

**УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ, ҚОРАҚАЛПОҚ ДАВЛАТ  
УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖА  
БЕРУВЧИ PhD.28.12.2017.FM.55.01 РАҚАМЛИ  
ИЛМИЙ КЕНГАШ**

---

**УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ**

**ИБРАГИМОВ ЗАФАР ШАВКАТОВИЧ**

**КВАЗИАНАЛИТИК ФУНКЦИЯЛАР ГРАФИКЛАРИНИНГ  
ПЛЮРИПОЛЯРЛИГИ**

**01.01.01 – Математик анализ**

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PHD)  
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

**УРГАНЧ–2018**

УДК: 517.55

**Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD)  
диссертацияси автореферати мундарижаси**

**Оглавление автореферата диссертации  
доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам**

**Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on  
physical-mathematical sciences**

**Ибрагимов Зафар Шавкатович**

Квазианалитик функциялар графикларининг плюриполярлиги. . . . . 3

**Ибрагимов Зафар Шавкатович**

Плюриполярность графиков квазианалитических функций. . . . . 14

**Ibragimov Zafar Shavkatovich**

Pluripolarity of graphs of quasianalytic functions. . . . . 25

**Эълон қилинган ишлар рўйхати**

Список опубликованных работ

List of published works . . . . . 28

**УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ, ҚОРАҚАЛПОҚ ДАВЛАТ  
УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖА  
БЕРУВЧИ PhD.28.12.2017.FM.55.01 РАҚАМЛИ  
ИЛМИЙ КЕНГАШ**

---

**УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ**

**ИБРАГИМОВ ЗАФАР ШАВКАТОВИЧ**

**КВАЗИАНАЛИТИК ФУНКЦИЯЛАР ГРАФИКЛАРИНИНГ  
ПЛЮРИПОЛЯРЛИГИ**

**01.01.01 – Математик анализ**

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)  
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

**УРГАНЧ–2018**

**Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида В2018.1.PhD/FM49 рақам билан рўйхатга олинган.**

Диссертация Урганч давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида ([ik-mat.urdu.uz](http://ik-mat.urdu.uz)) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида ([www.ziyonet.uz](http://www.ziyonet.uz)) жойлаштирилган.

**Илмий раҳбар:**

**Имомқулов Севдиёр Акрамович**  
физика-математика фанлари доктори

**Расмий оппонентлар:**

**Худайбергенов Гулмирза**  
физика-математика фанлари доктори, профессор

**Пренов Барлыкбай Баракбаевич**  
физика-математика фанлари доктори

**Етақчи ташкилот:**

**Самарқанд давлат университети**

Диссертация ҳимояси Урганч давлат университети, Қорақалпоқ давлат университети ҳузуридаги PhD.28.12.2017.FM.55.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2018 йил «\_\_» \_\_\_\_\_ соат \_\_\_\_ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 220100, Урганч ш., Х. Олимжон кўчаси, 14-уй. Тел.: (+99862) 224-66-11, факс: (+99862) 224-67-00, e-mail: [ik-mat.urdu@umail.uz](mailto:ik-mat.urdu@umail.uz)).

Диссертация билан Урганч давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (\_\_\_ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 220100, Урганч ш., Х. Олимжон кўчаси, 14-уй. Тел.: (+99862) 224-66-11, факс: (+99862) 224-67-00,

Диссертация автореферати 2018 йил «\_\_» \_\_\_\_\_ куни тарқатилди.  
(2018 йил «\_\_» \_\_\_\_\_ даги \_\_\_\_\_ рақамли реестр баённомаси).

**Б. И. Абдуллаев**

Илмий даражалар берувчи  
Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д.

**А. А. Атамуратов**

Илмий даражалар берувчи Илмий  
кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

**А. Б. Яхшимуратов**

Илмий даражалар берувчи Илмий  
кенгаш қошидаги илмий семинар  
раиси, ф.-м.ф.д.

## **КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)**

**Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати.** Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда комплекс структураларни киритиш орқали комплекс ўзгарувчилик функцияларнинг геометрик назарияси масалаларини ўрганишга келтирилади. Комплекс ўзгарувчилик функциялар назарияси Республикамизда кенг илдиз отган, кучли ривожланаётган соҳа ҳисобланади. Унинг шаклланиши, ривожланиши ўтган аср бошларига тўғри келиб, А. Пуанкаре ва Ф. Хартогс номи билан боғланган. Кейинчалик А.Картан, К.Ока ишларида назария алгебраик геометрия ва топология услубияти билан боғланди ва бойитилди. Айниқса, ушбу назарияни математик физика, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, Банах алгебраси каби йўналишларга татбиқ қилиниши, бу ердаги қатор муаммоларнинг муваффақият билан ҳал қилиниши аналитик функцияларга бўлган қизиқишни янада кучайтирди ва бу соҳада кучли олимлар оқимини шакллантирди. Ушбу йўналишда комплекс фазоларда алоҳида аҳамият касб этган плюриполяр тўпламларни геометриясини тадқиқ қилишга оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда квазианалитик функцияларни графикларини тадқиқ қилиш, хусусан уларни плюрипотенциаллар назарияси билан узвий боғлиқлигини тавсифлаш долзарб масалалардан бири ҳисобланади. Квазианалитик функциялар аналитик функциялар каби ягоналик хоссасини қаноатлантириши билан бирга турли олимлар томонидан турлича таърифланиб келинади. Бугунги кунда Бернштейн, Данжуа, Гончар маъноларида тавсифланган квазинаналитик функциялар синфлари ажратиб кўрсатилади ва бу синфларнинг геометрик характеристикалари ўрганиш муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада: квазианалитик функциялар графиклариини плюриполярлиги ўрганиш; квазигармоник функциялар ва уларни тавсифлаш; квазианалитик функциялар учун ягоналик теоремаларини исботлаш; квазианалитик функцияларни турли синфларини солиштириш; квазианалитик функциялар хоссаларини комплекс анализда ва плюрипотенциаллар назарияси масалаларида тадбиқ этиш мақсадли илмий тадқиқотлар ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг амалий татбиқига эга бўлган математик анализнинг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, кўп комплекс ўзгарувчилик функциялар назарияси ва плюрипотенциаллар назарияси масалаларга алоҳида эътибор қаратилди. Квазианалитик ва квазигармоник функциялар уларни графикларини тасвирлаш бўйича салмоқли натижаларга эришилди. Алгебра, математик анализ, динамик системалар назарияси, амалий математика ва математик моделлаштириш фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва

фаолият йўналишлари этиб белгиланди<sup>1</sup>. Қарор ижросини таъминлашда Квазианалитик ва квазигармоник функциялар назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2008 йил 15 июлдаги ПҚ-916-сон «Инновацион лойиҳалар ва технологияларни ишлаб чиқаришга татбиқ этишни рағбатлантириш борасидаги қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида»ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарори ва 2017 йил 8 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

**Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги.** Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

**Муаммонинг ўрганилганлик даражаси.** Маълумки, комплекс тексликда аниқланган ҳар қандай аналитик функциянинг графиги  $\mathbb{C}^2$  фазода плюриполяр тўплам бўлади. Бироқ ҳар қандай чексиз дифференциалланувчи функция учун бу факт ўринли бўлмайди, зеро Ж.Э.Форнесс ва К.Дидрихнинг ишида графиги  $\mathbb{C}^2$  да плюриполяр бўлмаган чексиз дифференциалланувчи функцияга мисол қурилган. Лекин, Д.Коман, Н.Левенберг ва Е.Полетскийлар томонидан Беренштейн маъносида квазианалитик функцияларнинг графиги  $\mathbb{C}^2$  фазода плюриполяр тўплам бўлиши исботланган. Шунингдек, Данжуа маъносида квазианалитик бўлган функциянинг графиги ҳам плюриполяр бўлиши кўрсатилган.

Н. Шербина томонидан аксинча, агар қандайдир узлуксиз график плюриполяр тўплам бўлса, у ҳолда бу графикни аниқловчи функция аналитик функция бўлишини исботланган. Ушбу натижа маълум маънода Д.Коман, Н.Левенберг ва Е.Полетскийларнинг натижаларини тўлдиради.

Квазианалитик функциялар шунингдек, Т. Эдлунд, Б. Ёрике, Д., А. Эдигарян, Ж. Вигеринк, А. Крегл, П. Мичор, А.Раинер каби математикларнинг илмий ишларида тадқиқ қилинган.

**Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.**

Диссертация иши Урганч давлат университетининг «Математика» кафедраси илмий тадқиқот ишлари режаси асосида бажарилган.

**Тадқиқотнинг мақсади.** Квазианалитик функцияларнинг графиклари плюриполярлигини кўрсатиш, квазианалитик функциялар синфида ягоналик

---

<sup>1</sup> Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сон қарори

теоремасини исботлаш ва квазигармоник функцияларни графикларининг топологик хусусиятларини аниқлашдан иборат.

**Тадқиқотнинг вазифалари.**

Гончар маъносида квазианалитик бўлган кўп аргументли функциялар учун ягоналик теоремасини исботлаш;

Гончар маъносида квазианалитик бўлган функциялар графикларининг плюриполярлигини исботлаш;

Алгеброид функциялар графикларининг плюриполярлигини исботлаш;

Данжуа маъносида квазианалитик бўлган функциялар графикларининг плюриполярлигини исботлаш;

Геврей синфидан бўлган функциялар графикларининг плюриполярлигини исботлаш;

Квазигармоник функциялар синфини аниқлаш ва квазигармоник функциялар графикларининг “нозиклиги” ҳақидаги теоремани исботлаш

**Тадқиқотнинг объекти.** Плюриполяр тўпламлар, квазианалитик функцияларнинг графиклари, “нозик” тўпламлар ва ягоналик хоссалари.

**Тадқиқотнинг предмети** Данжуа, Бернштейн ва Гончар маъносидаги квазианалитик функциялар, Геврей синфи ва квазигармоник функциялар синфидан иборат.

**Тадқиқотнинг усуллари.** Диссертация ишида кўп комплекс ўзгарувчининг функциялари назарияси, классик ва кўп ўлчовли потенциаллар назарияси усулларида фойдаланилган.

**Тадқиқотнинг илмий янгилиги** қуйидагилардан иборат:

Гончар маъносида квазианалитик бўлган кўп аргументли функциялар учун ягоналик теоремаси исботланган;

Гончар маъносида квазианалитик бўлган функциялар графикларининг плюриполярлиги исботланган;

Алгеброид функцияларнинг графикларини плюриполярлиги исботланган;

Данжуа маъносида квазианалитик бўлган функциялар графикларининг плюриполярлиги исботланган;

Геврей синфидан бўлган функцияларг графикларининг плюриполярлиги исботланган;

Квазигармоник функциялар синфи аниқланган ва квазигармоник функциялар графикларининг “нозиклиги” ҳақидаги теорема исботланган.

**Тадқиқотнинг амалий натижалари.** Гончар синфидан олинган квазианалитик функциялар синфи учун ягоналик принциплари бажарилиши кўрсатилади.

**Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги** Функционал анализ, математик анализ, комплекс анализ, кўп комплекс ўзгарувчининг функциялари назарияси усулларида фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг ва исботларнинг қатъийлиги билан асосланган..

**Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти.** Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ундан кўп комплекс ўзгарувчининг

функциялари назарияси ва потенциаллар назариясида олиб бориладиган илмий тадқиқот изланишларида фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқотнинг натижалари амалий аҳамияти квазианалитик функциялар графикларининг плюриполяр бўлиши комплекс фазоларда тўпламларнинг плюриполяр қобикларини тавсифлаш имкониятини бериши билан характерланади.

**Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши.** Диссертация тадқиқоти жараёнида олинган илмий натижалар қуйидаги йўналишларда амалиётга жорий қилинди:

Квазианалитик ва квазигармоник функциялар графикларининг “нозиклиги” хусусиятларини аниқлаш бўйича олинган илмий натижалар асосида Гончар ва Данжуа маъносида квазианалитик бўлган функцияларнинг графикларининг плюриполяр бўлиши ва Гончар квазианалитик функциялари учун исбот қилинган ягоналик хоссаси Ф4-ФА-0-16928 рақамли “Комплекс потенциаллар назариясида плюрирегулярлик хусусиятлари ва мосланган манбали чекли дифференциал айирмали тенгламалар” грант лойиҳасида тўпламларнинг плюрирегулярлик хусусиятларини тадқиқ этишда фойдаланилган (Ўзбекистон Фанлар академиясининг 2018 йил 14 мартдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши комплекс фазоларда плюрирегуляр тўпламлар хусусиятларини ўрганиш ва тўпламларнинг плюриполяр қобикларини тавсифлаш имконини берган;

Данжуа маъносида квазианалитик бўлган функциялар графикларининг плюриполярлиги билан боғлиқ натижалари DMS–1401316 рақамли лойиҳасида анализ ва математик физиканинг долзарб масалаларини ўрганишда фойдаланилган (АҚШ Кларемонт МакКенна коллежи Математик фанлар бўлимининг 2018 йил 26 февралдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши ўртача қийматли гиперболик метрикалар хоссаларини аниқлаш имконини берган.

