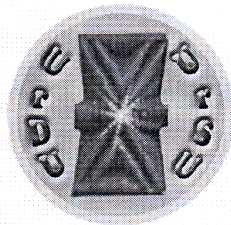


O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS

TA'LIM VAZIRLIGI



URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

“MATEMATIKA” KAFEDRASI

402-MATEMATIKA GURUH TALABASI

Yusupov Ixtiyor Baxtiyorovichning

5130100-Matematika ta'lim yo'nalishi bo'yicha

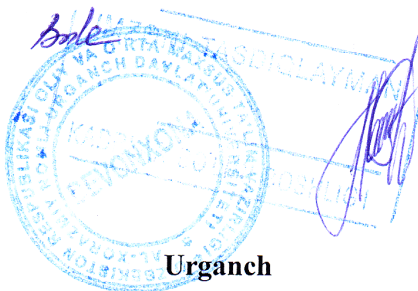
bakalavr darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Mavzu: Qisqartirib aks ettirish prinsipi va uning tadbirlari

Ilmiy rahbar:

dots. M.D.Vaisova



Urganch

2016 yil

Mavzu: Qisqartirib aks ettirish prinsipi va uning tadbiqlari

MUNDARIJA

Kirish		3
I bob.	Metrik fazolar	6
1.1.	Metrik fazolar va ullarga doir misollar.....	6
1.2.	To'la metrik fazolar	15
II bob.	Qisqartirib akslantirish prinsipi va uning tadbiqlari...	24
2.1.	Qisqartirib akslantirish prinsipi.....	24
2.2.	Qisqartirib akslantirish prinsipining differensial tenglamalarga tadbiqi.....	32
2.3	Qisqartirib akslantirish prinsipining integral tenglamalarga tadbiqi.....	35
2.4	Qisqartirib akslantirish prinsipini tadbiqiga doir misollar	40
III bob.	Xullosa	48
IV bob.	Adabiyotlar	50

Kirish

Funksional analizdagi muhim tushunchalardan biri qisqartirib akslantirish tushunchasi bo'lib, to'la metrik fazolarda uning yagona qo'zg'almas nuqtaga egaligi algebra, matematik analiz, differensial tenglamalar va integral tenglamalar nazariyalarining ko'pgina masalalarini yechimini topishda yordam beradi. Chunki berilgan shartlarda tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligi bilan bog'liq masalalarni mos metrik fazolardagi biror akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi mavjudligi va yagonaligi haqidagi masala ko'rinishida ifodalash mumkin. Qo'zg'almas nuqta mavjudligi va yagonaligi belgilari ichida eng sodda va shu bilan birga juda muhim belgi - bu «Qisqartirib akslantirish prinsipi» deb nomlanuvchi belgidir.

Ushbu bitiruv malakaviy ish ushbu prinsip va uning tadbirlarini o'rganishga bag'ishlangan bo'lib, ikkita bobdan iborat. Birinchi bobda metrik fazolar va to'la metrik fazolar hamda ularga misolar batafsil o'rganilgan. Ikkinchi bobda qisqartirib aks ettirish prinsipi va uning tadbirlari o'rganilgan.

Ta'rif. X metrik fazo va uni o'zini-o'ziga akslantiruvchi A akslantirish berilgan bo'lsin. Agar shunday $\alpha \in (0;1)$ son mavjud bo'lib, barcha $x, y \in X$ nuqtalar uchun

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y)$$

tengsizlik bajarilsa, A akslantirish qisqartirib akslantirish deb ataladi.

Teorema (Qisqartirib akslantirish prinsipi). To'la metrik fazoda aniqlangan har qanday qisqartirib akslantirish yagona qo'zg'almas nuqtaga ega.

Qisqartirib akslantirish prinsipini turli tipdagi tenglamalar uchun yechimning mavjudlik va yagonalik teoremlarini isbotlashda qo'llash mumkin. $Ax = x$ tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligini isbotlashda qisqartirib akslantirish prinsipi yechimni topishni amalda yaqinlashishlar metodini beradi.

Bu prinsipning algebraga tadbiqu sifatida R^n fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi va

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

formulalar orqali aniqlangan A akslantirishning qisqartirib akslantirish bo'lishi shartlari topilgan va u $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$ tenglamalar sistemasining mavjudligi va yagonaligi ko'rsatilgan.

Qisqartirib akslantirish prinsipini matematik analizga tadbiqu sifatida oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi quyidagi masala o'rganilgan:

Aytaylik, $f(x, y)$ funksiya $G = \{(x, y) : a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty\}$ sohada x bo'yicha uzluksiz va y bo'yicha musbat, chegaralangan hosilaga ega

bo'lsin: $0 < m \leq f'_y \leq M$. U holda $f(x, y) = 0$ tenglama $[a, b]$ kesmada yagona uzluksiz yechimga ega.

Cheksiz o'lchamli funksionallar fazosida ham bu prinsipni qo'llash mumkin. Bu prinsip yordami bilan differensial tenglamalar uchun, masalan Koshi masalasi uchun yechimning mavjudlik va yagonalik teoremlarini olish mumkinligi ko'rsatilgan. Shunigdek ushbu

$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \phi(x)$ ikkinchi tur Fredholm integral tenglamasi,

$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y, f(y)) dy + \phi(x)$ ko'rinishdagi nochiziqli integral

tenglamalarga hamda Volterra tipidagi $f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy + \phi(x)$

tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligini isbotlashda qisqartirib akslantirish prinsipidan foydalanilgan. Shunigdek qisqartirib akslantirishlar prinsipining quyidagi umumlashmasi o'rinli ekanligi ko'rsatilgan.

Teorema. X metrik fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi A uzluksiz akslantirish uchun biror n da $B = A^n$ - qisqartirib akslantirish bo'lsin. U holda $Ax = x$ tenglama yagona yechimga ega bo'ladi.

Shu bilan birga qisqartirib aks ettirish prinsipidan foydalanib yechiladigan misollar ishlab ko'rsatilgan.

I-BOB. Metrik fazolar

1.1. Metrik fazolar va ularga doir misollar

Matematik analizning asosiy amallaridan biri limitga o'tish tushunchasidir. Bu amalni to'g'ri chiziqli nuqtalaridan iborat to'plamda joriy etishda biz ikki nuqta orasidagi masofa tushunchasidan doimo foydalanib kelgan edik. Ammo limitga o'tish masalasi kengroq qaraladigan bo'lsa, asosiy mazmun olingan to'plam elementlarining tabiiy tuzilishida emas, balki uning ikki elementi orasida masofa tushunchasini kiritish kerakdir. Metrik fazo tushunchasi fransuz matematigi M.Freshe tomonidan 1906-yilda kiritilgan.

1-ta'rif: Agar biror X to'plamning o'zini - o'ziga to'g'ri ko'paytmasi $X \times X$ ni $R_+ = [0, \infty)$ to'plamga aks ettiruvchi $\rho(x, y)$ funksiya berilgan bo'lib, u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, X to'plam metrik fazo deyiladi:

- 1) $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0$ faqat va faqat $x = y$ bo'lganda bajariladi,
- 2) $\forall x, y \in X$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (simmetriya aksiomasi),
- 3) $\forall x, y, z \in X$, $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (uchburchak aksiomasi).

$\rho(x, y)$ funksiya metrika deyiladi. Odatda ρ metrikali X metrik fazo (X, ρ) kabi belgilanadi.

Metrik fazoga doir misollar

1. Agar x va y haqiqiy sonlar orasida masofani $\rho(x, y) = \sin^2(x - y)$

ko‘rinishida aniqlasak, u holda barcha haqiqiy sonlar to‘plami metrik fazo bo‘ladimi?

Yechimi. Aniqlangan masofa metrikaning birinchi shartini qanoatlantirmaydi. Haqiqatan, $x \neq y$ bo‘lganda $\sin^2(x - y) = 0$ bo‘lishi mumkin.

2. Agar haqiqiy sonlar orasida masofani $\rho(x, y) = |x - y|$ ko‘rinishida aniqlasak, u holda metrika bo‘ladimi?

Yechimi. Metrika bo‘ladi. Haqiqatan,

- 1) $\rho(x, y) = |x - y| \geq 0; \rho(x, y) = |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y;$
 - 2) $\rho(x, y) = |x - y| = |-(y - x)| = |-1||y - x| = |y - x| = \rho(y, x);$
 - 3) $\rho(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = \rho(x, z) + \rho(z, y).$
3. Agar haqiqiy sonlar orasidagi masofani $\rho(x, y) = \sqrt{|x - y|}$

ko‘rinishida aniqlasak, u holda bu masofa metrika bo‘ladimi?

Yechimi. Metrika bo‘ladi.

- 1) $\rho(x, y) = \sqrt{|x - y|} \geq 0$
 $\rho(x, y) = \sqrt{|x - y|} = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y,$
- 2) $\rho(x, y) = \sqrt{|x - y|} = \sqrt{|y - x|} = \rho(y, x),$
- 3) ixtiyoriy musbat a va b haqiqiy sonlar uchun $\sqrt{a + b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

tengsizlik o‘rinli bo‘lgani uchun

$$\begin{aligned}\rho(x, y) &= \sqrt{|x - y|} = \sqrt{|x - z + z - y|} \leq \sqrt{|x - z| + |z - y|} \leq \\ &\leq \sqrt{|x - z|} + \sqrt{|z - y|} = \rho(x, z) + \rho(z, y).\end{aligned}$$

4. $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'lgan barcha funksiyalar to'plamida masofani

$$\rho(\varphi, \psi) = \sqrt{\int_a^b (\varphi(t) - \psi(t))^2 dt}$$

ko'rinishda aniqlasak, u holda bu masofa metrika bo'ladimi?

