tárepinen $\rho$ ǵa bólemiz

$$\frac{f(A)-f(A_0)}{\rho}=\frac{\partial f(A_0)}{\partial x}\cdot\frac{x-x_0}{\rho}+\frac{\partial f(A_0)}{\partial y}\cdot\frac{y-y_0}{\rho}+\frac{0(\rho)}{\rho}.$$

Bizge belgili $\frac{x-x_0}{\rho}=\cos\alpha$, $\frac{y-y_0}{\rho}=\cos\beta$ esapqa alıp, $\rho\to 0$ да limitke ótip,

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(A)-f(A_0)}{\rho}=\frac{\partial f(A_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(A_0)}{\partial y}\cos\beta.$$

Demek, $\frac{\partial f(A_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cos\beta$.▶

**2-mısal.** $f(x,y)=x^2+y^2$ funkciyanıń $(1,1)$ noqatta $\vec{r}=\vec{i}+2\vec{j}$ vektor bağıt boyınsha tuwındısın tabıń.

◀ $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial f(1,1)}{\partial x}=2\ ,$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial f(1,1)}{\partial y}=2\ ,$$

boladı. (5) formuladan paydalanamız

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial l}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}\ .$$ ▶

Meyli $f(x,y)$ funkciya ashıq $E\subset R^2$ kóplikte differenciallanıwshı bolsın. Bul funkciya $E$ kópliktıń hár bir $(x,y)\in E$ noqattında

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

dara tuwındılarğa iye boladı. Koordinataları sol dara tuwındılardan ibarat bolğan vektordı dúzemiz

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cdot\vec{j} \tag{6}$$

bunda, $\vec{i}$ hám $\vec{j}$ koordinata kósherleri boyınsha bağıtlanğan birlik vektorlar. (6) vektor $f(x,y)$ funkciyanıń gradienti delinedi hám *grad* $f$ arqalı belgilenedi

$$grad\ f=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cdot\vec{j}\ .$$

Demek, *grad* $f$ $E$ kópliktıń hár bir $(x,y)$ noqatına bir vektor sáykes qoyıwshı qağıyda, basqasha aytqanda eki ózgeriwshili vektor funkciya boladı.

$f(x,y)$ funkciyanıń $\vec{e}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ vektor bağıtı boyınsha $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial l}$ tuwındısın onıń gradienti arqalı ańlatıw mumkin.Haqıyqatanda $grad\ f$ hám $\vec{e}$ vektorlarınıń skalyar kóbeymesi

$$\vec{e}\,grad\ f=\cos\alpha\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \tag{7}$$

bolıp, ol (5) formuladan $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial l}$ ǵa teń boladı

$$\vec{e}\,grad\ f=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}.$$

$\vec{e}$ hám $grad\ f$ vektorlarınıń skalyar kóbeymesi usı vektor uzınlıqları kóbeymesin olar arasındaǵı múyesh kosinusǵa kóbeymesine teń boladı

$$\vec{e}\,grad\ f=|grad\ f|\cdot\left|\vec{e}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{e},grad\ f}\right) \tag{8}$$

Bunnan $\left|\vec{e}\right|=1$. (7) hám (8) qatnaslardan

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial l}=|grad\ f(x,y)|\cdot\cos\left(\vec{e},grad\ f(x,y)\right)$$

kelip shıǵadı. Keyingi teńlikten, $\vec{e}$ hám $grad\ f(x,y)$ vektorlar parallel bolǵanda $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial l}$ nıń mánisi eń úlken hám ol

$$|grad\ f(x,y)|=\sqrt{f_x^{'2}(x,y)+f_y^{'2}(x,y)}$$

teń boladı. Sonday etip, $f(x,y)$ funkciyanıń gradienti $grad\ f$ funkciyanıń $(x,y)$ noqattaǵı eń tez ósetuǵın tárepke baǵıtlanǵan bolıp, onıń uzınlıǵı usı baǵıt boyınsha ósiw tezligine teń eken.

**3-mısal.** $f(x,y)=x^2+2y^2$ funkciyanıń $(1,1)$ noqatta eń tez ósetuǵın baǵıtı anıqlansın hám usı baǵıt boyınsha ósiw tezligin tabıń.

◀ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial\left(x^2+2y^2\right)}{\partial x}=2x, \frac{\partial f(1,1)}{\partial x}=2; \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\left(x^2+2y^2\right)}{\partial y}=4y, \frac{\partial f(1,1)}{\partial y}=4;$

bolıp, $grad\ f(1,1)=2\vec{i}+4\vec{j}$ , $|grad\ f(1,1)|=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$ boladı.▶

## 11.3. Kóp ózgeriwshili funkciyanıń differencialı

Meyli $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ funkciya $E\subset R^m$ да berilgen bolıp, $x^0=\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0\right)\in E$ noqatta differenciallanıwshı bolsın. Onda anıqlamaǵa kóre funkciyanıń $x^0$ noqattaǵı tolıq ósimi

$$\Delta f\left(x^0\right)=\frac{\partial f\left(x^0\right)}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f\left(x^0\right)}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots+\frac{\partial f\left(x^0\right)}{\partial x_m}\Delta x_m+o(\rho) \qquad (1)$$

boladı. Bul qatnastan $\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\cdots+\Delta x_m^2}$ bolıp, $\Delta x_1\to 0,$ $\Delta x_2\to 0$, $\ldots,\Delta x_m\to 0$ da $\rho\to 0$.

**1-anıqlama**. $f(x)$ funkciyanıń $\Delta f\left(x^0\right)$ ósimidegi

$$\frac{\partial f\left(x^0\right)}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f\left(x^0\right)}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots+\frac{\partial f\left(x^0\right)}{\partial x_m}\Delta x_m$$

ańlatpa $f(x)$ funkciyanıń $x^0$ noqattaǵı differencialı delinedi hám

$df\left(x^0\right)$ yamasa $df\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0\right)$ arqalı belgilenedi

$$df\left(x^0\right)=\frac{\partial f\left(x^0\right)}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f\left(x^0\right)}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots+\frac{\partial f\left(x^0\right)}{\partial x_m}\Delta x_m.$$

Demek, $f(x)$ funkciyanıń $x^0$ noqattaǵı differencialı $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$ baylanıslı hám olardıń sızıqlı funkciyası boladı.

Eger $\Delta x_1=dx_1$, $\Delta x_2=dx_2$, $\ldots$, $\Delta x_m=dx_m$ bolsa, onda $f(x)$ funkciyanıń $x^0$ noqattaǵı differencialı

$$df\left(x^0\right)=\frac{\partial f\left(x^0\right)}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f\left(x^0\right)}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f\left(x^0\right)}{\partial x_m}dx_m \qquad (2)$$

kóriniske keledi. Demek, $\Delta f\left(x^0\right)=df\left(x^0\right)+0(\rho)$. Eger $\rho\to 0$ da $\Delta f\left(x^0\right)\approx df\left(x^0\right)$ kelip shıǵadı.

*Quramalı funkciyanıń differencialı. Differencial formanıń invariantlıǵı.*

Meyli

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varphi_1(t)=\varphi_1(t_1,t_2,\ldots,t_k),\\
x_2 &= \varphi_2(t)=\varphi_1(t_1,t_2,\ldots,t_k),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_m &= \varphi_m(t)=\varphi_1(t_1,t_2,\ldots,t_k)
\end{aligned}$$

funkciyalarınıń hár biri $M\subset R^k$ kóplikte berilgen bolıp,

$$E=\{(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in R^m : x_1=\varphi_1(t)=\varphi_1(t_1,t_2,\ldots,t_k),$$
$$x_2=\varphi_2(t)=\varphi_1(t_1,t_2,\ldots,t_k),\ldots,x_m=\varphi_m(t)=\varphi_1(t_1,t_2,\ldots,t_k)\}$$

kóplikte bolsa $f(x_1,x_2,...,x_m)$ funkciya anıqlanǵan bolsın. Bular járdeminde

$$f(x(t))=f(x_1(t),x_2(t),...,x_m(t))=F(t_1,t_2,...,t_k)$$

quramalı funkciya payda qılınǵan bolsın.

Meyli $x_i=\varphi_i(t_1,\ldots,t_k)$ funkciyalar $(i=1,2,\ldots m)$ $t^0=\left(t_1^0,\ldots,t_k^0\right)$ noqatta differenciallanıwshı bolıp, $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ funkciya sáykes $x^0=\left(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_m^0\right)$ noqatta $\left(x_1^0=\varphi_1\left(t^0\right),x_2^0=\varphi_2\left(t^0\right),\ldots,x_m^0=\varphi_m\left(t^0\right)\right)$ differenciallanıwshı bolsa, quramalı funkciya $t^0=\left(t_1^0,\ldots,t_k^0\right)$ noqatta differenciallanıwshı boladı. Bunda $f(x(t))$ funkciya $t_1,t_2,\ldots,t_k$ ózgeriwshilerge baylanıslı eken, onda

$$df=\frac{\partial f}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial f}{\partial t_2}dt_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial t_m}dt_m \tag{3}$$

boladı. Demek, quramalı funkciyanıń differencialı

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_m}dx_m \tag{4}$$

boladı.

Biz joqarıda $f(x)$ hám $f(x(t))$ quramalı funkciyanıń differencialı ushın (2) hám (4) ańlatpalardı taptıq. Bul ańlatpalardı salıstırıp olardıń forması birdey, yaǵnıy (2) hám (4) formulalarda funkciyanıń differencialı dara tuwındılarǵa sáykes differenciallarǵa kóbeymelerinen dúzilgen qosındıǵa teń ekenligin kóremiz. Bul qáseyt differencial formanıń *invariantlıǵı* delinedi.

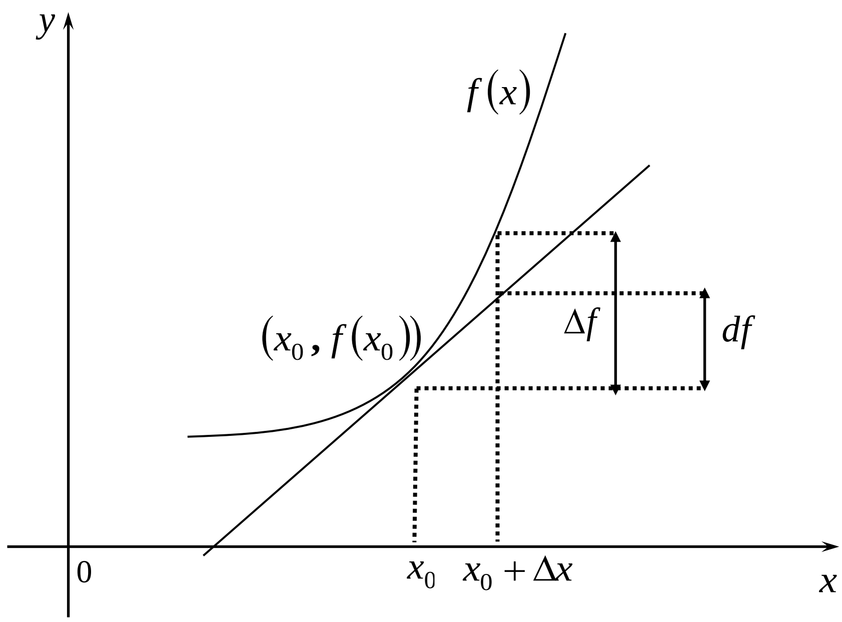
Meyli $u=u(x_1,x_2,...,x_m)$, $v=v(x_1,x_2,...,x_m)$ funkciyaları $E\subset R^m$ kóplikte berilgen bolıp, $x^\circ=(x_1^\circ,x_2^\circ,...,x_m^\circ)\in E$ noqatta differenciallanıwshı bolsın. Onda

1) $d(u+v)=du+dv,$

2) $d(u\cdot v)=vdu+udv,$

3) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2},\ (v\neq 0)$ boladı.

Meyli $u=f(x)$ funkciyanıń differencialı usı iymek sızıqqa $(x_\circ, f(x))$ noqatta ótkizilgen urınbanıń ordinatasınıń ósimin ańlatadı (27-sızılma).




27-sızılma

Eki ózgeriwshili $u=f(x,y)$ $\left((x,y)\in R^2, u\in R\right)$ funkciyaǵa iye bolıp, onıń $(x_\circ,y_\circ)$ noqattaǵı differencial

$$du=df(x_\circ,y_\circ)=\frac{\partial f(x_\circ,y_\circ)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x_\circ,y_\circ)}{\partial y}dy \tag{5}$$

boladı, bunda $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$. $\Delta x$ hám $\Delta y$ lar jeterli kishi bolǵanда $\Delta f(x_\circ,y_\circ)\approx df(x_\circ,y_\circ)$ yaǵnıy

$$f(x_\circ+\Delta x, y_\circ+\Delta y)\approx f(x_\circ,y_\circ)+\frac{\partial f(x_\circ,y_\circ)}{\partial x_1}\Delta x+\frac{\partial f(x_\circ,y_\circ)}{\partial y}\Delta y$$

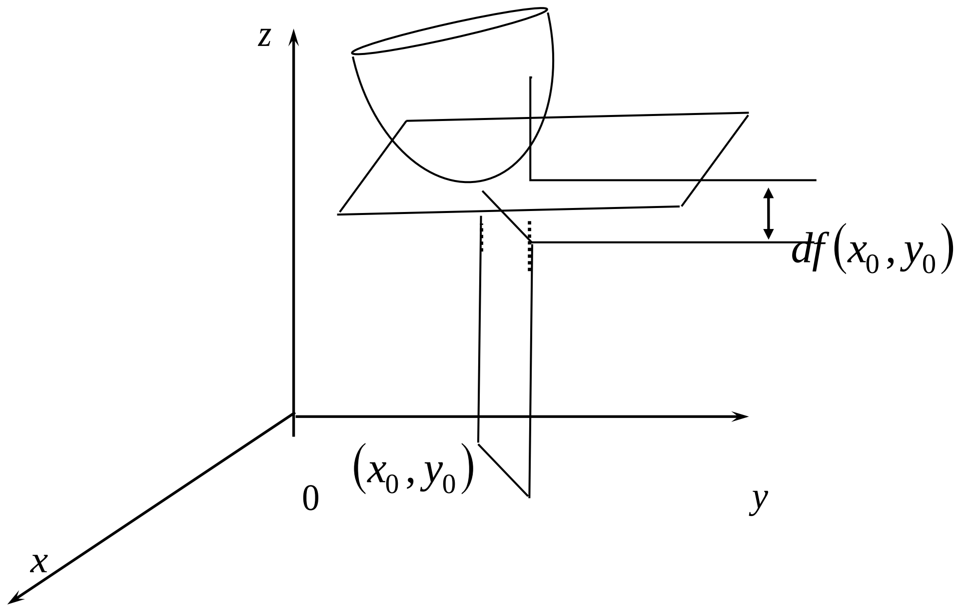
juwıq formula payda boladı.

**1-mısal.** $u = x^y$ funkciyanıń differencialı tabıń.

◀ $\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x.$ Onda (5) formulaǵa kóre $du = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$ boladı.▶

Endi $z = f(x,y)$ funkciya differencialınıń geometriyalıq mánisin keltiremiz.

$z = f(x,y)$ funkciyanıń $(x_\circ, y_\circ)$ noqattaǵı differencialı $df(x_\circ, y_\circ)$ bul funkciya grafigine $(x_\circ, y_\circ f(x_\circ, y_\circ))$ noqattındaǵı urınbanıń tegisliktegi aplikatasınıń ósimin ańlatadı eken (28-sızılma)




28-sızılma

### 11.4. Kóp ózgeriwshili funkciyanıń joqarı tártipli tuwındı hám differencialları. Orta mánis haqqında teorema

*Joqarı tártipli dara tuwındılar.* Meyli $f(x) = f(x_1, x_2, ...., x_m)$ funkciya ashıq $E \subset R^m$ kópliktıń hár bir $x = (x_1, x_2, ...., x_m) \in E$ noqattında $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = f'_{x_i}, (i = 1, 2, ...., m)$ dara tuwındılarǵa iye bolsın. Bul dara tuwındılar $x_1, x_2, ....., x_m$ ózgeriwshilerdıń funkciyası bolıp, olar da dara tuwındılarǵa iye bolıwı mumkin:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right)=\left(f'_{x_i}(x)\right)'_{x_k},\ (i,k=1,2,....,m).$$

Bul dara tuwındılar berilgen $f(x)$ funkciyanıń ekinshi tártipli dara tuwındıları delinedi hám

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_i} \text{ yamasa } f''_{x_i x_k}(x),(i,k=1,2,....,m)$$

arqalı belgilenedi $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_i}=f''_{x_i x_k}(x)=\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right).$

Eger $i\neq k$ bolsa, onda $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_i}$ ekinshi tártipli dara tuwındı aralas tuwındı delinedi. Eger $i=k$ bolsa, ekinshi tártipli dara tuwındılar $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_i}=f''_{x_i x_k}(x)$ tómendegishe $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2}=f''_{x_i^2}(x)$ jazıladı.

$f(x)$ funkciyanıń úshinshi, tórtinshi hám t.b. tártiptegi dara tuwındıları joqarıdaǵıǵa uqsas anıqlanadı. Ulıwma $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_m)$ funkciyanıń $x_i,x_{i_2},.....,x_{i_{n-1}},x_{i_n}$ ózgeriwshileri boyınsha $n$-tártipli dara tuwındısı berilgen funkciyanıń $(n-1)$ – tártipli dara tuwındısı

$$\frac{\partial^{n-1} f(x)}{\partial x_{i_{n-1}}\partial x_{i_{n-2}}....\partial x_{i_1}}\ (i_1+i_2+....+i_{n-1}=n-1)$$

nıń $x_{i_n}$ ózgeriwshi boyınsha dara tuwındısı sıpatında anıqlanadı

$$\frac{\partial^n f(x)}{\partial x_{i_n}\partial x_{i_{n-1}}....\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}}=\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^{n-1} f(x)}{\partial x_{i_{n-1}}....\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}}\right).$$

Eger $i_1, i_2, ...., i_n$ ler bir-birine teń bolmaǵanda

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}....\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}}$$

aralas tuwındı delinedi. Eger $i_1=i_2=...=i_n=k$ bolsa, onda $n-$ tártipli dara tuwındılar tómendegishe $\dfrac{\partial^n f(x)}{\partial x_k^n}$ jazıladı.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \ (i \neq k)$$

aralas tuwındılar funkciyanıń hár qıylı ózgeriwshilerı boyınsha differenciallaw tártibi menen parq qıladı

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$$

$f(x_1, x_2, ...., x_m)$ funkciyanıń dáslep $x_i$ ózgeriwshisi boyınsha, soń $x_k$ ózgeriwshisi boyınsha dara tuwındısı esaplanǵan bolsa, al

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}$$

bolsa dáslep $x_k$ ózgeriwshisi boyınsha, soń $x_i$ ózgeriwshisi boyınsha dara tuwındısı esaplanadı. Olar bir-birine teń bolıwı mumkin, teń bolmawıda mumkin.

**1-teorema**. Meyli $f(x_1, x_2, ...., x_m)$ funkciya $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) \in E \subset R^m$ noqatta $n$ márte differenciallanıwshı bolsın. Onda $x^0$ noqatta $f(x_1, x_2, ...., x_m)$ funkciyanıń qálegen $n$-tártipli aralas tuwındılarınıń mánisi $x_1, x_2, ...., x_m$ ózgeriwshiler boyınsha qanday tártipde differenciallawǵa baylanıslı bolmaydı.

*Joqarı tártipli differencialar*. Meyli $f(x) = f(x_1, x_2, ...., x_m)$ funkciya ashıq $E \subset R^m$ kóplikte berilgen, $x \in E$ noqatta eki márte differenciallanıwshı bolsın.

**1-anıqlama**. $f(x)$ funkciya differencialı $d\,f(x)$ nıń differencialı berilgen funkciyanıń $x$ noqattaǵı ekinshi tártipli differencialı delinedi hám $d^2 f(x)$ arqalı belgilenedi $d^2 f(x) = d(d\ f(x))$.

Ekinshi tártipli differencialı tómendegishe boladı

$$d^2 f(x) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} d\,x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} d\,x_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m} d\,x_m \right)^2 f .$$

$f(x)$ funkciyanıń $x$ noqattaǵı úshinshi, tórtinshi hám t.b. tártiptegi differencialları joqarıdaǵıday anıqlanadı.

Eger $f(x)$ funkciya $x$ noqatta $n$ márte differenciallanıwshı bolsa, onda

$$d^n f(x) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} d x_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^n f \qquad (2)$$

boladı.

*Quramalı funkciyanıń joqarı tártipli differenciallları.*

Meyli $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ funkciyada $x_1, x_2, ..., x_m$ ózgeriwshilerdıń hár biri $t_1, t_2, ..., t_k$ ózgeriwshilerdıń funkciyaları bolsın $(x_i = \varphi_i(t_1, t_2, ..., t_k))$.

Qaralıp atırǵan $f(x)$ hám $x_i = \varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, ...., m)$ funkciyaler $n$ márte differenciallanıwshılıq shártlerin orınlanǵan deb, quramalı $f(x(t))$ funkciyanıń joqarı tártipli differenciallarын esaplaymız.

Differencial formanıń invariantlıǵı qáseytine muapıq, quramalı funkciyanıń differencialı

$$d f = \frac{\partial f}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} d x_2 + .... + \frac{\partial f}{\partial x_m} d x_m$$

boladı. Differenciallaw qaǵıydalarınan paydalanamız hám funkciyanıń ekinshi tártipli differencialı

$$d^2 f = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + .... + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 f + \\ + \frac{\partial f}{\partial x_1} d^2 x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} d^2 x_2 + .... + \frac{\partial f}{\partial x_m} d^2 x_m \ . \qquad (3)$$

Usı jol menen berilgen quramalı funkciyanıń keyinǵı tártiptegi differenciallları tabıladı.

**1-eskertiw**. (1) hám (3) formulalardı salıstırıp, ekinshi tártipli differenciallardı differencial formanıń invariantlıǵı qáseyti orınlı emesligin kóremiz.

**2-eskertiw**. Eger $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ funkciya argumentlerı $x_1, x_2, ..., x_m$ hár biri $t_1, t_2, ..., t_k$ ózgeriwshilerınıń sızıqlı funkciyası bolsa, onda $f(x)$ funkciyanıń ekinshi tártipli differencialı differenciallıq formanıń invariantlıq qáseytine iye boladı.

**Orta mánis haqqında teorema**.

Meyli $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_m)$ funkciya $E\subset R^m$ kóplikte berilgen bolsın. Bul $E$ kóplikte sonday $a=(a_1,a_2,...,a_m),\ b=(b_1,b_2,...,b_m)$ noqatların qaraymız, bul noqatlardı birlesturıwshı tuwrı sızıq kesim $E$ kóplikke tiyisli bolsın. Bul kesim

$$K=\{(x_1,x_2,...,x_m)\in R^m : x_1=a_1+t(b_1-a_1), x_2=a_2+t(b_2-a_2),...,x_m=a_m+t(b_m-a_m)$$
$$,\qquad (0\le t\le 1)\}$$

noqatlar kópligi menen ańlatıladı $K\subset E$.

**1-teorema.** Eger $f(x)$ funkciya $K$ kesimnıń $a$ hám $b$ noqatlarda úzliksiz bolıp, kesimnıń qalǵan barlıq noqatlarında differenciallanıwshı bolsa, onda $K$ kesimde sonday $c=(c_1,c_2,...,c_m)$ noqat tabılıp,

$$f(b)-f(a)=f'_{x_1}(c)(b_1-a_1)+f'_{x_2}(c)(b_2-a_2)+....+f'_{x_m}(c)(b_m-a_m)\quad(1)$$

boladı.

Bul (1) formula Lagranjdıń shekli ósimler formulası delinedi.

### Kóp ózgeriwshili funkciyanıń Тейлор formulası

Meyli $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_m)$ funkciya ashıq $E\subset R^m$ kóplikte berilgen bolıp, $U_\delta(x^0)\subset E$ bolsın, bunda $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ hám $\delta>0$. $\forall x\in U_\delta(x^0)$ hám $x^0$ noqatlardı birlestiriwshi tuwrı sızıq kesimi

$$A=\{x_1^0+t(x_1-x_1^0),\ x_2^0+t(x_2-x_2^0),...,x_m^0+t(x_m-x_m^0);\ 0\le t\le 1\}$$

usı $U_\delta(x^0)$ ǵa tiyisli boladı. $f(x_1,x_2,....,x_m)$ funkciya $U_\delta(x^0)$ kóplikte $(n+1)$ márte differenciallanıwshı bolsın. Bul funkciyanı $A$ kóplikte qarasaq, $[0,1]$ segmentte anıqlanǵan mına

$$F(t)=f\left(x_1^0+t(x_1-x_1^0),x_2^0+t(x_2-x_2^0),...,x_m^0+t(x_m-x_m^0)\right)$$

Funkciyaǵa iye bolamız. $F(t)$ funkciya $[0,1]$ da tuwındıǵa iye bolıp,

$$F'(t)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot(x_1-x_1^0)+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot(x_2-x_2^0)+...+\frac{\partial f}{\partial x_m}\cdot(x_m-x_m^0)=$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot(x_1-x_1^0)+\frac{\partial}{\partial x_2}\cdot(x_2-x_2^0)+...+\frac{\partial}{\partial x_m}(x_m-x_m^0)\right)f$$

boladı, bunda $f(x)$ funkciyanıń barlıq dara tuwındıları

$$\left(x_1^0+t\left(x_1-x_1^0\right),\ x_2^0+t\left(x_2-x_2^0\right),...,x_m^0+t\left(x_m-x_m^0\right)\right) \qquad (4)$$

noqatta esaplanadı. $F(t)$ funkciya $k$-tártipli $(k=1,2,...,n+1)$ tuwındılarǵa iye hám ol

$$F^{(k)}(t)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot\left(x_1-x_1^0\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\cdot\left(x_2-x_2^\circ\right)+...+\frac{\partial}{\partial x_m}\left(x_m-x_m^0\right)\right)^k f$$

ǵa teń, barlıq dara tuwındılar (4) noqatta esaplanadı.

Solay etip, $F(t)$ funkciya $F'(t)$, $F''(t),...,F^{(n+1)}(t)$ tuwındılarǵa iye boladı. Teylor formulasına kóre $t_0$ noqatta $(0\le t_0\le 1)$

$$\begin{aligned}F(t)=F(t_0)+F'(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2!}F''(t_0)(t-t_0)^2+...+\\+\frac{1}{n!}F^{(n)}(t_0)\cdot(t-t_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(c)\cdot(t-t_0)^{n+1}\end{aligned} \qquad (5)$$

boladı, bunda $c=t_0+\theta(t-t_0)$, $\quad 0<\theta<1$. Bul teńlikte $t_0=0$, $t=1$ bolsa, onda

$$F(1)=F(0)+\frac{1}{1!}F'(0)+\frac{1}{2!}F''(0)+...+\frac{1}{n!}F^{(n)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta)$$

kelip shıǵadı. Bunnan

$$\begin{aligned}F(0)=f\left(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0\right),\\ F(1)=f\left(x_1,x_2,...,x_m\right),\end{aligned} \qquad (6)$$

$$F^{(k)}(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot\left(x_1-x_1^0\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\cdot\left(x_2-x_2^0\right)+...+\frac{\partial}{\partial x_m}\cdot\left(x_m-x_m^0\right)\right)f$$

bolıwın esapqa alsaq, onda (5) hám (6) teńliklerden

$$\begin{aligned}&f(x_1,x_2,...,x_m)=f\left(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0\right)+\\&+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot\left(x_1-x_1^0\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\cdot\left(x_2-x_2^0\right)+...+\frac{\partial}{\partial x_m}\left(x_m-x_m^0\right)\right)^k f\left(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0\right)+\\&+\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1-x_1^0\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_2-x_2^0\right)+...+\frac{\partial}{\partial x_m}\left(x_m-x_m^0\right)\right)^{n+1}\times\\&\times f\left(x_1^0+\theta\left(x_1-x_1^0\right),x_2^0+\theta\left(x_2-x_2^0\right),...,x_m^0+\theta\left(x_m-x_m^0\right)\right)\end{aligned}$$

$(0<\theta<1)$ teńlikke kelemiz. Bul kóp ózgeriwshili $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ funkciyanıń Lagranj kórinistegi qaldıq Teylor formulası delinedi.

## 11.5. Kóp ózgeriwshili funkciyanıń ekstremum mánisleri. Ekstremumnıń zárúrli hám jetkilikli shártleri

**Funkciyanıń ekstremumı. Zárúrli shárt.** Meyli $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ funkciyanıń $E \subset R^m$ kóplikte berilgen bolıp, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) \in E$ bolsın.

**1-anıqlama.** Eger sonday $\delta > 0$ san tabılıp, $U_\delta(x^0) \subset E$ bolıp, $\forall x \in U_\delta(x^0)$ da $f(x) \le f(x^0)$ bolsa, onda $f(x)$ funkciyanıń $x^0$ noqatta lokal maksimumǵa, $f(x) \ge f(x^0)$ bolsa, onda $f(x)$ funkciyanıń $x^0$ noqatta lokal minimumǵa erisedi delinedi.

**2-anıqlama.** Eger sonday $\delta > 0$ san tabılıp, $U_\delta(x^0) \subset E$ bolıp, $\forall x \in U_\delta(x^0) \setminus \{x^0\}$ da $f(x) < f(x^0)$ bolsa, onda $f(x)$ funkciyanıń $x^0$ noqatta qatań lokal maksimumǵa, $f(x) > f(x^0)$ bolsa, onda $f(x)$ funkciyanıń $x^0$ noqatta lokal qatań minimumǵa erisedi delinedi.

Funkciyanıń lokal maksimum, lokal minimum ulıwma at penen lokal ekstremum delinedi. Bunda $x^0$ noqat $f(x)$ funkciyanıń lokal ekstremum noqatı, $f(x^0)$ ǵa bolsa funkciyanıń lokal ekstremum mánisi delinedi.

Funkciyanıń maksimum (minimum) mánisi tómendegishe belgilenedi:

$$f(x^0) = \max_{x \in U_\delta(x^0)} f(x) \qquad \left( f(x^0) = \min_{x \in U_\delta(x^0)} f(x) \right).$$

Meyli $\Delta f(x^0) = f(x) - f(x^0)$ ayırma $f(x)$ funkciyanıń $x^0$ noqattaǵı tolıq ósimi delinedi. $f(x)$ funkciyanıń $x^0$ noqatta lokal maksimumǵa erisse, onda $\forall x \in U_\delta(x^0)$ da $\Delta f(x^0) \le 0$ boladı hám kerisinshe. Eger $f(x)$ funkciyanıń $x^0$ noqatta lokal minimumǵa erisse, onda $\forall x \in U_\delta(x^0)$ da $\Delta f(x^0) \ge 0$ boladı hám kerisinshe.

**1-teorema.** Eger $f(x)=f(x_1,x_2,....,x_m)$ funkciyanıń $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ noqatta lokal ekstremumǵa erisse hám usı noqatta barlıq dara tuwındılarǵa iye bolsa, onda

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}=0,(i=1,2,...,m)$$

boladı.

**1-eskertiw**. Eger $f(x)$ funkciyanıń bazı bir $x^0$ noqatta lokal ekstremumǵa erisse hám usı noqatta differenciallanıwshı bolsa, onda

$$d\,f(x^0)=0$$

boladı.

**2-eskertiw**. $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_m)$ funkciyanıń bazı bir $x^0$ noqatta barlıq dara tuwındılarǵa iye hám

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}=0,(\,i=1,2,...,m\,)$$

bolıwınan berilgen funkciyanıń usı noqatta lokal ekstremumǵa erisiwi hár dayım kelip shıǵabermeydi.

Demek, 1-teorema funkciyanıń lokal ekstremumǵa erisiwiniń zárúrli shártin ańlatadı.

$f(x)$ funkciyanıń dara tuwındıların nolge aylandıratuǵın noqatlar onıń stancionar noqatları delinedi.

*Funkciyanıń ekstremumǵa erisiwiniń jetkilikli shártı.*

Meyli $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_m)$ funkciyanıń $x^0\in R^m$ noqatınıń bazı bir $U_\delta(x^0)$ dógereginde berilgen, usı dógerekte barlıq ekinshi tártipli úzliksiz dara tuwındılarǵa iye hám

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,2,...,m)$$

bolsın. Bul funkciyanıńnıń Teylor formulası $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}=0$ shártti esapqa alǵan, tómendegishe

$$f(x)=f(x^0)+\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_k}\Delta x_i\,\Delta x_k \tag{1}$$

boladı, bunda ekinshi tártipli dara tuwındılar

$$\left(x_1^0+\theta\cdot\Delta x_1,\ x_2^0+\theta\cdot\Delta x_2,\dots,\ x_m^0+\theta\cdot\Delta x_m\right)$$

$(0<\theta<1)$ noqatta esaplanǵan hám

$$\Delta x_1=x_1-x_1^0,\ \Delta x_2=x_2-x_2^0,\dots,\Delta x_m=x_m-x_m^0.$$

Berilgen $f(x)$ funkciyanıń ekinshi tártipli dara tuwındılarınıń stancionar noqattaǵı $x^0$ mánislerin

$$a_{ik}=\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i\,\partial x_k}\qquad (i,k=1,2,\dots,m)$$

menen belgileymiz. Barlıq ekinshi tártipli dara tuwındılar

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}$$

larnıń $x^0=\left(x_1^0,x_2^0,\dots,x_m^0\right)$ noqatta úzliksizliginen $a_{ik}=a_{ki}$ hám

$$\frac{\partial^2 f\left(x_1^0+\theta\Delta x_1,\ x_2^0+\theta\cdot\Delta x_2,\dots,x_m^0+\theta\cdot\Delta x_m\right)}{\partial x_i\,\partial x_k}=\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i\,\partial x_k}+\alpha_{ik}=a_{ik}+\alpha_{ik}$$

kelip shıǵadı, bunda

$$\Delta x_i\to 0\qquad (i=1,2,\dots,m)\ \partial a\quad \alpha_{ik}\to 0.$$

Nátiyjede (1) teńlik

$$\Delta f(x^0)=f(x)-f(x^0)=\frac{1}{2}\left[\sum_{i,k=1}^{m}a_{ik}\,\Delta x_i\,\Delta x_k+\sum_{i,k}^{m}\alpha_{ik}\,\Delta x_i\,\Delta x_k\right]$$

kóriniske keledi. Eger $\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\dots+\Delta x_m^2}$, $\Delta x_i=\rho\cdot\zeta_i$, $(i=1,2,\dots,m)$ bolsa, onda $\Delta x_i\to 0$ $(i=1,2,\dots,m)$ yaǵniy $\rho\to 0$ da

$$\sum_{i,k=1}^{m}\alpha_{ik}\Delta x_k\,\Delta x_i=\rho^2\sum_{i,k}^{m}\alpha_{ik}\zeta_i\,\zeta_k=\rho^2\cdot\alpha(\rho)$$

Esapqa alsaq, onda

$$\Delta f(x^0)=\frac{\rho^2}{2}\left[\sum_{i,k=1}^{m}a_{i,k}\zeta_i\,\zeta_k+\alpha(\rho)\right] \tag{2}$$

boladı. (2) teńlikten $\Delta f\left(x^0\right)$ nıń belgisi koefficentleri $a_{ik}=\dfrac{\partial^2 f\left(x^0\right)}{\partial x_i x_k}$, $(i,k=1,2,\dots,m)$

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\zeta_i\,\zeta_k \tag{3}$$

kvadratlıq formaǵa baylanıslı boladı.