**Тадқиқот натижаларининг апробацияси.** Мазкур тадқиқот натижалари, 9 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 6 та халқаро ва 3 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

**Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги.** Диссертация мавзуси бўйича жами 9 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 7 та мақола, жумладан, 3 таси хорижий ва 4 таси республика журналларида нашр этилган.

**Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши.** Диссертация кириш, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 85 бетни ташкил этган.

## ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

**Кириш** қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг «**Дастлабки маълумотлар**» деб номланувчи биринчи бобнинг биринчи параграфида квазианалитик функциялар тўғрисидаги умумий маълумотлар ва натижалар келтирилган. Шунингдек, кейинги бобларда керак бўладиган натижалар ва Карлеман теоремаси келтирилган.

Мазкур бобнинг иккинчи ва учинчи параграфларда Бернштейн маъносида квазианалитик функциялар синфи ва функцияларни рационал функциялар билан энг яхши яқинлаштиришлар ўрганилган. Тўртинчи параграфда эса экстремал плюрисубгармоник функциялар ва уларнинг муҳим хоссалари келтирилган.

Диссертациянинг «**Гончар маъносида квазианалитик функциялар графикларининг плюриполярлиги**» деб номланувчи иккинчи боби кўп ўзгарувчили Гончар квазианалитик функцияларига бағишланган бўлиб, биринчи параграфида Гончар теоремасининг кўп ўлчовли аналоги исботланган:

*1-теорема.*  $K \subset \mathbb{C}^n$  плюриполяр бўлмаган компакт тўплам бўлсин. Агар  $f \in R_0(K)$  функция  $E \subset K$  плюриполяр бўлмаган қисм тўпламда нолга тенг бўлса, у ҳолда  $f \equiv 0$  муносабат  $K$  тўпламнинг қандайдир плюриполяр тўпламдан ташқари барча нуқталарида ўринли бўлади.

Бу ерда

$$R_0(K) = \{ f \in C(K) : \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\rho_m(f, K)} = 0 \} .$$

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида қуйидаги асосий теорема исботланган:

*2-теорема.*  $K \subset \mathbb{C}^n$  компакт тўплам ва  $f \in R(K)$  бўлсин. У ҳолда бу функциянинг  $\Gamma_f$  графиги  $\mathbb{C}^{n+1}$  фазода плюриполяр бўлади.

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида қуйидаги теорема исботланган:

*3-теорема.*  $K \subset \mathbb{C}^n$  ва  $\Gamma \subset \mathbb{C}^{n+1}$  қандайдир алгеброид функциянинг графиги бўлсин, яъни

$$\Gamma = \{ (z, w) \in K \times \mathbb{C} : w^k + a_1(z)w^{k-1} + \dots + a_k(z) = 0 \} ,$$

бунда  $a_j(z) \in R^0(K)$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ . У ҳолда  $\Gamma$ - график  $\mathbb{C}^{n+1}$  фазода плюриполяр бўлади.

Бу ерда

$$R^0(K) = \{f \in C(K) : \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\rho_m(f, K)} = 0\}.$$

Диссертациянинг «**Чексиз дифференциалланувчи функциялар графикларининг плюриполярлиги**» деб номланувчи учинчи боби чексиз дифференциалланувчи функциялар графикларининг ўрганишга бағишланган бўлиб, биринчи параграфда Данжуа маъносидаги квазианалитик функциялар ўрганилган.

*1-таъриф.* Агарда  $f \in C^\infty(T^n)$  функция учун  $C_{\{M_j(f)\}}(T^n)$  синф Данжуа маъносида квазианалитик функциялар синфи бўлса, у ҳолда  $f$  функция Данжуа маъносида квазианалитик дейилади.

Карлеман теоремасига кўра  $f \in C^\infty(T^n)$  функция Данжуа маъносида квазианалитик функция бўлиши учун қуйидаги муносабатнинг ўринли бўлиши зарур ва етарлидир:

$$\int_1^\infty \frac{\ln \tau_f(r)}{r^2} dr = -\infty,$$

бунда

$$\tau_f(r) = \inf_{j \geq 0} \frac{M_j(f)}{r^j}.$$

Ушбу параграфнинг асосий натижаси қуйидаги теоремадир.

*4-теорема.*  $f : T^n \rightarrow \mathbb{C}$  функция Данжуа маъносида квазианалитик бўлсин. У ҳолда унинг  $\Gamma_f$  графиги  $\mathbb{C}^{n+1}$  фазода плюриполяр бўлади.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфда Геврей синфи ўрганилган.

*Геврей синфи.*  $\delta \geq 1$  бўлсин. Агар  $M_j \leq C^{j+1} j^{\delta j}$  бўлса, у ҳолда унга мос келувчи  $C_{M_j}(T^n)$  синфга Геврей синфи дейилади ва у  $G^\delta$  каби белгиланади.

$\delta = 1$  бўлганда Геврей синфи аналитик функциялар синфи билан устма уст тушади.  $\delta > 1$  бўлганда  $G^\delta$  синф нол бўлмаган, лекин қандайдир  $z_0$  нуктада  $f^{(\alpha)}(z_0) = 0$ ,  $|\alpha| = 0, 1, 2, \dots$  бўлган функциялар синфидан иборат бўлади, яъни  $G^\delta$  ( $\delta > 1$ ) синф квазианалитик бўлмаган функциялар синфини ифодалайди.

Иккинчи параграфнинг асосий натижаси қуйидаги теоремадир.

*5-теорема.*  $f : T^n \rightarrow C$  чексиз дифференциалланувчи функция бўлсин. Агар  $f$  функция  $G^\delta$ ,  $1 \leq \delta < 2$  Геврей синфига тегишли бўлса, у ҳолда функциянинг графиги  $\Gamma_f$   $C^{n+1}$  фазода плюриполяр бўлади.

Диссертациянинг «**Квазигармоник функциялар**» деб номланувчи тўртинчи бобда квазианалитик функциялар билан узвий боғлиқ бўлган квазигармоник функциялар синфи ўрганилган. Маълумки, бир ўзгарувчили аналитик ва гармоник функциялар бир бирлари билан жипс боғланган, яъни аналитик функцияларнинг ҳақиқий қисми гармоник функциядан иборат бўлади.

