МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ЦЕНТР СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО,
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Э. М. Сайдаматов, А. К. Аманов,
А. С. Юнусов, С. С. Ходжабагян

АЛГЕБРА И ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Часть I

Учебное пособие
для учащихся академических лицеев
с углубленным изучением математики

Издание четвертое

ИЗДАТЕЛЬСКО-ПОЛИГРАФИЧЕСКИЙ
ТВОРЧЕСКИЙ ДОМ «O'QITUVCHI»
ТАШКЕНТ — 2009

ББК 22.14я722+22.161я722

Данное издание — победитель Республиканского конкурса в 2008 г. „Лучший учебник года“.

Рецензенты: доктор физико-математических наук, профессор УзНУ имени М. Улугбека *О. Р. Холмухамедов*; кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математики лицея при ТАСИ *М. Маматкулов*; заведующая кафедрой математики академического лицея при ТашИИТ *Н.Э. Абдурахимова*; преподаватели математики Ташкентского профессионального колледжа железнодорожного транспорта *С. Х. Носиров, Х. Ю. Юнусбеков.*

Под общей редакцией *Э. М. Сайдаматова*

С $\frac{1602040000-95}{353(04)-09}$ бл. - заказ - 2009

ISBN 978-99-43-02-077-1

ОТ АВТОРОВ

Настоящее учебное пособие «Алгебра и основы математического анализа», часть I написано в соответствии с учебной программой, утвержденной Министерством высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан и Центром среднего специального, профессионального образования 11 августа 2000 г., и предназначено для организации учебного процесса в академических лицеях с углубленным изучением математики.

Книга создана на основе опыта преподавания математики в академических лицеях при Ташкентском институте инженеров транспорта (ТашИИТ), Ташкентском архитектурно-строительном институте (ТАСИ), Ташкентском университете информационных технологий (ТУИТ) и является первым учебным пособием по алгебре и основам математического анализа, написанным на русском языке и соответствующим новой учебной программе.

Часть I состоит из 8 глав:

Глава I. Элементы теории множеств и математической логики;
Глава II. Действительные числа;
Глава III. Комплексные числа и действия над ними;
Глава IV. Многочлены;
Глава V. Алгебраические выражения;
Глава VI. Алгебраические уравнения и неравенства;
Глава VII. Функция и ее график;
Глава VIII. Степенная, показательная и логарифмическая функции.

Каждая глава разбита на параграфы, параграфы — на пункты. Наряду с изложением соответствующих определений, правил и теорем большое внимание в каждом пункте уделено разбору примеров, иллюстрирующих содержание рассматриваемой темы. В конце каждого параграфа даны вопросы на повторение и упражнения. Упражнения разделены на две части горизонтальной чертой. Те упражнения, которые приведены после горизонтальной черты, предназначены для самостоятельной работы. В конце каждой главы даны также упражнения для повторения. Упражнения повышенной сложности отмечены звездочкой. Ответы и указания к упражнениям приведены в конце книги.

Авторы стремились к повышенному уровню строгости и, в то же время, доступному изложению материала. При этом, несомненно, на стиль изложения и качество учебного пособия заметное влияние оказали признанные учебники по алгебре и началам анализа.

Главы I, II написаны доцентом *А. Юнусовым* (ТГПУ имени Низами), главы III–V — *С. Ходжабагяном* (ТУИТ), глава VI — доцентом *А. Амановым* (ТАСИ) и главы VII, VIII — доцентом *Э. Сайдаматовым* (УзНУ имени Мирзо Улугбека).

Авторы выражают свою искреннюю признательность за ценные замечания и советы доктору физико-математических наук, профессору УзНУ имени М.Улугбека *О. Р. Холмухамедову*, кандидату физико-математических наук, заведующему кафедрой математики лицея при ТАСИ *М. Маматкулову*, заведующей кафедрой математики академического лицея при ТашИИТе *Н. Э. Абдурахимовой*, преподавателям математики Ташкентского профессионального колледжа железнодорожного транспорта *С. Х. Носирову* и *Х. Ю. Юнусбекову*.

Авторы надеются, что данное учебное пособие послужит для учащихся хорошим и удобным средством на пути познания основ алгебры и математического анализа.

Мы будем также признательны всем читателям, приславшим свои замечания.

СПИСОК НЕКОТОРЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

N — множество натуральных чисел

Z — множество целых чисел

Q — множество рациональных чисел

R — множество действительных чисел

$\varnothing$ — пустое множество

$a \in M$ — элемент a принадлежит множеству M

$\{a, b, c, d\}$ — множество, состоящее из элементов a, b, c, d

$\bigcup$ — знак объединения

$\bigcap$ — знак пересечения

$A \subset B$ — множество A является подмножеством множества B

$[a; b]$ — замкнутый промежуток (отрезок) с началом a и концом b

$(a; b)$ — открытый промежуток с началом a и концом b

$[a; +\infty)$ — бесконечный промежуток с началом a

$A \Rightarrow B$ — из A следует B

$A \Leftrightarrow B$ — из A следует B и, обратно, из B следует A

$a = b$ — a равно b

$a > b$ — a больше b

$a < b$ — a меньше b

$a \geq b$ $(a \leq b)$ — a не меньше (не больше) b

$a \neq b$ — a не равно b

$A \equiv B$ — A тождественно равно B

ОДЗ — область допустимых значений

НОД $(a; b)$ — наибольший общий делитель чисел a и b

НОК $(a; b)$ — наименьшее общее кратное чисел a и b

$|a|$ — абсолютная величина числа a

$[a]$ — целая часть числа a

$\{a\}$ — дробная часть числа a

$\min(a; b)$ — наименьшее из чисел a и b

$\max(a; b)$ — наибольшее из чисел a и b

$\overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$ — позиционная запись натурального числа

$\sqrt[n]{a}$ — корень n-й степени из числа a

$\log_a b$ — логарифм числа b по основанию a

$\lg b$ — логарифм числа b по основанию 10

$\ln b$ — логарифм числа b по основанию e

$e = 2{,}87 \dots$

$\pi = 3{,}1415 \dots$ — отношение длины окружности к ее диаметру

i — мнимая единица $(i^2 = -1)$

$\operatorname{Re} z$ — действительная часть комплексного числа z

$\operatorname{Im} z$ — мнимая часть комплексного числа z

$\bar{z}$ — число, сопряженное числу z

$\operatorname{Arg} z$ — аргумент комплексного числа z

$\arg z$ — главное значение аргумента комплексного числа z

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

A_m^n — число размещений из n элементов по m

C_m^n — число сочетаний из n элементов по m

P_m — число перестановок из m элементов

$[$ — знак совокупности

$\{$ — знак системы

$\rceil$ — знак отрицания

$\vee$ — знак дизъюнкции

$\wedge$ — знак конъюнкции

$\forall$ — квантор общности

$\exists$ — квантор существования

$D(f)$ — область определения функции f

$E(f)$ — область значений функции f

ГЛАВА I

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

§ 1. Элементы теории множеств

1. Понятие множества. Множество является одним из начальных понятий всей математики. Оно используется для описания совокупности предметов или объектов. Например, можно говорить о множестве всех учащихся данного учебного заведения; о множестве всех треугольников на плоскости. Объекты или предметы, которые составляют множества, называются *элементами* множества.

Множества обычно обозначаются заглавными буквами $A, B, \ldots, X, \ldots$. Если a является элементом множества A, то пишут $a \in A$; если же a не является элементом множества A, то пишут $a \notin A$. Например, если Z — множество всех целых чисел, то верны следующие отношения:

$$3 \in Z, -5 \in Z, \frac{1}{3} \notin Z, \sqrt{3} \notin Z.$$

Обычно, множество задается указанием всех элементов или указанием характеристического свойства, которым обладают все элементы рассматриваемого множества. Пусть множество A состоит только из элементов a, b, c. Тогда элементы множества A будем заключать в фигурные скобки и писать $A = \{a, b, c\}$. При этом порядок расположения элементов не имеет никакого значения. Множество A всех элементов со свойством $P(x)$ обозначим через $A = \{x \mid P(x)\}$.

В большинстве случаев характеристическое свойство элементов данного множества, т. е. $P(x)$ формулируется словами. Например, множество корней уравнения $4x^2 + 6x - 8 = 0$ или область определения функции $y = \log_2 (x^2 - 1)$. Может оказаться, что множество определено таким свойством, которым не обладает ни один объект. Например, множество рациональных чисел, квадрат которых равен 3; множество действительных чисел, которые являются корнями уравнения $x^2 + 2 = 0$.

Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется *пустым множеством* и обозначается через $\varnothing$.

Множество, которое содержит конечное число элементов, называется *конечным множеством*.

Множество, число элементов которого не является конечным, называется *бесконечным множеством*.

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что множество A является *подмножеством* множества B . И этот факт обозначают в виде $A \subset B$.

Два множества A и B называются равными, если каждый из них является подмножеством другого. Из этого определения следует, что равные множества состоят из одних и тех же элементов.

Если множество A равно множеству B, то пишут $A = B$.

В математике очень часто приходится иметь дело с числовыми множествами, т. е. с множествами, элементами которых являются числа. Для некоторых из них приняты стандартные обозначения: N — множество всех натуральных чисел; Z — множество всех целых чисел; Q — множество всех рациональных чисел; R — множество всех действительных чисел.

В дальнейшем, через $[a, b]$ будем обозначать промежуток (отрезок) на действительной прямой, определяемый неравенствами $a \le x \le b$. Другими словами, $[a, b]$ – множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \le x \le b$. Через $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) обозначим соответственно промежутки, определяемые неравенствами $a < x \le b$; $a \le x < b$; $a < x < b$. Эти промежутки геометрически могут быть изображены соответственно следующим образом:

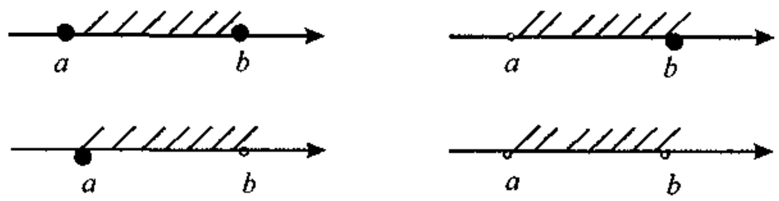


Рис. 1

Через $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ обозначим бесконечные промежутки на действительной прямой, которые задаются неравенствами: $x > a$, $x \ge a$, $x < b$, $x \le b$. Их геометрически можно изобразить следующим образом:

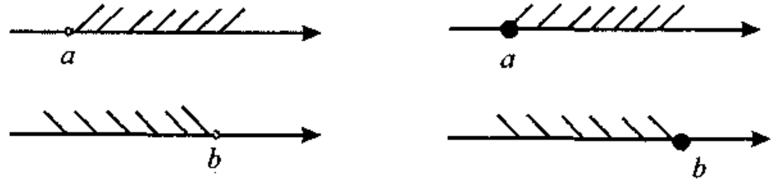


Рис. 2

Действительную прямую обозначим через $(-\infty, +\infty)$.

2. Операции над множествами. *Пересечением множеств* A и B называется множество, которое состоит из элементов, принадлежащих каждому из множеств A и B. Пересечение множеств A и B обозначается через $A \cap B$.

П р и м е р 1. Пусть $A = \{0, 1, 3, 6\}$, $B = \{3, 6, 7, 8\}$. Тогда $A \cap B = \{3, 6\}$.

П р и м е р 2. Пусть A — отрезок $[-3, 3]$, B — промежуток $(0, 6]$. Тогда $A \cap B = (0, 3]$ (рис.3).

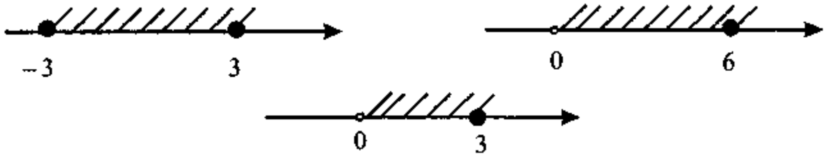


Рис. 3

Пусть даны множества A и B. Множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих множеству A или множеству B, называется *объединением этих множеств* и обозначается через $A \cup B$.

П р и м е р 3. Пусть $A = \{5, 6, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 12, 13\}$. Тогда $A \cup B = \{5, 6, 1, 2, 3, 12, 13\}$.

П р и м е р 4. Пусть A — отрезок $[3, 5]$, B — промежуток $(4, 6]$. Тогда $A \cup B$ является отрезком $[3, 6]$ (рис. 4).

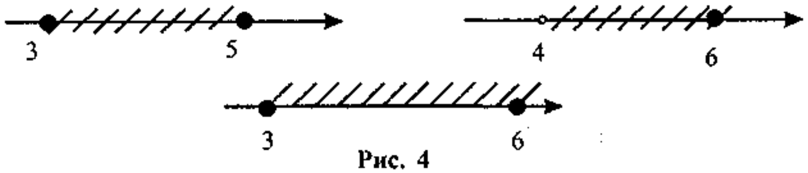


Рис. 4

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A, которые не являются элементами множества B. Разность множеств A и B обозначается как $A \setminus B$.

П р и м е р 5. Пусть $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $B = \{1, 2, \alpha, \beta\}$. Тогда элементы $\gamma, \delta \in A$ и $\gamma, \delta \notin B$. Следовательно, $A \setminus B = \{\gamma, \delta\}$.

В некоторых разделах математики приходится ограничиваться рассмотрением некоторого множества и всевозможных подмножеств этого множества. Например, в планиметрии мы изучаем плоские фигуры, которые являются подмножествами плоскости.

Если мы ограничиваемся рассмотрением всевозможных подмножеств некоторого множества E, то в этом случае множество E называют *универсальным множеством*.

Пусть множество E — универсальное множество и множество A — подмножество множества E. Тогда множество $E \setminus A$ называется *дополнением* множества A до множества E или просто дополнением множества A и обозначается через A' или $\overline{A}$ (или же через CA).

Свойства операций над множествами:

1°. $A \cup A = A$ — идемпотентность объединения;

2°. $A \cap A = A$ — идемпотентность пересечения;

3°. $A \cup B = B \cup A$ — коммутативность объединения;

4°. $A \cap B = B \cap A$ — коммутативность пересечения;

5°. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ — ассоциативность объединения;

6°. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ — ассоциативность пересечения;

7°. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ — дистрибутивность объединения относительно пересечения;

8°. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ — дистрибутивность пересечения относительно объединения;

$$\left.\begin{array}{l} 9^\circ.\ A \cup E = E \\ 10^\circ.\ A \cap E = A \end{array}\right\} \text{свойства универсального множества;}$$

$$\left.\begin{array}{l} 11^\circ.\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \\ 12^\circ.\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \end{array}\right\} \text{законы де Моргана.}$$

Доказательства этих свойств проводятся непосредственной проверкой. Для примера докажем свойство 8°, т. е. свойство $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Пусть x — любой элемент множества $A \cap (B \cup C)$. Тогда по определению операции пересечения множеств, $x \in A$ и $x \in (B \cup C)$. Теперь, применяя определение операции объединения множеств, имеем: $x \in A$ и $x \in B$ или $x \in C$. Отсюда $x \in A \cap B$ или $x \in A \cap C$, т. е. $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Следовательно,

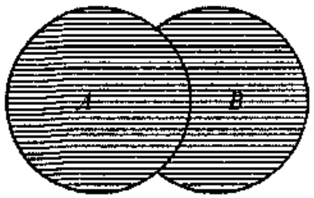
$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Аналогично доказывается, что если $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, то $x \in A \cap (B \cup C)$, т. е.

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C).$$

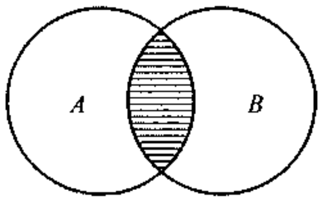
Таким образом, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

3. Диаграммы Эйлера–Венна. Для графического изображения множеств, операций над ними и их свойств используются диаграммы на плоскости (диаграммы Эйлера — Венна). При этом множество изображается некоторой сплошной фигурой, обычно кругом, а универсальное множество — прямоугольником. Пересечение кругов рассматривается как пересечение множеств, объединение кругов — как объединение множеств. Например:



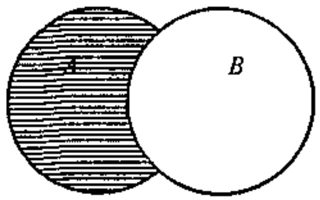
$A \cup B$

Рис. 5



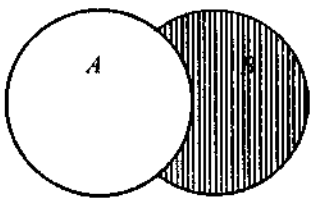
$A \cap B$

Рис. 6



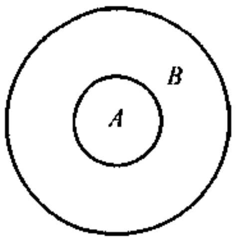
$A \setminus B$

Рис. 7



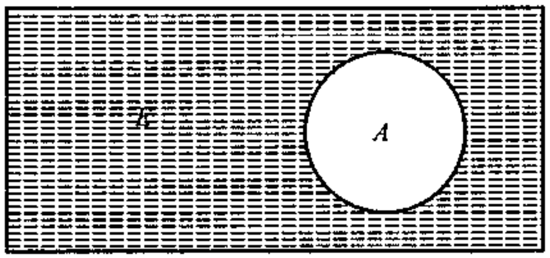
$B \setminus A$

Рис. 8



$A \subset B$

Рис. 9



$E \setminus A$

Рис. 10

На рисунках 5–8 изображены объединение, пересечение, разность двух множеств. Рисунок 9 означает, что множество A является подмножеством множества B. Универсальное множество E изображается множеством точек некоторого прямоугольника. Дополнение множества A изображено на рисунке 10 как заштрихованная часть прямоугольника.

Вопросы и задания

1. Какое множество называется пустым?
2. Какие множества называются равными?
3. Что называется пересечением, объединением, разностью двух множеств?
4. Перечислить свойства операций над множествами.
5. Построить диаграмму для множества $A \cap (B \cup C)$.

Упражнения

1. Изобразить на координатной плоскости множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют следующим условиям:

а) $|x + y| \le 1$; *б)* $|x + y| \ge 1$.

2. В группе туристов из 30 человек 20 человек знают английский язык, 8 человек — французский, 6 человек — оба языка. Сколько туристов не знают оба языка?

3* Записать в виде множества те значения x, при которых имеют смысл выражения:

а) $f(x) = \sqrt{5 + x} + \sqrt{5 - x}$; *г)* $f(x) = \log_x (x^2 - 1)$;

б) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{1 - |x|}}$; *д)* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 6}}{\log_3 (10 - x)}$.

в) $f(x) = \sqrt{3^x - 5^x}$;

4. Привести примеры на: *а)* $A \cap B = \varnothing$; *б)* $A \cup B = N$; *в)* $A \cap B = B$.

5. Пусть $A = [2, 4]$, $B = (0, 5]$, $C = [-3, 2)$. Найти множества и изобразить их на координатной прямой:

а) $A \cup B$; *б)* $A \cap B$; *в)* $(A \cup B) \cap C$.

6. Множества A и B являются подмножествами универсального множества E. Составить диаграммы Эйлера–Венна для следующих множеств:

а) $A \cup \overline{B}$; *б)* $\overline{A} \cup \overline{B}$; *в)* $\overline{A \cap \overline{B}}$; *г)* $\left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)$.

7. Найти множество всех значений выражений:

а) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$; *б)* $f(x) = \sin x + 3\cos x$; *в)* $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

8. Доказать тождество: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

9*. Пусть A и B — конечные множества. Доказать, что $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, где $n(M)$ — число элементов множества M.

---

10. Изобразить на координатной плоскости множество точек (x, y), координаты которых удовлетворяют следующим условиям:

а) $|x| + |y| = 1$; б) $x^2 - 2x + y \leq 0$.

11*. Записать в виде множества те значения x, при которых имеют смысл выражения:

а) $f(x) = \dfrac{\log_{3x} 3}{\arccos(3x-1)}$; в) $f(x) = \log_{(x^2-1)} 8$.

б) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$;

12. Привести примеры на: а) $A \cup B = A$; б) $A \cap B = A \cup B$.

13. Пусть $A = [2, 4]$, $B = (0, 5]$, $C = [-3, 2)$. Найти множества и изобразить их на координатной прямой:

а) $A \cap C$; б) $B \cup C$; в) $A \cap B \cap C$.

14. Множества A и B являются подмножествами универсального множества E. Составить диаграммы Эйлера–Венна для следующих множеств:

а) $\overline{A \cup B}$; б) $\overline{A} \cap B$; в) $\overline{A \cap B}$.

15*. Найти множество значений следующих выражений:

а) $f(x) = \sqrt{2x - x^2 - 1}$;

б) $f(x) = a \sin\alpha + b\cos\alpha$;

в) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$.

16. Доказать следующее тождество: $B \cap (A \setminus B) = \varnothing$.

17*. Доказать, что число различных подмножеств множества, состоящего из n элементов, равно 2^n.

§ 2. Элементы теории математической логики

1. Высказывания и операции над ними. Под высказыванием понимают повествовательное предложение, о котором можно сказать точно, истинно оно или ложно. Легко понять, что следующие предложения являются высказываниями:

1. Ташкент — столица Республики Узбекистан.
2. Семь — простое число.
3. Число 6 больше, чем число 8.
4. $\sqrt{4} = 2$.
5. Число 11 — составное число.

Ясно, что предложения 1, 2, 4 — истинные, а предложения 3, 5 — ложные.

Высказывания могут быть образованы посредством слов или символов. Восклицательные и вопросительные предложения высказываниями не являются. Кроме того, повествовательные предложения, о которых нельзя говорить истинны они или ложны, также не являются высказываниями. Например, предложения:

1) Доброе утро, дорогие телезрители!
2) Сегодня какое число?
3) x — простое число,

высказываниями не являются.

Обычно высказывания обозначаются заглавными буквами латинского алфавита. Например, будем писать $A \rightleftarrows$ «$6 < 3$», $B \rightleftarrows$ «5 — простое число». Это значит, что A — высказывание, утверждающее, что 6 меньше чем 3. B — высказывание, гласящее, что 5 — простое число. Эти высказывания являются примерами простых высказываний. С помощью логических связок «или», «и», «если ... , то ...», «... тогда и только тогда, когда ...» , «не ...» из простых высказываний A и B можно образовывать другие сложные высказывания. Например:

1) $C \rightleftarrows$ «$6 < 3$ или 5 — простое число»;
2) $D \rightleftarrows$ «$6 < 3$ и 5 — простое число»;
3) $E \rightleftarrows$ «если $6 < 3$, то 5 — простое число»;
4) $F \rightleftarrows$ «$6 < 3$ тогда и только тогда, когда 5 — простое число»;
5) $K \rightleftarrows$ «5 — не простое число».

В математической логике истинность или ложность сложных высказываний устанавливается независимо от смыслового содержания простых высказываний, а логическим связкам дается точный смысл. Приступим к точному определению логических связок.

Пусть даны высказывания A и B. Тогда их *конъюнкцией* называется высказывание, которое является истинным, когда истинны оба высказывания A и B, и является ложным во всех остальных случаях.

Конъюнкция двух высказываний A , B обозначается через $A \wedge B$ или A & B и читается как «A и B». Значения логической операции «конъюнкция» можно выразить с помощью следующей таблицы, где «И» — означает «истинно», «Л» — означает «ложно»:

A	B	A ∧ B
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

В дальнейшем, такие таблицы будем называть таблицами истинности. Если в таблице истинности значение «И» заменить на 1, а значение «Л» на 0, то таблица истинности примет вид:

A	B	A ∧ B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Видно, что значение высказывания $A \wedge B$ соответствует произведению значений высказываний A и B. Поэтому $A \wedge B$ иногда называют *логическим умножением* (и обозначают через $A \cdot B$).

Дизъюнкцией высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое через $A \vee B$, которое ложно, когда оба высказывания A и B ложны и истинно во всех остальных случаях. Запись $A \vee B$ читается как «A или B».

В математической литературе дизъюнкцию высказываний A и B иногда обозначают через $A + B$ и называют *логическим сложением*.

Приведем таблицу истинности для логической операции «дизъюнкция»:

A	B	A ∨ B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Отрицанием высказывания называется высказывание, которое истинно, когда само высказывание ложное и ложно, когда исходное высказывание истинно. Отрицание высказывания A обозначается через $\rceil A$ и читается как «не A».

Отрицание высказывания выражается в таблице истинности следующим образом:

A	⌉A
И	Л
Л	И

Пусть даны высказывания A и B. *Импликацией* высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое через $A \Rightarrow B$, которое является ложным, когда A истинно, а B ложно и истинным во всех остальных случаях. Приведем таблицу истинности для $A \Rightarrow B$:

A	B	A ⇒ B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Таким образом, высказывание, утверждающее, что из лжи следует ложь или истина, является истинным высказыванием. Но высказывание, утверждающее, что из истины следует ложь, является ложным высказыванием.

$A \Rightarrow B$ читается как «если A, то B» или «из A следует B».

Пусть даны высказывания A и B. *Эквиваленцией* высказываний A и B называется высказывание, которое является истинным тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B истинны или когда оба высказывания A и B ложны. Эквиваленцию высказываний A и B обозначают как «$A \Leftrightarrow B$» и читают «A тогда и только тогда, когда B». Приведем таблицу истинности для $A \Leftrightarrow B$:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

П р и м е р 1. Определить значение истинности следующих высказываний:

1) 7 — простое число и 9 — простое число;
2) 7 — простое число или 9 — простое число;
3) если $2 \cdot 2 > 4$, то 9 — простое число;
4) $2 \cdot 2 \le 5$ тогда и только тогда, когда 9 — нечетное число.