**2-teorema**. Eger (3) kvadratlıq forma oń anıqlanǵan bolsa, onda $f(x)$ funkciyanıń $x^0$ noqatta lokal minimumǵa, teris anıqlanǵan bolsa, onda lokal maksimumǵa erisedi.

Eger (3) kvadratlıq forma anıq emes bolsa, bolsa $f(x)$ funkciyanıń $x^0$ noqatta lokal ekstremumǵa erispeydi.

Meyli $f(x,y)$ funkciyanıń $(x_0,y_0)\in R^2$ noqatnıń bazı bir $U_\delta((x_0,y_0))$ dógereginde $(\delta>0)$ berilgen bolıp, mına shártler orınlı bolsın:

1) $f(x,y)$ funkciyanıń $U_\delta((x_0,y_0))$ da úzliksiz hám úzliksiz $f_x^{'}, f_y^{'}, f_{x^2}^{''}$, $f_{xy}^{''}$, $f_{y^2}^{''}$ dara tuwındılarǵa iye,

2) $(x_0,y_0)$ stancionar noqat, $f_x^{'}(x_0,y_0)=0$, $f_y^{'}(x_0,y_0)=0$.

Bunnan

$$\begin{aligned}&\Delta f(x_0,y_0)=f(x,y)-f(x_0,y_0)=\\&=\frac{1}{2}\left(a_{11}\Delta x^2+2a_{12}\Delta x\Delta y+a_{22}\Delta y^2+\alpha_{11}\Delta x^2+2\alpha_{12}\Delta x\Delta y+\alpha_{22}\Delta y^2\right)\end{aligned} \tag{*}$$

kelip shıǵadı, bunda

$$a_{11}=f_{x^2}^{''}(x_0,y_0),\ a_{12}=f_{xy}^{''}(x_0,y_0)=f_{yx}^{''}(x_0,y_0),\ a_{22}=f_{y2}^{''}(x_0,y_0)$$

bolıp,

$$\Delta x\to 0\ ,\ \Delta y\to 0\ \partial a\ \alpha_{11}\to 0\ ,\ \alpha_{12}\to 0\ ,\alpha_{22}\to 0$$

boladı.

**3-teorema**. Eger

$$a_{11}\Delta x^2+2a_{12}\,\Delta x\,\Delta y+a_{22}\Delta y^2 \tag{4}$$

kvadratlıq forma oń anıqlanǵan, yaǵniy

$$a_{11}>0\ ,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$$

bolsa, onda $f(x,y)$ funkciyanıń $(x_0, y_0)$ noqatta lokal minimumǵa erisedi, eger (4) kvadratlıq forma teris anıqlanǵan, yaǵniy

$$a_{11}<0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$$

bolsa, onda $f(x,y)$ funkciya $(x_0, y_0)$ noqatta lokal maksimumǵa erisedi.

**3-eskertiw.** Eger $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$ bolsa, onda $f(x,y)$ funkciyanıń $(x_0, y_0)$ noqatta ekstremumǵa iye bolmaydı.

**4-eskertiw.** Eger $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$ bolsa, onda $f(x,y)$ funkciyanıń $(x_0, y_0)$ noqatta ekstremumǵa erisiwi múmkin, erispewide múmkin

**Mısal.** $f(x,y)=x^2+xy+y^2-2x-3y$ funkciyanı ekstremumǵa tekseriń.

◀Berilgen funkciyanıńnıń stancionar noqatların tabamız

$$f'_x(x,y)=2x+y-2,\qquad 2x+y-2=0,\quad x_0=\frac{1}{3}$$

$$f'_y(x,y)=x+2y-3,\qquad x+2y-3=0,\quad y_\circ=\frac{4}{3}.$$

Demek, $\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$ stancionar noqat. $f''_{x^2}(x,y)=2$ , $f''_{xy}(x,y)=1$ , $f''_{y^2}(x,y)=2$ .

Demek, $a_{11}=2, a_{12}=1,\ a_{22}=2$ , $a_{11}=2>0$ hám $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=3>0$ bolǵanlıǵı ushın berilgen funkciyanıń $\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$ noqatta lokal minimumǵa erisedi hám

$$\min f(x,y)=f\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)=-\frac{7}{3}$$

boladı.▶

# 12-§. SANLÍ QATAR

## 12.1. Sanlı qatarlar túsinigi, onıń jıynaqlılıǵı hám taralıwshılılıǵı. Jıynaqlı qatarlardıń qásiyetleri

Meyli

$$\{a_n\}:\ a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

haqıyqıy sanlar izbe-izligi berilgen bolsın. Olar járdeminde usı

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

ańlatpanı payda etemiz. (1) ańlatpa sanlı qatar, qısqasha qatar delinedi hám ol $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ kórinisinde belgilenedi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

Bunda $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ sanlar qatardıń aǵzaları, $a_n$ bolsa qatardıń ulıwma aǵza (yaki $n$-aǵzası) delinedi.

Tómendegi

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \qquad (n = 1,2,3,...)$$

qosındı (1) qatardıń $n$-dara qosındısı delinedi.

Demek, (1) qatar berilgende hár waqıtta bul qatardıń dara qosındılarınan ibarat usı $\{S_n\}$:

$$S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ...$$

izbe-izlikti payda etiw múmkin.

Máselen,

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$$

qatardıń dara qosındısı

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+...+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

bolıp, olardan dúzilgen $\{S_n\}$ izbe-izlik

$$\frac{1}{2}\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ \frac{3}{4}\ ,...,\frac{n}{n+1}\ \ ,...$$

boladı.

**1-anıqlama.** Eger $n\to\infty$ da $\{S_n\}$ izbe-izlik $S$ ke $(S\in R)$ jıynaqlı bolsa, onda (1) qatar jıynaqlı, al $S$ onıń qosındısı delinedi.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S\ ,\ S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ .$$

Eger $\{S_n\}$ izbe-izlik shekli limitke iye bolmasa (limiti iye bolmasa yamasa sheksizlik bolsa), onda (1) qatar taralıwshı delinedi.

**1-mısal.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$ qatar ushın

$S_n=1-\frac{1}{1+n}$ bolıp, $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$ boladı. Demek, berilgen qatar jıynaqlı hám onıń qosındısı 1 ge teń,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=1.$$

**2-mısal.** $\sum_{n=1}^{\infty}n=1+2+3+...+n+...$ qatar taralıwshı boladı, sebebi

$$S_n=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ushın

$$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty\ .$$

**3-mısal.** $\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{n+1}=1-1+1-1+...+(-1)^{n+1}+...$ qatar ushın

$$S_n = 1-1+1-1+...+(-1)^{n+1} = \begin{cases} 0, eger\ \ n - jup\ \ san \\ 1, eger\ \ n - taq\ \ san \end{cases}$$

bolıp ol $n \to \infty$ da limitke iye emes.

Demek, berilgen qatar taralıwshı boladı.

*Jıynaqlı qatarlardıń qásiyetleri.*

Meyli bazı bir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

qatar berilgen bolsın. Onda

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + ... \qquad (2)$$

qatar (bunda $m$ – tayınlanǵan natural san) (1) qatardıń qaldıǵı delinedi.

**1-qásiyet.** Eger (1) qatar jıynaqlı bolsa, onda (2) qatar hám jıynaqlı boladı hám kerisinshe; (2) qatardıń jıynaqlı bolıwınan (1) qatardıń jıynaqlılıǵı kelip shıǵadı.

**2-qásiyet.** Eger $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatar jıynaqlı bolıp, onıń qosındısı $S$ ga teń bolsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ qatar ham jıynaqlı hám onıń qosındısı $c \cdot S$ ge teń boladı, bunda $c \neq 0$ turaqlı san.

**3-qásiyet.** Eger $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatarlar jıynaqlı bolıp, olardıń qosındısı sáykes túrde $S_1$ hám $S_2$ ge teń bolsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ qatarı jıynaqlı hám onıń qosındısı $S_1 + S_2$ ge teń boladı.

**4-qásiyet.** Eger $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatar jıynaqlı bolsa, onda $n \to \infty$ da $a_n$ nolge umtıladı,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 .$$

◀ Meyli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatar jıynaqlı bolıp, onıń qosındısı $S$ qa teń bolsın. Anıqlamaǵa tiykarlanıp

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + ... + a_n) = S .$$

Bunnan $a_n = S_n - S_{n-1}$ boladı. Keyingi teńlikten

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0 . \blacktriangleright$$

**Eskertiw.** Qatardıń ulıwma aǵzası $a_n$ nıń $n \to \infty$ da nolge umtılıwnan onıń jıynaqlı bolıwı hár waqıtta kelip shıqpaydı. Máselen, usı

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} + ...$$

qatardıń ulıwma aǵzası $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ bolıp, ol $n \to \infty$ da nolge umtıladı. Biraq bul qatar taralıwshı, sebebi

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

İzbe-izlik $n \to \infty$ da $+\infty$ ge umtıladı:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty .$$

Joqarıda keltirilgen 4)- qásiyet qatar jıynaqlı bolıwınıń zárúrli shártin ańlatadı.

**5-qásiyet.** Meyli (1) qatar berilgen bolsın. Bul qatardıń aǵzaların tómendegi

$$(a_1 + a_2 + ... + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + ... + a_{n_2}) + ... \qquad (3)$$

qatardı payda etemiz, bunda

$$n_1 < n_2 < ...$$

bolıp, $\{n_k\}$ izbe-izlik natural sanlar izbe-izligi $\{n\}$ nıń dara izbe-izligi boladı.

Eger (1) qatar jıynaqlı bolıp, onıń qosındısı $S$ ge teń bolsa, onda (3) qatar hám jıynaqlı hám qosındısı $S$ boladı.

*Qatardıń jıynaqlılıǵı.*

**Teorema (Koshi teoreması).** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatar jıynaqlı bolıwı ushın $\forall \varepsilon > 0$ san alınǵanda hám sonday $n_0 \in N$ tabılsa, $\forall n > n_0$ hám $m = 1,2,3,...$ bolǵanda

$$|S_{n+m} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + .... + a_{n+m}| < \varepsilon \qquad (4)$$

teńsizliktiń orınlanıwı zárúrli hám jetkilikli.

**Eskertiw.** Eger $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatar ushın (4) shárt orınlı bolmasa, onda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatar taralıwshı boladı.

## 12.2. Oń aǵzalı qatarlar hám olardıń jıynaqlılıq belgileri

Meyli

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

qatar berilgen bolsın. Eger bul qatarda $a_n \geq 0 \quad (\forall n \in N)$ bolsa, onda (1) oń aǵzalı qatar delinedi. Oń aǵzalı qatarlarda, olardıń dara qosındılarınan ibarat $\{S_n\}$ izbe-izlik ósiwshi izbe-izlik boladı.

Haqıyqattan da,

$$S_{n+1} = a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n .$$

**1-teorema**. Oń aǵzalı $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatardıń jıynaqlı bolıwı ushın $\{S_n\}$ izbe-izliktiń joqarıdan shegaralanǵan bolıwı zárúrli hám jetkilikli.

◀ **Zárúrligi.** (1) qatar jıynaqlı bolsın. Onda $n \to \infty$ da $\{S_n\}$ izbe-izlik shekli limitke iye boladı. Jıynaqlı izbe-izliktiń qásiyetine muwapıq $\{S_n\}$ shegaralanǵan, tiykarınan joqarıdan shegaralanǵan boladı.

**Jetkilikligi.** $\{S_n\}$ izbe-izlik joqarıdan shegaralanǵan bolsın. Onda monoton izbe-izliktiń limiti haqqındaǵı teoremaǵa muwapıq $\{S_n\}$ izbe-izlik $n \to \infty$ da shekli limitke iye boladı. Demek, (1) qatar jıynaqlı boladı. ▶

**Eskertiw.** Eger $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oń aǵzalı qatarda, onıń dara qosındalarınan ibarat $\{S_n\}$ izbe-izlik joqarıdan shegaralanbaǵan bolsa, onda qatar taralıwshı boladı.

*Oń aǵzalı qatarlarda salıstırıw teoremaları.*

Meyli eki $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hám $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ oń aǵzalı qatarlar berilgen bolsın.

**2-teorema.** Meyli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hám $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatarlar ushın $\forall n \in N$ da

$$a_n \le b_n \tag{2}$$

teńsizlik orınlansın. Eger

1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatar jıynaqlı bolsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatar jıynaqlı boladı,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatar taralıwshı bolsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatar taralıwshı boladı.

**1-mısal.** $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$ qatardı jıynaqlılıqqa tekseriń.

◄ Bunnan, bul qatar aǵzaları ushın

$$0 < \sin\frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2^n} \qquad (n = 1,2,3,...)$$

teńsizlik orınlı boladı.

Nátiyjede berilgen qatardıń har bir aǵzası jıynaqlı $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ qatardıń (geometriyalıq qatardıń) sáykes aǵzasınan kishi boladı. 2-teoremaǵa muwapıq berilgen qatar jıynaqlı boladı. ►

**3-teorema.** Meyli oń aǵzalı $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hám $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatarlardıń ulıwma aǵzaları ushın

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \qquad (b_n > 0, \quad n = 1,2,...)$$

bolsın. Bunda:

1) $K < +\infty$ bolıp, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatar jıynaqlı bolsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatar hám jıynaqlı boladı.

2) $K > 0$ bolıp, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatar taralıwshı bolsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatar taralıwshı boladı.

**Saldar**. Oń aǵzalı $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hám $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatarlar ushın

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \quad , \qquad (0 < K < +\infty)$$

bolsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hám $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatarlar bir waqıtta jıynaqlı yamasa taralıwshı boladı.

**2-mısal.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ qatar jıynaqlılıqqa tekseriń.

◄ Berilgen qatar menen birge taralıwshılıǵı málim bolǵan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ garmonikalıń qatardı qaraymız. Bul qatarlardıń ulıwma aǵzaları ushın

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

boladı. Demek, berilgen qatar taralıwshı boladı. ►

**4-teorema.** Meyli oń aǵzalı $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hám $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatarlar ushın

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

bolsın $(a_n > 0, \quad b_n > 0, \quad n = 1,2,3,...)$

Bunda:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatar jıynaqlı bolsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatar jıynaqlı boladı,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatar taralıwshı bolsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatar taralıwshı boladı.

Joqarıda keltirilgen teorema hám mısallardan kórinip turǵanday, oń aǵzalı qatardıń jıynaqlılıǵı yamasa taralıwshılıǵın bilgen jaǵdayda, aǵzaları bul qatar aǵzaları menen belgili qatnasta bolǵan (salıstırǵan) ekinshi oń aǵzalı qatardıń jıynaqlılıǵı yamasa taralıwshılıǵın anıqlaw múmkin boladı.

**Oń aǵzalı qatarlardıń jıynaqlılıq belgileri.**

Oń aǵzalı qatarlarda bayan etilgen salıstırıw teoremalarınan paydalanıp, jıynaqlılıq belgilerin keltiremiz.

*1. Koshi belgisi.* Eger oń aǵzalı

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

qatarda barlıq $n \geq 1$ ushın

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \qquad (2)$$

bolsa, onda (1) qatar jıynaqlı boladı;

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \qquad (3)$$

bolsa, onda (1) qatar taralıwshı boladı.

Kóbinese Koshi belgisiniń tómendegi keltirilgen limit kórinisindegi tastıyıqlawdan paydalanıladı.

Meyli oń aǵzalı (1) qatarda

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

bar bolsın. Onda

1) $k < 1$ bolǵanda (1) qatar jıynaqlı boladı,

2) $k > 1$ bolǵanda (1) qatar taralıwshı boladı.

**1-mısal.** Qatardı $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$ jıynaqlılıqqa tekseriń.

◀ Bul qatardıń ulıwma aǵzası $a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$ bolıp, onıń ushın

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{2}{n})^n}$$

boladı. Bunnan,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{2}{n})^n}=\frac{1}{e}.$$

Demek, $k=\frac{1}{e}<1$, berilgen qatar jıynaqlı boladı. ►

**Eskertiw.** Koshi belgisiniń limit kórinisindegi ańlatpasında $k=1$ bolsa, onda (1) qatar jıynaqlıda, taralıwshıda bolıwı múmkin.

*2. Dalamber belgisi.* Eger oń aǵzalı

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+...+a_n+... \tag{1}$$

qatarda barlıq $n\geq 1$ ushın

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq q<1 \qquad (a_n>0\ ,\ n=1,2...) \tag{4}$$

bolsa, onda (1) qatar jıynaqlı boladı;

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1 \qquad (a_n>0\ ,\ n=1,2...) \tag{5}$$

bolsa, onda (1) qatar taralıwshı boladı.

Dalamber belgisiniń tómendegi limit kórinisindegi tastıyıqlawınan paydalanıladı.

Meyli oń aǵzalı (1) qatarda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=d$$

limit bar bolsın. Bunda:

1) $d<1$ bolǵanda (1) qatar jıynaqlı boladı,

2) $d>1$ bolǵanda (1) qatar taralıwshı boladı.

**2-mısal.** Qatardı $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ jıynaqlılıqqa tekseriń.

◄ Berilgen qatar ushın $a_n=\frac{n!}{n^n}$, $a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$ bolıp,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!}=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

boladı. Bunnan,

$$\lim_{n\to\infty}=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}.$$

Demek, $d=\frac{1}{e}<1$, berilgen qatar jıynaqlı boladı. ►

**Eskertiw.** Dalamber belgisiniń limit kórinisindegi ańlatpasında $d=1$ bolsa, onda (1) qatar jıynaqlıda, taralıwshıda bolıwı múmkin.

*3. İntegral belgisi.* Meyli oń aǵzalı $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qatar berilgen bolsın. Usı jaǵdayda, $[1,+\infty)$ aralıqta berilgen $f(x)$ funktsiya tómendegi shártlerdi qanaatlandırsın:

1) $f(x)$ funktsiya $[1,+\infty)$ da úzliksiz,

2) $f(x)$ funktsiya $[1,+\infty)$ da kemeyiwshi,

3) $\forall x\in[1,+\infty)$ da $f(x)\geq 0$,

4) $f(n)=a_n \quad (n=1,2,3,...)$.

Bunda berilgen qatar $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ kóriniske keledi. Joqarıdaǵı shártlerden paydalanıp, $n<x<n+1$ $(n\in N)$ bolǵanda $f(n)\geq f(x)\geq f(n+1)$ yamasa $a_n\geq f(x)\geq a_{n+1}$ boladı. Keyingi teńsizlikti $[n,\ n+1]$ aralıq boyınsha integrallaw nátiyjesinde

$$a_{n+1}\leq\int_n^{n+1}f(x)dx\leq a_n \tag{6}$$

boladı. Endi berilgen $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ qatar menen birge usı

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}f(x)dx \tag{7}$$

qatardı qaraymız. Bul qatardıń dara qosındısı

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1} f(x)dx = \int_{1}^{n+1} f(x)dx$$

boladı. Meyli $F(x)$ funktsiya $[1,+\infty]$ aralıqta $f(x)$ funktsiyanıń dáslepki funktsiyası bolsın $F'(x) = f(x)$. Onı tómendegishe

$$F(x) = \int_{1}^{x} f(t)dt \quad , \qquad F(1) = 0$$

ańlatıw múmkin. Nátiyjede

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1} f(x)dx = F(n+1)$$

boladı. Eger $n \to \infty$ da $F(n+1)$ shekli sanǵa umtılsa, (bul jaǵdayda (7) qatardıń dara qosındısı shekli limitke iye boladı) onda (7) qatar jıynaqlı boladı. Bunnan, $\int_{1}^{n} f(x)dx \quad (n = 1,2,3,...)$ izbe-izlik joqarıdan shegaralanǵan boladı. (6) qatnasqa muwapıq berilgen qatardıń dara qosındılarınan ibarat izbe-izlik joqarıdan shegaralanǵan bolıp, oń aǵzalı qatarlardıń jıynaqlılıǵı haqqındaǵı teoremaǵa muwapıq berilgen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatar jıynaqlı boladı.

Eger $n \to \infty$ da $F(n+1) \to \infty$ bolsa, onda berilgen qatar taralıwshı boladı. Bunnan, tómendegi integral belgisine kelemiz.

**İntegral belgisi.** Eger $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = b$ bolıp, $b$ shekli san bolsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatar jıynaqlı boladı, $b = \infty$ bolsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatar taralıwshı boladı.

**3-mısal.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $(\alpha > 0)$ jıynaqlılıqqa tekseriń.

◀ Eger $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$ $(\alpha > 0)$ delinse, onda bul funktsiya $[1,+\infty)$ aralıqta integral belgisine keltirilgen barlıq shártlerdi qanaatlandıradı. Bul funktsiyanıń dáslepki funktsiyası

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt=\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}-1\right) \qquad (\alpha\neq 1)$$

boladı. Bunnan,

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}-1\right)=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}, & eger\ \alpha>1,\\ \infty, & eger\ \alpha<1,\end{cases}$$

bolıp, $\alpha=1$ bolǵanda

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to\infty}\int_1^x\frac{dt}{t}=\infty$$

boladı. Demek, integral belgisine muwapıq $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ qatar $\alpha>1$ bolǵanda jıynaqlı, $\alpha\leq 1$ bolǵanda taralıwshı boladı. ►

## 12.3. Qálegen aǵzalı qatarlar hám onıń jıynaqlılıǵınıń Leybnits, Dirixle hám Abel belgileri

*1. Leybnits belgisi.* Meyli

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n=c_1-c_2+c_3-c_4+\ldots+(-1)^{n-1}c_n+\ldots \qquad (1)$$

qatarı berilgen bolsın, bunda $c_n>0,\ (n=1,2,3,\ldots)$.

Ádette, bunday qatar aǵzalardıń belgileri almasıp keletuǵın qatar delinedi. Bunnan, (1) qatar qálegen aǵzalı qatardıń bir túri boladı.

Máselen, usı

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

qatar aǵzalarınıń belgileri almasıp keliwshi qatar boladı.

**Leybnits belgisi.** Eger aǵzalardıń belgileri almasıp keliwshi (1) qatarda:

1) $c_{n+1}<c_n$, $\qquad (n=1,2,3,\ldots)$

2) $\lim_{n\to\infty}c_n=0$

bolsa, onda (1) qatar jıynaqlı boladı.

Máselen,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+... \qquad (2)$$

qatar aǵzaları keltirilgen teoremanıń barlıq shártlerin qanaatlandıradı. Teoremaǵa muwapıq (2) qatar jıynaqlı boladı.

*2. Dirixle-Abel belgisi.* Meyli

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,...a_n\ ,...,$$
$$b_1\ ,b_2\ ,\ b_3\ ,\ ...\ ,b_n\ ,...$$

qálegen haqıyqıy sanlar izbe-izlikeri bolıp,

$$S_n=a_1+a_2+...+a_n$$

bolsın. Bunda $\forall n\in N$ , $\forall m\in N$ ushın

$$\sum_{k=n}^{n+m}a_kb_k=\sum_{k=n}^{n+m-1}S_k(b_k-b_{k-1})+S_{n+m}\cdot b_{n+m}-S_{n-1}b_n \qquad (3)$$

qatnas orınlı boladı.

Ádette, (3) qatnas Abel belgisi delinedi.

**Dirixe-Abel belgisi.** Meyli

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k=a_1b_1+a_2b_2+...+a_kb_k+... \qquad (4)$$

qatar berilgen bolsın. Eger

1) $\{b_k\}$ izbe-izlik kemeyiwishi hám ol sheksiz kishi shama,

2) $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ qatardıń dara qosındıları izbe-izligi shegaralanǵan bolsa, onda

(4) qatar jıynaqlı boladı.

**Mısal.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}$ jıynaqlılıqqa tekseriń.

◄ Eger $x=2\pi$ bolsa, onda berilgen qatar

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi\cdot k}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

garmonikalıq qatar bolıp, ol taralıwshı boladı.

Meyli $x \neq 2\pi$ bolsın. Berilgen qatarda $a_k = \cos kx,\ b_k = \frac{1}{k}$ belgilep, $\{b_k\} = \left\{\frac{1}{k}\right\}$ kemeyiwyshi hám sheksiz kishi shama boladı ($k \to \infty$ da $\frac{1}{k} \to 0$). Al $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$ qatardıń dara qosındısı $S_n$ tı tabamız:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos kx =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left[\sin(k+\frac{1}{2})x - \sin(k-\frac{1}{2})x\right] = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Keyingi qatnastan, $2\pi$ ga dárejeli bolmaǵan $x$ lar ushın

$$|S_n| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

kelip shıǵadı. Demek, $\{S_n\}$ izbe-izlik shegaralanǵan. Onda berilgen qatar Dirixe-Abel belgisine muwapıq jıynaqlı boladı. ►

## 12.4. Absolyut jıynaqlı qatarlar. Shártli jıynaqlı qatarlar

Meyli

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

qatar berilgen bolsın. Bul qatardıń hár bir aǵzası qálegen haqıyqıy sanlardan ibarat.

(1) qatar aǵzalarınıń absolyut mánislerinen usı

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_n| + \ldots + |a_n| + \ldots \qquad (2)$$

qatardı dúzemiz.

**1-teorema.** Eger (2) qatar jıynaqlı bolsa, onda (1) qatar jıynaqlı boladı.

◀ Meyli (2) qatar jıynaqlı bolsın. Onda qatar jıynaqlılıǵı haqqındaǵı Koshi teoremasına muwapıq

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0\in N,\quad \forall n>n_0\quad m=1,2,3...\ \text{da}$$

$$|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+...+|a_{n+m}|<\varepsilon$$

boladı. Bunnan,

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+m}|\le|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+....+|a_{n+m}|.$$

keyingi eki qatnastan

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_0\in N, \forall n>n_0,\quad m=1,2,3,...\ \text{da}$$

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+m}|<\varepsilon$$

bolıwı kelip shıǵadı. Koshi teoremasına muwapıq (1) qatar jıynaqlı boladı. ▶

**1-anıqlama.** Eger $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ qatar jıynaqlı bolsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qatar absolyut jıynaqlı qatar delinedi.

Máselen, usı

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}(-1)^{n-1}=1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+...+\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}+...$$

qatar $\alpha>1$ bolǵanda absolyut jıynaqlı qatar boladı, sebebi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^\alpha}(-1)^{n-1}\right|=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+...+\frac{1}{n^\alpha}+...$$

ulıwmalasqan garmonikalıq qatar $\alpha>1$ bolǵanda jıynaqlı boladı.

**2-anıqlama**. Eger $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qatar jıynaqlı bolıp, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ qatar taralıwshı bolsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qatar shártli jıynaqlı qatar delinedi.

**Mısal.** Usı qatar

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^{n-1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+...$$

shártli jıynaqlılıqqa qatar boladı.

Endi $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ qatardıń oń aǵzalı qatar ekenin itibarǵa alıp, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qatardıń absolyut jıynaqlılıǵın ańlatıwshı belgilerin keltiremiz.

**Dalamber belgisi.** Meyli $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qatar aǵzaları ushın

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=d$$

limiti bar bolsın. Onda:

1) $d<1$ bolǵanda, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qatar absolyut jıynaqlı boladı,

2) $d>1$ bolǵanda, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qatar taralıwshı boladı.

**Koshi belgisi.** Meyli $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qatar aǵzaları ushın

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=k$$

limiti bar bolsın. Onda:

1) $k<1$ bolǵanda, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qatar absolyut jıynaqlı boladı.

2) $k>1$ bolǵanda, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qatar taralıwshı boladı.

Absolyut jıynaqlı qatarlardıń qásiyetlerin keltiremiz.

1) Eger qatar absolyut jıynaqlı bolsa, onda bul qatar jıynaqlı boladı.

2) Eger $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qatar absolyut jıynaqlı bolıp, $\{b_n\}$ sanlar izbe-izligi shegaralanǵan bolsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ jıynaqlı boladı.

3) Meyli $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qatar aǵzalarınıń orınların almastırıw nátiyjesinde

$$\sum_{j=1}^{\infty}a'_j=a'_1+a'_2+\ldots+a'_j+\ldots \tag{8}$$

qatarı payda bolsın. Bunnan (8) qatardıń hár bir $a'_j$ aǵzası $(j = 1,2,...)$ (1) qatardıń tayınlanǵan bir $a_{k_j}$ aǵzasınıń ózi boladı, yamasa $\exists k_j \in N, a_{k_j} = a'_j$ boladı.

Eger (1) qatar absolyut jıynaqlı bolıp, onıń qosındısı $S$ qa teń bolsa, onda bul qatar aǵzalarınıń orınların qálegen tárizde almastırıwdan payda bolǵan (8) qatar absolyut jıynaqlı hám onıń qosındısı hám $S$ ge teń boladı.

# 13-§. FUNKCIONAL QATARLAR

## 13.2. Funkcional qatarlardıń teń ólshewli jıynaqlıǵı

Meyli $E \subset R$ kóplikte anıqlanǵan

$$u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$$

funkcional izbe-izlik berilgen bolsın. Bul izbe-izliktiń aǵzaları járdeminde dúzilgen

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

ańlatpa funkcional qatar delinedi hám $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ arqalı belgilenedi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots . \tag{1}$$

Bunda $E$ funkcional qatardıń anıqlanıw oblastı delinedi. Máselen,

1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots,$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{nx} = e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x} + \cdots + ne^{nx} + \cdots$

funkcional qatarlar bolıp, olardıń anıqlanıw oblastı $E = (-\infty, +\infty)$ boladı. (1) funkcional qatardıń aǵzalarınan

$$\begin{aligned} &S_1(x) = u_1(x), \\ &S_2(x) = u_1(x) + u_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{2}$$

qosındıların dúzemiz. Olar (1) funkcional qatardıń dara qosındıları delinedi. Demek, (1) funkcional qatar berilgende hár dayım bul qatardıń (2) dara qosındılarınan ibarat $\{S_n(x)\}$:

$$S_1(x), S_2(x), \ldots, S_n(x), \ldots$$

funkcional izbe-izlik payda boladı. Bizge belgili, $x = x_0 \in E$ tochkada $\{S_n(x_0)\}$ sanlar izbe-izligi boladı.

**1-anıqlama.** Eger $\{S_n(x_0)\}$ jıynaqlı (taralıwshı) bolsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funkcional qatar $x = x_0$ tochkada jıynaqlı (taralıwshı) delinedi, $x_0$ tochka funkcional qatardıń jıynaqlılıq (taralıwshı) tochkası delinedi.

**2-anıqlama.** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funkcional qatardıń barlıq jıynaqlılıq tochkalarınan ibarat $E_0 \subset E$ kóplik, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funkcional qatardıń jıynaqlılıq kópligi delinedi. Bul jaǵdayda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funkcional qatar $E_0$ kóplikte jıynaqlı dep aytıladı.

Eger $E_0$ kóplikte

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| = |u_1(x)| + |u_2(x)| + \cdots + |u_n(x)| + \cdots$$

qatar jıynaqlı bolsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funkcional qatar $E_0$ da absolyut jıynaqlı delinedi.

**3-anıqlama.** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funkcional qatardıń dara qosındılarınan ibarat $\{S_n(x)\}$ izbe-izliktiń limit funktsiyası $S(x)$:

$$S_n(x) \to S(x) \qquad (x \in E_0)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funkcional qatardıń qosındısı delinedi.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x) \qquad (x \in E_0)$$ túrinde jazıladı.

**1-mısal.** Berilgen

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots$$

funkcional qatardıń jıynaqlılıq oblastı hám qosındısı tabılsın.

◀ Berilgen funkcional qatardıń anıqlanıw oblastı $E=R$ boladı. Qatardıń dara qosındısın tabamız:

$$S_n(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\begin{cases}\dfrac{1-x^n}{1-x}, & \text{егер } x\neq 1\\ n, & \text{егер } x=1.\end{cases}$$

$n\to\infty$ da $S_n(x)$ dıń limiti $x$ ǵa baylanıslı boladı:

а) $x\in(-1,1)$ da

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x}\right)=\frac{1}{1-x};$$

б) $x\in[1,+\infty)$ da

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\infty;$$

в) $x\in(-\infty,-1]$ da $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$ limitke iye emes.

Demek, berilgen funkcional qatardıń jıynaqlılıq oblastı $E_0=(-1,1)$ bolıp, qosındısı

$$S(x)=\frac{1}{1-x}$$

boladı. ▶

**2-mısal.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$ funkcional qatardıń jıynaqlılıq oblastın tabıń.

◀ Sanlı qatarlar teoriyasındaǵı Dalamber belgilerinen paydalanıp,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{1+x^{2n+2}}:\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(1+x^{2n})}{1+x^{2n+2}}\right|;$$

а) $x\in(-1,1)$ da

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(1+x^{2n})}{1+x^{2n+2}}\right|=|x|.$$

Bul jaǵdayda berilgen funkcional qatar $(-1,1)$ da jıynaqlı boladı.

б) $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ da

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x\left(1+x^{2n}\right)}{1+x^{2n+2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{x^{2n+1}}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^{2n+2}}+1}\right| = \left|\frac{1}{x}\right|$$

bolıp, funkcional qatar $x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ da jıynaqlı boladı.

в) $x=\pm 1$ da berilgen funkcional qatar sáykes túrde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\ ,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}$$

sanlı qatarǵa aylanadı hám olar taralıwshı boladı.

Solay etip, funkcional qatardıń jıynaqlılıq oblastı

$$E_0 = R\setminus\{-1,1\} = (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$$

boladı. ►

*Funkcional qatardıń teń ólshewli jıynaqlılıǵı.*

Meyli $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funkcional qatar $E_0$ kóplikte jıynaqlı hám qosındısı $S(x)$ bolıp

$$S_n(x)\to S(x) \qquad (x\in E_0) \tag{3}$$

bunda, $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$.

**4-anıqlama.** Eger $E_0$ kóplikte

$$S_n(x)\rightrightarrows S(x), \qquad (x\in E_0)$$

bolsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funkcional qatar $E_0$ kóplikda teń ólshewli jıynaqlı delinedi.

Eger $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$ bolsa, onda funkcional qatardıń $E_0$ kóplikte teń ólshewli jıynaqlılıǵın

$$r_n(x)\rightrightarrows 0 \qquad (x\in E_0),$$

kóriniste anıqlaw múmkin boladı.

Solay etip, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funkcional qatar, onıń dara qosındısın $S_n(x)$ hám qosındısı $S(x)$ ushın

$$S_n(x) \to S(x) \qquad (x \in E_0)$$

bolsa, onda funkcional qatar $E_0$ da jıynaqlı,

$$S_n(x) \rightrightarrows S(x) \qquad (x \in E_0)$$

bolsa, onda funkcional qatar $E_0$ da teń ólshewli jıynaqlı boladı.