$K \subset \mathbb{R}^n$  - компакт тўплам ва  $f \in C(K)$  бўлсин.

$$l_m(f, K) = \inf \|f(x) - q_m(x)\|_\infty$$

орқали  $f$  функцияни  $K$  компакт тўпланда даражаси  $m$  дан ошмайдиган гармоник полиномлар билан энг яхши чекланишини белгилаймиз. Захарюта томонидан Бернштейн теоремасининг гармоник функциялар синфидаги аналогиси исботланган: агар

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} l_m^{1/m}(f, K) < 1, \quad (3)$$

бўлса, у ҳолда  $f$  функция  $K$  компакт тўпламнинг бирор атрофига гармоник давом этади ва аксинча, агар  $f$  функция  $K$  компакт тўпламнинг қандайдир атрофида гармоник бўлса, у ҳолда (3) тенгсизлик ўринли бўлади.

$qh(K)$  орқали

$$\underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} l_m^{1/m}(f, K) < 1.$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча  $f$  функциялар синфини белгилаймиз.  $qh(K)$  синфга квазигармоник функциялар синфи дейилади.

Тўртинчи бобнинг биринчи параграфида қуйидаги теорема исботланган:

*6-теорема.*  $K \subset \mathbb{R}^n$   $H$  –регуляр компакт тўплам бўлсин,  $f \in qh(K)$  ва функциянинг ноллари тўплами  $E = \{x \in K : f(x) = 0\}$   $N$  –тўплам бўлмасин. У ҳолда  $f(x) \equiv 0$  муносабат бутун  $K$  да ўринли.

Шуни таъкидлаб ўтиш жоизки,  $\mathbb{R}^n$  фазодаги  $N$  – тўпламлар  $\mathbb{C}^n$  фазодаги плюриполяр тўпламларнинг аналогиси ҳисобланади.

Тўртинчи бобнинг иккинчи параграфида қуйидаги теорема исботланган:

*7-теорема.*  $K \subset \mathbb{R}^n$   $H$  –регуляр компакт тўплам ва  $f \in qh(K)$  бўлсин. У ҳолда функциянинг графиги

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in K\}$$

$N$  – тўпламларнинг санокли бирлашмасида сақланади.

$\mathbb{C}^n$  фазода плюриполяр тўпламларнинг санокли бирлашмаси яна плюриполяр тўплам бўлади. Бироқ  $\mathbb{R}^n$  фазода  $N$  –тўпламларнинг санокли

бирлашмаси яна  $N$  –тўплам бўлиши масаласи халигача хал этилмаган масала эканини эслатиб ўтамиз.

Муаллиф ушбу диссертация натижаларини кўп мартаба муҳокама қилишда ва ишни яқунлашда қимматли маслаҳатларини берганлиги учун академик А. С. Садуллаевга, профессор Н.Левенбергга ва шунингдек, диссертацияда кўрилган масалаларда кўйишда ва диссертация ишига доимий эътиборда бўлганлиги учун илмий раҳбари, физика-математика фанлари доктори С.А.Имомкуловга чуқур миннатдорчилик билдиради.

## ХУЛОСА

Диссертация иши турли синфларга оид квазианалитик функциялар графикларини плюриполярлигини ўрганишга бағишланган бўлиб, олинган натижалар диссертация ишида қуйилган мақсадга тўлиқ эришилганлигини кўрсатади. Диссертацияда олинган илмий натижалар асосида қуйидаги хулосаларга келинди:

1. Гончар маъносида квазианалитик бўлган кўп аргументли функциялар учун ягоналик теоремаси исботланган;
2. Гончар маъносида квазианалитик бўлган функциялар графикларининг плюриполярлиги исботланган;
3. Алгеброид функцияларнинг графикларини плюриполярлиги исботланган;
4. Данжуа маъносида квазианалитик бўлган функциялар графикларининг плюриполярлиги исботланган;
5. Геврей синфидан бўлган функцияларни графикларининг плюриполярлиги исботланган;
6. Квазигармоник функциялар синфи аниқланган ва квазигармоник функциялар графикларининг “нозиклиги” ҳақидаги теорема исботланган.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.28.12.2017.FM.55.01  
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНЬЮ ПРИ УРГЕНЧСКОМ  
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ, КАРАКАЛПАКСКОМ  
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

---

**УРГЕНЧСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ИБРАГИМОВ ЗАФАР ШАВКАТОВИЧ**

**ПЛЮРИПОЛЯРНОСТЬ ГРАФИКОВ КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИХ  
ФУНКЦИЙ**

**01.01.01 – Математический анализ**

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)  
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

**УРГЕНЧ – 2018**

**Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2018.1.PhD/FM49**

Диссертация выполнена в Ургенчском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета ([ik-mat.urdu.uz](http://ik-mat.urdu.uz)) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» ([www.ziyonet.uz](http://www.ziyonet.uz)).

|                               |   |
|-------------------------------|---|
| <b>Научный руководитель:</b>  | <b>Имомкулов Севдиер Акрамович</b><br>доктор физико-математических наук   |
| <b>Официальные оппоненты:</b> | <b>Худайбергенов Гулмирза</b><br>доктор физико-математических наук, профессор<br><b>Пренов Барлыкбай Баракбаевич</b><br>кандидат физико-математических наук |
| <b>Ведущая организация:</b>   | <b>Самаркандский государственный университет</b>  |

Защита диссертации состоится «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 года в \_\_\_ часов на заседании Научного совета PhD.28.12.2017.FM.55.01 при Ургенчском государственном университете, Каракалпакском государственном университете. (Адрес: 220100, г. Ургенч, ул. Х. Алимджана, дом 14. Тел.: (+99862)224-66-11, факс: (+99862) 224-67-00, e-mail: : [ik-mat.urdu@umail.uz](mailto:ik-mat.urdu@umail.uz)).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Ургенчского государственного университета (зарегистрирована за №\_\_\_). (Адрес: 220100, г. Ургенч, ул. Х. Алимджана, дом 14. Тел.: (+99862)224-66-45, факс: (+99862) 224-67-00).

Автореферат диссертации разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 года.  
(протокол рассылки №\_\_\_ от «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 года).

**Б. И. Абдуллаев**  
Председатель Научного совета по  
присуждению ученой степени,  
д.ф.-м.н.

**А. А. Атамуратов**  
Ученый секретарь Научного совета по присуждению  
ученой степени, к.ф.-м.н.

**А. Б. Яхшимуратов**  
Председатель научного семинара при Научном совете  
по присуждению ученой степени, д.ф.-м.н.

## **ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))**

**Актуальность и востребованность темы диссертации.** Многие научно прикладные исследования проводимые на мировом уровне во многих случаях приводятся к изучению задач геометрической теории функций многих комплексных переменных. Теория аналитических функций многих переменных «пустившая корни» в нашей стране, считается одним из бурно развивающихся ветвей математики. Теория функций многих комплексных переменных формировалась в начале двадцатого века и связана с именами А. Пуанкаре и Ф. Хартогса. Затем в работах А. Картана, К. Ока эта теория была обогащена методами алгебраической геометрии и топологии. Особенно возрос интерес к теории аналитических функций многих переменных в 60 - 70 годах прошлого века в связи с успешным решением ряда трудных проблем математической физики, уравнений в частных производных, банаховых алгебр методами этой теории и к этому моменту в данном направлении появились ряд крупных специалистов. Исследования геометрических свойств плюриполярных множеств, которые играют важную роль в комплексных пространствах, остаются одними из важных задач.

