O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS

TA’LIM VAZIRLIGI URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

“FUNKSIYALAR NAZARIYASI”

KAFEDRASI

Mavzu: Metrik fazolarda kompakt to’plamlar

Bajaruvchi: *Nurjanov Ma’rufjon Shomurotovich*

Ilmiy rahbar: *dotsent Vaisova Moxira Davlatboyevna*

Urganch

2015-yil

MUNDARIJA

Kirish

Mustaqil O‘zbekiston Respublikasida shakllanayotgan milliy istiqlol g‘oyasi Respublika Konstitutsiyasida e’tirof etilgan insonparvar, demokratik, huquqiy davlat va jamiyatni barpo etish, shuningdek, ijtimoiy iqtisodiy hamda madaniy rivojlanishning yuqori bosqichlariga ko‘tarish, jahon hamjamiyati safida munosib o‘rin egallashga yo‘naltirilgan ezgu maqsadlarni amalga oshirishga xizmat qiladi.

1997 yil 29 avgustda O‘zbekiston Respublikasi Oliy Majlisining IX sessiyasida qabul qilingan hamda bugungi kunda g‘oyalari amaliyotga keng ko‘lamda muvaffaqiyatli tadbiq etilayotgan O‘zbekiston Respublikasining «Ta’lim to‘g‘risida»gi Qonuni va «Kadrlar tayyorlash Milliy dasturi» mazmunida barkamol shaxs va malakali mutaxassisni tarbiyalab voyaga yetkazish jarayonining mohiyati to‘laqonli ochib berilgandir. Malakali kadrlar tayyorlash jarayonining har bir bosqichi o‘zida ta’lim jarayonini samarali tashkil etish, uni yuqori bosqichlarga ko‘tarish, shu bilan birga jahon ta’limi darajasiga yetkazish borasida muayyan maqsad va vazifalarni amalga oshirish lozim.

Ushbu maqsadlarning ijobiy natijaga ega bo‘lishi, eng avvalo, yosh avlodga ilmiy bilimlar asoslarini puxta o‘rgatish, ularda keng dunyoqarash hamda tafakkur ko‘lamini hosil qilish, ma’naviy axloqiy sifatlarni shakllantirish borasidagi ta’limiy tarbiyaviy ishlarni samarali tashkil etishga bog‘liqdir. Zero, yurtning porloq istiqbolini yaratish, uning nomini jahonga keng yoyish, ulug‘ ajdodlar tomonidan yaratilgan milliy madaniy merosni jamiyatga namoyish etish, ularni boyitish, mustaqil Respublikamizning rivojlangan mamlakatlar qatoridan joy egallashini ta’minlash yosh avlodni komil inson hamda malakali mutaxassis qilib tarbiyalashga bog‘liqdir.

Ana shu vazifalardan kelib chiqqan holda bugungi kunda matematika fanida erishilayotgan yutuqlarni o‘rganish uchun uning asosi bo‘lgan tushunchalarni mukammal o‘zlashtirishimiz kerak.

Haqiqiy analizda Geyne-Borel lemmasi deb ataluvchi quyidagi lemma fundamental rol o‘ynaydi:

Sonlar o‘qidagi $[a,b]$ *kesmani qoplovchi intervallarning istalgan* *qoplamasidan chekli qism qoplama ajratib olish mumkin.*

Bu fikr agar intervallar o‘rniga istalgan ochiq to‘plamlarni qaralgan holatda ham o‘rinli:

Sonlar o‘qidagi $[a,b]$ *kesmani ixtiyoriy ochiq qoplamasidan chekli qism qoplama ajratib olish mumkin.*

Bolsano-Veyershtrass teoremasiga ko‘ra sonlar o‘qidagi istalgan chegaralangan cheksiz to‘plam kamida bitta limitik nuqtaga ega.

Sonlar o‘qidagi chegaralangan cheksiz to‘plamlar va kesmalarning bu xossalarini metrik fazolarda umumlashtirish maqsadida biz kompaktlik tushunchasiga kelamiz. Kompakt to‘plamlar tushunchasi metrik fazolardagi asosiy tushunchalardan biri hisoblanib, kompakt operatorlarni ta’riflash va ularni tekshirishda qo‘llaniladi.

Ushbu bitiruv malakaviy ishida metrik fazolarda kompakt to‘plamlar tushunchasi chuqur o‘rganilgan. Sonlar o‘qida $[a,b]$ kesma kompakt to‘plam bo‘lishi bilan bir qatorda R^n va C^n fazolarda istalgan chegaralangan yopiq to‘plam kompakt to‘plam bo‘lishi ko‘rsatilgan. Asosiy funksional fazolardan bo‘lgan $C[a,b]$ fazodagi to‘plamning kompaktlik kriteriyasi Arsela teoremasi va uning differensial tenglamalar nazariyasiga tadbiqi ham batafsil yoritilgan.

I bob. Metrik fazolar va ularda kompakt to‘plamlar

1.1. Metrik fazolar va ularda yaqinlashuvchi ketma –ketliklar

Matematik analizning asosiy amallaridan biri limitga o‘tish tushunchasidir. Bu amalni to‘g‘ri chiziq nuqtalaridan iborat to‘plamda joriy etishda biz ikki nuqta orasidagi masofa tushunchasidan doimo foydalanib kelgan edik. Ammo limitga o‘tish masalasi kengroq qaralgan bo‘lsa, asosiy mazmuni olingan to‘plam elementlarining tabiiy tuzilishida emas, balki uning ikki elementi orasida masofa tushunchasini kirita bilishdadir. Bu mulohaza fransuz matematigi M.Fresheni 1906 yilda metrik fazo tushunchasiga olib keldi.

1-ta’rif: Agar biror X to‘plamning o‘zini - o‘ziga to‘g‘ri ko‘paytmasi $X \times X$ ni $R_+ = [0, \infty)$ to‘plamga aks ettiruvchi $\rho(x, y)$ funksiya berilgan bo‘lib, u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, X to‘plam metrik fazo deyiladi:

1) $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0$ faqat va faqat $x = y$ bo‘lganda bajariladi,

2) $\forall x, y \in X \;\; \rho(x, y) = \rho(y, x)$ (simmetriya aksiomasi),

3) $\forall x, y, z \in X \;\; \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (uchburchak aksiomasi)

$\rho(x, y)$ funksiya metrika deyiladi. Odatda ρ metrikali X metrik fazo (X, ρ) kabi belgilanadi.

Misollar:

1) X ixtiyoriy to‘plam elementlari uchun, ushbu

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & agar\ x \neq y\ bo'lsa \\ 0, & agar\ x = y\ bo'lsa \end{cases}$$

funksiya metrik fazo aksiomalarini qanoatlantiradi.

2) n o‘lchamli vektor fazoda ikki $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ va $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ vektor orasidagi masofa ushbu

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ko'rinishda kiritilsa, u holda R^n metrik fazoni tashkil etadi. 1^0 va 2^0 aksiomalarning bajarilishi o'z-o'zidan ravshan. Biz bu masofa uchun uchburchak aksiomasini isbotlaymiz. Bu aksiomadagi tengsizlik $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)$, $z=(z_1,z_2,...,z_n)$ elementlar uchun quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2} \qquad (1)$$

Ushbu belgilashni kiritamiz:

$x_i-z_i=a_i,\ z_i-y_i=b_i$ bundan $x_i-y_i=a_i+b_i$.

U holda (1) tengsizlik quyidagi tengsizlikka keltiriladi:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\ 2}}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^{\ 2}} \qquad (2)$$

Ushbu

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_ib_j-b_ia_j\right)^2$$

Ayniyatdan quyidagi Koshi-Bunyoqovskiy tengsizligi kelib chiqadi.

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left(a_ib_i\right)\right)^2\le\sum_{k=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_i^2$$

Bu tengsizlikdan:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+b_i\right)^2\le\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\le\sum_{i=1}^{n}a_i^2+$$
$$+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\le\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2$$

Bundan esa kerak bo‘lgan (2) tengsizlik, demak (1) tengsizlik kelib chiqadi.

3. l_2 haqiqiy fazo. Yuqoridagi misolga ko‘ra l_2 fazoning elementlari

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$$

shartni qanoatlantiruvchi haqiqiy sonli ketma-ketliklar edi. Bu fazoda masofa quyidagicha kiritiladi.

$$\rho(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Metrikaning birinchi va ikkinchi aksiomalarining o‘rinliligi ravshan, uchburchak aksiomasini bajarilishini ko‘rsatamiz. Darhaqiqat, ixtiyoriy n natural son va $\{a_i \in l_2\}, \{b_i \in l_2\}$ uchun

$$\left[\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \le \left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

tengsizlik o‘rinlidir(2-misoldagi 2-tengsizlik). Bu tengsizlikning o‘ng tomonidagi hadlarning har biri $n \to \infty$ da limitga ega va

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \le \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (3)$$

Endi l_2 fazodan uchta

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ nuqtalarni olamiz va 2-misoldagi kabi quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$x_k - z_k = a_k$, $z_k - y_k = b_k$, ravshanki, $x_k - y_k = a_k + b_k$.

Yuqoridagi (3) tengsizlikdan foydalanib, quyidagi tengsizlikni keltirib chiqaramiz:

$$\rho(x,y)=\left[\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-y_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\left[\sum_{i=1}^{\infty}a_k^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\sum_{i=1}^{\infty}b_k^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-z_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\sum_{k=1}^{\infty}(z_k-y_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\rho(x,z)+\rho(z,y)$$

4. m fazo. Bu fazo hamma chegaralangan haqiqiy sonli ketma-ketliklardan iborat edi. Agar uning ikkita $x=(a_1,a_2,...,a_n,...)$ $y=(y_1,y_2,...,y_n,...)$, nuqtasi uchun masofa

$$\rho(x,y)=\sup_i|a_i-b_i|$$

tenglik bilan aniqlansa, m fazo metrik fazoga aylandi.

Darhaqiqat, uchburchak aksiomasi quyidagicha tekshiriladi:

$$|a_i-c_i|\leq|a_i-b_i|+|b_i-c_i|\leq\sup_i|a_i-b_i|+$$

$$+\sup_i|b_i-c_i|=\rho(x,y)+\rho(y,z)$$

bu yerda $z=(c_1,c_2,...,c_n,...)$. Bundan

$$\sup_i|a_i-c_i|=\rho(x,z)\leq\rho(x,y)+\rho(y,z).$$

Qolgan aksiomani o‘rinliligi ravshan.

5. X to‘plam hamma yaqinlashuvchi sonli ketma-ketliklardan iborat bo‘lsin, ya’ni

$$X=\{x:x=(a_1,a_2,...);\exists\ \lim a_n\}.$$

Ravshanki, $X\subset m$, ya’ni X ning har bir elementi m uchun ham element. Demak, X da m dagi masofa kiritilsa, u ham metrik fazoni tashkil qiladi. Bu fazo C bilan belgilanadi.