Р е ш е н и е:

1) «7 — простое число» — истинное высказывание, «9 — простое число» — ложное высказывание. Поэтому в силу определения, конъюнкция этих высказываний является ложным высказыванием;

2) по определению дизъюнкции данное высказывание является истинным;

3) «$2 \cdot 2 > 4$» — ложное высказывание. Следовательно, по определению импликации, высказывание является истинным;

4) «$2 \cdot 2 \le 5$» — истинное высказывание и «9 — нечетное число» — истинное высказывание. Тогда по определению эквиваленции, высказывание является истинным.

П р и м е р 2. Установить, какие пары следующих высказываний являются отрицанием друг друга:

1) $2 > 0$, $2 < 0$;
2) $6 < 10$, $6 \ge 10$.

Р е ш е н и е. 1) Отрицанием высказывания $2 > 0$ является высказывание $\rceil(2 > 0)$. Это означает, что 2 не больше, чем 0, т. е. $2 \le 0$. Поэтому $2 < 0$ не является отрицанием высказывания $2 > 0$.

2) $\rceil(6 < 10)$ означает, что 6 не меньше, чем 10. Следовательно, $\rceil(6 < 10)$ равносильно тому, что $6 \ge 10$. Обратно, $\rceil(6 \ge 10)$ означает $6 < 10$. Поэтому данные высказывания являются отрицаниями друг друга.

С помощью логических операций над высказываниями из заданных высказываний можно строить различные сложные высказывания. При этом порядок выполнения операций указывается скобками. Например, с помощью высказываний A, B, C и с помощью логических операций можно построить следующие высказывания:

$$(A \wedge B) \Rightarrow \rceil(C \vee B) \text{ или } A \Leftrightarrow \rceil((B \wedge C) \vee A).$$

Такие сложные высказывания называются *формулами*.

Для упрощения записи формул можно ввести следующее соглашение. Логические операции выполняются в следующем порядке: сначала отрицание, потом конъюнкция, после этого дизъюнкция, затем импликация и, наконец, выполняется эквиваленция. Лишние скобки можно опустить согласно порядку выполнения операций. В связи с этим соглашением, последние формулы можно записать в виде:

$$A \wedge B \Rightarrow \rceil(C \vee B) \text{ или } A \Leftrightarrow \rceil(B \wedge C \vee A).$$

Высказывания, которые составляют формулу, будем называть элементарными формулами или *переменными высказываниями*. Они принимают значения 0 или 1.

Две формулы Б и В называются *равносильными*, если они принимают одинаковые значения истинности при любом наборе истинностных значений переменных высказываний. Равносильность записывается как «Б ≡ В».

П р и м е р 3. $\rceil\rceil A \equiv A$, $A \vee A \equiv A$.

Для доказательства равносильности формул обычно используют таблицы истинности. Для вышеуказанных формул приведем таблицу истинности:

A	$\rceil$A	$\rceil\rceil$A	$A \vee A$
И	Л	И	И
Л	И	Л	Л

Формулы, которые при любом наборе истинностных значений переменных высказываний принимают значение «истинно» называются *тождественно истинными формулами* или *логическими законами* (*тавтологиями*).

П р и м е р 4. $A \vee \overline{A}$ — эта формула при любом значении переменного высказывания A принимает значение истинности «истинно». Действительно, если

$A = 1$, то $A \vee \overline{A} = 1 \vee 0 = 1$. Если же $A = 0$, то $A \vee \overline{A} = 0 \vee 1 = 1$.

Формула $A \vee \overline{A}$ называется *законом исключения третьего*.

Формулы, принимающие значение «ложь» при любом наборе истинностных значений переменных высказываний, называются *тождественно ложными* или *противоречиями*.

П р и м е р 5. $A \wedge \overline{A}$ — эта формула принимает значение «ложь» при любом значении истинности переменного высказывания A. Действительно, если $A = 1$, то $A \wedge \overline{A} = 1 \wedge 0 = 0$. Если же $A = 0$, то вновь получаем $A \wedge \overline{A} = 0 \wedge 1 = 0$.

2. Понятие предиката. Рассмотрим повествовательное предложение, которое зависит от переменных. Например, «x — простое число». Если вместо x подставить число 5, то получим высказывание «5 — простое число», которое истинно. Если же вместо x подставить число 4, то получим высказывание «4 — простое число», которое ложно.

Предложения, зависящие от переменной x и превращающиеся в высказывания при замене переменного на их конкретные значения, называются *предикатами* от одной переменной. Предикаты от одной переменной x обычно обозначаются через $P(x)$, $Q(x)$, $Q_1(x)$, ... , $Q_n(x)$ и т. д. Множество значений переменной x называется *областью определения предиката*.

П р и м е р 6. Пусть для любого x из N $P(x)$ означает «$x \geq 4$». Тогда $P(1) = 0$, $P(2) = 0$, $P(3) = 0$, $P(4) = 1$, $P(5) = 1$ и т. д. Если a натуральное число не меньшее, чем 4, то $P(a) = 1$.

П р и м е р 7. Пусть для любого x из N $Q(x)$ означает «x — четное число». Тогда $Q(1) = 0$, $Q(2) = 1$, $Q(3) = 0$, $Q(4) = 1$ и т. д. Для любого натурального числа k, $Q(2k) = 1$, $Q(2k - 1) = 0$.

3. Кванторы всеобщности и существования. Пусть $P(x)$ некоторый предикат, определенный на множестве M. Тогда через $\forall x\, P(x)$ записывают высказывание, которое истинно, если для всех a из M высказывание $P(a)$ истинно, (т. е. $P(a) = 1$). В противном случае, когда существует хотя бы один элемент x_0 из множества M такой, что $P(x_0) = 0$, $\forall x\, P(x)$ — ложное высказывание. $\forall x\, P(x)$ — читается как «любой x $P(x)$» или «для каждого x $P(x)$».

П р и м е р 8. Пусть для любого натурального числа x $P(x)$ — означает, что «x — нечетное число». Тогда $\forall x\, P(x)$ — является ложным высказыванием, так как существует такое натуральное число, например, $x = 2$, что $P(2) = 0$.

П р и м е р 9. Пусть $Q(x)$ — означает «для каждого натурального x, $2x$ — четное число». Тогда очевидно, что $\forall x\, Q(x) = 1$.

Через $\exists x\, F(x)$ — обозначают высказывание, которое является истинным, когда существует хотя бы один x_0 из области определения предиката $F(x)$, для которого $F(x_0)$ является истинным высказыванием. $\exists x\, F(x)$ является ложным в противном случае, т. е., когда для каждого элемента a из области определения предиката $F(x)$, $F(a) = 0$.

П р и м е р 10. Пусть для каждого натурального числа x $P(x)$ — означает «x делится без остатка на 3». Тогда $\exists x\, P(x) = 1$. Действительно, если $x = 3$, то $P(x) = 1$.

П р и м е р 11. Пусть предикат $P(x)$ означает «x — четное простое число, отличное от 2». Поскольку все простые числа, кроме 2, являются нечетными, то $\exists x\, P(x) = 0$.

Вопросы и задания

1. Что понимается под высказыванием?
2. Дать определение конъюнкции, дизъюнкции, отрицания, импликации и эквиваленции высказываний.
3. В каком порядке выполняются логические операции?
4. Какие формулы называются равносильными?
5. Что такое тавтология?
6. Что такое предикат?
7. Что означает квантор существования, квантор всеобщности?

Упражнения

1. Сформулировать отрицание следующих высказываний. Указать значения истинности данных высказываний и их отрицаний:
а) число 28 не делится на число 7; *б*) $4 \leq 5$.

2. Установить, какие из высказываний в следующих парах являются отрицаниями друг друга, а какие — нет (объяснить почему):
а) $4 < 0$ и $4 > 0$;
б) «Треугольник ABC — прямоугольный» и «Треугольник ABC — тупоугольный»;
в) «Функция f нечетна» и «Функция f четна»;
г) «Все простые числа нечетны» и «Существует простое четное число»;
д) «Существуют иррациональные числа» и «Все числа рациональные».

3. Следующие высказывания записать без знака отрицания:

а) $\rceil(a < b)$; б) $\rceil(a \le b)$.

4. Сформулировать и записать в виде конъюнкции или дизъюнкции условие истинности каждого предложения (a и b — действительные числа):

а) $a \cdot b \ne 0$; в) $|a| = 3$; д) $\frac{a}{b} \ne 0$.
б) $a^2 + b^2 = 0$; г) $|a| > 3$;

5. Определить значения истинности следующих высказываний:
а) если 12 делится на 6, то 12 делится на 3;
б) если 11 делится на 6, то 11 делится на 3;
в) если 15 делится на 6, то 15 делится на 3;
г) если 15 делится на 3, то 15 делится на 6.

6. Доказать, что следующие формулы выполнимы:
а) $\rceil(P \Rightarrow \rceil P)$;
б) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$;
в) $(Q \Rightarrow (P \wedge R)) \wedge \rceil((P \vee R) \Rightarrow Q)$.

7. Составить таблицы истинности для следующих формул и указать, какие из формул являются выполнимыми, какие — тождественно истинными (тавтологиями) и какие — тождественно ложными (противоречиями):
а) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\rceil A \Leftrightarrow \rceil B)$;
б) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;
в) $A \wedge (B \wedge (\rceil A \vee \rceil B))$.

8. Составив таблицы истинности, доказать, что следующие формулы являются тавтологиями:
а) $\rceil(P \wedge \rceil P)$ (закон отрицания противоречия);
б) $\rceil\rceil P \Leftrightarrow P$ (закон двойного отрицания).

9. Составив таблицы истинности, доказать следующие равносильности:
а) $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$;
б) $A \Rightarrow B \equiv \rceil A \vee B$;
в) $\rceil(A \wedge B) \equiv \rceil A \vee \rceil B$;
г) $\rceil(A \vee B) \equiv \rceil A \wedge \rceil B$.

---

10. Сформулировать отрицание следующих высказываний и указать значения истинности данных высказываний и их отрицаний:
а) $6 > 3$; б) все простые числа нечетны.

11. Установить, какие из высказываний в следующих парах являются отрицаниями друг друга, а какие — нет (объяснить почему):
а) $6 < 9$ и $6 \ge 9$;
б) «Натуральное число n четно» и «Натуральное число n нечетно»;
в) «Все простые числа нечетны» и «Все простые числа четны»;
г) «Человеку известны все виды животных, обитающих на Земле» и «На земле существует вид животных, не известный человеку».

12. Записать без знака отрицания следующие высказывания:
а) $\rceil(a \ge b)$; б) $\rceil(a > b)$.

13. Сформулировать и записать в виде конъюнкции или дизъюнкции условие истинности каждого предложения (a и b — действительные числа):

а) $a \cdot b = 0$; б) $\frac{a}{b} = 0$; в) $|a| < 3$; г) $a^2 + b^2 \ne 0$.

14. Определить значения истинности следующих высказываний:
а) 12 делится на 6 тогда и только тогда, когда 12 делится на 3;
б) 11 делится на 6 тогда и только тогда, когда 11 делится на 3;
в) 15 делится на 6 тогда и только тогда, когда 15 делится на 3;
г) 15 делится на 5 тогда и только тогда, когда 15 делится на 4.

15. Доказать, что следующие формулы выполнимы:
а) $\rceil((P \Leftrightarrow \rceil Q) \vee R) \wedge Q$; б) $(P \wedge Q) \Rightarrow ((R \vee Q) \Rightarrow (Q \wedge \rceil Q))$.

16. Составить таблицы истинности для следующих формул и указать, какие из формул являются выполнимыми, какие — тождественно истинными (тавтологиями) и какие — тождественно ложными (противоречиями):
а) $\rceil(\rceil A \vee \rceil B) \Rightarrow \rceil(A \wedge B))$;
б) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow B$;
в) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow B$.

17. Составив таблицы истинности, доказать, что следующие формулы являются тавтологиями:
а) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\rceil Q \Rightarrow \rceil P)$ (закон контрапозиции);
б) $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\rceil P \Leftrightarrow \rceil Q)$ (закон противоположности).

18. Составив таблицы истинности, доказать следующие равносильности:
а) $A \wedge B \equiv \rceil(\rceil A \vee \rceil B)$; в) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
б) $A \vee B \equiv \rceil(\rceil A \wedge \rceil B)$; г) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

1. Для множеств $A, B \subset M = \{1, \dots, 20\}$ найти множества вида $A \setminus B, B \setminus A, A \cup B, A \cap B, A', B'$, если:

а) $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{11, 13, 15\}$;
б) $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{12, 14, 16\}$;
в) $A = \{7, 9, 11\}$, $B = \{17, 19\}$.

2. Доказать:

а) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
б) $A \setminus (B \setminus C) \subset A \cup C$;
в) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$;
г) $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.

3*. Найти множество всех значений x, при которых имеют смысл выражения:

а) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x - 3}}$;
б) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 5x + 6}}$;
в) $y = \sqrt{\lg_{\frac{1}{3}} \dfrac{x - 1}{x + 5}}$;
г) $y = \log_{\frac{1}{3}} \log_3 \dfrac{x + 1}{x - 1}$.

4*. Решить следующие неравенства:

а) $\log_2 \dfrac{3x - 4}{x + 1} < 1$;
б) $\sqrt{3x - x^2} > 4 - x$;
в) $\sqrt{x^2 - 5x} > 1$;
г) $\sqrt{x^2 - 3x} < \sqrt{2}$.

5. Доказать истинность следующих высказываний:
а) $(A \Rightarrow \rceil B) \Rightarrow (B \Rightarrow \rceil A)$;
б) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \wedge C)$;
в) $A \wedge (A \Leftrightarrow B) \Rightarrow B$;
г) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$.

6. Доказать следующие утверждения:
а) если $A \Rightarrow B = 1$, то $(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) = 1$.
б) если $A \Leftrightarrow B = 1$, то $A \equiv B$.
в) если $\rceil A = 1$, то $A \Rightarrow B = 1$.
г) для любой логической формулы существует эквивалентная ей формула, построенная только с помощью логических операций $\rceil, \wedge, \vee$.

7. Построить предикаты $A(x)$ и $B(x)$ такие, что:
а) $A(x) \vee B(x)$ является тождественно истинным предикатом;
б) $A(x) \wedge B(x)$ является тождественно ложным предикатом.

ГЛАВА II

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Натуральные числа

1. Простые и составные числа. Еще в глубокой древности числа использовались для счета предметов и для измерения величин. Числа, используемые для счета предметов, называются *натуральными числами*. Таким образом, $1, 2, 3, \dots$ — натуральные числа.

Множество $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ называется *множеством натуральных чисел*.

Пусть $a, b \in N$. Если существует $q \in N$ такое, что выполняется равенство $a = b \cdot q$, то говорят, что a делится на b, и пишут $a \vdots b$. При этом число b называется делителем числа a. Если число a не делится на число b, то это записывается в виде $a \not\vdots\, b$.

П р и м е р 1. $1 \vdots 1$ (единица имеет только один натуральный делитель); $2 \vdots 1, 2 \vdots 2$ (число 2 имеет только два натуральных делителя). Число 4 имеет три натуральных делителя: 1, 2 и 4.

Натуральное число, которое имеет только два различных натуральных делителя, называется *простым числом*. Из этого определения следует, что простое число — это натуральное число, отличное от единицы, которое делится только на единицу и на себя.

П р и м е р 2. Числа 2, 3, 5, 7 являются простыми числами.

Натуральные числа, имеющие не менее трех различных натуральных делителей, называются *составными числами*. Из этих определений следует, что 1 не является простым и не является составным числом. Если число a составное, то $a \vdots 1$, $a \vdots a$ и a имеет, по крайней мере, еще один натуральный делитель, отличный от 1 и от a.

П р и м е р 3. Составными числами являются, например, числа 4, 6, 8, 9, 10.

Таким образом, любое натуральное число a есть либо единица, либо простое число, либо составное число.

Т е о р е м а 1. Пусть a — натуральное число, отличное от единицы и p — наименьший его делитель, причем $p > 1$. Тогда p — простое число.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a \neq 1$. Предположим, что p — не простое число. Тогда p составное число. Следовательно, p имеет делитель p_1 с условиями $p_1 \neq 1$, $p_1 \neq p$. Поэтому $a \vdots p$ и $p \vdots p_1$.

Тогда $a \vdots p_1$ и $1 < p_1 < p$. Это противоречит тому, что p является наименьшим делителем числа a.

Теорема 2. Любое составное число a, имеет хотя бы один простой делитель p, удовлетворяющий условию $p < \sqrt{a}$.

Доказательство. Поскольку a составное число, то существуют простое число p (наименьший делитель) и число q такие, что $a = p \cdot q$ и $p \neq 1$, $q \neq 1$. Имеем $p < q$. Тогда $p^2 < pq = a$. Отсюда $p < \sqrt{a}$.

2. Бесконечность множества простых чисел.

Теорема 3 (***теорема Евклида***). Множество простых чисел является бесконечным множеством.

Доказательство. Предположим обратное. Пусть множество простых чисел — конечное множество, т. е. $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ — множество всех простых чисел.

Рассмотрим число $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$. Число $a \neq 1$, $a \notin P$ и a не делится ни на один из простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Так как a не имеет простых делителей, то в силу теоремы 2, a — простое число. Это противоречит условию $a \notin P$. Следовательно, множество простых чисел не может быть конечным множеством и поэтому является бесконечным.

Вопросы и задания

1. Дать определение простого числа.
2. Какие числа называются составными?
3. Сформулировать основные теоремы о простых и составных числах.

Упражнения

1. Пусть m — составное число и p — его наименьший делитель, больший единицы. Доказать, что p — простое число.
2. Доказать бесконечность множества простых чисел.
3. Написать последовательность всех простых чисел до 110.
4. Доказать, что 103 является простым числом.

---

5. Является ли 743 простым числом?
6. Доказать, что если произведение двух натуральных чисел делится на простое число p, то хотя бы один из сомножителей делится на p.
7. Определить, какие из следующих чисел являются простыми, а какие из них — составные: 397, 401, 403, 409, 677, 679, 701.

§ 2. Метод математической индукции

1. Принцип математической индукции. Метод рассуждений, ведущий от частных заключений к некоторому общему выводу, называется *индукцией.*

Рассмотрим задачу: найти сумму внутренних углов выпуклого n-угольника.

Пусть S_n — сумма внутренних углов n-угольника. Тогда $S_3 = 180°$, $S_4 = 360° = 180°(4-2)$, $S_5 = 540° = 180°(5-2)$ и т. д.

Из этих частных заключений можно сделать общий вывод, что $S_n = 180°(n-2)$.

Рассмотрим другой пример. Пусть дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + x + 41$. Тогда $f(1) = 43$, $f(2) = 47$, $f(3) = 53$.

Полученные числа — простые. Отсюда можно сделать неверное заключение, что $f(n)$ — простое число для любого натурального n. Действительно, если $n = 41$, то $f(41) = 41^2 + 41 + 41 = 41 \cdot 43$ — составное число. Из этих двух примеров видно, что один и тот же метод рассуждения в первом случае приводит к правильному выводу, а во втором случае приводит к неверному заключению. Следовательно, такой метод рассуждения не является доказательством. Но этот метод в большинстве случаев помогает сформулировать гипотезу, которую затем можно доказать другими способами. Посредством такого метода сделанный вывод получается из нескольких частных заключений и не охватывает все случаи. Поэтому этот метод называют *неполной индукцией.*

Метод рассуждения, который охватывает все возможные случаи, называется *полной индукцией.*

Рассмотрим утверждение: сумма первых k нечетных натуральных чисел равна k^2. Действительно, если $k = 1$, то $1 = 1^2$; $k = 2$, то $1 + 3 = 2^2$; $k = 3$, то $1 + 3 + 5 = 3^2$; ... .

Положим, что утверждение проверено для $k = 50$. Используя этот факт, зададимся вопросом: можно ли проверить справедливость нашего утверждения для $k = 51$? Оказывается, что можно. Действительно, при $k = 50$ по предположению имеем: $1 + 3 + \ldots + (2 \cdot 49 + 1) = 50^2$.

Пусть $k = 51$. Тогда $1 + 3 + \ldots + (2 \cdot 49 + 1) + (2 \cdot 50 + 1) = 50^2 + 2 \cdot 50 + 1 = (50 + 1)^2 = 51^2$. Таким способом мы можем доказать верность утверждения для $k = 51, 52, \ldots$ и т. д., то есть для всех натуральных чисел.

В основе такого метода доказательства лежит следующий принцип, называемый *принципом математической индукции:*

Утверждение $P(n)$, зависящее от натурального числа n, верно для любого n, если выполнены следующие два условия:

1) Утверждение верно для $n = 1$.

2) Из того, что утверждение верно для $n = k$ следует его истинность при $n = k + 1$.

Принцип математической индукции является аксиомой аксиоматической теории натуральных чисел. На основе этой аксиомы строится *метод математической индукции*. Доказательство с помощью метода математической индукции состоит из трех этапов:

1-й этап (базис индукции). Проверяется истинность утверждения для $n = 1$.

2-й этап (предположение индукции). Предполагается, что утверждение верно для $n = k \geq 1$.

3-й этап (заключительный). Из того, что утверждение верно для $n = k$, выводится истинность утверждения для $n = k + 1$.

Некоторые утверждения, зависящие от натурального переменного n, могут иметь смысл, начиная с некоторого натурального числа p и могут быть истинны для всех натуральных чисел, начиная с p. Такие утверждения также могут быть доказаны методом математической индукции. В таких случаях метод математической индукции также состоит из трех этапов:

1-й этап (базис индукции). Проверяется истинность утверждения для некоторого натурального числа p.

2-й этап (предположение индукции). Предполагается, что рассматриваемое утверждение верно для $n = k$, $k \geq p$.

3-й этап (заключительный). Из того, что утверждение верно для $n = k$, доказывается истинность утверждения для $n = k + 1$.

П р и м е р 1. Доказать, что сумма внутренних углов выпуклого n-угольника вычисляется по формуле $S_n = 180°(n - 2)$.

1-й этап (базис индукции). Утверждение имеет смысл, начиная с $n = 3$. $S_3 = 180°(3 - 2)$. $S_3 = 180°$. Действительно, сумма внутренних углов треугольника равна $180°$.

2-й этап (предположение индукции). Предположим, что утверждение верно для $n = k$, т. е. $S_k = 180°(k - 2)$.

3-й этап (заключительный). Докажем, что $S_{k+1} = 180°((k + 1) - 2)$.

Пусть $A_1A_2 \ldots A_kA_{k+1}$ — произвольный выпуклый $(k + 1)$-угольник (рис. 11). Соединяя A_1 с A_k получим, что

$$S_{k+1} = S_k + 180° = 180°(k - 2) + 180° = 180°((k + 1) - 2).$$

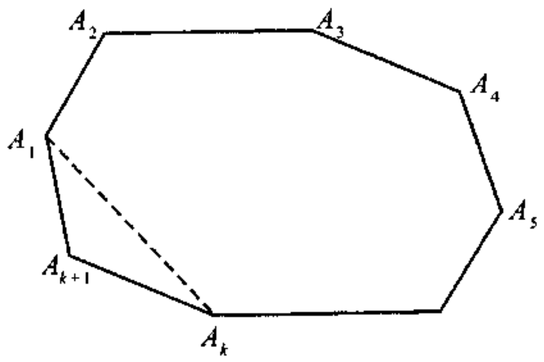


Рис. 11

П р и м е р 2. Доказать, что для любого натурального n верно равенство: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. При $n = 1$ утверждение верно. Действительно, $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2+1)}{6}$ или $1 = 1$.

2. Пусть $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

3. Докажем, что

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}.$$

В силу предположения индукции

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k\ (k+1)\ (2k+1)}{6} + (k+1)^2.$$

Тогда $\dfrac{k\ (k+1)\ \ (2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$

$$= (k+1)\left(\frac{k\ (2k+1)}{6} + k + 1\right) = (k+1)\ \frac{2k^2 + k + 6k + 6}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)\ (2k^2 + 7k + 6)}{6}.$$

Разлагая $2k^2 + 7k + 6$ на множители, получим:

$$2k^2 + 7k + 6 = (k + 2)\ (2k + 3).$$

Таким образом, $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \dfrac{(k+1)((k+1)+1)(2k+3)}{6}$

или $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \dfrac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$.

В доказательстве некоторых утверждений удобно пользоваться следующей формой метода доказательства с помощью математической индукции:

1-й этап. Утверждение доказывается для $n = 1$ (или для $n = k$).

2-й этап. Предполагается, что утверждение верно для всех натуральных чисел, меньших n.

3-й этап. Доказывается истинность утверждения для n.

В следующем пункте мы применим такую форму доказательства с помощью метода математической индукции.

2. Основная теорема арифметики.

Теорема. Всякое натуральное число — это либо единица, либо простое число, либо такое число, которое с точностью до порядка сомножителей представляется единственным образом в виде произведения простых чисел.

Доказательство. Применим метод математической индукции. Пусть a некоторое натуральное число. Если $a = 1$, то утверждение теоремы выполняется. Предположим, что для всех натуральных чисел b, $b < a$ теорема верна, т. е. либо $b = 1$, либо b — простое число, либо b — разлагается на произведение простых чисел единственным образом до порядка сомножителей.

Докажем теорему для натурального числа a в предположении, что для всех натуральных чисел меньших чем a, теорема верна. Если a — простое число, то теорема верна. Поэтому положим, что a — составное число. Тогда по теореме 1 из параграфа 1, наименьший делитель p_1 числа a является простым числом. Следовательно, $a = p_1 \cdot b$, где b — некоторое натуральное число, меньшее чем a. По предположению индукции для числа b теорема верна, т. е. $b = p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k$. Отсюда $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$.