Yechimi. Metrikaning 1) va 2) aksiomalari o'rinli. 3) aksiomaning o'rinli ekanligini ko'rsatishda Koshi-Bunyakovskiy tengsizligining integral shakli deb ataluvchi

$$\int_a^b \varphi(t) \psi(t) dt \leq \sqrt{\int_a^b (\varphi(t))^2 dt \int_a^b (\psi(t))^2 dt}$$

tengsizlikdan foydalanamiz. Berilgan to'plamda ixtiyoriy φ, ψ funksiyalar uchun

$$\begin{aligned}
\rho^2(\varphi, \psi) &= \int_a^b (\varphi(t) - \psi(t))^2 dt = \int_a^b (\varphi(t) - f(t) + f(t) - \psi(t))^2 dt = \\
&= \int_a^b (\varphi(t) - f(t))^2 dt + 2 \int_a^b (\varphi(t) - f(t))(f(t) - \psi(t)) dt + \int_a^b (f(t) - \psi(t))^2 dt \leq \\
&\leq \int_a^b (\varphi(t) - f(t))^2 dt + 2 \sqrt{\int_a^b (\varphi(t) - f(t))^2 dt \int_a^b (f(t) - \psi(t))^2 dt} + \\
&+ \int_a^b (f(t) - \psi(t))^2 dt = \left(\sqrt{\int_a^b (\varphi(t) - f(t))^2 dt} + \sqrt{\int_a^b (f(t) - \psi(t))^2 dt} \right)^2 = \\
&= (\rho(\varphi, f) + \rho(f, \psi))^2.
\end{aligned}$$

Demak,

$$\rho(\varphi, \psi) \leq \rho(\varphi, f) + \rho(f, \psi).$$

5. $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyalarning barcha juftliklaridan

iborat $F[a, b]$ to'plamida (f_1, g_1) va (f_2, g_2) juftliklari orasida masofani

$$\rho((f_1, g_1), (f_2, g_2)) = \sup_{t \in [a, b]} (|f_1(t) - f_2(t)| + |g_1(t) - g_2(t)|)$$

ko'rinishda aniqlasak, u holda $F[a, b]$ metrik fazo bo'ladimi?

Yechimi. Metrikaning birinchi va ikkinchi aksiomallari o'rinli.

Uchinchi aksiomaning o'rinli ekanligini ko'rsatamiz:

$$\begin{aligned}
\rho((f_1, g_1), (f_2, g_2)) &= \sup_{t \in [a, b]} (|f_1(t) - f_2(t)| + |g_1(t) - g_2(t)|) \leq \\
&\leq \sup_{t \in [a, b]} (|f_1(t) - f_3(t)| + |f_3(t) - f_2(t)| + |f_3(t) - f_2(t)| + |g_1(t) - g_3(t)| + |g_3(t) - g_2(t)|) \leq \\
&\leq \sup_{t \in [a, b]} (|f_1(t) - f_3(t)| + |g_1(t) - g_3(t)|) + \sup_{t \in [a, b]} (|f_3(t) - f_2(t)| + |g_3(t) - g_2(t)|) = \\
&= \rho((f_1, g_1), (f_3, g_3)) + \rho((f_3, g_3), (f_2, g_2)).
\end{aligned}$$

6. n o'lchamli vektor fazoda ikki $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

vektor orasidagi masofa ushbu

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ko'rinishda kiritilsa, u holda R^n metrik fazoni tashkil etadi. 1 va 2

aksiomalarining bajarilishi o'z-o'zidan ravshan. Biz bu masofa uchun

uchburchak aksiomasini isbotlaymiz. Bu aksiomadagi tengsizlik

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ elementlar uchun quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2} \quad (1)$$

ushbu belgilashni kiritamiz:

$$x_i - z_i = a_i, \quad z_i - y_i = b_i \quad \text{bundan} \quad x_i - y_i = a_i + b_i.$$

U holda (1) tengsizlik quyidagi tengsizlikka keltiriladi:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \quad (2)$$

ushbu

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j - b_i a_j)^2$$

ayniyatdan quyidagi Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi kelib chiqadi.

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k b_k) \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2$$

bu tengsizlikdan:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + \\ &+ 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Bundan esa kerak bo'lgan (2) tengsizlik, demak (1) tengsizlik kelib chiqadi.

7. l_2 haqiqiy fazo. l_2 fazoning elementlari

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

shartni qanoatlantiruvchi haqiqiy sonli ketma-ketliklaridir. Bu fazoda masofa quyidagicha kiritiladi.

$$\rho(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Metrikaning birinchi va ikkinchi aksiomalarining o'rinliligi ravshan, uchburchak aksiomasini bajarilishini ko'rsatamiz. Darhaqiqat, ixtiyoriy n natural son va $\{a_i\} \in l_2, \{b_i\} \in l_2$ uchun

$$\left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{k=1}^n a_k^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{k=1}^n b_k^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

tengsizlik o'rinlidir (6-misoldagi 2-tengsizlik). Bu tengsizlikning o'ng tomonidagi hadlarning har biri $n \rightarrow \infty$ da limitga ega va

$$\left[\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{k=1}^n a_k^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{k=1}^n b_k^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

endi l_2 fazodan uchta

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n), z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ nuqtalarni olamiz va 6-

misoldagi kabi quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$x_k - z_k = a_k, \quad z_k - y_k = b_k, \quad \text{ravshanki, } x_k - y_k = a_k + b_k.$$

Yuqoridagi (3) tengsizlikdan foydalanib, quyidagi tengsizlikni keltirib chiqaramiz:

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left[\sum_{i=1}^{\infty} a_k^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{i=1}^{\infty} b_k^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - z_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{k=1}^{\infty} (z_k - y_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \rho(x, z) + \rho(z, y) \end{aligned}$$

8. m fazo. Bu fazo hamma chegaralangan haqiqiy sonli ketma-ketliklardan iborat. Agar uning ikkita $x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ $y = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ nuqtasi uchun masofa

$$\rho(x, y) = \sup_i |a_i - b_i|$$

tenglik bilan aniqlansa, m fazo metrik fazoga aylanadi.

Darhaqiqat, uchburchak aksiomasi quyidagicha tekshiriladi:

$$|a_i - c_i| \leq |a_i - b_i| + |b_i - c_i| \leq \sup_i |a_i - b_i| + \sup_i |b_i - c_i| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

bu yerda $z = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$. Bundan

$$\sup_i |a_i - c_i| = \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Qolgan aksiomani o'rinliligi ravshan.

9. X to'plam hamma yaqinlashuvchi sonli ketma-ketliklardan iborat bo'lsin, ya'ni

$$X = \{x : x = (a_1, a_2, \dots); \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n\}.$$

Ravshanki, $X \subset m$, ya'ni X ning har bir elementi m uchun ham element. Demak, X da m dagi masofa kiritilsa, u ham metrik fazoni tashkil qiladi. Bu fazo C bilan belgilanadi.

10. s fazo. X elementlari haqiqiy sonli ketma-ketliklardan iborat to'plam bo'lsin, ya'ni

$$X = \{x: x = (a_1, a_2, \dots)\}$$

Bu to'plamda ikki $x = (a_1, a_2, \dots)$ va $y = (b_1, b_2, \dots)$ nuqta orasidagi masofani quyidagicha kiritamiz:

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|} \quad (4)$$

uchburchak aksiomasi ushbu

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \quad (5)$$

tengsizlikdan kelib chiqadi. Shuning uchun (5) ni isbot etamiz. a va b ning ishoralari bir xil deb faraz qilaylik, masalan, $a > 0, b > 0$ bo'lsin u holda

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} = \frac{a+b}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

Endi a bilan b ning ishoralari turlicha, va masalan, $|a| \geq |b|$ bo'lsin. U holda

$$|a+b| \leq |a|.$$

Endi $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ($x \neq -1$) funksiyaning qarasak, u o'suvchi bo'ladi, chunki

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0.$$

Demak,

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

Yana bir $z = (x) = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ elementni olsak, (5) ga muvofiq,

$$\begin{aligned} \rho(x, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|a_k - c_k|}{1+|a_k - c_k|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|a_k - b_k + b_k - c_k|}{1+|a_k - b_k + b_k - c_k|} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|a_k - b_k|}{1+|a_k - b_k|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|b_k - c_k|}{1+|b_k - c_k|} = \rho(x, y) + \rho(y, z), \end{aligned}$$

ya'ni uchburchak aksiomasi isbotlandi.

11. $C[a, b]$ fazo. $[a, b]$ da aniqlangan uzluksiz haqiqiy funksiyalar to'plami $C[a, b]$ da metrikani quyidagicha kiritamiz:

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|.$$

Metrika aksiomalarini bajarilishini ko'rsatish qiyin emas. Masalan, uchburchak aksiomasini isbotlaylik. Ixtiyoriy $t \in [a, b]$ nuqta va $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ funksiyalar uchun ushbu shart bajariladi:

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &= |[x(t) - z(t)] + [z(t) - y(t)]| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \leq \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - z(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |z(t) - y(t)| = \rho(x, z) + \rho(z, y). \end{aligned}$$

Bundan $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

12. X to'plam $[a, b]$ segmentda aniqlangan hamma o'lchovli funksiyalardan iborat bo'lsin. Agar ikki funksiya farq qiladigan nuqtalardan iborat to'plamning o'lchovi nolga teng bo'lsa, bu funksiyalar teng

hisoblanadi.

Ikki $x(t)$ va $y(t)$ funksiya orasidagi masofani ushbu formula bilan aniqlaymiz:

$$\rho(x, y) = \int_a^b \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} dt \quad (6)$$

Bu hol uchun ham uchburchak aksiomasining bajarilishi 6-misoldagi kabi isbotlanadi. Qolgan ikki aksiomaning o‘rinliligi ravshan. Bu fazo $S[a, b]$ orqali belgilanadi.

1.2. To'la metrik fazolar

Matematik analizdan ma'lumki, har qanday fundamental sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchidir. Bu tasdiq sonlar o'qining to'laligini ifodalaydi. Quyida ko'rsatiladiki, ixtiyoriy metrik fazoda har qanday fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lavermaydi.

1-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday N_ε natural son mavjud bo'lib, barcha $n > N_\varepsilon$ va $m > N_\varepsilon$ nomerlar uchun $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik deyiladi.