6. C fazo. X elementlari haqiqiy sonli ketma-ketliklardan iborat to‘plam bo‘lsin, ya’ni

$$X = \{x: \ x = (a_1, a_2, ...)\}$$

Bu to‘plamda ikki $x = (a_1, a_2, ...)$ va $y = (b_1, b_2, ...)$ nuqta orasidagi masofani quyidagicha kiritamiz:

$$\rho(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|} \tag{4}$$

ya’ni uchburchak aksiomasi isbotlandi.

7. $C[a,b]$ fazo. $[a,b]$ da aniqlangan uzluksiz haqiqiy funksiyalar to‘plami $C[a,b]$ da metrikani quyidagicha kiritamiz:

$$\rho(x, y) = \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|.$$

Metrika aksiomalarini bajarilishini ko‘rsatish qiyin emas. Masalan, uchburchak aksiomasini isbotlaylik. Ixtiyoriy $t \in [a,b]$ nuqta va $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ funksiyalar uchun ushbu shart bajariladi:

$$|x(t) - y(t)| = \|[x(t) - z(t)] + [z(t) - y(t)]\| \le |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \le$$
$$\le \max_{a \le t \le b} |x(t) - z(t)| + \max_{a \le t \le b} |z(t) - y(t)| = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Bundan

$$\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

8. X to‘plam $[a,b]$ segmentda aniqlangan hamma o‘lchovli funksiyalardan iborat bo‘lsin. Agar ikki funksiya farq qiladigan nuqtalardan iborat to‘plamning o‘lchovi nolga teng bo‘lsa, bu funksiyalar teng hisoblanadi.

Ikki $x(t)$ va $y(t)$ funksiya orasidagi masofani ushbu formula bilan aniqlaymiz:

$$\rho(x, y) = \int_a^b \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} dt \tag{5}$$

Bu hol uchun ham uchburchak aksiomasining bajarilishi 6-misoldagi kabi isbotlanadi. Qolgan ikki aksiomaning o‘rinliligi ravshan. Bu fazo $C[a,b]$ orqali belgilanadi.

Shuni ham aytish kerakki, berilgan to‘plamda metrikani turlicha kiritish mumkin.

Masalan, (X,ρ) metrik fazo bo‘lsin. X to‘plamda quyidagi funksiyalar ham metrikani aniqlaydi:

a) $\rho_1(x,y)=\min\{1,\rho(x,y)\}$;

b) $\rho_2(x,y)=\begin{cases}1, \ agar \ \rho(x,y)>0\\ 0, \ agar \ \rho(x,y)=0, \ bo'lsa\end{cases}$

c) $\rho_3(x,y)=f(\rho(x,y))$, bu yerda

$f:[0,+\infty)\to[0,\infty)$—uzluksiz qavariq va $f(a)=0 \Leftrightarrow a=0$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy funksiya;

d) $\rho_4(x,y)=\rho(\varphi(x),\varphi(y))$,

bu yerda $\varphi: X\to X$—biektiv akslantirish.

2-ta’rif. (X,ρ) *metrik fazoda biror* $\{x_n\}$ *ketma-ketlik berilgan bo‘lsin. Agar* $n\to\infty$ *da* $\rho(x_n,x)\to 0$ *bo‘lsa, bu ketma-ketlik* X *fazoning* x *elementiga yaqinlashuvchi deyiladi va* $x_n\to x$ *yoki* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$ *orqali belgilanadi.*

Bu x nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi.

1-teorema. *Har bir yaqinlashuvchi ketma-ketlik birgina limitga ega.*

Isbot. Darhaqiqat, $x_n\to x$ va $x_n\to y$ bo‘lsin, u holda uchburchak aksiomasiga muvofiq,

$$0\le\rho(x,y)\le\rho(x,x_n)+\rho(x_n,y).$$

Ammo bu tengsizlikning o‘ng tomoni $n\to\infty$ da nolga intiladi, demak $\rho(x,y)=0$, ya’ni $x=y$.

2-teorema. $\rho(x,y)$ masofa x va y elementlarning uzluksiz funksiyasi, ya’ni agar $x_n\to x$ va $y_n\to y$ bo‘lsa, u holda

$$\rho(x_n,y_n)\to\rho(x,y).$$

Isbot. Ixtiyoriy to‘rtta $x,y,z,u\in X$ nuqta uchun

$$|\rho(x,y)-\rho(z,u)|\leq\rho(x,z)+\rho(y,u) \qquad (6)$$

tengsizlik o‘rinli. Haqiqatan ham, uchburchak aksiomasidan foydalanib,

$$\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,u)+\rho(u,y) \qquad (7)$$

tengsizliklarni yozishimiz mumkin. Bundan

$$\rho(z,u)-\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(y,u) \qquad (8)$$

tengsizlik hosil bo‘ladi. (2) va (3) dan (1) kelib chiqadi. (1) dan z va u ni mos ravishda x_n va y_n bilan almashtirilsa, teoremaning shartiga ko‘ra

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x,y)|\leq\rho(x_n,x)+\rho(y_n,y)\to 0.$$

Bundan

$$\rho(x_n,y_n)\to\rho(x,y).$$

3-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik x nuqtaga yaqinlashsa, u holda bu ketma-ketlikning ixtiyoriy $\{x_{n_k}\}$ qism ketma-ketligi ham shu nuqtaga yaqinlashadi.

4-teorema. $\{x_n\}$ ketma-ketlik x nuqtaga yaqinlashsa, va $x_0\in X$ aniq bir nuqta bo‘lsa, u holda $\{\rho(x_n,x_0)\}$ sonlar to‘plami chegaralangan bo‘ladi.

Isbot. $\{\rho(x_n,x)\}$ yaqinlashuvchi sonli ketma-ketlik bo‘lganligi uchun u chegaralangan bo‘ladi; uning yuqori chegarasini M bilan belgilasak, u holda uchburchak aksiomasiga ko‘ra

$$\rho(x_n,x_0)\leq\rho(x_n,x)+\rho(x,x_0)\leq M+\rho(x,x_0)=M_1$$

Endi ba’zi metrik fazolarda yaqinlashish tushunchasining ma’nosini ko‘rib chiqamiz.

1-misoldagi fazodan olingan biror ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun biror nomerdan boshlab bu ketma-ketlikning hamma elementlari bir-
biriga teng bo‘lishi kerak.

R^n fazodan olingan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning x elementga yaqinlashishi uchun x_n vektor koordinatalarining mos ravishda x vektor koordinatalariga yaqinlashishi zarur va yetarli. Darhaqiqat, agar R^n da

$$\rho(x_k, x) = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{(k)} - a_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \ (k \to \infty)$$

bo‘lsa, u holda $a_i^{(k)} \to a_i$, $i = 1,2,...,n$ $(k \to \infty)$ va, aksincha.

$\{x_n(t)\}$ ketma-ketlik $C[a,b]$ fazoning elementlaridan tuzilgan va $x_n(t) \to x(t) \in C[a,b]$ bo‘lsin. Ya’ni

$$\rho(x_n, x) = \max_{a \le t \le b}|x_n(t) - x(t)| \to 0,\ n \to \infty.$$

Bundan, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon)$ natural son mavjudki, $t \in [a,b]$ bo‘lganda

$$\max_{a \le t \le b}|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon.$$

Demak, $t \in [a,b]$ ning hamma qiymatlari uchun $n > n_0$ bo‘lganda

$$|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon.$$

Bu esa $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlikning $x(t)$ ga tekis yaqinlashishining xuddi o‘zi. Ravshanki, aksincha, $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlik $[a,b]$ segmentda $x(t)$ ga tekis yaqinlashsa, u holda $\rho(x_n, x) \to \infty$. Demak, $C[a,b]$ fazoda metrika ma’nosida yaqinlashish ma’lum tekis yaqinlashish tushunchasi bilan ustma-ust tushadi.

4. $L_p[a,b]$ fazoda yaqinlashishni $p-$ darajali o‘rta ma’noda yaqinlashish deyiladi, ya’ni

$$\rho(x_n, x) = \left(\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} dt \to 0 \ \ (n \to \infty),\ p > 1$$

$p = 2$ bo‘lganda kvadratik o‘rta ma’noda yaqinlashish deb gapiriladi.

5. $\{x_k\}$ ketma-ketlik m fazoning elementlaridan tuzilgan va $x_k \to x \in m$ $(k \to \infty)$ bo‘lsin, ya’ni $\rho(x_k, x) = \sup\left|a_i^{(k)} - a_i\right| \to 0,$ bu yerda

$$x_k = \left(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, ..., a_n^{(k)}, ...\right),\ x = (a_1, a_2, ..., a_n, ...).$$

Demak, har qanday $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon)$natural son mavjudki, $k > n_0$ bo‘lganda

$$\rho(x_k, x) = \sup_i \left|a_i^{(k)} - a_i\right| < \varepsilon .$$

Bundan, i ning hamma qiymatlari uchun $k > n_0$ bo‘lganda

$$\left|a_i^{(k)} - a_i\right| < \varepsilon .$$

Aksincha, $k > n_0$ bo‘lganda i ning hamma qiymatlari uchun

$$\left|a_i^{(k)} - a_i\right| < \varepsilon$$

bo‘lsa, u holda ravshanki, $k \to \infty$ da $\rho(x_k, x) \to 0$. Demak, m fazoda metrika ma’nosida yaqinlashish koordinatalar bo‘yicha tekis yaqinlashishni beradi.

6. C fazoda metrika ma’nosida yaqinlashish koordinatalar bo‘yicha yaqinlashishni beradi (umuman aytganda tekis emas). Darhaqiqat, $x_k = \left(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots\right)$, $x = (a_1, a_2, \ldots)$ va $x_k \to x$ $(k \to \infty)$ bo‘lsin. U holda

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\left|a_i^{(k)} - a_i\right|}{1 + \left|a_i^{(k)} - a_i\right|} < \varepsilon, \;\; k > n_0(\varepsilon).$$

Bundan har qanday i uchun ham $k > n_0(\varepsilon)$ bo‘lganda

$$\frac{1}{2^i} \frac{\left|a_i^{(k)} - a_i\right|}{1 + \left|a_i^{(k)} - a_i\right|} < \varepsilon$$

da i ni tayinlab qo‘yib, k bo‘yicha limitga o‘tilsa, quyidagi munosabat hosil bo‘ladi:

$$\left|a_i^{(k)} - a_i\right| \to 0, \;\; k \to \infty .$$

Aksincha, i ning har bir qiymati uchun $k \to \infty$ da $\left|a_i^{(k)} - a_i\right| \to 0$ bo‘lsin. $\forall \varepsilon > 0$ ni ixtiyoriy qilib olib, k natural sonni shunday tanlab olamizki,

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$$

bo‘lsin. U holda

$$\rho(x_n,x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{\left|a_i^{(n)}-a_i\right|}{1+\left|a_i^{(n)}-a_i\right|}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^i}\frac{\left|a_i^{(n)}-a_i\right|}{1+\left|a_i^{(n)}-a_i\right|}+$$

$$+\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{\left|a_i^{(n)}-a_i\right|}{1+\left|a_i^{(n)}-a_i\right|}<<\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^i}\frac{\left|a_i^{(n)}-a_i\right|}{1+\left|a_i^{(n)}-a_i\right|}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

O‘ng tomondagi yig‘indida hadlar soni chekli bo‘lganligi uchun k ni tayinlab qo‘yib, $n_0=n_0(\varepsilon)$ ni shu qadar katta qilib olamizki, $n>n_0$ bo‘lganda

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^i}\frac{\left|a_i^{(n)}-a_i\right|}{1+\left|a_i^{(n)}-a_i\right|}<\frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik bajarilsin. Natijada $n>n_0$ bo‘lganda $\rho(x_n,x)<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

1.2. Metrik fazoda kompakt to‘plamlar

To‘g‘ri chiziqning ajoyib xossalaridan biri shuki, undagi chegaralangan har qanday cheksiz to‘plam kamida bitta limit nuqtaga ega.