Таким образом, любое натуральное число a разложимо в произведение простых чисел.

Докажем единственность такого разложения до порядка сомножителей. Пусть $a = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$ другое разложение числа a на произведение простых чисел. Тогда

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m. \qquad (1)$$

Обе части равенства делятся на p_1, в частности, $q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$ делится на p_1. Так как $q_1, q_2, \ldots, q_m$ — простые числа, то существует такой q_i, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, что $q_i = p_1$. Для определенности положим, что $q_1 = p_1$. Тогда

$$b = p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = q_2 \cdot \ldots \cdot q_m. \qquad (2)$$

Так как $b < a$, то по предположению индукции разложение (2), а следовательно, и разложение (1) единственны с точностью до порядка сомножителей.

В том случае, когда в разложении натурального числа a на произведение простых чисел участвуют только m различных простых чисел, причем p_1 участвует α_1 раз, p_2 — α_2 раза и т. д., p_m — α_m раз, имеем:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}.$$

Такое разложение называется *каноническим разложением натурального числа.*

Пример 3. $108 = 2^2 \cdot 3^3$ — каноническое разложение натурального числа 108.

3. Применение метода математической индукции к вопросам делимости чисел. Рассмотрим несколько примеров на применение метода математической индукции к вопросам делимости чисел.

Пример 4. Числа вида $n^3 + 11n$ делятся на 6 при любом натуральном n.

Решение. Докажем это утверждение, обозначив $n^3 + 11n$ через $S(n)$.

1. Базис индукции. $S(1) = 12$ — делится на 6.
2. Предположение индукции. Пусть $S(k) = k^3 + 11k$ делится на 6.
3. Докажем, что $S(k + 1)$ делится на 6.

Действительно,

$$S(k+1) = (k+1)^3 + 11(k+1) = (k+1)(k^2 + 2k + 1 + 11) =$$
$$= (k+1)(k^2 + 2k + 12) = (k+1)(k^2 + 2k) + 12(k+1) =$$
$$= k^3 + 2k^2 + k^2 + 2k + 12(k+1) = k^3 + 11k + 3k^2 - 9k + 12(k+1) =$$
$$= (k^3 + 11k) + 3k(k-3) + 12(k+1).$$

Первое слагаемое суммы делится на 6 по предположению индукции. Третье слагаемое тоже делится на 6. Второе слагаемое делится на 3. Но $k(k-3)$ делится на 2, так как либо k, либо $(k-3)$ четно. Поэтому и второе слагаемое суммы делится на 6. Следовательно, $S(k+1)$ делится на 6.

Пример 5. Доказать, что при любом натуральном n число $10^n + 18n - 28$ делится на 27.

Решение. Выражение $10^n + 18n - 28$ обозначим через $P(n)$.

1. $P(1) = 10 + 18 - 28 = 0$. Ясно, что 0 делится на 27.
2. Пусть $P(k) \vdots 27$, т. е. $(10^k + 18k - 28) \vdots 27$.
3. Докажем, что $P(k+1) \vdots 27$.

$$P(k+1)=10^{k+1}+18(k+1)-28=10\cdot10^k+18k+18-28=$$
$$=10\cdot10^k+18k-10=10\cdot(10^k+18k-28-18k+28)+18k-10=$$
$$=10\cdot(10^k+18k-28)-180k+280+18k-10=10\cdot(10^k+18k-28)-$$
$$-162k+270=10\cdot(10^k+18k-28)-27\cdot(6k-10).$$

По предположению индукции, первое слагаемое делится на 27. Так как второе слагаемое тоже делится на 27, то $P(k+1)\ \vdots\ 27$.

Вопросы и задания

1. Какой метод рассуждений называется индукцией?
2. Сформулировать принцип математической индукции.
3. В чем разница между полной и неполной индукциями?
4. Объяснить этапы доказательства методом индукции.
5. Сформулировать основную теорему арифметики.
6. Рассказать о применении метода математической индукции.

Упражнения

1. Доказать методом математической индукции следующие равенства:

а) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

б) $1\cdot4+2\cdot7+3\cdot10+\ldots+n\cdot(3n+1)=n(n+1)^2$;

в) $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$;

г) $\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot10}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$.

2. Доказать методом математической индукции следующие неравенства:

а) Если $\alpha>-1$, то для любого натурального n верно, что $(1+\alpha)^n\ge1+n\cdot\alpha$ (неравенство Бернулли);

б) Для любого натурального n, $3^n>n$.

3. Доказать для любого натурального n:

а) $(3^{2n+3}-24\cdot n+37)\ \vdots\ 64$; *б)* $(5^n+2\cdot3^{n-1}+1)\ \vdots\ 8$.

4. Доказать, что сумма $2k+1$ последовательных натуральных чисел делится на $2k+1$, где k — натуральное число.

5. Доказать методом математической индукции следующие равенства:

а) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$;

б) $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$;

в) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

г) $2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$.

6. Доказать методом математической индукции следующие неравенства:

а) для любого натурального n, $2^n>n$;

б) для любого натурального $n>1$, $1+\dfrac{1}{\sqrt2}+\dfrac{1}{\sqrt3}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt n}>\sqrt n$.

7. Доказать для любого натурального n:

а) $(n^5-n)\ \vdots\ 5$; *б)* $n(n^2+5)\ \vdots\ 6$; *в)* $n(n+1)(2n+1)\ \vdots\ 6$.

§ 3. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное натуральных чисел

1. Натуральный делитель натурального числа. Пусть a, b некоторые натуральные числа. Если существует натуральное число c такое, что выполняется равенство $a=b\cdot c$, то говорят, что a делится на b или b является делителем числа a. Напомним, что $a\ \vdots\ b$ означает делимость числа a на число b без остатка.

Теорема 1. Пусть $a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_i\ne0$, $i=1,\ldots,k$ — каноническое разложение числа a. Тогда любой натуральный делитель числа a имеет вид $p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}$, где $0\le\beta_i\le\alpha_i$, $i=1,\ldots,k$.

Доказательство. Пусть $a=b\cdot c$, т. е. b — делитель числа a и $p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа a. Если $b=1$, то $b=p_1^0\cdot p_2^0\cdot\ldots\cdot p_k^0$ и утверждение теоремы верно. Пусть $b>1$. Имеем $p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}=b\cdot c$. Пусть p — простой делитель числа b. Тогда, поскольку $a\ \vdots\ b$ и $b\ \vdots\ p$, то $a\ \vdots\ p$. Следовательно, p является простым делителем числа a. Поэтому каждый простой делитель p числа b является одним из простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

Значит, b можно записать в виде: $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$, где $0 \le \beta_1 \le \alpha_1, \ldots, 0 \le \beta_k \le \alpha_k$.

2. Число натуральных делителей натурального числа.

Теорема 2. Если $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение натурального числа a, то число всех натуральных делителей числа a вычисляется по формуле:

$$\tau(a) = (\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1).$$

Доказательство. Поскольку любой натуральный делитель d числа a имеет вид:

$$d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}, \quad (1)$$

где $0 \le \beta_1 \le \alpha_1, \ldots, 0 \le \beta_k \le \alpha_k$, то число всех делителей числа a равно числу всех упорядоченных наборов $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, удовлетворяющих условиям формулы (1).

В силу условий формулы (1), каждое β_i принимает $\alpha_i + 1$ значений, а именно: $\beta_i = 0, 1, \ldots, \alpha_i$. Кроме того, выбор различных значений $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ не зависит один от другого. Следовательно, число всех упорядоченных наборов $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ равно $(\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$.

Сумма натуральных делителей натурального числа n вычисляется по формуле:

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

Пример 1. Вычислить число и сумму делителей числа 12.

Находим каноническое разложение числа 12: $12 = 2^2 \cdot 3$. Тогда

$$\tau(12) = (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 6, \qquad \sigma(12) = \frac{2^3 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^2 - 1}{3 - 1} = 28.$$

3. Наибольший общий делитель натуральных чисел. Натуральное число m называется *общим делителем* натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, если m является делителем каждого из них. Наибольший среди всех общих делителей натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называется *наибольшим общим делителем* и обозначается через НОД $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Если НОД $(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1$, то числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называются *взаимно простыми числами.*

Теорема 3. Наибольший общий делитель d натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ делится на любой их общий делитель и обратно,

если некоторый общий делитель натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ делится на любой их общий делитель, то он является наибольшим делителем.

Доказательство. Пусть $d =$ НОД $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, d_1 — любой общий делитель чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и $d_1 = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$ — каноническое разложение числа d_1 на простые множители. Ясно, что $d \vdots p_i$, $i = 1, \ldots, m$ (в противном случае $d \cdot p_i$ является общим делителем, большим чем d). Предположим, что для некоторого t, $1 \le t < \alpha_i$ число $d \vdots p_i^t$, но $d \not\vdots\, p_i^{t+1}$. Тогда числа $\dfrac{d}{p_i^t}$ и $p_i^{\alpha_i}$ взаимно простые, а число $\dfrac{d}{p_i^t} \cdot p_i^{\alpha_i} = d \cdot p_i^{\alpha_i - t}$ является общим делителем, большим чем d, что невозможно. Из этих рассуждений следует, что $d \vdots p_i^{\alpha_i}$ для всех $i = 1, \ldots, m$.

Следовательно, $d \vdots p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$ или $d \vdots d_1$. Обратное утверждение очевидно.

Теорема 4. Пусть $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$ — канонические разложения натуральных чисел a и b. Тогда наибольший общий делитель d этих чисел вычисляется по формуле:

$$d = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min\{\alpha_k, \beta_k\}}.$$

Доказательство. Пусть $m = p_1^{\delta_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\delta_k}$ — любой общий делитель чисел a и b. Тогда $\delta_1 \le \alpha_1$ и $\delta_1 \le \beta_1, \ldots, \delta_k \le \alpha_k$ и $\delta_k \le \beta_k$. Следовательно, $\delta_1 \le \min\{\alpha_1, \beta_1\}, \ldots, \delta_k \le \min\{\alpha_k, \beta_k\}$.

Так как число $p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min\{\alpha_k, \beta_k\}}$ делится на m, то согласно теореме 3 имеем равенство: $d = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min\{\alpha_k, \beta_k\}}$.

Пример 2. Найти НОД (396, 504).

Решение. $396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$, $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ или $396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^1 \cdot 7^0$, $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^1 \cdot 11^0$. Отсюда НОД $(396, 504) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^0 \cdot 11^0 = 36$.

4. Наименьшее общее кратное. Если числа a и b не имеют общих делителей, кроме единицы, т. е. НОД $(a, b) = 1$, то они являются взаимно простыми числами. Например, числа 7 и 9, 2 и 5 являются взаимно простыми числами. Рассмотрим свойства взаимно простых чисел.

1^0. Любые различные простые числа являются взаимно простыми числами.

2^0. Пусть p_1, p_2 — различные простые числа. Тогда их натуральные степени $p_1^{\alpha_1}$ и $p_2^{\alpha_2}$ являются взаимно простыми числами.

3^0. Натуральные числа a и b — взаимно простые тогда и только тогда, когда они не имеют общего простого делителя.

4^0. Пусть p — некоторое простое число, a — любое натуральное число. Тогда либо a делится на p, либо a и p взаимно простые числа.

Для примера докажем свойство 3^0. Если числа a и b взаимно простые, то их наибольший общий делитель 1. Поэтому они не имеют простого общего делителя. Обратно, если числа a и b не имеют простого общего делителя, то их наибольший общий делитель равен 1. Действительно, в противном случае, если НОД $(a, b) \neq 1$, то наибольший общий делитель имеет простой делитель, являющийся общим делителем чисел a и b. Следовательно, НОД $(a, b) = 1$ и числа a и b взаимно простые.

Доказательство остальных свойств оставляем в качестве самостоятельных упражнений.

Теорема 5. Пусть произведение двух натуральных чисел делится на простое число p. Тогда хотя бы один из сомножителей делится на p.

Доказательство. Пусть $(a \cdot b) \vdots p$, т. е. $a \cdot b = p \cdot c$, где c — частное от деления $a \cdot b$ на p. Тогда число p участвует в каноническом разложении хотя бы одного из чисел a или b, т. е. $a \vdots p$ или $b \vdots p$.

Следствие 1. Если $(a \cdot b) \vdots p$, a и p взаимно простые числа, то $b \vdots p$.

Следствие 2. Если произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ делится на простое число p, то хотя бы один из сомножителей делится на p.

Теорема 6. Пусть произведение $a \cdot b$ двух натуральных чисел a и b делится на степень p^α, где p — простое число, являющееся взаимно простым с одним из сомножителей. Тогда другой из сомножителей делится на степень p^α.

Доказательство. Пусть $(a \cdot b) \vdots p^\alpha$. Тогда $a \cdot b = p^\alpha \cdot c$. Для определенности положим, что НОД$(a, p) = 1$. Тогда p^α — участвует в каноническом разложении числа b, следовательно $b \vdots p^\alpha$.

Теорема 7. Если $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ и $q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot q_m^{\beta_m}$ — канонические разложения взаимно простых чисел a и b, то каноническим разложением числа $a \cdot b$ будет $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \times \times q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot q_m^{\beta_m}$.

Доказательство. Действительно, $a \cdot b = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \times \times q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot q_m^{\beta_m}$. Кроме того, поскольку НОД $(a, b) = 1$, то, $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k}, q_1^{\beta_1}, q_2^{\beta_2}, \ldots, q_m^{\beta_m}$ — различные, взаимно простые числа. Отсюда следует, что $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \cdot q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \ldots\ q_m^{\beta_m}$ — каноническое разложение числа $a \cdot b$.

Теорема 8. Пусть натуральное число a делится на степени $p_1^{\alpha_1}$ и $p_2^{\alpha_2}$, где p_1 и p_2 — различные простые числа. Тогда число a делится на $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $a \vdots p_1^{\alpha_1}$. Следовательно, существует число q такое, что $a = p_1^{\alpha_1} \cdot q$. Но $a \vdots p_2^{\alpha_2}$ или $(p_1^{\alpha_1} \cdot q) \vdots p_2^{\alpha_2}$. Применяя теорему 6, получаем, что $q \vdots p_2^{\alpha_2}$. Поэтому существует натуральное число d такое, что $q = p_2^{\alpha_2} \cdot d$ или $a = p_1^{\alpha_1} \cdot q = p_1^{\alpha_1} \cdot (p_2^{\alpha_2} \cdot d) = (p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}) \cdot d$. Это означает, что $a \vdots (p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2})$.

Теорема 9. Если натуральное число a делится на натуральные степени $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — различные простые числа, то число a делится на произведение $p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$.

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции по числу k, т. е. по числу простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$. В случае, когда $k = 2$ теорема доказана выше (см. теорему 8).

Предположим, что теорема верна для $k = n$. Значит, если $a \vdots p_1^{\alpha_1}, \ldots, a \vdots p_n^{\alpha_n}$, то $a \vdots (p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n})$. Докажем теорему для случая $k = n + 1$. По условию теоремы $a \vdots p_1^{\alpha_1}, \ldots, a \vdots p_n^{\alpha_n}$, $a \vdots p_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$. По предположению индукции $a \vdots (p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n})$. Тогда существует такое натуральное число q, что $a = (p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}) \cdot q$.

Но $a \vdots p_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$ или $(p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}) \cdot q \vdots p_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$. Тогда в силу теоремы 6, существует такое натуральное число q_1, что $q = p_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \cdot q_1$. Откуда $a = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n} \cdot p_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \cdot q_1$. Таким образом, $a \vdots \left(p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n} p_{n+1}^{\alpha_{n+1}}\right)$. Это завершает доказательство нашей теоремы.

Если натуральное число c делится на каждое из натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, то оно называется *общим кратным* этих натуральных чисел. Наименьшее из всех общих кратных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называется их *наименьшим общим кратным*.

Наименьшее общее кратное чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$, обозначается через НОК$(a_1, a_2, \dots, a_k)$. В частности, через НОК(a, b) обозначим наименьшее общее кратное чисел a и b.

Теорема 10. Пусть $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$. Тогда наименьшее общее кратное чисел a и b вычисляется по формуле:

$$\text{НОК}(a, b) = p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max\{\alpha_k, \beta_k\}}.$$

Доказательство. Пусть m — наименьшее общее кратное чисел a и b. Тогда, поскольку $m \,\vdots\, a$ и $m \,\vdots\, b$, то $m \,\vdots\, p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}}, \dots, m \,\vdots\, p_k^{\max\{\alpha_k, \beta_k\}}$. Так как $p_1, p_2, \dots, p_k$ — простые числа, то $m \,\vdots\, (p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max\{\alpha_k, \beta_k\}})$.

Но с другой стороны, число $p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max\{\alpha_k, \beta_k\}}$ — делится на числа a и b. Поэтому $p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max\{\alpha_k, \beta_k\}} \geq m$. Отсюда следует, что $p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max\{\alpha_k, \beta_k\}} = m$.

Следствие. Любое общее кратное чисел a и b делится на наименьшее общее кратное этих чисел.

Пример 3. Найти НОК (198, 252).

Решение. Каноническое разложение чисел 198 и 252 можно получить с помощью следующей таблицы:

198	2		252	2
99	3		126	2
33	3		63	3
11	11		21	3
1			7	7
			1	

Следовательно, $198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$, $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Отсюда НОК $(198, 252) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 = 2772$.

5. Теорема о делении с остатком.

Теорема 11. Пусть a и b — натуральные числа. Тогда число a можно представить в виде

$$a = b \cdot q + r, \qquad (2)$$

где q, r — натуральные числа или 0 и $0 \leq r < b$.

Доказательство. Применим метод математической индукции. Пусть $a = 1$. Рассмотрим два случая: $b = 1$ и $b > 1$. Если $b = 1$, то $1 = 1 \cdot 1 + 0$ и теорема верна. Если же $b > 1$, то $1 = b \cdot 0 + 1$, т. е. утверждение теоремы выполняется и в этом случае. Таким образом, для $a = 1$ теорема верна.

Предположим, что теорема верна для чисел $a \leq k$. Положим $a = k + 1$. Так как $k = b \cdot q + r$, где $0 \leq r < b$, то $k + 1 = b \cdot q + r + 1$. Отсюда, если $r + 1 < b$, то теорема верна. Пусть $r + 1 \geq b$. Так как $r + 1 < k + 1$, то в силу предположения индукции $r + 1 = b \cdot q_1 + r_1$, где $0 \leq r_1 < b$. Поэтому

$$k + 1 = b \cdot q + b \cdot q_1 + r_1 = b(q + q_1) + r_1, 0 \leq r_1 < b.$$

Следовательно, для числа $a = k + 1$ утверждение теоремы также выполняется. Это завершает доказательство теоремы.

6. Алгоритм Евклида. Пусть a и b натуральные числа. Тогда в силу доказанной выше теоремы, существуют такие числа q_0 и r_1, что выполняется равенство $a = b \cdot q_0 + r_1$, где $0 \leq r_1 < b$.

Пусть $r_1 > 0$. Делитель b разделим на остаток r_1. Тогда имеет место представление $b = r_1 \cdot q_1 + r_2$, где $0 \leq r_2 < r_1$. Если $r_2 > 0$, то теперь делитель r_1 разделим на остаток r_2 и т. д. Тогда имеем представления:

$$\begin{gathered}
a = b \cdot q_0 + r_1, 0 \leq r_1 < b, \\
b = r_1 \cdot q_1 + r_2, 0 \leq r_2 < r_1, \\
r_1 = r_2 \cdot q_2 + r_3, 0 \leq r_3 < r_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
r_{n-3} = r_{n-2} \cdot q_{n-2} + r_{n-1}, 0 \leq r_{n-1} < r_{n-2}, \\
r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_{n-1} + r_n, 0 \leq r_n < r_{n-1}, \\
r_{n-1} = r_n \cdot q_n.
\end{gathered}$$

По условию $b > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > r_n$. Поэтому этот процесс деления заканчивается после конечного числа делений. Таким образом, мы имеем следующую цепочку делений с остатком:

$$\begin{gathered}
a = b \cdot q_0 + r_1, 0 \leq r_1 < b, \\
b = r_1 \cdot q_1 + r_2, 0 \leq r_2 < r_1, \\
r_1 = r_2 \cdot q_2 + r_3, 0 \leq r_3 < r_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
r_{n-3} = r_{n-2} \cdot q_{n-2} + r_{n-1}, 0 \leq r_{n-1} < r_{n-2}, \qquad (3) \\
r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_{n-1} + r_n, 0 \leq r_n < r_{n-1}, \\
r_{n-1} = r_n \cdot q_n, \\
r_{n+1} = 0.
\end{gathered}$$

Такой процесс последовательного деления называется *алгоритмом Евклида*.

Пример 4. Составить алгоритм Евклида для чисел:

1) $a = 9, b = 7$; 2) $a = 22, b = 8$.

Решение.

1) $9 = 7 \cdot 1 + 2,$
$7 = 2 \cdot 3 + 1,$
$2 = 1 \cdot 2.$

2) $22 = 8 \cdot 2 + 6,$
$8 = 6 \cdot 1 + 2,$
$6 = 2 \cdot 3.$

Лемма. Пусть $a = b \cdot q + r$, где $0 \le r < b$. Тогда НОД $(a, b) =$ НОД (b, r).

Доказательство. Пусть $d_1 =$ НОД (a, b) и $d_2 =$ НОД (b, r). Тогда $a \vdots d_1$ и $b \vdots d_1$. Так как по условию $a = b \cdot q + r$, то из $r = a - b \cdot q$ следует, что $r \vdots d_1$. Тогда d_1 будет общим делителем b и r, а значит, $d_2 \vdots d_1$. Аналогично из того, что $b \vdots d_2$, $r \vdots d_2$ и $a = b \cdot q + r$ следует, что $a \vdots d_2$. Следовательно, $d_1 \vdots d_2$. Отсюда $d_1 = d_2$. Лемма доказана.

Теорема 12. Пусть (3) — алгоритм Евклида, составленный для натуральных чисел a и b. Тогда последний ненулевой остаток r_n является наибольшим общим делителем чисел a и b.

Доказательство. В силу доказанной выше леммы:

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, r_1) = \text{НОД}(r_1, r_2) = \text{НОД}(r_2, r_3) = \ldots$$
$$= \text{НОД}(r_{n-3}, r_{n-2}) = \text{НОД}(r_{n-2}, r_{n-1}) = \text{НОД}(r_{n-1}, r_n).$$

Но $r_{n-1} \vdots r_n$. Следовательно, НОД $(r_{n-1}, r_n) = r_n$.

Отсюда НОД $(a, b) = r_n$.

Пример 5.

С помощью алгоритма Евклида найти НОД (1067, 582).

Решение. $1067 = 582 \cdot 1 + 485,$
$582 = 485 \cdot 1 + 97,$
$485 = 97 \cdot 5.$

Следовательно, НОД (1067, 582) = 97.

Вопросы и задания

1. Дать определение натурального делителя натурального числа.
2. Написать формулу для вычисления числа делителей натурального числа.
3. Дать определение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного двух натуральных чисел.

4. Написать формулу для вычисления НОД двух натуральных чисел.
5. Перечислить свойства взаимно простых чисел.
6. Написать формулу для вычисления НОК двух натуральных чисел.
7. Сформулировать теорему о делении с остатком.
8. Пусть для любых $a, b \in N$, $a = b \cdot q + r$, $0 \le r < b$. Доказать, что НОД $(a, b) =$ НОД (b, r).
9. Что такое алгоритм Евклида?
10. Рассказать, как можно найти наибольший общий делитель двух натуральных чисел с помощью алгоритма Евклида.

Упражнения

1. Найти каноническое разложение чисел:
а) 160; *б*) 494; *в*) 1001.
2. Найти все простые числа между числами:
а) от 1 до 100; *б*) от 150 до 200.
3. Найти число и сумму натуральных делителей следующих чисел:
а) 60; *б*) 100; *в*) 360.
4. Сколько натуральных чисел меньших, чем 300 имеют с числом 300 наибольший общий делитель, равный 20?
5. Найти наибольший общий делитель следующих чисел:
а) 0 и 0; *б*) 0 и 8; *в*) 231 и 546.
6. Найти наименьшее общее кратное следующих чисел:
а) 360 и 504; *б*) 187 и 533; *в*) 2520 и 6600.
7. Найти наибольший общий делитель следующих чисел: 819, 702 и 689.
8. Найти наименьшее общее кратное следующих чисел: 126, 420 и 525.
9. Доказать следующие утверждения:
а) два последовательных нечетных числа являются взаимно простыми;
б) для любого натурального числа a, числа a и $a + 1$ взаимно простые.

---

10. Найти каноническое разложение чисел: *а*) 1009; *б*) 82798848.
11. Найти все простые числа между числами: *а*) от 1250 до 1300. *б*) от 550 до 600.
12. Найти число и сумму натуральных делителей следующих чисел: *а*) 375; *б*) 720.
13. Найти натуральное число n, если $\tau(n) = 6$.

14. Найти наибольший общий делитель следующих чисел:

а) 1001 и 6253; *б*) 3763 и 3337; *в*) 6791460 и 178500.

15. Найти наименьшее общее кратное следующих чисел:

а) 252 и 468; *б*) 279 и 372; *в*) 178 и 381.

16. Найти наибольший общий делитель следующих чисел: 3059, 2737 и 943.

17. Найти наименьшее общее кратное следующих чисел: 356, 1068 и 1424.

18. Доказать следующие утверждения:

а) если a и b — взаимно простые натуральные числа, то $a - b$ и b при $a > b$ также взаимно простые числа;

б) если a и b — взаимно простые натуральные числа, то $a + b$ и $a \cdot b$ также взаимно простые числа.