В настоящее время исследования графиков квазианалитических функций стали предметом многочисленных исследований, в частности установления плюриполярности графиков разных функций является одним из актуальных вопросов в мировой математике в связи с их применением в теории плюрипотенциала и в многомерном комплексном анализе. В частности Квазианалитические функции обладают свойствами единственности и многие авторы определили разные классы квазианалитических функций. Среди них особый интерес представляют классы квазианалитических функций в смысле Бернштейна, Данжуа и Гончара и вопросы исследования геометрические характеристики этих классов. При этом, изучения плюриполярности графиков квазианалитических функций и геометрические характеристики квазигармонических функций, установления единственности квазианалитических функций, сравнения различных классов квазианалитических функций и применения свойств квазианалитических функций в многомерном комплексном анализе и в теории плюрипотенциала считаются целевыми научными исследованиями.

В нашей стране большое внимание уделяется актуальным направлениям математического анализа, имеющим фундаментальное и прикладное значения. В том числе, уделяется особое внимание современным задачам многомерного комплексного анализа и теории плюрипотенциала. В частности, в направлении по исследованию графиков квазианалитических функций и описания геометрические характеристики квазигармонических функций получены ряд существенных результатов. Очень важно проведение научных исследований по приоритетным направлениям математических наук на уровне международных стандартов по алгебре и математическому анализу, теории динамических систем, прикладной математики и математическому

моделированию<sup>2</sup>. Стало известно, что графики квазианалитических функций тесно связаны с плюриполярным множеством, которое является основным объектом теории плюрипотенциала. Развитие теории квазианалитических функций и исследования графиков квазианалитических функций в комплексных пространствах играет важную роль в исполнении постановления.

Эта диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан №-ПП-916 «О дополнительных мерах по стимулированию внедрения инновационных проектов и технологий в производство» от 15 июля 2008 года, №-ПП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года и №-УП-4947 «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 8 февраля 2017 года, а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

**Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики.** Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

**Степень изученности проблемы.** Известно, что график любой аналитической функции определенной на комплексной плоскости является плюриполярным множеством в пространстве  $\mathbb{C}^2$ . Однако, как показывает пример построенный Ж.Э. Форнессом и К. Дидрихом, для бесконечно дифференцируемых функций аналогичное утверждение является неверным. Тем не менее, в работе Д. Комана, Н. Левенберга, Е. Полетского установлена плюриполярность графиков квазианалитических функций в смысле Бернштейна. А также доказана плюриполярность графиков квазианалитических функций Данжуа.

Н. Шербина доказал, что если некоторый график  $\Gamma : w = f(z)$  является плюриполярным, то  $f(z)$  является аналитической функцией. Этот результат является в определенном смысле дополнением теоремы Д. Комана, Н. Левенберга и Е. Полетского.

Квазианалитические функции также изучены в работах многих известных математиков, таких как Т. Эдлунд, Б. Ёрикке, А. Эдигарян, Ж. Вигеринк, А. Крегл, П. Мичор, А.Раинер и получены ряд фундаментальных результатов в этом направлении.

---

<sup>2</sup> Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений академии Наук Республики Узбекистан»

**Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполняется диссертация.** Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ кафедры «Математика» Ургенчского государственного университета.

**Цель исследования** установить плюриполярность графиков квазианалитических функций, Доказать теорему единственности квазианалитических функций и исследовать топологические свойства графиков квазигармонических функций.

**Задачи исследования:**

доказать теоремы единственности для класса квазианалитических функций многих переменных в смысле Гончара;

установить плюриполярности графиков квазианалитических функций в смысле Гончара;

установить плюриполярность графиков алгеброидных квазианалитических функций;

установить плюриполярность графиков квазианалитических функций многих переменных в смысле Данжуа;

установить плюриполярности графиков функций из класса Геврей;

определение класса квазигармонических функций и доказать теорему «о тонкости» графиков квазигармонических функций.

**Объект исследования.** Плюриполярность графиков, свойства единственности тонкие множества.

**Предмет исследования.** Квазианалитические функции в смысле Данжуа, Бернштейна и Гончара, а также класс квазигармонических функций и класс Геврей.

**Методы исследований.** В диссертационной работе используется методы теории функций многих комплексных переменных, а также классической и многомерной теории потенциала.

**Научная новизна исследования состоит в следующем:**

доказана теорема единственности для класса квазианалитических функций многих переменных в смысле Гончара;

доказано плюриполярность графиков квазианалитических функций в смысле Гончара;

установлено плюриполярность графиков алгеброидных функций;

доказано плюриполярность графиков квазианалитических функций многих переменных в смысле Данжуа;

доказано плюриполярность графиков функций из класса Геврей;

определено класс квазигармонических функций и доказана теорема «о тонкости» графиков квазигармонических функций.

**Практические результаты.** Доказано, выполнения принципа единственности в классе квазианалитических функций в смысле Гончара.

**Достоверность результатов исследования** обоснована строгостью математических рассуждений и использованием методов функционального анализа, математического анализа, комплексного анализа.

**Научная и практическая значимость результатов исследования.** Результаты и методы, представленные в диссертации, могут быть использованы в научных исследованиях специалистами по теории функции многих комплексных переменных и теории потенциалов.

Практическая значимость результатов исследования состоит в том, что плюриполярность графиков квазианалитических функций дает возможность описания плюриполярные оболочки множества в комплексных пространствах.

**Внедрение результатов исследования.** Результаты полученные в диссертации были внедрены на практике в следующих направлениях:

результаты о плюриполярности графиков квазианалитических функций в смысле Данжуа и Гончара, а также свойство единственности квазианалитических функций в смысле Гончара использованы в гранте Ф4-ФА-0-16928 «Свойства плюрирегулярности в комплексной теории потенциала и дифференциально-разностные уравнения с модифицированными источниками» (Справка Академии наук Республики Узбекистана, 14 марта 2018 года) при исследовании плюрирегулярных компактов и плюриполярных оболочек. Полученные результаты дали возможность изучить свойства плюрирегулярных компактов и описывать плюриполярные оболочки множеств в комплексных пространствах.