Bu fakt Boltsano-Veyershtrass teoremasida o‘z ifodasini topgan. Lekin ixtiyoriy metrik fazoda bunday sodda natija, umuman aytganda, o‘rinli emas. Shuning uchun quyidagi savolning qo‘yilishi tabiiy. Metrik fazoda qanday to‘plamlar sinfi uchun Boltsano-Veyershtrass teoremasining mazmuni saqlanadi? Mana shu savol munosabati bilan quyidagi muhim ta’rifni kiritamiz.

1-ta`rif . X metrik fazodagi M to‘plamning elementlaridan tuzilgan ixtiyoriy ketma-ketlikdan biror elementga yaqinlashuvchi qism ketma-ketlikni ajratib olish mumkin bo‘lsa, M to‘plam X da *nisbiy kompakt* deyiladi; yopiq nisbiy kompakt to‘plam *kompakt* deyiladi.

Bolsano-Veyershtrass teoremasiga asosan to‘g‘ri chiziqda har qanday chegaralangan (yopiq va chegaralangan) to‘plam nisbiy kompaktdir .

Ravshanki, nisbiy kompakt to‘plamning ixtiyoriy qism to‘plami yana nisbiy kompakt to‘plamdir.

1-teorema. Nisbiy kompakt to‘plam chegaralangan bo‘ladi.

Isbot. $A(\subset X)$ nisbiy kompakt to‘plam bo‘lib, chegaralangan bo‘lmasin deb faraz qilamiz. A dan ixtiyoriy x_1 nuqtani olib, radiusi $r_1 = 1$ ga teng $C(x_1, r_1)$ sharni quramiz. A chegaralanmaganligi uchun u bu sharda to‘lasicha joylashgan bo‘lmaydi. A to‘plamning $C(x_1, r_1)$ sharga kirmagan biror x_2 elementini olamiz. U holda $\rho(x_1, x_2) \geq r_1$. So‘ng radiusi $r_2 = \rho(x_1, x_2) + 1$ ga teng $C(x_1, r_2)$ sharni qurib, A to‘plamning bu sharga kirmagan biror x_3 elementini olamiz; bunday element mavjud, chunki A chegaralanmagan to‘plam va $\rho(x_1, x_3) \geq r_2$. So‘ngra radiusi $r_3 = \rho(x_1, x_3) + 1$ ga teng $C(x_1, r_3)$ sharni quramiz. Bu jarayonni, A to‘plam chegaralanmaganligi uchun, cheksiz davom ettirishimiz mumkin. Natijada

$\{x_n\}$ $(x_n \in A)$ ketma-ketlik va o‘sib boruvchi $\{r_n\}$ sonli ketma-ketlik hosil bo‘lib, ushbu

$$\rho(x_1, x_n) + 1 = r_n > r_{n-1} \quad (n = 1,2,3,...)$$

tengsizliklar bajariladi.

Endi ixtiyoriy $n > m \geq 2$ natural sonlar uchun

$$\rho(x_1, x_n) + 1 = r_n \geq r_{n-1} \geq r_m;$$
$$\rho(x_1, x_m) + 1 = r_m$$

munosabatlar o‘rinli. Bulardan quyidagi

$$\rho(x_1, x_n) \leq \rho(x_1, x_m) + \rho(x_m, x_n)$$

tengsizliklarga asosan ushbu $r_n \leq (r_m - 1) + \rho(x_m, x_n),$ demak,

$$\rho(x_m, x_n) \geq 1$$

munosabat kelib chiqadi.

So‘nggi munosabat ko‘rsatadiki, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning o‘zi va uning biror qismi fundamental bo‘la olmaydi, demak, yaqinlashuvchi ham bo‘lishi mumkin emas. Bu esa ziddiyatga olib keladi, chunki $\{x_n\}$ ketma-ketlikning elementlari A nisbiy kompakt to‘plamdan olingan.

Bu teoremaning teskarisi, umuman aytganda, o‘rinli emas, ya’ni to‘plam chegaralangan bo‘lsa, u nisbiy kompakt bo‘lishi shart emas. Bunga l_2 fazodan konkret misol keltiramiz. l_2, fazodan ushbu

$e_1 = (1,0,0,...),\ e_2 = (0,1,0,...),\ e_1 = (0,0,1,0,...),...$ elementlardan iborat chegaralangan to‘plamni tuzamiz. Bu elementlarning ixtiyoriy ikkitasi orasidagi masofa $\rho(e_m, e_n) = \sqrt{2}\ (m \neq n)$ ga teng. Shuning uchun bu ketma-ketlik va uning hech qanday qismi yaqinlashuvchi bo‘lmaydi, demak, tuzilgan to‘plam nisbiy kompakt emas.

Metrik fazoda nisbiy kompaktlik tushunchasiga yaqin bo‘lgan tushunchani kiritamiz.

2-ta'rif. A, B lar (X,ρ) metrik fazodan olingan to'plamlar va $\varepsilon>0$ biror son bo'lsin. Agar A dan olingan ixtiyoriy x element uchun B da ushbu $\rho(x,y)<\varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiradigan y element mavjud bo'lsa, B to'plam A to'plamga nisbatan ε-to'r deyiladi. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun A to'plam chekli ε-to'rga ega bo'lsa, u holda A to'plam to'la chegaralangan deyiladi.

Misollar.

1. Tekislikda koordinatalari butun sonlardan iborat to'plam ε-to'rni tashkil etadi.

2. R^n fazoda har qanday chegaralangan A to'plam chekli ε-to'rga ega, ya'ni A to'la chegaralangan.

3. l_2 fazoda A to'plamni quyidagicha aniqlaymiz:

$$x=(a_1,a_2,...,a_n,...)\in A$$

bu yerda

$$|a_1|<1,\quad |a_2|\le\frac{1}{2},...,|a_n|\le\frac{1}{2^{n-1}},...$$

Bu to'plam ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun. chekli ε-to'rga ega. Darhaqiqat, berilgan $\varepsilon>0$ uchun n natural sonni shunday tanlab olamizki, $\frac{1}{2^n}<\frac{\varepsilon}{4}$ bo'lsin.

A dan olingan har bir $x=(a_1,a_2,...,a_n,...)$ nuqtaga shu to'plamning o'zidan olingan

$$x^*=(a_1,a_2,...,a_n,0,0,...) \tag{9}$$

nuqtani mos qo'yamiz. U holda

$$\rho(x,x^*)=(\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k^2)^{1/2}\le(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{4^{k-2}})^{1/2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

(1) ko'rinishdagi nuqtalardan iborat B to'plam R^n fazoda chegaralangan; demak, B to'plam ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun chekli $\frac{\varepsilon}{2}$-to'rga ega, natijada A to'plam chekli ε-to'rga ega bo'lib, to'la chegaralangan bo'ladi.

4. Yuqoridagi $\{e_n\}$ ketma-ketlikdan iborat to‘plam chegaralangan bo‘lib, to‘la chegaralangan emas. Chunki $\varepsilon < \frac{\sqrt{2}}{2}$ bo‘lganda chekli ε-to‘rni qurib bo‘lmaydi.

Kompaktlik, to‘lalik va to‘la chegaralanganlik tushunchalari orasida qanday bog‘lanish borligini quyidagi teoremadan ko‘rish mumkin.

2-teorema. X to‘la metrik fazoda joylashgan A to‘plamning nisbiy kompakt bo‘lishi uchun uning to‘la chegaralangan bo‘lishi zarur va kifoya.

Isbot (Zarurligi). Nisbiy kompakt A to‘plamni to‘la chegaralanmagan, ya’ni biror $\varepsilon > 0$ uchun A da chekli ε-to‘r yo‘q deb faraz qilaylik. U holda A dan olingan ixtiyoriy x_1 nuqta uchun shunday x_2 nuqta mavjudki, $\rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. So‘ng shunday x_3 nuqta mavjudki,

$\rho(x_1, x_3) \geq \varepsilon$, $\rho(x_2, x_3) \geq \varepsilon$ bo‘ladi va hokazo. Bu jarayonni davom ettirib, quyidagi tengsizliklarni qanoatlantiradigan $\{x_n\}$ ketma-ketlikni tuzamiz:

$$\rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon, m \neq n.$$

Ravshanki, bunday ketma-ketlikdan hech qanday yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratib olish mumkin emas. Bu esa A ning nisbiy kompaktligiga zid.

Kifoyaligi. Endi X to‘la fazo bo‘lib, A bunda to‘la chegaralangan to‘plam bo‘lsin. A ning nisbiy kompaktligini ko‘rsatamiz. A ning elementlaridan tuzilgan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo‘lsin. Har bir $\varepsilon_k = \frac{1}{k} (k = 1,2,...)$ uchun A da mos ravishda chekli ε_k -to‘rni ko‘ramiz:

$$a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, ... a_{p_k}^{(k)}.$$

Markazlari ε_1-to‘rni tashkil etuvchi nuqtalarda joylashgan va radiuslari 1 ga teng sharlarni quramiz. Soni chekli bu sharlar A to‘plamni to‘lasicha qoplaydi. Ulardan kamida bittasi, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz $\{x'_n\}$ qism ketma-ketligini o‘z ichiga oladi, uni masalan, S_1 bilan belgilaylik. So‘ng markazlari $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$-to‘rni tashkil etuvchi nuqtalarda joylashgan va radiuslari $\frac{1}{2}$ teng sharlarni quramiz. Bu sharlarning soni chekli bo‘lganligi uchun ularning kamida bittasi $\{x'_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz $\{x''_n\}$ qism ketma-ketligini o‘z ichiga oladi, uni masalan, S_2 bilan belgilaylik, va hokazo. Bu jarayonni cheksiz davom ettiramiz. Endi quyidagi ketma-ketliklarning diagonalida joylashgan elementlardan ushbu ketma-ketlikni tuzamiz:

$$\begin{array}{l} x_1', x_2', \ldots, x_n', \ldots \\ x_1'', x_2'', \ldots, x_n'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad (10)$$

Bu ketma-ketlik fundamental bo‘ladi, chunki uning $x_n^{(n)}$ elementdan boshlab so‘nggi hamma elementlari S_n sharda (uning radiusi $\frac{1}{n}$ ga teng) joylashgan bo‘ladi. X metrik fazo to‘la bo‘lganligi uchun (2) ketma-ketlik limitga ega. Ya’ni A to‘plamdan olingan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi $x_n^{(n)}$ ketma-ketlikni hosil qildik, demak, A nisbiy kompakt to‘plam.