§ 4. Сравнения и их свойства

1. Сравнения. Пусть a и b — целые числа (определение целых чисел см. в § 5) и m натуральное число, большее 1. Если $a - b$ делится на m, то говорят, что a *сравнимо* с b по модулю m и пишут $a \equiv b \pmod m$.

Пример 1. $a = 5$, $b = 16$, $m = 11$. Тогда $5 - 16 = -11$ и $-11 \vdots 11$. Поэтому можно записать соотношение $5 \equiv 16 \pmod{11}$. Аналогично, можем записать $6 \equiv 17 \pmod{11}$.

Теорема 1. Если $a, b \in N$, $a \equiv b \pmod m$, то числа a и b при делении на число m дают одинаковые остатки.

Доказательство. Пусть для определенности $a \geq b$. Соотношение $a \equiv b \pmod m$ означает, что $(a - b) \vdots m$. Другими словами, существует такое число q, что $a - b = m \cdot q$. Отсюда $a = m \cdot q + b$. Пусть $b = m \cdot q' + r$, где $0 \leq r < m$. Тогда

$$a = m \cdot q + m \cdot q' + r = m \cdot (q + q') + r, \text{ где } 0 \leq r < m.$$

Таким образом, числа a и b при делении на число m дают один и тот же остаток r.

Теорема 2. Если натуральные числа a и b при делении на число m ($m > 1$) дают один и тот же остаток, то $a \equiv b \pmod m$.

Доказательство. По условию $a = m \cdot q + r$, где $0 \leq r < m$ и $b = m \cdot q' + r$, где $0 \leq r < m$. Тогда $a - b = (m \cdot q + r) - (m \cdot q' + r) = m \cdot q - m \cdot q' = m \cdot (q - q')$.

Значит, $a - b = m \cdot (q - q')$. Отсюда $a \equiv b \pmod m$.

2. Свойства сравнений. Пусть m — целое число большее, чем 1. Отношение сравнения обладает следующими свойствами:

1^0. Для любых целых чисел a и m ($m > 1$), $a \equiv a \pmod m$.

Доказательство. $a - a = 0$ и $0 \vdots m$. Следовательно, $a \equiv a \pmod m$.

2^0. Если для целых чисел a и b, $a \equiv b \pmod m$, то $b \equiv a \pmod m$.

Доказательство. $a \equiv b \pmod m$. Это означает, что $(a - b) \vdots m$. Тогда $-(a - b) \vdots m$ или $(b - a) \vdots m$. Отсюда $b \equiv a \pmod m$.

3^0. $a \equiv b \pmod m$ и $b \equiv c \pmod m$. Тогда $a \equiv c \pmod m$.

Доказательство. Пусть $a \equiv b \pmod m$ и $b \equiv c \pmod m$. Тогда $(a - b) \vdots m$ и $(b - c) \vdots m$. Отсюда $((a - b) + (b - c)) \vdots m$ или $(a - c) \vdots m$. Это означает, что $a \equiv c \pmod m$.

4^0. Сравнения можно почленно складывать и почленно вычитать, т. е., если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то $a + c \equiv b + d \pmod m$ и $a - c \equiv b - d \pmod m$.

Доказательство. По условию $(a - b) \vdots m$ и $(c - d) \vdots m$. Тогда $((a - b) + (c - d)) \vdots m$ или $((a + c) - (b + d)) \vdots m$. Это означает, что $a + c \equiv b + d \pmod m$.

Вторая часть рассматриваемого свойства доказывается аналогично.

5^0. Если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod m$, т. е. сравнения можно почленно умножать.

Доказательство. По условию $(a - b) \vdots m$ и $(c - d) \vdots m$. Имеем равенства

$$a \cdot c - b \cdot d = a \cdot c - c \cdot b + c \cdot b - b \cdot d = c \cdot (a - b) + b \cdot (c - d).$$

Так как $(a - b) \vdots m$, $(c - d) \vdots m$, то $(c \cdot (a - b) + b \cdot (c - d)) \vdots m$. Другими словами, $(a \cdot c - b \cdot d) \vdots m$ или же $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod m$.

6^0. Обе части сравнения можно умножать на любое целое число. При этом сравнение сохранится.

Доказательство. По условию $a \equiv b \pmod m$. В силу свойства 1^0 имеем $c \equiv c \pmod m$. Тогда в силу свойства 5^0 получим, что $a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod m$.

3. Применение отношения сравнения к доказательству признаков делимости. Известно, что каждое натуральное число записывается с помощью десяти цифр — 0, 1, 2, ..., 9. Например, 327 означает $300 + 20 + 7$ или $3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7$, т. е. $3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7$. В дальнейшем, чтобы отличить натуральное число $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$, образованное с помощью цифр $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ от произведения чисел $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$, будем записывать его в виде $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$. Сумма $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$ называется десятичным разложением числа $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$.

1⁰. *Признак делимости на 2.*

Теорема 3. Натуральное число a делится на 2 тогда и только тогда, когда оно заканчивается четной цифрой.

Доказательство. Пусть $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$ — десятичное разложение числа a. Поскольку $10^n, 10^{n-1}, \dots, 10$ делятся на 2, то для делимости числа a на 2 необходимо и достаточно, чтобы a_0 делилось на 2. Значит, последняя цифра a_0 принимает значения 0, 2, 4, 6 или 8.

2⁰. *Признак делимости на 3.*

Теорема 4. Натуральное число a делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр, образующих это число, делится на 3.

Доказательство. Рассмотрим следующие сравнения:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \equiv 1 \pmod 3 \\ 10 \equiv 1 \pmod 3 \\ 10^2 \equiv 1 \pmod 3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 10^n \equiv 1 \pmod 3 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Тогда

$$\left.\begin{array}{l} a_0 \equiv a_0 \pmod 3 \\ a_1 \cdot 10 \equiv a_1 \pmod 3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1} \cdot 10^{n-1} \equiv a_{n-1} \pmod 3 \\ a_n \cdot 10^n \equiv a_n \pmod 3 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Складывая почленно сравнения (2), получим:

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \pmod 3.$$

Левая часть полученного сравнения равно числу a, правая часть состоит из суммы цифр, образующих число a. Тогда из теорем 1, 2 вытекает, что $a \,\vdots\, 3$ тогда и только тогда, когда сумма цифр, образующих число a, делится на 3.

3⁰. *Признак делимости на 4.*

Теорема 5. Натуральное число a делится на 4 тогда и только тогда, когда число, образованное последними двумя цифрами данного числа, делится на 4.

Доказательство. Пусть $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$ — десятичное разложение натурального числа a. Рассмотрим следующие сравнения:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \equiv 1 \pmod 4 \\ 10 \equiv 10 \pmod 4 \\ 10^2 \equiv 0 \pmod 4 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 10^n \equiv 0 \pmod 4 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Умножая обе части этих сравнений на числа $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$, получим:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 \equiv a_0 \pmod 4 \\ a_1 \cdot 10 \equiv a_1 \cdot 10 \pmod 4 \\ a_2 \cdot 10^2 \equiv 0 \pmod 4 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1} \cdot 10^{n-1} \equiv 0 \pmod 4 \\ a_n \cdot 10^n \equiv 0 \pmod 4 \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Складывая почленно сравнения (4), имеем

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_1 \cdot 10 + a_0 \pmod 4,$$

или $a \equiv \overline{a_1 a_0} \pmod 4$, откуда в силу теорем 1 и 2 получаем доказательство теоремы 5.

4⁰. *Признак делимости на 5.*

Теорема 6. Натуральное число a делится на 5 тогда и только тогда, когда это число заканчивается либо цифрой пять, либо нулем.

Доказательство. Рассмотрим сравнения:

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 \equiv 0 \pmod 5 \text{ и } a_0 \equiv a_0 \pmod 5.$$

Почленно складывая их, получим сравнение:

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_0 \pmod 5.$$

Это означает, что число делится на 5 тогда и только тогда, когда последняя цифра данного числа делится на 5. Но среди всех цифр только 0 и 5 делятся на 5.

5⁰. *Признак делимости на 6.*

Теорема 7. Если натуральное число делится на 2 и на 3, то оно делится на 6. Обратно, если натуральное число делится на 6, то оно делится на 2 и на 3.

Доказательство. Пусть натуральное число a делится на 2 и на 3. Тогда, поскольку 2 и 3 взаимно простые числа, то число a делится и на их произведение, т. е. $a \vdots 6$.

Обратно, если $a \vdots 6$, то существует такое целое число q, что $a = 6 \cdot q$. Очевидно, что $(6 \cdot q) \vdots 2$ и $(6 \cdot q) \vdots 3$. Поэтому число a делится на 2 и на 3.

6^0. *Признак делимости на 8.*

Теорема 8. Натуральное число a делится на 8 тогда и только тогда, когда число, образованное последними тремя цифрами числа a, делится на 8.

Доказательство. Пусть $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$ — десятичное разложение натурального числа a. Рассмотрим сравнение $1000 \equiv 0 \pmod 8$. Поэтому $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_3 \cdot 10^3 \equiv 0 \pmod 8$. Отсюда получаем сравнение:

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \pmod 8).$$

Следовательно, $a \equiv \overline{a_2a_1a_0} \pmod 8$. Таким образом, число a делится на 8 тогда и только тогда, когда число $\overline{a_2a_1a_0}$ делится на 8.

Аналогично можно доказать следующие признаки делимости:

7^0. *Признак делимости на 9.*

Теорема 9. Натуральное число a делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр данного натурального числа делится на 9.

8^0. *Признак делимости на 10.*

Теорема 10. Натуральное число a делится на 10 тогда и только тогда, когда последняя цифра числа равна нулю.

9^0. *Признак делимости на 11.*

Теорема 11. Натуральное число a делится на 11 тогда и только тогда, когда разность суммы цифр, стоящих на нечетных местах и суммы цифр, стоящих на четных местах, делится на 11.

Пример 2. Число 1031305 делится на 11. Действительно, сумма цифр, стоящих на нечетных местах, равна $1 + 3 + 3 + 5 = 12$, а сумма цифр, стоящих на четных местах, равна $0 + 1 + 0 = 1$. Их разность $12 - 1 = 11$ делится на 11.

Пример 3. Число 132582 делится на 3, но не делится на 9. Действительно, сумма цифр данного числа равна $1 + 3 + 2 + 5 + 8 + 2 = 21$. Число 21 делится на 3, но на 9 не делится. Поэтому 132582 делится на 3, но не делится на 9.

Вопросы и задания

1. Дать определение отношения сравнения.
2. Перечислить свойства отношения сравнения.
3. Сформулировать признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11.
4. Рассказать о применении отношения сравнения.

Упражнения

1. Найти частное и остаток от деления:
   а) 1207 на 151; *б*) 20 на 20; *в*) 100 на 101.
2. Доказать, что если каждое из двух чисел при делении на натуральное число m дает остаток 1, то их произведение при делении на m также дает остаток 1.
3. Доказать верность следующих сравнений:
   а) $31 \equiv -9 \pmod 2$;
   б) $(k^2 - 1) \equiv 1 \pmod k$, где $k > 1$;
   в) $(2k + 1)^2 \equiv (2k - 1)^2 \pmod 2$.
4. Найти последнюю цифру следующих чисел:
   а) 203^{20}; *б*) 243^{402}.
5. Найти признаки делимости на 25, 18, 45.

---

6. Найти частное и остаток от деления:
   а) −4 на 3; *б*) −23 на 6; *в*) −18 на 5.
7. Доказать верность следующих сравнений:
   а) $15 \equiv 3 \pmod 4$;
   б) $121 \equiv 13145 \pmod 2$;
   в) $121347 \equiv 92817 \pmod 5$.
8. Найти последнюю цифру следующих чисел:
   а) $1812 \cdot 1941 \cdot 1965$; *б*) $(116 + 17^{17})^{21}$.
9. Найти признаки делимости на 12, 15.

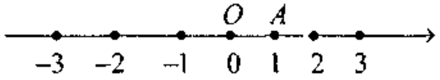
§ 5. Рациональные числа

1. Целые числа. Присоединив к множеству натуральных чисел число 0, получим множество $N_0 = \{0, 1, 2, ...\}$, которое называется множеством всех неотрицательных целых чисел. Расширим множество N_0, присоединяя к нему все числа, противоположные натуральным числам. В результате получим множество:

$$\{... , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

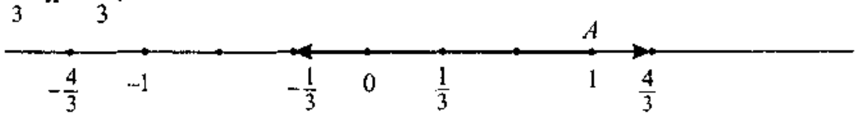
Это множество называется *множеством всех целых чисел* и обозначается через Z.

Геометрически целые числа можно изобразить на прямой следующим образом. На некоторой прямой l совершенно произвольно выберем точку O, и назовем ее "начальной" точкой. Направление на прямой l вправо от точки O назовем положительным, а направление на прямой l влево от точки O назовем отрицательным. Отметим также некоторую точку A справа от точки O и отрезок OA назовем единичным отрезком. Целые числа на прямой будем обозначать следующим образом: для того чтобы обозначить положительное целое число n, отложим отрезок OA в положительном направлении n раз от точки O. Правый конец последнего отрезка будет соответствовать числу n. Для того чтобы отметить число $-n$, отрезок OA отложим n раз в отрицательном направлении от точки O. Левый конец последнего отрезка будет соответствовать числу $-n$. Числу 0 сопоставим точку O. В итоге получим прямую, на которой обозначены все целые числа:



Прямая, на которой выбраны начальная точка, положительное направление и единичный отрезок, называется *числовой прямой.*

2. Рациональные числа. Числа, которые можно представить в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$, где p, q — целые числа и $q \neq 0$, называются *рациональными числами*. Положительное рациональное число $\frac{m}{n}$, где m, n — натуральные числа, можно изобразить на числовой прямой точкой C, которая может быть получена следующим образом: отрезок OA разделим на n равных частей, затем отложим m таких же частей от точки O в положительном направлении числовой прямой. Правый конец последнего отрезка будет соответствовать числу $\frac{m}{n}$. Аналогично можно изобразить отрицательное рациональное число $-\frac{m}{n}$ отложив m раз влево от точки O отрезок длины $\frac{1}{n}$. Например, изобразим на числовой прямой числа $\frac{4}{3}$ и $-\frac{1}{3}$:



Таким образом, каждому рациональному числу на числовой прямой соответствует единственная точка.

Рациональные числа $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ считаются равными, если $a \cdot d = b \cdot c$. Действительно, если $a \cdot d = b \cdot c$, то $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{c}{d}$.

На множестве рациональных чисел выполнимы операции сложения, умножения, вычитания и деления (кроме деления на нуль). Напомним, как определяются эти операции:

1. Сумма рациональных чисел $\frac{m}{n}$ и $\frac{k}{l}$ определяется по формуле:

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{m \cdot l + n \cdot k}{n \cdot l}.$$

2. Произведение рациональных чисел $\frac{m}{n}$ и $\frac{k}{l}$ определяется по формуле:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} = \frac{m \cdot k}{n \cdot l}.$$

Пример 1. $\frac{^{3/}1}{4} + \frac{^{4/}1}{3} = \frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}$.

Пример 2. $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$.

Операции сложения и умножения обладают следующими свойствами:

1. $\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{k}{l} + \frac{m}{n}$ — *закон коммутативности сложения.*
2. $\left(\frac{m}{n} + \frac{k}{l}\right) + \frac{p}{q} = \frac{m}{n} + \left(\frac{k}{l} + \frac{p}{q}\right)$ — *закон ассоциативности сложения.*
3. $\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} = \frac{k}{l} \cdot \frac{m}{n}$ — *закон коммутативности умножения.*
4. $\left(\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l}\right) \cdot \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \left(\frac{k}{l} \cdot \frac{p}{q}\right)$ — *закон ассоциативности умножения.*
5. $\left(\frac{m}{n} + \frac{k}{l}\right) \cdot \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} + \frac{k}{l} \cdot \frac{p}{q}$ — *закон дистрибутивности умножения относительно сложения.*

Операция вычитания рациональных чисел определяется с помощью формулы:

$$\frac{m}{n} - \frac{k}{l} = \frac{m \cdot l - n \cdot k}{n \cdot l}.$$

Частное от деления рационального числа $\frac{m}{n}$ на рациональное число $\frac{k}{l}$ определяется по формуле:

$$\frac{m}{n}:\frac{k}{l}=\frac{m\cdot l}{n\cdot k},\text{ где } k\neq 0.$$

П р и м е р 3. $\frac{^{7\backslash}2}{5}-\frac{^{5\backslash}1}{7}=\frac{14-5}{35}=\frac{9}{35}.$

П р и м е р 4. $\frac{7}{11}:\frac{15}{23}=\frac{7\cdot 23}{11\cdot 15}=\frac{161}{165}.$

3. Десятичные дроби. Любая дробь вида $\frac{p}{q}$, $q\neq 0$, где p и q целые числа, называется *обыкновенной дробью*. Любое число вида $a_0, a_1\, a_2\, a_3 \ldots$, где $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ — некоторые цифры, называется *десятичной дробью*. Если в записи десятичной дроби участвует конечное число цифр, например, 2,3454, то оно называется *конечной десятичной дробью*. В ином случае, десятичная дробь называется *бесконечной*. Десятичная дробь, в записи которой после запятой некоторая цифра или группа цифр повторяется подряд бесконечное число раз, называется *периодической десятичной дробью*. При этом повторяющаяся цифра или группа цифр называется *периодом периодической десятичной дроби*. Если в записи бесконечной десятичной дроби нет повторяющейся подряд цифры или группы цифр, то такая десятичная дробь называется *непериодической*.

Для представления рационального числа $\frac{p}{q}$ в виде десятичной дроби, нужно числитель дроби разделить на знаменатель. В результате получим либо конечную, либо бесконечную десятичную дробь.

Рассмотрим примеры.

П р и м е р 5. Число $\frac{5}{8}$ представить в виде десятичной дроби.

Р е ш е н и е.

$$\begin{array}{l|l} 5 & 8 \\ \underline{0} & 0{,}625 \\ 50 & \\ \underline{48} & \\ \ \ 20 & \\ \ \ \underline{16} & \\ \ \ \ \ 40 & \\ \ \ \ \ \underline{40} & \\ \ \ \ \ \ \ 0 & \end{array}$$

П р и м е р 6. Числа $\frac{5}{7}$ и $\frac{17}{22}$ представить в виде десятичной дроби.

$$\begin{array}{l|l} 5 & 7 \\ \underline{0} & 0{,}714285714285\ldots \\ 50 & \\ \underline{49} & \\ \ 10 & \\ \ \underline{7} & \\ \ \ 30 & \\ \ \ \underline{28} & \\ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \underline{14} & \\ \ \ \ \ 60 & \\ \ \ \ \ \underline{56} & \\ \ \ \ \ \ 40 & \\ \ \ \ \ \ \underline{35} & \\ \ \ \ \ \ \ 50 & \\ \ \ \ \ \ \ \underline{49} & \\ \ \ \ \ \ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \underline{7} & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 30\ldots & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 17 & 22 \\ \underline{0} & 0{,}7727272\ldots \\ 170 & \\ \underline{154} & \\ \ 160 & \\ \ \underline{154} & \\ \ \ \ 60 & \\ \ \ \ \underline{44} & \\ \ \ \ 160 & \\ \ \ \ \underline{154} & \\ \ \ \ \ \ 60 & \\ \ \ \ \ \ \underline{44} & \\ \ \ \ \ \ 160 & \\ \ \ \ \ \ \underline{154} & \\ \ \ \ \ \ \ \ 60 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \underline{44} & \\ \ \ \ \ \ \ \ 16\ldots & \end{array}$$

В рассмотренных примерах мы получили выражения:

$$\frac{5}{8}=0{,}625=0,625000\ \ldots$$
$$\frac{5}{7}=0{,}714285714285\ \ldots$$
$$\frac{17}{22}=0{,}77272\ \ldots\ .$$

В примере 5 мы получили конечную десятичную дробь. Отметим, что ее можно рассматривать и как бесконечную периодическую десятичную дробь, с периодом 0. В примере 6 мы получили бесконечные периодические десятичные дроби с периодами, равными соответственно 714285 и 72.

Если период начинается сразу после запятой (например, 0,714285714285 ...), то такая дробь называется *простой*. В противном случае (например, 0,77272 ...) дробь называется *смешанной*.

Т е о р е м а . Пусть $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь с положительным знаменателем q, каноническое разложение которого состоит только из степеней простых чисел 2 и 5, т. е. $q = 2^s \cdot 5^t$, где $s, t \in N_0$. Тогда $\frac{p}{q}$ можно представить в виде конечной десятичной дроби.

Доказательство. Действительно,

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{2^s \cdot 5^t} = \frac{p \cdot 2^t \cdot 5^s}{2^{s+t} \cdot 5^{t+s}} = \frac{p \cdot 2^t \cdot 5^s}{10^{s+t}} \text{ — конечная десятичная дробь.}$$

При делении целого числа p на натуральное число q, каждый шаг деления приводит к своему остатку. Как бы различны ни были эти остатки, ни один из них не может быть больше чем q. Поэтому, после некоторого шага, остатки начнут повторяться, а это приводит к периодичности частного. Следовательно, при делении на q мы непременно получим периодическую десятичную дробь. Таким образом, всякое рациональное число $\frac{p}{q}$ может быть представлено в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Верно и обратное утверждение: всякая периодическая десятичная дробь может быть представлена как обыкновенная дробь, иначе говоря, всякая периодическая десятичная дробь является рациональным числом.

Пример 7. Периодическую десятичную дробь 0,231231 ... представить в виде обыкновенной дроби.

Решение. Обозначим данную десятичную дробь через x, т. е.

$$x = 0{,}231231\ldots \qquad (1)$$

Она имеет период, равный 231. Умножая обе части равенства (1) на 1000, получим:

$$1000x = 231{,}231231\ldots \qquad (2)$$

Вычитая из равенства (2) почленно равенство (1), получим $999x = 231$. Откуда $x = \frac{231}{999}$.

Пример 8. Смешанную периодическую дробь 3,73232 ... представить в виде обыкновенной дроби.

Решение. Пусть $x = 3{,}73232\ldots$. Тогда

$$10x = 37{,}3232\ldots \qquad (3)$$

$$1000x = 3732{,}3232\ldots \qquad (4)$$

Вычитая из (4) почленно равенство (3), получим $990x = 3695$. Откуда $x = \frac{3695}{990} = 3\frac{725}{990}$.

Существуют и другие способы представления периодической десятичной дроби в виде обыкновенной дроби.

Пример 9. Представить 12,73535 ... в виде обыкновенной дроби.

Решение: $12{,}73535\ldots = \frac{127{,}3535\ldots}{10} = \frac{127 + 0{,}3535\ldots}{10} = \frac{127 + \frac{35}{99}}{10} =$

$= \frac{127 \cdot 99 + 35}{990} = \frac{12608}{990}$.

Вопросы и задания

1. Как определяется множество целых чисел?
2. Что называется числовой прямой?
3. Как изображаются целые числа на числовой прямой?
4. Дать определение рационального числа.
5. Как изображаются рациональные числа на числовой прямой?
6. Дать определение равенства двух рациональных чисел.
7. Дать определение суммы двух рациональных чисел.
8. Перечислить свойства суммы рациональных чисел.
9. Как определяется операция вычитания рациональных чисел?
10. Дать определение произведения двух рациональных чисел.
11. Перечислить свойства произведения рациональных чисел.
12. Как определяется операция деления рациональных чисел?
13. Что называется обыкновенной дробью, десятичной дробью?
14. Какие десятичные дроби называются периодическими, какие — непериодическими?
15. Какие рациональные числа можно представить в виде конечной десятичной дроби?
16. Чем отличаются простые и смешанные дроби?

Упражнения

1. Вычислить значения следующих выражений:

а) $(8 - 0{,}35) : 7{,}65 + 9{,}8$; *б*) $(\frac{2}{3} + 0{,}25) : 18{,}33\ldots$.

2. Обыкновенные дроби записать в виде бесконечной десятичной дроби:

а) $\frac{15}{8}$; *б*) $-\frac{46}{27}$.

3. Доказать, что дробь 0,12345678910111213 ... , получающаяся от написания после нуля всех натуральных чисел, не является рациональным числом.

4. Используя после запятой только цифры 5 и 7, написать число, не являющееся рациональным числом.

5. Между данными числами поставить требуемые знаки — неравенства или равенства:

а) 4,63479... и 463497; *в)* –2,4833... и –2,5829... .

б) 15,5 и $\frac{62}{4}$;

6. Привести пример двух дробей, которые представимы в виде конечных десятичных дробей, отношение которых нельзя представить в виде конечной десятичной дроби.

7. Следующие периодические дроби представить в виде обыкновенной дроби:

а) 0,(25); *б)* 101,8(5); *в)* 42,75828282... .

---

8. Вычислить значения следующих выражений:

а) $\left(\frac{1}{2}:1,25+1,4:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)\cdot 0,3$; *б)* $\left(2,7-\frac{4}{5}\right)\cdot 2,3...+0,11...$.

9. Обыкновенные дроби записать в виде бесконечной десятичной дроби:

а) $\frac{3}{7}$; *б)* 0; *в)* $-\frac{11}{28}$.

10. Пусть $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь. Если $\frac{m}{n}$ можно представить в виде конечной десятичной дроби, то на какие числа может делиться без остатка знаменатель n?

11. Между данными числами поставьте требуемые знаки — неравенства или равенства:

а) –16,0010... и –16,0001; *б)* 0 и 0,000005... .

12. Следующие периодические дроби представить в виде обыкновенной дроби:

а) 0,7272...; *б)* 32,030303... .