Uchburchak aksiomasidan bevosita kelib chiqadiki, har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik fundamentaldir. Haqiqatan ham, agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik x ga yaqinlashsa, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday N_ε son mavjudki, barcha $n > N_\varepsilon$ nomerlarda $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik bajariladi. U holda ixtiyoriy $n > N_\varepsilon$ va $m > N_\varepsilon$ nomerlar uchun

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Demak, $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik ekan.

2-ta'rif. Agar X metrik fazoda ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda X to'la metrik fazo deyiladi.

Endi to'la metrik fazolarga doir misollar ko'rib chiqamiz.

1. X to'plamda metrikan

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \neq y, \\ 0, & \text{agar } x = y \end{cases}$$

ko‘rinishda aniqlasak, u holda (X, ρ) to‘la metrik fazo bo‘ladimi?

Yechimi. X fazoda ixtiyoriy $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik berilgan bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $0 < \varepsilon < 1$ soni uchun, shunday n_ε natural soni topilib, $n, m \geq n_\varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha natural sonlar uchun $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ tengsizligi o‘rinli. Bundan berilgan ketma-ketlikning n_ε hadidan keying barcha hadlari o‘zaro teng bo‘ladi. Shuning uchun $\{x_n\}$ yaqinlashuvchi. Demak, (X, ρ) to‘la metrik fazo.

2. R^n fazoning to‘laligi R fazoning to‘laligidan bevosita kelib chiqadi. Haqiqatan ham, $x^{(p)} = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)})$ - R^n dagi biror fundamental ketma-ketlik bo‘lsin. U holda har bir $\varepsilon > 0$ uchun shunday N_ε nomer mavjud bo‘lib, barcha $p > N_\varepsilon$ va $q > N_\varepsilon$ nomerlar uchun

$$\sum_{k=1}^n (x_k^{(p)} - x_k^{(q)})^2 < \varepsilon^2.$$

(1)

Natijada har bir $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ uchun $\{x_k^{(p)}\}$ ketma-ketlik barcha $p > N_\varepsilon$ va

$q > N_\varepsilon$ nomerlar uchun $|x_k^{(p)} - x_k^{(q)}| < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiradi, ya’ni

$\{x_k^{(p)}\}_{p=1}^\infty$ fundamental sonli ketma-ketlikdir va R fazo to‘la bo‘lganligi

uchun u yaqinlashuvchi bo‘ladi. Uning limitini

$$x_k = \lim_{p \rightarrow \infty} x_k^{(p)}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

orqali belgilaymiz. U holda, (1) tengsizlikda $p > N_\varepsilon$ deb $q \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak

$$\sum_{k=1}^n \left(x_k^{(p)} - x_k \right)^2 \leq \varepsilon^2$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bundan

$$\lim_{p \rightarrow \infty} x^{(p)} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x.$$

3. $C[a, b]$ fazoning to'raligini ko'rsatamiz. $\{x_n\}$ - $C[a, b]$ da fundamental ketma-ketlik bo'lsin. U holda har bir $\varepsilon > 0$ uchun shunday N_ε mavjudki, $n, m > N_\varepsilon$ bo'lganda

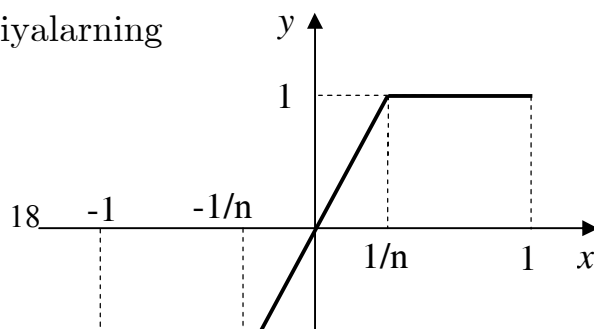
$$\rho(x_n, x_m) = \max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon \quad (2)$$

tengsizlik bajariladi. Bu esa $\{x_n\}$ funksional ketma-ketlikning $[a, b]$ kesmada tekis yaqinlashish shartidir. Shuning uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlik $[a, b]$ kesmada aniqlangan qandaydir x uzluksiz funksiyaga tekis yaqinlashadi. Agar (2) tengsizlikda $n > N_\varepsilon$ bo'lganda $m \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak, barcha $t \in [a, b]$ larda

$$\rho(x_n, x) = \max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqadi, ya'ni $\{x_n\}$ ketma-ketlik $C[a, b]$ fazo metrikasida x funksiyaga yaqinlashadi.

4. $C_2[-1, 1]$ metrik fazoning to'la emasligini ko'rsatamiz. Buning uchun $C_2[-1, 1]$ fazoda uzluksiz funksiyalarning



$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1, -1/n], \\ nx, & x \in (-1/n, 1/n), \\ 1, & x \in [1/n, 1] \end{cases}$$

ketma-ketligini qaraymiz (1-chizma). Bu ketma-ketlik $C_2[-1,1]$ fazoda fundamentaldir, chunki barcha $x \in [-1,1]$ lar uchun $|f_n(x) - f_m(x)| \leq 1$ ekanligini hisobga olsak va $n < m$ desak,

$$\rho^2(f_n, f_m) = \int_{-1}^1 (f_n(x) - f_m(x))^2 dx < \int_{-1/n}^{1/n} 1 dx = \frac{2}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Biroq $\{f_n\}$ ketma-ketlik $C_2[-1,1]$ fazodagi birorta ham funktsiyaga yaqinlashmay -di. Haqiqatan ham, $f \in C_2[-1,1]$ ixtiyoriy funktsiya va

$$\phi(x) = \begin{cases} -1, & \text{agar } x \in [-1, 0), \\ 1, & \text{agar } x \in [0, 1] \end{cases}$$

nol nuqtada uzilishga ega funktsiya bo'lsin. Ko'rinib turibdiki,

$$f_n(x) - \phi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, -1/n] \cup [1/n, 1], \\ nx + 1, & x \in (-1/n, 0), \\ nx - 1, & x \in [0, 1/n]. \end{cases}$$

Bundan tashqari barcha $x \in [-1,1]$ lar uchun $|f_n(x) - \phi(x)| \leq 1$. Shuning uchun

$$\int_{-1}^1 (f_n(x) - \phi(x))^2 dx = \int_{-1/n}^{1/n} (n \cdot x - \phi(x))^2 dx \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

(3)

Agar Minkovskiyning integral tengsizligidan foydalansak,

$$\left[\int_{-1}^1 (f(x) - \phi(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\int_{-1}^1 (f(x) - f_n(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_{-1}^1 (f_n(x) - \phi(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

tengsizlikka kelaymiz. Endi quyidagi

$$\int_{-1}^1 (f(x) - \phi(x))^2 dx > 0 \quad (5)$$

tengsizlikni isbotlaymiz. Uning isbotini ikki holga ajratamiz.

1) Faraz qilaylik $f(0) \leq 0$ bo'lsin, u holda f ning uzluksizligiga ko'ra shunday $\delta_1 > 0$ mavjudki, barcha $x \in [0, \delta_1]$ lar uchun $f(x) < 1/2$ bo'ladi.

Bundan

$$|f(x) - \phi(x)| \geq 1/2, \quad x \in [0, \delta_1] \quad (6)$$

tengsizlik kelib chiqadi. (6) tengsizlikni $[0, \delta_1]$ kesma bo'yicha integrallab,

$$\int_{-1}^1 (f(x) - \phi(x))^2 dx \geq \int_0^{\delta_1} (f(x) - \phi(x))^2 dx > \frac{\delta_1}{4}$$

tengsizlikka kelaymiz.

2) Agar biz $f(0) > 0$ deb faraz qilsak, u holda shunday $\delta_2 > 0$ mavjudki,

barcha $x \in [-\delta_2, 0]$ lar uchun $|f(x) - \phi(x)| > 1/2$ bo'ladi. Bundan

$$\int_{-1}^1 (f(x) - \phi(x))^2 dx \geq \int_{-\delta_2}^0 (f(x) - \phi(x))^2 dx > \frac{\delta_2}{4}.$$

Demak, (5) tengsizlik isbot bo'ldi. (4) tengsizlikdan

$$\left[\int_{-1}^1 (f(x) - f_n(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \geq \left[\int_{-1}^1 (f(x) - \phi(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} - \left[\int_{-1}^1 (f_n(x) - \phi(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

ni olamiz. (3), (5) va (7) lardan

$$\rho(f, f_n) = \left[\int_{-1}^1 (f(x) - f_n(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

ning nolga yaqinlasha olmasligi kelib chiqadi, ya'ni $\{f_n\}$ ketma-ketlik $C_2[-1,1]$ dagi birorta ham funksiyaga yaqinlasha olmaydi.

5. l_1 metrik fazoning to'la ekanligini isbotlang.

Yechimi. l_1 fazoda $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik berilgan bo'lsin, bunda $x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}, \dots)$. fundamental ketma-ketlikning ta'rifidan, $\forall \varepsilon > 0$ uchun n_ε natural soni topilib, $n, m \geq n_\varepsilon$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi n, m natural sonlari

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon \quad (8)$$

tengsizlikni qanoatlantiradi. Ixtiyoriy j uchun

$$|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon$$

bo'lgani uchun, har bir j da $\{x_j^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ sonli ketma-ketlik fundamental,

ya'ni yaqinlashuvchi. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_j^{(n)} = a_j$ bo'lsin.

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \in l_1$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ekanligi --ni ko'rsatamiz.

(8) tengsizlikdan ixtiyoriy k soni va $m \geq n_\varepsilon$ natural sonlari uchun

$$\sum_{i=1}^k \left| x_i^{(n)} - x_i^{(m)} \right| < \varepsilon$$

tengsizligining o‘rinli ekanligi kelib chiqadi. Bu tengsizlikda dastlab $m \rightarrow \infty$ da, keyin $k \rightarrow \infty$ da limitga o‘tib $n \geq n_\varepsilon$ bo‘lganda

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| x_i^{(n)} - a_i \right| \leq \varepsilon \quad (9)$$

tengsizlikiga ega bo‘lamiz. $|a_i| \leq |x_i^{(n)} - a_i| + |x_i^{(n)}|$ bo‘lgani uchun (9)

tengsizlikdan va $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)}|$ qatorning yaqinlashuvchiligidan $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ qatorning

yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi, ya’ni $a \in l_1$. (9) tengsizlikdan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

ekanligi kelib chiqadi.