Natija. X to‘la metrik fazodagi A to‘plam kompakt bo‘lishi uchun uning yopiq va to‘la chegaralangan bo‘lishi zarur va kifoya.

2- teoremada zarur va kifoya shart berilgan bo‘lsada, undan konkret metrik fazolarda foydalanish oson emas. Maxsus metrik fazolarda joylashgan to‘plamlarning nisbiy kompaktligini (kompaktligini) aniqlash uchun odatda maxsus kompaktlik belgilari izlanadi.

Biz bu masala bilan c fazoda shug‘ullanamiz.

3-teorema (c fazoda kompaktlik belgisi). A to‘plamdan olingan bo‘lib, D-to‘plam A ning 1-nomerli *(i=1, 2, . . .)* koordinatalaridan tuzilgan to‘plam bo‘lsin. A ning nisbiy kompakt bo‘lishi uchun A_i to‘plamlar chegaralangan bo‘lishi zarur va kifoya. A_i to‘plamning yuqori chegarasi i ga bog‘liq bo‘lishi ham mumkin.

Isbot (Zarurligi). Ma’lumki, c fazoda yaqinlashish koordinatalar bo‘yicha yaqinlashishdir. Demak, A nisbiy kompakt bo‘lganligi uchun A_i lar ham nisbiy kompakt va demak, chegaralangan bo‘ladi, chunki A_i to‘g‘ri chiziqda joylashgan to‘plam.

Kifoyaligi. A shunday to‘plam bo‘lsinki, uning uchun yuqorida tuzilgan A_i to‘plamlarning har biri chegaralangan bo‘lsin. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ ni olib p natural sonni shunday tanlab olamizki, uning uchun

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^p} < \varepsilon$$

bo‘lsin. So‘ng har bir $x = (a_1, a_2, ..., a_p, a_{p+1}, ...) \in c$ elementga $y = (a_1, a_2, ..., a_p, 0, ...) \in c$ elementni mos qo‘yamiz. Bu ko‘rinishda tuzilgan u elementlardan iborat to‘plamni B_p bilan belgilaymiz. Ravshanki,

$$\rho(x, y) = \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|a_k|}{1 + |a_k|} < \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon,$$

ya’ni B_p to‘plam A ga nisbatan ε-to‘rni tashkil etar ekan. Ammo B_p esa, tuzilishiga ko‘ra, R^p fazoda to‘lasicha joylashgan chegaralangan to‘plam. Demak, B_p chekli ε-to‘rga ega, natijada A to‘plam ham chekli 2ε-to‘rga ega, ya’ni A to‘la chegaralangan. 2- teoremaning kifoyalik shartiga va C ning to‘laligiga muvofiq A nisbiy kompakt to‘plam.

II-bob. Metrik fazolarda kompaktlik kriteriyalari

2.1. $C[a,b]$ fazoda nisbiy kompaktlik kriteriyasi

Endi $C[a,b]$ fazoda nisbiy kompaktlik belgisini beramiz. Bu belgini ifoda qilish uchun quyidagi ikki tushunchani keltiramiz.

$[a,b]$ segmentda aniqlangan biror $\{\gamma(t)\}=\Phi$ funksiyalar sistemasi berilgan bo‘lsin. Agar t ning hamma qiymatlari va Φ sistemaning hamma elementlari uchun

$$|\gamma(t)|\le K, \quad t\in[a,b], \gamma\in\Phi$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan K son mavjud bo‘lsa, $\Phi=\{\gamma(t)\}$ funksiyalar sistemasi tekis chegaralangan deyiladi.

Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ son mavjud bo‘lsaki,

$$|t_1-t_2|<\delta$$

tengsizlik bajarilganda Φ sistemaga tegishli ixtiyoriy $\gamma(t)$ funksiya uchun

$$|\gamma(t_1)-\gamma(t_2)|<\varepsilon$$

bo‘lsa, Φ sistema tekis darajada uzluksiz deyiladi.

1-teorema (Arsela teoremasi). $[a,b]$ segmentda aniqlangan uzluksiz funksiyalardan iborat Φ to‘plam $C[a,b]$ fazoda nisbiy kompakt bo‘lishi uchun bu funksiyalar sistemasining tekis chegaralangan hamda tekis darajada uzluksiz bo‘lishi zarur va kifoya.

Isbot. (Zarurligi). Φ to‘plam $C[a,b]$ fazoda nisbiy kompakt bo‘lsin. U holda 1.3 dagi 2-teoremaga muvofiq, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun Φ da chekli $\frac{\varepsilon}{3}$ -to‘rni tashkil etuvchi

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p \qquad \textbf{(1)}$$

funksiyalar mavjud bo‘ladi. Bu funksiyalarning har biri $[a,b]$ da uzluksiz bo‘lganligi sababli chegaralangandir, ya’ni

$$|\varphi| \leq K_i \quad i = 1, 2, ..., p$$

chekli $\frac{\varepsilon}{3}$ -to‘rning ta’rifiga ko‘ra Φ dan olingan har qanday φ element uchun

$$\rho(\varphi, \varphi_i) = \max_{a \leq t \leq b} |\varphi(t) - \varphi_i(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

tengsizlik o‘rinli. Natijada

$$|\varphi| \leq |\varphi_i| + \frac{\varepsilon}{3} \leq K_i + \frac{\varepsilon}{3} \leq K, \quad K = \max_{1 \leq i \leq p} K_i + \frac{\varepsilon}{3},$$

tashkil etuvchi funksiyalarning har biri uzluksiz va ularning soni chekli, demak, ular uchun quyidagilarni yozishimiz mumkin:

agar $|t_1 - t_2| < \delta_i$ bo‘lsa, $|\varphi_i(t_1) - \varphi_i(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Agar $|t_1 - t_2| < \delta$ bo‘lsa $\left(\delta = \min_{1 \leq i \leq p}\right)$, u holda ixtiyoriy $\varphi \in \Phi$ uchun φ_i ning (1) funksiyalar orasida $\rho(\varphi, \varphi_i) < \frac{\varepsilon}{3}$ tengsizlikni qanoatlantiradiganini olib, ushbu munosabatni yoza olamiz:

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| = |\varphi(t_1) - \varphi_i(t_1) + \varphi_i(t_1) - \varphi_i(t_2) + \varphi_i(t_1) - \varphi(t_2)| \leq |\varphi(t_1) - \varphi_i(t_2)| +$$

$$+ |\varphi_i(t_1) - \varphi_i(t_2)| + |\varphi_i(t_2) - \varphi(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}. = \varepsilon.$$

Shuning bilan Φ sistemaning tekis darajada uzluksizligi ham ko‘rsatildi, ya’ni teoremaning zarurlik qismi isbot etildi.

Kifoyaligi. Φ sistema tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun unga nisbatan $C[a,b]$ da chekli ε–to‘r mavjud bo‘lsa, bu sistemaning $C[a,b]$ fazoda nisbiy kompaktligi ko‘rsatilgan bo‘ladi.

K va δ quyidagi munosabatlarni qanoatlantiradigan sonlar bo‘lsin: $|\varphi| \leq K$ (hamma $\varphi \in \Phi$ uchun); agar $|t_1 - t_2| < \delta$ bo‘lsa, $|\varphi_i(t_1) - \varphi_i(t_2)| < \frac{\varepsilon}{5}$. (hamma $\varphi \in \Phi$ uchun)

Endi $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ segmentni

$$t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b$$

nuqtalar bilan har birining uzunligi δ dan kichik bo‘lgan n ta qismga bo‘lib, bu nuqtalarning har biridan vertikal to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Ordinatalar o‘qida $[-K, K]$ segmentni

$$y_0 = -K < y_1 < y_2 < \ldots < y_m = K$$

nuqtalar bilan har birining uzunligi $\frac{\varepsilon}{5}$ dan kichik m ta qismga bo‘lib, bu nuqtalarning har birida gorizontal to‘g‘ri chiziqlarni o‘tkazamiz. Natijada ushbu $[a \le t \le b, -K \le y \le K]$ to‘g‘ri to‘rtburchak qismlarga bo‘linib, bu qismlarning gorizontal tomonlari δ va vertikal tomonlari $\frac{\varepsilon}{5}$ dan kichik bo‘ladi, ya’ni to‘g‘ri to‘rtburchakda to‘r tuzildi. Endi har bir $\varphi(\in \Phi)$ funksiyaga uchlari (t_k, y_l) $\left(|y_l - \varphi(t_k)| < \dfrac{\varepsilon}{5}\right)$ nuqtada joylashgan $\Psi(t)$ siniq funksiyani mos qo‘yamiz (agar funksiyaning grafigi tutashgan kesmalardan iborat bo‘lsa, bu funksiyani siniq deymiz). Tuzilgan to‘rining uchlarida tuzilishiga ko‘ra

$$|\Psi\ (t_k) - \varphi\ (t_k)| < \frac{\varepsilon}{5}.\ (k = 1, 2, \ldots, n)$$

tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlik va

$$|\varphi\ (t_{k+1}) - \Psi\ (t_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5},\quad |\varphi\ (t_k) - \Psi\ (t_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

tengsizliklardan

$$|\Psi\ (t_k) - \Psi\ (t_{k+1})| < \frac{3\varepsilon}{5}.$$

tengsizlik kelib chiqadi.

$[t_k, t_{k+1}]$ segmentda $\Psi(t)$ chiziqli funksiya bo‘lganligi uchun

$$|\Psi\ (t_k) - \Psi\ (t\ )| < \frac{3\varepsilon}{5}.$$

tengsizlikning segmentdagi hamma qiymatlari uchun bajariladi.

Endi $[a,b]$ segmentning ixtiyoriy t nuqtasini olib, chapdan o‘nga eng yaqin turgan t_k nuqtani olamiz (bu bo‘lish nuqtasi). U holda

$$|\varphi(t)-\Psi(t)|\le|\varphi(t_k)-\varphi(t_k)|+|\varphi(t_k)-\Psi(t_k)|+|\Psi(t_k)-\Psi(t)|<\varepsilon$$

tengsizlik o‘rinlidir. Demak, soni chekli $\Psi(t)$ siniq funksiyalar Φ sistemaga nisbatan chekli ε–to‘rni tashkil etadi, ya’ni Φ sistema to‘la chegaralangan sistemadir. Teorema isbotlandi.

Arsela teoremasini o‘ng qismi uzluksiz funksiya bo‘lgan differensial tenglama uchun yechimning mavjudligi haqidagi teoremaga qanday qo‘llanishini ko‘rsatamiz.

Teorema (Peano).

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad (2)$$

differensial tenglama berilgan bo‘lsin.