**1-teorema.** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funkcional qatar $E_0$ da qatar qosındısı $S(x)$ funktsiyaǵa teń ólshewli jıynaqlılıǵı ushın

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E_0} |S_n(x) - S(x)| = 0,$$

yaǵnıy

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E_0} |r_n(x)| = 0$$

zárúrli hám jetkilikli.

**3-mısal.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ funkcional qatardıń $[0, +\infty)$ da teń ólshewli jıynaqlı ekenin dálilleń.

◀ Berilgen funkcional qatardıń dara qosındısın esaplap, soń qosındısın tabamız:

$$S_n(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \cdots + \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} =$$
$$= \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1}\right) = \frac{1}{x+1}.$$

Demek,

$$S(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Onda

$$S_n(x)-S(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+n+1}-\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{x+n+1}$$

bolıp,

$$\sup_{x\in[0,+\infty)}\left|S_n(x)-S(x)\right|=\frac{1}{n+1}$$

boladı. Keyingi teńlikten

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,+\infty)}\left|S_n(x)-S(x)\right|=0$$

kelip shıǵadı. 1-teoremaǵa kóre berilgen funkcional qatar $[0,+\infty)$ da teń ólshewli jıynaqlı. ►

**Eskertiw.** Eger

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in E_0}\left|S_n(x)-S(x)\right|\neq 0$$

bolsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ funkcional qatar $E_0$ da teń ólshewli jıynaqlı bolıwı shárt emes. Máselen, $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$ funkcional qatardıń $(-1,1)$ da jıynaqlı, qosındısı $S(x)=\dfrac{1}{1-x}$ boladı. Bul funkcional qatar ushın

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{-1<x<1}\left|S_n(x)-S(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\sup_{-1<x<1}\left|\frac{x^n}{1-x}\right|=+\infty$$

boladı. Demak, funkcional qatar $(-1,1)$ da teń ólshewli jıynaqlı emes.

Meyli $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ funkcional qatar $E\subset R$ kóplikte berilgen bolsın.

**2-teorema (Koshi).** $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ funkcional qatar $E$ kóplikte teń ólshewli jıynaqlı bolıwı ushın $\forall\varepsilon>0, \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in N$, $\forall\, n>n_0$, $\forall\, p\in N$, $\forall\, x\in E$ da

$$\left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right|<\varepsilon$$

bolıwı zárúrli hám jetkilikli.

### 13.3. Funkcional qatarlardıń teń ólshewli jıynaqlıq belgileri

**a) Veyershtrass belgisi.** Meyli $E$ kóplikte

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (4)$$

funkcional qatar berilgen bolıp,

1) $\forall n \in N$, $\forall x \in E$ da $|u_n(x)| \le C_n$,

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n = C_1 + C_2 + \ldots + C_n + \ldots$ sanlı qatar jıynaqlı bolsın. Onda (4) funkcional qatar $E$ kóplikte teń ólshewli jıynaqlı boladı.

**4-mısal.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x \sin x}{\sqrt{1+n^2}\left(1+nx^2\right)}$ funkcional qatardı teń ólshewli jıynaqlılıqqa tekseriń.

◄ Berilgen qatardıń anıqlanıw oblastı $E = (-\infty, +\infty)$ bolıp, onıń ulıwma aǵzası $u_n(x) = \dfrac{x \sin x}{\sqrt{1+n^2}\left(1+nx^2\right)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ boladı. Bunnan

$$|u_n(x)| = \left| \frac{x \sin x}{\sqrt{1+n^2}\left(1+nx^2\right)} \right| \le \frac{|x|}{\sqrt{1+n^2}\left(1+nx^2\right)}.$$

Endi $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ ushın $\dfrac{|x|}{1+nx^2} \le \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ esapqa alıp,

$$\frac{|x|}{\sqrt{1+n^2}\left(1+nx^2\right)} \le \frac{1}{2\sqrt{n\left(1+n^2\right)}} \le \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

Demek, berilgen funkcional qatardıń aǵzaları ushın $|u_n(x)| \le \dfrac{1}{2n^{3/2}}$ boladı. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ qatar jıynaqlı. Bunnan Veyershtrass belgisine kóre berilgen funkcional qatar $(-\infty, +\infty)$ da teń ólshewli jıynaqlı boladı. ►

**b) Dirixle belgisi.** Meyli $E \subset R$ kóplikte anıqlanǵan $u_n(x)$ hám $v_n(x)$ $(n = 1\ 2, 3, \ldots)$ funktsiyalar tómendegi shártler orınlı bolsın,

1) $\forall x \in E$ da $\{u_n(x)\}$ izbe-izlik monoton;

2) $\{u_n(x)\}$ funkcional izbe-izlik $E$ da 0 ge teń ólshewli jıynaqlı:

$$u_n(x) \rightrightarrows 0 \quad (x \in E);$$

3) sonday $C \in R$ bar bolıp, $\forall n \in N$, $\forall x \in E$ da

$$|v_1(x)+v_2(x)+\cdots+v_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} v_k(x)\right| \le C.$$

Onda

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\cdot v_n(x)$$

funkcional qatar $E$ kóplikte teń ólshewli jıynaqlı boladı.

**5-mısal.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\cdot\sin nx}{\sqrt{n+x}}$ funkcional qatar $E=[0,+\infty)$ da teń ólshewli jıynaqlıǵın dálilleń.

◄ Meyli $u_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ , $v_n(x)=\sin x\cdot\sin nx$ bolsın. Bul funktsiyalar ushın Dirixle belgisindegi úsh shárt orınlanadı. Haqıyqatdan da,

1) $\forall x \in E$ da $u_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ ushın

$$\frac{1}{\sqrt{n+x}}-\frac{1}{\sqrt{n+1+x}}=\frac{\sqrt{n+1+x}-\sqrt{n+x}}{\sqrt{n+x}\cdot\sqrt{n+1+x}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(n+x)(n+1+x)}\cdot\left(\sqrt{n+1+x}+\sqrt{n+x}\right)}>0$$

bolǵanlıqtan onıń kemeyiwshiligi kelip shıǵadı;

2) $u_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n+x}}\le\frac{1}{\sqrt{n}}$ , $n\to\infty$ da $\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$.

Demek,

$$u_n(x) \rightrightarrows 0 \quad (x \in E);$$

3) onda

$$\left|\sum_{k=1}^{n} v_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\sin x\sin kx\right| = 2\left|\cos\frac{x}{2}\right|\left|\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{n+1}{2}x\right| \le 2$$

boladı. Dirixle belgisine kóre berilgen funkcional qatar $E=[0,+\infty)$ da teń ólshewli jıynaqlı.►

**v) Abel belgisi.** Meyli $E\subset R$ kóplikte anıqlanǵan $u_n(x)$ hám $v_n(x)$ $(n=1\,2,3,\ldots)$ funktsiyalar tómendegishe shártler orınlı bolsın:

1) $\forall x\in E$ da $\{u_n(x)\}$ izbe-izlik monoton;

2) sonday $C\in R$ tabıladı, $\forall n\in E$ , $\forall x\in E$ da $|u_n(x)|\le C$ ;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ funkcional qatar $E$ kóplikte teń ólshewli jıynaqlı boladı. Onda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)\cdot v_n(x)$ funkcional qatar $E$ kóplikte teń ólshewli jıynaqlı boladı.

**6-mısal.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$ funkcional qatardıń $E=[0,1]$ da teń ólshewli jıynaqlı ekenligin dálilleń.

◄ Meyli $u_n(x)=x^n,\ v_n(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ $(x\in[0,1])$ bolsın. Bul funktsiyalar ushın Abel belgisindegi úsh shárt orınlanadı. Onda Abel belgisine kóre berilgen funkcional qatar $[0,1]$ da teń ólshewli jıynaqlı boladı.►

# 14-§. DÁREJELI QATARLAR

## 14.1. Dárejeli qatarlardıń jıynaqlılıq oblastı. Koshi-Adamar formulası

Hár bir aǵzası

$$u_n(t) = a_n(t-t_0)^n,\ (t_0 \in R; n = 0,1,2...)$$

funktsiyasınan ibarat bolǵan

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n = a_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + ... \qquad (1)$$

funktsional qatar dárejeli qatar delinedi, bunda $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ haqıqıy sanlar dárejeli qatardıń koeffitsientleri delinedi. da $t - t_0 = x$ bolsa, onda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... \qquad (x \in R) \qquad (2)$$

kóriniske keledi. (2) qatardıń dara qosındısı

$$S_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

kóp aǵzalıdan ibarat. Bunda $x = 0$ da $S_n(0) = a_0$ boladı. Demek, hár qanday (2) kórinistegi dárejeli qatar $x = 0$ tochkada jıynaqlı boladı.

**1-teorema (Abel).** Eger

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$$

dárejeli qatar $x = x_0 \neq 0$ tochkada jıynaqlı bolsa, onda

$$|x| < |x_0|$$

teńsizlikti qanaatlandırıwshı barlıq $x$ larda dárejeli qatar jıynaqlı (absolyut jıynaqlı) boladı.

**Saldar.** Eger $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dárejeli qatar $x = x_1$ tochkada taralıwshı, yaǵnıy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sanlı qatar taralıwshı bolsa, onda $|x| > |x_1|$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı barlıq $x$ larda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ qatar taralıwshı boladı.

*Dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusi hám jıynaqlılıq intervalı.* Meyli

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

dárejeli qatar berilgen bolsın. Bul qatardıń jıynaqlılıq yamasa taralıwshı tochkaları haqqında tómendegishe úsh jaǵday bolıwı múmkin:

1) barlıq oń sanlar qatardıń jıynaqlılıq tochkaları boladı;

2) barlıq oń sanlar qatardıń taralıwshı tochkaları boladı;

3) sonday oń sanlar bar bolıp, olar qatardıń jıynaqlılıq tochkaları boladı, sonday oń sanlar bar bolıp, olar qatardıń taralıwshı tochkaları boladı.

Birinshi jaǵdayda, Abel teoremasına kóre dárejeli qatar barlıq $x \in R$ da jıynaqlı bolıp, dárejeli qatardıń jıynaqlılıq kópligi $E = (-\infty, +\infty)$ boladı. Bunday qatarǵa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \dots + \frac{1}{n!} x^n + \dots$$

dárejeli qatar mısal boladı.

Ekinshi jaǵdayda, Abel teoremasınıń nátiyjesine kóre dárejeli qatar barlıq $x \in R \setminus \{0\}$ da taralıwshı bolıp, onıń jıynaqlılıq kópligi $E = \{0\}$ boladı. Bunday qatarǵa

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n = x + 2!\, x^2 + 3!\, x^3 + \dots + n!\, x^n + \dots$$

dárejeli qatar mısal boladı.

Endi úshinshi jaǵdaydı qaraymız. Bul jaǵdayda

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

dárejeli qatar mısal boladı. Bul dárejeli qatar barlıq $x \in (0,1)$ da jıynaqlı hám Abel teoremasına kóre qatar $(-1,1)$ da jıynaqlı boladı, barlıq $x \in [1,+\infty)$ da qatar taralıwshı hám Abel teoremasınıń nátiyjesine kóre qatar $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$ da taralawshı. Demek, dárejeli qatardıń jıynaqlılıq kópligi $E=(-1,1)$ boladı.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dárejeli qatar ushın sonday oń $r$ sanı bar bolıp, $|x|<r$, yaǵnıy $\forall x \in (-r,r)$ da qatar jıynaqlı, $|x|>r$, yaǵnıy $\forall x \in (-\infty,-r) \cup (r,+\infty)$ da qatar taralıwshı boladı. $x=\pm r$ tochkalarda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dárejeli qatar jıynaqlı bolıwı da múmkin, taralıwshı da bolıwı múmkin.

**1-anıqlama.** Joqarıda keltirilgen $r$ san $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusi, al $(-r,r)$ intervalı dárejeli qatardıń jıynaqlılıq intervalı delinedi.

Meyli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dárejeli qatarın qarayıq. Bul qatardıń koeffitsientlarinen dúzilgen $\{a_n\}$ $(n=0,1,2,....)$ izbe-izlik ushın

1) $\forall n \geq 0$ da $a_n \neq 0$,

2) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ bar bolsın. Onda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusı

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

boladı.

**1-mısal.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!} x^n$ dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusın tabıń.

◀ Bul qatar ushın $a_n=\frac{n^n}{e^n n!}$, $a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!}$ boladı. Bunnan,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^n}{e^n\cdot n!}\cdot\frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 1.$$

Demek, berilgen dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusi $r = 1$ boladı. ►

**Koshi-Adamar.** Berilgen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusi

$$r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

boladı.

**Eskertiw.** Eger $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ bolsa, onda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusi $r = 0$ dep, al $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = 0$ bolsa, onda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusi $r = +\infty$ dep alınadı.

**2-mısal.** $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{5n}$ dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusın tabıń.

◄ Dáslep $2x^5 = t$ dep alamız. Nátiyjede berilgen qatar

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = 1 + t + t^2 + \ldots + t^n + \ldots$$

kóriniske keledi. Bul qatardıń jıynaqlılıq radiusı

$$r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}} = 1$$

boladı. Demek, $|t| < 1$ da qatar jıynaqlı, $|t| > 1$ da taralıwshı. Onda $|2x^5| < 1$, yaǵnıy $|x| < \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ da berilgen qatar jıynaqlı, $|2x^5| > 1$, yaǵnıy $|x| > \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ da taralıwshı boladı.

Jıynaqlılıq radiusı $r = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$ boladı. ►

*Dárejeli qatardıń teń ólshewli jıynaqlılıǵı.*

Meyli

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \qquad (1)$$

dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusi $r > 0$ bolsın.

**1-teorema.** (1) dárejeli qatar $[\alpha, \beta] \subset (-r, r)$ da teń ólshewli jıynaqlı boladı, bunda $\alpha \in R, \ \beta \in R$.

◀ Meyli (1) dárejeli qatar $(-r, r)$ da absolyut jıynaqlı bolıp hám $\alpha \in (0, r)$ bolsın. Onda $\forall n \geq 0$ va $\forall x \in [-\alpha, \alpha]$ da

$$|a_n x^n| \leq |a_n \alpha^n|$$

bolǵanlıǵı, Veyershtrass belgisine qarata (1) qatar $[-\alpha, \alpha]$ da teń ólshewli jıynaqlı boladı. ▶

Demek, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusi $r > 0$ bolsa, onda joqarıda keltirilgen teoremaǵa qarata bul qatar $[-c, c] \subset (-r, r)$ da $(c > 0)$ teń ólshewli jıynaqlı boladı. Bunda $c$ sannı $r$ sanǵa hár qansha jaqın etip alıw múmkin bolsa, qatar $(-r, r)$ da teń ólshewli jıynaqlı bolmastan qalıwı múmkin. Máselen

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusı $r = 1$, biraq qatar $(-1, 1)$ da teń ólshewli jıynaqlı emes.

## 14.2. Dárejeli qatarlardıń funktsionallıq qásiyetleri

Dárejeli qatarlar funktsional qatarlardıń dara jaǵdayı bolǵanlıqtan olar teń ólshewli jıynaqlı funktsional qatarlardıń qásiyetlerine uqsas qásiyetlerge iye boladı.

**1-teorema.** Eger $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusi $r>0$ bolıp, qosındısı $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ bolsa, onda $S(x)$ funktsiya $(-r,r)$ da úzliksiz boladı.

◀ Dárejeli qatar $(-r,r)$ da jıynaqlı boladı.

Meyli $x_0 \in (-r,r)$ bolsın. Onda $|x_0|<c<r$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı $c$ sanın alayıq. Onda dárejeli qatar $[-c,c]$ da teń ólshewli jıynaqlı boladı. Teń ólshewli jıynaqlı funktsional qatardıń qásiyetleri qarata $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dárejeli qatardıń qosındısı $S(x)$ funktsiya $[-c,c]$ da úzliksiz, bolǵanlıqtan $x_0$ tochkada úzliksiz. ►

**2-teorema.** Meyli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusı $r>0$ bolıp, qosındısı $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ bolsın. Bul qatardıń $(-r,r)$ ǵa tiyisli bolǵan qálegen $[a,b]$ boyınsha $([a,b]\subset(-r,r))$ aǵzama-aǵza integrallaw múmkin

$$\int_a^b S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^b a_n x^n dx\right).$$

**3-teorema.** Meyli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusı $r>0$, qosındı $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ bolsın. Onda $S(x)$ funktsiya $(-r,r)$ da úzliksiz $S'(x)$ tuwındıǵa iye bolsın hám

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{3}$$

boladı, bunda (3) qatardıń jıynaqlılıq radiusı $r$ ǵa teń.

**4-teorema.** Meyli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusi $r>0$, qosındısı $S(x)$ bolsın.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x) \quad . \tag{4}$$

Onda $\forall n \geq 0$ da $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$ boladı.

**1-mısal.** Berilgen

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n + \ldots$$

dárejeli qatar qosındısın tabıń.

◀Meyli $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ dárejeli qatar $(-1,1)$ da jıynaqlı hám onıń qosındısı $\dfrac{x}{1-x}$ ǵa teń, $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \dfrac{x}{1-x}$. Bul qatardı aǵza-aǵza differentsiallap,

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Keyingi teńlikten hár eki tárepin $x$ ǵa kóbeytirsek, onda

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

kelip shıǵadı. ▶

**2-mısal.** $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \ln(1+x)$ teńlikti dálilleń.

◀ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ dárejeli qatar $(-1,1)$ da jıynaqlı bolıp, onıń qosındısı $\dfrac{1}{1-x}$ ǵa teń:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Bul teńlikte $x$ ti $-x$ ǵa almastırsaq, nátiyjede $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \dfrac{1}{1+x}$ teńlik payda boladı. Onı $[0,x]$ boyınsha $(0 < x < 1)$ integrallap $\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \int_0^x \dfrac{dt}{1+t} = \ln(1+t)\Big|_0^x$.

Demek, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x)$.▶

## 14.3. Teylor qatarı. Elementar funktsiyalardı dárejeli qatarlarǵa jayıw

Meyli $f(x)$ funktsiya $x_0 \in R$ tochkanıń bazı bir dógereginde qálegen tártipli tuwındıǵa iye bolsın. Bul jaǵdayda $f(x)$ funktsiyanıń Teylor formulası

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x)(1)$$

bolıp, bunda $r_n(x)$-qaldıq aǵza.

(1) dárejeli qatardıń koeffitsientleri sanlar bolıp, olar $f(x)$ funktsiya hám onıń tuwındılarınıń $x_0$ tochkadaǵı mánisleri arqalı ańlatılǵan.

(1) dárejeli qatar $f(x)$ funktsiyanıń Teylor qatari delinedi.

Dara jaǵdayda, $x_0=0$ bolǵanda (1) dárejeli qatar

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (2)$$

kóriniste bolıp, onı Makloren qatarı dep ataymız.

**1-teorema.** (2) dárejeli qatar $(-r,r)$ da $f(x)$ ǵa jıynaqlı bolıwı ushın

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots\frac{f^{(n)}(0)^n}{n!}+r_n(x)$$

Teylor formulasına, $\forall x\in(-r,r)$ ushın

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$$

zárúrli hám jetkilikli.

◄ **Zárúrligi**. (2) dárejeli qatar $(-r,r)$ da jıynaqlı bolıp, qosındısı $f(x)$ bolsın. Anıqlamaǵa muwapıq

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=f(x), \qquad (x\in(-r,r))$$

boladı, bunda

$$S_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots\frac{f^{(n)}(0)^n}{n!}.$$

$\forall x\in(-r,r)$ da $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=f(x)$ bolıwınan

$$\lim_{n\to\infty}[f(x)-S_n(x)]=\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$$

kelip shıǵadı.

**Jetkilikligi.** Meyli $\forall x\in(-r,r)$ da $\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$ bolsın. Onda

$$\lim_{n\to\infty}[f(x)-S_n(x)]=\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$$

bolıp, bunnan

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=f(x)$$

kelip shıǵadı. Demek,

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots\frac{f^{(n)}(0)^n}{n!}+\ldots$$

boladı. ►

*Elementar funktsiyalardı Teylor qatarına jayıw.*

a) Kórsetkishli hám giperbolik funktsiyalardı Teylor qatarlarına jayamız. Meyli

$$f(x)=e^x$$

bolsın. $f(0)=1,\ f^{(n)}(0)=1\ (n\in N)$ boladı. Teylor qatarı

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\ (0!=1). \tag{3}$$

Demek, (3) dárejeli qatarnıń jıynaqlılıq radiusı $r=+\infty$ boladı.

(3) de $x$ tı $-x$ ge almastıramız:

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Giperbolik sinus hámde giperbolik kosinus funktsiyaları

$$shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

Joqarıdaǵı

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,$$

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-...+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+...$$

formulalardan paydalanıp:

$$shx=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$chx=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Bul $shx$, $chx$ funktsiyalardıń Teylor qatarları bolıp, onıń jıynaqlılıq radiusları $r=+\infty$ boladı.

b) Trigonometriyalıq funktsiyalardıń Teylor qatarlarına jayamız. $f(x)=\sin x$ funktsiya Teylor qatarına jayıladı

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-... \tag{4}$$

boladı. Eger $f(x)=\cos x$ bolsın. Bul funktsiya ushın

$$f(0)=1,\ f'(0)=0,\ f^{(2n)}(0)=(-1)^n,\ f^{(2n+1)}(0)=0 \quad (n\in N)$$

boladı. Teylor qatarı

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-... \tag{5}$$

boladı. (4) hám (5) dárejeli qatarlardıń jıynaqlılıq radiusı $r=+\infty$ boladı.

v) Logarifmik funktsiyanı Teylor qatarına jayamız.

$$f(x)=\ln(1+x)$$

bolsın.

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad (n\in N)$$

bolıp,

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

boladı. Bul funktsiyanıń Teylor formulası

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+... \quad (6)$$

boladı. (6) dárejeli qatarnıń jıynaqlılıq radiusi $r=1$ ga teń.

Eger $\ln(1+x)$ nıń jayılmasında $x$ ti $-x$ ge almastırsaq, onda

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-...-\frac{x^n}{n}-...$$

formula kelip shıǵadı.

g) $\dfrac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3+x^4-...+(-1)^n x^n+...$

formula payda boladı. Bul formulada $x$ ti $-x$ ge almastırsaq:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1+x+x^2+...+x^n+...$$

**1-mısal.** $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ funktsiyanı Teylor qatarına jayıń.

◀ $\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$ boladı.

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-...\frac{x^n}{n}-...$$

Bul qatnaslardan

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...$$
$$-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-...-\frac{x^n}{n}-...\right)=2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+...+\frac{2x^{2n-1}}{2n-1}+...$$

Demek,

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+...\right).$$

dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusı $r=1$ boladı.▶

**2-mısal.** Berilgen $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$ funktsiyanı Teylor qatarına jayıń.

◀ $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$.

Onda $\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{t^{2n-2}}{(2n-1)!} + \ldots$

boladı. Bul dárejeli qatardı aǵzama-aǵza integrallap,

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt = \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{t^{2n-2}}{(2n-1)!} + \ldots\right)dt =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!\cdot 3} + \frac{x^5}{5!\cdot 5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!\cdot(2n-1)} + \ldots$$

dárejeli qatardıń jıynaqlılıq radiusi $r = +\infty$ boladı.▶

# 15-§. MENSHIKSIZ INTEGRALLAR

## 15.1. Birinshi túr menshiksiz integrallar hám olardıń jiynaqlıǵı

Funktsiyanıń anıq integrali túsinigin kiritiwde integrallaw aralıǵınıń shekli bolsa, endi sheksiz aralıqta ($[a,+\infty)$; $(-\infty,a]$; $(-\infty,+\infty)$ aralıqlarda) berilgen funktsiyanıń integral túsinigin keltiremiz hám úyrenemiz.

Meyli $f(x)$ funktsiya $[a,+\infty)$ aralıqta ($a \in R$) berilgen bolıp, qálegen $[a,t]$ da ($a \le t < +\infty$) integrallanıwshı bolsın: $f(x) \in R([a,t])$.

Sonda

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

belgilewin kiritemiz.

**1-anıqlama.** Eger $t \to +\infty$ da $F(t)$ funktsiyanıń limiti bolsa, onda bul limit $f(x)$ funktsiyanıń $[a,+\infty)$ sheksiz aralıq boyınsha menshiksiz integralı delinedi hám

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

kórinisinde belgilenedi:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx. \qquad (1)$$

(1) integraldı shegarası sheksiz menshiksiz integral dep te aytıladı.

Qolaylık ushın, bunnan keyin “shegarası sheksiz menshiksiz integral” dep aytıw ornına “integral” deymiz.

**2-anıqlama.** Eger $t \to +\infty$ da $F(t)$ funktsiyanıń limiti bar bolsa hám shekli bolsa, onda (1) integral jıynaqlı delinedi.

Eger $t \to +\infty$ da $F(t)$ funktsiyanıń limiti sheksiz yamasa bolmasa, (1) integral taralıwshı delinedi.

**1-mısal.**

$$\int_0^{+\infty} \mathring{a}^{-x}dx$$

integraldı alayıq. Bunda

$$F(t)=\int_0^t e^{-x}dx=-e^{-t}+1$$

bolıp, $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t)=1$ boladı. Demek, berilgen integral jıynaqlı boladı.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=1.$$

**2-mısal.** $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ $(a>0,\ \alpha>0)$ integral ushın

$$F(t)=\int_a^t\frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases}\ln t-\ln a, & eger\quad \alpha=1\\ \dfrac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\dfrac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & eger\ \alpha\neq1\end{cases},$$

bolıp, $t\to+\infty$ da

$$F(t)\to\frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}\qquad(\alpha>1),$$
$$F(t)\to+\infty\qquad(\alpha\le1)$$

boladı. Demek,

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$$

integral $\alpha>1$ bolǵanda jıynaqlı, $\alpha\le1$ bolǵanda taralıwshı boladı.

**3-mısal.** $\int_0^{+\infty}\cos xdx$ integral taralıwshı boladı, sebebi $t\to+\infty$ da

$$F(t)=\int_0^t\cos xdx=\sin t$$

funktsiyanıń limiti bolmaydı.

Joqarıda kórsetilgendey,

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx\,,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

menshiksiz integrallar hám olardıń jıynaqlılıǵı, taralıwshılıǵı anıqlanadı,

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)dx \quad ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{u\to+\infty \\ v\to-\infty}}\int_{v}^{u} f(x)dx \quad .$$

*Menshiksiz integraldıń ápywayı qásiyetleri.* Menshiksiz integraldıń túrli qásiyetlerin $f(x)$ funktsiyanıń $[a,+\infty)$ aralıq boyınsha alınǵan

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

integralı ushın bayan etemiz. Bul qásiyetlerdi

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx\,, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

integrallar ushın keltiriwdi oqıwshıǵa kórsetip ótemiz.

**1-qásiyet.** Eger $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ integral jıynaqlı bolsa, onda $\int_{b}^{+\infty} f(x)dx,\ (a<b)$ integralı jıynaqlı boladı hám kerisinshe boladı. Bunda

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx \tag{2}$$

teńlik orınlanadı.

**2-qásiyet.** Eger $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ integral jıynaqlı bolsa, onda $\int_{a}^{+\infty} C\cdot f(x)dx$ $(C = const)$ jıynaqlı bolıp,

$$\int_{a}^{+\infty} C\cdot f(x)dx = C\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

boladı.

**3-qásiyet.** Eger $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ integral jıynaqlı bolıp, $\forall x\in[a,+\infty)$ da $f(x)\geq 0$ bolsa, onda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \geq 0$$

boladı.

**4-qásiyet.** Eger $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hám $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integrallar jıynaqlı bolsa, onda $\int_a^{+\infty} (f(x) \pm g(x))dx$ integralı da jıynaqlı bolıp,

$$\int_a^{+\infty} (f(x) \pm g(x))dx = \int_{\mathrm{a}}^{+\infty} f(x)dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

boladı.

**5-qásiyet.** Eger $\forall x \in [a,+\infty)$ da $f(x) \leq g(x)$ bolıp, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ va $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integrallar jıynaqlı bolsa, onda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

boladı.

Meyli $f(x)$ hám $g(x)$ funktsiyalar $[a,+\infty)$ da berilgen bolıp, $f(x)$ funktsiya shegaralanǵan $(m \leq f(x) \leq M,\ \ x \in [a,+\infty))$, $g(x)$ funktsiya bolsa óz belgisin ózgertpesten ($\forall x \in [a,+\infty)$ da hár waqıtta $g(x) \geq 0$ yamasa $g(x) \leq 0$).

**6-qásiyet.** Eger $\int_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x)dx$ hám $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integrallar jıynaqlı bolsa, onda sonday turaqlı $\mu (m \leq \mu \leq M)$ tabıladı,

$$\int_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x)dx = \mu \int_a^{+\infty} g(x)dx \tag{3}$$

boladı.

Ádette, bul qásiyet orta mánis haqqındaǵı teorema delinedi.

## 15.2. Teris bolmaǵan funktsiyanıń menshiksiz integralları

Meyli $f(x)$ funktsiya $[a,+\infty)$ aralıqta berilgen bolıp, $\forall x \in [a,+\infty)$ da $f(x) \geq 0$ bolsın. Bul funktsiyanı $[a,t]$ da $(a < t < +\infty)$ integrallanıwshı bolsın. Onda

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

funktsiya $(a,+\infty)$ aralıqta ósiwshi boladı.

◀ Haqıyqattan da, $a < t_1 < t_2 < +\infty$ da

$$F(t_2) = \int_a^{t_2} f(x)dx = \int_a^{t_1} f(x)dx + \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx = F(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx$$

bolıp,

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \geq 0$$

bolǵanlıǵı sebepli

$$F(t_2) \geq F(t_1)$$

boladı. Demek, $\forall\ t_1, t_2 \in (a,+\infty)$ ushın

$$t_1 < t_2 \Rightarrow F(t_1) \leq F(t_2). ▶$$

**1-teorema.** Teris bolmaǵan $f(x)$ funktsiya menshiksiz integralı

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad (f(x) \geq 0,\ x > a) \tag{1}$$

jıynaqlı bolıwı ushın $F(t)$ funktsiyanıń joqarıdan shegaralanǵan bolıwı zárúrli hám jetkilikli.

◀ **Zárúrligi.** Meyli (1) integral jıynaqlı bolsın. Anıqlamaǵa tiykarlanıp

$$\lim_{t \to +\infty} F(t)$$

bar bolıp hám shekli boladı. Onda, $\exists\ C \in R$, $\forall t > a$ da $F(t) \leq C$ boladı.

**Jetkilikligi.** Meyli $F(t)$ funktsiya $(a,+\infty)$ da joqarıdaǵı shegaralanǵan bolsın. Házirgi waqıtta, $F(t)$ ósiwshi funktsiya boladı. Demek, $t\to+\infty$ da $F(t)$ funktsiya shekli limitke iye. Bul bolsa (1) integraldı jıynaqlı bolıwın bildiredi. ▶

Bul teoremadan tómendegi saldar kelip shıǵadı.

**Saldar.** Eger $F(t)$ funktsiya $(t\in(a,+\infty))$ joqarıdan shegaralanbaǵan bolsa, onda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

integral taralıwshı boladı.

*Salıstırıw teoremaları.* Eki funktsiya belgili qatnasta bolǵanda biriniń menshiksiz integralı jıynaqlı (taralıwshı) bolıwınan ekinshisiniń de jıynaqlı (taralıwshı) bolıwın belgilewshi teoremalardı keltiremiz. Ádette, olar salıstırıw teoremaları delinedi.

**2-teorema.** Meyli $f(x)$ hám $g(x)$ funktsiyalar $[a,+\infty)$ aralıqta berilgen bolıp, $\forall x\in[a,+\infty)$ da

$$0\le f(x)\le g(x) \tag{2}$$

bolsın. Eger $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ jıynaqlı bolsa, onda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hám jıynaqlı boladı. Eger $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ taralıwshı bolsa, onda $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hám taralıwshı boladı.

◀ Meyli (2) qatnas orınlı bolıp, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ jıynaqlı bolsın. Onda 1-teoremaǵa muwapıq

$$G(t)=\int_a^{t} g(x)dx\le C$$

boladı. Bunda,

$$F(t)=\int_a^{t} f(x)dx\le G(t)$$

bolǵanlıǵı sebepli yamasa 1-teoremaǵa tiykarlanıp $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ jıynaqlı boladı.

Meyli (2) qatnas orınlı bolıp, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ taralıwshı bolsın. Onda joqarıda keltirilgen nátiyje hám

$$F(t) \le G(t)$$

teńsizlikten $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ integraldıń taralıwshılıǵı kelip shıǵadı. ▶

**3-teorema.** Meyli $f(x)$ va $g(x)$ funktsiyalar $[a,+\infty)$ da $f(x) \ge 0$ $g(x) \ge 0$ bolıp,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \qquad (0 \le k \le +\infty)$$

bolsın. Eger $k < +\infty$ bolıp, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ jıynaqlı bolsa, onda $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hám jıynaqlı boladı. Eger $k > 0$ bolıp, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ taralıwshı bolsa, onda $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hám taralıwshı boladı.

**Saldar.** Eger

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

bolıp, $0 < k < +\infty$ bolsa, onda $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ va $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ integrallar bir waqıtta jıynaqlı, yamasa taralıwshı boladı.

Kóp jaǵdaylarda bazı menshiksiz integraldıń jıynaqlılıǵın yamasa taralıwshılıǵın anıqlawda birinshiden jıynaqlılıǵı yamasa taralıwshılıgi málim bolǵan integral menen salıstırıp (joqarıda keltirilgen teoremalardan paydalanıp) qaralıp atırǵan integraldıń jıynaqlı yamasa taralıwshı bolıwı tabıladı. Máselen,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$$

integraldı

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \qquad (a>0 \ ,\alpha>0)$$

integral menen salıstırıp, tómendegi nátiyjege kelemiz:

**Nátiyje.** Meyli bazı $C$ $(0<C<+\infty)$ hám $\alpha>0$ sanlar ushın $x\to+\infty$ da

$$f(x)\sim\frac{C}{x^\alpha},$$

yamasa

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha\cdot f(x)=C$$

bolsın. Onda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

integral $\alpha>1$ bolǵanda jıynaqlı, $\alpha\le 1$ bolǵanda taralıwshı boladı.