6. l_2 metrik fazoning to‘laligini isbotlang.

Yechimi. l_2 fazodan olingan $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik berilgan bo‘lsin, bunda $x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}, \dots)$.

Fundamental ketma-ketlikning ta’rifidan, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday n_ε natural soni topilib, $n, m \geq n_\varepsilon$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi n, m natural sonlari uchun

$$\rho^2(x_n, x_m) = \sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k^{(n)} - x_k^{(m)} \right|^2 < \varepsilon \quad (10)$$

tengsizlik o‘rinli. Bundan har bir i soni uchun

$$\left| x_i^{(n)} - x_i^{(m)} \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k^{(n)} - x_k^{(m)} \right|^2 < \varepsilon,$$

bo'lganligidan, har bir i uchun $\{x_i^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ sonli ketma-ketlik fundamental.

Bundan u yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu ketma-ketlikning limitini a_i bilan belgilab, $a = (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots)$ elementni hosil qilamiz.

Agar $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$ munosabatlarning o'rinliligi

ko'rsatilsa, l_2 fazoning to'laligi isbot etilgan bo'ladi.

(10) tengsizlikni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^2 = \sum_{k=1}^p |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^2 + \sum_{k=p+1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^2 < \varepsilon,$$

bu yerda p ixtiyoriy natural son. Bundan ixtiyoriy p uchun

$$\sum_{k=1}^p |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^2 < \varepsilon,$$

yoki p bilan m ni tayinlab, n bo'yicha limitga o'tilsa, ushbu

$$\sum_{k=1}^p |a_k - x_k^{(m)}|^2 < \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bu tengsizlik ixtiyoriy p uchun o'rinli, shuning uchun bunda p bo'yicha limitga o'tish mumkin, u holda

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - x_k^{(m)}|^2 < \varepsilon. \quad (11)$$

Bundan va $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^2 < \infty$ munosabatdan quyidagi tengsizlik kelib chiqadi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty.$$

Demak, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \in l_2$. So'ngra $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy bo'lganligi uchun (11)

dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$.

7. m metrik fazoning to'raligini isbotlang.

Yechimi. m fazodan olingan $\{x_n\}$ ketma-ketlik fundamental bo'lsin,

bunda $x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}, \dots)$. $x_n \in m$ bo'lganligi tufayli shunday c_n ketma-

ketligi mavjudki, uning uchun $|x_n^{(k)}| \leq c_n$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) o'rinli. Fundamental

ketma-ketlikning ta'rifidan, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun n_ε natural soni topilib,

$n, m \geq n_\varepsilon$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi n, m natural sonlari uchun

$$\rho(x_n, x_p) = \sup_k |x_k^{(n)} - x_k^{(p)}| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli. Bundan

$$|x_k^{(n)} - x_k^{(p)}| < \varepsilon \quad (12)$$

munosabatning k ga nisbatan tekis bajarilishi kelib chiqadi. Demak,

ixtiyoriy k uchun $\{x_k^{(n)}\}$ sonli ketma-ketlik fundamental va yaqinlashuvchi.

Bu ketma-ketlikning limitini a_k bilan belgilab $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ elementni

hosil qilamiz. Endi ushbu $a \in m$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$ munosabatlarni

isbotlaymiz.

(12) da p ga nisbatan limitga o'tilsa, barcha k lar uchun $n > n_\varepsilon$ bo'lganda o'rinli bo'lgan

$$\left| x_k^{(n)} - a_k \right| \leq \varepsilon \quad (13)$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bundan

$$\left| a_k \right| \leq \left| x_k^{(n_\varepsilon+1)} - a_k \right| + \left| x_k^{(n_\varepsilon+1)} \right| < \varepsilon + c_{n_\varepsilon+1}$$

tengsizlikni barcha k lar uchun hosil qilish mumkin, ya'ni

$a = (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots) \in m$ munosabat kelib chiqadi. (12) dan $n \geq n_\varepsilon$ uchun

$$\rho(x_n, x) = \sup_k |x_{n_k} - x_k| < \varepsilon.$$

ε ixtiyoriy bo'lgani uchun, (13) dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$ munosabat kelib chiqadi.

II-BOB. Qisqartirib akslantirish prinsipi va uning tadbirlari

2.1. Qisqartirib akslantirish prinsipi

Berilgan shartlarda tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligi bilan bog'liq masalalarni mos metrik fazolardagi biror akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi mavjudligi va yagonaligi haqidagi masala ko'rinishida ifodalash mumkin. Qo'zg'almas nuqta mavjudligi va yagonaligi belgilari ichida eng sodda va shu bilan birga juda muhim belgi - bu «Qisqartirib akslantirish prinsipi» deb nomlanuvchi belgidir.

1-ta'rif. X metrik fazo va uni o'zini-o'ziga akslantiruvchi A akslantirish berilgan bo'lsin. Agar shunday $\alpha \in (0;1)$ son mavjud bo'lib, barcha $x, y \in X$ nuqtalar uchun

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y) \quad (1)$$

tengsizlik bajarilsa, A akslantirish qisqartirib akslantirish deb ataladi.

Har bir qisqartirib akslantirish uzluksizdir. Haqiqatan ham, agar $x_n \rightarrow x$ ($\rho(x_n, x) \rightarrow 0$) bo'lsa, u holda $\rho(Ax_n, Ax) \leq \alpha \rho(x_n, x)$ bo'lgani uchun $Ax_n \rightarrow Ax$.

Agar $A: X \rightarrow X$ akslantirish uchun shunday $x \in X$ nuqta mavjud bo'lib $Ax = x$ tenglik bajarilsa, x nuqta A akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi deyiladi.

1-teorema (Qisqartirib akslantirish prinsipi). To'la metrik fazoda

aniqlangan har qanday qisqartirib akslantirish yagona qo'zg'almas nuqtaga ega.

Isbot. X metrik fazodan ixtiyoriy x_0 nuqtani olamiz. Keyin

$x_1 = Ax_0, x_2 = Ax_1 = A^2x_0, x_3 = Ax_2 = A^3x_0, \dots, x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0, \dots$ nuqtalar ketma-ketligini qaraymiz. Ixtiyoriy $m, n (n < m)$ natural sonlar uchun

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &= \rho(A^n x_0, A^m x_0) \leq \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \leq \\ &\leq \alpha^n (\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{m-n}, x_{m-n+1})) \leq \\ &\leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1}) \leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) \frac{1}{1-\alpha} \end{aligned}$$

tengsizlik o'rinli. $\alpha \in (0;1)$ bo'lgani uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n \rho(x_0, x_1) = 0.$$

Shuning uchun $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlikdir. X to'la metrik fazo va $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo'lgani uchun u yaqinlashuvchi. Aytaylik,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

bo'lsin. U holda A akslantirishning uzluksizligiga ko'ra

$$Ax = A \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x.$$

Shunday qilib, A akslantirish uchun qo'zg'almas nuqta mavjud ekan. Uning yagonaligini isbotlaymiz. Agar $Ax = x, Ay = y$ desak, (1) tengsizlikka ko'ra

$$\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y).$$

Bundan $\alpha \in (0;1)$ bo'lgani uchun $\rho(x, y)(1-\alpha) \leq 0 \Rightarrow \rho(x, y) = 0$ ya'ni $x = y$ bo'lishi kelib chiqadi. Qo'zg'almas nuqta yagona ekan.

Endi qisqartirib akslantirish prinsipining **algebra**ga tadbiqini ko'ramiz.

Buning uchun quyidagi chiziqli tenglamalar

$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i=1,2,\dots,n$ sistemasini qaraymiz. Bu sistema yagona

yechimga ega bo'lishi uchun R^n fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi va

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i=1,2,\dots,n$$

formulalar orqali aniqlangan A akslantirishning qanday shartlarda qisqartirib akslantirish bo'lishini topamiz.

Qanday shartlarda A akslantirish qisqartirib akslantirish bo'ladi? Bu savolga javob fazoda qanday metrika berilishiga bog'liq. Biz quyida uch xil variantni qaraymiz:

a) R_∞^n fazo, ya'ni

$$\rho(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

bo'lsin.

$$\begin{aligned} \rho(y', y'') &= \max_{1 \leq i \leq n} |y'_i - y''_i| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} (x'_j - x''_j) \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x'_j - x''_j| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \max_{1 \leq j \leq n} |x'_j - x''_j| = \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \rho(x', x''). \end{aligned}$$

Bu yerdan kelib chiqadiki, A akslantirish qisqartirib akslantirish bo'lishi uchun

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \alpha < 1$$

(2)

shartning bajarilishi yetarli. Shuning uchun R_∞^n fazoda (2) shartni A akslantirishning qisqartirib akslantirish bo'lish sharti sifatida qabul qilamiz.

b) R_1^n fazo, ya'ni

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned} \rho(y', y'') &= \sum_{i=1}^n |y'_i - y''_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} (x'_j - x''_j) \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x'_j - x''_j| = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \cdot |x'_j - x''_j| \leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \cdot \sum_{j=1}^n |x'_j - x''_j| \leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \cdot \rho(x', x''). \end{aligned}$$

Bu yerdan ko'rinadiki, A akslantirish uchun qisqartirib akslantirish bo'lish sharti R_1^n fazoda

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \alpha < 1 \quad (3)$$

ko'rinishga ega.

c) R^n fazo, ya'ni

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

bo'lsin. U holda

Yuqorida keltirilgan tenglik va tengsizliklarga ko'ra R^n fazoda A akslantirishning qisqartirib akslantirish bo'lishlik sharti

$$\begin{aligned}\rho^2(y', y'') &= \sum_{i=1}^n (y'_i - y''_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} (x'_j - x''_j) \right)^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right) \cdot \sum_{j=1}^n (x'_j - x''_j)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 \right) \cdot \rho^2(x', x'').\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 \leq \alpha < 1$$

(4)

ko'rinishga ega.