результаты связанные с плюриполярностью графиков квазианалитических функций использованы в гранте DMS – 1401316 Национального Научного Фонда США (Справка математического отдела колежа Кларемонта МакКенна США, 26 февраля 2018 года) при исследовании свойств гиперболических метрики.

**Апробация результатов исследования.** Результаты данного исследования были обсуждены на 9 научно-практических конференциях, в том числе на 6 международных и 3 республиканских научно - практических конференциях.

**Публикация результатов исследования.** По теме диссертации опубликовано 9 научных работ, из них 7 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 3 опубликованы в зарубежных журналах и 4 – в республиканских научных изданиях.

**Объём и структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 85 страниц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

**Во введении** обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первом параграфе первой главы диссертации, названной **«Предварительные сведения»** приводятся известные результаты и свойства квазианалитических функций, нужные в следующей главе, а также сформулирован критерий Карлемана о квазианалитичности в смысле Данжуа функций из класса  $C_{\{m_j\}}$ .

Во втором и третьем параграфах первой главы изучаются класс квазианалитических функций в смысле Бернштейна и наилучшее приближение функции рациональными функциями. В четвертом параграфе приводятся экстремальные плюрисубгармонические функций и их важные свойства.

Вторая глава диссертации, названная **«Плюриполярность графиков квазианалитических функций в смысле Гончара»**, посвящена квазианалитическим функциям многих переменных в смысле Гончара. Основными результатами в этой главе являются следующие теоремы.

В параграфе 2.1. доказывается многомерный аналог теоремы Гончара:

*Теорема 1.* Пусть  $K \subset \mathbb{C}^n$  неплюриполярное компактное множество. Если функция  $f \in R_0(K)$  равна нулю в неплюриполярном подмножестве  $E \subset K$ , то  $f \equiv 0$  на  $K$  за исключением некоторого плюриполярного множества.

Здесь

$$R_0(K) = \{ f \in C(K) : \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\rho_m(f, K)} = 0 \} .$$

Наличие исключительного плюриполярного множества обусловлено тем, что если компакт не связан и имеет плюриполярную компоненту, то функция  $f$  может не равняться нулю на этой компоненте.

В параграфе 2.2. доказывается следующая основная теорема:

*Теорема 2.* Пусть  $K \subset \mathbb{C}^n$  компактное множество и функция  $f \in R(K)$ . Тогда график функции  $\Gamma_f$  плюриполярен в  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

В параграфе 2.3. доказано теорема о плюриполярности графиков алгеброидных функций в классе квазианалитических функций.

**Теорема 3.** Пусть  $K \subset \mathbb{C}^n$  и  $\Gamma \subset \mathbb{C}^{n+1}$  график некоторой алгеброидной функции, т.е.

$$\Gamma = (z, w) \in K \times \mathbb{C} : w^k + a_1(z)w^{k-1} + \dots + a_k(z) = 0 ,$$

где  $a_j(z) \in R^0(K)$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ . Тогда  $\Gamma$  плюриполярно в  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

Здесь

$$R^0(K) = \{ f \in C(K) : \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\rho_m(f, K)} = 0 \} .$$

В третья глава диссертации, названная «**О плюриполярности графиков бесконечно дифференцируемых функций**», посвящена изучению плюриполярности графиков бесконечно дифференцируемых функций.

В параграфе 3.1 рассматриваются квазианалитические функции в смысле Данжуа.

Как мы говорили выше, класс Данжуа  $C_{M_j}$  на отрезке  $[0, 1]$  - это класс бесконечно дифференцируемых функций  $f(x)$  таких, что  $|f^{(j)}(x)| \leq R^j \cdot M_j$ ,  $R$  - константа,  $M_j$  - последовательность чисел  $j = 0, 1, 2, \dots$ .

Удобно рассматривать этот класс на окружности

$$T : z = e^{2\pi it}, \quad t \in [0, 1]$$

предполагая

$$f(0) = f(1):$$

$$C_{M_j}(T) = \{ f \in C^\infty(T) : |f^{(j)}(t)| \leq R^j M_j \} ,$$

здесь  $R$  - константа,  $t \in T$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$

В работе Комана, Левенберга и Полетского доказана следующая теорема: пусть  $f : T \rightarrow \mathbb{C}$  квазианалитическая функция в смысле Данжуа. Тогда ее график  $\Gamma_f$  плюриполярен в  $\mathbb{C}^2$ .

Мы рассмотрим на остове

$$T^n \subset \mathbb{C}^n, \quad T^n = \{ z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_p| = 1, p = 1, 2, \dots, n \},$$

бесконечно дифференцируемую функцию  $f : T^n \rightarrow \mathbb{C}$ .

Класс

$$C_{M_j}(T^n) = \{ f \in C^\infty(T^n) : |f^{(\alpha)}(z)| \leq R^j M_j, |\alpha| = j, j = 1, 2, \dots \} \text{ называется}$$

классом квазианалитических функций в смысле Данжуа, если для любых двух функций  $f, g \in C_{\{M_j\}}(T^n)$  из условий

$$f^{(\alpha)}(z^0) = g^{(\alpha)}(z^0), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,$$

в некоторой точке  $z^0 \in T^n$ , вытекает

$$f(z) \equiv g(z).$$

Пусть  $M_j(f) = \max_{|\alpha|=j} \|f^{(\alpha)}(z)\|_{T^n}$ .

*Определение 1.* Функция  $f \in C^\infty(T^n)$  называется квазианалитическим в смысле Данжуа, если класс  $C_{\{M_j(f)\}}(T^n)$  является классом квазианалитических функций в смысле Данжуа.

Согласно теореме Карлемана функция  $f \in C^\infty(T^n)$  является квазианалитическим в смысле Данжуа, тогда и только тогда, когда

$$\int_1^\infty \frac{\ln \tau_f(r)}{r^2} dr = -\infty,$$

где

$$\tau_f(r) = \inf_{j \geq 0} \frac{M_j(f)}{r^j}.$$

Основным результатом в этом параграфе является:

*Теорема 4.* Пусть  $f : T^n \rightarrow \mathbb{C}$  квазианалитическая функция в смысле Данжуа. Тогда ее график  $\Gamma_f$  плюриполярен в  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

В параграфе 3.2 рассматривается класс Геврей.

*Класс Геврей.* Пусть  $\delta \geq 1$ . Если  $M_j \leq C^{j+1} j^{\delta j}$ , тогда соответствующий класс  $C_{M_j}(T^n)$  называется классом Геврей и обозначается через  $G^\delta$ .