**1-mısal.** $\int_0^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{1+x^2}dx$ integraldı jıynaqlılıqqa tekseriń.

◀ Eger $f(x)=\frac{\cos^2 x}{1+x^2}, g(x)=\frac{1}{1+x^2}$ bolsa, onda $\forall x\in[0,+\infty)$ $0\le f(x)\le g(x)$ boladı. Bunnan

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

integralı jıynaqlı. 2-teoremaǵa muwapıq berilgen menshiksiz integralıda jıynaqlı boladı. ▶

**2-mısal.** $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ integraldı jıynaqlılıqqa tekseriń.

◀ $\forall x\ge 1$ da $f(x)=e^{-x^2}$, $g(x)=e^{-x}$ funktsiyaları ushın $0\le f(x)\le g(x)$ boladı. Onda

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$$

integralı jıynaqlı. Demek, $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ integralıda jıynaqlı boladı. ▶

**3-mısal.** $\int_{1}^{+\infty} e^{-x}\ln x dx$ integraldı jıynaqlılıqqa tekseriń.

◀ $\forall x>1$ da $\ln x<x$ bolıp, $f(x)=e^{-x}\ln x,\quad g(x)=xe^{-x}$ funktsiyalar ushın $0\le f(x)\le g(x)$ boladı. Endi

$$\int_{1}^{+\infty} g(x)dx=\int_{1}^{+\infty} xe^{-x}dx$$

integraldıń jıynaqlılıǵın esapqa alıp, 2-teoremadan paydalanıp, berilgen

$$\int_{1}^{+\infty} e^{-x}\ln x dx$$

integral jıynaqlı boladı. ▶

**4-mısal.** $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}$ integral jıynaqlılıqqa tekseriń.

◀ İntegral astındaǵı

$$f(x)=\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}$$

funktsiya ushın

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}}\cdot\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\cdot\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}}=1$$

boladı. Bunnan,

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{5}{3}}}$$

integral jıynaqlı. Demek, berilgen integral jıynaqlı boladı. ▶

## 15.3. Menshiksiz integraldıń absolyut jıynaqlılıǵı. Menshiksiz integraldıń jıynaqlılıq belgileri. Menshiksiz integraldıń bas mánisi

Meyli $f(x)$ funktsiya $[a,+\infty)$ aralıqta berilgen bolsın. Bunda, $\forall x \in [a,+\infty)$ ushın $f(x) \geq 0$ bolıwı shárt emes.

**Anıqlama.** Eger

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$$

integral jıynaqlı bolsa, onda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral absolyut jıynaqlı delinedi.

Eger $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ jıynaqlı bolıp, $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ taralıwshı bolsa, onda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ shártli jıynaqlı integral delinedi.

**Teorema.** Eger integral absolyut jıynaqlı bolsa, ol jıynaqlı boladı.

◄ Meyli

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$$

integral jıynaqlı bolsın. Berilgen $f(x)$ hám $|f(x)|$ funktsiyalar járdeminde bul

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + |f(x)|) \quad ,$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}(-f(x) + |f(x)|)$$

funktsiyalardı duzemiz. Bul funktsiyalar ushın, $\forall x \in [a,+\infty)$ da

1) $\varphi(x) \geq 0 \quad , \quad \psi(x) \geq 0$

2) $\varphi(x) \leq |f(x)| \quad , \psi(x) \leq |f(x)|$

3) $\varphi(x) - \psi(x) = f(x)$

boladı. Joqarıda keltirilgen 2-teoremadan paydalanıp, tómendegi

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx, \quad \int_a^{+\infty} \psi(x)dx$$

integral jıynaqlılıǵın tabamız. Onda

$$\int_a^{+\infty}(\varphi(x)-\psi(x))dx$$

integral hám jıynaqlı boladı. Demek,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

jıynaqlı boladı. ►

*İntegraldıń jıynaqlılıq belgileri. İntegraldıń bas mánisi*

**1. Dirixle belgisi.** Meyli $f(x)$ hám $g(x)$ funktsiyalar $[a,+\infty)$ aralıqta berilgen bolsın.

**1-teorema** (**Dirixle belgisi**). $f(x)$ hám $g(x)$ funktsiyalar tómendegi shártlerin qanaatlandırsın:

1) $f(x)$ funktsiya $[a,+\infty)$ da úzliksiz hám onıń usı aralıqtaǵı dáslepki $F(x)$ $(F'(x)=f(x))$ funktsiyası shegaralanǵan;

2) $g(x)$ funktsiya $[a,+\infty)$ da úzliksiz $g'(x)$ tuwındıǵa iye;

3) $g(x)$ funktsiya $[a,+\infty)$ da kemeyiwshi;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

Bunda

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

integral jıynaqlı boladı.

◄ Bunnan, $f(x)\in C([a,+\infty))$, $g(x)\in C([a,+\infty))\Rightarrow f(x)g(x)\in C([a,+\infty))$ boladı. Bunda $f(x)\cdot g(x)$ funktsiya $[a,t]$ $(a<t<+\infty)$ aralıqta integrallanıwshı boladı. Bóleklep integrallaw formulasınan hám teoremanıń 1)- hám 2)- shártlerinen paydalanıp

$$\int_a^t f(x)g(x)dx=\int_a^t g(x)\,dF(x)=g(x)\,F(x)\Big|_a^t-\int_a^t f(x)g'(x)dx. \tag{1}$$

Endi

$$|g(t)F(t)| \le Mg(t) \qquad (M = \sup|F(t)| < +\infty)$$

bolıwın itibarǵa alsaq, bunnan $t \to +\infty$ da

$$g(t)F(t) \to 0$$

kelip shıǵadı. Beriliwine muwapıq, $g(x)$ funktsiya $[a,+\infty)$ aralıqta úzliksiz differentsiallanıwshı hám usı aralıqta kemeyiwshi funktsiya. Demek, $\forall x \in [a,+\infty)$ da

$$g'(x) \le 0$$

boladı. Usını esapqa alıp tabamız

$$\int_a^t |F(x)g'(x)|dx \le M\int_a^t |g'(x)|dx = -M\int_a^t g'(x)dx =$$
$$= M(g(a) - g(t)) \le M\,g(a) \quad (g(t) \ge 0).$$

Onda

$$\int_a^{+\infty} F(x)g'(x)\,dx$$

menshiksiz integralı jıynaqlı boladı. (1) teńlikte $t \to +\infty$ da limitke ótip, usı

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)g(x)\,dx$$

limittiń bar bolıp hám shekli bolıwın tabamız. Bul bolsa $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ integraldıń jıynaqlı bolıwın bildiredi.►

**Mısal.** $J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx, (\alpha > 0)$ integraldı jıynaqlılıqqa tekseriń.

◄ Berilgen integraldı $J = \int_1^{+\infty} \sin x \frac{1}{x^{\alpha}}dx$ jazıp, $f(x) = \sin x,\ g(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ bolsın. Bul funktsiyalar joqarıda keltirilgen teoremanıń barlıq shártlerin qanaatlandıradı.

1) $f(x) = \sin x$ funktsiya $[1,+\infty)$ aralıqta úzliksiz hám onıń dáslepki funktsiyası $F(x) = -\cos x$ funktsiya $[1,+\infty)$ da shegaralanǵan.

2) $g(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$ funktsiya $[1,+\infty)$ da $g'(x)=-\dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$ tuwındıǵa iye hám ol úzliksiz;

3) $g(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$ funktsiya $[1,+\infty)$ da kemeyiwshi;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha}}=0$. $(\alpha>0)$

Onda Dirixle belgisine muwapıq

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx \qquad (\alpha>0)$$

integralı jıynaqlı boladı. ►

**2. Abel belgisi.** Meyli $f(x)$ hám $g(x)$ funktsiyalar $[a,+\infty)$ aralıqta berilgen bolsın.

**2-teorema (Abel belgisi).** $f(x)$ hám $g(x)$ funktsiyalar tómendegi shártlerin qanaatlandırsın:

1) $f(x)$ funktsiya $[a,+\infty)$ da úzliksiz bolıp, $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ integral jıynaqlı;

2) $g(x)$ funktsiya $[a,+\infty)$ da úzliksiz $g'(x)$ tuwındıǵa iye hám bul tuwındı $[a,+\infty)$ da óz belgisin saqlasın, onda

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

integralı jıynaqlı boladı.

*Menshiksiz integraldıń bas mánisi.*

Meyli $f(x)$ funktsiya $(-\infty,+\infty)$ da berilgen bolıp, bul aralıqtıń qálegen $[t',t]$ $(-\infty<t'<t<+\infty)$ bóleginde integrallanıwshı bolsın,

$$F(t',t)=\int_{t'}^{t} f(x)dx.$$

Bizge belgili, bul

$$\lim_{\substack{t'\to-\infty,\\ t\to+\infty}} F(t',t) = \lim_{\substack{t'\to-\infty\\ t\to+\infty}} \int_{t'}^{t} f(x)\,dx$$

limit $f(x)$ funktsiyanıń $(-\infty,+\infty)$ aralıq boyınsha menshiksiz integralı dep, ol shekli bolsa,

$$\lim_{\substack{t'\to-\infty\\ t\to+\infty}} \int_{t'}^{t} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

menshiksiz integral jıynaqlı delinedi. Bunda $t'$ hám $t$ ózgeriwshilerdiń tárizde $t'\to-\infty$, $t\to+\infty$ ga umtılıwı kózde tutıladı.

Tiykarınan, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ menshiksiz integral jıynaqlı bolsa, onda

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

boladı. Biraq

$$F(t',t) = \int_{t'}^{t} f(x)dx$$

funktsiya, $t'=-t$ bolıp, $t\to+\infty$ da shekli limitke iye bolıwdan $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ menshiksiz integraldıń jıynaqlı bolıwı kelip shıqpaydı.

Máselen, bul

$$F(t',t) = \int_{t'}^{t} \sin x\,dx$$

integral ushın $t'=-t$ bolsa, onda

$$\int_{-t}^{t} \sin x\,dx = 0 \qquad (\forall t > 0)$$

bolıp,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} \sin x\,dx = 0$$

boladı. Biraq

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\, dx$$

menshiksiz integral jıynaqlı emes.

**Anıqlama**. Eger $t' = -t$ bolıp, $t \to +\infty$ da

$$F(t', t) = \int_{-t'}^{t} f(x)dx$$

funktsiyanıń limiti bar bolıp hám shekli bolsa, onda $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ menshiksiz integral bas mánisinde jıynaqlı delinip,

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\, dx$$

limit bolsa $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ menshiksiz integraldıń bas mánisi dep ataladı. Ádette, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ menshiksiz integraldıń bas mánisi

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

kóriniste belgilenedi. Demek,

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\, dx.$$

Bunda $v.p$ belgi frantsuzsha "*valeur principiale*"- "bas mánis" sózlerdiń baslanǵısh háriplerin belgileydi.

Solay etip, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ menshiksiz integral jıynaqlı bolsa, ol bas mánis hám jıynaqlı boladı. Biraq, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ menshiksiz integraldıń bas mánis jıynaqlı bolıwınan onıń jıynaqlı bolıwı hár waqıtta hám kelip shıqpaydı.

## 15.4. Menshiksiz integrallardı esaplaw

**1. Nyuton-Leybnits formulası.**

Meyli $f(x)$ funktsiya $[a,+\infty)$ aralıqta dáslepki $F(x)$ funktsiyaǵa iye hám $x \to +\infty$ da $F(x)$ funktsiya shekli limiti bar bolsın

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty).$$

Onda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty}\int_a^t f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}(F(t)-F(a)) = F(+\infty)-F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty} \qquad (1)$$

boladı. (1) formula Nyuton-Leybnits formulası delinedi.

**1-mısal.** $\int\limits_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$ integraldı esaplań.

◀ Bunnan, $F(x) = \cos\frac{1}{x}$ funktsiya $[\frac{2}{\pi},+\infty)$ aralıqta $f(x) = \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ funktsiyanıń dáslepki funktsiyası boladı.

(1) formuladan paydalanıp tabamız:

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = \cos\frac{1}{x}\Big|_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} = 1. ▶$$

**2. Bóleklep integrallaw.** Meyli $f(x)$ hám $g(x)$ funktsiyalar $[a,+\infty)$ aralıqta úzliksiz hám úzliksiz, $f'(x)$ hám $g'(x)$ tuwındalarǵa iye bolsın.

Eger

1) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\cdot g'(x)dx$ $\left(\int\limits_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx\right)$ integral jıynaqlı,

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)g(x))$ limit bar hám shekli bolsa, onda

$$\int_a^{+\infty} f'(x)\cdot g(x)dx \qquad \left(\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx\right)$$

integral jıynaqlı bolıp,

$$\int_a^{+\infty} f'(x)\cdot g(x)dx = \lim_{x\to+\infty}(f(x)g(x)) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx \qquad (2)$$

$$\left(\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx = \lim_{x\to+\infty}(f(x)g(x)) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx\right)$$

boladı.

(2) formula bóleklep integrallaw formulası delinedi.

**2-mısal .** $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ integraldı esaplań.

◀ Eger $g(x)=x,\ f'(x)=e^{-x}$ dep alsaq, onda $g'(x)=1,\ f(x)=-e^{-x}$ bolıp, (2) formulaǵa muwapıq

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{t+\infty}(-te^{-t}) - 0 + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$$

boladı. ▶

**3. Ózgeriwshilerdi almastırıp integrallaw.**

Meyli

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

menshiksiz integraldı qaraymız. Bul integralda $x=\varphi(z)$ almastırıwdı orınlaymız. Bunda $x=\varphi(z)$ funktsiya tómendegi shártlerdi qanaatlandırsın:

1) $\varphi(z)$ funktsiya $[\alpha,+\infty)$ aralıqta úzliksiz hám úzliksiz $\varphi'(z)$ tuwındıǵa iye;

2) $\varphi(z)$ funktsiya $[\alpha,+\infty)$ da qatań ósiwshi;

3) $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(+\infty)=\lim_{z\to+\infty}\varphi(z)=+\infty$.

Eger

$$\int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)dz$$

menshiksiz integral jıynaqlı bolsa, onda

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

integral hám jıynaqlı bolıp,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z)dz$$

boladı.

**3-mısal.** $J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ integraldı esaplań.

◀ Bul integralda $x = \frac{1}{t}$ almastırıwdı orınlaymız. Nátiyjede

$$J = \int_{+\infty}^{0} \frac{1}{1+\frac{1}{t^4}}(-\frac{1}{t^2})dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^4}$$

bolıp,

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx$$

kelip shıǵadı. Keyingi integralda $x - \frac{1}{x} = z$ dep alamız,

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{2+z^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} arctg \frac{z}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Demek,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \ ▶$$

**4.Menshiksiz integrallardı juwıq esaplaw.**

Meyli $f(x)$ funktsiya $[a,+\infty)$ aralıqta úzliksiz bolıp,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

menshiksiz integral jıynaqlı bolsın. Anıqlamaǵa tiykarlanıp

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx \ ,$$

yamasa

$$\forall\varepsilon > 0 \ , \ \exists t_0 > a \ , \ \forall t > t_0 \ :$$

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)dx - \int_a^t f(x)dx\right| < \varepsilon$$

boladı. Bunnan,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx - \int_a^t f(x) = \int_t^{+\infty} f(x)dx\ .$$

Demek,

$$\left|\int_t^{+\infty} f(x)dx\right| < \varepsilon\,.$$

Nátiyjede

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \approx \int_a^t f(x)dx \tag{5}$$

juwıq formulaǵa kelemiz. Onıń qáteligi

$$\left|\int_t^{+\infty} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

boladı.

**4-mısal.** $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ menshiksiz integral juwıq esaplań.

◀ (5) formulaǵa muwapıq, berilgen integraldı juwıq esaplaw ushın usı

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \approx \int_0^a e^{-x^2}dx \qquad (a>0)$$

formulanı payda etemiz. Onıń qáteligi

$$\int_a^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

teń boladı. Bul qátelikti joqarıdan bahalaymız:

$$\int_a^{+\infty} e^{-x^2}dx \le \frac{1}{a}\int_a^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2a}\int_a^{+\infty} e^{-x^2}d(x^2) = \frac{1}{2a}(-e^{-x^2})_a^{+\infty} = \frac{1}{2a}e^{-a^2}.$$

Meyli $a=1$ bolsın. Onda

$$\int_{a}^{+\infty} e^{-x^2}dx \approx \int_{0}^{1} e^{-x^2}dx$$

bolıp, bul juwıq formulanıń qáteligi ushın

$$\int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}dx \leq 0{,}1839$$

boladı. Meyli $a = 2$ bolsın. Bunda

$$\int_{a}^{+\infty} e^{-x^2}dx \approx \int_{0}^{2} e^{-x^2}dx$$

bolıp, bul juwıq formulanıń qáteligi ushın

$$\int_{2}^{+\infty} e^{-x^2}dx \leq 0{,}00458$$

boladı. Meyli $a = 3$ bolsın . Bul jaǵdayda

$$\int_{a}^{+\infty} e^{-x^2}dx \approx \int_{0}^{3} e^{-x^2}dx$$

bolıp, bul juwıq formulanıń qáteligi ushın

$$\int_{3}^{+\infty} e^{-x^2}dx \leq 0{,}00002$$

boladı. ►

## 15.5. Ekinshi túr menshiksiz integrallar hám olardıń jiynaqlıǵı

Meyli $f(x)$ funktsiya $X \subset R$ kóplikte berilgen bolsın. $x_0 \in R$ tochkanıń usı

$$\dot{U}_\delta(x_0) = \{x \in R;\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta;\ x \neq x_0\}$$

átirapında qaraymız, bunda $\delta$ qálegen oń san.

**1-anıqlama.** Eger $f(x)$ funktsiya

$$X \bigcap \dot{U}_\delta(x_0) \neq \varnothing$$

kóplikte shegaralanbaǵan bolsa, onda $x_0$ tochka $f(x)$ funktsiyanıń ayrıqsha tochkası delinedi.

Máselen, $[a,b)$ da berilgen $f(x)=\dfrac{1}{b-x}$ funktsiya ushın $x_0=b$ ayrıqsha tochka; $R\setminus\{-1;0;1\}$ kóplikte berilgen $f(x)=\dfrac{1}{x(x^2-1)}$ funktsiya ushın $x_0=-1,\ x_1=0,\ x_2=1$ tochkalar ayrıqsha tochkalar boladı.

Meyli $f(x)$ funktsiya $[a,b)$ da berilgen bolıp, $b$ tochka usı funktsiyanıń ayrıqsha tochkası bolsın. Bul funktsiya qálegen $[a,t]$ da $(a<t<b)$ integrallanıwshı bolsın. Bunnan, bul integral $t$ ga baylanıslı boladı:

$$F(t)=\int_a^t f(x)dx \qquad (a<t<b).$$

**2-anıqlama.** Eger $t\to b-0$ da $F(t)$ funktsiyanıń limiti bar bolsa, onda bul limit shegaralanbaǵan $f(x)$ funktsiyanıń $[a,b)$ boyınsha menshiksiz integralı delinedi hám

$$\int_a^b f(x)dx$$

kórinisinde belgilenedi

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to b-0}F(x)=\lim_{t\to b-0}\int_a^t f(x)dx. \qquad (1)$$

**3-anıqlama.** Eger $t\to b-0$ da $F(t)$ funktsiyanıń limiti bar bolıp hám shekli bolsa, onda (1) menshiksiz integral jıynaqlı delinedi.

Eger $t\to b-0$ da $F(t)$ funktsiyanıń limiti sheksiz yamasa limitke iye emes bolsa, onda (1) menshiksiz integral taralıwshı delinedi.

$f(x)$ funktsiya $(a,b]$ da berilgen bolıp, $x_0=a$ tochka onıń ayrıqsha tochkası, $f(x)$ funktsiya $(a,b)$ da berilgen bolıp, $x_0=a$, $x_1=b$ tochkalar onıń ayrıqsha tochkaları bolǵan jaǵdayda usı funktsiyanıń $(a,b]$ hám $(a,b)$ boynsha menshiksiz integralları, olardıń jıynaqlılıǵı hám taralıwshılıǵı joqarıdaǵıday anıqlanadı,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to a+0}F(t)=\lim_{t\to a+0}\int_t^b f(x)dx;$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{t'\to a+0\\ t\to b-0}} F(t',t) = \lim_{\substack{t'\to a+0\\ t\to b-0}} \int_{t'}^{t} f(x)dx.$$

Meyli $f(x)$ funktsiya $(a,b)\setminus\{c\}$ kóplikte $(a<c<b)$ berilgen bolıp, $x_0=a$, $x_1=b, x_2=c$ tochkalar onıń ayrıqsha tochkaları bolsın. Bul funktsiyanıń t

$$\int_{t'}^{t} f(x)dx = \varphi(t',t)\ , \qquad (a<t'<t<c)$$

$$\int_{u'}^{u} f(x)dx = \psi(u',u)\ , \qquad (c<u'<u<b)$$

integralları bar bolsın.

**4-anıqlama.** Eger $t'\to a+0$, $t\to c-0$ hám $u'\to c+0$, $u\to b-0$ da $\varphi(t',t)+\psi(u',u)$ funktsiyanıń limiti

$$\lim_{\substack{t'\to a+0\\ t\to c-0\\ u'\to c+0\\ u\to b-0}} [\varphi(t',t)+\psi(u',u)] = \lim_{\substack{t'\to a+0\\ t\to c-0\\ u'\to c+0\\ u\to b-0}} [\int_{t'}^{t} f(x)dx + \int_{u'}^{u} f(x)dx]$$

bar bolsa, onda bul limit shegaralanbaǵan $f(x)$ funktsiyanıń $(a,b)$ boyınsha menshiksiz integralı delinedi hám

$$\int_a^b f(x)dx$$

kórinisinde belgilenedi. Demek,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{t'\to a+0\\ t\to c-0\\ u'\to c+0\\ u\to b-0}} [\int_{t'}^{t} f(x)dx + \int_{u'}^{u} f(x)dx] \qquad (2)$$

**5-anıqlama.** Eger $t'\to a+0$, $t\to c-0$ hám $u'\to c+0$, $u\to b-0$ da $\varphi(t',t)+\psi(u',u)$ funktsiyanıń limiti bar bolıp hám shekli bolsa, onda (2) integral jıynaqlı delinedi.

**1-mısal.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ integral jıynaqlılıqqa tekseriń.

◄ Bunnan, $x_0=0$ tochka $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ funktsiyanıń ayrıqsha tochkası. Demek, qaralıp atırǵan integral shegaralanbaǵan funktsiyanıń menshiksiz integralı boladı. Anıqlamaǵa tiykarlanıp

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{t\to+0}\int_t^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{t\to+0}2(1-\sqrt{t})=2$$

boladı. Demek, berilgen menshiksiz integral jıynaqlı hám ol 2 ge teń. ►

**2-mısal.** $\int_0^1\frac{dx}{x}$ menshiksiz integral taralıwshı boladı, sebebi

$$\lim_{t\to+0}\int_t^1\frac{dx}{x}=\lim_{t\to+0}(\ln x)_t^1=+\infty.$$

**3-mısal.** $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}}$ integraldı jıynaqlılıqqa tekseriń.

◄ İntegral astındaǵı

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}$$

funktsiya ushın $x_0=0$, $x_1=1$ ayrıqsha tochkalar boladı. Menshiksiz integral anıqlamasınan paydalanıp

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}}==\lim_{\substack{t'\to+0\\ t\to1-0}}\int_{t'}^{t}\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}}=\lim_{\substack{t'\to+0\\ t\to1-0}}[2\arcsin(2x-1)]_{t'}^{t}=$$

$$=2\lim_{\substack{t'\to+0\\ t\to1-0}}[\arcsin(2t-1)-\arcsin(2t'-1)]=2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=2\pi.$$

Demek, integral jıynaqlı. ►

*Menshiksiz integraldıń ápiwayı qásiyetleri.*

1) Eger $\int_a^b f(x)dx$ integral jıynaqlı bolsa, onda

$$\int_c^b f(x)dx\quad(a<c<b)$$

integral hám jıynaqlı boladı hám kerisinshe boladı. Bunda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

teńlik orınlı boladı.

2) Eger $\int_a^b f(x)dx$ integral jıynaqlı bolsa, onda $\int_a^b cf(x)dx$ hám $(c - const)$ hám jıynaqlı bolıp,

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx \qquad (c - const)$$

boladı.

3) Eger $\int_a^b f(x)dx$ integral jıynaqlı bolıp, $\forall x \in [a,b)$ da $f(x) \geq 0$ bolsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

boladı.

4) Eger $\int_a^b f(x)dx$ va $\int_a^b g(x)dx$ integrallar jıynaqlı bolsa, onda $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx$ integral ham jıynaqlı bolıp,

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

boladı.

5) Eger $\int_a^b f(x)dx$ va $\int_a^b g(x)dx$ integrallar jıynaqlı bolıp, $\forall x \in [a,b)$ da $f(x) \leq g(x)$ bolsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

boladı.

*Teris bolmaǵan funktsiyanıń menshiksiz integralları.* Meyli $f(x)$ funktsiya $[a,b)$ da berilgen ($b$ tochka usı funktsiyanıń ayrıqsha tochkası) bolıp, $\forall x \in [a,b)$ da $f(x) \geq 0$ bolsın.

**2-teorema.** $\int_a^b f(x)dx$ menshiksiz integral jıynaqlı bolıwı ushın $\forall t \in (a,b)$ da

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx \leq C, \quad (C = const)$$

teńsizliktiń orınlanıwı zárúrli hám jetkilikli.

**Saldar.** Eger $F(t) = \int_a^t f(x)dx \quad (\forall t \in (a,b))$ joqarıdan shegaralanbaǵan bolsa, onda $\int_a^b f(x)dx$ menshiksiz integral taralıwshı boladı.

*Salıstırıw teoremaları.* Meyli $f(x)$ hám $g(x)$ funktsiyalar $[a,b)$ da berilgen bolıp, $b$ tochka usı funktsiyalardıń ayrıqsha tochkaları bolsın.

**3-teorema.** Eger $\forall x \in [a,b)$ da $0 \leq f(x) \leq g(x)$ bolıp, $\int_a^b g(x)dx$ jıynaqlı bolsa, onda $\int_a^b f(x)dx$ hám jıynaqlı boladı, $\int_a^b f(x)dx$ taralıwshı bolsa, onda $\int_a^b g(x)dx$ taralıwshı boladı.

**4-teorema.** Meyli $f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0)\ x \in [a,b)$ funktsiyaları ushın $\lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$ bolsın. Eger $k < +\infty$ bolıp $\int_a^b g(x)dx$ jıynaqlı bolsa, onda $\int_a^b f(x)dx$ jıynaqlı boladı. Eger $k > 0$ bolıp $\int_a^b g(x)dx$ taralıwshı bolsa, onda $\int_a^b f(x)dx$ taralıwshı boladı.

**Saldar.** 4-teoremanıń shártinde $0<k<+\infty$ bolsa, onda $\int_a^b f(x)dx$ hám $\int_a^b g(x)dx$ integrallar bir waqıtta jıynaqlı yamasa taralıwshı boladı.

**Saldar.** Eger $x$ ózgeriwshiniń $b$ ǵa jeterli jaqın mánislerinde

$$f(x)=\frac{\phi(x)}{(b-x)^{\alpha}},\ (\alpha>0)$$

bolsa, onda

1) $\varphi(x)\le C<+\infty$ hám $\alpha<1$ bolǵanda $\int_a^b f(x)dx$ integral jıynaqlı boladı,

2) $\varphi(x)\ge C>0$ hám $\alpha\ge1$ bolǵanda $\int_a^b f(x)dx$ integral taralıwshı boladı.

**5-mısal.** $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{1-x}}dx$ integraldı jıynaqlılıqqa tekseriń.

◄ İntegral astındaǵı funktsiya $f(x)=\frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{1-x}}=\frac{\cos^2 x}{(1-x)^{\frac{1}{4}}}$ bolıp, $\forall x\in[0,1)$ ushın $\varphi(x)=\cos^2 x\le1,\ \alpha=\frac{1}{4}<1$ boladı. İntegral jıynaqlı boladı. ►

**6-mısal.** $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ integraldı jıynaqlılıkka tekseriń.

◄ Bunda $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ menshiksiz integralı jıynaqlı boladı.

$$\lim_{x\to1-0}\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}}$$

Limitti esaplaymız:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}}=\lim_{x\to 1-0} x\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Onda joqarıdaǵı nátiyjege muwapıq berilgen menshiksiz integraldıń jıynaqlı ekeniligi kelip shıǵadı. ►

*Menshiksiz integraldıń absolyut jıynaqlılıǵı.* Meyli $f(x)$ funktsiya $[a,b)$ da berilgen bolıp, $b$ tochka usı funktsiyanıń ayrıqsha tochkası bolsın. (Bunda $\forall x\in[a,b)$ da $f(x)\geq 0$ bolıwı shárt emes)

Bunnan, usı

$$\int_a^b |f(x)|dx$$

integralı teris bolmaǵan funktsiyanıń menshiksiz integralı boladı.

**5-teorema.** Eger $\int_a^b |f(x)|dx$ integral jıynaqlı bolsa, onda $\int_a^b f(x)dx$ integral hám jıynaqlı boladı.

**6-anıqlama.** Eger $\int_a^b |f(x)|dx$ integral jıynaqlı bolsa, onda $\int_a^b f(x)dx$ absolyut jıynaqlı integral delinedi.

Eger $\int_a^b |f(x)|dx$ integral taralıwshı bolıp, $\int_a^b f(x)dx$ jıynaqlı bolsa, onda $\int_a^b f(x)dx$ shártli jıynaqlı integral delinedi.

*Menshiksiz integrallardı esaplaw.* Meyli $f(x)$ funktsiya $[a,b)$ da úzliksiz bolıp, onıń dáslepki funktsiyası $F(x)$ $x\to b-0$ da shekli limitke iye bolsın

$$\lim_{x\to b-0} F(x)=F(b).$$

Onda

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{x\to b-0}\int_a^t f(x)dx=\lim_{x\to b-0}[F(t)-F(a)]=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$$

boladı. Bul Nyuton-Leybnits formulası delinedi.

Meyli $u(x)$ hám $v(x)$ funktsiyaları $[a,b)$ da berilgen hám usı aralıqta úzliksiz $u'(x)$ hám $v'(x)$ tuwındılarǵa iye bolıp, $b$ tochka $v(x)\cdot u'(x)$ hám $u(x)\cdot v'(x)$ funktsiyalardıń ayrıqsha tochkaları bolsın.

Eger

1) $\int_a^b v(x)du(x)$ integral jıynaqlı;

2) Usı

$$\lim_{x\to b-0} u(t)\cdot v(t)$$

limiti bar bolıp hám shekli bolsa, onda $\int_a^b u(x)dv(x)$ integral jıynaqlı

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x) \qquad (3)$$

boladı, bunda

$$u(b)\cdot v(b) = \lim_{x\to b-0} u(t)\cdot v(t).$$

**7-mısal.** $\int_0^1 \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ integraldı esaplań.

◀ Bul integralda

$$u(x) = x+1,\ dv(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx$$

dep alınsa, onda $du(x) = dx,\quad v(x) = 3(x-1)^{\frac{1}{3}}$ hám

$$u(x)\cdot v(x)\Big|_0^1 = (x+1)\cdot 3(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big|_0^1 = 3,$$

$$\int_0^1 v(x)du(x) = \int_0^1 3(x-1)^{\frac{1}{3}}dx = \frac{9}{4}(x-1)^{\frac{4}{3}}\Big|_0^1 = -\frac{9}{4}$$

bolıp, (3) formulaǵa muwapıq

$$\int_0^1 u(x)\cdot dv(x)=\int_0^1 \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=3-(-\frac{9}{4})=\frac{21}{4}$$

boladı. Demek,

$$\int_0^1 \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\frac{21}{4}. ►$$

Tómendegi

$$\int_a^b f(x)dx$$

menshiksiz integralda ($b$-ayrıqsha tochka) $x=\varphi(z)$ almastırıwdı orınlaymız, bunda $\varphi(z)$ funktsiya $[\alpha,\beta)$ aralıqta úzliksiz $\varphi'(z)>0$ tuwındıǵa iye

$$\varphi(\alpha)=a\ ,\quad \varphi(\beta)=\lim_{z\to\beta-0}\varphi(z)=b\ .$$

Eger

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(z))\varphi'(z)dz$$

integral jıynaqlı bolsa, onda $\int_a^b f(x)dx$ integral da jıynaqlı bolıp,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(z))\varphi'(z)dz$$

boladı.

**8-mısal.** $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ integraldı esaplań.

◄ Bul integralda $x=\varphi(z)=z^2$ almastırıwdı orınlaymız. Bunnan, $x=z^2$ funktsiya $(0,1]$ aralıqta $x'=2z>0$ tuwındıǵa iye hám ol úzliksiz bolıp, $\varphi(0)=0,\ \varphi(1)=1$ boladı. Onda

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=\int_0^1 \frac{2dz}{1+z^2}=2arctgz\Big|_0^1=2\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

boladı. ►

# 16-§. PARAMETRGE BAYLANÍSLÍ INTEGRALLAR

## 16.1. Gamma hám beta funkciyalar hám olardıń qáseytleri, olar arasındaǵı baylanıs

**Beta funkciya.** Meyli

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

parametrge baylanıslı menshiksiz integral beta funkciya delinedi hám $B(a,b)$ arqalı belgilenedi

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \;\; (a>0, b>0)\,.$$

Demek, beta funkciya $\{(a,b)\in R^2 : a\in(0,+\infty), b\in(0,+\infty)\}$ kóplikte anıqlanǵan funkciya.

**1-teorema.** $B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ integralı $M_0=\{(a,b)\in R^2 : a\in[a_0,+\infty), b\in[b_0,+\infty), a_0>0, b_0>0\}$ kóplikte teń ólshewli jiynaqlı boladı.

**Saldar.** $B(a,b)$ funkciya $M=\{(a,b)\in R^2 : a\in(0,+\infty), b\in(0,+\infty)\}$ kóplikte úzliksiz boladı.

$B(a,b)$ *funkciyanıń qaseytleri*.

1) $B(a,b)$ funkciya $a$ hám $b$ argumentlerge qarata simmetriyalı funkciya, yaǵniy,

$$B(a,b)=B(b,a) \;\; (a>0, b>0)$$

boladı.

◀ $B(a,b)$ ańlatıwshı integralda $x=1-t$ ózgeriwshisin almastırsaq,

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=-\int_1^0 (1-t)^{a-1}t^{b-1}dt=\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{a-1}dt=B(b,a)\,. \text{ ▶}$$

2) $B(a,b)$ funkciya

$$B(a,b)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt\,. \qquad (1)$$

orınlı boladı.

◄ $B(a,b)$ integralda $x=\dfrac{t}{1+t}$ ózgeriwshisin almastırsaq

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t}\right)^{a-1}\left(1-\frac{t}{1+t}\right)^{b-1}\frac{dt}{(1+t)^2}=\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt. \text{ ►}$$

Eger (1) da $b=1-a$ $(0<a<1)$ bolsa, onda

$$B(a,1-a)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}}{1+t}dt=\frac{\pi}{\sin\pi a}$$

boladı. Dara jaǵdayda $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi$ boladı.

3) $B(a,b)$ funkciya ushın

$$B(a+1,b)=\frac{a}{a+b}B(a,b)\ \ (a>0,b>0)$$

formula orınlı boladı.