Shunday qilib, agar (2)–(4) shartlardan birortasi bajarilsa, u holda yagona $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqta mavjud bo'lib,

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

bo'ladi. Bundan tashqari bu nuqtada ketma-ket yaqinlashishlar quyidagi ko'rinishga ega

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i, \quad x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Bu yerda $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ sifatida R^n dagi ixtiyoriy nuqtani qabul qilish mumkin.

Qaralayotgan $y = Ax$ akslantirish qisqartirib akslantirish bo'lishi uchun (2)–(4) shartlarning ixtiyoriy birining bajarilishi yetarli. Isbotlash mumkinki, (2) va (3) shartlar mos ravishda R_∞^n va R_1^n fazolarda $y = Ax$ akslantirish qisqartirib akslantirish bo'lishi uchun zarur ham bo'ladi.

Ta'kidlash lozimki, (2)–(4) shartlarning birortasi ham ketma-ket

yaqinlashishlar usulining tadbiri uchun zarur emas.

Agar $|a_{ij}| < n^{-1}$ bo'lsa, u holda (2)–(4) shartlarning hammasi bajariladi va ketma-ket yaqinlashishlar usulini qo'llash mumkin.

Agar $|a_{ij}| \geq n^{-1}$ bo'lsa, u holda (2)–(4) shartlarning birortasi ham bajarilmaydi. Demak qaralayotgan tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'lishi uchun (2)–(4) shartlarning ixtiyoriy birining bajarilishi yetarli ekan.

Qisqartirib akslantirish prinsipining eng oddiy qo'llanilishi.

Qisqartirib akslantirish prinsipini turli tipdagi tenglamalar uchun yechimning mavjudlik va yagonalik teoremlarini isbotlashda qo'llash mumkin. $Ax = x$ tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligini isbotlashda qisqartirib akslantirish prinsipi yechimni topishni amalda yaqinlashishlar metodini beradi.

Quyidagi oddiy misollarni ko'rib chiqamiz.

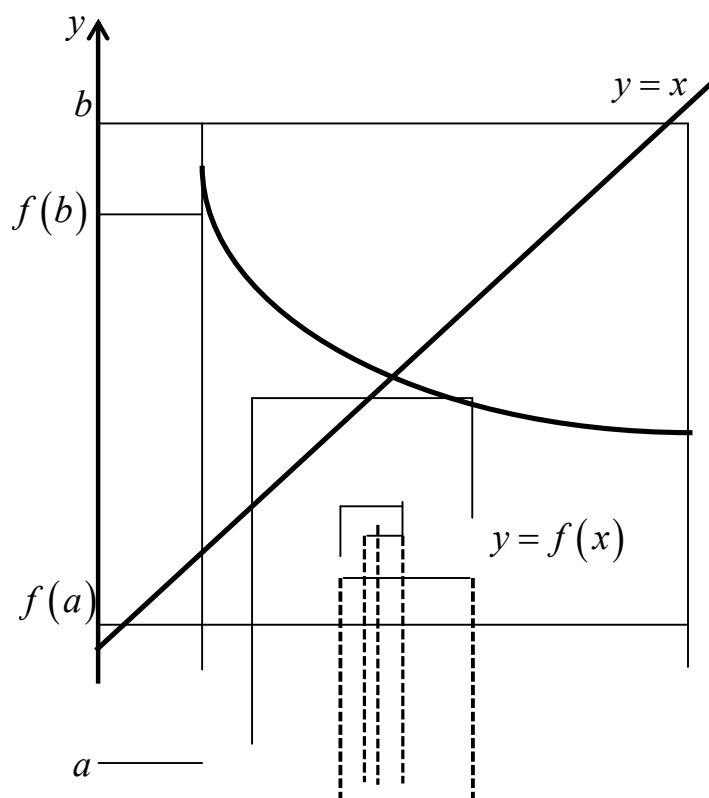
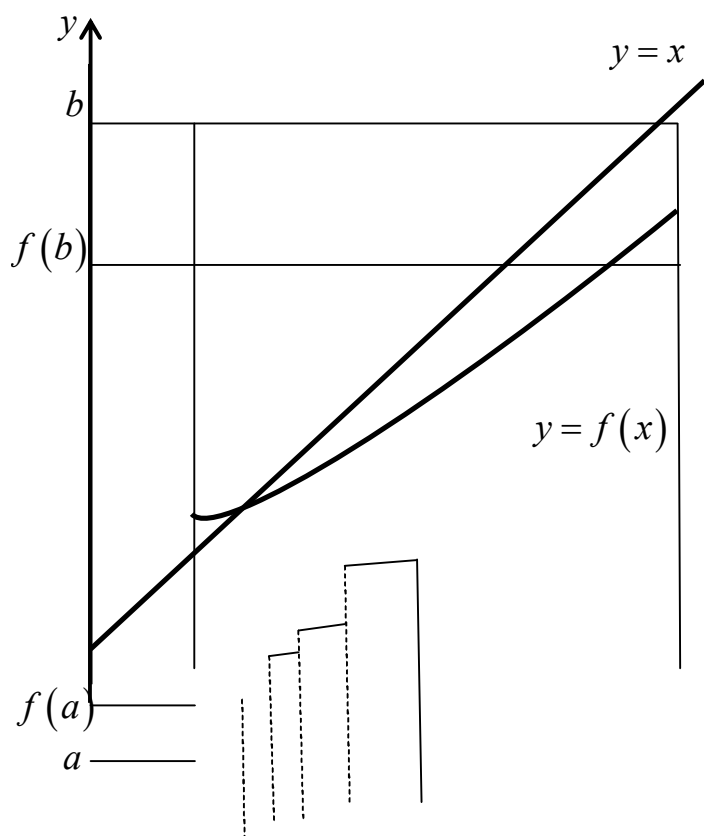
1. Aytaylik f - biror $[a, b]$ segmentda aniqlangan funksiya $[a, b]$ ni o'z-o'ziga akslantirsin va K doimiy bilan Lipschits shartini qanoatlantirsin.

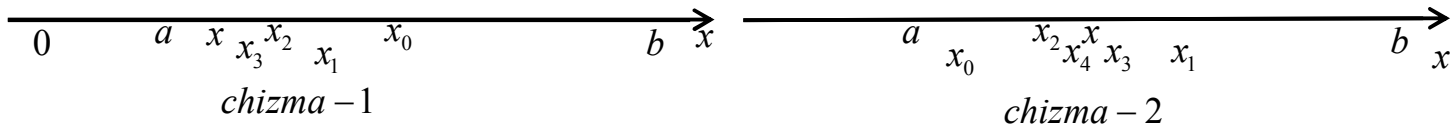
$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq K|x_2 - x_1|,$$

akslanadi. U holda f qisqartirib akslantirish bo'ladi va isbotlangan teorema asosan $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots$ ketma-ketlik $x = f(x)$ tenglamaning yagona ildiziga yaqinlashadi.

Agar funksiya $[a, b]$ segmentda $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, shu bilan birga

$|f'(x)| \leq K < 1$ bo'lsa qisqartiruvchanlik sharti bajariladi. 1-chizma va 2-chizmada mos ravishda $0 < f'(x) < 1$ va $-1 < f'(x) < 0$ bo'lgan hollarda ketma-ket yaqinlashishlar yo'li tasvirlangan.





Endi $F(x)=0$ ko‘rinishidagi tenglamani, shu bilan birga $[a,b]$ da $F(a)<0, F(b)>0$ va $0<K_1\leq F'(x)\leq K_2$ holni qaraymiz. $f(x)=x-\lambda F(x)$ funksiyani kiritamiz va $\lambda\neq 0$ da $F(x)=0$ tenglamaga teng kuchli $x=f(x)$ tenglama yechimini izlaymiz. $f'(x)=1-\lambda F'(x)$ bo‘lsa, $1-\lambda K_2\leq f'(x)\leq 1-\lambda K_1$ ekanligidan hamda λ sonni shunday tanlash mumkinki yaqinlashuvchi ketma-ketliklar metodini amalga oshirish mumkin. Bu- ildiz topishning kengaytirilgan metodidir.

Qisqartirib akslantirishning matematik analizga tadbiqu

Oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi quyidagi masalani qaraymiz:

Aytaylik, $f(x,y)$ funksiya $G=\{(x,y): a\leq x\leq b, -\infty<y<+\infty\}$ sohada x bo‘yicha uzluksiz va y bo‘yicha musbat, chegaralangan hosilaga ega bo‘lsin: $0<m\leq f'_y\leq M$. U holda $f(x,y)=0$ tenglama $[a,b]$ kesmada yagona uzluksiz yechimga ega.

Haqiqatan, $C[a,b]$ fazoni o‘z-o‘ziga aks ettiruvchi $Ay=y-\frac{1}{M}f(x,y)$

akslantirishni qaraymiz. Bu akslantirishning qisqartirib akslantirish ekanligini ko‘rsatamiz. Agar y_1 va y_2 funksiyalar $C[a,b]$ fazoning elementlari

bo'lsa, u holda

$$\begin{aligned} |Ay_1 - Ay_2| &= \left| \left(y_1 - \frac{1}{M} f(x, y_1) \right) - \left(y_2 - \frac{1}{M} f(x, y_2) \right) \right| = \\ &= \left| (y_2 - y_1) - \frac{1}{M} f'_y(x, y_1 + \theta(y_1 - y_2))(y_1 - y_2) \right| \leq \\ &\leq \left| 1 - \frac{1}{M} \right| |y_1 - y_2| = \alpha |y_1 - y_2|, \end{aligned}$$

ya'ni

$$\rho(Ay_1, Ay_2) \leq \alpha \rho(y_1, y_2),$$

bunda $0 < \alpha < 1$.