§ 6. Действительные числа

1. Иррациональные числа. В предыдущем параграфе мы показали, что каждому рациональному числу соответствует единственная точка на числовой прямой. Интересна обратная задача, а именно: соответствует ли каждой точке числовой прямой некоторое рациональное число. Оказывается, что на числовой прямой существуют такие точки, которые не соответствуют рациональным числам.

Теорема. Пусть p — простое число. Тогда не существует рационального числа, квадрат которого равен p.

Доказательство. Предположим, что существует рациональное число $\frac{m}{n}$, где НОД $(m, n) = 1$, такой, что $\frac{m^2}{n^2} = p$. Тогда $m^2 = p \cdot n^2$. Следовательно, $m^2 \vdots p$. Отсюда получим, что $m \vdots p$. Значит, существует такое целое число q, что $m = p \cdot q$ и $p \cdot n^2 = p^2 \cdot q^2$. Сократив обе части полученного равенства на p, получим $n^2 = p \cdot q^2$. Тогда $n^2 \vdots p$, т. е. $n \vdots p$. Таким образом, p — общий делитель чисел m и n. Это противоречит условию НОД $(m, n) = 1$.

Следствие. Числа вида $\sqrt{p}$, где p — простое число, не являются рациональными числами.

Множество простых чисел бесконечно. Поэтому существует бесконечное множество чисел вида $\sqrt{p}$, которые не являются рациональными. Геометрически отрезки длины $\sqrt{p}$ можно изобразить следующим образом. Построим на плоскости равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами длины 1. Тогда длина гипотенузы этого треугольника будет равна $\sqrt{2}$. Число $\sqrt{2}$ не является рациональным числом. Теперь построим прямоугольный треугольник с катетами длины $\sqrt{2}$ и 1. Такой треугольник имеет гипотенузу, длина которой равна $\sqrt{3}$ и т. д. (рис. 12). Таким образом, для любого простого числа p можно построить отрезок, длина которого равна $\sqrt{p}$.

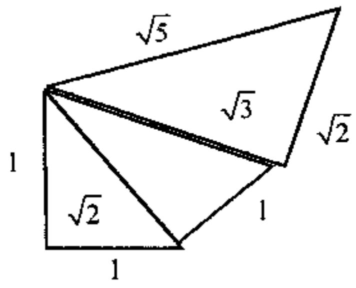


Рис. 12

Согласно рассуждениям, приведенным в § 5, характерной чертой рациональных чисел является то, что их можно представить в виде периодических десятичных дробей. Точкам на числовой прямой, не являющимся изображением рационального числа, соответствуют бесконечные непериодические десятичные дроби, называемые *иррациональными числами*. Например, непериодические десятичные дроби $\sqrt{2} = 1{,}4142...$, $\pi = 3{,}1415...$ — являются иррациональными числами. Множество всех рациональных и иррациональных чисел по определению образуют *множество действительных чисел*. Таким образом, множество всех действительных чисел состоит из всех периодических десятичных дробей и всех непериодических бесконечных десятичных дробей.

2. Сравнение иррациональных чисел. Число π.

Отрезок AB называется *мерой* для отрезка CD, если AB укладывается ровно целое число раз на отрезке CD. Отрезок AB называется *общей мерой* для отрезков CD и EF, если AB является мерой для обоих отрезков.

Пример 1. На рис. 13 изображен отрезок AB, являющийся общей мерой для отрезков CD и EF.

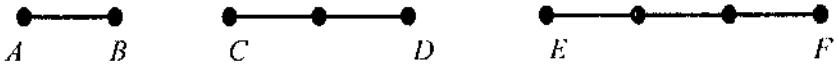


Рис. 13

В примере 1 отрезок AB примем за единицу измерения, обозначим его длину через $|AB|$ и приравняем к 1. Тогда $|CD| = 2$, $|EF| = 3$ и отношение длин данных отрезков выражается рациональным числом $\frac{|EF|}{|CD|} = \frac{3}{2}$.

Отрезки, которые имеют общую меру, будем называть *соизмеримыми*, и *несоизмеримыми* в противном случае.

Пусть CD и EF — соизмеримые отрезки и отрезок AB их мера. Положим, что отрезок AB укладывается на отрезках CD и EF соответственно ровно n и m раз. Тогда отношение длин отрезков EF и CD выражается рациональным числом $\frac{m}{n}$.

Поэтому, отношение длин соизмеримых отрезков всегда есть рациональное число. Но не все отрезки являются соизмеримыми.

Пример 2. Диагональ любого квадрата не соизмерима с его стороной.

Действительно, в противном случае отношение длин отрезков AC и AB было бы рациональным числом (рис. 14). Но поскольку $AC^2 = 2AB^2$, то $\frac{|AC|}{|AB|} = \sqrt{2}$. Как мы знаем, число $\sqrt{2}$ не является рациональным числом. Следовательно, отрезки AC и AB несоизмеримы.

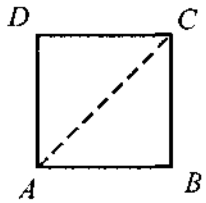
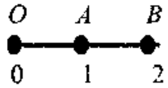


Рис. 14

Поскольку каждое рациональное число выражается периодической десятичной дробью, а из доказанной в пункте 1 теоремы следует, что $\sqrt{2}$ не является рациональным числом, то отсюда вытекает, что $\sqrt{2}$ не выражается периодической десятичной дробью. На примере числа $\sqrt{2}$ покажем, как представлять иррациональные числа в виде десятичных дробей.

Возьмем отрезок OB, с длиной равной числу 2:



Поскольку $1^2 < 2 < 2^2$, то $1 < \sqrt{2} < 2$. Следовательно, $\sqrt{2}$ лежит на отрезке AB. Отрезок AB разделим на десять равных частей. Тогда имеем (рис. 15):

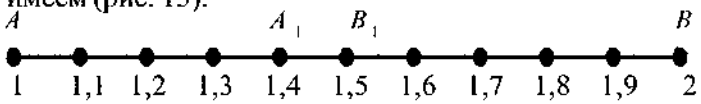
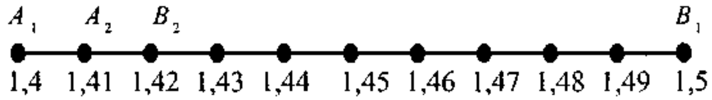


Рис. 15

Нетрудно проверить, что $1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$ или $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$. Значит, точка изображающая число $\sqrt{2}$ лежит на отрезке A_1B_1. Повторяя тем же способом деление отрезка A_1B_1 на равные части, получим:



Продолжая деление соответствующих отрезков, имеем неравенства:

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42;$$
$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415;$$
$$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Данный процесс можно продолжить бесконечное число раз, так как в противном случае число $\sqrt{2}$ совпало бы с одним из рациональных чисел. В качестве приближенного значения $\sqrt{2}$ с недостатком можно взять числа 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142 и т. д., а с избытком можно взять числа 2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143 и т. д. Таким образом, число $\sqrt{2} = 1{,}4142...$.

Два положительных иррациональных числа называются равными, если их целые части и соответствующие десятичные знаки после запятой являются одинаковыми. Очевидно, что если два иррациональных числа с одинаковыми целыми частями не равны, то одно из чисел содержит десятичный знак, не совпадающий с соответствующим десятичным знаком другого числа. Например, число 1,41... не равно числу 1,42... .

Рассмотрим неравные, иррациональные числа α и β. Если целые части этих чисел не равны, то большим числом считается то, у которого больше целая часть. Например, $2{,}41... > 1{,}41...$. Если же целые части у них равны, то сравнивают первые десятичные знаки после запятой. Большим будет то число, у которого больше первый десятичный знак после запятой. Если же и эти знаки равны, то сравнивают следующие десятичные знаки и т. д. Например, $3{,}7123... > 3{,}7034...$; $100{,}3371... > 100{,}3368...$.

Напомним, что числовой прямой называется произвольная прямая с выбранными на ней началом координат O, масштабом измерения и направлением. Аналогично случаю рациональных чисел, каждому действительному числу можно поставить в соответствие некоторую точку на числовой прямой. Если α — некоторое положительное действительное число, то поставим ему в соответствие точку A, лежащую справа от точки O на расстоянии в α единиц длины, а числу $-\alpha$ поставим в соответствие точку A', симметричную точке A относительно начала координат O. Например, если $\alpha = 1{,}4125...$ — иррациональное число, то $1 < \alpha < 2$; $1{,}4 < \alpha < 1{,}5$; $1{,}41 < \alpha < 1{,}42$ и т. д. Очевидно, что в этом случае точка A лежит правее точек, соответствующих числам 1; 1,4 ; 1,41; ... , и левее точек, соответствующих числам 2; 1,5; 1,42; ...

Можно убедиться, что эти условия определяют на числовой прямой единственную точку A, рассматриваемую как геометрическое представление действительного (иррационального) числа $\alpha = 1{,}4125...$. Следовательно, каждому действительному числу соответствует единственная точка на числовой прямой, а именно, его геометрическое представление (различным числам соответствуют

различные точки числовой прямой). Верно и обратное утверждение: каждой точке на числовой прямой соответствует некоторое действительное число. Если отрезок, представляющий эту точку, соизмерим с единичным отрезком, то этой точке соответствует рациональное число. В противном случае, точке соответствует иррациональное число.

Отметим еще следующее. Известно, что отношение длины L окружности к ее диаметру d не зависит от длины диаметра. Это отношение является постоянным числом. Оно обозначается через π ($\pi = 3{,}1415926...$). Можно показать, что это число является бесконечной непериодической десятичной дробью, т. е. иррациональным числом.

3. Целая и дробная части действительного числа. Пусть α — некоторое действительное число. Наибольшее целое число, не большее чем число α, называется *целой частью* действительного числа α. Целая часть числа α обозначается через $[\alpha]$. Разность $\alpha - [\alpha]$ называется *дробной частью* действительного числа α. Дробная часть числа α обозначается через $\{\alpha\}$.

Пример 3. Найти целую и дробную части числа −1,2.

Решение. Число −2 является наибольшим целым числом, удовлетворяющим неравенству $-2 \le -1{,}2$. Поэтому $[-1{,}2] = -2$. Дробная часть данного числа равна $\{-1{,}2\} = -1{,}2 - (-2) = -1{,}2 + 2 = 0{,}8$.

Пример 4. Найти целую и дробную части числа $\sqrt{3}$.

Решение. Так как $1 < \sqrt{3} < 2$, то $[\sqrt{3}] = 1$ и $\{\sqrt{3}\} = \sqrt{3} - 1$.

Пример 5. $[1{,}3] = 1$ и $\{1{,}3\} = 0{,}3$.

Из определения следует, что дробная часть $\{\alpha\}$ действительного числа α является неотрицательным числом и $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$, т. е. любое действительное число можно представить как сумму целой и дробной частей данного числа.

4. Арифметические операции над действительными числами. Пусть α, β — действительные числа. Если они оба рациональные, то их сложение производится по правилу сложения рациональных чисел. Если одно из этих чисел (или оба числа) иррациональное, то их суммой полагают действительное число, обозначаемое как $\alpha + \beta$, которое больше всех сумм соответственных десятичных приближений этих чисел с недостатком, и меньше всех сумм соответственных десятичных приближений этих чисел с избытком.

Пример 6. Найти десятичные приближения суммы $\frac{1}{3} + \sqrt{3}$ с точностью до третьего знака после запятой.

Р е ш е н и е . Выпишем десятичные приближения чисел $\frac{1}{3}$ и $\sqrt{3}$:

$$0<\frac{1}{3}<1; \qquad 1<\sqrt{3}<2;$$
$$0{,}3<\frac{1}{3}<0{,}4; \qquad 1{,}7<\sqrt{3}<1{,}8;$$
$$0{,}33<\frac{1}{3}<0{,}34; \qquad 1{,}73<\sqrt{3}<1{,}74;$$
$$0{,}333<\frac{1}{3}<0{,}334; \qquad 1{,}732<\sqrt{3}<1{,}733;$$
$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

Тогда:

$$(0+1)<\frac{1}{3}+\sqrt{3}<(1+2); \quad \text{или} \quad 1<\frac{1}{3}+\sqrt{3}<3;$$
$$(0{,}3+1{,}7)<\frac{1}{3}+\sqrt{3}<(0{,}4+1{,}8); \qquad 2<\frac{1}{3}+\sqrt{3}<2{,}2;$$
$$(0{,}33+1{,}73)<\frac{1}{3}+\sqrt{3}<(0{,}34+1{,}74); \qquad 2{,}06<\frac{1}{3}+\sqrt{3}<2{,}08;$$
$$(0{,}333+1{,}732)<\frac{1}{3}+\sqrt{3}<(0{,}334+1{,}733); \qquad 2{,}065<\frac{1}{3}+\sqrt{3}<2{,}067;$$
$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

Операция сложения действительных чисел удовлетворяет законам коммутативности и ассоциативности:

1^0. Если α, β — действительные числа, то $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

2^0. Если α, β, γ — действительные числа, то $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.

Разностью действительных чисел α, β называется такое действительное число γ, что $\beta+\gamma=\alpha$. Иначе говоря, разность двух чисел α и β — это сумма вида $\alpha+(-\beta)$ и она обозначается через $\alpha-\beta$.

П р и м е р 7. Пусть $\alpha=\sqrt{3}$, $\beta=\frac{1}{3}$. Воспользуемся десятичными приближениями чисел $\sqrt{3}$ и $-\frac{1}{3}$. Тогда

$$-1<-\frac{1}{3}<0; \qquad 1<\sqrt{3}<2;$$
$$-0{,}4<-\frac{1}{3}<-0{,}3; \qquad 1{,}7<\sqrt{3}<1{,}8;$$
$$-0{,}34<-\frac{1}{3}<-0{,}33; \qquad 1{,}73<\sqrt{3}<1{,}74;$$
$$-0{,}334<-\frac{1}{3}<-0{,}333; \qquad 1{,}732<\sqrt{3}<1{,}733;$$
$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

Складывая почленно соответствующие неравенства, имеем:

$$0<\sqrt{3}-\frac{1}{3}<2;$$
$$1{,}3<\sqrt{3}-\frac{1}{3}<1{,}5;$$
$$1{,}39<\sqrt{3}-\frac{1}{3}<1{,}41;$$
$$1{,}398<\sqrt{3}-\frac{1}{3}<1{,}400;$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Пусть α, β — действительные числа. Если оба числа рациональные, то их произведение определяется по правилам умножения рациональных чисел.

Пусть α и β — положительные действительные числа и хотя бы одно из этих чисел является иррациональным числом. Тогда их произведением полагают действительное число, которое больше всех произведений соответственных десятичных приближений этих чисел с недостатком, и меньше всех произведений соответственных десятичных приближений этих чисел с избытком.

П р и м е р 8. Пусть $\alpha=\sqrt{3}$, $\beta=\frac{1}{3}$. Нетрудно убедиться, что действительное число $\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$0\cdot1<\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}<1\cdot2; \quad \text{или} \quad 0<\frac{\sqrt{3}}{3}<2;$$
$$0{,}3\cdot1{,}7<\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}<0{,}4\cdot1{,}8; \qquad 0{,}51<\frac{\sqrt{3}}{3}<0{,}72;$$
$$0{,}33\cdot1{,}73<\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}<0{,}34\cdot1{,}74; \qquad 0{,}5709<\frac{\sqrt{3}}{3}<0{,}5916;$$
$$0{,}333\cdot1{,}732<\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}<0{,}334\cdot1{,}733; \qquad 0{,}576756<\frac{\sqrt{3}}{3}<0{,}578822;$$
$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

Если хотя бы одно из действительных чисел α или β равно нулю, то $\alpha\cdot\beta=0$. Если одно из этих чисел, например, $\alpha<0$, то $-\alpha>0$ и произведение $-\alpha\cdot\beta$ — определяется как выше. Тогда $\alpha\cdot\beta=-(-\alpha\cdot\beta)$.

Если оба действительные числа α и β отрицательные, то произведение $\alpha \cdot \beta$ определяется как произведение положительных чисел $-\alpha$ и $-\beta$:

$$\alpha \cdot \beta = (-\alpha) \cdot (-\beta).$$

Операция произведения действительных чисел также удовлетворяет законам коммутативности и ассоциативности:

1^0. Если α, β — действительные числа, то $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$;

2^0. Если α, β, γ — действительные числа, то $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \times \times (\beta \cdot \gamma)$.

Кроме того, операция произведения действительных чисел относительно операции сложения удовлетворяет закону дистрибутивности:

3^0. Если α, β, γ — действительные числа, то $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Числа α и β называются взаимно обратными, если $\alpha \cdot \beta = 1$. Число, обратное числу β, будем обозначать через $\frac{1}{\beta}$. Частным $\alpha : \beta$ от деления действительного числа α на действительное число β, $\beta \neq 0$ называется действительное число γ, которое удовлетворяет равенству $\beta \cdot \gamma = \alpha$. Другими словами, частное от деления α на β — это произведение чисел α и $\frac{1}{\beta}$.

Пример 9. Пусть $\alpha = \sqrt{2}$ и $\beta = \sqrt{5}$. Тогда:

$$1{,}4 < \alpha < 1{,}5; \qquad 2{,}2 < \beta < 2{,}3;$$
$$1{,}41 < \alpha < 1{,}42; \qquad 2{,}23 < \beta < 2{,}24;$$
$$1{,}414 < \alpha < 1{,}415; \qquad 2{,}236 < \beta < 2{,}237;$$
$$\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots$$

Отсюда:

$$\frac{1}{2{,}3} < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{2{,}2}; \qquad 1{,}4 \cdot \frac{1}{2{,}3} < \alpha \cdot \frac{1}{\beta} < 1{,}5 \cdot \frac{1}{2{,}2};$$
$$\frac{1}{2{,}24} < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{2{,}23}; \qquad 1{,}41 \cdot \frac{1}{2{,}24} < \alpha \cdot \frac{1}{\beta} < 1{,}42 \cdot \frac{1}{2{,}23};$$
$$\frac{1}{2{,}237} < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{2{,}236}; \qquad 1{,}414 \cdot \frac{1}{2{,}237} < \alpha \cdot \frac{1}{\beta} < 1{,}415 \cdot \frac{1}{2{,}236};$$
$$\dots\dots\dots \qquad \dots\dots\dots$$

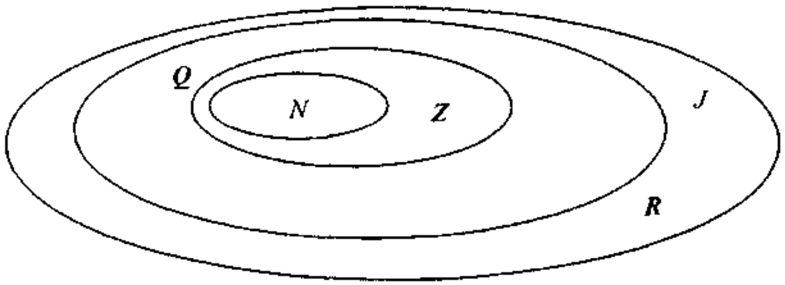
Таким образом, $0{,}6320 < \alpha : b < 0{,}6328$.

5. Развитие понятия числа. Понятие числа возникло из естественных нужд человека при работе с различными предметами. Для определения количества предметов необходим был их счет.

При счете предметов появились числа 1, 2, 3, 4, ... , которые называются натуральными числами. Кроме счета предметов требовалось еще и измерение. Результаты измерений часто выражаются дробями. Так появились положительные дроби вида $\frac{m}{n}$, где m, $n \in N$. Например, если отрезок AB можно разбить на m отрезков, каждый из которых равен n- й части единичного отрезка CD, то длина отрезка AB выражается дробью $\frac{m}{n}$. Позднее стали появляться различные потребности теоретического характера. Например, чтобы было возможно выполнение операции вычитания, стали необходимыми ноль и отрицательные числа (впервые отрицательные числа встречаются в работах китайских математиков II в. до н. э.).

После введения отрицательных чисел и нуля в математике стало возможным оперировать со всеми рациональными числами. Длину любого отрезка можно с любой степенью точности выразить с помощью положительного рационального числа. Но в теоретических исследованиях появляются отрезки, длины которых не выражаются рациональными числами. Например, длина диагонали квадрата со стороной, равной *1*, не выражается рациональным числом. Поэтому возникла необходимость расширить множество рациональных чисел, присоединив к нему новые числа, которые называются иррациональными: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и т. д. Все рациональные и иррациональные числа в совокупности образуют множество действительных чисел.

Если N — множество всех натуральных чисел, Z — множество всех целых чисел, Q — множество всех рациональных чисел, J — множество всех иррациональных чисел, а R — множество всех действительных чисел, то верно соотношение $N \subset Z \subset Q \subset R$ и $J \subset R$, которое можно изобразить с помощью следующей диаграммы:



6. Модуль действительного числа. *Модуль* (абсолютное значение) действительного числа α обозначается через $|\alpha|$ и определяется следующим образом:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, \text{ если } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, \text{ если } \alpha < 0. \end{cases}$$

Пример 10. Модуль числа -5 равен $|-5| = -(-5) = 5$.

Пусть на числовой прямой с началом координат O, число α представляется точкой A. Тогда длина отрезка OA равна $|\alpha|$, т. е. геометрически $|\alpha|$ — это длина отрезка с концами в начале координат и в точке, представляющей число α.

Свойства модуля действительного числа:

1^0. Для всех действительных чисел α верно неравенство $|\alpha| \geq 0$.

Доказательство. Если $\alpha = 0$, то $|0| = 0$. Пусть $\alpha > 0$. Тогда $|\alpha| = \alpha > 0$. Если же $\alpha < 0$, то $|\alpha| = -\alpha$. Но поскольку $\alpha < 0$, то $-\alpha > 0$. Отсюда $|\alpha| > 0$. Таким образом, во всех случаях $|\alpha| \geq 0$.

2^0. Для всех действительных чисел α и β верно равенство $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

Доказательство. Рассмотрим следующие случаи:

а) Пусть $(\alpha = 0) \vee (\beta = 0)$. Тогда $|\alpha \cdot \beta| = 0 = |\alpha| \cdot |\beta|$.

б) Пусть $(\alpha < 0) \wedge (\beta > 0)$. Тогда $\alpha \cdot \beta < 0$. Следовательно, $|\alpha \cdot \beta| = -(\alpha \cdot \beta)$ и $|\alpha| \cdot |\beta| = (-\alpha) \cdot \beta = -(\alpha \cdot \beta)$. Отсюда $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

в) Случай $(\alpha > 0) \wedge (\beta < 0)$ доказывается аналогично случаю *б*).

г) Пусть $(\alpha < 0) \wedge (\beta < 0)$. Тогда $\alpha \cdot \beta > 0$ и $|\alpha \cdot \beta| = \alpha \cdot \beta$. Кроме того, $|\alpha| \cdot |\beta| = (-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha \cdot \beta$. Отсюда $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

д) Пусть $(\alpha > 0) \wedge (\beta > 0)$. Тогда $\alpha \cdot \beta > 0$. Следовательно, $|\alpha \cdot \beta| = \alpha \cdot \beta$ и $|\alpha| \cdot |\beta| = \alpha \cdot \beta$. Отсюда $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

3^0. Для всех действительных чисел α и β верно неравенство (неравенство треугольника) $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Доказательство проводится аналогично доказательству свойства 2^0. Для примера приведем доказательство в случае, когда $(\alpha > 0) \wedge (\beta < 0)$.

Пусть $|\alpha| \leq |\beta|$. Тогда $|\alpha + \beta| = |\beta| - |\alpha| \leq |\beta| + |\alpha| = |\alpha| + |\beta|$. Если же $|\alpha| \geq |\beta|$, то $|\alpha + \beta| = |\alpha| - |\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

7. Пропорция, производные пропорции. Процент и сложные проценты. Пусть a и b некоторые действительные числа, причем $b \neq 0$. Тогда число вида $\frac{a}{b}$ (т. е. $a : b$) называют отношени-

ем чисел a и b. Равенство двух отношений $a : b$ и $c : d$, т. е. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, называется *пропорцией*. Очевидно, если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{c}{d}$ и $\frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}} = \frac{c}{d}$, где $k \neq 0$.

Пусть дана пропорция $a : b = c : d$. Тогда числа a и d называются *крайними членами*, числа b и c — *средними членами пропорции*.

Основное свойство пропорции. Произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов пропорции, т. е. если $a : b = c : d$, то $a \cdot d = b \cdot c$.

Доказательство. Пусть $a : b = c : d$. Тогда $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, где $b \neq 0$ и $d \neq 0$ (иначе это равенство не имеет смысла). Умножая обе части этого равенства на число $b \cdot d$, имеем $\frac{a}{b} \cdot (b \cdot d) = \frac{c}{d} \cdot (b \cdot d)$. Откуда $a \cdot d = b \cdot c$.

Верно и обратное утверждение. Действительно, если $a \cdot d = b \cdot c$, причем $b \neq 0$ и $d \neq 0$, то разделив последнее равенство на $b \cdot d$, получим $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Таким образом, $a : b = c : d$ тогда и только тогда, когда $a \cdot d = b \cdot c$.

С помощью основного свойства пропорции можно доказать следующие пропорции, которые называются *производными пропорциями*.

Пусть $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Тогда верны следующие пропорции:

1. $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$;
2. $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$;
3. $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$;
4. $\frac{ma+nb}{pa+qb} = \frac{mc+nd}{pc+qd}$.