◄ Bóleklep integrallaymız:

$$B(a+1,b)=\int_0^1 x^a(1-x)^{b-1}dx=-\frac{1}{b}\int_0^1 x^a d((1-x)^b)=-\frac{1}{b}x^a(1-x)^b\Big|_0^1+\frac{a}{b}\int_0^1 x^a(1-x)^b dx=$$

$$=\frac{a}{b}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^b=\frac{a}{b}\left[\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx-\int_0^1 x^a(1-x)^{b-1}dx\right]=\frac{a}{b}B(a,b)-\frac{a}{b}B(a+1,b).$$

Saldarda

$$B(a+1,b)=\frac{a}{b}B(a,b)-\frac{a}{b}B(a+1,b) \qquad (2)$$

bolıp, onnan

$$B(a+1,b)=\frac{a}{a+b}B(a,b)$$

kelip shıǵadı. ►

$B(a,b)$ funkciya simmetriyalı bolǵanlıqtan

$$B(a,b+1)=\frac{b}{a+b}B(a,b) \qquad (3)$$

boladı.

**Saldar.** $B(m,n)$ funkciyaǵa $(m\in N, n\in N)$ (2) hám (3) formulalardı tákrar qollansaq

$$B(m,n)=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

kelip shıǵadı.

**Gamma funkciya.** Meyli

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$$

parametrge baylanıslı menshiksiz integral Gamma funkciya delinedi hám $\Gamma(a)$ arqalı belgilenedi,

$$\Gamma(a)=\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx.$$

Demek, Gamma funkciya $(0,+\infty)$ да anıqlanǵan funkciya.

**2-teorema.** $\Gamma(a)=\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ integralı $[a_0,b_0]$ da $(0<a_0<b_0<+\infty)$ teń ólshewli jiynaqlı boladı.

**Saldar.** $\Gamma(a)$ funkciya $(0,+\infty)$ úzliksiz boladı.

$\Gamma(a)$ *funkciyanıń qaseytleri.*

1) Gamma funkciya $(0,+\infty)$ да barlıq tártiptegi úzliksiz tuwındılarǵa iye hám

$$\Gamma^{(n)}(a)=\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}(\ln x)^n dx \quad (n=1,2,3....)$$

boladı.

2) $\Gamma(a)$ funkciya ushın

$$\Gamma(a+1)=a\Gamma(a) \tag{4}$$

formula orınlı boladı.

◄ $\Gamma(a)=\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ integraldı bóleklep integrallaymız. Sonда

$$\Gamma(a+1)=\int_0^{+\infty}x^a e^{-x}dx=-\int_0^{+\infty}x^a d(e^{-x})=-x^a e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+a\int_0^{+\infty}x^{a-1}e^{-x}dx=a\Gamma(a)$$

boladı. ►

**Saldar.** $\Gamma(n)$ funkciyaǵa $(n\in N)$ (4) formulanı tákrar qollasaq $\left(\Gamma(1)=1\right)$

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

kelip shıǵadı.

**Beta hám Gamma funkciyalar arasındaǵı baylanıs.** Beta hám Gamma funkciyalar arasındaǵı baylanıstı kelesi teoremada keltirilgen.

**3-teorema.** $\forall(a,b)\in\{(a,b)\in R^2 : a\in(0,+\infty), b\in(0,+\infty)\}$ ushın

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \tag{5}$$

formula orınlı boladı.

◄ $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$ integralda $x=(1+u)t$, $(t>0)$ ózgeriwshisin almastırırp, $s$ ti $a+b$ ǵa almastıramız. Saldarda

$$\Gamma(a+b)=\int_0^{+\infty}(1+u)^{a+b-1}t^{a+b-1}e^{-(1+u)t}(1+u)dt$$

bolıp,

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+u)^{a+b}}=\int_0^{+\infty}t^{a+b-1}e^{-(1+u)t}dt$$

boladı. Endi bul teńliktiń hár eki tárepin $u^{a-1}$ ǵa kóbeytip, soń $(0,+\infty)$ aralıq boyınsha integrallap

$$\Gamma(a+b)\int_0^{+\infty}\frac{u^{a-1}}{(1+u)^{a+b}}du=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}t^{a+b-1}e^{-(1+u)t}dt\right]u^{a-1}du$$

yaǵniy,

$$\Gamma(a+b)\cdot B(a,b)=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}t^{a+b-1}e^{-(1+u)t}dt\right]u^{a-1}du.$$

Bunnan

$$\Gamma(a+b)\cdot B(a,b)=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}u^{a-1}e^{-(1+u)t}du\right]t^{a+b-1}dt$$

boladı. Integralda $ut = y$ ózgeriwshisin almastırıp

$$\Gamma(a+b)\cdot B(a,b) = \int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} y^{a-1}t^{b-1}e^{-t}e^{-y}dy\right]dt = \int_0^{+\infty} t^{b-1}e^{-t}dt\cdot\int_0^{+\infty} y^{a-1}e^{-y}dy = \Gamma(b)\cdot\Gamma(a).$$

Demek,

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \blacktriangleright$$

**Saldar.** $\forall a\in(0,1)$ ushın

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} \tag{6}$$

boladı.

$\blacktriangleleft$ (5) teńlikte $b = 1-a$ $(0<a<1)$ dep alınsa, onda

$$B(a,1-a) = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a)}{\Gamma(1)}$$

boladı. Bizge belgili

$$B(a,1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},\ \Gamma(1) = 1.$$

Demek,

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},\ (0<a<1). \blacktriangleright$$

Eger (6) formulada $a = \frac{1}{2}$ bolsa, onda $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ kelip shıǵadı.

**1-mısal.** $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ integralın esaplań.

$\blacktriangleleft$Integralda $x^2 = t$ ózgeriwshisin almastırsaq, onda $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$

bolıp,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

boladı. $\blacktriangleright$

**2-mısal.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$ integraldı esaplań.

◀Integralda $1+x^3=\frac{1}{y}$ ózgeriwshisin almastırsaq, onda

$$x=\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\frac{1}{3}},\ \ dx=\frac{1}{3}\left(\frac{1-y}{y}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(-\frac{dy}{y^2}\right),$$

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}=-\frac{1}{3}\int\limits_1^0 y\frac{1}{3}\left(\frac{1-y}{y}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{dy}{y^2}=\frac{1}{3}\int\limits_0^1 y^{-\frac{1}{3}}(1-y)^{-\frac{2}{3}}dy=$$

$$=\frac{1}{3}B(\frac{2}{3},\frac{1}{3})=\frac{1}{3}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{1}{3}\pi}=\frac{\pi}{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

boladı. ▶

# 17-§. ESELI INTEGRALLAR

## 17.1. Eki eseli integral. Eseli integrallardı esaplaw

*Funkciyanıń integral hám Darbu qosındıları.* Meyli tekislikte maydanǵa iye bolǵan $D$ figura (kóplik) berilgen bolsın. Bul kóplikte $f(x,y)$ funkciya anıqlanǵan hám shegaralanǵan. $D$ nıń bazı bir

$$P=\{D_1,D_2...D_n\}$$

бœлакланиши hám hár bir $D_k$ da qálegen $(\xi_k,\eta_k)\in D_k$ noqatın $(k=1,2,....n)$ alıp tómendegi

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\mu D_k$$

qosındını dúzemiz.

**1-anıqlama**. $\sigma=\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\mu D_k$ qosındı $f(x,y)$ funkciyanıń integral qosındısı (Riman qosındısı) delinedi.

Keltirilgen anıqlamadan integral qosındı $f(x,y)$ funkciyaǵa, $D$ kóplik hám onı bólekleniwge usılına hám hár bir $(\xi_k,\eta_k)\in D_k$ noqatlarǵa baylanıslı boladı:

$$\sigma=\sigma_p(f,\xi_k\eta_k).$$

Meyli $f(x,y)$ funkciya $D$ da shegaralanǵan ekan, ol hár bir $D_k$ da $(k=1,2,...,n)$ shegaralanǵan boladı. Demek,

$$m_k=\inf\{f(x,y):(x,y)\in D_k\},\quad M_k=\sup\{f(x,y):(x,y)\in D_k\}$$

bar boladı. $\forall(x,y)\in D_k$ ushın

$$m_k\le f(x,y)\le M_k \tag{1}$$

teńsizlikler orınlı boladı.

**2-anıqlama.** Qosındılar

$$s=\sum_{k=1}^{n} m_k\mu D_k\,,\ S=\sum_{k=1}^{n} M_k\mu D_k$$

sáykes túrde Darbunıń tómengi hám joqarı qosındıları delinedi.

Funkciyanıń Darbu qosındıları $f(x,y)$ funkciyaǵa, $D$ kóplik hám onıń bólekleniwge baylanıslı $s = s_p(f)$, $S = S_p(f)$ bolıp, hár dayım $s \le S$ teńsizlik orınlı boladı. (1) teńsizlikten paydalanıp

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \mu D_k \le \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\mu D_k \le \sum_{k=1}^{n} M_k \mu D_k .$$

Demek,

$$s \le \sigma \le S .$$

**3-anıqlama.** Eger $\forall\varepsilon > 0$ san alǵanda hám sonday $\delta > 0$ san tabılıp, $D$ nıń diametri $\lambda_p < \delta$ bolǵan hár qanday $P$ bólekleniwge, hám hár bir $D_k$ da alınǵan qálegen $(\xi_k, \eta_k)$ lar ushın

$$|\sigma - J| < \varepsilon$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $J$ san $\sigma$ qosındınıń $\lambda_p \to 0$ daǵı limiti delinedi hám

$$\lim_{\lambda_p \to 0} \sigma = J$$

arqalı belginedi.

**4-anıqlama.** Eger $\lambda_p \to 0$ да $f(x,y)$ funkciyanıń integral qosındısı limiti bar boladı hám shekli $J$ ǵa teń bolsa, onda $f(x,y)$ funkciya $D$ da integrallanıwshı delinedi. $J$ sanı bolsa, onda $f(x,y)$ funkciyanıń $D$ boyınsha eki eseli integralı delinedi. Onı tómendegishe

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

belginedi. Demek,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda_p \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\mu D_k .$$

Meyli maydanǵa iye bolǵan $D$ kóplikte $f(x,y)$ funkciya berilgen hám shegaralanǵan bolsın.

**1-teorema**. $f(x,y)$ funkciya $D$ kóplikда integrallanıwshı bolıwı ushın, $\forall\varepsilon > 0$ san alǵanda hám, sonday $\delta > 0$ sanı tabılıp, $D$ nıń diametri $\lambda p < \delta$ bolǵan hár qanday $P$ bólekleniwge qarata Darbu qosındıları

$$S_p(f) - s_p(f) < \varepsilon \qquad (2)$$

teńsizliktiń orınlanıwı zárúrli hám jetkilikli.

**Eki eseli integraldıń qáseytleri.**

1) Meyli $f(x,y)$ funkciya $D$ kóplikte integrallanıwshı bolsın. Eger $D$ nol maydanlı $l$ sızıq penen ulıwma ishki noqatǵa iye bolmaǵan baylamlı $D_1$ hám $D_2$ kópliklerge ajralǵan bolsa, onda $f(x,y)$ funkciya hár bir $D_1$ hám $D_2$ larǵa integrallanıwshı hám

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_{21}} f(x,y)dxdy \qquad (2)$$

boladı. Keriside orınlı, yaǵniy $f(x,y)$ funkciyanıń hár bir $D_1$ hám $D_2$ kópliklerde integrallanıwshı bolsa, onda $D$ da integrallanıwshı bolıp (2) teńlik orınlı boladı.

2) Eger $f(x,y)$ funkciya $D$ da integrallanıwshı bolsa, onda $cf(x,y)$ funkciya $(c = const)$ hám $D$ da integrallanıwshı hám

$$\iint_D cf(x,y)dxdy = c\iint_D f(x,y)dxdy$$

boladı.

3) Eger $f(x,y)$ hám $g(x,y)$ funkciyalar $D$ integrallanıwshı bolsa, onda $f(x,y) \pm g(x,y)$ funkciya hám $D$ integrallanıwshı hám

$$\iint_D [f(x,y) \pm g(x,y)]dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy \pm \iint_D g(x,y)dxdy$$

boladı.

4) Eger $f(x,y)$ funkciya $D$ integrallanıwshı bolıp $\forall(x,y) \in D$ да $f(x,y) \geq 0$ bolsa, onda

$$\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0$$

boladı.

5) Eger $f(x,y)$ hám $g(x,y)$ funkciyalar $D$ da integrallanıwshı bolıp, $\forall(x,y) \in D$ ushın $f(x,y) \leq g(x,y)$ bolsa, onda

$$\iint_D f(x,y)dxdy \leq \iint_D g(x,y)dxdy$$

boladı.

6) Eger $f(x,y)$ funkciya $D$ integrallanıwshı bolsa, onda $|f(x,y)|$ funkciya hám $D$ da integrallanıwshı hám

$$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint_D |f(x,y)|dxdy$$

boladı.

**Orta mánis haqqında teoremalar.** Meyli $f(x,y)$ funkciya maydanǵa iye bolǵan $D$ kóplikte berilgen hám shegaralanǵan bolsın.

**3-teorema.** Eger $f(x,y)$ funkciya $D$ integrallanıwshı bolsa, onda $\alpha$ san $(m \le \alpha \le M)$ tabılıp,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \alpha \mu D$$

boladı.

◀ Joqarıда keltirilgen eki eseli integraldıń qáseytlerinen paydalanıp

$$m \le f(x,y) \le M \Rightarrow \frac{1}{\mu D}\iint_D f(x,y)dxdy = \alpha \Rightarrow \iint_D f(x,y)dxdy = \alpha \mu D$$

$(m \le \alpha \le M)$. ▶

**Saldar.** Eger $f(x,y)$ funkciya baylamlı tuyıq $D$ kóplikte úzliksiz bolsa, onda sonday $(\xi,\eta) \in D$ noqat tabılıp,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\mu D$$

boladı.

**4-teorema.** Eger $f(x,y)$ hám $g(x,y)$ funkciyalar $D$ kóplikte integrallanıwshı bolıp, $\forall(x,y) \in D$ ushın $g(x,y) \ge 0$ (yamasa $g(x,y) \le 0$) bolsa, onda $\alpha$ san $(m \le \alpha \le M)$ tabılıp,

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)dxdy = \alpha \iint_D g(x,y)dxdy$$

boladı.

## Eki eseli integrallardı esaplaw

Meyli $f(x,y)$ funkciya tekislikte $D=\{(x,y)\in R^2:\quad a\le x\le b, c\le y\le d\}$ kóplikte berilgen bolsın. Bul $f(x,y)$ funkciyanıń $D$ boyınsha eki eseli integraldı esaplaw máselesin qaraymız.

**1-teorema**. $f(x,y)$ funkciya tómendegi shártleri orınlı bolsın

1) $f(x,y)$ funkciya $D$ integrallanıwshı,

2) Hár bir $x\in[a,b]$da

$$J(x)=\int_a^b f(x,y)dy$$

integral bar boladı. Onda $J(x)$ funkciya $[a,b]$ integrallanıwshı, yaǵniy

$$\int_a^b J(x)dx=\int_a^b[\int_c^d f(x,y)dy]dx$$

bar boladı hám

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b[\int_c^d f(x,y)dy]dx$$

boladı.

**2-teorema**. $f(x,y)$ funkciya tómendegi shártler orınlı bolsın

1) $f(x,y)$ funkciya $D$ integrallanıwshı,

2) hár bir $y\in[c,d]$

$$J(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

integral bar boladı. Onda $J(y)$ funkciya $[c,d]$ да integrallanıwshı, yaǵniy

$$\int_c^d J(y)dy=\int_c^d[\int_a^b f(x,y)dx]dy$$

bar boladı hám

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d[\int_a^b f(x,y)dx]dy$$

boladı.

**1-saldar.** $f(x,y)$ tómendegi shártler orınlı bolsın:

1) $f(x,y)$ funkciya $D$ да integrallanıwshı,

2) Hár bir $x \in [a,b]$, $\int\limits_c^d f(x,y)dy$ integral bar boladı.

3) Hár bir $y \in [c,d]$, $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ integral bar boladı.

Onda

$$\int\limits_a^b [\int\limits_c^d f(x,y)dy]dx \ , \quad \int\limits_c^d [\int\limits_a^b f(x,y)dx]dy$$

integrallar bar bolıp hám

$$\iint\limits_D f(x,y)dx = \int\limits_a^b [\int\limits_c^d f(x,y)dy]dx = \int\limits_c^d [\int\limits_a^b f(x,y)dx]dy$$

boladı.

**2-saldar**. Eger $f(x,y)$ funkciya $D$ úzliksiz bolsa, onda

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy, \ \int\limits_a^b [\int\limits_c^d f(x,y)dy]dx, \ \int\limits_c^d [\int\limits_a^b f(x,y)dx]dy$$

integrallar bar bolıp hám olar bir–birine teń boladı.

**1-mısal.** $\iint\limits_D x^2 ydxdy$ integraldı esaplań, bunda

$$D = \{(x,y) \in R^2 : 2 \le x \le 5, 1 \le y \le 3\}.$$

◄ $f(x,y) = x^2 y$ funkciya ushın 1–hám 2–teoremalardıń shártleri orınlanadı. Olaрдан paydalanıp

$$\iint\limits_D x^2 ydxdy = \int\limits_1^3 [\int\limits_2^5 x^2 ydx]dy = \int\limits_1^3 (\frac{x^3 y}{3})_{x=2}^{x=5} dy = \frac{1}{3}\int\limits_1^3 (125y - 8y)dy = \frac{117}{3}(\frac{y^2}{2})_1^3 = 156.$$

Sonday-aq,

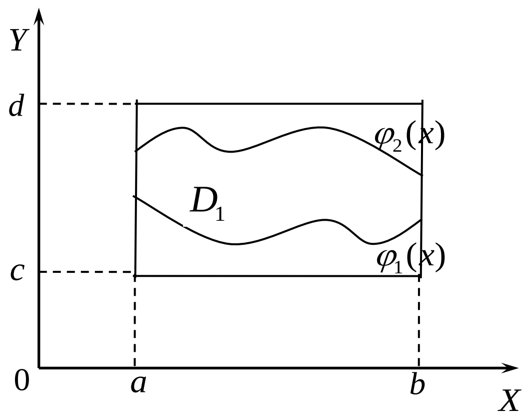
$$\iint\limits_D x^2 ydxdy = \int\limits_2^5 [\int\limits_1^3 x^2 ydy]dx = \int\limits_2^5 (\frac{x^2 y^2}{2})_{y=1}^{y=3} dx = \frac{1}{2}\int\limits_2^5 (9x^2 - x^2)dx = 4(\frac{x^3}{3})_2^5 = 156$$

boladı. ►

Meyli $f(x,y)$ tekislikte

$$D_1 = \{(x,y) \in R^2 : a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

kóplikte berilgen bolsın, bunda $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ funkciyalar $[a,b]$ úzliksiz hám $\forall x\in(a,b)$ da $\varphi_1(x)<\varphi_2(x)$.




34-sızılma

**3-teorema**. $f(x,y)$ funkciya tómendegi shártler orınlı bolsın,

1) $f(x,y)$ funkciya $D$ да integrallanıwshı,

2) Hár bir $x\in[a,b]$, $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ integral bar boladı.

Onda

$$\int\limits_a^b[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy]dx$$

bar bolıp hám

$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy]dx$$

boladı.

Meyli $f(x,\ y)$ funkciya tekisliktegi

$$D_2=\{(x,\ y)\in R^2:\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y),\ c\le y\le d\}$$

да berilgen bolsın, $\psi_1(y)$ hám $\psi_2(y)$ funkciyalar $[c,\ d]$ да úzliksiz hám $\forall y\in(c,\ d)$ да

$$\varphi_1(y)<\varphi_2(y).$$

**4-teorema.** $f(x,\ y)$ funkciya tómendegi shártler orınlı,

1) $f(x,\ y)$ funkciya $D_2$ да integrallanıwshı,

2) hár bir $y \in [c, d]$

$$\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx$$

integral bar bolıp. Onda

$$\int_c^d \left[ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx \right] dy$$

bar boladı hám

$$\iint_{D_2} f(x, y)dxdy = \int_c^d \left[ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx \right] dy$$

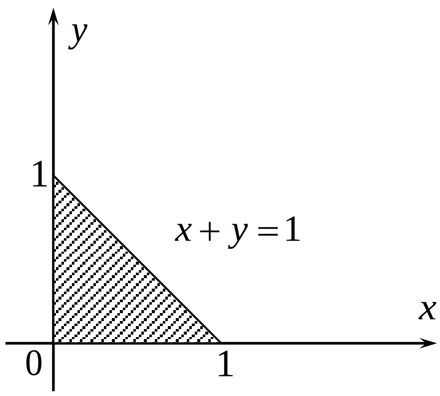
boladı.

**2-mısal.** $J = \iint_D \sqrt{x+y}dxdy$ integraldı esaplań, bunda $D$ kópligi

$$x = 0, \; y = 0, \; x + y = 1$$

sızıqlar penen shegaralanǵan kóplik.

◀ Bul sızıqlar penen shegaralanǵan kóplik 35-sızılmada keltirilgen




35-sızılma

$f(x, y) = \sqrt{x+y}$ funkciya hám $D$ kóplik 3-teoremanıń shártleri orınlanadı. Endi

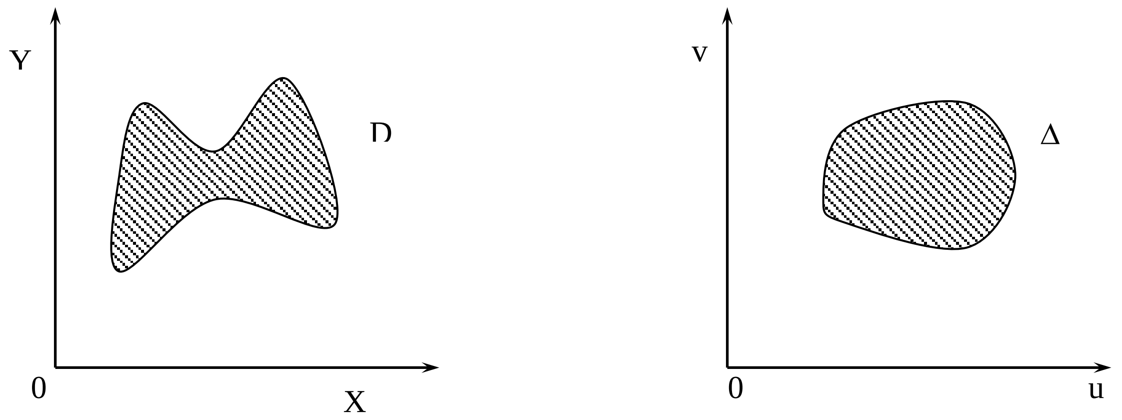
$$D = \{(x, y) \in R^2 : 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le 1 - x\}$$

$$J = \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}dy \right] dx = \int_0^1 \frac{2}{3} \left[ (x+y)^{\frac{3}{2}} \Big|_{y=0}^{y=1-x} \right] dx = \frac{2}{3} \int_0^1 \left( 1 - x^{\frac{3}{2}} \right) dx =$$

$$=\frac{2}{3}\left(x-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{5}. \blacktriangleright$$

### 17.2. Eki eseli integrallarda ózgeriwshilerdi almastırıw

Meyli tekislikte $XOY$ dekart koordinatalar sistemasına qarata shegaralanǵan $D$ kóplik, $uov$ dekart koordinatalar sistemasına qarata bolsa shegaralanǵan $\Delta$ kóplik berilgen bolıp, olardıń shegaraları $\partial D$ hám $\partial\Delta$ lar siypaq tuyıq sızıqlardan ibarat bolsın. (38-sızılma)




38-sızılma

Meyli

$$\begin{cases} x=\varphi(u,v), \\ y=\psi(u,v) \end{cases} \tag{1}$$

sistema $\Delta$ nı $D$ sáwlelendirsin. Bul sáwlelendiriw tómendegi shártler orınlı bolsın

1) Bul óz-ara bir mánisli sáwlelendiriw,

2) $\varphi(u,v)$ hám $\psi(u,v)$ funkciyalar $\Delta$ kóplikte úzliksiz hám úzliksiz barlıq dara tuwındılarǵa iye,

3) Dara tuwındılardan dúzilgen

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

funkcional determinant $\Delta$ da belgisin saqlasın hám $\forall(u,v)\in\Delta$ da $J(u,v)\neq 0$ bolsın. $J(u,v)$ determinant (1) sistemanıń yakobianı delinedi. (1) sáwlelendiriwge keri

$$\begin{cases} u=\varphi(x,y), \\ v=\psi(x,y) \end{cases}$$

sáwlelendiriw bar boladı hám ol $D$ nı $\Delta$ ǵa bir mánisli sáwlelendiredi.

$D$ kópliktıń maydanı

$$\mu D=\iint\limits_{\Delta}|J(u,v)|dudv$$

boladı. Eki eseli integrallarda ózgeriwshilerdi almastırıw

$$\iint\limits_{D} f(x,y)=\iint\limits_{\Delta} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J(u,v)|dudv \tag{5}$$

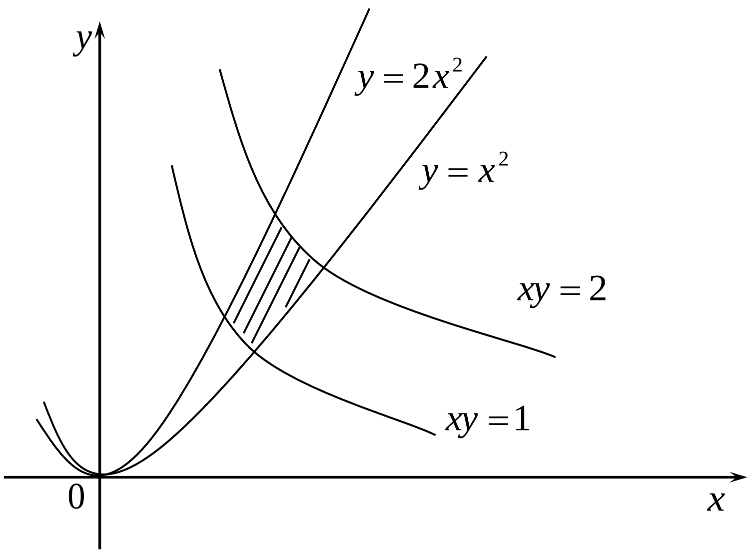
formulası kelip shıǵadı.

**1-mısal.** $\iint\limits_{D} y^3dxdy$ integralın esaplań, $D$ kóplik

$$y=x^2,\ y=2x^2,\ xy=1\ ,\ xy=2$$

sızıqlar penen shegaralanǵan.

◄ Berilgen sızıqlar penen shegaralanǵan $D$ 39-sızılmada kórsetilgen




39-sızılma

Meyli

$$\begin{cases} u = \dfrac{y}{x^2} & (x > 0) \\ v = xy \end{cases} \tag{6}$$

sáwlelendiriwde $\bar{D}$ nıń obrazı $\Delta = \{(u,v) \in R^2 : 1 \le u \le 2, 1 \le v \le 2\}$

(5) sáwlelendiriw óz-ara bir mánisli sáwlelendiriw bolıp, oǵan keri sáwlelendiriw

$$\begin{cases} x = u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}}, \\ y = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}} \end{cases} \tag{6'}$$

boladı. (6) sistemanıń yakobianı

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{3} u^{-\frac{4}{3}} v^{\frac{1}{3}} & \dfrac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}} \\ \dfrac{2}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{2}{3}} & \dfrac{2}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3u}, \quad |J(u,v)| = \frac{1}{3|u|}.$$

Endi $y^3 = uv^2$ esapqa alıp, berilgen integralda (6') almastırıwdı orınlasaq, onda (5) formulaǵa kóre

$$\iint_D y^3 dxdy = \iint_D uv^2 |J(u,v)| dudv$$

boladı. Keyingi integraldı esaplaymız.

$$\iint_D uv^2 |J(u,v)| dudv = \frac{1}{3} \iint_D v^2 dudv = \frac{1}{3} \int_1^2 (\int_1^2 v^2 dv) du = \frac{1}{3} (\frac{8}{3} - \frac{1}{3}) = \frac{7}{9}.$$

Demek,

$$\iint_D y^3 dxdy = \frac{7}{9}. \blacktriangleright$$

### 17.3. Úsh eseli integral. Úsh eseli integraldı esaplaw

Meyli $R^3$ keńislikte shegaralanǵan, hám kólemge iye bolǵan $V$ dene (kóplik) te $f(x,y,z)$ funkciya anıqlanǵan hám shegaralanǵan bolsın.

$$m \le f(x,y,z) \le M \quad ((x,y,z) \in V).$$

$V$ kópliktıń bazı bir

$$P = \{V_1, V_2, ..., V_n\}$$

bólekleniwi hám hár bir $V_k$ da qálegen $(\xi_k, \eta_k, \varsigma_k) \in V_k$ noqatın $(k = 1,2,..,n)$ alıp,

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \varsigma_k) \mu V_k$$

qosındını dúzemiz. Ol $f(x, y, z)$ funkciyanıń integral qosındısı delinedi.

**1-anıqlama.** Eger $\forall \varepsilon > 0$ san alǵanda hám sonday $\delta > 0$ san tabılıp, $V$ kópliktıń diametri $\lambda p < \delta$ bolǵan hár qanday $P$ bólekleniwge hám hár bir $V_k$ alınǵan qálegen $(\xi_k, \eta_k, \varsigma_k)$ lar ushın

$$|\sigma - J| < \varepsilon$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $J$ san $\sigma$ qosındınıń $\lambda p \to 0$ limiti delinedi hám

$$\lim_{\lambda p \to o} \sigma = J$$

arqalı belginedi.

**2-anıqlama**. Eger $\lambda p \to 0$ da $f(x, y, z)$ funkciyanıń integral qosındısı shekli лимитke iye bolsa, onda $f(x, y, z)$ funkciya $V$ kóplikte integrallanıwshı, $J$ sanı bolsa $f(x, y, z)$ funkciyanıń $V$ kóplik boyınsha úsh eseli integralı delinedi hám ol

$$\iiint_V f(x, y, z) dxdydz$$

belginedi. Demek,

$$\iiint_V f(x, y, z) dxdydz = \lim_{\lambda p \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \varsigma_k) \mu V_k \, .$$

$f(x, y, z)$ funkciya $V$ da shegaralanǵanlıǵı ushın

$$m_k = \inf\{ f(x, y, z) : (x, y, z) \in V_k \},$$

$$M_k = \sup\{ f(x, y, z) : (x, y, z) \in V_k \}$$

bar boladı. $s=\sum_{k=1}^{n} m_k \mu V_k$, $S=\sum_{k=1}^{n} M_k \mu V_k$ qosındılar sáykes túrde Darbudıń tómengi hám joqarı qosındıları delinedi. $s=s_p(f)$, $S=S_p(f)$ bolıp, $\{s=s_p(f)\}$, $\{S=S_p(f)\}$ kóplikler shegaralanǵan boladı.

**3-anıqlama**. $\{s_p(f)\}$ kópliktıń anıq joqarı shegarası $f(x,y,z)$ funkciyanıń tómengi úsh eseli integralı delinedi hám

$$\underline{J}=\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

arqalı belginedi.

**4-anıqlama.** $\{S_p(f)\}$ kópliktıń anıq tómengi shegarası $f(x,y,z)$ funkciyanıń joqarı úsh eseli integralı delinedi hám

$$\bar{J}=\overline{\iiint_V} f(x,y,z)dxdydz$$

arqalı belginedi.

**5-anıqlama**. Eger $\underline{J}=\bar{J}$ bolsa, onda $f(x,y,z)$ funkciya $V$ kóplikte integrallanıwshı, olardıń ulıwma mánisi

$$J=\underline{J}=\bar{J}$$

$f(x,y,z)$ funkciyanıń $V$ kóplik boyınsha úsh eseli integralı delinedi.

**1-teorema**. $f(x,y,z)$ funkciyanıń $V$ kóplikte integrallanıwshı bolıwı ushın, $\forall\varepsilon>0$ san alǵanda hám sonday $\delta>0$ san tabılıp, $V$ kópliktiń diametri $\lambda_p<\delta$ bolǵan hár qanday $P$ bólekleniwine qarata Darbu qosındıları

$$S_p(f)-s_p(f)<\varepsilon \tag{1}$$

teńsizlikti qanaatlandırıwı zárúrli hám jetkilikli.

**2-teorema.** Eger $f(x,y,z)$ funkciya shegaralanǵan tuyıq $V$ kóplikte úzliksiz bolsa, onda kóplikte integrallanıwshı boladı.

**Úsh eseli integraldıń qáseytleri.** Úsh eseli integrallar hám eki eseli integraldıń qáseytleri arqalı qáseytlerge iye.

1) $f(x,y,z)$ funkciya $V$ da $\left(V \subset R^3\right)$ integrallanıwshı bolsın. Eger $V$ kóplik nol kólemli $S$ betlik penen ulıwma ishki noqatqa iye bolmaǵan baylamlı $V_1$ hám $V_2$ kópliklerge ajralǵan bolsa, onda $f(x,y,z)$ funkciya hár bir $V_1$ hám $V_2$ kópliklerde integrallanıwshı hám

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{V_2} f(x,y,z)dxdydz$$

boladı.

2) Eger $f(x,y,z)$ funkciya $V$ kóplikte integrallanıwshı bolsa, onda $c \cdot f(x,y,z)$ funkciya ($c = const$) hám $V$ kóplikte integrallanıwshı hám

$$\iiint_V cf(x,y,z)dxdydz = c\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

boladı.

3) Eger $f(x,y,z)$ hám $g(x,y,z)$ funkciyalar $V$ integrallanıwshı bolsa, onda $f(x,y,z) \pm g(x,y,z)$, $f(x,y,z) \cdot g(x,y,z)$ funkciyalar integrallanıwshı hám

$$\iiint_V [f(x,y,z) \pm g(x,y,z)]dxdydz = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz \pm \iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

boladı.

4) Eger $f(x,y,z)$ funkciya $V$ kóplikte integrallanıwshı bolıp, $\forall(x,y,z) \in V$ $f(x,y,z) \geq 0$ bolsa, onda

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \geq 0$$

boladı.

5) Eger $f(x,y,z)$ funkciya $V$ kóplikte integrallanıwshı bolsa, onda $|f(x,y,z)|$ funkciya hám $V$ integrallanıwshı hám

$$\left|\iiint_V f(x,y,z)dxdydz\right| \leq \iiint_V |f(x,y,z)|dxdydz$$

boladı.

6) Eger $f(x,y,z)$ funkciya $V$ kóplikte integrallanıwshı bolsa, onda $\alpha(m \leq \alpha \leq M)$ san tabılıp,

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdxydz = \alpha\mu V \quad (\forall (x,y,z)\in V : m \le f(x,y,z) \le M)$$

boladı.

**Úsh eseli integrallardı esaplaw.** Úsh eseli integrallardı esaplaw formulaları integrallaw kópliktiń kórinisine qarap túrlishe boladı.

a) Meyli $f(x,y,z)$ funkciya $R^3$ keńisliktegi

$$V = \{(x,y,z)\in R^3 : a \le x \le b, c \le y \le d, p \le z \le q\}$$

kóplikte úzliksiz bolsın. Onda

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b [\int_c^d (\int_p^q f(x,y,z)\,dz)dy]dx \tag{2}$$

boladı.