Demak, qisqatirib akslantirish prinsipidan, ixtiyoriy $y_0 \in C[a, b]$ uchun

$$y_1 = Ay_0, y_2 = Ay_1, \dots$$

ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladi va $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ funksiya $f(x, y) = 0$

tengla-

-maning yagona uzluksiz yechimi bo'ladi.

2.2 Qisqartirib akslantirish prinsipining differensial tenglamalarga tadbiqi.

Biz yuqorida n -o'lchovli fazoda va 1 o'lchovli fazoda qisqartirib akslantirish prinsipining qo'llanilishi 2 ta oddiy misollarda keltirildi. Cheksiz o'lchamli funksionallar fazosida ham bu prinsipni qo'llash mumkin. Hozir biz uni yordami bilan biror turdagi differensial tenglamalar uchun yechimning mavjudlik va yagonalik teoremlarini olishimiz mumkinligini ko'rsatamiz.

Koshi masalasi:

Aytaylik

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

differensial tenglama

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

boshlang'ich shart bilan berilgan bo'lsin.

Shu bilan birga f funksiya (x_0, y_0) nuqtani o'z ichiga oluvchi G biror tekis sohada aniqlangan va uzluksiz, hamda bu sohada y bo'yicha Lipshits shartini qanoatlantirsin.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M |y_1 - y_2|.$$

U holda $|x - x_0| \leq d$ segmentda (2) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi

(1) tenglamani faqat bitta $y = \varphi(x)$ yechimi mavjudligini isbotlaymiz.

(1) tenglama (2) boshlang'ich shart bilan birga

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt \quad (3)$$

integral tenglamaga ekvivalent.

f funksiya uzluksizligiga ko'ra (x_0, y_0) nuqtani o'z ichiga oluvchi $G' \subset G$ sohada $|f(x, y)| \leq K$ ga ega bo'lamiz. Quyidagi shartlar bajarilishi uchun $d > 0$ ni moslab tanlaymiz:

- 1) $(x, y) \in G'$, agar $|x - x_0| \leq d, |y - y_0| \leq Kd$;
- 2) $Kd < 1$.

C^* orqali $|x - x_0| \leq d$ segmentda aniqlangan va shunday $|\varphi(x) - y_0| \leq Kd$,

$\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \max_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$ metrika bilan aniqlangan φ uzluksiz

funksiyalar fazosini belgilaymiz.

C^* fazo to'la, chunki u $[x_0 - d, x_0 + d]$ dagi barcha uzluksiz funksiyalarning to'la fazosining yopiq qism fazosini ifodalaydi.

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt,$$

formula bilan aniqlangan $\psi = A\varphi$ akslantirishni qaraymiz bu yerda

$$|x - x_0| \leq d.$$

Bu akslantirishning C^* to'la fazoni o'z-o'ziga o'tkazadi va unda qisqartirib akslantirish bo'ladi. Haqiqatan ham, aytaylik $\varphi \in C^*$, $|x - x_0| \leq d$ bo'lsin.

U holda

$$|\psi(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt \right| \leq Kd$$

demak $A(C^*) \subset C^*$. Bundan tashqari

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))| dt \leq Md \max_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|.$$

Demak $Md < 1$ bo'lsa, u holda A -qisqartirib akslantirish bo'ladi.

Bundan $\psi = A\varphi$ tenglama C^* fazoda faqat bitta yechimga ega bo'lishi kelib chiqadi.

2.3 Qisqartirib akslantirishlar prinsipining integral tenglamalarga tadbiqu.

Fredholm tenglamasi. Qisqartirib akslantirishlar prinsipini ushbu

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \phi(x) \quad (1)$$

ikkinchi tur Fredholm integral tenglamasi yechimining mavjudligi va yagonaligini isbotlash uchun qo'llaymiz. Bu yerda K integral tenglama yadrosi va ϕ - berilgan funksiyalar, f - izlanayotgan (noma'lum) funksiya, λ esa - haqiqiy parametr.

Ko'rsatamizki, qisqartirib akslantirishlar prinsipini λ parametrning yetarlicha kichik qiymatlarida qo'llash mumkin.

Faraz qilamiz, $K(x, y)$ - $[a, b] \times [a, b]$ kvadratda, $\phi(x)$ - $[a, b]$ kesmada uzluksiz funksiyalar bo'lsin. Shunday ekan, musbat M son mavjud bo'lib, barcha $x, y \in [a, b]$ uchun $|K(x, y)| \leq M$ tengsizlik bajariladi. To'la $C[a, b]$ fazoni o'zini-o'ziga

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \phi(x) \quad (2)$$

formula vositasida akslantiruvchi akslantirish berilgan bo'lsin. U holda

$$\rho(g_1, g_2) = \max_{a \leq x \leq b} |g_1(x) - g_2(x)| \leq |\lambda| M(b-a) \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)|$$

yoki

$$\rho(Af_1, Af_2) \leq |\lambda| M(b-a) \cdot \rho(f_1, f_2).$$

Shunday ekan,

$$|\lambda| < \frac{1}{M \cdot (b-a)} \quad (3)$$

bo'lganda A qisqartirib akslantirish bo'ladi. Qisqartirib akslantirishlar prinsipiga asoslanib xulosa qilamizki, (3) shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy λ da (1) Fredholm tenglamasi yagona uzluksiz yechimga ega.

Bu yechimga intiluvchi ketma-ket yaqinlashishlar $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$

$$f_n(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f_{n-1}(y) dy + \phi(x)$$

ko'rinishga ega, bu yerda f_0 sifatida ixtiyoriy uzluksiz funksiyani olish mumkin.

Nochiziqli integral tenglamalar. Qisqartirib akslantirishlar prinsipining

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y; f(y)) dy + \phi(x)$$

ko'rinishdagi chiziqlimas integral tenglamalarga tadbiqini qaraymiz. Bu yerda K va ϕ funksiyalar uzluksiz bo'lib, bundan tashqari K o'zining 3-funksional argumenti bo'yicha Lipshits shartini qanoatlantirsin, ya'ni shunday $L > 0$ mavjud bo'lib,

$$|K(x, y, z_1) - K(x, y, z_2)| \leq L |z_1 - z_2|$$

tengsizlik barcha $x, y \in [a, b]$ va z_1, z_2 lar uchun o'rinli bo'lsin. Bu holda $C[a, b]$ fazoni o'zini-o'ziga

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y, f(y)) dy + \phi(x)$$

formula vositasida akslantiruvchi $g = Af$ akslantirish uchun

$$\max_{a \leq x \leq b} |g_1(x) - g_2(x)| \leq |\lambda| L(b-a) \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)|$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi, bu yerda $g_1 = Af_1$, $g_2 = Af_2$. Shunday ekan,

$$|\lambda| < \frac{1}{L \cdot (b-a)}$$

shartda A akslantirish qisqartirib akslantirish bo'ladi.

Volterra tenglamasi. Endi Volterra tipidagi

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy + \phi(x) \quad (4)$$

tenglamani qaraymiz. Agar $y > x$ da $K(x, y) = 0$ desak, (4) Volterra tenglamasi (1) ko'rinishdagi ikkinchi tur Fredholm tenglamasiga keladi.

Biroq Fredholm integral tenglamasi holida biz λ parametrning kichik qiymatlari bilan chegaralanishga majburmiz. Volterra tenglamasi holida qisqartirib akslantirishlar prinsipi (va ketma-ket yaqinlashishlar usuli) ni λ ning barcha qiymatlarida qo'llash mumkin. Aniqrog'i, qisqartirib akslantirishlar prinsipining quyidagi umumlashmasi o'rinli.

1-teorema. X metrik fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi A uzluksiz akslantirish uchun biror n da $B = A^n$ - qisqartirib akslantirish bo'lsin. U holda $Ax = x$ tenglama yagona yechimga ega bo'ladi.

Isbot. $x \in X$ nuqta B akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi bo'lsin, ya'ni $Bx = x$. U holda B qisqartirib akslantirishga ketma-ket

yaqinlashishlar usulini qo'llasak,

$$Ax = ABx = AB^k x = AA^{nk} x = A^{nk+1} x = A^{nk} Ax = B^k Ax = B^k x_0 \rightarrow x, k \rightarrow \infty.$$

Chunki ixtiyoriy $x_0 \in X$, xususiyl holda $x_0 = Ax$ uchun, $Bx_0, B^2x_0, \dots, B^kx_0, \dots$

ketma-ketlik x qo'zg'almas nuqtaga yaqinlashadi. Shunday ekan, $Ax = x$.

Bu x nuqta yagona, chunki A uchun qo'zg'almas bo'lgan x nuqta $B = A^n$ uchun ham qo'zg'almas nuqtadir, B esa yagona qo'zg'almas nuqtaga ega.

Misol. $C[a, b]$ fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi va

$$(Af)(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy + \phi(x) \quad (5)$$

formula bilan aniqlangan A akslantirishning biror darajasi qisqartirib akslantirish ekanligini ko'rsating.

Yechish. $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan f_1 va f_2 funksiyalarni olamiz. U holda

$$\begin{aligned} |(Af_1)(x) - (Af_2)(x)| &= \left| \lambda \cdot \int_a^x K(x, y) (f_1(y) - f_2(y)) dy \right| \leq \\ &\leq \left| \lambda \right| \cdot M(x-a) \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)|. \end{aligned}$$

Bu yerda

$$M = \max_{a \leq x, y \leq b} |K(x, y)|.$$

Olingan tengsizlikdan kelib chiqadiki,

$$\left| (A^2 f_1)(x) - (A^2 f_2)(x) \right| = \left| \lambda \right|^2 \cdot M^2 \cdot \frac{(x-a)^2}{2} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Umuman,

$$\begin{aligned} \left| (A^n f_1)(x) - (A^n f_2)(x) \right| &= |\lambda|^n \cdot M^n \cdot \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)| = \\ &= |\lambda|^n \cdot M^n \cdot \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot \rho(f_1, f_2). \end{aligned}$$

Ixtiyoriy λ uchun n nomerni shunday tanlash mumkinki,

$$|\lambda|^n \cdot M^n \cdot \frac{(b-a)^n}{n!} < 1$$

tengsizlik bajariladi. U holda $B = A^n$ akslantirish qisqartirib akslantrish bo'ladi.