Для примера докажем 4-ю пропорцию. В силу основного свойства достаточно доказать, что $(ma + nb)$Ч$(pc+qd) = (pa+qb) \times (mc+nd)$. Раскрывая скобки слева, получим:

$$ma \cdot pc + nb \cdot pc + ma \cdot qd + nb \cdot qd = ma \cdot pc + np \cdot bc +$$
$$+ mq \cdot ad + nb \cdot qd = mc \cdot ap + np \cdot ad + mq \cdot bc + nb \cdot qd =$$
$$= mc \cdot (ap + qb) + nd \cdot (pa + bq) = (pa + qb) \cdot (mc + nd).$$

На практике часто приходится решать задачи, связанные с понятием процента. Обычно такие задачи решаются посредством составления пропорции между данными. Задачи, связанные с понятием процента, относятся к текстовым задачам, которые мы более подробно рассмотрим в главе VI, § 16.

Введем понятие процента и рассмотрим несколько примеров на вычисление процентов.

Сотая часть числа называется *процентом* и обозначается символом %. Запись 9 % читается как "9 процентов". Например, 40 % от числа 35 составляет $\frac{40}{100}$ его частей и, следовательно, равно $35\cdot\frac{40}{100}=14$.

Пример 11. Какой процент числа a равен числу b?

Решение: $\frac{a}{100}$ есть 1 % числа a. Пусть x % числа a равно числу b. Тогда $x\cdot\frac{a}{100}=b$ или $x=\frac{b}{a}\cdot 100$. Этот процесс можно схематизировать следующим образом:

$$\begin{array}{c} a - 100\% \\ b - x\% \\ \hline a\cdot x = b\cdot 100 \end{array}.$$

Откуда $x=\frac{b}{a}\cdot 100$. Такая схема называется *составлением пропорции*.

Пример 12. Найти число, p % которого равно числу b.

Решение: составим схему:

$$\begin{array}{c} b - p\% \\ x - 100\% \\ \hline x\cdot p = b\cdot 100 \end{array}.$$

Отсюда $x=\frac{b\cdot 100}{p}$.

Пример 13. Найти число, полученное увеличением числа a на p %.

Решение:

$$\begin{array}{c} a - 100\% \\ x - (100+p)\% \\ \hline 100\cdot x = a\cdot(100+p) \end{array}.$$

Следовательно, $x=\frac{a\cdot(100+p)}{100}$ или $x=a+\frac{a}{100}\cdot p$. Отсюда $x=a\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Пример 14. Найти число, полученное увеличением числа a на p % n раз.

Решение. Если к числу a прибавить его p % n раз, то получится число $b=a+n\cdot\left(\frac{a}{100}\cdot p\right)$ или $b=a\cdot\left(1+\frac{n\cdot p}{100}\right)$.

В этом случае говорят, что число b получено по *простому проценту*.

Прибавим к числу a его p %. Тогда получим число $b_1=a+\frac{a}{100}\cdot p=a\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)$. Теперь к полученному числу b_1 прибавим его p %. Получим $b_2=a\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)+a\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\frac{p}{100}$ или $b_2=a\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ и т. д. Повторив этот процесс n раз, получим число $b_n=a\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$. В этом случае говорят, что число b_n получено из числа a с помощью *сложного процента*.

Вопросы и задания

1. Существует ли рациональное число, квадрат которого равен 3?
2. Какие числа называются иррациональными числами?
3. Объяснить на примерах, как можно сравнить иррациональные числа?
4. Как представляются иррациональные числа на числовой прямой?
5. Определить модуль действительного числа.
6. Сформулировать свойства модуля.
7. Объяснить сложение, умножение действительных чисел.
8. Дать определение целой и дробной частей действительного числа.
9. Сформулировать основное свойство пропорции.
10. Привести несколько примеров на производные пропорции.
11. Что такое процент?
12. Объяснить простой и сложный проценты.

Упражнения

1. Доказать, что для любых различных простых чисел p и q число $\sqrt{p \cdot q}$ — иррациональное число.
2. Доказать, что сумма рационального и иррационального чисел есть иррациональное число.
3. Доказать, что произведение ненулевого рационального числа на иррациональное число есть иррациональное число.
4. Привести пример двух иррациональных чисел, произведение которых есть рациональное число. Построить точки на числовой прямой, изображающие следующие иррациональные числа: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$.
5. Найти три первые десятичные приближения с недостатком числа $\sqrt{3}$.
6. Найти с точностью до 0,001:

   а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; *б)* $\frac{3}{4}-\sqrt{5}$.
7. Найти четыре первые десятичные приближения с недостатком для следующего действительного числа: $\sqrt{3}+\sqrt{7}$.
8. Найти приближенные значения следующих чисел с точностью до 0,01:

   а) $(0{,}023):(0{,}041)$; *в)* $0{,}(3):\sqrt{5}$;

   б) $\sqrt{2}:1{,}3657$; *г)* $(-\sqrt{3}):\sqrt{2}$.

9*. Доказать иррациональность следующих чисел:

   а) $\sqrt[3]{2}$; *в)* $\sqrt{p}$, где p — простое число; *д)* $\lg 4$;

   б) $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$; *г)* $\sqrt{3k+2}$, где $k \in N$; *е)* $\lg 2+\lg 3$.

10. Освободить знаменатель от иррациональности:

   а) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; *б)* $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; *в)* $\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

---

11. Доказать, что для двух различных рациональных чисел a и b существует хотя бы одно рациональное число x такое, что $a < x < b$.

12. Привести пример двух иррациональных чисел, сумма которых есть рациональное число.
13. Найти три первые десятичные приближения с недостатком числа $-\sqrt{3}$.
14. Найти с точностью до 0,001:

   а) $\sqrt{2}+\frac{5}{8}$; *б)* $\frac{11}{9}-\sqrt{5}$.
15. Найти четыре первых десятичных приближений с недостатком для следующего действительного числа: $\sqrt{3}-\sqrt{7}$.
16. Найти приближенные значения следующих чисел с точностью до 0,01:

   а) $\sqrt{5}-\frac{5}{6}$; *б)* $\frac{1}{4}-\sqrt{6}$; *в)* $\sqrt{6-\frac{3}{8}}$; *г)* $\sqrt{7}-\sqrt{3}$.

17*. Доказать иррациональность следующих чисел:

   а) $\sqrt{3}+1$; *б)* $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; *в)* $\sqrt{333}$; *г)* $\lg 2$; *д)* $\lg 5$.

18*. Освободить знаменатель от иррациональности:

   а) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$; *б)* $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1}$; *в)* $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}+1}$.

19. Найти 40 % числа, если известно, что 28 % от этого числа равно 84.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Найти все остатки от деления нечетного натурального числа на 8.
2. Написать 5 последовательных составных чисел.
3. Найти несколько натуральных чисел n, для которых числа $n + 10$, $n + 14$ являются простыми числами.
4. Найти простое число p такое, что $2p^2 + 1$ также является простым числом.
5. Доказать, что если $p + 5$ — простое число, то $p + 10$ не может быть простым.
6. Доказать методом математической индукции, что для любого натурального числа n число 15^n при делении на 7 дает остаток 1.
7. Доказать, что все числа вида $2^{2n} + 1$ ($n = 2, 3, \ldots$) при делении на 10 дают остаток 7.

8. Доказать, что НОД $(2n, 2n+2) = 2$.

9. Доказать, что НОК $(n, n+1) = n\,(n+1)$.

10. Найти НОД $(5a + 3b, 13a + 8b)$, если НОД $(a, b) = d$.

11. Доказать, что обе части сравнения можно делить на число, взаимно простое с модулем.

12. Доказать, что обе части сравнения и модуль можно делить на одно и то же число.

13. Доказать, что если $a \equiv 1 \pmod{m}$, то для любого натурального числа n, $a^n \equiv 1 \pmod{m}$.

14. Найти все значения x, если $x \equiv 0 \pmod{3}$.

15. Доказать, что $(a-b)^p \equiv a^p - b^p \pmod{p}$.

16*. Найти значения следующих выражений:

а) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{13}-\sqrt{3}}$; *г)* $\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}$; *ж)* $\sqrt{6{,}3\cdot 1{,}8}$.

б) $\dfrac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; *д)* $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$;

в) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$; *е)* $\sqrt[3]{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^3}$;

17. Найти одно рациональное число, которое лежит между числами:

а) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}+1$; *в)* 4,63479... и 4,63497... ;

б) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$; *г)* $\sqrt{5}$ и $\sqrt{2}+1$.

18. Представить следующие периодические дроби в виде обыкновенной дроби:

а) 0,(32); *в)* 0,7(81);

б) 0,7(9); *г)* 0,56(3).

19. Построить точки на числовой прямой, изображающие следующие числа:

а) $\sqrt{3}-1$; *в)* $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}$;

б) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$; *г)* $2\sqrt{7}$.

20. Цену товара повысили на 10 %, затем новую цену повысили на 20 %. На сколько процентов в итоге повысилась первоначальная цена товара?

ГЛАВА III

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

§ 1. Алгебраическая форма комплексного числа

При решении некоторых квадратных уравнений типа $x^2 + a = 0$ $(a > 0)$, мы сталкиваемся с извлечением квадратного корня или вообще, корня четной степени из отрицательного числа. На множестве рассмотренных нами действительных чисел это действие невыполнимо.

Поэтому возникает необходимость введения нового, более широкого множества чисел. Этим множеством является множество комплексных чисел. На множестве комплексных чисел любое квадратное уравнение имеет корни.

1. Определение комплексного числа. Пусть дано квадратное уравнение

$$x^2 + 1 = 0. \qquad (1)$$

Будем считать, что уравнение (1) разрешимо, но его корень является не действительным числом, а представляет собой новое число. Это число обозначим символом i. Таким образом, помимо действительных чисел, которые мы обозначали a, b, c и т. д., имеем новое число i.

Умножение действительного числа b на число i приводит к числам вида bi, а сложение действительного числа a с числами вида bi — к числам $a + bi$, где $a \in R$, $b \in R$.

Таким путем и вводились первоначально комплексные числа. При таком способе определения комплексных чисел возникает много вопросов: что же представляет собой число i, можно ли распространять на него законы арифметики, законно ли рассматривать выражения, содержащие вместе действительные числа и число i и т. д. Если не ответить на эти вопросы, то теория комплексных чисел — это плод чистого воображения. Таким образом, необходимо точное определение комплексных чисел.

Строгое обоснование комплексных чисел важно потому, что эти числа используются в ряде приложений математики. Теория функций комплексной переменной является мощным инструментом в физике (механике, электро- и радиотехнике, гидродинамике и т. д.).

Первоначальная запись комплексного числа в виде $a + bi$ приводит к мысли о задании комплексного числа упорядоченной парой $(a; b)$ действительных чисел.

Определение 1. *Комплексным числом* называется любая упорядоченная пара $(a; b)$ действительных чисел.

Множество всех комплексных чисел будем обозначать через C.

Определение 2. Два комплексных числа $(a_1; b_1)$ и $(a_2; b_2)$ называются равными, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$. В этом случае пишут $(a_1; b_1) = (a_2; b_2)$.

Комплексные числа будем обозначать буквами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Определение 3. Сумма двух комплексных чисел $\alpha = (a_1; b_1)$ и $\beta = (a_2; b_2)$ определяется равенством $\alpha + \beta = (a_1 + a_2; b_1 + b_2)$, разность определяется равенством $\alpha - \beta = (a_1 - a_2; b_1 - b_2)$, произведение определяется равенством $\alpha \cdot \beta = (a_1a_2 - b_1b_2; a_1b_2 + a_2b_1)$, а частное от деления α на β определяется равенством $\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}; \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right)$ при условии, что $\beta = (a_2; b_2) \neq (0; 0)$.

Например:

$$(-4; 3) + (3; -1) = (-1; 2),$$
$$(-4; 3) \cdot (3; -1) = (-4 \cdot 3 - 3 \cdot (-1); -4 \cdot (-1) + 3 \cdot 3) = (-9; 13),$$
$$(0; 2) \cdot (0; 2) = (-4; 0).$$

Основные свойства арифметических действий остаются справедливыми и для комплексных чисел.

1^0. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ — коммутативность сложения;
2^0. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ — коммутативность умножения;
3^0. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ — ассоциативность сложения;
4^0. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ — ассоциативность умножения;
5^0. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ — дистрибутивность умножения относительно сложения.

Покажем, например, справедливость свойства 5^0.

Пусть $\alpha = (a_1; b_1)$, $\beta = (a_2; b_2)$, $\gamma = (a_3; b_3)$. Тогда

$$\alpha(\beta + \gamma) = (a_1; b_1)(a_2 + a_3; b_2 + b_3) = (a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3);$$
$$a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3)) = (a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3;$$
$$a_1b_2 + a_1b_3 + b_1a_2 + b_1a_3).$$

Для правой части 5^0 имеем:

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = (a_1a_2 - b_1b_2; a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1a_3 - b_1b_3; a_1b_3 + a_3b_1) =$$
$$= (a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3; a_1b_2 + a_1b_3 + a_3b_1 + a_2b_1).$$

Сравнивая результаты двух вычислений, убеждаемся в справедливости равенства $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Рассмотрим теперь множество C^*, состоящее из комплексных чисел вида $(a; 0)$. Очевидно, что C^* является подмножеством множества C, т. е. $C^* \subset C$.

Если действительному числу a сопоставить комплексное число $(a; 0)$, т. е. $a \to (a; 0)$, то получим соответствие между множеством действительных чисел $\boldsymbol{R}$ и множеством C^*. Очевидно, что это соответствие является взаимно однозначным.

Если отождествить действительное число a с комплексным числом $(a; 0)$, то множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$ окажется подмножеством множества комплексных чисел C. В этом смысле говорят, что множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел.

2. Алгебраическая форма комплексного числа. Среди комплексных чисел особую роль играет число $(0; 1)$, которое обозначают буквой i.

При умножении комплексных чисел $(b; 0)$ и $(0; 1)$ имеем:

$$(b; 0) \cdot (0; 1) = (0; b),$$

где b — любое действительное число. Тогда число $(a; b)$ можно записать в виде:

$$(a; b) = (a; 0) + (0; b) = (a; 0) + (b; 0) \cdot (0; 1) = (a; 0) + (b; 0)i.$$

Так как $(a; 0) \to a$, а $(b; 0) \to b$, то получим $(a; b) = a + bi$.

Таким образом, мы пришли к представлению комплексного числа $(a; b)$ в виде $a + bi$, которое называется *алгебраической формой комплексного числа.* Именно это представление комплексных чисел приводит к (нестрогому) построению комплексных чисел. Тем не менее, запись комплексных чисел в этом виде очень удобна для арифметических действий сложения, умножения и деления комплексных чисел. Для возведения в степень, извлечения корня и умножения нескольких комплексных чисел более удобна другая форма, которую мы рассмотрим в следующем параграфе.

Пусть α и β — два комплексных числа, т. е. $\alpha = a + bi$; $\beta = c + di$. Тогда суммой $\alpha + \beta$ является число, задаваемое формулой:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Разностью $\alpha - \beta$ является комплексное число, задаваемое формулой: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.

Произведением $\alpha \cdot \beta$ является комплексное число, задаваемое формулой $(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$. Комплексное число $a + 0i$ будем записывать как a, а комплексное число $0+ bi$ — как bi. В частности,

$$i=0+1i,\quad i^2=i\cdot i=(0+1i)\cdot(0+1i)=-1+0i=-1.$$

О п р е д е л е н и е 4. Если задано комплексное число $\alpha=a+bi$, то число a называется *действительной частью* числа α, а число b называется *мнимой частью* числа α.

Действительную часть числа α обозначают $\mathrm{Re}(\alpha)$ (от *франц.* reele — действительный), а мнимую часть обозначают через $\mathrm{Im}(\alpha)$ (от *франц.* imaginare — мнимый). Например, $\mathrm{Re}(2+5i)=2$, $\mathrm{Im}(2+5i)=5$. Если $\mathrm{Im}(\alpha)=0$, то число α — действительное; если $\mathrm{Re}(\alpha)=0$, то число α имеет вид bi и называется чисто мнимым.

3. Сопряженное число.

О п р е д е л е н и е 5. Число $a-bi$, отличающееся от $\alpha = a+bi$ лишь знаком при мнимой части, называется *сопряженным* числу α и обозначается $\overline{\alpha}$, т. е. $\overline{\alpha}=a-bi$.

Сумма и произведение сопряженных комплексных чисел являются действительными числами. Действительно,

$$\alpha+\overline{\alpha}=(a+bi)+(a-bi)=(a+a)+(b-b)i=2a,$$

$$\alpha\cdot\overline{\alpha}=(a+bi)\cdot(a-bi)=(a^2+b^2)+(ab-ab)i=a^2+b^2.$$

Рассмотрим деление комплексных чисел. Пусть $\alpha=a+bi$ и $\beta=c+di$ — два комплексных числа, причем $(c, d)\neq(0, 0)$. Результатом деления числа α на число β является комплексное число $\dfrac{\alpha}{\beta}$, задаваемое формулой $\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$. На практике для нахождения частного $\dfrac{\alpha}{\beta}$ обычно пользуются следующим правилом:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\overline{\beta}}{\overline{\beta}}=\frac{\alpha\cdot\overline{\beta}}{\beta\cdot\overline{\beta}}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{ac-bdi^2+bci-adi}{c^2-(di)^2}=$$

$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

П р и м е р: $\dfrac{2+i}{4+3i}=\dfrac{(2+i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\dfrac{8+3+4i-6i}{4^2+3^2}=\dfrac{11}{25}-\dfrac{2}{25}i.$

З а м е ч а н и е. В отношении комплексных чисел не вводится понятие «больше» или «меньше».

4. Геометрическое изображение комплексных чисел. Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат с осями x и y. Тогда комплексному числу $\alpha=a+bi$ на плоскости соответствует точка с координатами a, b. Эту точку будем обозначать той же буквой α.

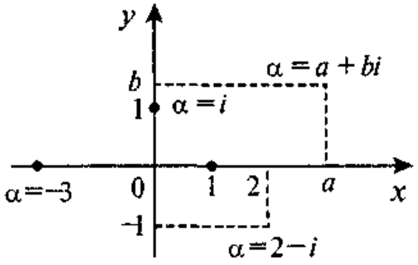


Рис. 16

При таком способе изображения комплексных чисел действительному числу a, т. е. числу вида $a + 0i$ будет соответствовать точка (a; 0), которая лежит на оси x. Поэтому ось x называют *действительной осью*. Числу же вида $0 + bi$ будет соответствовать точка (0; b) на оси y. Поэтому ось y называют *мнимой осью* (рис. 16).

Наряду с изображением комплексных чисел точками на плоскости применяется способ изображения с помощью векторов на плоскости (рис.17). Числу $a + bi$ ставится в соответствие вектор с координатами a и b, причем этот вектор считается отложенным от начала координат. При таком способе изображения комплексных чисел их сложение осуществляется по правилу параллелограмма (рис. 18).

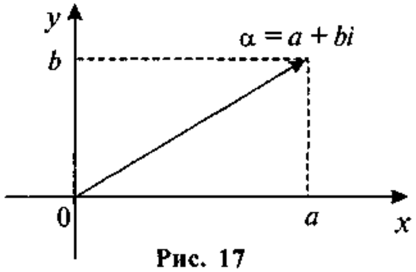


Рис. 17

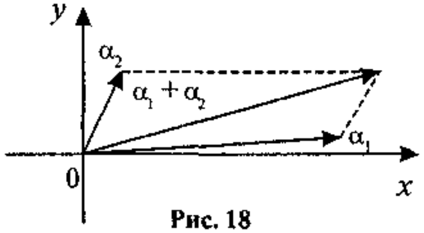


Рис. 18

Вопросы и задания

1. Объяснить необходимость введения комплексных чисел.
2. Как вводятся комплексные числа ?
3. Какие два комплексных числа называются равными ?
4. Как определяется сумма двух комплексных чисел и произведение ?
5. По какому правилу складываются и вычитаются комплексные числа?
6. Как определяется сопряженное число ?
7. По какому правилу производится деление комплексных чисел ?
8. Как изображается комплексное число в прямоугольной системе координат?
9. Как можно сложить комплексные числа в прямоугольной системе координат?

Упражнения

1. Найти действительную часть $\mathrm{Re}(\alpha)$ и мнимую часть $\mathrm{Im}(\alpha)$ комплексного числа α:

а) $\alpha=-3+7i$; *в)* $\alpha=-2-5i$; *д)* $\alpha=3i$;
б) $\alpha=4-\frac{1}{2}i$; *г)* $\alpha=-2{,}7+3i$; *е)* $\alpha=7$.

2. Написать комплексное число α в алгебраической форме, если:

а) $\mathrm{Re}(\alpha)=4,\quad \mathrm{Im}(\alpha)=-5$; *г)* $\mathrm{Re}(\alpha)=7,\quad \mathrm{Im}(\alpha)=0$;
б) $\mathrm{Re}(\alpha)=-2,\ \mathrm{Im}(\alpha)=3$; *д)* $\mathrm{Re}(\alpha)=0,\quad \mathrm{Im}(\alpha)=0$.
в) $\mathrm{Re}(\alpha)=0,\quad \mathrm{Im}(\alpha)=8$;

3. Какие комплексные числа равны:

$4-3i;\ 1+3i;\ \frac{1}{3}+i;\ \sqrt{16}-\sqrt{9}i;\ 3+4i;\ \sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{64}i.$

4. Написать сопряженное число $\overline{\alpha}$ для α:

а) $\alpha=5-3i$; *г)* $\alpha=2+3i$; *ж)* $\alpha=\sqrt{16}-\sqrt{9}i$;
б) $\alpha=-5+3i$; *д)* $\alpha=7{,}2$; *з)* $\alpha=-2i+(-7+3i)$.
в) $\alpha=1-i$; *е)* $\alpha=6i$;

5. Найти сумму:

а) $(-5+3i)+(2-i)$; *д)* $(8-3i)+(8+3i)$;
б) $(3+4i)+(3-4i)$; *е)* $(-7+5i)+(7-5i)$;
в) $(2+5i)+(-2-5i)$; *ж)* $9i+(3-8i)$;
г) $(2{,}4-4i)+(3{,}6-3i)$; *з)* $-17i+(-9+16i)$.

6. Найти разность:

а) $(3+4i)-(4+2i)$; *д)* $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}i\right)-(2+2i)$;
б) $(4-6i)-(3+2i)$; *е)* $7-(8+5i)$;
в) $(2+4i)-(-4+2i)$; *ж)* $9-\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}-i\right)$;
г) $(5+4i)-(5-4i)$; *з)* $7i-(6i+3)$.

7. Найти произведение:

а) $(4+6i)(3+4i)$; *г)* $(-3+2i)(8-4i)$;
б) $(5+8i)(3-2i)$; *д)* $\left(\frac{1}{3}-i\right)\left(\frac{1}{2}+i\right)$;
в) $(6-4i)(3-6i)$; *е)* $\left(\frac{5}{7}+4i\right)\left(\frac{7}{5}-2i\right)$.

8. Найти частное:

а) $\frac{2+2i}{1-2i}$; *б)* $\frac{4-5i}{3+2i}$; *в)* $\frac{3+4i}{3-4i}$; *г)* $\frac{2+3i}{4-3i}$; *д)* $\frac{4-5i}{-2+3i}$; *е)* $\frac{3}{5-2i}$; *ж)* $\frac{5-2i}{3}$; *з)* $\frac{7i}{13-i}$; *и)* $\frac{7-i}{5i}$.

9. Выполнить действия:

а) $\frac{(3-4i)(4-3i)}{2+i}$; *г)* $\frac{3-2i}{(1+i)(3-i)}$;
б) $\frac{(4-i)(3+2i)}{3-2i}$; *д)* $\frac{3}{2-3i}+\frac{3}{2+3i}$;
в) $\frac{5-2i}{(2+i)(1-i)}$; *е)* $\frac{2}{1+i}+\frac{5}{2+i}$.

10. Найти z из равенства:

а) $z(2-i)=3+i$; *в)* $z(1-i)-3i=4$;
б) $z(1+2i)=3-5i$; *г)* $z(2+i)+5=2i$.

11. Разложить на комплексно-сопряженные множители (a и b — действительные числа):

а) a^2+9b^2; *г)* $49a^2+7b^2$; *ж)* a^n+11b^n;
б) $4a^2+25b^2$; *д)* $8a^2+27b^4$; *з)* $4a^2+\sqrt{7}b^{10}$.
в) $16a^2+8b^2$; *е)* $15a^4+31b^8$;

12. Изобразить комплексное число α в прямоугольной системе координат:

а) $\alpha=2+i$; *б)* $\alpha=-2+3i$;

в) $\alpha = -2 - i$;   *д)* $\alpha = 3i$;   *ж)* $\alpha = 1 + 2i(1 - i)$;

г) $\alpha = 2 - 3i$;   *е)* $\alpha = 0{,}5$;   *з)* $\alpha = 2i - 3i(1 + 2i)$.

13. Выполнить действия:

а) $5i(2 - i) - 3i + 4$;   *г)* $2(0{,}5 + 2{,}5i)(4 + 2i) - 6i$;

б) $3 - 7i + (1 + 3i)(2 - i)$;   *д)* $3i^{1997} - 3 + 7i$;

в) $4i(2 + i) + 4i(5 - i)$;   *е)* $i^{2003} - i^{2002} + i^{2001}$.

14. Вычислить:

а) $\dfrac{(3+2i)(2+3i)}{1-i}$;   *д)* $\dfrac{5-i}{5+i} + \dfrac{4+i}{4-i}$;

б) $\dfrac{(2-i)(1-3i)}{2+i}$;   *е)* $\dfrac{i^5 + i^{10}}{3-2i} + \dfrac{i}{4-3i}$;

в) $\dfrac{4-3i}{(2-i)(3+i)}$ *ж)* $\dfrac{5}{8}i^{12} + i^3(1 - i^5)$.

