

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS
TA‘LIM VAZIRLIGI



URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI
FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

“Matematika” KAFEDRASI

5130100-MATEMATIKA TA‘LIM YO‘NALISHI

302-GURUHI TALABASI

Bekchanov Sardorning Kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi
fanidan

”Matematika fani bo‘yicha halqaro va respublika olimpiadalarida
taklif qilinadigan ba’zi masalalarni yechishda kompleks
sonlarning tadbiqlari” mavzusida yozgan

REFERATI

Topshirdi _____ Bekchanov S.

Qabul qildi _____ Abdullayev J.

Urganch 2016 yil

REJA

I. Kirish.

1. Bezu teoremasi.

2. Kompleks sonlarni ba'zi tadbiqlari. Bezu teoremasini qo'llanilishiga doir mashqlar

3. Mustaqil yechish uchun misollar.

III. Foydalanilgan adabiyotlar.

KIRISH

Respublikamizda ta'lim – tarbiya tizimida qator islohiy o'zgarishlar amalga oshirilgan bo'lib, ularning asosiy maqsadi yosh avlodni layoqati, qobiliyati, iqtidorini aniqlash, ochish va ularning rivojlanishi uchun shart – sharoit va imkoniyatlarni yaratishdan iboratdir.

Bular o'quvchilarni fanga bo'lgan qiziqishini shakllantirish, faolligini oshirish va ularni rag'batlantirish bilan bog'liqdir. Yoshlarni chuqur bilimli, teran fikrlaydigan, har bir masalaga ijodiy yondashadigan insonlar bo'lib yetishlarida fan olimpiadalari muhim ahamiyatga ega bo'ladi.

Olimpiada ishtirokchilarning ijodiy faolligini o'stirishda, tafakkur jarayonlarini shakllantirishda mantiqiy fikrlash, matematikadan nostandart masalalarni yechish alohida ahamiyat kasb etadi.

Ushbu maqolada matematika fani bo'yicha olimpiadalarida taklif qilinadigan ba'zi masalalarni yechimini topishda kompleks sonlarni tadbiqlari o'rganilgan bo'lib, o'quvchilarga va ularning rahbarlariga matematikadan olimpiada tayyorlashda bu maqolani yordami tegadi degan umiddamiz.

Ma'lumki, agar

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (1)$$

biror ko'phad, c esa biror son bo'lsa, u holda $f(x)$ ning (1) ifodasida x noma'lumni c son bilan almashtirib va ko'rsatilgan barcha amallarni bajargandan so'ng hosil qilinadigan

$$f(c) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + \dots + a_{n-1}c + a_n$$

son $f(x)$ ko'phadning $x = c$ dagi qiymati deyiladi.

Agar $f(x) = 0$ bo'lsa, ya'ni ko'phad undagi noma'lum o'rniga c son qo'yilganda nolga aylansa, c son $f(x)$ ko'phadning (yoki $f(x) = 0$ tenglamaning) ildizi deyiladi. Ko'phadni ko'phadga bo'lgandagi qoldiqni hisoblash uchun quyidagi teoremani keltiramiz.

Teorema (Bezu teoremasi). $f(x)$ ko'phadni $x - c$ ikkihadga bo'lishdan chiqqan qoldiq $f(c)$ ga teng [2.153b].

Bu teoremani natijasi sifatida quyidagi tasdiqni keltiramiz:

Natija: $f(x)$ ko'phad $x - c$ ga bo'linsta u holda $f(c) = 0$ bo'ladi.

Natija: $f(x)$ ko'phad $g(x)$ ko'phadga bo'linsa, u holda $g(x)$ ko'phadni ildizi $f(x)$ ko'phadni ham ildizi bo'ladi.

Yuqoridagi mulohazalardan foydalanib quyidagi masalalarni yechamiz.

1. Ixtiyoriy natural m, n, p larda $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ ko'phad $x^2 + x + 1$ ko'phadga qoldiqsiz bo'lishini isbotlang [1. 27 b.].

Yechish: Quyidagi belgilash kiritamiz: $f(x) = x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ va

$g(x) = x^2 + x + 1$. Ma'lumki, $f(x)$ ko'phad $g(x)$ ko'phadga bo'linishi

uchun $g(x)$ ning ildizlari $f(x)$ ning ham ildizlari bo'lishi kerak. Demak, biz

$g(x) = 0$ tenglamaning yechimlari $f(x)$ ni ham ildizlari bo'lishini ko'rsatsak bo'ldi.

$$g(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \quad \text{hamda}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}.$$

Endi $\begin{cases} f(x_1) = 0 \\ f(x_2) = 0 \end{cases}$ munosabatni o'rinli ekanini ko'rsatamiz. Buning uchun Muavr

formulasiga ko'ra $x_1^3 = 1$ va $x_2^3 = 1$ ekanligini e'tiborga olsak:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= x_1^{3m} + x_1^{3n+1} + x_1^{3p+2} = (x_1^3)^m + (x_1^3)^n \cdot x_1 + (x_1^3)^p \cdot x_1^2 = \\ &= 1 + x_1 + x_1^2 = 0 \Rightarrow f(x_1) = 0 \end{aligned}$$

Xuddi shunday,

$$\begin{aligned} f(x_2) &= x_2^{3m} + x_2^{3n+1} + x_2^{3p+2} = (x_2^3)^m + (x_2^3)^n \cdot x_2 + (x_2^3)^p \cdot x_2^2 = \\ &= 1 + x_2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow f(x_2) = 0 \end{aligned}$$

Demak, $g(x) = x^2 + x + 1$ ko'phadni ildizlari $f(x) = x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$

ko'phadning ham ildizlari ekan, ya'ni $\forall m, n, p \in N$ larda $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$

ko'phad $x^2 + x + 1$ ko'phadga qoldiqsiz bo'linar ekan.