б) Meyli $R^3$ keńisliktegi $V$ kóplik – pásten $z=\psi_1(x,y)$, joqarıdan $z=\psi_2(x,y)$ betlik, (bunda $D\subset R^2$ kóplik $V$ deneniń $X0Y$ tegisliktegi proekciyası) penen shegaralanǵan kóplik bolsın. Eger $V$ da $f(x,y,z)$ úzliksiz, $\psi_1(x,y)$ hám $\psi_2(x,y)$ funkciyalar $D$ da úzliksiz bolsa, onda

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left( \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy \tag{3}$$

boladı.

в) Meyli б) daǵı $D$ kóplik

$$D = \{(x,y)\in R^2 : a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

bolıp, $\varphi_1$ hám $\varphi_2$ funkciyalar $[a,b]$ да úzliksiz bolsın. Onda

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b [\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} (\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz)dy]dx$$

boladı.

**1-mısal**. $J = \iiint_V (x+y+z)dxdydz$ integraldı esaplań, bunda

$$V = \{(x,y,z)\in R^3 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 3, 0 \le z \le 2\}.$$

◄ Joqarıdaǵı (2) formuladan paydalanıp berilgen integraldı esaplaymız:

$$\int_0^1[\int_0^3(\int_0^2(x+y+z)dz)dy]dx=\int_0^1[\int_0^3(xz+yz+\frac{z^2}{2})\Big|_{z=0}^{z=2}dy]dx=\int_0^1[\int_0^3 2(x+y+1)dy]dx=$$

$$=\int_0^1 2(xy+\frac{y^2}{2}+y)\Big|_{y=0}^{y=3}dx=\int_0^1(6x+15)dx=18.\ ►$$

**2-mısal.** $\iiint\limits_{(V)} z^2dxdydz$ integraldı esaplań, bunda $V-$ tómendegi $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konus hám $z=h$ tegislikler menen shegaralanǵan kóplik.

◄ $V$ nıń $XOY$ tegisliktegi proekciyası

$$D=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2\le h^2\}$$

boladı. (3) formuladan paydalansaq

$$J=\iint\limits_D\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^h z^2dz\right)dxdy=\iint\limits_D\left[\frac{h^3}{3}-\frac{1}{3}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]dxdy.$$

Bul integralda

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$$

almastırıp, esaplasaq

$$J=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^h\left(\frac{h^3}{3}-\frac{1}{3}r^3\right)rdr\right]d\varphi=\frac{1}{5}\pi h^5.\ ►$$

## 17.4. Úsh eseli integrallarda ózgeriwshilerdi almastırıw

Meyli $f(x,y,z)$ funkciya $V\subset R^3$ kóplikte berilgen hám úzliksiz bolsın. Meyli

$$\begin{cases} x=\varphi(u,v,w), \\ y=\psi(u,v,w), \\ z=\chi(u,v,w) \end{cases}$$

sistema $\Delta\subset R^3$ kóplikti $V$ kóplikke sáwlelendiredi. Onda

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dzdydz=\iiint\limits_\Delta f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w))|J|dudvdw$$

boladı, bunda

$$J = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} & \frac{dx}{dw} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} & \frac{dy}{dw} \\ \frac{dz}{du} & \frac{dz}{dv} & \frac{dz}{dw} \end{vmatrix}$$

boladı.

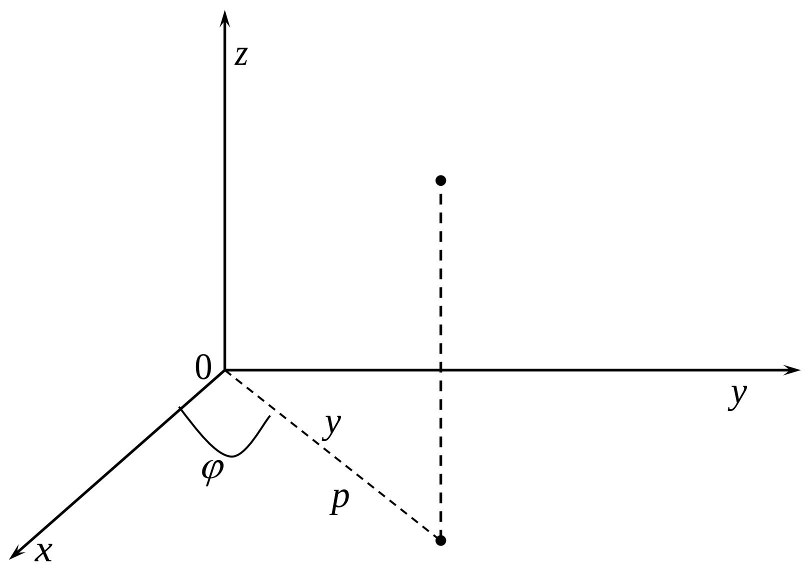
a) Dekart koordinataları $x, y, z$ cilindrlik koordinatalar $p, \varphi, z$ ǵa ótiw

$$x = p\cos\varphi,$$

$$y = p\sin\varphi,$$

$$z = z,$$

$(0 \leq p \leq +\infty,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ -\infty < z < +\infty)$ formulalar járdeminde ámelge asırıladı (45-sızılma).

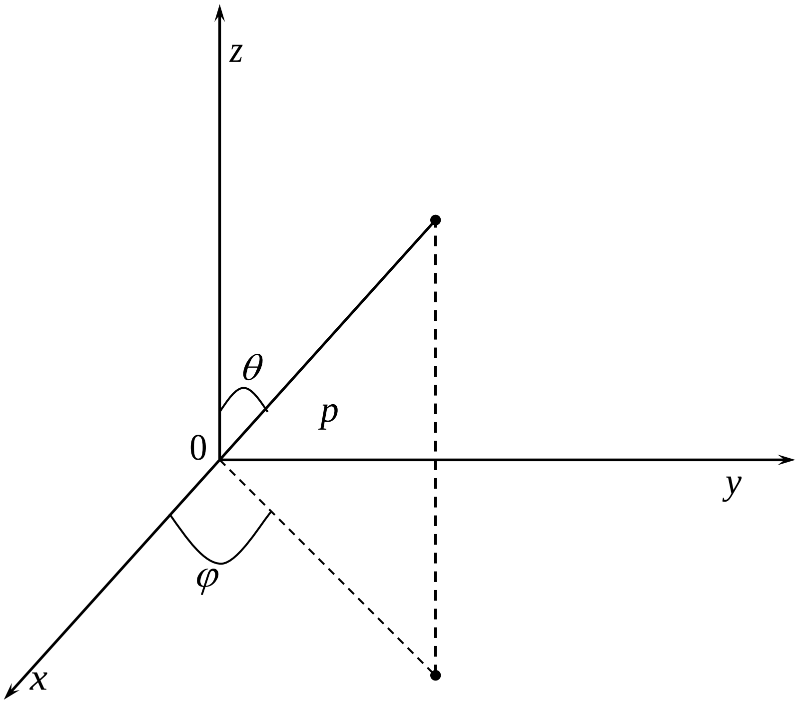



45-sızılma

Bul almastırıwdıń yakobian $J = p$ bolıp,

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_\Delta f(p\cos\varphi,\ p\sin\varphi,\ z)pdpd\varphi dz$$

boladı.




46-sızılma

б) Dekart koordinataları $x, y, z$ sferalıq koordinatalar $p, \varphi, \theta$ ǵa ótiw

$$x = p\sin\theta \cdot \cos\varphi,$$

$$y = p\sin\theta \cdot \sin\varphi,$$

$$z = p\cos\theta$$

$(0 \le p \le +\infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi)$ formulalar arqalı ámelge asırıladı (46-sızılma) almastırıw yakobianı $J = p^2 \sin\theta$ bolıp,

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint_V f(p\sin\theta\cos\varphi,\ p\sin\theta\sin\varphi,\ p\cos\theta)p^2 \sin\theta dp d\varphi d\theta$$

boladı.

**3-mısal.** $\iiint_V zdzdydz$ integraldı esaplań. Bunda $V$ tómendegishe

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{z^2}{h^2} \qquad (h > 0)$$

konustıń joqarı bólegi hám $z = h$ tegislik penen shegaralanǵan kóplik.

◄ Berilgen integralda ózgeriwshini

$$x = p\cos\varphi,$$

$$y = p\sin\varphi,$$

$$z = z$$

almastıramız

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{z^2}{h^2} \Rightarrow \frac{p^2}{r^2} = \frac{z^2}{h^2} \Rightarrow z = \pm \frac{h}{r} p,$$

$$\left(0 \le p \le r,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi\right).$$

Nátiyjede

$$\iiint\limits_V z dxdydz = \int_0^r \left[ \int_0^{2\pi} \left( \int_{\frac{h}{r}p}^{h} pzdz \right) d\varphi \right] dp$$

boladı. Keyingi integraldı

$$\int_0^r \left[ \int_0^{2\pi} \left( p \frac{z^2}{2} \right)_{z=\frac{h}{r}p}^{z=h} d\varphi \right] dp = \int_0^r \left[ \int_0^{2\pi} \left( \frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{2r^2} p^2 \right) p d\varphi \right] dp =$$

$$= \frac{\pi h^2 r^2}{r^2} \int_0^r \left(r^2 - p^2\right) p dp = \pi h^2 \left( \frac{p^2}{2} \right)_0^r = \frac{\pi h^2 r^2}{4}.$$

Demek,

$$J = \frac{\pi h^2 r^2}{4}. \ \blacktriangleright$$

**4-mısal.** $J = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz$ integraldı esaplań, bunda $V$ –

$$x^2 + y^2 + z^2 \le r^2$$

shardan ibarat.

◀ Bul integralda

$$x = p \sin\theta \cos\varphi,$$

$$y = p \sin\theta \sin\varphi,$$

$$z = p \cos\theta$$

almastırıp tabamız. Onda $x^2 + y^2 + z^2 = p^2$, $J = p^2 \sin\theta$ bolıp,

$$0 \le p \le r,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ 0 \le \theta \le \pi$$

boladı. Nátiyjede berilgen integral

$$J=\iiint_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=\int_0^r\left[\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}p^2p^2\sin\theta d\varphi\right)d\theta\right]dp$$

bolıp, bunnan

$$\int_0^r\left[\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}p^4\sin\theta d\varphi\right)d\theta\right]dp=\int_0^r\left[\int_0^{\pi}\left(p^4\sin\theta\cdot 2\pi\right)d\theta\right]dp=4\pi\int_0^r p^4dp=\frac{4\pi r^5}{5}.$$

Demek, $J=\dfrac{4\pi r^5}{5}$. ►

## 17.5. Eseli integraldıń qollanıwları

**Tegis figuranıń maydanı.** Tegislikte maydanǵa iye bolǵan $D$ figura berilgen bolsın. Bul figuranıń maydanı

$$\mu D=\iint_D dxdy \tag{1}$$

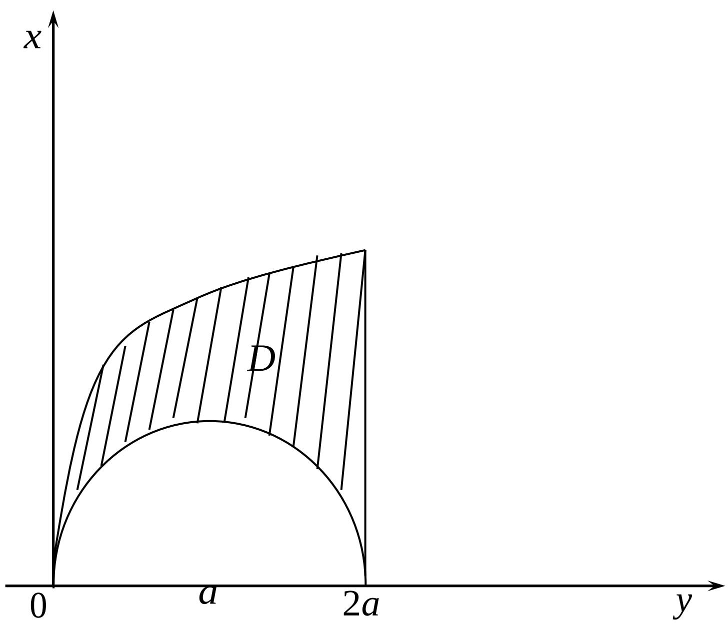
boladı.

**Mısal**. Tegisliktıń birinshi shereginde

$$x^2+y^2=2ax,\ y^2=2ax,\ x=2a\ \ (a>0`)$$

sızıqlar menen shegaralanǵan figuranıń maydanın tabıń.

◄ Bul figura 42-sızılmada keltirilgen.




42-sızılma

(1) formuladan figuranıń maydanı

$$\mu D = \iint_D dxdy$$

bolıp, bunda $D = \left\{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le 2a, \sqrt{2ax - x^2} \le y \le \sqrt{2ax}\right\}$. Integraldı esaplap

$$\mu D = \int_0^{2a} \left( \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} dy \right) dx = \int_0^{2a} (\sqrt{2ax} - \sqrt{2ax - x^2}) dx = \frac{8}{3} a^2 - \frac{\pi}{2} a^2 = \frac{16 - 3\pi}{6} a^2 \text{ . } \blacktriangleright$$

**Deneniń kólemi**. $R^3$ keńislikte Dekart koordinatalar sistemasında jaylasqan $V$ deneni qaraymız. Bul dene joqarıdan $z = f(x,y)$ betlik, qaptal tárepten jasawshıları $Oz$ kósherine parallel cilindrlik betlik hám tómennen $X0Y$ tegisliginde shegaralanǵan tuyıq $D$ kóplik penen shegaralanǵan dene bolsın. Bunda $f(x,y)$ funkciyanı $D$ da úzliksiz dep qaraymız.

$D$ kópliktıń $P = \{D_1, D_2, ..D_n\}$ bólekleniwin alayıq. Onda

$$m_k = \inf\{f(x,y) : (x,y) \in D_k\}, \ M_k = \sup\{f(x,y) : (x,y) \in D_k\}$$

bar boladı boladı. Bunda

$$\mu A = \sum_{k=1}^n m_k \mu D_k \text{ , } \mu B = \sum_{k=1}^n M_k \mu D_k$$

qosındılar sáykes túrde $V$ deneniń ishine jaylasqan $A$ kópjaqlınıń kólemi, $V$ deneni óz ishine alǵan $B$ kópjaqlınıń kólemi bolıp,

$$\mu A \le \mu B$$

boladı. $D$ kóplikti túrli bólekleniwler nátiyjesinde payda bolǵan $\{\mu A\}$ hám $\{\mu B\}$ kópliklerdıń shegaralanǵanlıǵınan $\sup\{\mu A\}$, $\inf\{\mu B\}$ lardıń bar bolıwınan kelip shıǵadı. $f(x,y)$ funkciya tuyıq $D$ kóplikte úzliksiz. Demek, ol $D$ da teń ólshewli úzliksiz. Onda $\forall \varepsilon > 0$ alǵanda hám sonday $\delta > 0$ tabılıp, $D$ kópliktnıń $\lambda p < \delta$ bolǵan qálegen

$$P = \{D_1, D_2, ..D_n\}$$

bólekleniwi ushın hár bir $D_k$ da ($k = 1,2,3,...n$) funkciyanıń terbeliwi

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{\mu D}$$

teńsizlikti qanaatlandıradı. Usılardı esarqa alıp

$$\inf\{\mu B\}-Sup\{\mu A\}\le \mu B-\mu A=\sum_{k=1}^{n}M_k\mu D_k-\sum_{k=1}^{n}m_k\mu D_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\mu D_k<\frac{\varepsilon}{\mu D}D_k=\frac{\varepsilon}{\mu D}\mu D=\varepsilon.$$

Demek,

$$0\le \inf\{\mu B\}-\sup\{\mu A\}\le\varepsilon\,.$$

Keyingi qatnastan

$$\inf\{\mu B\}=\sup\{\mu A\}$$

kelip shıǵadı. Bunnan $V$ dene kólemge iye bolıp hám onıń kólemi $\mu V$ nıń

$$\mu V=\inf\{\mu B\}=\sup\{\mu A\} \tag{2}$$

ekenligin bildiredi. Bunnan $\sup\{\mu B\}=\iint\limits_{\underline{D}} f(x,y)dxdy$, $\inf\{\mu A\}=\overline{\iint\limits_{D}} f(x,y)dxdy$

hám (2) teńlikke kóre

$$\iint\limits_{\bar{D}} f(x,y)dxdy=\overline{\iint\limits_{D}} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{\underline{D}} f(x,y)dxdy \tag{3}$$

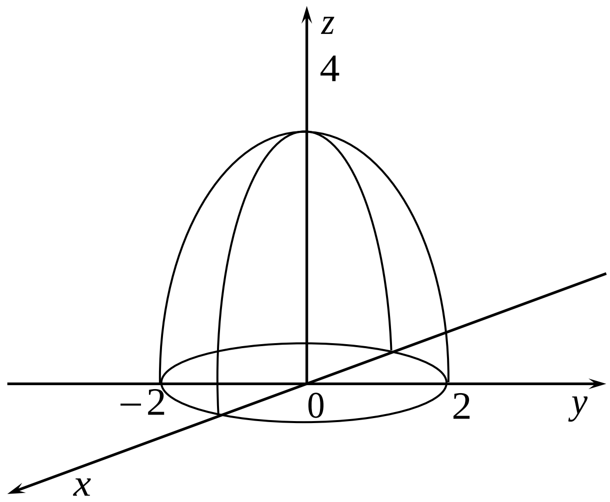
boladı. (2) hám (3) den

$$\mu V=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy \tag{4}$$

kelip shıǵadı.

**2-mısal**. Keńislikte $x^2+y^2+z-4=0$ betlik hám $z=0$ tegislik penen shegaralanǵan deneniń kólemin tabıń.

◀ Bul dene 43-sızılmada keltirilgen bolıp, $D-XoY$ tegislikteǵi $x^2+y^2\le 4$ dóńgelekten ibarat.




43-sızılma

Betliktıń teńlemesin $z = 4 - x^2 - y^2$ kórniste jazıp, (4) formuladan paydalanıp

$$\mu V = \iint_D (4 - x^2 - y^2)dxdy, \qquad (5)$$

bunda

$$D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 4\},$$

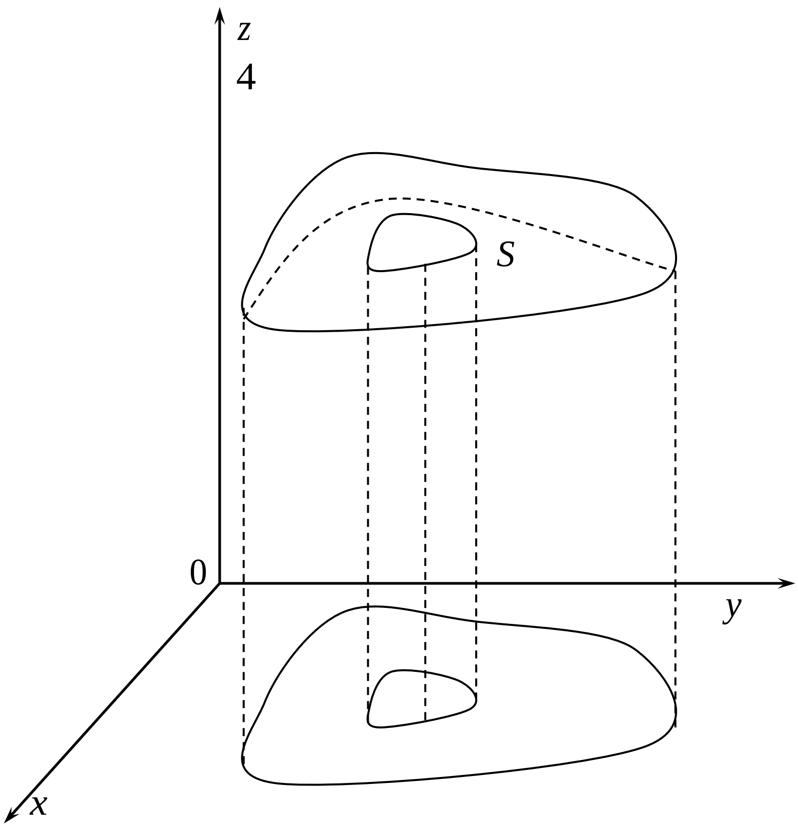
(5) integralda ózgeriwshilerdi $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ almastırıp esaplasaq

$$4 - x^2 - y^2 = 4 - r^2,\ J(r,\varphi) = r,\ 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$\iint_D (4 - x^2 - y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^2 (4 - r^2)rdr\Big)d\varphi = \int_0^{2\pi}\Big(2r^2 - \frac{r^4}{4}\Big)\Big|_0^2 d\varphi = 8\pi .$$

Demek, deneniń kólemi $\mu V = 8\pi$ teń.

**Betliktıń maydanı.** Meyli tegislikte maydanǵa iye bolǵan $D$ kóplikte $z = f(x, y)$ funkciya berilgen bolıp, ol usı kóplikte úzliksiz $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ tuwındılarǵa iye bolsın. Bul funkciyanıń grafigi $R^3$ keńislikte $S$ betlik (44–sızılma) ańlatılǵan.




44– sızılma

Bunday betliktıń maydan túsinigi hám onı eki eseli integral arqalı

$$\mu S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}\,dxdy \tag{6}$$

tabıladı.

**3-mısal**. Tiykarınıń radiusı $r$ , biyikligi $h$ ǵa teń dóńgelek konustıń qaptal betin tabıń.

◀ Konus betlik $z = \frac{h}{r}\sqrt{x^2 + y^2}$ teńleme menen ańlatıladı. (6) formulaǵa kóre konustıń qaptal beti

$$\mu S = \iint_D \sqrt{1 + (z_x'^2(x, y))^2 + (z_y'^2(x, y))^2}\,dxdy$$

boladı, bunda

$$D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \le r^2\}.$$

Eger

$$z_x' = \frac{h}{r}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ z_y' = \frac{h}{r}\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\sqrt{1+(z_x'^2(\xi_k,\eta_k))^2+(z_y'^2(\xi_k,\eta_k))^2}=\sqrt{1+\frac{h^2}{r^2}\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{h^2}{r^2}\frac{x^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{1+\frac{h^2}{r^2}}$$

bolsa, onda

$$\mu S=\iint_D\sqrt{1+\frac{h^2}{x^2}}dxdy=\sqrt{1+\frac{h^2}{x^2}}\iint_D dxdy=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$$

boladı. ►

*Eki eseli integraldıń mexanikada qollanıwları*

Meyli tegislikte massaǵa iye bolǵan materiallıq $D$ figuranıń hár bir $(x,y)\in D$ noqatında tıǵızlıǵı $\rho(x,y)$ bolıp, ol $D$ úzliksiz bolsın. $D$ figuranıń massasın tabamız.

Eger $\rho(x,y)=c-const$ bolsa, onda $D$ figuranıń massası $m=C\mu D$ teń boladı. Eger $\rho(x,y)$ qálegen $(k=1,2,..n)$ úzliksiz funkciya bolsa, onda $D$ figuranıń massasın tabıw ushın $D$ nıń $P=\{D_1,D_2,...,D_n\}$ bólekleniwi hám hár bir $D_k$ da $(k=1,2,..n)$ qálegen $(\xi_k,\varsigma_k)$ noqatın alamız $(\xi_k,\varsigma_k)\in D_k$. Hár bir $D_k$ da $\rho(x,y)$ turaqlı hám onı $\rho(\xi_k,\eta_k)$ ǵa teń bolsa, onda $D_k$ nıń massası $\rho(\xi_k,\eta_k)\mu D_k$ ǵa teń bolıp, $D$ figuranıń massası

$$\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k)\mu D_k \tag{7}$$

teń boladı. $P$ bólekleniwdıń diametri $\lambda_p\to 0$ da (7) qosındınıń limiti $D$ figuranıń massasın ańlatadı. (7) qosındı $\rho(x,\ y)$ funkciyanıń integral qosındısı hám $\rho(x,\ y)$ funkciya $D$ úzliksiz bolǵanlıǵı sebebli bul qosındınıń limiti

$$\iint_D \rho(x,\ y)dxdy$$

boladı. Demek, $D$ figuranıń massası

$$m=\iint_D \rho(x,\ y)dxdy \tag{8}$$

teńlik penen anıqlanadı.

**4-mısal.** Tegislikte $a$ radiuslı dóńgelekli plastinka berilgen bolıp, onıń hár bir $A(x,\ y)$ noqattaǵı tıǵızlıǵı usı noqattan koordinatalar basına shekem bolǵan aralıq proporcional. Dóńgelekli plastinkanıń massasın tabıń.

◀ Dekart koordinatalar sistemasınıń koordinatalar basına dóńgelekli plastinkanıń orayın jaylastıramız. Onda plastinkanıń $A(x, y)$ noqatınan koordinatalar basına shekem bolǵan aralıq $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ bolıp, plastinka tıǵızlıǵı

$$\rho(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$$

boladı, bunda $k$ – proporcionallıq koefficenti. (8) formulaǵa kóre plastinka massası

$$m = \iint_D k\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy$$

boladı, bunda $D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \le r^2\}$. Eki eseli integralda

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ x = r\sin\varphi \end{cases}$$

almastırıwdı orınlap, onı esaplaymız

$$m = \iint_D k\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a k \cdot r \cdot rdr\right)d\varphi = k\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^3}{3}\right)_0^a d\varphi = \frac{2}{3}k\pi a^3 \,. \text{ ▶}$$

Eki eseli integrallar járdeminde statistikalıq momentler

$$M_x = \iint_D yp(x, y)dxdy\,, \ (Ox \text{ kósherine qarata}),$$

$$M_y = \iint_D xp(x, y)dxdy\,, \ (Oy \text{ kósherine qarata})$$

awırlıq orayınıń koordinataları

$$x_0 = \frac{1}{\iint_D dxdy}\iint_D xdxdy, \quad y_0 = \frac{1}{\iint_D dxdy}\iint_D ydxdy,$$

inerciya momentleri

$$J_x = \iint_D y^2 p(x, y)dxdy\,, \ (Ox \text{ kósherine qarata}),$$

$$J_y = \iint_D x^2 p(x, y)dxdy\,, \ (Oy \text{ kósherine qarata})$$

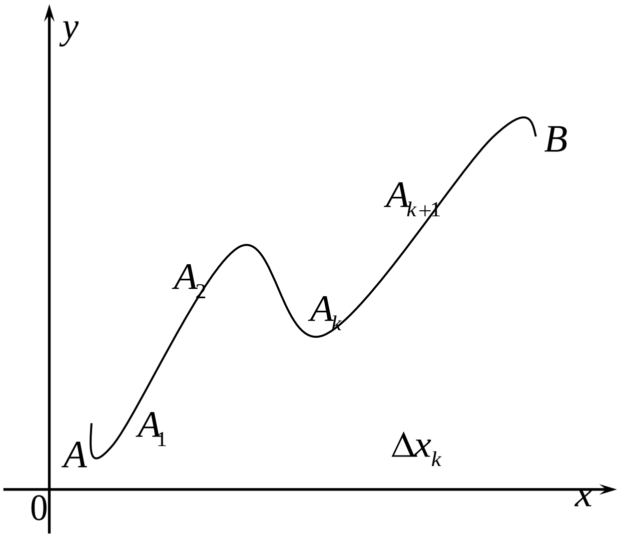
$$J_0 = \iint_D (x^2 + y^2)p(x, y)dxdy \ \text{(koordinatalar basına qarata)}$$

tabıladı.

# 18-§. IYMEK SIZIQLI HÁM BETLIK INTEGRALLAR

## 18.1. Birinshi túr iymek sızıqlı integrallar

**Birinshi túr iymek sızıqlı integral túsinigi.** Tegislikte ápiwayı uzınlıqqa iye bolǵan $\breve{A}B$ iymek sızıqtı qaraymız. (47-sızılma)




47-sızılma

Bul iymek sızıqta A dan B ǵa qarap baǵıtı oń baǵıt dep, onıń

$$A_0, A_1, ..., A_{n-1}, A_n \quad (A_0 = A, A_n = B)$$

noqatlar járdeminde payda bolǵan $P = \{A_0, A_1, ..., A_{n-1}, A_n\}$ bólekleniwin alamız. Nátiyjede $\breve{A}B$ iymek sızıq $A_k \breve{A}_{k+1}\,(k = 0,1,2,...,n-1)$ bóleklerge ajraladı. Onıń uzınlıǵın $\Delta S_k \quad (k = 0,1,2,...,n-1)$ bolsa $P$ bóleklewdıń diametri $\lambda_p = \max\limits_k\{\Delta S_k\}$ boladı.

Meyli $\breve{A}B$ iymek sızıqta $f(x, y)$ funkciya anıqlanǵan bolsın. $((x, y) \in \breve{A}B)$. Hár bir $\breve{A}_k A_{k+1}$ qálegen $(\xi_k, \eta_k)$ noqattı alıp, soń bul noqattaǵı $f(x, y)$ funkciyanıń mánisi $f(\xi_k, \eta_k)$ $\Delta S_k$ kóbeytip

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k$$

qosındını payda etemiz.

**Anıqlama.** Eger $\forall \varepsilon > 0$ alǵanda sonday $\delta > 0$ san tabılıp, $\breve{A}B$ iymek sızıqtıń diametri $\lambda_p < \delta$ bolǵan hár qanday $P$ bóleklew ushın dúzilgen $\sigma$ qosındı qálegen $(\xi_k, \eta_k) \in \breve{A}_k A_{k+1}$ noqatlarda

$$|\sigma - J| < \varepsilon$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x,y)$ funkciya $\breve{A}B$ iymek sızıq boyınsha integrallanıwshı dep, $J$ sanı $f(x,y)$ funkciyanıń $\breve{A}B$ iymek sızıq boyınsha birinshi túr iymek sızıqlı integralı delinedi. Ol

$$\int_{\breve{A}B} f(x,y)ds$$

arqalı belgilenedi. Demek

$$\int_{\breve{A}B} f(x,\ y)ds = \lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k,\ \eta_k)\Delta S_k\ .$$

Birinshi túr iymek sızıqlı integralı $\breve{A}B$ iymek sızıqtıń baǵıtına baylanıslı bolmaydı.

$$\int_{\breve{A}B} f(x,y)ds = \int_{\breve{B}A} f(x,y)ds\,.$$

**Birinshi túr iymek sızıqlı integraldıń bar bolıwı hám onı esaplaw.** Birinshi túr iymek sızıqlı integraldıń anıqlamasınan kórinip tur, ol berilgen $f(x,y)$ funkciya hám $\breve{A}B$ iymek sızıqqa baylanıslı boladı.

Meyli $\breve{A}B$ ápiwayı sıypaq iymek sızıq

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

teńlemeler sistemasi menen anıqlanǵan hám

$$A = (x(\alpha), y(\beta)),\ B = (x(\beta), y(\beta))$$

bolsın. Usı iymek sızıqta $f(x,y)$ funkciya berilgen.

**Teorema.** Eger $f(x,y)$ funkciya $\breve{A}B$ úzliksiz bolsa, onda birinshi túr iymek sızıqlı integral

$$\int_{\breve{A}B} f(x,y)ds$$

bar bolıp,

$$\int\limits_{\breve{A}B} f(x,y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$$

boladı.

Bul teorema birinshi túr iymek sızıqlı integraldıń bar bolıwın ańlatıw menen birge onı esaplaw imkanın beredi.

**1-saldar.** Meyli $\breve{A}B$ iymek sızıq $y = y(x)\ (a \le x \le b)$ teńleme menen anıqlanǵan bolıp, $y(x)$ funkciya $[a,b]$ úzliksiz hám úzliksiz $y'(x)$ tuwındıǵa iye bolsın ( $y(a) = A$, $y(b) = B$ ).

Eger $f(x,y)$ funkciya $\breve{A}B$ iymek sızıqta úzliksiz bolsa, onda $\int\limits_{\breve{A}B} f(x,y)ds$ birinshi túr iymek sızıqlı integral bar bolıp

$$\int\limits_{\breve{A}B} f(x,y)ds = \int\limits_{a}^{b} f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx \tag{4}$$

boladı.

**2-saldar.** Meyli $\breve{A}B$ iymek sızıq poliyar koordinatalar sistemasında

$$\rho = \rho(\theta) \qquad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

teńleme menen anıqlanǵan bolsın, bunda $\rho = \rho(\theta)$ funkciya $[\alpha,\beta]$ segmentte úzliksiz hám úzliksiz $\rho'$ tuwındıǵa iye bolsın. Bul iymek sızıqta $f(x,y)$ funkciya anıqlanǵan hám úzliksiz. Onda $\int\limits_{\breve{A}B} f(x,y)ds$ birinshi túr iymek sızıqlı integral bar bolıp

$$\int\limits_{\breve{A}B} f(x,y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta \tag{5}$$

boladı.

**1-mısal.** $J = \int\limits_{\breve{A}B} \frac{x}{y}ds$ integraldı esaplań, bunda $\breve{A}B$ iymek sızıq $y^2 = 2x$ parabolanıń $(1,\ \sqrt{2})$, $(2,\ 2)$ noqatları arasındaǵı bolegi.

◀ (4) formuladan paydalanıp

$$J=\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{2x}}\sqrt{1+\left(\sqrt{2x}\right)'^2}\,dx\,.$$

$$J=\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{2x}}\frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{2x}}dx=\frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{1+2x}dx=\frac{1}{6}\left(5\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right).\ ►$$

**Birinshi túr iymek sızıqlı integrallardıń bazı bir qollanıwları.** Birinshi túr iymek sızıqlı integrallar járdeminde iymek sızıqtıń uzınlıǵın, deneniń massasın, awırlıq orayın, inerciya momentlerin tabıw arqalı máseleler sheshiledi.

1. Tegislikte uzınlıqqa iye bolǵan $\breve{AB}$ iymek sızıqtıń uzınlıǵı

$$S=\int_{\breve{AB}}ds, \tag{6}$$

integral járdeminde tabıladı.

2. Tegislikte uzınlıqqa iye bolǵan $\breve{AB}$ iymek sızıǵı boyınsha massa tarqatılǵan bolıp, onıń tıǵızlıǵı $\rho=\rho(x,y)$ bolsın. Bul iymek sızıqtıń massası

$$m=\int_{\breve{AB}}\rho(x,y)ds, \tag{7}$$

awırlıq orayınıń koordinataları bolsa

$$x_0=\frac{1}{m}\int_{\breve{AB}}x\rho(x,y)ds,\quad y_0=\frac{1}{m}\int_{\breve{AB}}y\rho(x,y)ds \tag{8}$$

integrallar járdeminde tabıladı.

3. Tegislikte uzınlıqqa iye bolǵan $\breve{AB}$ iymek sızıqtıń $Ox$ hám $Oy$ koordinata kósherine qarata statistikalıq momentleri

$$S_x=\int_{\breve{AB}}yds,\quad S_y=\int_{\breve{AB}}xds \tag{9}$$

formula menen sol kósherge qarata inerciya momentleri bolsa

$$J_x=\int_{\breve{AB}}y^2ds,\quad J_y=\int_{\breve{AB}}x^2ds \tag{10}$$

integrallar járdeminde tabıladı.

**3-mısal.** $\begin{cases}x(t)=a\cos^3 t,\\ y(t)=a\sin^3 t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ teńlemeler sisteması menen anıqlanǵan $\breve{AB}$ iymek sızıqtıń uzınlıǵın tabıń.