Agar f funksiya biror chegaralangan yopiq G sohada uzluksiz bo‘lsa, u holda bu sohaning har bir (x_0,y_0) ichki nuqtasi orqali berilgan tenglamaning hech bo‘lmaganda bitta integral chizig‘i o‘tadi.

Isbot. f funksiya chegaralangan yopiq G sohada uzluksizligidan Veyershtrassning 1-teoremasiga ko‘ra chegaralangan bo‘ladi.

$$|f(x,y)|\le M=const$$

(x_0,y_0) nuqta orqali burchak koeffisiyentlari M va $-M$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlarni o‘tkazamiz keyin $x=a$ va $x=b$ to‘g‘ri chiziqlarni shunday o‘tkazamizki, ular bilan kesilgan umumiy uchi (x_0,y_0) nuqtada bo‘lgan 2 ta uchburchak G soha ichida butunlay yotsin.

Uchburchaklarning bu juftligi yopiq uchburchak to‘plamni ifodalaydi.

Endi berilgan tenglash uchun Eyler egri chizig‘i deb ataluvchi chiziqni quyidagicha quramiz:

(x_0,y_0) nuqtadan burchak koeffisiyenti $f(x_0,y_0)$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. Bu to‘g‘ri chiziqdan biror (x_1, y_1) nuqtani olamiz va u orqali burchak koeffisiyenti $f(x_1, y_1)$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. Endi (x_0, y_0) nuqtadan o‘tuvchi Eyler siniq chiziqlari ketma-ketligi $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ ni qaraymizki, L_k chiziqlar guruhidan eng kattasining uzunligi $k \to \infty$ da nolga intilsin. φ_k - L_k chiziq bo‘lgan funksiya bo‘lsin. $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots$ funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) ular bitta $[a,b]$ da aniqlangan

2) ular tekis chegaralangan

3) ular tekis darajada uzluksiz

Arsela teoremasiga ko‘ra $\{\varphi_k\}$ ketma-ketlikdan tekis yaqinlashuvchi ketma-ketlik ajratib olish mumkin. Bu $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(k)}, \ldots$ bo‘lsin. $k \to \infty$ da $\varphi(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi^{(k)}(x)$ bo‘lsin. Ravshanki, $\varphi(x_0) = y_0$. Endi φ $[a,b]$ da berilgan differensial tenglamani qanoatlantirishini ko‘rsatish qoldi.

Buning uchun $\forall \varepsilon > 0$ uchun

$$\left| \frac{\varphi(x'') - \varphi(x')}{x'' - x'} - f(x', \varphi(x')) \right| < \varepsilon$$

tengsizlik $|x'' - x'|$ ning yetarlicha kichik qiymatlarida bajarilishini ko‘rsatish talab qilinadi.

O‘z navbatida, yetarlicha katta k larda

$$\left| \frac{\varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(x')}{x'' - x'} - f(x', \varphi^{(k)}(x')) \right| < \varepsilon$$

tengsizlikni $|x'' - x'|$ ayirma yetarlicha kichik bo‘lganda bajarilishini ko‘rsatish kerak.

f funksiya G sohada uzluksizligidan $\forall\, \varepsilon > 0$ olinganda shunday $\eta > 0$ topiladiki,

$$f(x', y') - \varepsilon < f(x, y) < f(x', y') + \varepsilon \quad (y' = \varphi(x'))$$

tengsizlik $|x - x'| < 2\eta$ va $|y - y'| < 4\mu\eta$ larda bajariladi.

Bu 2 ta tengsizlikni qanoatlantiruvchi $(x,y)\in G$ nuqtalar to‘plami biror D_1 to‘g‘ri to‘rtburchakni ifodalaydi.

Endi K qancha katta bo‘lsa ham $k>K$ uchun

$$\left|\varphi(x)-\varphi^{(k)}(x)\right|<2\mu\eta$$

Bajariladi va L_k siniq chiziqlar oilasi η dan kichik uzunlikka ega bo‘ladi.

U holda $|x-x'|<2\eta$ ga barcha $k>K$ ni qanoatlantiruvchi $\varphi(k)$ Eyler siniq chiziqlari Q ning ichida butunlay yotadi.

$(a_0,b_0),(a_1,b_1),...,(a_{n+1},b_{n+1})-L_k$ siniq chiziq uchlari bo‘lsin, shu bilan birga

$$a_0\le x'<a_1<a_2<...<a_n<x''\le a_{n+1}$$

$\varphi^{(k)}$ funksiya uchun

$$\begin{aligned}&\varphi^{(k)}(a_1)-\varphi^{(k)}(x')=f(a_0,b_0)(a_1-x'),\\&\varphi^{(k)}(a_{i+1})-\varphi^{(k)}(a_i)=f(a_i,b_i)(a_{i+1}-a_i)\\&\varphi^{(k)}(x'')-\varphi^{(k)}(a_n)=f(a_n,b_n)(x''-a_n).\qquad\left(i=\overline{1,n-1}\right)\end{aligned}$$

Bu yerdan $|x''-x'|<\eta$ da

$$\begin{aligned}&\left(f(x',y')-\varepsilon\right)\left(a_1-x'\right)<\varphi^{(k)}(a_1)-\varphi^{(k)}(x')<\left(f(x',y')+\varepsilon\right)\left(a_1-x'\right),\\&\left(f(x',y')-\varepsilon\right)\left(a_{i+1}-a_i\right)<\varphi^{(k)}(a_{i+1})-\varphi^{(k)}(a_i)<\left(f(x',y')+\varepsilon\right)\left(a_{i+1}-a_i\right),\\&i=\overline{1,n-1}\end{aligned}$$

Bu tengsizliklarni yig‘ib,

$$(f(x',y')-\varepsilon)(x''-x')<\varphi^{(k)}(x'')-\varphi^{(k)}(x')<(f(x',y')+\varepsilon)(x''-x'),$$

ni topamiz va talab qilingan da’vo isbotlanadi.

Eyler siniq chiziqlarining turli qismiy ketma - ketliklar (1) yechimining turli yechimlariga yaqinlashadi. Shuning uchun $y'=f(x,y)$ (x_0,y_0) nuqtadan o‘tuvchi yechimi umuman olganda yagona emas.

$$\frac{1}{2^i}\frac{\left|a_i^{(k)}-a_i\right|}{1+\left|a_i^{(k)}-a_i\right|}<\varepsilon\,.$$

Lekin bu tengsizlikning chap tomonida i ni tayinlab qo‘yib, k bo‘yicha limitga o‘tilsa, quyidagi munosabat hosil bo‘ladi:

$$\left|a_i^{(k)} - a_i\right| \to 0, \ \ k \to \infty .$$

Aksincha, i ning har bir qiymati uchun $k \to \infty$ da $\left|a_i^{(k)} - a_i\right| \to 0$ bo‘lsin. $\forall \varepsilon > 0$ ni ixtiyoriy qilib olib, k natural sonni shunday tanlab olamizki,

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$$

bo‘lsin. U holda

$$\rho(x_n, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\left|a_i^{(n)} - a_i\right|}{1 + \left|a_i^{(n)} - a_i\right|} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \frac{\left|a_i^{(n)} - a_i\right|}{1 + \left|a_i^{(n)} - a_i\right|} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\left|a_i^{(n)} - a_i\right|}{1 + \left|a_i^{(n)} - a_i\right|} <$$

$$< \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \frac{\left|a_i^{(n)} - a_i\right|}{1 + \left|a_i^{(n)} - a_i\right|} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

O‘ng tomondagi yig‘indida hadlar soni chekli bo‘lganligi uchun k ni tayinlab qo‘yib, $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ni shu qadar katta qilib olamizki, $n > n_0$ bo‘lganda

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} \frac{\left|a_i^{(n)} - a_i\right|}{1 + \left|a_i^{(n)} - a_i\right|} < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik bajarilsin. Natijada $n > n_0$ bo‘lganda

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon .$$

tengsizlik bajariladi.

2.2. Metrik fazolardagi funksionallarning kompaktlik bilan bog‘liq xossalari va umumlashgan Arsela teoremasi.

Endi metrik fazodagi funksionallarning kompaktlik bilan bog‘liq bo‘lgan xossalarini keltiramiz.

Quyidagi teorema matematik analiz kursidan ma’lum bo‘lgan Veyershtrass teoremasining umumlashtirilishidir.

1-teorema. X metrik fazoda f uzluksiz funksional bo‘lsin. Ixtiyoriy $D \subset X$ kompakt to‘plamda f chegaralangan va o‘zining eng katta va eng kichik qiymatlarini qabul qiladi.

Isbot. f funksional D to‘plamda quyidan chegaralanganligini va o‘zining eng kichik qiymatini qabul qilishini isbotlash bilan chegaralanamiz.

Agar f quyidan chegaralanmagan deb faraz qilsak, u holda ixtiyoriy n natural son uchun $f(x_n) < -n$ shartni qanoatlantiradigan $x_n \in D$ nuqta topiladi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$ hosil bo‘lgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan D kompakt bo‘lgani tufayli biron $x_0 \in D$ nuqtaga yaqinlashuvchi $\{x_{n_i}\}$ qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. f uzluksiz bo‘lgani uchun $f(x_{n_i}) = f(x_0)$. Shu bilan birga $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{n_i}) = -\infty$ Bu esa $f(x_0)$ chekli son ekanligiga zid. Demak, $f(x)$ funksional D to‘plamda quyidan chegaralangan.

Endi m bilan ushbu $f(D) = \{f(x) : x \in D\} \subset R$ to‘plamning aniq quyi chegarasini belgilaymiz va $f(x_0) = m$ shartni qanoatlantiruvchi $x_0 \in D$ nuqta mavjudligini isbotlaymiz. Ixtiyoriy n natural son uchun $m + \dfrac{1}{n}$ son $f(D)$ to‘plamning quyi chegarasi bo‘lmaydi, ya’ni $f(x_n) < m + \dfrac{1}{n}$ shartni qanoatlantiruvchi $x_n \in D$ nuqta mavjud. Bu $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi $x_{n_i} \to x_0 \in D$ qismiy ketma-ketlik ajratib olishimiz mumkin.

Endi ushbu

$$m \le f(x_{n_i}) < m + \frac{1}{n_i}$$

tengsizlikda limitga o‘tsak,

$$\lim_{i \to \infty} f\left(x_{n_i}\right) = m .$$

tenglik hosil bo‘ladi. f uzluksiz bo‘lgani sababli

$$f(x_0) = \lim_{i \to \infty} f(x_{n_i}) = m .$$

Ko‘rinib turibdiki, bu teoremaning isboti matematik analiz kursidagi Veyershtrass teoremasining isbotiga o‘xshaydi. Uzluksiz funksiyalarning ba’zi boshqa xossalari ham shunga o‘xshash osonlikcha metrik fazolardagi funksionallar uchun isbotlanadi. Misol uchun Kantor teoremasini keltiramiz.