Когда  $\delta = 1$  класс Геврей совпадает с классом аналитических функций. При  $\delta > 1$  класс  $G^\delta$  содержит ненулевую функцию такое, что  $f^{(\alpha)}(z_0) = 0$ ,  $|\alpha| = 0, 1, 2, \dots$  в некоторой точке  $z_0$ , т.е. класс  $G^\delta$  ( $\delta > 1$ ) содержит не квазианалитических функций.

*Теорема 5.* Пусть  $f : T^n \rightarrow \mathbb{C}$  бесконечно дифференцируемая функция. Если функция  $f$  принадлежит классу Геврей  $G^\delta$ , где  $1 \leq \delta < 2$ , то график функции  $\Gamma_f$  плюриполярен в  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

Четвертая глава диссертации, названная «**Квазигармонические функции**», посвящена изучению квазигармонических функций. Как известно, аналитические и гармонические функции в одномерном случае тесно связаны друг с другом: реальная часть аналитической функций является гармонической. Более того, их производные в фиксированной точке тоже связаны: если  $f = u + iv$  аналитическая в круге  $U(0, R)$ , то  $|D^\alpha u(z)| \leq R^j |f^{(j)}(z)|$ , где  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $j = \alpha_1 + \alpha_2$ ,  $D^\alpha$  – частные производные  $u$  порядка  $j$ .

В общем случае мы рассмотрим квазигармонические функции в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

Пусть  $K \subset \mathbb{R}^n$  - компактное множество и  $f(x) \in C(K)$ . Обозначим через

$$l_m(f, K) = \inf \|f(x) - q_m(x)\|_\infty$$

наименьшее отклонение функции от гармонических полиномов степени не выше  $m$  на компакте  $K$ . В работе Захарюты доказан аналог теоремы Бернштейна в классе гармонических функций: если

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} l_m^{1/m}(f, K) < 1, \quad (1)$$

то функция  $f$  гармонически продолжается на некоторую окрестность компакта  $K$ . Обратно, если функция  $f$  гармоническая в некоторой окрестности компакта  $K$ , то верно неравенство (1).

Обозначим через  $qh(K)$  класс таких функций  $f(x)$ , что

$$\underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} l_m^{1/m}(f, K) < 1.$$

Класс  $qh(K)$  назовем классом квазигармонических функций в смысле Бернштейна.

Основным результатом четвертой главы является:

*Теорема 6.* Пусть  $K \subset \mathbb{R}^n$   $H$  –регулярный компакт,  $f \in qh(K)$  и множество нулей  $E = \{x \in K : f(x) = 0\}$  не является  $N$  –множеством. Тогда  $f(x) \equiv 0$  на  $K$ .

Отметим, что  $N$  –множества в  $\mathbb{R}^n$  являются аналогами плюриполярных множеств из  $\mathbb{C}^n$ .

В параграфе 4.2. доказывается следующая теорема.

*Теорема 7.* Пусть  $K \subset \mathbb{R}^n$   $H$  –регулярный компакт и  $f \in qh(K)$ . Тогда график функции

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in K\}$$

содержится в счетном объединении  $N$  – множеств.

Отметим, что счетное объединение плюриполярных множеств в  $\mathbb{C}^n$  является плюриполярным. Нам ещё не известен ответ на аналогичный вопрос: является ли счетное объединение  $N$  –множеств в  $\mathbb{R}^n$  снова  $N$  –множеством.

Автор выражает глубокую благодарность академику А. С. Садуллаеву и профессору Н.Левенбергу за многократные обсуждения результатов и за ценные советы при завершении этой работы, а также научному руководителю, доктору физико-математических наук С. А. Имомкулову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В целом, полученные в диссертации результаты позволяют говорить о достижении целей диссертационной работы. Все основные результаты являются новыми.

В диссертации получены следующие результаты:

1. Доказана теорема единственности для класса квазианалитических функций многих переменных в смысле Гончара;
2. Доказана плюриполярность графиков квазианалитических функций в смысле Гончара;
3. Установлена плюриполярность графиков алгеброидных функций;
4. Доказана плюриполярность графиков квазианалитических функций многих переменных в смысле Данжуа;
5. Доказано плюриполярность графиков функций из класса Геврей;
6. Определено класс квазигармонических функций и доказана теорема «о тонкости» графиков квазигармонических функций.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREE  
PhD.28.12.2017.FM.55.01 URGENCH STATE UNIVERSITY AND  
KARAKALPAK STATE UNIVERSITY**

---

**URGENCH STATE UNIVERSITY**

**IBRAGIMOV ZAFAR SHAVKATOVICH**

**PLURIPOLARITY OF GRAPHS OF QUASIANALYTIC FUNCTIONS**

**01.01.01-Mathematical analysis**

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF  
PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

**URGENCH-2018**

**The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2018.1.PhD/FM49.**

Dissertation has been done at Urgench State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website ([www.ik-mat.urdu.uz](http://www.ik-mat.urdu.uz)) and the “Ziyonet” Information and educational portal ([www.ziyonet.uz](http://www.ziyonet.uz)).

**Scientific supervisor:** **Imomkulov Sevdiyor Akramovich**  
Doctor of Physical and Mathematical Sciences

**Official opponents:** **Khudaybergenov Gulmirza**  
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor  
**Prenov Barlikbay Barakbaevich**  
Candidate of Physical and Mathematical Sciences

**Leading organization:** **Samarkand State University**

Defense will take place « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018 at \_\_\_\_\_ at the meeting of Scientific Council number PhD.28.12.2017.FM.55.01 at Urgench State University. (Address: 14, Kh. Olimjan str., Urgench city, 220100, Uzbekistan, Phone: (+99862)-224-66-11, fax: (+99862)-224-67-00, e-mail: [ik-mat.urdu@umail.uz](mailto:ik-mat.urdu@umail.uz))

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Urgench State University (is registered № \_\_\_\_\_) (Address: 14, Kh. Olimjan str., Urgench city, 220100, Uzbekistan, Phone: (+99862)-224-66-11, fax: (+99862)-224-67-00, e-mail: [ursubox@gmail.com](mailto:ursubox@gmail.com))

Abstract of dissertation sent out on « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018 year

(Mailing report № \_\_\_\_\_ on « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2018 year)

**B. I. Abdullaev**  
Chairman of scientific council  
on award of scientific degrees,  
D.F.-M.S.

**A. A. Atamuratov**  
Scientific secretary of scientific council  
on award of scientific degrees, C.F.-M.S.

**A. B. Yakhshimuratov**  
Chairman of scientific Seminar under Scientific  
Council on award of scientific degrees,  
D.F.-M.S.

## INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

**The aim of research work** is to prove uniqueness theorem for the class of quasianalytic functions of several variables in the sense of Gonchar; to prove pluripolarity of graphs of quasianalytic functions in the sense of Gonchar; to show pluripolarity of graphs of algebroid functions; to prove uniqueness theorem for the class of quasianalytic functions of several variables in the sense of Denjoy; to define a class of quasiharmonic functions and prove a theorem about thinness of graphs.

**The object of the research work.** The dissertation is devoted to the study of pluripolarity of graphs of quasianalytic functions and uniqueness property of quasianaalytic functions.

**Scientific novelty of the research work.** All the results obtained in the dissertation are new and consist of the following:

- Uniqueness theorem for the class of quasianalytic functions of several variables in the sense of Gonchar is proved;
- Pluripolarity of graphs of quasianalytic functions in the sense of Gonchar is proved;
- Pluripolarity of graphs of algebroid functions is proved;
- Pluripolarity of graphs of quasianalytic functions of several variables in the sense of Denjoy is proved;
- Pluripolarity of graphs of functions from Gevrey class is proved;
- The class of quasiharmonic functions is defined and the theorem about thinness of graphs of functions from this class is proved.

**Implementation of the research results.** The results on pluripolarity of graphs of quasianalytic functions in sense of Gonchar and Denjou and uniqueness property were used in research projects: F4-FA-0-16928: “Property of pluriregularity in pluripotential theory and finite-difference equations with modified sources”. Using methods and results gives opportunity to describe pluripolar envelopes of sets and characterizing geometric properties of pluriregular compacts in complex spaces.

The results on pluripolarity of the graphs of quasianalytic functions of the dissertation were used in the implementation of the grant DMS - 1401316 of the National Scientific Foundation of the USA. Results of the research were presented in two workshops held in California State University.

**The structure and volume of the thesis.** The dissertation work consists: introduction, four chapters, conclusion and bibliography. The volume of the dissertation is 85 pages.

**ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ**  
**СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ**  
**LIST OF PUBLISHED WORKS**

**I бўлим (1 часть; part 1)**

1. Imomkulov S.A., Ibragimov Z.Sh. The class of quasiharmonic functions admitting best approximations by harmonic polynomials// Узбекский математический журнал, № 2, (2016), С. 72-78. (01.00.00; № 6).
2. Imomkulov S.A., Ibragimov Z.Sh. Pluripolarity of graphs of Denjoy quasianaalytic functions of several variables// Доклады АН РУз. № 2, (2014), С. 9-12. (01.00.00; № 7).
3. Imomkulov S.A., Ibragimov Z.Sh. Pluripolarity of graphs of Denjoy quasianaalytic functions of several variables// Journal of Analysis and Mathematical Physics, Volume 5, Issue 2, (2013), pp. 161-170. (№ 11, Springer. IF=0.632)
4. Имомкулов С.А., Ибрагимов З.Ш. Плюриполярность графиков функций из класса Геврей заданных на острове// Узбекский математический журнал, № 1, (2013), С. 53-64. (01.00.00; № 6).
5. Imomkulov S.A., Ibragimov Z.Sh. Uniqueness property of quasiharmonic functions// AAPP. Atti della Accademia Peloritana dei Pericolanti. Volume 92, Suppl. No. 1, (2014), pp. A2-1–5. (№ 3, Scopus CiteScore 0,32)
6. Имомкулов С.А., Ибрагимов З.Ш. Плюриполярность графиков квазианалитических функций в смысле Гончара// Математические заметки, Volume 89, № 4, (2011), С. 637-640 (№ 11, Springer. IF=0.484)
7. Ибрагимов З.Ш. Плюриполярность графиков алгеброидных функций// Доклады АН РУз. №6, 2010, С. 5-8. (01.00.00; № 7).

**II бўлим (2 часть; part 2)**

8. Ibragimov Z.Sh. Pluripolarity of graphs of quasianalytic functions of several complex variables// Proceeding of the first USA-Uzbekistan Conference on Analysis and Mathematical Physics, Contemporary Mathematics, American Math. Soc., Volume 662, (2016), pp. 51-69.
9. Imomkulov S.A., Ibragimov Z.Sh. Pluripolarity of graphs of quasianalytic functions of several variables in the sense of Gonchar// The journal of analysis. Volume 18, (2010), pp. 233-238. (№ 11, Springer).
10. Имомкулов С.А., Ибрагимов З.Ш. Квазианалитические функции Гончара// Сборник трудов межд. конференции. - Красноярск, Россия. 2009. – С. 20-21.
11. Z.Sh.Ibragimov, S.A.Imomkulov. Quasianalytic functions of several variables in the sense of Gonchar// Abstracts of ICM. Hyderabad, India. 2010. p. 208.
12. Imomkulov S.A., Ibragimov Z.Sh. Theorem of uniqueness for quasianalytic functions of several variables in the sense of Gonchar// Abstracts of AMS meeting. April 30 – May 01, 2011. – Las-Vegas, USA, 2011. – p. 62.

13. Имомкулов С.А., Ибрагимов З.Ш. Свойство единственности квазигармонических функций// Материалы Республиканской конференции «Современные проблемы комплексного и функционального анализа», 11-12 май 2012. – Нукус, 2012. – С. 86.
14. Имомкулов С.А., Ибрагимов З.Ш. Теорема «о тонкости» графиков квазигармонических функций// Тезисы докладов Республиканской научной конференции «Операторные алгебры и смежные проблемы», 12-14 сентябрь 2012. – Ташкент. – С. 145-146.
15. Имомкулов С.А., Ибрагимов З.Ш. Плюриполярность графиков функций из класса Геврей заданных на остоле// Материалы Республиканской научной конференции «Актуальные проблемы математического анализа», 9-10 ноябрь 2012. – Ургенч. – С. 94-95.
16. Imomkulov S.A., Ibragimov Z.Sh. The class of quasiharmonic functions admitting best approximations by harmonic polynomials// Тезисы докладов научной конференции с участием зарубежных ученых «Проблемы современной топологии и её приложения», 5-6 май 2016. – Ташкент. С. 57-59.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари  
«Ўзбекистон математика журналы» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди.

Босишга рухсат этилди: «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 йил  
Бичими 60x45 <sup>1</sup>/<sub>8</sub>, «Times New Roman»  
гарнитурда рақамли босма усулида босилди.  
Шартли босма табоғи 5. Адади: 100. Буюртма: № \_\_\_\_\_.

Урганч давлат университети  
Урганч ш., Ҳ.Олимжон кўчаси, 14 уй

«ТАҲРИРИЯТ - МАТБАА»  
бўлимида чоп этилди.