◄ (6) formulalarıdan paydalanıp

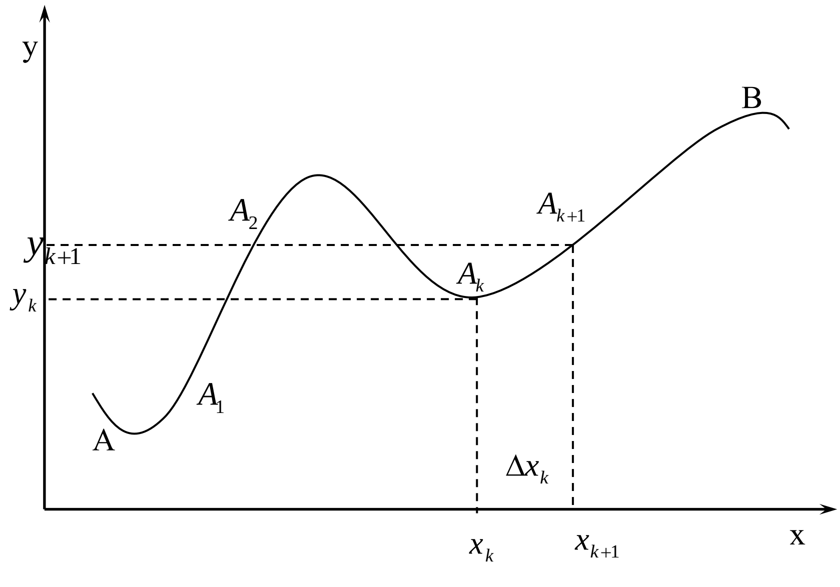
$$S = \int\limits_{\breve{AB}} ds = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{9a^2}{4}\sin^2 2t}\,dt = 6a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt = 6a\,. \blacktriangleright$$

**Eskertiw.** Meyli $\breve{AB}$ iymek sızıq keńisliktiń iymek sızıǵı bolıp, bul sızıqta $f(x,y,z)$ funkciya berilgen bolsın. Joqarıdaǵıday $f(x,y,z)$ funkciyanıń $\breve{AB}$ iymek sızıq boyınsha birinshi túr iymek sızıqlı integral túsinigi kiritiledi hám úyreniledi.

## 18.2. Ekinshi túr iymek sızıqlı integral

Tegislikte (ápiwayı) uzınlıqqa iye bolǵan $\breve{AB}$ iymek sızıqtı qaraymız (48-sızılma)




48-sızılma

Bul iymek sızıqtıń bazı bir $P = \{A_0, A_1, A_2, ..., A_n\}, (A_0 = A, A_n = B)$ bólekleniwin alamız. Nátiyjede $\breve{AB}$ iymek sızıq $\breve{A_k A_{k+1}}$ $(k = 0,1,2,...n-1)$ bólekshelerge ajraladı. $\breve{A_k A_{k+1}}$ nıń $OX$ hám $OY$ koordinatalar kósherlerdegi proekciyaları sáykes túrde $\Delta x_k$ hám $\Delta y_k$ bolsın:

$$np_{ox}\breve{A_k A_{k+1}} = \Delta x_k, \quad np_{oy}\breve{A_k A_{k+1}} = \Delta y_k \qquad (k = 0,1,2,...n-1).$$

Meyli $\breve{AB}$ iymek sızıqta $f(x,y)$ funkciya berilgen bolsın. Hár bir $A_k\breve{A}_{k+1}$ da qálegen $(\xi_k,\eta_k)$ noqatlarnı alıp, soń bul noqattağı funkciyanıń mánisi $f(\xi_k,\eta_k)$ $\Delta x_k$ hám $\Delta y_k$ larğa kóbeytip

$$\sigma_1=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k,\ \ \sigma_2=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k$$

qosındılardı payda etemiz. Bul qosındılar $f(x,y)$ funkciyağa baylanıslı bolıwı menen birge $\breve{AB}$ iymek sızıqtı bóleklewge hám hár bir $A_k\breve{A}_{k+1}$ alınğan $(\xi_k,\eta_k)$ noqatlarğa baylanıslı boladı.

**1-anıqlama.** Eger $\forall\varepsilon>0$ alğanda, sonday $\delta>0$ san tabılıp, $\breve{AB}$ iymek sızıqtıń diametri $\lambda_p<\delta$ bolğan hár qanday $P$ bóleklew ushın dúzilgen $\sigma_1(\sigma_2)$ qosındı qálegen $(\xi_k,\eta_k)\in A_k\breve{A}_{k+1}$ noqatlarda

$$|\sigma_1-J_1|<\varepsilon\ \ (|\sigma_2-J_2|<\varepsilon)$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x,y)$ funkciya $\breve{AB}$ iymek sızıq boyınsha integral-lanıwshı, $J_1$ san ($J_2$san) bolsa $f(x,y)$ funkciyanıń ekinshi túr iymek sızıqlı integralı delinedi. Ol $\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)dx,\ \ (\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)dy)$ arqalı belgilenedi. Demek,

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)dx=\lim_{\lambda_p\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k,\ \left(\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)dy=\lim_{\lambda_p\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right)$$

Keltirilgen anıqlamadan tómendegi kelip shığadı:

1) $f(x,y)$ funkciyanıń $\breve{AB}$ iymek sızıq boyınsha ekinshi túr iymek sızıqlı integralı ekew boladı:

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)dx,\quad \int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)dy.$$

Meyli $\breve{AB}$ iymek sızığında $P(x,y)$ hám $Q(x,y)$ funkciyalar berilgen bolıp, $\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)dx,\ \int\limits_{\breve{AB}} Q(x,y)dy$ lar bolsa olardıń ekinshi túr iymek sızıqlı integralları bolsın. Bul

$$\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y)dx+\int\limits_{\breve{AB}} Q(x,y)dy$$

qosındı ekinshi túr iymek sızıqlı integraldıń ulıwma kórinisi delinedi hám

$$\int_{\breve{A}B} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

arqalı belgilenedi:

$$\int_{\breve{A}B} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\breve{A}B} P(x,y)dx + \int_{\breve{A}B} Q(x,y)dy \, .$$

2) $f(x,y)$ funkciyanıń ekinshi túr iymek sızıqlı integralları $A\breve{B}$ iymek sızıqtıń baǵıtına baylanıslı bolıp,

$$\int_{B\breve{A}} f(x,y)dx = -\int_{\breve{A}B} f(x,y)dx, \quad \int_{B\breve{A}} f(x,y)dy = -\int_{\breve{A}B} f(x,y)dy$$

boladı.

3) Eger $A\breve{B}$ iymek sızıq $OX$ koordinatalar kósherine ($OY$ koordinatalar kósherine) perpendikulyar bolǵan tuwrı sızıq kesimnen ibarat bolsa

$$\int_{B\breve{A}} f(x,y)dy = 0 \quad \left( \int_{\breve{A}B} f(x,y)dy = 0 \right)$$

boladı.

Meyli $A\breve{B}$ keńislikte ápiwayı uzınlıqqa iye bolǵan iymek sızıq bolıp, bul iymek sızıqta $f(x,y,z)$ funkciya berilgen bolsın. $f(x,y,z)$ funkciyanı ekinshi túr iymek sızıqlı integrallar anıqlanadı hám tómendegishe belgilenedi:

$$\int_{A\breve{B}} f(x,y,z)dx, \quad \int_{A\breve{B}} f(x,y,z)dy, \quad \int_{A\breve{B}} f(x,y,z)dz$$

$$\int_{A\breve{B}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \, .$$

**Ekinshi túr iymek sızıqlı integraldıń bar bolıwı hám onı esaplaw.**

Meyli $A\breve{B}$ iymek sızıq

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta) \qquad (1)$$

teńlemeler sisteması menen anıqlanǵan bolıp, $x = x(t)$ funkciya $[\alpha,\beta]$ úzliksiz, $x'(t)$ tuwındıǵa iye, $y(t)$ funkciya $[\alpha,\beta]$ úzliksiz hám $\mathrm{A} = (x(\alpha), y(\alpha))$, $B = (x(\beta), y(\beta))$ bolsın. $t$ parametr $\alpha$ dan $\beta$ ǵa qarap ózgergende $A\breve{B}$ iymek sızıqtıń $(x,y) = (x(t), y(t))$ noqatı $A$ dan $B$ qarap $A\breve{B}$ nı sızamız.

**1-teorema**. Eger $f(x,y)$ funkciya $\breve{AB}$ da úzliksiz bolsa, onda ekinshi túr iymek sızıqlı integral

$$\int_{\breve{AB}} f(x,y)dx$$

bar bolıp,

$$\int_{\breve{AB}} f(x,y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))x'(t)dt \qquad (2)$$

boladı.

Meyli (1) sistemadaǵı $x(t)$, $y(t)$ funkciyalar $[\alpha, \beta]$ úzliksiz bolıp, $y(t)$ funkciya bolsa úzliksiz $y'(t)$ tuwındıǵa iye bolsın.

**2-teorema.** Eger $f(x,y)$ funkciya $\breve{AB}$ úzliksiz bolsa, onda ekinshi túr iymek sızıqlı integral

$$\int_{\breve{AB}} f(x,y)dy$$

bar bolıp,

$$\int_{\breve{AB}} f(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))y'(t)dt \qquad (4)$$

boladı.

Meyli (1) sistemadaǵı $x(t), y(t)$ funkciyalar $[\alpha, \beta]$ úzliksiz $x'(t), y'(t)$ tuwındılarǵa iye bolsın.

**3-teorema.** Eger $P(x,y)$ hám $Q(x,y)$ funkciyalar $\breve{AB}$ úzliksiz bolsa, onda iymek sızıqlı integral

$$\int_{\breve{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

bar bolıp,

$$\int_{\breve{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]dt \qquad (5)$$

boladı.

Eger $\breve{AB}$ iymek sızıq $y = y(x), (a \le x \le b)$, $x = x(y)$ $(c \le y \le d)$ teńlemeler menen berilgen bolsa, onda iymek sızıqlı integrallar ápiwayı kóriniske iye boladı.

Meyli $\breve{AB}$ iymek sızıq $y = y(x)$ $(a \le x \le b)$ teńleme menen berilgen bolıp, $y(x)$ funkciya $[a,b]$ úzliksiz, $y'(x)$ tuwındıǵa iye bolsın. Onda (2) hám (5) formulalar tómendegi

$$\int_{\breve{AB}} f(x,y)dx = \int_a^b f(x,y(x))dx, \qquad (6)$$

$$\int_{\breve{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)]dx \qquad (7)$$

kóriniske keledi. Meyli $\breve{AB}$ iymek sızıq $x = x(y)$ $(c \le y \le d)$ teńleme menen berilgen bolıp, $x = x(y)$ funkciya $[c,d]$ да úzliksiz $x'(y)$ tuwındıǵa iye bolsın. Onda (4) hám (5) formulalar tómendegi

$$\int_{\breve{AB}} f(x,y)dy = \int_c^d f(x(y),y)dy, \qquad (8)$$

$$\int_{\breve{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_c^d [P(x(y),y)x'(y) + Q(x(y),y)]dy \qquad (9)$$

kóriniske keledi.

**1-mısal.** $J_1 = \int_{\breve{AB}} (x^2 - y^2)dx,\ J_2 = \int_{\breve{AB}} (x^2 - y^2)dy$ integrallar esaplań. Bunda $\breve{AB}$ iymek sızıq $y = x^2$ parabolanıń abcissaları $x = 0, x = 2$ bolǵan noqatları arasındaǵı bólegi.

◀ $\breve{AB}$ iymek sızıq $y = x^2$ teńleme menen anıqlanıp, $J_1$ integraldı esaplawda (6) formuladan paydalanamız

$$J_1 = \int_{\breve{AB}} (x^2 - y^2)dx = \int_0^2 (x^2 - x^4)dx = -\frac{56}{15}.$$

$J_2$ integralda integrallaw iymek sızıǵı $x^2 = y$ bolıp, (8) formulaǵa kóre

$$J_2 = \int_{\breve{AB}} (x^2 - y^2)dy = \int_0^4 (y - y^2)dy = -\frac{40}{3}$$

boladı. ▶

**2-mısal.** $\int\limits_{A\breve{B}} y^2dx + x^2dy$ integraldı esaplań, bunda $A\breve{B}$ iymek sızıq $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipstıń joqarı yarım tegisliktegi bólegi.

◀Bul ellipstıń parametrlik teńlemesi

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$$

boladı. $A=(a,0)$ noqatqa parametrdıń $t=0$ mánisi, $B=(-a,0)$ noqatqa $t=\pi$ mánisi sáykes kelip, $t$ parametr $0$ den $\pi$ ge ózgergende $(x,y)$ noqat $A$ dan $B$ ǵa qarap ellipstıń joqarı yarım tegisliktegi bólegin sızadı.

Meyli $P(x,y)=y^2, Q(x,y)=x^2$ funkciyalar $A\breve{B}$ úzliksiz. Berilgen integraldı (5) formuladan paydalanıp esaplaymız

$$\int\limits_{A\breve{B}} y^2dx + x^2dy = \int\limits_0^{\pi}[b^2\sin^2 t(-a\sin t) + a^2\cos^2 t\, b\cos t]dt =$$

$$= ab\int\limits_0^{\pi}(a\cos^3 t - b\sin^3 t)dt = -\frac{4}{3}ab^2. \text{ ▶}$$

**Ekinshi túr iymek sızıqlı integraldıń bazı bir qollanıwları.** Ekinshi túr iymek sızıqlı integrallar járdeminde tegis figuranıń maydanı, kúsh tásirinde bolǵan maydanda orınlanǵan jumıs tabıladı hám basqa túrli fizikalıq hám mexanikalıq máseleler sheshiledi. Tegislikte bazı bir maydanǵa iye bolǵan $D$ figura berilgen bolıp, onıń shegarası tuwrılanıwshı tuyıq $\partial D$ sızıqtan ibarat bolsın. Bul figuranıń maydanı

$$\mu D = \int\limits_{\partial D} xdy\ , \quad \mu D = -\int\limits_{\partial D} ydx \qquad \mu D = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D} xdy - ydx \qquad (10)$$

formulalar járdeminde tabıladı.

Meyli uzınlıqqa iye bolǵan $A\breve{B}$ iymek sızıq berilgen bolıp, onıń hár bir $(x,y)$ noqatı

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$$

kúsh tásirinde bolsın. Onda $A$ noqatı $B$ noqatqa ótkiziwde orınlanǵan jumıs

$$W = \int_{\breve{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (11)$$

boladı.

**4-mısal.** $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ ellips penen shegaralanǵan figuranıń maydanın tabıń.

◀Bul figuranıń maydanı (10) formulaǵa kóre

$$\mu D = \frac{1}{2} \oint_{\partial(D)} xdy - ydx$$

boladı. Iymek sızıqlı integraldı esaplaymız

$$\mu D = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a\cos t \cdot b\cos t + b\sin t \cdot a\sin t)dt =$$

$$= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)dt = \pi ab \,. \text{ ▶}$$

**5-mısal.** $\breve{AB}$ iymek sızıǵı $y = x^3$ sızıqtıń (0,0) hám (1,1) noqatları arasındaǵı bólegi bolıp, onıń hár bir noqatı

$$\vec{F}(x,y) = 4x^6 \vec{i} + xy \vec{j}$$

kúsh tásirinde bolsın. Bul kúsh tásirinde orınlanǵan jumıstı tabıń.

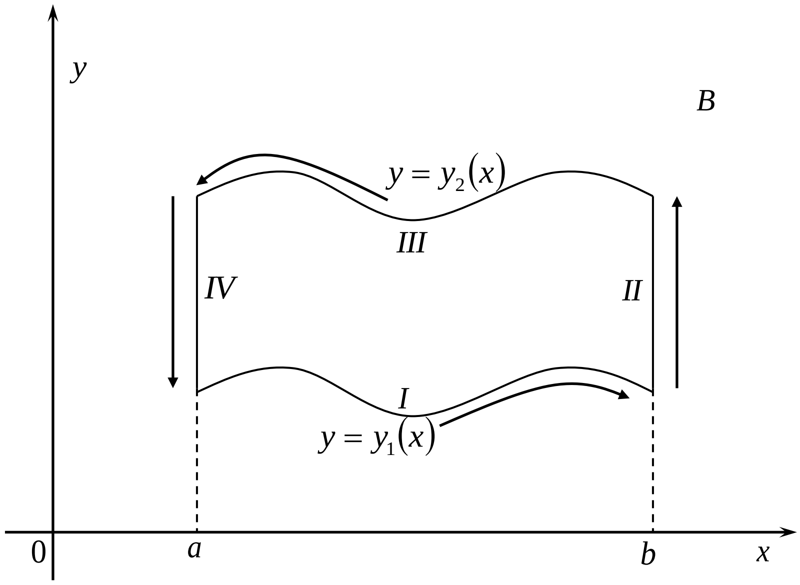
◀ (11) formuladan paydalanıp $P(x,y) = 4x^6,\ Q(x,y) = xy$ bolıwın esapqa alsaq, onda orınlanǵan jumıs

$$W = \int_{\breve{AB}} 4x^6 dx + xydy = \int_0^1 (4x^6 + x \cdot x^3 \cdot 3x^2)dx = 1$$

boladı. ▶

## 18.3. Grin formulası. Grin formulasınıń qollanıwları

**Grin formulası.** Tegislikte $y = y_1(x), y = y_2(x)$ $(a \le x \le b, y_1(x) \le y_2(x))$ hám $x = a, x = b$ sızıqlar menen shegaralanǵan $D_1$ kóplikti alayıq, bunda $y_1(x)$ hám $y_2(x)$ funkciyalar $[a,b]$ úzliksiz. (51-sızılma)




51-sızılma

Meyli $D_1$ shegarası $\partial D_1$ - I, II, III, IV sızıqlarǵa ajraladı (bunda II hám IV sızıqlar noqatlarǵa aylanıw múmkin).

Meyli $\overline{D}=D_1\cup\partial D_1$ da $P(x,y)$ funkciya úzliksiz bolıp, ol úzliksiz $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ dara tuwındıǵa iye bolsın. $\int\limits_{\partial D_1} P(x,y)dx$ iymek sızıqlı integraldı qaraymız.

$$\int\limits_{\partial D_1} P(x,y)dx=\int\limits_{I} P(x,y)dx+\int\limits_{II} P(x,y)dx+\int\limits_{III} P(x,y)dx+\int\limits_{IV} P(x,y)dx$$

alamız. II hám IV sızıqlar $OX$ kósherine perpendikulyar bolǵanlıǵı sebebli

$$\int\limits_{II} P(x,y)dx=\int\limits_{IV} P(x,y)dx=0$$

bolıp,

$$\int\limits_{\partial D_1} P(x,y)dx=\int\limits_{I} P(x,y)dx+\int\limits_{III} P(x,y)dx$$

boladı. Endi

$$\int\limits_{I} P(x,y)dx+\int\limits_{III} P(x,y)dx=\int\limits_{a}^{b} P(x,y_1(x))dx+\int\limits_{a}^{b} P(x,y_2(x))dx=$$

$$=\int\limits_{a}^{b}\left[P(x,y_1)-P(x,y_2)\right]dx=-\int\limits_{a}^{b} P(x,y)\ \Big|_{y=y_1}^{y=y_2} dx=$$

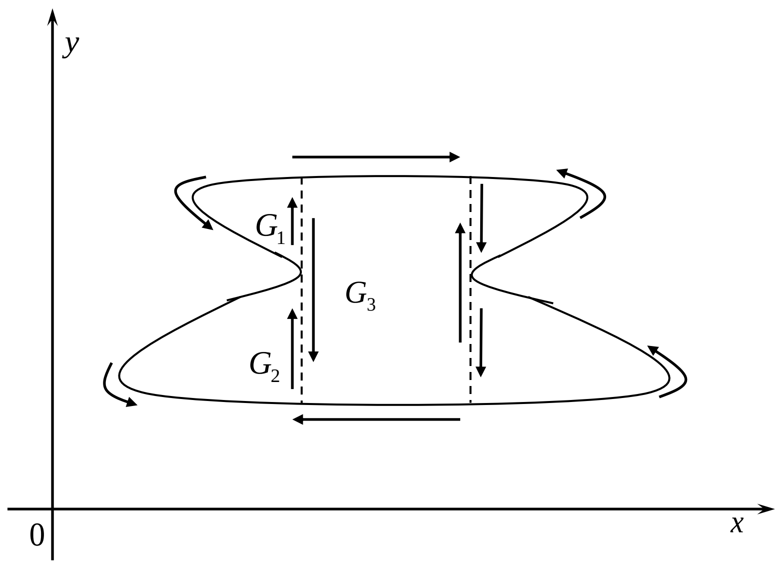
$$= -\int_a^b \left[ \int_{y=y_1}^{y=y_2} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy \right] dx = -\iint_{D_1} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy$$

bolsa, onda

$$\int_{\partial D_1} P(x,y)dx - \iint_{D_1} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy \qquad (1)$$

теńlikke iye bolamız.

Meyli tegisliktegi $G$ kóplik sonday bolsınкi, onı joqarıdaǵı $D_1$ arqalı $G_k$ $(k = 1,2,3...)$ ajratıw múmkin bolsın. (52-sızılma)

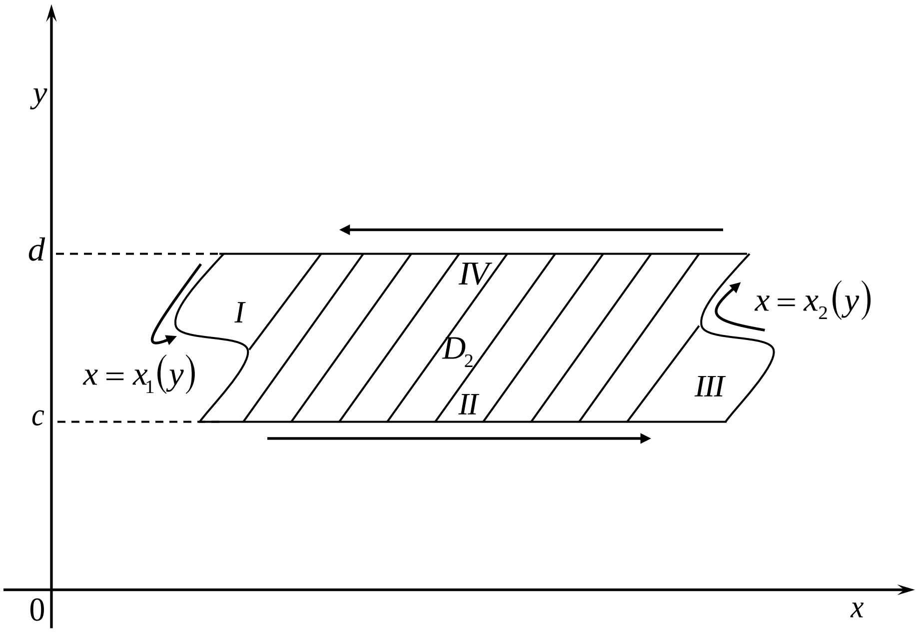



52-sızılma

Bunday kóplik ushın hám (1) formula orınlı boladı:

$$\int_{\partial G_1} P(x,y)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial G_k} P(x,y)dx = \sum_{k=1}^{n} \left( -\iint_{G_k} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy \right) = -\iint_{G} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy .$$

Endi tegislikte $x = x_1(y), x = x_2(y)$, $(c \le y \le d)$ hám $y = c, y = d$ sızıqlar menen shegaralanǵan $D_2$ kóplikti alayıq, bunda $x_1(y)$, $x_2(y)$ funkciyalar $[c,d]$ da úzliksiz. (53-sızılma)




53-sızılma

Meyli $D_2$ shegarası $\partial D_2$ - I, II, III, IV sızıqlarǵa ajraladı (bunda II hám IV sızıqlar noqatlarǵa aylanıw múmkin).

Meyli $\overline{D_2} = D_2 \cup \partial D_2$ da $Q(x, y)$ funkciya úzliksiz bolıp, ol úzliksiz $\dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ dara tuwındıǵa iye bolsın. $\int\limits_{\partial G_2} Q(x, y)dy$ iymek sızıqlı integraldı qaraymız.

$$\int\limits_{\partial G_2} Q(x, y)dy = \int\limits_{I} Q(x, y)dy + \int\limits_{II} Q(x, y)dy + \int\limits_{III} Q(x, y)dy + \int\limits_{IV} Q(x, y)dy$$

jazıp alamız. II hám IV sızıqlar $OY$ kósherine perpendikulyar bolǵanlıǵı sebebli

$$\int\limits_{II} Q(x, y)dy = \int\limits_{IV} Q(x, y)dy = 0$$

bolıp,

$$\int\limits_{\partial G_2} Q(x, y)dy = \int\limits_{I} Q(x, y)dy + \int\limits_{III} Q(x, y)dy$$

boladı. Endi

$$\int\limits_{I} Q(x, y)dy + \int\limits_{III} Q(x, y)dy = \int\limits_{c}^{d} Q(x_1(y), y)dy +$$

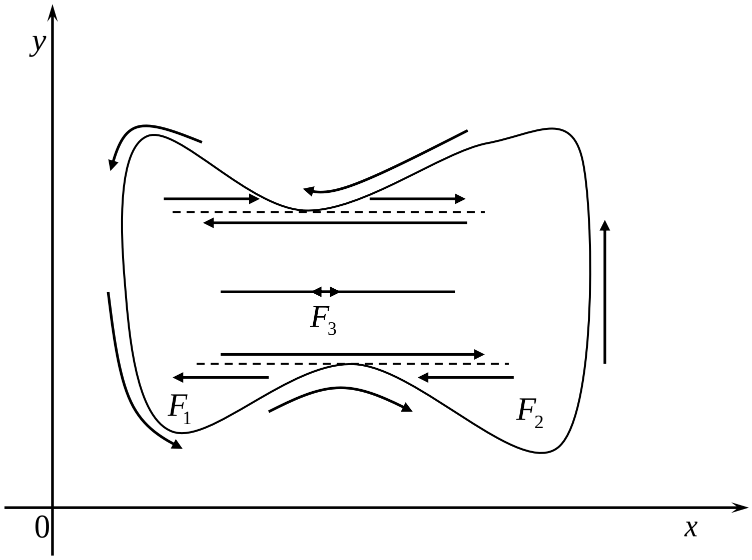
$$+ \int\limits_{c}^{d} Q(x_2(y), y)dy = \int\limits_{c}^{d} [Q(x_1, y) - Q(x_2, y)]dy =$$

$$= \int_c^d Q(x,y)\Big|_{x=x_1}^{x=x_2} dy = \int_c^d \left[ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dx \right] dy = \iint_{D_2} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy$$

esapqa alıp

$$\int_{\partial G_2} Q(x,y)dy = \iint_{D_2} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy. \qquad (2)$$

Meyli tegisliktegi $F$ kóplik sonday bolıp, onı (gorizontal sızıqlar járdeminde) joqarıdaǵı $D_2$ arqalı $F_k$ $(k = 1,2,3...)$ larǵa ajratıw múmkin bolsın. (54- sızılma)




54- sızılma

Bunday kóplik ushın hám (2) formula orınlı boladı

$$\int_{\partial F} Q(x,y)dy = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\partial F_k} Q(x,y)dy = \sum_{k=1}^{n} \left( \iint_{F_k} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy \right) = \iint_{G} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy$$

Meyli tegisliktegi $D$ kóplik joqarıdaǵı $D_1$ hám $D_2$ qáseytke iye bolıp, onda $P(x,y)$, $Q(x,y)$ funkciyalar úzliksiz hám úzliksiz $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}, \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ dara tuwındılarǵa iye bolsın. Onda $P(x,y)$ hám $Q(x,y)$ funkciyalar ushın (1) hám (2) formulalar orınlı boladı. Olardı aǵzama-aǵza qossaq

$$\int_{\partial D} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{D} \left( \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy. \qquad (3)$$

Bul Grin formulası delinedi. Demek, Grin formulası kóplik boyınsha alınǵan eki eseli integral menen sol kóplik shegarası boyınsha alınǵan iymek sızıqlı integraldı baylanısın ańlatadı.

**Grin formulasınıń bazı bir bir qollanıwları.** Meyli joqarıda keltirilgen bir baylamlı $D$ kóplikte $P(x,y),\ Q(x,y)$ funkciyalar úzliksiz hám úzliksiz dara tuwındılarǵa iye bolsın. Onda Grin formulası (3) orınlı boladı.

Grin formulasınan paydalanıp, tegis figuranıń maydanınıń iymek sızıqlı integral járdeminde ańlatılıwı, yakobiannıń geometriyalıq mánisin hám bazı bir tastıyıqlawlarnıń ekvivalentligin kórsetiw múmkin.

**1) Tegis figura maydanınıń iymek sızıqlı integral arqalı ańlatılıwı.** Meyli $P^*(x,y),\ Q^*(x,y)$ funkciyalar $D$ kóplikte joqarıda keltirilgen shártlerin qanaatlandırıwı menen birge

$$\frac{\partial Q^*(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P^*(x,y)}{\partial y}\equiv 1$$

shártti qanaatlandırsın. Onda

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q^*(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P^*(x,y)}{\partial y}\right)dxdy=\mu D$$

bolıp, Grin formulasına kóre

$$\mu D=\int_{\partial D}P^*(x,y)dx+Q^*(x,y)dy$$

boladı. Dara jaǵdayda $P^*(x,y)=-y,\ Q(x,y)=0$ yamasa $P^*(x,y)=0,\ Q(x,y)=x$ yamasa $P^*(x,y)=-\frac{1}{2}y,\ Q(x,y)=\frac{1}{2}x$ bolsa, onda

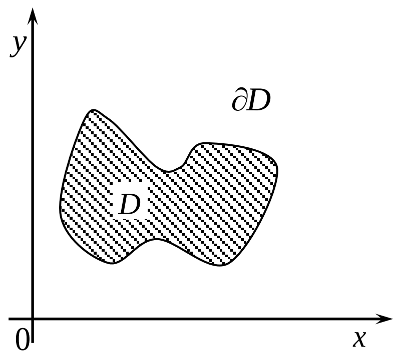
$$\frac{\partial Q^*(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P^*(x,y)}{\partial y}\equiv 1$$

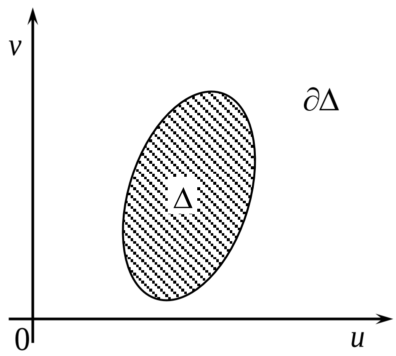
bolıp, kópliktıń maydanı

$$\mu D=-\oint_{\partial D}ydx=\oint_{\partial D}xdy=\frac{1}{2}\oint_{\partial D}xdy-ydx \tag{4}$$

boladı.

**2) Yakobiannıń geometriyalıq mánisi.** Meyli $XOY$ tegislikte $D$ kóplik berilgen bolıp, onıń shegarası $\partial D$ bolsın. (55-sızılma). $UOV$ tegislikte $\Delta$ kóplik berilgen bolıp, onıń shegarası $\partial\Delta$ bolsın. (56-sızılma).




55-sızılma 56-sızılma

Meyli $D$ hám $\Delta$ kóplik noqatları arasında óz-ara bir mánisli sáykeslik ornatılǵan bolıp, olar

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

formula menen ańlatılsın. Bunda $x(u,v), y(u,v)$ funkciyalar tuyıq $\Delta$ kóplikte úzliksiz hám úzliksiz dara tuwındılarǵa iye bolsın. $\Delta$ kóplik shegarası $\partial\Delta$ sızıq

$$\begin{cases} u = u(t), \\ v = v(t) \end{cases} \quad (t_1 \le t \le t_2)$$

parametrlik teńleme menen ańlatılsın. Bunda $u(t), v(t)$ funkciyalar $[t_1, t_2]$ aralıqta úzliksiz hám úzliksiz tuwındılarǵa iye. Onda $D$ kópliktıń shegarası $\partial D$

$$\begin{cases} x = x(u(t), v(t)) = x(t), \\ y = y(u(t), v(t)) = y(t) \end{cases} \quad (t_1 \le t \le t_2)$$

teńlemeler sisteması menen anıqlanadı. Bunda $\partial\Delta$ nıń noqatlarǵa $\partial D$ nıń noqatları sáykes keledi. Bizge belgili

$$\mu D = \int\limits_{\partial D} x dy. \qquad (5)$$

Bul teńliktıń óń tárepindegi integral ushın

$$\oint_{\partial D} xdy = \int_{t_1}^{t_2} x\frac{dy}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_2} x\left(\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}\right)dt = \pm\int_{\partial\Delta} x\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) \quad (6)$$

boladı. ($t$ parametr $t_1$ dan $t_2$ ǵa qarap ózgergende $\partial D$ iymek sızıq oń baǵıtta bolsa, onda $\partial\Delta$ iymek sızıqtıń baǵıtı oń hám teris hám bolıwı múmkin. Sonıń ushın

$$\int_{\partial D} xdy, \quad \int_{\partial\Delta}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right)$$

bir-birinen belgi menen parq qıladı. Eger $\partial D$ oń baǵıtına $\partial\Delta$ nıń oń baǵıtı sáykes kelse, onda «$+$» belgi alınadı, keri jaǵdayda «-» belgi alınadı.)

Grin formulasınan paydalanıp

$$\pm\oint_{\partial\Delta} x\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) = \pm\iint_{\Delta}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(x\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(x\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right]dudv =$$

$$= \pm\iint_{\Delta}\left[\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right]dudy = \pm\iint_{\Delta}\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} = \pm\iint_{\Delta} J(u,v)dudy. \quad (7)$$

(5), (6) hám (7) teńliklerden

$$\mu D = \pm\int_{\Delta} J(u,v)dudv$$

kelip shıǵadı. Orta mánisi haqqında teoremaǵa kóre

$$\pm\int_{\Delta} J(u,v)dudv = \pm J(\xi,\eta)\cdot\mu\Delta$$

boladı. Demek,

$$\mu D = |J(\xi,\eta)|\cdot\mu\Delta$$

bolıp, onnan

$$|J(\xi,\eta)| = \frac{\mu D}{\mu\Delta}$$

bolıwın tabamız.

## 18.4. Birinshi túr betlik integralı

**Birinshi túr betlik integralı túsinigi.** Keńislikte

$$z = z(x, y) \qquad (1)$$

teńleme menen anıqlanǵan $S$ betlikti qaraymız. Bunda $z(x, y)$ funkciya $D \subset R^2$ kóplikte úzliksiz hám úzliksiz $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ dara tuwındılarǵa iye. Meyli (1) betlik maydanǵa iye bolıp, onıń maydanı

$$\mu S = \iint_D \sqrt{1 + z'^2_x(x, y) + z'^2_y(x, y)}\, dxdy$$

boladı.