Shuning uchun, yuqoridagi tasdiqqa asosan (4) Volterra tenglamasi har qanday λ da yagona yechimga ega.

2.4 Qisqartirib akslantirish prinsipini tadbqiqiga doir misollar.

1. $f(x)$ sonlar o'qida aniqlangan funksiya bo'lib, har bir $x \in \mathbb{R}$ nuqtada hosilaga ega va $|f'(x)| \leq k$ tengsizligi o'rinli bo'lsin (bunda k birdan kichik tayinlangan son). U holda $x = f(x)$ tenglama yagona yechimga ega ekanligini ko'rsating.

Yechimi. Matematik analiz kursidagi Lagranj teoremasiga asosan har bir $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ nuqtalar uchun

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $c \in (x_1, x_2)$ soni mavjud bo'ladi. U holda $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$ tengsizligi o'rinli, $0 < k < 1$ bo'lgani uchun f qisqartirib akslantirish bo'ladi. U holda qisqartirib akslantirish prinsipiga asosan $x = f(x)$ tenglama yagona yechimga ega.

2. $f(x) = 4x - 4x^2$ funksiya $[0;1]$ kesmani o'ziga akslantirishini tekshiring.

Bu akslantirish qisqartiruvchi bo'ladimi?

Yechimi. $f(x) = 4x(1-x)$ bo'lganligidan x element $[0;1]$ segmentga tegishli bo'lganda $f(x) \geq 0$ tengsizligi, $f(x) - 1 = -(2x-1)^2 \leq 0$ bo'lganligidan, esa $f(x) \leq 1$ tengsizligi o'rinli bo'ladi. Demak, f funksiyasi $[0;1]$ segmentni o'ziga akslantiradi.

$$x_1 = 0 \text{ va } x_2 = \frac{1}{2} \quad \text{nuqtalarda} \quad f(x_1) = 0, f(x_2) = 1 \quad \text{tengliklari}$$

o'rinlidir. Bundan

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) = 1 > \frac{1}{2} = \rho(x_1, x_2).$$

Bu esa f akslantirish qisqartiruvchi emasligini bildiradi.

3. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ akslantirish $[1; \infty]$ nurda qisqartiruvchi bo'ladimi?

Yechimi.

$$\begin{aligned} \rho(f(x_1), f(x_2)) &= |f(x_1) - f(x_2)| = \\ &= \left| (x_1 - x_2) + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) \right| = |x_1 - x_2| \cdot \left(1 - \frac{1}{x_1 x_2} \right). \end{aligned}$$

tengligi va $x_1 x_2 \geq 1$ tengsizlikidan

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq \rho(x_1, x_2)$$

tengsizligiga ega bo'lamiz. Bu tengsizlik berilgan akslantirish qisqartiruvchi ekanligini anglatmaydi. Qisqartiruvchi akslantirish bo'lishi uchun $\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq \alpha \rho(x_1, x_2)$ tengsizligi o'rinli bo'lishi kerak, bunda $0 < \alpha < 1$.

Bizning holda α sonini saylab olish mumkin emas, chunki $1 - \frac{1}{x_1 x_2}$ ifodasi

$x_1 x_2$ ko'paytmaning yetarlicha katta qiymatlarida birga xohlagancha yaqin bo'ladi.

4. X to'la metrik fazosida A va B qisqartiruvchi akslantirishlar berilgan bo'lsin:

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y), \quad \rho(Bx, By) \leq \alpha \rho(x, y)$$

Agar barcha $x \in X$ elementlar uchun $\rho(Ax, Bx) < \varepsilon$ (bunday A va B akslantirishlar ε -yaqin deyiladi) tengsizligi o'rinli bo'lsa, u holda bu

akslantirishlar qo'zg'almas nuqtalari orasidagi masofa $\frac{\varepsilon}{1-\alpha}$ sonidan katta

emasligini isbotlang, bunda $\alpha = \max(\alpha_A, \alpha_B) < 1$.

Yechimi. x' nuqta A ning qo'zg'almas nuqtasi bo'lsin. B qisqartiruvchi akslantirishning y' qo'zg'almas nuqtasini $y_k = B^k x'$, ($k = 0, 1, \dots$) ketma-ketlikning limiti sifatida qaraymiz. U holda

$$\begin{aligned} \rho(x', y_k) &\leq \rho(x', y_1) + \rho(y_1, y_2) + \dots + \rho(y_{k-1}, y_k) \leq \\ &\leq \rho(x', Bx') (1 + \alpha_B + \dots + \alpha_B^{k-1}) \leq \frac{\rho(x', Bx')}{1 - \alpha_B}, \end{aligned}$$

bundan $k \rightarrow \infty$ bo'lganda

$$\rho(x', y') \leq \frac{\rho(x', Bx')}{1 - \alpha_B} = \frac{\rho(Ax', Bx')}{1 - \alpha_B} < \frac{\varepsilon}{1 - \alpha}.$$

5. $2, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \dots$ kabi aniqlangan $\{x_n\}$ ketma-ketligining

yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang va uning limitini toping.

Yechimi. $\{x_n\}$ ketma-ketlikni $x_1 = 2, x_n = 2 + \frac{1}{x_{n-1}}$ ($n \geq 2$) ko'rinishda

rekurent aniqlash mumkin bo'lganligidan,

$$x_n = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x_{n-2}}} \quad (n \geq 3)$$

tengligi va $x_1 \leq \frac{5}{2}$, $x_2 \leq \frac{5}{2}$ tengsizliklaridan $x_n \leq \frac{5}{2}$ ($\forall n \geq 1$) munosabatining

o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Shu bilan birga, $x_n \geq 2$ ($n \geq 1$). $\left[2; \frac{5}{2}\right]$

segmentni o'ziga o'tkazadigan $f(t) = 2 + \frac{1}{t}$ akslantirishini qaraymiz.

$$\rho(f(x), f(y)) = |f(y) - f(x)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \leq \frac{1}{4} |x - y| = \frac{1}{4} \rho(x, y)$$

ifodadan f akslantirish qisqartiruvchi ekanligi ko'rinadi. U holda uning yagona x' qo'zg'almas nuqtasi mavjud bo'lib, $x' = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ bo'ladi, bunda

$$x_n = f(x_{n-1}) = 2 + \frac{1}{x_{n-1}} \quad (n \geq 2), \quad x_1 = 2. \quad x' = 2 + \frac{1}{x'}$$
 tenglamani yechib,

$x' = 1 + \sqrt{2}$ sonini topamiz. Bu berilgan ketma-ketlikning limiti bo'ladi.

6. $x_i = \sum_{m=1}^{\infty} a_{im} x_m + a_i$ ($i = 1, 2, \dots$) cheksiz chiziqli algebraik tenglamalar

sistemasini qaraylik. Quyidagilarni tekshiring:

a) $\alpha = \sup_i \sum_{m=1}^{\infty} |a_{im}| < 1$ va $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < +\infty$ shartlarni bajarilganda, u yagona

$x' = (x'_1, x'_2, \dots)$ yechimga ega bo'ladi, bunda $\sum_{i=1}^{\infty} |x'_i| < +\infty$;

b) agar $\beta = \sup_i \sum_{m=1}^{\infty} |a_{im}| < 1$ va $\sup_i |a_i| < +\infty$ bo'lsa, u holda berilgan

sistemaning $x' = (x'_1, x'_2, \dots)$ yagona yechimi bo'lib, $\sup_i |x'_i| < +\infty$ bajariladi.

Yechimi. a) $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|$, bunda $x = (x_i)$, $y = (y_i)$ metrika

bilan berilgan l_1 fazosida $Ax = y = (y_i)$ operatorini qaraymiz, bunda

$$y_i = \sum_{m=1}^{\infty} a_{im} x_m + a_i \quad (i=1,2,\dots).$$

U holda har bir $z = (z_i) \in l_1$ uchun

$$\begin{aligned} \rho(Ax, Az) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{im} x_m + a_i - \sum_{m=1}^{\infty} a_{im} z_m - a_i \right| = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{im} (x_m - z_m) \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{im}| |x_m - z_m| \leq \alpha \rho(x, z), \end{aligned}$$

ya'ni A operatori l_1 fazosini o'ziga qisqartirib akslantiradi. Endi qisqartirib akslantirish prinsipini qo'llasak, qo'yilgan savolga javob bo'ladi.

b) $\rho(x, y) = \sup_i |x_i - y_i|$ metrika bilan berilgan barcha chegaralangan ketma-ketliklarning m fazosida $Ax = y = (y_i)$ operatorini qaraymiz, bunda

$$y_i = \sum_{m=1}^{\infty} a_{im} x_m + a_i \quad (i=1,2,\dots). \text{ U holda}$$

$$\rho(Ax, Az) = \sup_i \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{im} x_m - \sum_{m=1}^{\infty} a_{im} z_m \right| \leq \beta \rho(x, y),$$

ya'ni A operatori l_1 fazosini o'ziga qisqartirib akslantiradi. Endi qisqartirib akslantirish prinsipini qo'llasak, qo'yilgan savolga javob bo'ladi.

7. $A: f(x) \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 x t f(t) dt + \frac{5}{6} x$ akslantirishning $C[0,1]$ fazosida

qisqartiruvchi ekanligini ko'rsating va uning qo'zg'almas f^* nuqtasini toping.