1-ta‘rif. (X, ρ) metrik fazoda f funksional berilgan bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topilsaki,

$$\rho(x', x'') < \delta$$

shartni qanoatlantiruvchi har qanday $x', x'' \in X$ uchun ushbu

$$\left| f(x') - f(x'') \right| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksional tekis uzluksiz deyiladi.

2- teorema (Kantor teoremasi). X metrik fazodagi f funksional $D \subset X$ kompakt to‘plamda uzluksiz bo‘lsa, u holda f shu to‘plamda tekis uzluksizdir.

Bu teoremaning ham isboti sonli funksiyalar uchun keltirilgan isbotdan farq qilmaydi.

Metrik fazolarni metrik fazoga akslantirishda xususan metrik fazolarda sonli funksiyalarda, uzluksizlik tushunchasi bilan bir qatorda tekis darajada uzluksizlik tushunchasi muhim ahamiyatga ega:

X metrik fazoni Y metrik fazoga F akslantirish tekis uzluksiz deyiladi, agar har qanday $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki,

$\rho_2(F(x_1), F(x_2)) < \varepsilon$ faqat $\rho_1(x_1, x_2) < \delta$ (bu yerda $\rho_1 - X$ dagi masofa, $\rho_2 - Y$ dagi masofa) da bajarilsa, shu bilan birga δ x_1 va x_2 ga bog‘liq bo‘lmasdan faqat ε ga bog‘liq bo‘lsa.

Metrik kompaktlarni uzluksiz akslantirish uchun analizdagi kesmadagi uzluksiz funksiya haqidagi teoremani umumlashtiruvchi quyidagi teorema o‘rinli:

3-Teorema. Metrik kompaktni metrik fazoga uzluksiz akslantirish tekis uzluksizdir.

Isbot. F akslantirish K metrik fazoni M metrik fazoga akslantiruvchi uzluksiz, lekin tekis uzluksiz bo‘lmasin. Biror $\varepsilon > 0$ uchun va har bir n natural son uchun K da shunday x_n va x_n' nuqtalar topildiki

$$\rho_1(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}$$

bajariladi va shu vaqtda $\rho_2(F(x_n), F(x_n')) \geq \varepsilon$ ($\rho_1 - K$ dagi masofa, $\rho_2 - K$ dagi masofa) bajariladi.

K ning kompaktligidan $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan biror $x \in K$ nuqtaga yaqinlashuvchi $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma – ketlik tanlab olish mumkin.

U holda $\{x_{n_k}'\}$ kerak x ga yaqinlashadi, lekin bundan har bir k uchun

$$\rho_2(F(x), F(x_{n_k})) \geq \frac{\varepsilon}{2} \quad \rho_2(F(x), F(x_{n_k}')) \geq \frac{\varepsilon}{2},$$

tengsizliklardan hech bo‘lmaganda bittasi bajariladi. Bu esa $F(x)$ ning x nuqtaga uzluksizligiga zid. Teorema isbotlandi.

X va Y — 2 ta metrik kompaktlar va $C_{xy} - X$ kompaktni Y kompaktga uzluksiz akslantiruvchi barcha akslantirishlar to‘plami bo‘lsin. C_{xy} da metrikani

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} \rho(f(x), g(x))$$

formula yordamida kiritamiz.

4-Teorema. (Umumlashgan Arsela teoremasi). $D \subset C_{xy}$ to‘plamning nisbiy kompaktigi uchun D ga kiruvchi f funksiyalar sistemasining tekis darajada uzluksiz bo‘lishi zarur va yetarli.

Tekis darajada uzluksizlik quyidagini anglatadi:

Istalgan $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ mavjudki

$$\rho(x', x'') < \delta \qquad (3)$$

dan

$$\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$$

tengsizlikning barcha $f(x)$ va barcha $x', x'' \in X$ lar uchun bajarilishi kelib chiqadi.

Zaruriyligi Arsela teoremasi isbotidagi kabi ko‘rsatiladi.

Yetarliligini isbotlaymiz. Buning uchun C_{xy} ni X kompaktni Y kompaktga akslantiruvchi barcha akslantirishlar fazosi M_{xy} ga yuklaymiz va u yerda C_{xy} da kiritilgan metrikani kiritamiz:

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} \rho(f(x), g(x)),$$

va D to‘plamning M_{xy} da nisbiy kompaktlarini ko‘rsatamiz.

Tekis yaqinlashuvchi uzluksiz akslantirishlar ketma –ketligining limitini yana uzluksiz akslantirishni ifodalaydi. Shuning uchun C_{xy} to‘plam M_{xy} da yopiqdir, D ning C_{xy} da nisbiy kompaktligidan uning M_{xy} da nisbiy kompaktligi kelib chiqadi.

$\varepsilon > 0$ ni ixtiyoriy tanlaymiz va δ ni (1) dan (2) barcha $f \in D$ va barcha $x', x'' \in X$ larda kelib chiqadigan qilib tanlaymiz X o‘zaro kesishmaydigan chekli sondagi shunday E_i to‘plamlarning yig‘indi ko‘rinishida tasvirlash mumkinki, $x', x'' \in E_i$ dan $\rho(x', x'') < \delta$ kelib chiqadi.

Haqiqatan buning uchun $x_1, x_2, ..., x_n$ nuqtalarni shunday tasvirlash yetarliki, ular X da $\frac{\delta}{2}$ – to‘rni ifodalasin, masalan

$$E_i = B\left(x_i, \frac{\delta}{2}\right) \setminus \bigcup_{j<i} B\left(x_j, \frac{\delta}{2}\right),$$

Bu yerda $B(x_i, \frac{\delta}{2})$- markazi x_i nuqatada, radiusi $\frac{\delta}{2}$ bo'lgan shar.

Y kompaktda biror chekli $y_1, y_2, ..., y_n$ $\varepsilon-$to'rni qaraymiz va $L - E_i$ to'plamlarda y_j qiymatlarni qabul qiluvchi $g(x)$ funksiyalar to'plami bo'lsin. Bunday funksiyalar soni chekli bo'ladi. Ular D nisbatan M_{xy} da $2\varepsilon-$to'rni ifodalanishini ko'rsatamiz. Haqiqatan, $f \in D$ bo'lsin. $x_1, ..., x_n$ dan olingan har qanday x_i nuqta uchun $y_1, y_2, ..., y_n$ dan olingan shunday y_j nuqta topiladiki

$$\rho(f(x_i), y_i) < \varepsilon$$

bajariladi.

$g \in L$ funksiyani $g(x_i) = y_j$ qilib tanlangan bo'lsin. U holda

$$\rho(f(x), g(x)) \le \rho(f(x), f(x_i)) + \rho(f(x_i), g(x_i)) + \rho(g(x_i), g(x)) < 2\varepsilon,$$

agar $i - x \in E_i$ qilib tanlangan bo'lsa.

Bu yerdan chekli L to'plam haqiqatan D uchun $2\varepsilon-$to'r ekani kelib chiqadi va shunday qilib, D to'plam M_{xy} da nisbiy kompakt va binobarin C_{xy} da ham nisbiy kompakt.

2.3. Metrik fazolarda kompakt to‘plamlarga misollar

1-misol. Agar $K = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \le 1,\ x > 0\}$ bo‘lsa, u holda K to‘plam R^2 da kompakt bo‘ladimi?

Yechish. K to‘plam chegaralangan. Shuning uchun K nisbiy kompaktdir. Lekin bu to‘plam yopiq emas, chunki $O(0,0)$ nuqta y to‘plam uchun limit nuqta bo‘lib $O(0,0) \notin K$. Demak, K kompakt emas.

2- misol. Agar

$$K = \{x, y\} \in R^2 : |y| = \cos x,\ |y| \le 1$$

bo‘lsa, u holda K to‘plam R^2 fazoda kompakt bo‘ladimi?

Yechish. Agar $K = \{(x,y) \in R^2 : |y| = y\cos x,\ |y| \le 1\}$ bo‘lsa, u holda $\cos x = 1,\ x = 2k\pi\ (k \in Z)$. Agar $y < 0$ bo‘lsa, u holda $\cos x = -1,\ x = (2k+1)\pi\ (k \in Z)$.

Nihoyat, $y = 0$ da $|y| = y\cos x$ tenglik har qanday $x \in R$ uchun o‘rinli.

Shunday qilib, K to‘plam $\{2k\pi, 0 \le y \le 1\} \cup \{(2k+1)\pi, -1 \le y \le 0\} \cup R,\ k \in Z$ ko‘rinishidagi nuqtalar to‘plamidan iborat. Bu to‘plam Ox o‘q bo‘ylab chegaralanmagan.

Demak, K kompakt emas.

3- misol. Agar $K = \left\{ x \in l_p,\ x = \{\xi_i\},\ \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| = 1 \right\}$ bo‘lsa, u holda K to‘plam l_p fazoda nisbiy kompakt bo‘ladimi?

Yechish. l_p fazoda

$$\{e_n\}, \qquad e_n = \left(\underbrace{0,0,\ldots,1}_{n},0,\ldots \right)$$

ketma-ketlikni qurib olamiz. Bu yerda $\rho(e_n, e_s) = 2^{\frac{1}{p}},\ n,s \in N,\ n \ne s$. Endi ε sonini $0 < \varepsilon < 2^{\frac{1}{p}},\ \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$ deb tanlaymiz. U holda har qanday $O_\varepsilon(x)$ $x \in l_p$ da e_n ko‘rinishida bittadan nuqta bo‘ladi, ya’ni berilgan $\varepsilon > 0$ uchun K ning cheksiz

ε to‘ri mavjud bo‘lmaydi.

Shuning uchun K to‘plam nisbiy kompakt bo‘la olmaydi.

4-misol. Agar $A=\{(x,y)\in R^2,\ x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0\}$ bo‘lib, B to‘plam $[-1,1]$ kesmadagi ratsional sonlardan iborat bo‘lsa, u holda $K=A\times B$ to‘plam R^3 fazoda kompakt bo‘ladimi?

Yechish. K to‘plam R^3 da chegaralangan. Shuning uchun K nisbiy kompakt. Lekin K to‘plam R^3 da yopiq emas. Buni quyidagicha ko‘rsatamiz.

Faraz qilaylik, $\{r_k\}$ ketma-ketlik B to‘plamdan olingan ratsional sonlar ketma-ketligi bo‘lib, $k\to\infty$ da $r_k\to-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ bo‘lsin.

$$\{S_n\}=\{(x_k,y_k)\}\subset A$$

bo‘lganda

$$z_n=(S_n,r_n),\ n\in N$$

ketma-ketlikni olib qaraylik. $\{S_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo‘lganligi uchun $n_k\to\infty$ da $S_{n_k}\to S$ bo‘ladigan $\{S_{n_k}\}$ mavjud, bunda $\{S_{n_k}\}\subset\{S_n\}$.