Meyli $S$ betlikte $f(x, y, z)$ funkciya berilgen bolsın. $S$ betlikti ondaǵı sızıqlar járdeminde $S_1, S_2, ..., S_n$ bólekshelerge ajratıp, onıń $P = \{S_1, S_2, ..., S_n\}$ bóleklewin payda qılamız. Bul bóleklewdıń diametrin $\lambda p$ deymiz. Endi hár bir $S_k$ $(k = 1,2,3,4,...,n)$ qálegen $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ noqatın alıp, bul noqattaǵı funkciyanıń mánisi $f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ ti $S_k$ nıń maydanı $\mu S_k$ ǵa kóbeytemiz hám

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\mu S_k \qquad (2)$$

qosındıńı dúzemiz. Qosındı $f(x, y, z)$ funkciyaǵa, $P$ bóleklewge hám $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ noqatqa baylanıslı boladı:

$$\sigma = \sigma(f, P, (\xi_k, \eta_k, \zeta_k)).$$

(2) qosındı $f(x, y, z)$ funkciyanıń integral qosındısı (Riman qosındısı) delinedi.

**1-anıqlama.** Eger $\forall \varepsilon > 0$ alǵanda hám sonday $\delta > 0$ tabılıp, $S$ betliktıń diametrи $\lambda_p < \delta$ bolǵan hár qanday bóleklew ushın dúzilgen $\sigma$ qosındı qálegen $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in S_K$ noqatta

$$|\sigma - J| < \varepsilon$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x,y,z)$ funkciya $S$ betlik boyınsha integrallanıwshı delinip, $J$ san bolsa $f(x,y,z)$ funkciyanıń birinshi túr betlik integralı delinedi. Birinshi túr betlik integralı

$$\iint_S f(x,y,z)ds$$

arqalı belgilenedi:

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\mu S_k .$$

Birinshi túr betlik integralı $S$ betliktıń tárepine baylanıslı bolmaydı. Dara $f(x,y,z)=1$ bolsa, onda

$$\iint_S ds = \mu S$$

boladı.

Meyli $f(x,y,z)$ funkciya (1) teńleme menen berilgen $S$ betlikte anıqlanǵan bolsın.

**1-teorema.** Eger $f(x,y,z)$ funkciya $S$ betlikte úzliksiz bolsa, onda bul funkciyanıń betlik boyınsha birinshi túr betlik integralı bar bolıp hám

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}dxdy \quad (3)$$

boladı. Eger keńisliktegi $S$ betlik $x=x(y,z)$ teńleme menen anıqlanǵan bolıp, bunda $x=x(y,z)$ funkciya úzliksiz hám úzliksiz $x_y'(y,z)$, $x_z'(y,z)$ dara tuwındılarǵa iye bolsa, bul betlikte úzliksiz bolǵan $f(x,y,z)$ funkciyanıń birinshi túr betlik integralı bar bolıp hám

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y'^2(y,z)+x_z'^2(y,z)}dydz \qquad (7)$$

boladı. Eger keńisliktegi $S$ betlik $y=y(z,x)$ teńleme menen anıqlanǵan bolıp, bunda $y=y(z,x)$ funkciya úzliksiz hám úzliksiz $y_z'(z,x)$, $y_x'(z,x)$ dara tuwındılarǵa iye bolsa, bul betlikte anıqlanǵan úzliksiz $f(x,y,z)$ funkciyanıń birinshi túr betlik integralı bar bolıp hám

$$\iint_S f(x,\ y,\ z)dS = \iint_D f(x,\ y(z,\ x),\ z)\sqrt{1+y_z'^2(z,\ x)+y_x'^2(z,\ x)}dzdx \qquad (8)$$

boladı.

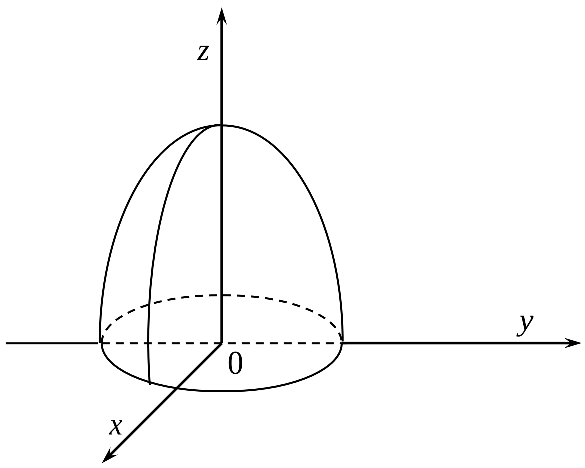
Birinshi túr betlik integralları eki eseli integrallarǵa keltirilip, (3), (7) hám (8) formulalar járdeminde esaplanadı.

**1-mısal.** $\overline{J} = \iint_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}dS$ integraldı esaplań, bunda $S$ betlik

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

betliktıń $z = 0$ tegislik penen kesilgen shekli bólegi.

◄ $S$ betlik teńlemesi $z = z(x,\ y)$ kórinistegi betlik $S: z = 1 - x^2 - y^2$ (59-sızılma).




59-sızılma

Berilgen integraldı (3) formuladan paydalanıp

$$z_x'(x,\ y) = -2x, \quad z_y'(x,\ y) = -2y$$

bolıp,

$$\sqrt{1+z_x'^2(x,\ y)+z_y'^2(x,\ y)} = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$$

boladı. $S$ betliktıń $X0Y$ tegisliktegi proekciyası $D = \{(x,\ y) \in R^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$ boladı. (3) formuladan paydalanıp

$$J = \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2} \cdot \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy = \iint_D (1+4x^2+4y^2)dxdy.$$

Endi eki eseli integraldı esaplaymız

$$\iint_D \left(1+4x^2+4y^2\right)dxdy = \begin{bmatrix} x = r\sin\varphi, \ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = r\cos\varphi, \ 0 \le r \le 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{2\varphi}\left[\int_0^1 \left(1+4r^2\right)rdr\right]d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}+r^4\right)_0^1 d\varphi = 3\pi \ .$$

Demek,

$$\iint_S \sqrt{\left(1+4x^2+4y^2\right)}ds = 3\pi \ . \ ►$$

Birinshi túr betlik integralı eki eseli integral qáseytlerı arqalı qáseytlerge iye boladı.

**Birinshi túr betlik integraldıń qollanılıwları.** Birinshi túr betlik integralı járdeminde betliklerdıń maydanı, massalı betliktıń massası, awırlıq orayları, inerciya momentlerı tabıladı.

Anıqlamaǵa muapıq $\mu S = \iint_D dS$ boladı.

Meyli $S$ betlik boyınsha tıǵızlıq $\gamma = \gamma(x, y, z)$ bolǵan massa tarqatılǵan bolsın. Bunday betliktıń massası

$$m = \iint_S \gamma(x, y, z)dS \ , \qquad (9)$$

awırlıq orayıńıń koordinataları

$$x_c = \frac{1}{m}\iint_S x\cdot\gamma(x, y, z)ds, \quad y_c = \frac{1}{m}\iint_S y\cdot\gamma(x, y, z)ds, \quad z_c = \frac{1}{m}\iint_S z\cdot\gamma(x, y, z)ds$$

$OX$, $OY$, $OZ$ kósherlerge qarata inerciya momentlerı

$$J_x = \iint_S \left(z^2+y^2\right)\cdot\gamma(x, y, z)dS \ ,$$

$$J_y = \iint_S \left(z^2+x^2\right)\cdot\gamma(x, y, z)dS \ ,$$

$$J_z = \iint_S \left(x^2+y^2\right)\cdot\gamma(x, y, z)dS$$

boladı.

**2-mısal.** $x = \sqrt{R^2-y^2-z^2}$ yarım sfera boyınsha massa tarqalǵan bolıp, hár bir noqattaǵı tıǵızlıq usı noqattan koordinatalar basınasha bolǵan aralıqqa proporcianal. Massası tabılsın.

◀Shártke kóre

$$\gamma(x,\ y,\ z)=k\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

boladı, bunda $k$ -proporcianallıq korfficienti.

(9) formulaǵa kóre

$$m=\iint\limits_S k\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)dS$$

boladı, bunda $S$ -joqarı yarım sfera. Meyli

$$x'_y(y,\ z)=-\frac{y}{\sqrt{R^2-y^2-z^2}},\ x'_z(y,\ z)=-\frac{z}{\sqrt{R^2-y^2-z^2}}$$

bolıp,

$$\sqrt{1+x'^2_y(y,\ z)+x'^2_z(y,\ z)}=\frac{R}{x}$$

boladı. Nátiyjede

$$m=\iint\limits_S k\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)dS=k\iint\limits_S R^2\frac{R}{x}dydz=kR^3\iint\limits_D\frac{1}{\sqrt{R^2-y^2-z^2}}dydz$$

teńlikke keltiremiz, bunda $D=\{(y,z):y^2+z^2\le R^2\}$. Endi eki eseli integraldı esaplaymız

$$\iint\limits_D\frac{dydz}{\sqrt{R^2-y^2-z^2}}=\begin{bmatrix} y=r\cos\varphi,\ 0\le\varphi\le 2\pi \\ z=r\sin\varphi,\ 0\le r\le R\end{bmatrix}=\int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^R\frac{rdr}{\sqrt{R^2-r^2}}\right]d\varphi=$$

$$=-\int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^R\left(R^2-r^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}d\left(R^2-r^2\right)\right]d\varphi=-\frac{1}{2}\frac{\left(R^2-r^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}2\pi\Bigg|_0^R=2\pi R\ .$$

Sonday qılıp massa $m=2kR^2\pi$ boladı.

## 18.5. Ekinshi túr betlik integralları

**Ekinshi túr betlik integralı túsinigi**.

Meyli $S$ betlikte $f(x,y,z)$ funkciya berilgen bolsın. Bul betliktıń málim bir tárepin alıp, onıń

$$P=\{S_1,S_2,...,S_n\}$$

bóleklewin qaraymız. $P$ bóleklewnıń hár bir $S_k$ bólekshesine tiyisli bolǵan qálegen $(\xi_k,\eta_k,\varsigma_k)$ noqatındaǵı funkciyanıń mánisi $f(\xi_k,\eta_k,\varsigma_k)$ ni $S_k$ nıń $XOY$ tegisliktegi proekciyası $D_k$ nıń maydanı $\mu D_k$ kóbeytip

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\varsigma_k)\mu D_k$$

qosındıńı dúzemiz. Bul qosındı $f(x,y,z)$ funkciyaǵa, $P$ bóleklewge hám alınǵan $(\xi_k,\eta_k,\varsigma_k)$ noqatlarǵa baylanıslı boladı.

**1-anıqlama.** Eger $\forall\varepsilon>0$ san alǵanda hám sonday $\delta>0$ san tabılıp, $S$ betliktıń diametrı $\lambda p<\delta$ bolǵan hár qanday $P$ bóleklewnıń, hám hár bir $S_k$ da alınǵan qálegen $(\xi_k,\eta_k,\varsigma_k)$ lar ushın

$$|\sigma-J|<\varepsilon$$

teńsizlik orınlı bolsa, onda $f(x,y,z)$ funkciya $S$ betliktıń tańlanǵan tárepi boyınsha integrallanıwshı delinip, $J$ bolsa $f(x,y,z)$ funkciyanıń $S$ betliktnıń tańlanǵan tárepi boyınsha ekinshi túr betlik integralı delinedi. Onı

$$\iint_S f(x,y,z)dxdy$$

arqalı belgilenedi. Demek,

$$\iint_S f(x,y,z)dxdy=\lim_{\lambda p\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\varsigma_k)\mu D_k .$$

Usıǵan uqsas

$$\iint_S f(x,y,z)dydz \ , \ \iint_S f(x,y,z)dzdx$$

ekinshi túr betlik integralları anıqlanadı.

Meyli $S$ betlikte $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ funkciyalar berilgen bolıp,

$$\iint_S P(x,y,z)dxdy,\ \iint_S Q(x,y,z)dydz,\ \iint_S R(x,y,z)dzdx$$

lar olardıń ekinshi túr betlik integralları bolsın.

$$\iint_S P(x,y,z)dxdy+\iint_S Q(x,y,z)dydz+\iint_S R(x,y,z)dzdx$$

qosındı ekinshi túr betlik integraldıń ulıwma kórinisi delinedi. Onı

$$\iint_S P(x,y,z)dxdy + Q(x,y,z)dydz + R(x,y,z)dzdx$$

arqalı belgilenedi:

$$\iint_S P(x,y,z)dxdy + Q(x,y,z)dydz + R(x,y,z)dzdx =$$
$$= \iint_S P(x,y,z)dxdy + \iint_S Q(x,y,z)dydz + \iint_S R(x,y,z)dzdx.$$

Meyli $R^3$ keńislikte bazı bir $V$ dene berilgen bolıp, onı orap turıwshı tuyıq betlik sıypaq betlik bolsın. Bul betlikti $S$ deymiz.

$f(x,y,z)$ funkciya $V$ da anıqlanǵan bolsın. $V$ deneni $XOY$ tegisligine parallel bolǵan tegislik eki $V_1$ hám $V_2$ bóleklerge ajratılsın. Deneni orap túrǵan $S$ betlik hám $S_1$ hám $S_2$ betliklerge ajraladı. Meyli

$$\iint_{S_1} f(x,y,z)dxdy + \iint_{S_{12}} f(x,y,z)dxdy \qquad (2)$$

integrallar qosındısı $f(x,y,z)$ funkciyanıń tuyıq betlik boyınsha ekinshi túr betlik integralı delinedi. Onı

$$\oiint_S f(x,y,z)dxdy$$

arqalı belgilenedi. (2) qatnastaǵı birinshi integral $S_1$ betliktıń ústki tárepi, ekinshi integral $S_2$ betliktıń astıńgı tárepi boyınsha alınǵan. Usıǵan uqsas

$$\oiint_S f(x,y,z)dydz\,, \ \oiint_S f(x,y,z)dzdx$$

hám ulıwma jaǵdayda

$$\oiint_S P(x,y,z)dxdy + Q(x,y,z)dydz + R(x,y,z)dxdz$$

integrallar anıqlanadı.

**Ekinshi túr betlik integralınıń bar bolıwı hám onı esaplaw.**

Meyli $f(x,y,z)$ funkciya (1) teńleme menen berilgen $S$ betlikte anıqlanǵan bolsın.

**1-teorema**. Eger $f(x,y,z)$ funkciya $S$ betlikte úzliksiz bolsa, onda bul funkciyanıń $S$ betlik boyınsha ekinshi túr integralı bar bolıp hám

$$\oiint_S f(x,y,z)dxdy = \iint_D f(x,y,z(x,\ y))dxdy \qquad (3)$$

boladı. Usıǵan uqsas joqarıdaǵıday, tiyisli shártlerde

$$\int_S f(x,\ y,\ z)dydz\,,\quad \int_S f(x,\ y,\ z)dzdx$$

integrallar bar bolıp hám

$$\iint_S f(x,\ y,\ z)dydz = \iint_D f(x(y,\ z),\ y,\ z)dydz \qquad (6)$$

$$\iint_S f(x,\ y,\ z)dzdx = \iint_D f(x,\ y(z,\ x),\ z)dzdx \qquad (7)$$

boladı. Ekinshi túr betlik integralları eki eseli integrallarǵa keltirilip (3), (6) hám (7) formulalar járdeminde esaplanadı.

1) Eger $S$ betlik jasawshıları $OZ$ kósherine parallel bolǵan cilindrlik betlik bolsa, onda

$$\iint_S f(x,\ y,\ z)dxdy = 0$$

boladı.

2) jasawshıları $OX$ kósherine parallel bolǵan cilindrlik betlik bolsa, onda

$$\iint_S f(x,\ y,\ z)dydz = 0$$

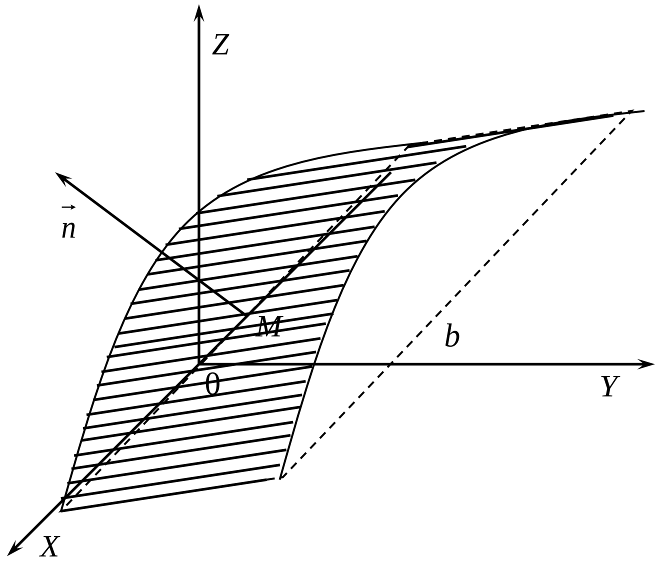
boladı.

3) jasawshıları $OZ$ kósherine parallel bolǵan cilindrlik betlik bolsa, onda

$$\iint_S f(x,\ y,\ z)dzdx = 0$$

boladı.

**1-mısal.** Ekinshi túr betlik integralı $\iint_S (y^2+z^2)dxdy$ esaplań, bunda $S$ betlik $z=\sqrt{a^2-x^2}$ nıń $y=0$, $y=b$ tegislikler arasındaǵı bóleginıń ústki tárepi (60-sızılma).




60-sızılma

◀ Betliktıń $M$ noqattaǵı normalı $OZ$ kósheri menen súyir múyesh payda etedi. Sonıń ushın berilgen integraldı (3) formulaǵa kóre esaplawda oń belgisi menen alındı. $S$ betliktıń $XOY$ tegisligine proekciyası

$$D=\{(x,\ y)\in R^2:-a\le x\le a,\ 0\le y\le b\}$$

tórtmúyeshden ibarat boladı. (3) formuladan paydalanıp

$$\iint\limits_S\left(y^2+z^2\right)dxdy=\iint\limits_D\left[y^2+\sqrt{a^2-x^2}\right]dxdy=$$

$$=\int\limits_{-a}^{a}\left[\int\limits_0^b\left(y^2+a^2-x^2\right)dy\right]dx=\int\limits_{-a}^{a}\left(\frac{y^3}{3}+a^2y-x^2y\right)\Bigg|_{y=0}^{y=b}dx=$$

$$=\int\limits_{-b}^{a}\left(\frac{b^3}{3}+a^2b-x^2b\right)dx=\left(\frac{b^3}{3}x+a^2bx-\frac{x^3}{3}b\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{2}{3}ab\left(b^2+2a^2\right).\ ▶$$

Ekinshi túr betlik integralı eki eseli integralnıń qáseytlerıne uqsas qáseytlerge iye.

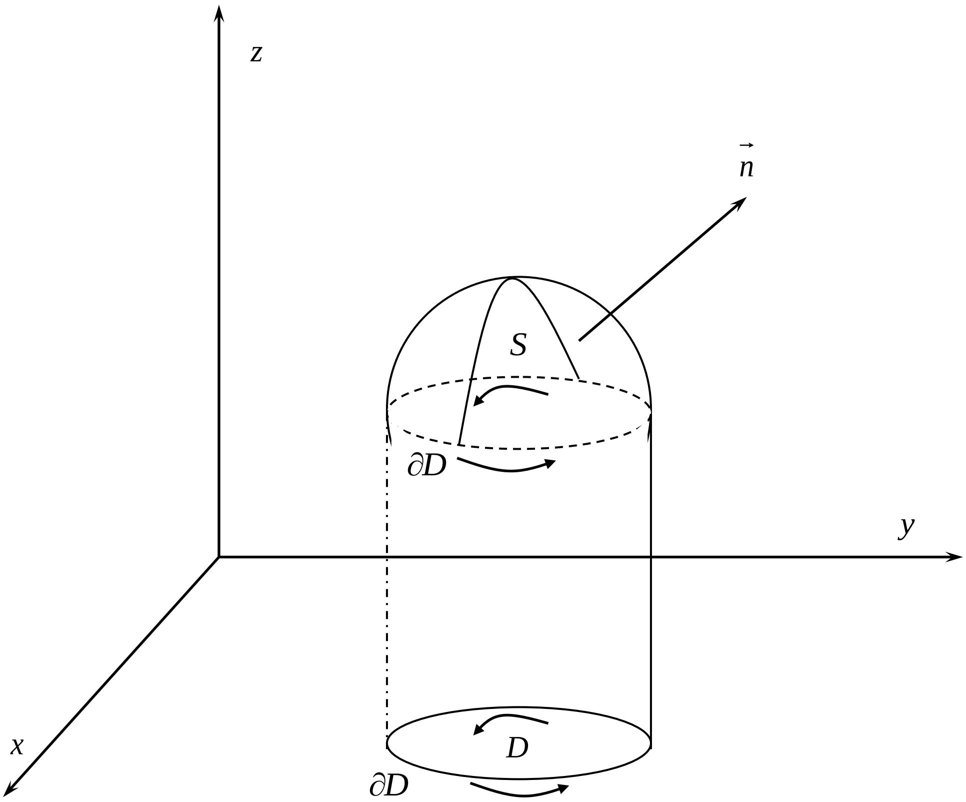
### 18.6. Stoks formulası

Keńislikeф

$$z=z(x,y)\tag{1}$$

(1) teńleme menen anıqlanǵan $S$ betlikti qaraymız. Onıń $XOY$ tegisliktegi proekciyası $D$ kóplikti payda bolsın. $S$ betlik hám $D$ figuranıń shegaralawshı tuyıq sızıqlardı sáykes túrde $\partial S$ hám $\partial D$ deymiz. $\partial S$ nıń proekciyası $\partial D$ boladı.

Betlik tárepi hám konturı baǵıtları onıń proekciyaları baǵıtları arasındaǵı sáykeslik 62- sızılmada keltirilgan.




62-sızılma

Meyli (1) teńlemedegi $z = z(x, y)$ funkciya $D$ kóplikte úzliksiz hám úzliksiz $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ dara tuwındılarǵa iye bolsın.

Meyli $S$ betlikte $P = P(x, y, z)$ funkciya anıqlanǵan bolıp, ol úzliksiz hám úzliksiz

$$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}, \quad \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}$$

dara tuwındılarǵa iye bolsın. Bunday holda $\int\limits_{\partial S} P(x, y, z)dx$ iymek sızıqlı integral bar boladı. Bunda $\partial S$ kontur baǵıttıń betlik tárepi menen sáykesligi 29-sızılmada keltirilgen.

$\partial S$ kontur $S$ betlikke tiyisli eken, onda $\partial S$ nıń noqatları $z = z(x, y)$ teńlemeni qanaatlandıradı. Demek, $\partial S$ da $P = P(x, y, z)$ funkciya $P = P(x, y, z(x, y))$ bolıp, ol $D$ da berilgen eki ózgeriwshili funkciyaǵa aylanadı. Sonıń ushın

$$\int_{\partial S} P(x, y, z)dx = \int_{\partial S} P(x, y, z(x, y))dx \tag{2}$$

boladı. Grin formulasın paydalanıp

$$\int_{\partial S} P(x, y, z)dx = -\iint_D \frac{\partial}{\partial y}(P(x, y, z(x, y))dxdy.$$

Bul teńliktıń oń tárepindegi integral astındaǵı dara tuwındı

$$\frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial z} \cdot z'_y(x, y)$$

bolıp,

$$\int_{\partial S} P(x, y, z(x, y))dx = -\iint_D (\frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial z} \cdot z'_y(x, y))dxdy$$

boladı. $S$ betliktıń ústki tárepi qaralǵanda onıń $\vec{n}$ normalınıń baǵıtlawshı kosinusları

$$\cos\alpha = -\frac{z'_x(x, y)}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}, \quad \cos\beta = -\frac{z'_y(x, y)}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}$$

boladı. Bul qatnaslardan

$$\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = -z'_y(x, y)$$

kelip shıǵadı. Nátiyjede

$$\int_{\partial S} P(x, y, z(x, y))dx = -\iint_D (\frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y} - \frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial z} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma})dxdy \tag{3}$$

boladı. Endi keyingi teńliktegi eki eseli integral keltirilgen

$$\int_{\partial S} f(x,y,z)dxdy = \iint_D f(x,y,z(x,y))dxdy$$

formuladan paydalanıp ekinshi túr betlik integralı arqalı

$$\begin{aligned}&\iint_D \left(\frac{\partial P(x,y,z(x,y))}{\partial y} - \frac{\partial P(x,y,z(x,y))}{\partial z}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)dxdy = \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} - \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)dxdy\end{aligned} \tag{4}$$

jazıp alamız. Soń bul ekinshi túr betlik integralı ushın, birinshi hám ekinshi túr betlik integrallardı óz-ara baylanısı

$$\begin{aligned}&\iint_S f(x,y,z)dydz = \iint_S f(x,y,z)\cos\alpha dS \\ &\iint_S f(x,y,z)dzdx = \iint_S f(x,y,z)\cos\beta dS \\ &\iint_S f(x,y,z)dxdy = \iint_S f(x,y,z)\cos\gamma dS\end{aligned} \tag{5}$$

Formulalarǵa kóre

$$\begin{aligned}&\iint_S \left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} - \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)\cos\gamma\, dxdy = \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}\cdot\cos\gamma ds - \iint_S \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\cdot\cos\beta\right)dS\end{aligned} \tag{6}$$

bolıp, bul teńliktegi birinshi túr betlik integralları jáne (5) formulalarǵa

$$\begin{aligned}&\iint_S \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}\cos\gamma dS = \iint_S \left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} dxdy,\right. \\ &\iint_S \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\cos\beta dS = \iint_S \left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} dzdx\right.\end{aligned} \tag{7}$$

boladı. Joqarıdaǵı (2), (3), (4), (6) hám (7) qatnaslardan

$$\int_{\partial S} P(x,y,z)dx = \iint_S \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}dxdy \tag{8}$$

kelip shıǵadı. Usıǵan uqsas $S$ betlik hám onda anıqlanǵan $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ funkciyalar ushın tiyisli shártlerde

$$\int_{\partial S} Q(x,y,z)dy = \iint_S \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x}dxdy - \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z}dydz,$$
$$\int_{\partial S} R(x,y,z)dz = \iint_S \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y}dydz - \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x}dzdx \qquad (9)$$

kórsetiledi. (8) hám (9) teńlikler aǵzalap

$$\int_{\partial S} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$= \iint_S \left[\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}\right]dxdy + $$
$$+ \left[\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z}\right]dydz + \qquad (10)$$
$$+ \left[\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} - \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x}\right]dzdx.$$

(10) formula Stoks formulası delinedi.

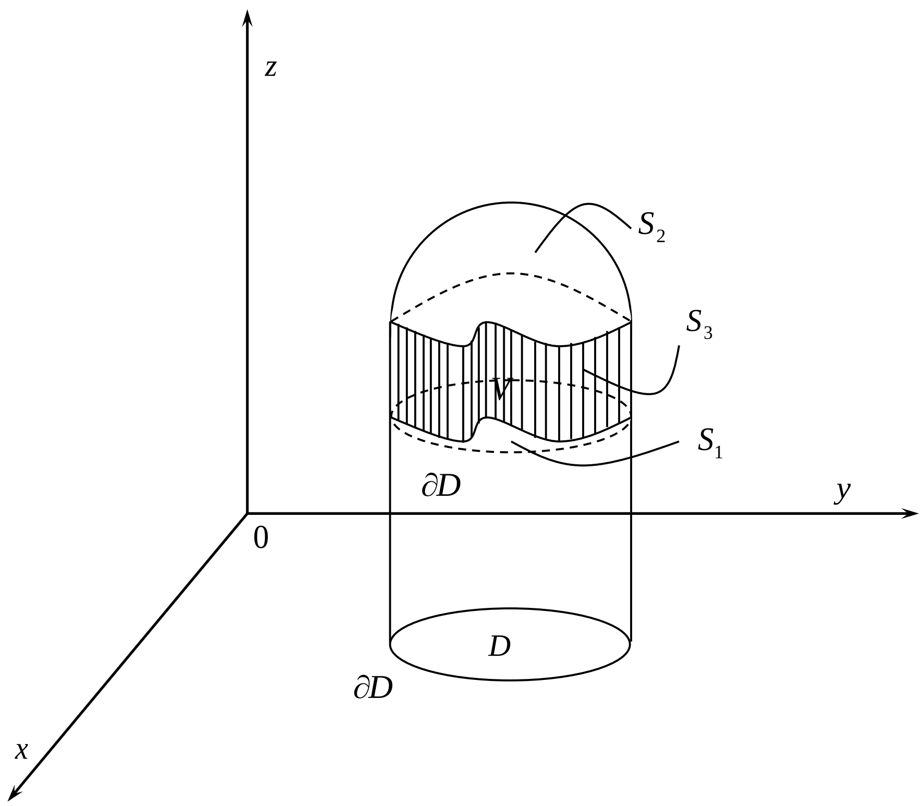
Stoks formulası $S$ betlik boyınsha alınǵan betlik integralınıń usı betliktıń shegarası $\partial S$ tuyıq iymek sızıq boyınsha alınǵan iymek sızıqlı integral arasındaǵı baylanısların ańlatadı.

## 18.7. Ostrogradskiy formulası

Meyli $V$ kóplik $z = z_1(x,y)$, $z = z_2(x,y)$ betlikler hám jasawshıları $OZ$ kósherine parallel bolǵan cilindrlik betlik menen shegaralanǵan kóplik bolıp, cilindrlik betliktıń $XOY$ tegislikten ajratǵan bólegi $D$ kóplikti ańlatsın. Bunda $\forall (x,y) \in D$ ushın $z_1(x,y) \le z_2(x,y)$ deymiz. Onda $V$ deneni orap túrǵan $S$ betlik $z = z_1(x,y)$- teńleme menen anıqlanǵan $S_1$ betlik,

$$z = z_2(x,y)$$

teńleme menen anıqlanǵan $S_2$ betlik hám jasawshıları $OZ$ kósherine parallel, baǵıtlawshıları $\partial D$ bolǵan cilindrlik betlik $S_3$ den ibarat boladı. (63-sızılma)




63-sızılma

Meyli $V$ da $R(x,y,z)$ funkciya anıqlanǵan bolıp, ol $V$ da úzliksiz hám úzliksiz $\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}$ dara tuwındıǵa iye bolsın. Bunda $\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}$ funkciyanıń $V$ kóplik boyınsha úsh eseli integralı bar bolıp bolıp,

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}dxdydz = \iint\limits_D \left( \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}dz \right) dxdy$$

boladı. Bunnan

$$\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}dz = R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y)).$$

Demek,

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}dxdydz = \iint\limits_D R(x,y,z_2(x,y))dxdy - \iint\limits_D R(x,y,z_1(x,y))dxdy. \quad (11)$$

Bul teńliknıń oń tárepindegi eki eseli integrallardı betlik integralları arqalı jazamız

$$\iint_D R(x,y,z_2(x,y))dxdy = \iint_{S_2} R(x,y,z)dxdy, \tag{12}$$

$$\iint_D R(x,y,z_1(x,y))dxdy = \iint_{S_1} R(x,y,z)dxdy. \tag{13}$$

(12) integral $S_2$ betliktıń ústki tárepi boyınsha, (13) bolsa integral $S_1$ betliktıń astıńgı tárepi boyınsha alınǵan. Meyli

$$\iint_{S_3} R(x,y,z)dxdy = 0 \tag{14}$$

Joqarıdaǵı (11), (12), (13) hám (14) qatnaslardan

$$\begin{aligned} &\iiint_V \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dxdydz = \iint_{S_1} R(x,y,z)dxdy + \iint_{S_2} R(x,y,z)dxdy + \\ &+ \iint_{S_3} R(x,y,z)dxdy = \oiint_S R(x,y,z)dxdy \end{aligned} \tag{15}$$

kelip shıǵadı. Bul teńliktegi tuyıq betlik boyınsha integral $S$ nıń sırtqı tárepi boyınsha alınǵan. Usıǵan uqsas keńislikte $V$ kóplik, onı orap turıwshı $S$ betlik hám $V$ berilgen $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ funkciyalar ushın tiyisli shártlerde

$$\begin{aligned} &\iiint_V \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} dxdydz = \oiint_S P(x,y,z)dydz, \\ &\iiint_V \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} dxdydz = \oiint_S Q(x,y,z)dxdz \end{aligned} \tag{16}$$

boladı. (15) hám (16) teńliklerdi aǵzama-aǵza

$$\begin{aligned} &\iiint_V \left( \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} \right) dxdydz = \\ &= \oiint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy. \end{aligned} \tag{17}$$

(17) formula Ostrogradskiy formulası delinedi.

**Eskertiw.** Biz joqarıda Ostrogradskiy formulasın ayrıqsha kóplik $V$ ushın keltirip shıǵardıq. Eger qaralatuǵın kóplik ulıwmalıraq bolıp, onı shekli sandaǵı joqarıdaǵı $V$ arqalı kópliklerge ajratıw múmkin bolsa, bunday kóplik ushın Ostrogradskiy formulası orınlı boladı.

**2-mısal.** Ostrogradskiy formulasınan paydalanıp

$$\iint_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$$

betlik integralı esaplań bunda $S$ betlik

$$V = \{(x, y, z) \in R^3 : 0 \le x \le a, 0 \le y \le a, 0 \le z \le a\}$$

kubtıń sırtqı tárepi.

◀Ostrogradskiy formulasına kóre

$$\iint_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = \iiint_V (2x + 2y + 2z)dxdydz$$

boladı. Úsh eseli integraldı esaplap

$$\iiint_V (2x + 2y + 2z)dxdydz = 2\int_0^a\int_0^a\int_0^a (x + y + z)dxdydz =$$

$$= 2\int_0^a\left[\int_0^a\left(a(x+y) + \frac{a^2}{2}\right)dy\right]dx = 2\int_0^a (a^2x + a^3)dx = 3a^4.$$

Demek,

$$\iint_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = 3a^4 \text{ . ►}$$

## ÁDEBIYATLAR


1. Азларов Т., Мансуров Ҳ. Математик анализ, 1 ва 2 томлар, Тошкент, «Ўзбекистон», 1994,1995.
2. Alimov SH., Ashurov R., Matematik analiz, 1,2 va 3 qismlari, Toshkent «Mumtoz sóz», 2018.
3. Худойберганов Г., Варисов А., Мансуров Ҳ., Шоимкулов Б.А. Математик анализдан марузалар, 1 ва 2 қисмлар, Тошкент , «Voris-nashriyot», 2010.
4. Архипов Г., Садовничий В., Чубариков В. Лекции по математическому анализу, Москва, «Высшая школа», 1999.
5. Дороговцев А. Математический анализ, Киев, «Высшая школа», 1985.
6. Фихтенгольц Г. Курс дифференциального и интегрального исчисления, ТТ, I, II, Москва “физмат-лит”, 2001.
7. Саъдуллаев А., Мансуров Ҳ., Худойберганов Г., Варисов А., Ғуломов Р. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами, 1 ва 2-томлар, Тошкент, «Ўзбекистон», 1993, 1996.
8. Демидович Б. Сборник задач и упражнений по математическому анализу, Москва, «Наука», 1990.