Yechimi. Berilgan akslantirish qisqartiruvchi ekanligi quyidagi baholashdan kelib chiqadi:

$$|Af_1 - Af_2| = \frac{1}{2} \left| \int_0^1 xt [f_1(t) - f_2(t)] dt \right| \leq \frac{1}{2} \max_{t \in [0,1]} |f_1(t) - f_2(t)| = \frac{1}{2} \rho(f_1, f_2).$$

$f_0(x) = 0$ deb olamiz. U holda

$$f_1(x) = Af_0(x) = \frac{5}{6}x;$$

$$f_2(x) = Af_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 xt \cdot \frac{5}{6} t dt + \frac{5}{6}x = \left(\frac{5}{6^2} + \frac{5}{6} \right) x;$$

$$f_3(x) = Af_2(x) = \left(\frac{5}{6^3} + \frac{5}{6^2} + \frac{5}{6} \right) x;$$

.....

$$f_n(x) = Af_{n-1}(x) = \left(\frac{5}{6^n} + \frac{5}{6^{n-1}} + \dots + \frac{5}{6^2} + \frac{5}{6} \right) x;$$

.....

Shuning uchun $f^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x$, ya'ni bu funksiya $C[0,1]$ fazosida

$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 xt f(t) dt + \frac{5}{6}x$ integral tenglamaning yagona yechimi bo'ladi.

8. Agar $f(x)$ funksiya haqiqiy sonlar o'qida uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, ushbu

$$0 < c \leq f'(x) \leq d < \infty$$

sharti o'rinli bo'lsa, u holda $f(x) = 0$ tenglama yagona yechimga egaligini isbotlang.

Yechimi. $Ax = x - \frac{1}{d}f(x)$ akslantirishning sonlar o'qini o'ziga

qisqartirib o'tkazishini ko'rsataylik: $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y$ uchun

$$\begin{aligned}
|Ax - Ay| &= \left| x - y - \frac{1}{d}(f(x) - f(y)) \right| = \\
&= \left| 1 - \frac{1}{d} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| |x - y| = \left| 1 - \frac{f'(\xi)}{d} \right| |x - y| \leq \left| 1 - \frac{c}{d} \right| |x - y|,
\end{aligned}$$

bu yerda $\xi \in (x, y)$. Demak,

$$|Ax - Ay| \leq \left| 1 - \frac{c}{d} \right| |x - d|.$$

$0 \leq \left| 1 - \frac{c}{d} \right| < 1$ bo'lganligidan, $y = Ax$ qisqartirib akslantirish bo'ladi. U holda

$$x_0 - \frac{1}{d} f(x_0) = x_0$$

tenglikni, ya'ni $f(x_0) = 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi yagona x_0 mavjuddir.

9. $\mathbb{R}$ da

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + x - \arctg x$$

qisqartirib akslantirish bo'ladimi?

Yechimi. Faraz qilaylik, $x, y \in \mathbb{R}$ uchun

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|$$

bo'lsin. U holda

$$|f(x) - f(y)| = |(x - y) - (\arctg x - \arctg y)| \leq \alpha |x - y|.$$

Bu tengsizlikda $y = x + 1$ deb olsak, u holda

$$|1 + \arctg(x + 1) - \arctg x| \leq \alpha.$$

Endi $x \rightarrow +\infty$ da $\arctg(x + 1) \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\arctg x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ekanligidan, $1 \leq \alpha$.

Demak, bu akslantirish qisqartirib akslantirish emas.

10. C^n da metrika $\rho(z, w) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (z_k - w_k)^2}$ kabi kiritiladi.

$Az = \frac{1}{2}z_1, \frac{1}{3}z_2, \dots, \frac{1}{n+1}z_n$ $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ akslantirish qisqartirib akslantirish bo'ladimi?

Yechimi. Qisqartirib akslantirish tarifiga ko'ra:

$$\begin{aligned}\rho(Az, Aw) &= \sqrt{\frac{1}{2^2}(z_1 - w_1)^2 + \frac{1}{3^2}(z_2 - w_2)^2 + \dots + \frac{1}{(n+1)^2}(z_n - w_n)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{2^2}(z_1 - w_1)^2 + \frac{1}{2^2}(z_2 - w_2)^2 + \dots + \frac{1}{2^2}(z_n - w_n)^2} = \frac{1}{2}\rho(z, w)\end{aligned}$$

bo'ladi. Bundan $\rho(Az, Aw) \leq \frac{1}{2}\rho(z, w) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$ demak, qisqartirib akslantirish ekan.

11. $x_n = 3 + \frac{1}{x_n}$ kabi aniqlangan $\{x_n\}$ ketma-ketlikni

$x_1 = 3, x_n = 3 + \frac{1}{x_{n-1}} \quad n \geq 2$ ko'rinishida rekurrent aniqlash mumkin

bo'lganligidan $x_n = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x_{n-2}}}, n \geq 2$ tengligi va $x_2 \leq \frac{10}{3}$ tengsizliklardan

$x_n \leq \frac{10}{3}$ ekani kelib chiqadi. Shu segmentni o'z-o'ziga o'tkazadigan

$f(t) = 3 + \frac{1}{t}$ akslantirishni qaraymiz.

$$\rho(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \leq \frac{1}{9} \rho(x, y)$$

demak, akslantirish qisqartiruvchi ekan, u holda uning yagona qo‘zg‘almas

nuqtasi mavjud bo‘lib, $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ bo‘ladi, bunda $x_n = f(x_{n-1}) = 3 + \frac{1}{x_{n-1}}$

$n \geq 2$ $x_1 = 3$, $x_0 = 3 + \frac{1}{x_0}$ tenglamani yechib, $x_0 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ ekanini topamiz. Bu

berilgan ketma ketlikning limiti bo‘ladi.

12. $x_{n+1} = \frac{1}{2\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)}$ bo‘lsin, bu yerda $x_0 = 2$ ketma-ketlik

yaqinlashuvchi ekanini isbotlang .

Yechimi. $x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$ ketma-ketlikning har bir hadi

musbat bo‘lgani uchun

$$x_{n+1} = \frac{1}{2\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)} \geq \frac{1}{2} \sqrt{x_n \cdot \frac{1}{x_n}} \geq 1$$

tengsizlik o‘rinli. Bu esa ketma-ketlikning quyidan chegaralanganligini

bildiradi. $f(t) = \frac{1}{2\left(t + \frac{1}{t}\right)}$

funksiya olamiz. $x_1 x_2 \geq 1$ ligidan foydalanib

$$\rho(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \left| x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y} \right| \leq \frac{1}{2} |x - y| = \frac{1}{2} \rho(x, y)$$

ekanligini ko'rish mumkin. Demak bu akslantirish qisqartiruvchi ekan.

Xulosa

Ushbu bitiruv malakaviy ishida qisqartirib akslantirish prinsipi va uning tadbirlarini o'rgandim.

Qisqartirib akslantirish prinsipini turli tipdagi tenglamalar uchun yechimning mavjudlik va yagonalik teoremlarini isbotlashda qo'llaniladi, u asosan $Ax = x$ tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligini isbotlashda qisqartirib akslantirish prinsipi yechimni topishni amalda yaqinlashishlar metodiga asoslanadi. Bu prinsipning turli tadbirlarini o'rgandim.

Bu prinsipning algebraga tadbiqui sifatida R^n fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi va

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i=1,2,\dots,n$$

formulalar orqali aniqlangan A akslantirishning qisqartirib akslantirish bo'lishi shartlari topildi va u $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i=1,2,\dots,n$ tenglamalar sistemasining mavjudligi va yagonaligi ko'rsatildi.

Qisqartirib akslantirish prinsipini matematik analizga tadbiqui sifatida oshkormas funksiyaning mavjudligi haqidagi quyidagi masala o'rganildi:

Aytaylik, $f(x,y)$ funksiya $G = \{(x,y): a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty\}$ sohada x bo'yicha uzluksiz va y bo'yicha musbat, chegaralangan hosilaga ega bo'lsin: $0 < m \leq f'_y \leq M$. U holda $f(x,y) = 0$ tenglama $[a,b]$ kesmada yagona uzluksiz yechimga ega.

Chekli o'lchamli fazolar bilan birga cheksiz o'lchamli funksionallar fazosida ham bu prinsipni qo'llash mumkinligi, jumladan bu prinsipning differensial tenglamalar uchun, masalan Koshi masalasi uchun yechimning, shunigdek ikkinchi tur Fredholm integral tenglamasi, nochiziqli integral tenglamalarga hamda Volterra tipidagi tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligini isbotlashga tadbiqui o'rganildi.

Adabiyotlar

1. Т.А.Саримсоқов. Ҳақиқий эгарувчининг функциялар назарияси. Тошкент, “Ўзбекистон”, 1973.
2. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функции и функционального анализа. Москва, “Наука”, 1976 г.
3. Т.А.Саримсоқов. Функционал анализ курси. Тошкент, “Ўқитувчи”, 1980 йил.
4. Г.Файмназаров, О.Г.Файмназаров. Функционал анализ курсидан масалалар ечиш. Fan va texnologiya, 2006 yil.
5. J.I.Abdullayev, R.N.G‘anixo‘jayev, M.H.Shermatov, O.I.Egamberdiyev. Funksional analiz. “Toshkent-Samarqand”, 2009 yil.
6. SH.A.Ayupov, M.M.Ibragimov, K.K.Kudayberganov. Funksional analizdan misol va masalalar. Nukus, “Bilim”, 2009-yil.
7. J.I.Abdullayev, R.N.G‘anixo‘jayev, I.A.Ikromov. Funksional analizdan masalalar to‘plami II-qism metrik va chiziqli fazolar. Alisher Navoiy nomidagi Samarqand davlat Universiteti. Toshkent, “Turon-Iqbol”, 2013 yil.
8. Ayupov Sh.A., Berdiqulov M.A., Turgunbayev R.M. Matematik analiz (Funksional analizga kirish). O‘quv qo‘llanma. Toshkent, Nizomiy nomidagi TDPU bosmaxonasi. 2014.-120 b.
9. J.I.Abdullayev, Yu.X.Eshqobilov, R.N.G‘anixo‘jayev. Funksional analiz.

(misol va masalalar yechish to‘plami, I-qism). “Tafakkur bo‘stoni”, Toshkent, 2015 yil.

10. [http://www.lib .homelinux.org/math/](http://www.lib.homelinux.org/math/)

11. <http://www.eknigu.com/lib/mathematics/>

12. http://www.eknigu.com/info/M_Mathematics/MC