A to‘plam yopiq. Shuning uchun $S\in A$. Lekin

$$\lim_n r_n=-\frac{\sqrt{2}}{2}\notin B$$

Demak, $\{z_{n_k}\}$ ketma-ketlik R^3 dagi $\left(S,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ elementga yaqinlashadi, chunki

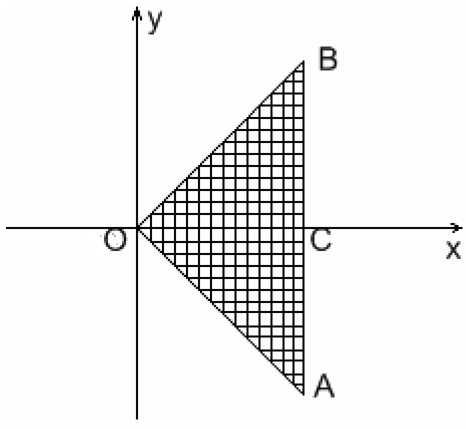
$$\{z_{n_k}\}\subset\{z_n\},\quad z_{n_k}=(S_{n_k},r_k)$$

Shunday qilib $\left(S,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ element $K=A\times B$ to‘plamga tegishli bo‘lmaganidan K kompakt bo‘la olmaydi.

5-misol . $K=\{x(t)\in C[0,1],\ x(0)=0,\ |x(t_1)-x(t_2)|\le|t_1-t_2|,\ t_1,t_2\in[0,1]\}$

to‘plam uchun $\varepsilon=0{,}2$ — to‘r tuzing.

Yechish. K to‘plamdagi $x(t)$ funksiyalarning grafiklari OAB uchburchakka joylashtirilgan (shaklga qarang).



$|t_1 - t_2| \le 0{,}2$ shartga asosan $[0,1]$ kesmani 5 tadan kam bo‘lmagan bo‘lakka bo‘lish kerak. Xuddi shunday AC va BC kesmalarni ham shuncha bo‘lakka bo‘lish kerak, chunki

$|x(t_1) - x(t_2)| \le |t_1 - t_2| \le 0{,}2$

bo‘linish nuqtalardan koordinata o‘qlariga parallel chiziqlar o‘tkazamiz. Natijada, OAB uchburchakda to‘r hosil qilamiz.

Faraz qilaylik, U to‘plam to‘rda mavjud bo‘lishi mumkin bo‘lgan siniq chiziqlar to‘plami bo‘lib, uchlari to‘rning tugunlarida bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $x \in K$ uchun

$$\max_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)| \le 0{,}2$$

bo‘ladigan $y(1)$ mavjud $(y(1) \in U)$, ya’ni U to‘plam K to‘plam uchun 0,2 to‘rdan iborat.

6-misol. ***Har bir K kompakt metrik fazo to‘la chegaralangan bo‘lishini isbotlang.***

Yechimi. Faraz qilaylik K to‘liq chegarlangan bo‘lmasin. Bundan K da biror $\varepsilon > 0$ uchun chekli ε-to‘r topilmasligi kelib chiqadi. K dan ixtiyoriy a_1 nuqta olamiz. U holda shunday $a_2 \in K$ nuqta topiladiki, $p(a_1, a_2) > \varepsilon$ bo‘ladi, aks holda $\{a_1\}$ to‘plam ε-to‘r bo‘lardi. K da shunday a_3 nuqta topiladiki,

$$\rho(a_1, a_3) > \varepsilon, \quad \rho(a_2, a_3) > \varepsilon$$

bo‘ladi, aks holda $\{a_1, a_2\}$ to‘plam ε*-to‘r* bo‘lardi.

Shunga o‘xshash $a_1, a_2, \dots, a_k$ nuqtalar uchun $a_{k+1} \in K$ topilib,

$\rho(a_i, a_{k+1}) > \varepsilon, \quad \overline{i=1,k}$ bo‘ladi.

Bu tanlab olingan nuqtalar limit nuqtaga ega bo‘lmagan $\{a_n\}$ cheksiz ketma-ketlikni beradi, chunki $\rho(a_i, a_j) > \varepsilon,\ i \neq j.$ Bu esa *K* ning kompakt ekanligiga zid.

7-misol. ***Ixtiyoriy kompakt to‘plamning to‘la fazo bo‘lishini isbotlang.***

Yechimi. Bizga *E* kompakt to‘plamda $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik berilgan bo‘lsin. *E* kompakt bo‘lgani uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlik *E* da yaqinlashuvchi $\{x_{nk}\}$ qismiy ketma-ketlikka ega. $\{x_{nk}\}$ ketma-ketlikning limitini a bilan belgilaylik. $\{x_n\}$ fundamental va $\{x_{nk}\}$ yaqinlashuvchi bo‘lgani uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun $\exists n_\varepsilon$ soni topilib, $n, k > n_\varepsilon$ (Demak, $n_k > n_\varepsilon$) bo‘lganda $\rho(x_n, x_{nk}) < \frac{\varepsilon}{2}$ va $\rho(x_{nk}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklari bajariladi. Natijada

$$\rho(x_n, a) \le \rho(x_n, x_{nk}) + \rho(x_{nk}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Bundan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqib. *E* to‘plamning to‘la ekanligini ko‘rsatadi.

<u>8-misol.</u> ***(Hausdorf teoremasi).*** *R metrik fazo kompakt bo 'lishi uchun uning to‘la va to'la chegaralangan bo 'lishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.*

Yechimi. Aytaylik, *R* kompakt bo‘lsin. U holda to‘liq chegaralanganlikning zaruriyligi 1-misoldan kelib chiqadi. To‘la bo‘lishi esa 2-misoldan ko‘rinadi.

Endi *R* to‘la va to‘liq chegaralanga bo‘lsin. Kompaktligini ko‘rsatish uchun har bir $\{x_n\} \subset R$ ketma-ketlik hech bo‘lmaganda bitta limit nuqtaga ega bo‘lishini ko‘rsatish yetarli.

R da 1-to‘r hosil etuvchi nuqtalarning har biri atrofida radiusi 1 bo‘lgan yopiq shar quramiz. Bu sharlar *R* ni to‘liq qoplaydi hamda ularning soni chekli bo‘ladi, u holda ularning hech bo‘lmaganda bittasi $\{x_n\}$ ning biror $x_1^{(1)},...,x_n^{(1)},...$ qismiy ketma-ketligini o‘z ichiga oladi. Bu sharni B_1 orqali belgilaymiz.

B_1 sharda ham $\frac{1}{2}$-to‘r hosil etuvchi nuqtalar atrofida radiusi $\frac{1}{2}$ bo‘lgan yopiq sharlarni qursak, ulaning hech bo‘lmaganda bittasi $\{x_n^{(1)}\}$ ketma-ketlikning $\{x_n^{(2)}\}$ qismiy ketma-ketligini o‘z ichiga oladi. Bu sharni B_2 orqali belgilaymiz. Shu kabi markazi B_2 da radiusi $\frac{1}{4}$ bo‘lib, $\{x_n^{(3)}\} \subset \{x_n^{(2)}\}$ ketma-ketlikni o‘z ichiga oluvchi B_3 sharini olamiz va hokazo.

Endi markazi B_n sharning markazida, radiusi esa ikki marta katta bo‘lgan A_n yopiq sharlarni qaraymiz. Ravshanki A_n sharlar ichma-ich joylashgan. R ning to‘laligidan $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ kesishma bo‘sh emas. va u yagona x_0 nuqtadan iborat. Bu nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun limit nuqta bo‘ladi, hamda uning atrofi biror B_k sharni o‘z ichiga oladi, ya'ni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz $\{x_n^{(k)}\}$ qismiy ketma-ketligini o‘z ichiga oladi. Bundan R kompaktdir.

9-misol. Ixtiyoriy nisbiy kompakt to‘plam chegaralangan bo‘lishini isbotlang.

Yechimi. Agar $\dim K = +\infty$ bo‘lsa, u holda $\forall x_0 \in K$ nuqta uchun

$$\sup_{x \in K} \rho(x_0, x) = +\infty$$

bo‘ladi. Haqiqatan, agar $\forall x \in K$ uchun $\rho(x_0, x) \le M$ bo‘lsa, u holda $\forall x, y \in K$ nuqtalari uchun

$$\rho(x, y) \le \rho(x, x_0) + \rho(x_0, y) \le 2M$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lardi. Demak, $\lim_{n\to\infty} \rho(x_0, x_{n_k}) = +\infty$ bo‘ladigan $\{x_n\}$ketma-ketligini topish mumkin. Natijada $\{x_n\}$ ketma-ketlikning ixtiyoriy $\{x_{n_k}\}$ qismiy ketma-ketligi uchun ham $\lim_{n\to\infty}\rho(x_0, x_{n_k}) = +\infty$ bo‘ladi. U holda $\{x_{n_k}\}$ fundamental bo‘lmaydi, Demak, yaqinlashuvchi emas. Bundan K ning nisbiy kompakt emas ekanligi kelib chiqadi. Hosil bo‘lgan ziddiyatdan K ning chegaralangan ekanligi kelib chiqadi.

10-misol. ***To‘plamning chegaralanganligidan, uning nisbiy kompakt bo‘lishi kelib chiqadimi?***

Yechimi. Umuman aytganda kelib chiqmaydi. Masalan l_2 fazoda quyidagi

$e_1 = (1,0,0,...), \quad e_2 = (0,1,0,...) \quad e_3 = (0,0,1,...),...$

elementlardan iborat chegaralangan to‘plamni olaylik. Bu to‘plamning ixtiyoriy e_n va e_m elementlari orasidagi masofa $\rho(e_m, e_n) = \sqrt{2}(m \neq n)$. Demak, bu ketma-ketlikning lxtiyoriy qismiy ketma-ketligi yaqinlashuvchi emas. Shuning uchun qaralayotgan to‘plam nisbiy kompakt emas.