г) $\dfrac{7}{3-4i} + \dfrac{5}{3+4i}$;

15. Возвести в степень:

а) $(2-3i)^2$;   *д)* $\left(\dfrac{2-i}{1+i}\right)^2$;

б) $(3+4i)^3$;   *е)* $\left(\dfrac{i^5-1}{i^7+1}\right)^2$;

в) $(2+3i)^2 - (2-3i)^2$;   *ж)* $\left(\dfrac{3+i^7}{4-i^3}\right)^2$.

г) $(2-5i)^3 + (2+5i)^3$;

16. Записать α в алгебраической форме:

а) $\alpha = \dfrac{-20+25i}{15} - \dfrac{5i+1}{1-3i}$;   *б)* $\alpha = \dfrac{9+7i}{6i+8} + \dfrac{(i+1)^2}{2-i}$.

17. При каких действительных значениях x и y комплексные числа $\alpha_1 = 5y^2 - 9 - 10xi^5$ и $\alpha_2 = 4y^2 + 20i^{11}$ являются сопряженными?

18. Пусть даны комплексные числа $\alpha_1 = a + bi$ и $\alpha_2 = c + di$.
Показать, что если:

а) $\alpha_1 + \alpha_2 = x$ и $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = y$, где $x; y \in R$, то $\alpha_1 = \overline{\alpha_2}$;

б) $\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\alpha_2} = A \in R$ и $\dfrac{1}{\alpha_1} \cdot \dfrac{1}{\alpha_2} = B \in R$, то $\alpha_1 = \overline{\alpha_2}$.

19. Найти комплексное число α из равенства:
$(2i - \alpha)(1 + 2i) + (1 + i\alpha)(3 - 4i) = 1 + 6i$.

20. Изобразить заданное комплексное число α с помощью вектора:

а) $\alpha = 3 + 4i$;   *д)* $\alpha = 2i$;   *и)* $\alpha = \dfrac{2+i}{2-i}$;

б) $\alpha = 3 - 4i$;   *е)* $\alpha = -3i$;   *к)* $\alpha = (2-i)(1+i)$;

в) $\alpha = -3 + 4i$;   *ж)* $\alpha = 4 - 2i$;   *л)* $\alpha = (2+i)(2-i)$.

г) $\alpha = -3 - 4i$;   *з)* $\alpha = i^3 + 3i$;

§ 2. Тригонометрическая форма комплексного числа и ее применение

Из курса средней школы известны элементы тригонометрии. Учитывая это, в настоящем параграфе мы приведем еще одну форму записи комплексного числа и рассмотрим ее применение.

1. Модуль и аргумент комплексного числа. Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Комплексное число $\alpha = a + bi$ в этой системе координат изображается точкой A с координатами a и b. Для точки A можно определить также новые координаты (полярные координаты) r и φ, где $r = |OA|$, а φ есть угол между положительным направлением оси Ox и вектором $\overline{OA}$ (рис. 19). Для того, чтобы соответствие между точками

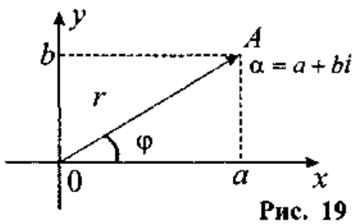


Рис. 19

плоскости и ее координатами было взаимно однозначным, на r и φ налагают ограничения, например, в виде $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

Очевидно, что

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{1}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \sin\varphi = \frac{b}{r}. \tag{2}$$

Определение 1. Пусть $\alpha = a + bi$ — отличное от нуля комплексное число. Действительное число r, определенное равенством (1), называется *модулем* комплексного числа α, а число φ, определяемое из (2) — *аргументом* числа α.

Модуль комплексного числа α обозначается $|\alpha|$, а аргумент — символом $\operatorname{Arg}\alpha$. Аргумент числа α имеет бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга слагаемыми, кратными 2π. Значение аргумента, заключенное в промежутке $[0\,;\,2\pi)$ называют *главным значением* и его обозначают через $\arg\alpha : 0 \le \arg\alpha < 2\pi$.

Формулы (1) и (2) позволяют для комплексного числа $\alpha = a + bi$ находить модуль r и аргумент φ. Обратно, если заданы два действительных числа r и φ, причем $r \ge 0$, то существует комплексное число $a + bi$, для которого r и φ являются соответственно модулем и аргументом. При этом число $a + bi$ находится с помощью равенств:

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi \tag{3}$$

Используя формулы (3), для комплексного числа $\alpha = a + bi$ получим следующее представление:

$$\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{4}$$

Определение 2. Представление комплексного числа α в виде (4), где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, называется *тригонометрической формой комплексного числа*.

Пример 1. Представить в тригонометрической форме комплексные числа: *а*) i; *б*) $-2i$; *в*) $-1-i$.

Решение.

а) Имеем $r = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;

б) Здесь $r = 2$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Откуда $-2i = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$;

в) Здесь $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{5\pi}{4}$, значит $-1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

2. Умножение и деление комплексных чисел. Тригонометрическую форму комплексного числа удобно использовать при выполнении операций умножения и деления комплексных чисел.

Пусть $\alpha_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $\alpha_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ — комплексные числа, заданные в тригонометрической форме. Тогда

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = r_1 \cdot r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Выполнив умножение, получим:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \tag{5}$$

Отсюда вытекает следующее правило умножения двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме: при умножении комплексных чисел α_1 и α_2, модули этих чисел умножаются, а аргументы складываются.

Формула (5) справедлива для любого числа n сомножителей:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \dots \alpha_n = r_1 \cdot r_2 \dots r_n[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)], \tag{6}$$

где r_i и φ_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ — соответственно модуль и аргумент числа α_i.

Рассмотрим теперь деление комплексных чисел. Пусть α_1 и α_2 заданы в тригонометрической форме, причем $r_1 \ne 0$ (т. е. $\alpha_1 \ne 0$). Тогда

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)} = \frac{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)}{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)} =$$

$$= \frac{r_2}{r_1}\frac{\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos^2\varphi_1 - i^2\sin^2\varphi_1} = \frac{r_2}{r_1}[\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i\sin(\varphi_2 - \varphi_1)].$$

Таким образом,

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{r_2}{r_1}[\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i\sin(\varphi_2 - \varphi_1)], \tag{7}$$

т. е. для нахождения частного $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ следует модуль числа α_2 разделить на модуль числа α_1, а из аргумента числа α_2 вычесть аргумент числа α_1.

П р и м е р 2. *а*) Умножим числа $\alpha_1 = 3(\cos 20° + i\sin 20°)$ и $\alpha_2 = 2(\cos 35° + i\sin 35°)$. По указанному выше правилу имеем $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 6(\cos 55° + i\sin 55°)$.

б) Умножим числа $\alpha_1 = 2(\cos 140° + i\sin 140°)$, $\alpha_2 = 3(\cos 150° + i\sin 150°)$ и $\alpha_3 = 5(\cos 70° + i\sin 70°)$. Имеем:

$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 = 2\cdot 3\cdot 5\,[\cos\,(140° + 150° + 70°) + i\sin\,(140° + 150° + 70°)] =$
$= 30(\cos 360° + i\sin 360°) = 30.$

Очевидно, что умножение этих чисел в алгебраической форме потребовало бы гораздо больше вычислений и времени.

в) Разделим число $\alpha_1 = 6(\cos 50° + i\sin 50°)$ на

$\alpha_2 = 2(\cos 25° + i\sin 25°)$. Используя формулу (7), имеем:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{6}{2}[\cos(50° - 25°) + i\sin(50° - 25°)] = 3(\cos 25° + i\sin 25°).$$

г) Разделим $\alpha_1 = \sqrt{3}(\cos 260° + i\sin 260°)$ на

$\alpha_2 = 2[\cos(-100°) + i\sin(-100°)]$.

Имеем: $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}[\cos 360° + i\sin 360°] = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. В о з в е д е н и е в с т е п е н ь. Пусть требуется возвести в квадрат комплексное число $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Применив формулу (5) для произведения, получим:

$$\alpha^2 = r^2(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi).$$

Аналогично будем иметь:

$$\alpha^3 = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^3 = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi).$$

Вообще, если имеется n сомножителей, равных $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то применяя формулу (6), получаем:

$$\alpha^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (8)$$

и следующее правило:

Модуль степени комплексного числа равен той же степени модуля комплексного числа, а аргумент степени равен аргументу комплексного числа, умноженному на показатель степени.

При $r = 1$, в частности, получаем формулу:

$$\alpha^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,$$

называемую *формулой Муавра* по имени французского математика Муавра (1667–1754).

П р и м е р 3.

а) Возвести в куб число $\alpha = 3(\cos 15° + i\sin 15°)$. Имеем:

$$\alpha^3 = 27(\cos 45° + i\sin 45°) = \frac{27}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = \frac{27}{\sqrt{2}}(1 + i).$$

б) Возвести в 10-ю степень число $\alpha = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Сначала представим число α в тригонометрической форме. Имеем: $r = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3} = 60°$, $\alpha = 1\cdot(\cos 60° + i\sin 60°)$. Отсюда, используя формулу (8), получим:

$$\alpha^{10} = (\cos 600° + i\sin 600°) = \cos 240° + i\sin 240° = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

4. Извлечение корня из комплексного числа. Пусть требуется извлечь квадратный корень из комплексного числа α, заданного в тригонометрической форме $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Обозначим через x и y соответственно модуль и аргумент искомого корня. Тогда

$$\sqrt{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = x(\cos y + i\sin y).$$

Возведя обе части в квадрат, получим:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = x^2(\cos 2y + i\sin 2y).$$

По условию равенства двух комплексных чисел имеем: $x^2 = r$, $2y = \varphi + 2\pi n$, откуда $x = \sqrt{r}$, $y = \dfrac{\varphi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. Значит, корень квадратный из числа α равен

$$\beta = \sqrt{r}\left[\cos\frac{\varphi + 2\pi n}{2} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi n}{2}\right]. \qquad (9)$$

Задавая n значения 0, ±1, ±2 , …, получим:
при $n=0$

$$\beta_1=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)\ ;$$

при $n=1$

$$\beta_2=\sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)\right].$$

Так как $\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)=-\cos\frac{\varphi}{2}$, а $\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)=-\sin\frac{\varphi}{2}$, то

$\beta_2=-\sqrt{r}\left[\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right]$. При $n=2$ имеем:

$$\beta_3=\sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+2\pi\right)\right]=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)=\beta_1 .$$

При $n=3$ получим: $\beta_4=\beta_2$. Очевидно, задавая n значения 4, 5, 6, ..., мы будем получать значения, соответственно равные β_1 и β_2. То же будем иметь, задавая n отрицательные целые значения. Таким образом, квадратный корень из комплексного числа имеет только два различных значения, которые по отношению друг к другу являются противоположными числами.

Пример 4. Пусть $\alpha=9(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$. Извлекая квадратный корень, имеем: $\sqrt{\alpha}=3\left[\cos(30^\circ+180^\circ n)+i\sin(30^\circ+180^\circ n)\right]$. Отсюда, при $n=0$ получим: $\sqrt{\alpha}=3(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)=\frac{3}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$.

При $n=1$ получим: $\sqrt{\alpha}=3(\cos 210^\circ+i\sin 210^\circ)=-\frac{3}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$.

Если комплексное число задано в алгебраической форме, т. е. в виде $\alpha=a+bi$, то извлечь из него квадратный корень можно следующим образом. Пусть $\sqrt{\alpha}=\xi=x+yi$. Тогда $(x+iy)^2=\alpha=a+bi$ или $x^2-y^2+2xyi=a+bi$.

Согласно определению равенства двух комплексных чисел имеем:

$$\begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{cases} \qquad (10)$$

При $\alpha\neq 0$ этой системе удовлетворяют две пары чисел, причем если одна пара есть $x=x_0$, $y=y_0$, то вторая $x=-x_0$, $y=-y_0$, т. е. $\sqrt{\alpha}$, имеет два значения x_0+y_0i и $-(x_0+y_0i)$, отличающиеся друг от друга множителем -1.

На практике для извлечения квадратного корня из числа $\alpha=a+bi$, удобнее предварительно записать его сначала в тригонометрической форме, а затем применить формулу (9).

Возможность извлечь квадратный корень из произвольного комплексного числа α означает, что на множестве комплексных чисел разрешимо любое квадратное уравнение.

Пример 5. Рассмотрим уравнение $x^2+2x+3=0$. Оно имеет два различных корня: $x_1=-1+\sqrt{2}i$, $x_2=-1-\sqrt{2}i$.

Перейдем к общему случаю. Пусть требуется извлечь корень n-й степени из числа α, заданного в тригонометрической форме $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Заметим, что если число α задано в виде $\alpha=a+bi$, то необходимо перейти к тригонометрической форме, так как попытка решить эту задачу в алгебраической форме может привести к чрезвычайно сложным вычислениям. Итак, пусть число $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ и $\sqrt[n]{\alpha}=\xi=p(\cos\psi+i\sin\psi)$.

Тогда $\alpha=\xi^n=p^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Отсюда следует, что $p^n=r$, $n\psi=\varphi+2\pi k$, $k\in Z$.

Из первого равенства находим, что $p=\sqrt[n]{r}$ (это арифметическое значение корня. Точное определение этого понятия будет дано в главе V, § 2), из второго равенства следует $\psi=\frac{\varphi+2\pi k}{n}$.

Таким образом, получаем следующее представление:

$$\sqrt[n]{\alpha}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \qquad (11)$$

где k — любое целое число.

Для $\sqrt[n]{\alpha}$ имеется ровно n различных значений. Для того чтобы получить эти значения, достаточно в правой части формулы (11) положить k равным $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Таким образом, точки вида $\xi_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$,

$k \in Z$ располагаются на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат. При этом, если значение k изменяется на 1, то угол $\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}$ изменяется на величину $\dfrac{2\pi}{n}$, т. е. на $\dfrac{1}{n}$ — часть полного угла 2π. Это означает, что точки $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1}$ делят окружность на n равных частей (рис. 20, $n=6$).

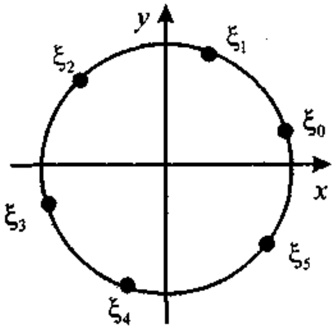


Рис. 20

При остальных значениях k новые точки ξ_k будут повторять указанные выше точки. Таким образом, корень n-ой степени из отличного от нуля комплексного числа α имеет n различных значений, определяемых формулой (11). Точки, соответствующие этим значениям, расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат и делят окружность на n равных частей.

Пример 6. Найти все значения $\sqrt[4]{-1+i}$.

Имеем $-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$, так что $r=\sqrt{2}$, $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$.

По формуле (11) находим:

$$\sqrt[4]{-1+i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{4}\right).$$

Полагая k последовательно равным 0, 1, 2, 3, найдем все четыре значения $\sqrt[4]{-1+i}$. Этими значениями являются:

при $k=0$ $\quad \sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{16}+i\sin\dfrac{3\pi}{16}\right)$,

при $k=1$ $\quad \sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{16}+i\sin\dfrac{11\pi}{16}\right)$,

при $k=2$ $\quad \sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{19\pi}{16}+i\sin\dfrac{19\pi}{16}\right)$,

при $k=3$ $\quad \sqrt[8]{2}\left(\cos\dfrac{27\pi}{16}+i\sin\dfrac{27\pi}{16}\right)$.

Вопросы и задания

1. Как определяются модуль и аргумент комплексного числа?
2. Какой вид имеет комплексное число в тригонометрической форме?
3. Сформулировать условие равенства двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме.
4. Сформулировать правило умножения и деления комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме.
5. Сформулировать правило, по которому производится возведение в степень комплексного числа, заданного в тригонометрической форме.
6. Сколько значений имеет квадратный корень из комплексного числа?
7. Как находятся корни n-ой степени из отличного от нуля комплексного числа?

Упражнения

1. Найти модуль комплексного числа α:

а) $\alpha=2+3i$; *б)* $\alpha=-2+3i$; *в)* $\alpha=1+\sqrt{3}i$; *г)* $\alpha=\sqrt{8}-i$; *д)* $\alpha=6-8i$; *е)* $\alpha=2+2\sqrt{3}i$; *ж)* $\alpha=\sqrt{3}+i$; *з)* $\alpha=2i$; *и)* $\alpha=\cos\beta-i\sin\beta$ $(\beta\in R)$; *к)* $\alpha=(3+2i)(2-3i)$.

2. Найти аргумент $\arg\alpha$ комплексного числа:

а) $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$; *б)* $\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$; *в)* $\alpha=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; *г)* $\alpha=2\sqrt{2}i$; *д)* $\alpha=5$; *е)* $\alpha=-2i$; *ж)* $\alpha=\dfrac{\sqrt{33}}{2}-\dfrac{\sqrt{11}}{2}i$.

3. Записать комплексные числа в тригонометрической форме:

а) $\alpha=-2-2i$; *б)* $\alpha=2-2i$; *в)* $\alpha=\sqrt{3}-i$; *г)* $\alpha=1-\sqrt{3}i$; *д)* $\alpha=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$; *е)* $\alpha=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; *ж)* $\alpha=\dfrac{\sqrt{33}}{2}-\dfrac{\sqrt{11}}{2}i$; *з)* $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$; *и)* $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$.

4. Найти произведение чисел:

а) $\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ и $\alpha_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

б) $\alpha_1 = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$ и $\alpha_2 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$;

в) $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ и $\alpha_2 = \sqrt{3}(\cos\pi + i\sin\pi)$;

г) $\alpha_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}\right)$ и $\alpha_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

5. Найти частное $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, если:

а) $\alpha_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$, $\alpha_2 = 2(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$;

б) $\alpha_1 = 8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $\alpha_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

в) $\alpha_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$, $\alpha_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$;

г) $\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$, $\alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

6. Возвести в степень:

а) $\left(3\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)\right)^5$;

б) $\left(\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^6$;

в) $\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)\right)^7$;

г) $\left(4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^4$;

д) $\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)^{10}$;

е) $\left(\cos\frac{\pi}{22} + i\sin\frac{\pi}{22}\right)^{11}$.

7. Используя формулу Муавра, выразить через $\cos\gamma$ и $\sin\gamma$:

а) $\cos 3\gamma$; *б)* $\sin 3\gamma$; *в)* $\cos 4\gamma$; *г)* $\sin 4\gamma$.

8. Выполнить действия:

а) $\frac{(1+i)^5\left(\sqrt{2}-i\right)^4}{(1-i)\left(1+\sqrt{2}\,i\right)^4}$;

б) $\frac{(1-i)^4\left(\sqrt{2}+i\right)^3}{(1+i)^4}$;

в) $\frac{(1+i)^{15}}{(1-i)^{10}-(1+i)^{10}\cdot i}$.

9. Извлечь квадратный корень из α, если:

а) $\alpha = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

б) $\alpha = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)$;

в) $\alpha = \cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}$;

г) $\alpha = \cos\frac{3\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}$.

10. Найти корни третьей и четвертой степени из числа α, если $\alpha = 8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

11. Найти все значения x, удовлетворяющие равенству $x^6 = 3\left(\cos 2\gamma + i\cdot\sin 2\gamma\right)$.

12. Найти все значения x, удовлетворяющие равенству:

а) $x^2 + 4ix + 8 = 0$; *б)* $x^2 - 6ix + 18 = 0$; *в)* $x^2 - 8ix + 12 = 0$.

13. Найти все значения комплексного числа α, удовлетворяющие равенству:

а) $8\alpha^3 - 27 = 0$; | *б)* $\alpha^5 + 243 = 0$; | *в)* $\alpha^4 - 12\alpha^2 + 11 = 0$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Вычислить:

а) $(3+4i)(2-5i)+(3-4i)(2+5i)$;

б) $(1+3i)^3 - \left(4+i^5\right)$;

в) $\frac{(1-2i)^2}{1+3i}$;

г) $5 - 7i + 8i^2 - 9i^3 + i^4$.

2. Записать α в алгебраической форме:

а) $\alpha = \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{3i}\right)^2$;

б) $\alpha = \frac{12-13i}{8+6i} + \frac{(1+2i)^2}{i+3}$.

3. Используя тригонометрическую форму записи числа, произвести действия:

а) $(1+i)^{10}$; в) $(1-i)^4\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^3$;

б) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^8$; г) $\dfrac{2\sqrt{3}-2i}{(-1+i)\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\ i\right)}$.

4. Найти комплексное число α, удовлетворяющее равенству $(i+\alpha)(1-2i)+(1+i\alpha)(3+4i)=2+4i$ и записать его в алгебраической и тригонометрической формах.

5. Найти действительные и мнимые части комплексных чисел:

а) $\alpha=\dfrac{(2+i)^2}{3-4i}$; в) $\alpha=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^5$;

б) $\alpha=\dfrac{(1+2i)^3}{2i}-3i^{10}$; г) $\alpha=\dfrac{3+2i}{1+4i}-i^7$.

6. Выполнить действия:

а) $\dfrac{2+5i}{2-5i}+\dfrac{2-5i}{2+5i}$; в) $(2-3i)^3-(2+3i)^3$;

б) $\dfrac{12+5i}{6-8i}+\dfrac{(2-i)^2}{1-2i}$; г) $\dfrac{(4+3i)(2+3i)^2}{6+8i}$.

7. Установить, при каких действительных значениях x и y равны следующие комплексные числа:

а) $\alpha_1=x^2+xyi-5+i$ и $\alpha_2=xi-y^2+yi$;

б) $\alpha_1=x^2-3(1+i)-5xi$ и $\alpha_2=y(1-i)$.

8. Установить, при каких действительных значениях x и y являются сопряжёнными следующие комплексные числа:

а) $\alpha_1=2x^2-2i+1$ и $\alpha_2=2y+2x^2i+3-i$;

б) $\alpha_1=(x+i)^2-y^2$ и $\alpha_2=10-2yi-2i$.

9. Изобразить на координатной плоскости множество точек, для которых выполняются условия:

а) $-2<\operatorname{Re}(\alpha)\le 3$; в) $|\alpha|\le 3$; д) $1\le|\alpha+2|<3{,}5$.

б) $-2<\operatorname{Im}(\alpha)<2$; г) $|\alpha+i|>2$;

10. Выполнить умножение:

а) $(2-2i)\cdot 2\sqrt{3}\left(\cos 70^\circ+i\sin 70^\circ\right)$;

б) $\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)\cdot\left(\sqrt{3}-3i\right)$.

11. Выполнить деление:

а) $5\left(\cos 100^\circ+i\sin 100^\circ\right):\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$;

б) $(6+6i):3\left(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ\right)$.

12. Возвести в степень:

а) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^5$; в) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}i\right)^{10}$;

б) $\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)^{10}$; г) $(2+2i)^6$.

13. Извлечь корни из комплексных чисел:

а) $\sqrt[3]{-27i}$; в) $\sqrt[4]{8+8\sqrt{3}\ i}$;

б) $\sqrt{6-6\sqrt{3}i}$; г) $\sqrt[8]{-256}$.

14. Определить Z_1 и Z_2, если:

а) $\begin{cases} Z_1+2Z_2=1+i \\ 3Z_1+iZ_2=2-3i \end{cases}$; б) $\begin{cases} 4iZ_1-5Z_2=-4+14i \\ 3Z_1+2iZ_2=7+3i \end{cases}$.

15. Найти Z, если:

а) $Z^2-(2+i)Z-1+7i=0$; б) $Z^2-4iZ+6(2-5i)=0$.

16. Проверить справедливость равенств:

а) $\left[\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}\right]^5+\left[\dfrac{-\sqrt{3}-i}{2}\right]^5=\sqrt{3}$;

б) $\dfrac{\left(\sin 26^\circ+i\cos 154^\circ\right)\cdot\left(\sin 27^\circ+i\cos 153^\circ\right)^3}{\sin 17^\circ-i\cos 17^\circ}=-1$.

ГЛАВА IV
МНОГОЧЛЕНЫ

§ 1. Степень с натуральным показателем

В этой главе и далее мы будем рассматривать только действительные числа. Напомним необходимые определения.

Определение 1. *Степенью числа* a с натуральным показателем n, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a.

По определению степени:

$$a^1 = a,\ a^2 = a \cdot a,\ a^3 = a \cdot a \cdot a,\ \ldots$$

Вообще, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\ \text{раз}}$.

Сформулируем основные свойства степени с натуральным показателем.

1) Для любого числа a и произвольных натуральных чисел m и n

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

т. е. при умножении степеней с одинаковыми основаниями, основание оставляют прежним, а показатели степеней складывают.

Пример 1. $x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$; $y^2 \cdot y^{10} = y^{2+10} = y^{12}$; $a^2 \cdot a^5 \cdot a^4 = a^{2+5+4} = a^{11}$.

2) Для любого числа $a \neq 0$ и произвольных натуральных чисел m и n, $m>n$

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

т. е. при делении степеней с одинаковыми основаниями, основание остается прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.

Пример 2. $c^8 : c^6 = c^{8-6} = c^2$; $d^9 : d^6 = d^3$.

3) Так как $a^n : a^n = 1$, то полагают, что $a^0 = 1$ при $a \neq 0$.

4) Для любых a и b и произвольного натурального числа n

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n,$$

т. е. при возведении произведения чисел в n-ю степень умножаются n-е степени каждого из сомножителей.

Пример 3. $(2xy)^5 = 2^5x^5y^5 = 32x^5y^5$.

5) Для любых a и $b \neq 0$ и произвольного натурального числа m

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

6) Для любого числа a и произвольных натуральных чисел m и n

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn},$$

т. е. при возведении степени в другую степень основание остается прежним, а показатели степеней умножаются.

Пример 4. $\left(b^5\right)^3 = b^{5\cdot 3} = b^{15}$.

Определение 2. При $a \neq 0$ и m — натуральное число, положим

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Определения 1 и 2 позволяют определить степень числа $a \neq 0$ с любым целым показателем.