2. m ning qanday natural qiymatlarida $(x + 1)^m - x^m - 1$ ko'phad

$(x^2 + x + 1)^2$ ko'phadga qoldiqsiz bo'linadi.

Yechish: Dastlab $(x^2 + x + 1)^2 = (x - x_1)^2 (x - x_2)^2$ ko'rinishda yozib olamiz.

$$(x^2 + x + 1)^2 = 0$$

tenglamani yechimlari

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$$

x_1 va x_2 sonlari $(x^2 + x + 1)^2$ ko'phadning karrali ildizlari. Bu ildizlari $f(x)$ ni ham ildizi bo'lishi uchun m natural soni

$$m = 6n + 2 \text{ va } m = 6n + 4 \quad (n \in \mathbb{N})$$

ko'rinishda bo'lishi kerak edi. Lekin, bu yerda x_1 ildiz karrali ildiz bo'lishi uchun

$f'(x_1) = m \left((1 + x_1)^{m-1} + x_1^{m-1} \right) = 0$ ham nol bo'ladigan m larni topamiz.

Bunda faqat ikkita hol bo'lishi mumkin:

$$m = 6n + 2 \Rightarrow f'(x_1) = m \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = im\sqrt{3} \neq 0$$

$$m = 6n + 5 \Rightarrow f'(x_1) = m \left(\cos \pi + i \sin \pi + \cos 2\pi + i \sin 2\pi \right) = 0$$

$f(x_2) = 0$ bo'lishi uchun ham xuddi shunday shart kelib chiqadi.

Demak, bulardan quyidagi xulosaga kelamiz:

$(x + 1)^m + x^m + 1$ ko'phad $(x^2 + x + 1)^2$ ko'phadga bo'linishi uchun m

natural soni $m = 6n + 4$ ($n \in \mathbb{N}$) ko'rinishda bo'lishi kerak [1.28 b.].

3. Ixtiyoriy natural k va a_1, a_2, \dots, a_k larda $x^{ka_1} + x^{ka_2+1} + \dots + x^{ka_k+k-1}$ ko'phadni

$x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + 1$ ko'phadga qoldiqsiz bo'linishini isbotlang [1.28b.].

Yechish: Buning uchun $g(x) = x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + 1$ ko'phadni ildizi

$f(x) = x^{ka_1} + x^{ka_2+1} + \dots + x^{ka_k+k-1}$ ko'phadni ham ildizi bo'lishini ko'rsatamiz.

$$x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + 1 = 0 \quad | \cdot (x-1)$$

$$x^k - 1 = 0$$

$$x^k = 1$$

Demak, $g(x)$ ko'phadning ildizlari 1 soning k - darajali ildizlaridir.

Bu ildizlarni x_i $i = \overline{1, k}$ bilan belgilasak. Berilishiga ko'ra har x_i uchun

$$x_i^k = 1$$

bo'ladi. Bulardan:

$$\begin{aligned} f(x_i) &= x_i^{ka_1} + x_i^{ka_2+1} + \dots + x_i^{ka_k+k-1} = (x_i^k)^{a_1} + (x_i^k)^{a_2} \cdot x_i + \dots + (x_i^k)^{a_k} \cdot x_i^{k-1} = \\ &= x_i^{k-1} + x_i^{k-2} + \dots + 1 = 0 \end{aligned}$$

isbot tugadi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Qanday natural m, n, p larda $x^{3m} - x^{3n+1} + x^{3p+2}$ ko'phad $x^2 - x + 1$

ko'phadga qoldiqsiz bo'linadi.

2. Qanday natural m, n, p larda $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ ko'phad $x^4 + x^2 + 1$

ko'phadga qoldiqsiz bo'linadi.

3. m ning qanday qiymatlarida $x^{2m} + x^m + 1$ ko'phad $x^2 + x + 1$ ko'phadga qoldiqsiz bo'linadi.

4. m ning qanday natural qiymatlarida $(x+1)^m - x^m - 1$ ko'phad $x^2 + x + 1$ ko'phadga qoldiqsiz bo'linadi.

5. m ning qanday natural qiymatlarida $(x+1)^m + x^m + 1$ ko'phad $x^2 + x + 1$ ko'phadga qoldiqsiz bo'linadi.

6. m ning qanday natural qiymatlarida $(x + 1)^m - x^m - 1$ ko'phad $(x^2 + x + 1)^2$ ko'phadga qoldiqsiz bo'linadi.

ADABIYOTLAR.

1. Б.В.Шабат. Введение в комплексный анализ. Часть 1,2. М.Наука.1985.
2. Ю.В. Сидоров, М.В Федорюн, М.И. Шабукин. Лекции по теории функции комплексного переменного. М.Наука. 1982.
3. И.И. Привалов. Введение в теорию функции комплексного переменного. М.Госиздат. физ-мат литературы. 1977.
4. Sh. Maqsudov, M.Salohiddinov, S.Sirojiddinov. // Kompleks o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi. "O'QITUVCHI" nashriyoti.Toshkent-1979.
5. R. Madrahimov, J. Abdullayev, N. Kamalov "Masala qanday yechiladi" UrDU noshirlik bo'limi, Urganch-2013 y.
6. А. Г. Курош "Олий алгебра курси", "Ўқитувчи" Тошкент-1976 й
7. Mathematical Olympiads, Problems and Solutions from Around the World, 1996-1997 (2001)(182s) MSch.