11-misol. ***X metrik fazoda bo‘sh emas*** $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ....$ ***kompakt to‘plamlari berilgan bo‘lsin.U holda*** $\bigcap_{n\geq 1} A_n$ ***kesishmasi bo‘sh emasligini, shu bilan birga, agar*** $\lim_{n\to\infty} diam A_n = 0$ ***bo‘lsa, u holda*** $\bigcap_{n\geq 1} A_n$ ***kesishmaning yagona nuqtadan iborat bo‘lishini isbotlang.***

Yechimi. Har bir A_n to‘plamdan a_n nuqtasini olaylik. Bu nuqtalarning barchasi A_1 ga tegishli bo‘ladi. A_1 kompakt to‘plam bo‘lgani uchun $\{a_n\}$ ketma-ketlikdan biror $a \in A_1$ nuqtaga yaqinlashuvchi $\{a_{nk}\}$ qismiy ketma-ketligini ajratib olish mumkin. $\{a_{nk}\}$ ketma-ketlikning dastlabki $k-1$ ta hadini olib tashlasak $a_{nk}, a_{nk+1}, a_{nk+2},...$ ketma-ketligiga ega bo‘lamiz. Bu ketma-ketlikning har bir hadi A_{nk} to‘plamga tegishli. Shu bilan birga, bu ketma-ketlik ham a nuqtaga yaqinlashuvchi bo‘ladi. A_{nk} yopiq bo‘lgani uchun ixtiyoriy k uchun $a \in A_{nk}$, Demak,

$$a \in \bigcap_{k\geq 1} A_{nk} = \bigcap_{n\geq 1} A_n.$$

Natijada $\bigcap_{n\geq 1} A_n \neq 0.$

Agar diam $A_n \to 0$ bo'lsa, u holda har qanday boshqa $b \in \bigcap_{n\geq 1} A_n$ nuqtani olsak $\rho(a,b) \leq diam A_n$ tengsizligi barcha n lar uchun o'rinli. Shuning uchun ham $\rho(a,b) = 0,$ ya'ni $a = b.$

12-misol. $C[0,1]$ *fazoga tegishli,* $|f(x)| \leq A$ *(bu yerda* A *tayinlangan musbat son) tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha funksiyalar to'plamini* E *bilan belgilaylik.* $C[0,1]$ *fazoda chegaralangan va yopiq bo'lgan* E *to'plami kompakt emasligini isbotlang.*

Yechimi. $C[0,1]$ to'plamga tegishli

$$f_n(x) = A\sin 2^n \pi x \qquad (n = 1,2,3,...)$$

funksiyalar ketma-ketligini olaylik. Bu ketma-ketlikning har bir hadi E to'plamga tegishli. Haqiqatan,

$$|f_n(x)| = |A\sin 2^n \pi x| = A|\sin 2^n \pi x| \leq A.$$

Bu ketma-ketlikning ixtiyoriy f_n va f_m (bu yerda $n < m$) hadlari orasidagi oraliqni baholaymiz:

$$\rho(f_n, f_m) = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| \geq \left| f_n\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) - f_m\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) \right| =$$

$$= \left| A\sin\frac{\pi}{2} - A\sin 2^{m-n-1}\pi \right| = A,$$

Ya'ni $\rho(f_n, f_m) \geq A.$ Bu tengsizlikdan ko'rinadiki, qaralayotgan ketma-ketlikning ixtiyoriy qismiy ketma-ketligi yaqinlashuvchi bo'la olmaydi. Shuning uchun E to'plam $C[0,1]$ fazoda kompakt emas.

13-misol. l_2 *fazosida yopiq va chegaralangan, ammo kompakt bo'lmagan to'plamga misol keltiring.*

Yechimi. l_2 fazosiga tegishli

$$e_1 = (1,0,0,0,...,0,...)$$
$$e_2 = (0,1,0,0,...,0,...)$$
$$e_3 = (0,0,1,0,...,0,...)$$
$$.........................$$

nuqtalardan iborat sanoqli E to‘plamni olaylik. Bu to‘plam chegaralangan va yopiq. Shu bilan birga, bu to‘plamning ixtiyoriy har xil nuqtalari orasidagi masofa $\sqrt{2}$ ga teng. Shuning uchun $\{e_n\}$ ketma-ketlikning birorta ham qismiy ketma-ketligi fundamental bo‘la olmaydi. Fundamental bo‘lmagan ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lmaydi. Shuning uchun E to‘plam kompakt emas.

14-misol. *Kompakt to‘plamlarning chekli sondagi birlashmasi, kompakt to‘plam bo‘lishini isbotlang.*

Yechimi. Bizga $A_1, A_2, ..., A_k$ kompakt to‘plamlar berilgan bo‘lsin.

Hadlari $A = \bigcap_{i=1}^{k} A_i$ to‘plamidan olingan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketligini qaraymiz. Bu ketma-ketlik hadlari soni cheksiz bo‘lgani uchun $A_1, A_2, ..., A_k$ to‘plamlarning kamida bittasi uning cheksiz sondagi hadlaridan iborat $\{x_{n_p}\}$qismiy ketma-ketligini o‘z ichiga oladi. U holda $\{x_{n_p}\}$ ketma-ketlik A to‘plamda yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlikka ega. Bu qism ketma-ketlik $\{x_n\}$ ketma-ketligi uchun ham qismiy bo‘ladi. Bundan $\bigcap_{i=1}^{k} A_i$ to‘plamning kompaktligi kelib chiqadi.

15-misol. *(Bolsano — Veyershtrass teoremasi). R^n evklid fazosida ixtiyoriy chegaralangan to‘plam nisbiy kompakt bo‘lishini isbotlang.*

Yechimi. E chegaralangan to‘plam bo‘lsa, u holda bu to‘plam biror

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$$

parallelepipedning ichida yotadi. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonini olib har bir $[a_i, b_i]$ segmentni $a_i = x_i^{(1)} < x_i^{(2)} < ... < x_i^{(p_i - 1)} < x_i^{(p_i)} = b_i$ nuqtalar yordamida shunday bo‘laklarga bo‘laylikki natijada ikki qo‘shni nuqtalar orasidagi masofa $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

sonidan kichik bo‘lsin. R^n fazoda quyidagi to‘plamni olamiz:

$$M = \{x = (x_1^{(s_1)}, x_2^{(s_2)}, ..., x_n^{(s_n)}) : s_1 = 1,2,..., p_1, ..., s_n = 1,2,..., p_n\}$$

Bu yerda s_k $(k = 1,2,...,n)$ lar bir-biriga bog‘liq emas. Shu to‘plamning E to‘plam uchun chekli ε-to‘r bo‘lishini ko‘rsatamiz. E to‘plamdan ixtiyoriy $x^{'} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ nuqta olaylik. E to‘plam

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$$

Parallelepipedda joylashganligi uchun $x^{'}$ nuqta

$$\left[x_1^{(k_1)}, x_1^{(k_1+1)})\right] \times \left[x_2^{(k_2)}, x_2^{(k_2+1)})\right] \times ... \times \left[x_n^{(k_n)}, x_n^{(k_n+1)})\right]$$

Parallepipedlarning biriga tegishli bo‘ladi, bu yerda $k_j \in \{1,2,..., p_j - 1\}$, $j = \overline{1,n}$. Bu parallepipedlarning uchlari M to‘plamning elementlaridan iborat bo‘ladi. Shuning uchun $s_k (k = \overline{1,n})$ nomerlar ichidan $s_k^{\ 0} (k = \overline{1,n})$ nomerlar topilib,

$$\rho(x, x^{'}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k^{s_k^0} - x_k)^2} < \sqrt{\underbrace{\frac{\varepsilon^2}{n} + \frac{\varepsilon^2}{n} + ... + \frac{\varepsilon^2}{n}}_{n}} = \varepsilon$$

Tengsizligi o‘rinli bo‘ladi. Demak, M to‘plam E uchun ε-to‘r bo‘ladi. U holda E to‘liq chegaralangan. Natijada R^n fazoning to‘laligi va Xausdorf teoremasi bo‘yicha E to‘plam nisbiy kompakt bo‘ladi.

16-misol. *R^n Evklid fazosida ixtiyoriy yopiq chegaralangan to‘plam kompakt bo‘lishini isbotlang*

Yechimi. Yuqorida isbotlangan Boltsano-Veyershtrass teoremasi bo‘yicha R^n evklid fazosida chegaralangan to‘plam nisbiy kompakt bo‘ladi. Nisbiy kompakt va yopiq bo‘lgan to‘plam ta'rif bo‘yicha kompakt bo‘ladi.

17-misol. *K kompakt to‘plamni o‘ziga o‘tkazuvchi $f : K \to K$ akslantirish* *ixtiyoriy o‘zaro teng bo‘lmagan* $x, y \in K$ *elementlar uchun* $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$ *tengsizlikni qanoatlantirsin. U holda* $f(x) = x$ *tenglikni qanoatlantiruvchi* $x \in K$ *elementning mavjudligini isbotlang.*

Yechimi. $F(x) = \rho(x, f(x))$ ko‘rinishda aniqlanuvchi $f : K \to R$ funksiyani olaylik. $x \in K$ element $f(x) = x$ tengligini qanotlantirishi uchun. $F(x) = 0$ tengligining bajarilishi zarur va yetarli. Aksincha faraz qilaylik, ya'ni *F(x)*>0 bo‘lsin. *K* to‘plam kompakt bo‘lgani uchun $F(x) = 0$ funksiyaning aniq quyi chegarasi musbat son bo‘lib, unga biror $x_0 \in K$ nuqtada erishadi. Masalaning sharti bo‘yicha quyidagi munosabat o‘rinli:

$$F(f(x_0)) = \rho(f(x_0), f(f(x_0))) < \rho(x_0, f(x_0)) = F(x_0)$$

Bu ziddiyat bizning farazimizning noto‘g‘ri ekanligini anglatadi. U holda $f(x) = x$ tenglikni qanoatlantiruvchi $x \in K$ nuqta mavjud.

Xulosa

Kompakt to‘plamlar tushunchasi metrik fazolardagi asosiy tushunchalardan biri hisoblanib, kompakt operatorlarni ta’riflash va ularni tekshirishda qo‘llaniladi.

Ushbu bitiruv malakaviy ishida metrik fazolarda kompakt to‘plamlar tushunchasi o‘rganildi. Asosiy funksional fazolardan bo‘lgan $C[a,b]$ fazodagi to‘plamning nisbiy kompaktlik kriteriyasini ifodalovchi Arsela teoremasi va kompakt to‘plamni kompakt to‘plamga uzluksiz akslantiruvchi akslantirishlar to‘plamida nisbiy kompaktlik kriteriyasi hamda metrik fazodagi funksionallarning kompaktlik bilan bog‘liq bo‘lgan xossalari o‘rganildi. Sonlar o‘qida $[a,b]$ kesma kompakt to‘plam bo‘lishi, R^n va C^n fazolarda istalgan chegaralangan yopiq to‘plam kompakt to‘plam bo‘lishi isbotlab ko‘rsatildi.

ADABIYOTLAR.

1. У.В. Ловитт. Линейные интегральные уравнения. 1958.
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. Москва, Наука. 1965.
3. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функции и функционального анализа. Москва,Наука. 1976 г.
4. Ф.Рисс, Б.Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. Москва, Мир. 1979.
5. Треногин В.А. Функциональный анализ. Москва, Наука. 1980.
6. Т.А.Саримсақов. Функционал анализ курси. Тошкент. ”Ўқитувчи”. 1980 йил.
7. Т.А.Саримсоқов. Ҳақиқий ўзгарувчининг функциялар назарияси. Тошкент, Фан, 1994.
8. J.I.Abdullayev, R.N. G‘anixo‘jayev, M.N. Shermetov, O.I. Egamberdiyev. Funksional analiz. Toshkent - Samarqand. 2009.
9. Г.Ғаймназаров, О.Г.Ғаймназаров. Функционал анализ қурсидан масалалар ечиш. Тошкент, “Fan texnologiyasi”, 2006.
10. Sh.A. Ayupov, M.A. Berdiqulov, R.M. Turg’unboyev. Funksional analiz. Toshkent, 2008.
11. SH.A. Ayupov, M.M. Ibragimov. Funksional analizdan misol va masalalar. Nukus, Bilim, 2009.
12. Sh.O. Alimov, R..R.Ashurov. Matematik tahlil. 1-qism. Toshkent. Kamalak. 2012.