Все свойства степени с натуральным показателем справедливы и для степени с любым целым показателем. А именно, для любых $a \neq 0, b \neq 0$ и любых целых m и n имеют место равенства:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;	4) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$;
2) $a^m : a^n = a^{m-n}$;	5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$;
3) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$;	6) $a^0 = 1$.

Пример 5. $\left(\frac{a^{-2}}{3b}\right)^{-3} = \frac{a^{-2\cdot(-3)}}{3^{-3} \cdot b^{-3}} = \frac{3^3 \cdot a^6}{b^{-3}} = 27a^6b^3$.

Пример 6. Упростить выражение $a^4\left(a^{-1} - a^{-3}\right)\cdot\left(a^2 + a^3\right)^{-1}$.

Решение. $a^4\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^3}\right)\cdot\frac{1}{a^2 + a^3} = \frac{a^4\left(a^2 - 1\right)}{a^3 \cdot a^2(1+a)} = \frac{a-1}{a}$.

Вопросы и задания

1. Дать определение степени числа с натуральным показателем.
2. Какой знак имеет:
   а) степень положительного числа с целым показателем;
   б) степень отрицательного числа с четным показателем;

в) степень отрицательного числа с нечетным показателем?

Привести соответствующие примеры.

3. Сравнить квадрат произвольного числа с числом 0.

4. Сформулировать правила умножения и деления степеней с одинаковыми основаниями.

5. Сформулировать правила возведения в степень произведения чисел и возведения степени в степень.

6. Дать определение степени числа с отрицательным целым показателем.

Упражнения

1. Представить в виде степени произведение:

а) c^5c^4; *в)* x^3x^3; *д)* $b\,b^2b^3$; *ж)* $(-6)^3(-6)^6(-6)^9$.

б) a^2a^5; *г)* 5^55^4; *е)* $x^5x^4x^6$;

2. Представить в виде степени частное:

а) $x^8:x^4$; *в)* $c^7:c^2$; *д)* $2^{14}:2^7$; *ж)* $(-0{,}5)^{15}:(-0{,}5)^7$.

б) $a^{10}:a^8$; *г)* $a^5:a^5$; *е)* $(0{,}2)^{10}:(0{,}2)^6$;

3. Используя правила умножения и деления степеней, упростить выражение:

а) $x^3\cdot x^8:x^7$; *б)* $x^7:x^5:x$; *в)* $x^{15}:x^5\cdot x$; *г)* $x^{10}:x^6\cdot x^4$.

4. Найти значение выражения:

а) $\dfrac{10^{15}\cdot 10^8}{10^{19}}$; *г)* $\dfrac{(0{,}2)^8(0{,}2)^2}{(0{,}2)^4(0{,}2)^3}$; *ж)* $\dfrac{5^{16}\cdot 3^{16}}{15^{14}}$; *к)* $\dfrac{12^9}{2^3\cdot 3^4}\cdot\dfrac{10}{2^6\cdot 3^5\cdot 4^6}$.

б) $\dfrac{7^8}{7\cdot 7^5}$; *д)* $\dfrac{3^7\cdot 27}{\left(3^4\right)^3}$; *з)* $\dfrac{12^5}{3^3\cdot 4^4}$;

в) $\dfrac{(-3)^5(-3)^3}{(-3)^7}$; *е)* $\dfrac{27^2\cdot 9^4}{81^2}$; *и)* $\dfrac{3^5\cdot 11^{10}}{33^{10}}\cdot\dfrac{34^4\cdot 3^{10}}{17^3\cdot 6^5}$;

5. Возвести в степень произведение:

а) $(a\cdot b)^9$; *в)* $(2ac)^4$; *д)* $(-2a)^3$; *ж)* $(-3xy)^5$;

б) $(xyz)^5$; *г)* $\left(\dfrac{1}{3}xz\right)^3$; *е)* $(-0{,}4c)^2$; *з)* $\left(-\dfrac{2}{3}abc\right)^4$.

6. Указать ошибки в следующих преобразованиях:

а) $5\cdot 5\cdot 5=3^5$; *е)* $2^3+2^7=2^{10}$;

б) $(-3)^2=-3\cdot 3=9$; *ж)* $2^{30}:2^{10}=2^3$;

в) $0^0=1$; *з)* $(2x)^3=2x^3$;

г) $2^3\cdot 2^7=2^{21}$; *и)* $\left(a^3\right)^2=a^9$;

д) $2^3\cdot 2^7=4^{10}$; *к)* $\left(a^2\right)^3\cdot\left(a^4\right)^2=\left(a^6\right)^5=a^{30}$.

7. Записать без степеней с отрицательным показателем:

а) $(a+b)^{-1}$; *в)* $5a^{-3}c^4$; *д)* $a^{-2}b^3c^{-4}$;

б) $(x-y)^{-2}$; *г)* $4x^3y^{-3}$; *е)* $a^3b^{-2}e^{-5}$.

---

8. Возвести в степень:

а) $\left(a^2\right)^{-4}$; *в)* $\left(b^{-2}\right)^5$; *д)* $\left(xy^{-3}\right)^2$; *ж)* $\left(3a^2\right)^{-4}$;

б) $\left(x^{-3}\right)^{-2}$; *г)* $\left(c^5\right)^{-4}$; *е)* $\left(x^2y^{-1}\right)^{-2}$; *з)* $\left(4a^{-3}\right)^{-2}$.

9. Выполнить действия:

а) $\left(\dfrac{a^5}{b^3}\right)^{-3}$; *б)* $\left(\dfrac{x^{-3}}{y^{-4}}\right)^{-4}$; *в)* $\left(\dfrac{2a^5}{3b^{-3}}\right)^2$; *г)* $\left(\dfrac{-3x^{-3}y^2}{z^2}\right)^3$.

10. Упростить:

а) $\left(a^{-3}+b^{-3}\right)\cdot\left(a^{-2}-b^{-2}\right)^{-1}\cdot\left(a^{-2}-a^{-1}\cdot b^{-1}+b^{-2}\right)^{-1}$;

б) $\left(a^{-2}b-ab^{-2}\right)\cdot\left(a^{-2}+a^{-1}b^{-1}+b^{-2}\right)^{-1}$;

в) $\dfrac{\left(ab^{-5}-a^{-5}b\right)^{-1}\left(a^{-3}+b^{-3}\right)}{\left(a^{-1}b^{-4}-b^{-1}a^{-4}\right)^{-1}}$; *г)* $\dfrac{\left(ab^{-7}-a^{-7}b\right)^{-1}\left(a^{-3}b+ab^{-3}\right)}{\left(b^{-4}-a^{-4}\right)^{-1}}$.

11. Вычислить значение выражения:

а) $\left(b^{-2}+\dfrac{a^{-3}}{2^{-1}}\right)\left(\dfrac{1}{2^{-1}a^3}-b^{-2}\right)\left(b^{-4}+\dfrac{4}{a^6}\right)$, если $a=b=\sqrt{2}$;

б) $\left(\left(\dfrac{9^{-2}}{a^{-24}}-\dfrac{16}{b^{-8}}\right):\left(\dfrac{a^{12}}{3^2}+\dfrac{b^4}{2^{-2}}\right)\right):\left(\dfrac{3^{-1}}{a^{-6}}-\dfrac{1}{2^{-1}b^{-2}}\right)$, если $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{2}$.

§ 2. Одночлены и многочлены

1. Одночлены. В курсе средней школы изучаются различные выражения (числовые и буквенные), образованные из чисел и букв с помощью арифметических действий. В этом параграфе указываются некоторые классы таких выражений.

Определение 1. Любое число, буква, произведение или частное, состоящее из числового множителя (коэффициента) и одной или нескольких букв, взятая каждая с соответствующим показателем степени называется *одночленом*.

Пример 1. $-5a^2bc^3$, $0{,}17xy$, x^3, $-a$, -7, 2^3, $\dfrac{a}{bc}$ — одночлены.

Если одночлен представлен в виде произведения числового множителя, стоящего в начале выражения, и степеней различных букв, то такой вид одночлена называют *стандартным видом*.

Пример 2. Представить одночлен $3a^3\cdot(-2)\cdot ab^2$ в стандартном виде.

Воспользовавшись свойствами умножения, получим одночлен $-6a^4b^2$, записанный в стандартном виде.

Определение 2. *Степенью одночлена* называется сумма показателей степеней входящих в него букв. Если одночлен не содержит букв (т. е., является числом), то его степень считают равной нулю.

Пример 3. В одночлене $8a^3x^2y^4$ сумма показателей степеней всех букв равна 9. Поэтому степень одночлена $8a^3x^2y^4$ есть число 9.

При умножении одночленов и возведении одночлена в степень используются правила умножения степеней с одинаковыми основаниями и возведения степени в степень.

Пример 4.

а) Умножить одночлены $-5a^2bc$ и $4a^2b^4$.

Имеем $-5a^2bc\cdot 4a^2b^4=-20a^4b^5c$;

б) Возвести в третью степень одночлен $-2a^2b$.

Имеем $\left(-2a^2b\right)^3=(-2)^3\cdot\left(a^2\right)^3\cdot b^3=-8a^6b^3$.

2. Многочлены.

Рассмотрим выражение $5xy^2-7xy-6x+4y-2$. Оно представляет собой сумму одночленов $5xy^2$, $-7xy$, $-6x$, $4y$, -2. Такое выражение называют многочленом.

Определение 3. *Многочленом* называется любая сумма одночленов.

Если в многочлене два или более одночлена имеют одну и ту же буквенную часть, то такие одночлены называют *подобными*.

Если многочлен не содержит подобных членов, и каждый член многочлена является одночленом стандартного вида, то такие многочлены называют *многочленами стандартного вида*.

Определение 4. Два многочлена называются *равными*, если они имеют одинаковый стандартный вид.

Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней входящих в него одночленов.

Например, степень многочлена $7a^2b+5bc+2ab$ равна 3.

Многочлен $P(x)$ вида $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$, где $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ — числовые коэффициенты, называется многочленом одной переменной n-го порядка. Например, при $n=1$ получим двухчлен первой степени a_0x+a_1, а при $n=2$ получим квадратный трехчлен $a_0x^2+a_1x+a_2$.

Многочлен $P(x,y,\cdots,z)$, состоящий из буквенных выражений, не меняющийся при любой взаимной замене одних букв другими, называется *симметрическим многочленом*. Например, многочлены $x^4y^2+x^2y^4$, $xy+xz+yz$ являются симметрическими.

Легко проверить, что если в выражении $x\cdot y\cdot z$ заменить x, y, z соответственно на $(x+t)$, $(y+t)$, $(z+t)$ и произвести умножение, то получится новое выражение, в котором коэффициенты при степенях t являются симметрическими многочленами. Например, для двух множителей имеем $(t+x)(t+y)=t^2+(x+y)t+xy$.

Здесь коэффициенты $x+y$ и xy при степенях t являются симметрическими многочленами. Такие многочлены называются основными симметрическими многочленами. Будем обозначать их через $\alpha_1=x+y$ и $\alpha_2=xy$.

Для трех множителей основными симметрическими многочленами являются: $\alpha_1=x+y+z$, $\alpha_2=xy+xz+yz$ и $\alpha_3=xyz$. Более того, многочлены вида $\alpha_1=x+y+\ldots+z$, $\alpha_2=x^2+y^2+\ldots+z^2$, ..., $\alpha_k=x^k+y^k+\ldots+z^k$ также являются симметрическими многочленами. Для симметрических многочленов справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Произвольную сумму вида $S_k = x^k + y^k$ можно выразить через $\alpha_1 = x + y$ и $\alpha_2 = xy$.

Доказательство. Действительно, при $k = 1$ имеем $S_1 = x + y = \alpha_1$, а при $k = 2$ получим $S_2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = \alpha^2_1 - 2\alpha_2$. Пусть теорема верна для S_{n-1} и S_n. Покажем ее справедливость для S_{n+1}:

$$S_{n+1} = x^{n+1} + y^{n+1} = (x^n + y^n)(x+y) - x^n y - xy^n =$$

$$= (x^n + y^n)(x+y) - xy(x^{n-1} + y^{n-1}) = S_n\alpha_1 - S_{n-1}\alpha_2 .$$

Таким образом, S_{n+1} можно выразить через S_n и S_{n-1}. Но согласно нашему предположению, теорема справедлива для S_n и S_{n-1}. Поэтому она справедлива и для S_{n+1}.

Теорема 2. Любой симметрический многочлен $P(x, y, ..., z)$ может быть выражен через комбинацию основных симметрических многочленов от этих же переменных.

Доказательство. Рассмотрим симметрический многочлен $P(x, y)$, содержащий слагаемое $ax^m y^k$. Если $m = k$, то это слагаемое можно представить в виде $a(xy)^k$ или в виде $a\alpha_2{}^k$. Если же $k > m$, то в силу симметричности, данный многочлен содержит слагаемое вида $ax^k y^m$ и поэтому $ax^k y^m + ax^m y^k = a(xy)^m (x^{k-m} + y^{k-m}) = a\alpha_2{}^m S_{k-m}$.

Согласно теореме 1 сумма S_{k-m} выражается через α_1 и α_2. Поэтому симметрический многочлен $P(x, y)$ также выражается через α_1 и α_2.

Аналогичным образом доказывается справедливость теоремы для многочлена от большего числа переменных.

Пример 5. Выразить $P(x, y) = x^3 + y^3 + xy^2 + yx^2$ через основные симметрические многочлены α_1 и α_2.

Решение. $P(x, y) = (x+y)^3 - 3xy(x+y) + xy(x+y) = (x+y)^3 - 2xy(x+y) = \alpha_1^3 - 2\alpha_1\alpha_2 = \alpha_1(\alpha_1^2 - 2\alpha_2)$.

Многочлен $P(x, y, \cdots, z)$ называют *однородным*, если входящие в него одночлены имеют одинаковую степень. Например, многочлен $P(x,y) = 3x^3y^2 + x^2y^3$ является однородным.

3. Действия над многочленами. *Для сложения двух многочленов составляют их сумму, затем раскрывают скобки и приводят подобные члены.*

Пример 6. Сложим многочлены $4x^2 + 6x - 7$ и $-2x^2 - 5x + 9$. Имеем:

$(4x^2 + 6x - 7) + (-2x^2 - 5x + 9) = 4x^2 + 6x - 7 - 2x^2 - 5x + 9 = 2x^2 + x + 2.$

Для вычитания двух многочленов составляют их разность, раскрывают скобки и приводят подобные члены.

Пример 7. Найдем разность многочленов $x^3 + 6x^2 - 3x + 7$ и $x^3 + 4x + 5$.

Имеем:

$(x^3 + 6x^2 - 3x + 7) - (x^3 + 4x + 5) = x^3 + 6x^2 - 3x + 7 - x^3 - 4x - 5 = 6x^2 - 7x + 2.$

Таким образом, при сложении и вычитании многочленов снова получается многочлен.

Для умножения одночлена на многочлен нужно умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Пример 8. Умножим одночлен $-2a^2$ на многочлен $3a^3 - 2a + 3$. Имеем $-2a^2(3a^3 - 2a + 3) = -6a^5 + 4a^3 - 6a^2$.

Для умножения многочлена на многочлен нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

Пример 9. Умножим многочлен $3x^2 + xy - y^2$ на многочлен $3x - y$. Имеем:

$(3x^2 + xy - y^2)\cdot(3x - y) = 9x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 3x^2y - xy^2 + y^3 = 9x^3 - 4xy^2 + y^3.$

Действия сложения, вычитания и умножения многочленов обладают *основными свойствами арифметических действий.*

Пусть $P(x)$ и $D(x)$ — два многочлена, причем степень многочлена $P(x)$ не меньше степени многочлена $D(x)$.

Если существует многочлен $Q(x)$ такой, что справедливо равенство

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x), \tag{1}$$

то говорят, что многочлен $P(x)$ делится (или нацело делится) на многочлен $D(x)$. При этом $P(x)$ называется делимым, $D(x)$ — делителем, а $Q(x)$ — частным.

Если такой многочлен $Q(x)$ не существует, то говорят, что многочлен $P(x)$ не делится на многочлен $D(x)$, и тогда рассматривают деление с остатком.

Пусть многочлен $D(x)$ — степени не ниже первой.

Определение 5. Разделить многочлен $P(x)$ на многочлен $D(x)$ с остатком означает представить многочлен $P(x)$ в виде:

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x), \tag{2}$$

где $Q(x)$ и $R(x)$ — многочлены, причем степень многочлена $R(x)$ меньше степени $D(x)$.

В равенстве (2) $P(x)$ называется делимым, $D(x)$ — делителем, $Q(x)$ — частным и $R(x)$ — остатком. В частности, если $R(x) = 0$, то получим формулу (1), т. е. $P(x)$ делится на $D(x)$.

Справедлива следующая теорема, которую приведем без доказательства.

Теорема 3. Для любых двух многочленов $P(x)$ и $D(x)$ (степень $P(x)$ не меньше степени $D(x)$) всегда можно найти и притом однозначно многочлены $Q(x)$ и $R(x)$, для которых справедливо равенство (2).

На практике для деления многочленов обычно применяется правило "деление углом". С этой целью многочлены располагают по убывающим степеням x и находят старший член частного $Q(x)$ из условия, что при умножении его на старший член делителя $D(x)$ получается старший член делимого $P(x)$. Затем найденный член частного умножают на делитель и вычитают полученное произведение из делимого. С полученной разностью поступают аналогично — старший член разности делят на старший член делителя $D(x)$ и т. д. Процесс продолжается до тех пор, пока степень новой разности не окажется меньше степени делителя. Эта последняя разность и будет остатком $R(x)$.

Пример 10. Разделить многочлен $P(x) = x^4 + 2x + x^2 + x^3 + 1$ на многочлен $D(x) = 1 + x^2$.

Решение. Для выполнения деления применим правило "деление углом". Прежде всего, расположим $P(x)$ и $D(x)$ по убывающим степеням x. Выкладки производятся следующим образом:

$$\begin{array}{r|l}
x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^4 + x^2 \qquad\qquad\quad} & x^2 + x \\
x^3 + 2x + 1 & \\
-\underline{x^3 + x \qquad} & \\
x + 1 &
\end{array}$$

Отсюда следует, что $Q(x) = x^2 + x$, $R(x) = x + 1$. Следовательно, $x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + x) + x + 1$.

Деление многочлена $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ $(a_0 \neq 0)$ на двухчлен $x - c$ можно производить также по следующей схеме, называемой схемой Горнера.

Пусть $P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + R$, где $Q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$ — частное, а R — остаток (некоторое число) при делении многочлена $P(x)$ на двухчлен $x - c$. Схема деления такова:

$$\begin{array}{cccccc|l}
 & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots\, a_{n-1} & a_n & c \\ \cline{7-7}
+ & & b_0c & b_1c & \ldots\, b_{n-2}c & b_{n-1}c & \\ \cline{2-6}
 & b_0 & b_1 & b_2 & \ldots\, b_{n-1} & b_n = R &
\end{array}$$

Здесь коэффициенты $b_k = cb_{k-1} + a_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), $b_0 = a_0$, т. е. коэффициент b_k частного $Q(x)$ получается умножением предыдущего коэффициента b_{k-1} на c и прибавлением соответствующего коэффициента a_k многочлена $P(x)$.

Пример 11. Разделить $P(x) = 2x^3 - x + 3$ на $x + 1$.

Решение. Имеем $x + 1 = x - (-1)$. Составим схему Горнера:

$$\begin{array}{cccccc|l}
 & 2 & 0 & -1 & 3 & & -1 \\ \cline{7-7}
+ & & -2 & 2 & -1 & & \\ \cline{2-6}
 & 2 & -2 & 1 & 2 & = R &
\end{array}$$

Искомое частное $Q(x) = 2x^2 - 2x + 1$, а остаток $R = 2$. Следовательно, $2x^3 - x + 3 = (x + 1)(2x^2 - 2x + 1) + 2$.

Следующая теорема позволяет найти остаток от деления $P(x)$ на $x - c$, не выполняя самого процесса деления.

Теорема 4 (Безу). Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двухчлен $x - c$ равен значению многочлена $P(x)$ при $x = c$.

Доказательство. Действительно, так как $P(x) = (x - c) \times Q(x) + R$, то, подставляя вместо x число c, находим $P(c) = (c - c) \cdot Q(c) + R$, т. е. $P(c) = R$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим многочлены вида $P(x) = x^m \mp c^m$.

Из теоремы Безу вытекает:

1. Многочлен $x^m - c^m$ делится на двучлен $x - c$ при любом натуральном m.

2. Многочлен $x^m - c^m$ делится на $x + c$ при любом четном m.

3. Многочлен $x^m + c^m$ делится на $x + c$ при любом нечетном m.

Докажем, например, последнее утверждение. В самом деле, пусть $P(x) = x^m + c^m$. При нечетных m имеем $(-c)^m = -c^m$. Отсюда $P(-c) = (-c)^m + c^m = 0$. Следовательно, $P(x)$ делится на $x + c$.

Вопросы и задания

1. Дать определение одночлена стандартного вида.
2. Как определить степень одночлена?
3. Дать определение многочлена.
4. Что такое многочлен стандартного вида?
5. Как определить степень многочлена стандартного вида?
6. Какой многочлен называется однородным, симметрическим?
7. По какому правилу складываются и вычитаются многочлены?
8. Как умножаются два многочлена?
9. Объяснить правило "деление углом" для многочленов.
10. Объяснить, в чем состоит схема Горнера?
11. Какие многочлены называют делимым, делителем, частным и остатком?
12. Что можно найти с помощью теоремы Безу и как найти?

Упражнения

1. Выполнить умножение:

а) $3x \cdot 5y$; *б)* $-7x \cdot 5x^2$; *в)* $\frac{4}{9}ab^3 \cdot \frac{3}{2}ab$; *г)* $x^2y^5 \cdot \left(-6x^2y\right)$.

2. Найти произведение:

а) $-9x^2y^2$ и $0{,}3x^3y$; *в)* $3x^2y$, $-x^2$ и $-y^5$;

б) a^4b^2 и $-a^2b^5c^2$; *г)* $a^2x^5b^2$, $-0{,}6a^2xb^2$ и $5ab$.

3. Выполнить умножение:

а) $-8a^2b^2 \cdot \left(-8a^3b^9\right)$; *в)* $10x^2y \cdot \left(-xy^2\right) \cdot 0{,}6x^3$.

б) $ab \cdot \left(-7ab^3\right) \cdot 4a^2b$;

4. Упростить выражение:

а) $0{,}3y^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}x^4y^6\right)$; *в)* $x^2y \cdot (-xy) \cdot \left(-xy^2\right)$;

б) $1\frac{1}{6}cd \cdot \left(-\frac{6}{7}c^9d^7\right)$; *г)* $mn \cdot \left(-m^5n^3\right) \cdot \left(-m^3n^8\right)$.

5. Возвести в степень:

а) $\left(3x^2\right)^3$; *б)* $\left(-2a^4b^2\right)^3$; *в)* $\left(-a^2bc^3\right)^5$; *г)* $\left(-a^3b^2c\right)^2$.

6. Представить в виде одночлена стандартного вида:

а) $\left(-0{,}6m^3n^2\right)^3$; *б)* $\left(-2xy^3\right)^2$; *в)* $\left(-xy^4b^2\right)^4$; *г)* $\left(-x^2y^3m\right)^5$.

7. Представить выражение в виде квадрата одночлена:

а) $121a^6$; *б)* $0{,}09\,y^{12}$; *в)* $\frac{4}{9}b^6$.

8. Упростить выражение:

а) $\left(-x^2y\right)^3 \cdot \left(-x^4y^2\right)$; *в)* $\left(\frac{1}{4}m^2n\right)^3 \cdot \left(-32m^2n\right)$;

б) $0{,}2a^2b^3 \cdot \left(-5a^3b\right)^2$; *г)* $\left(-\frac{2}{3}pq^4\right)^2 \cdot \left(-27p^5q\right)$.

9. Привести подобные члены:

а) $-a^4 + 2a^3 - 4a^4 + 2a^2 - 3a^2$;

б) $1 + 2y^6 - 4y^3 - 6y^6 + 4y^3 - y^5 - 9$;

в) $10x^2y - 5xy - 2x^2y + x^2y - 3xy^2$;

г) $3ab^3 + 6a^2b^2 - ab^3 - 2a^2b^2 - 4a^2b^2 + 7$.

10. Записать многочлен в стандартном виде:

а) $2a^2x^3 - ax^3 - a^4 - a^2x^5 + ax^3 + 2a^4$;

б) $5x \cdot 2y^2 - 5x \cdot 3xy - x^2y + 6xy^2$.

11. Найти значение многочлена:

а) $5x^6 - 3x^2 + 7 - 2x^6 - 3x^6 + 4x^2$ при $x = 10$;

б) $4a^2b - ab^2 - 3a^2b + ab^2 - ab + b$ при $a = 3, b = 2$.

12. Расположить по убывающим степеням:

а) $17a^4-8a^5+3a-a^3-1$; б) $35-c^6+5c^2-c^4$.

13. Упростить выражение:

а) $(a^2-0,45a+1,2)+(0,8a^2-1,2a)-(1,6a^2-2a)$;

б) $(y^2-1,75y-3,2)-(0,3y^2+4)-(2y-7,2)$;

в) $6xy-2x^2-(3xy+4x^2+1)-(xy-2x^2-1)$;

г) $-(2ab^2-ab+b)+3ab^2-4b-(5ab-ab^2)$.

---

14. Упростить выражение:

а) $4x(x-1)-2(2x^2-1)$; в) $5a(a^2-3a)-3a(a^2-5a)$;

б) $3m^2(m+5n)-2n(8m^2-n)$; г) $6m^2n^3-n^2(6m^2n+n-1)$.

15. Представить выражение в виде многочлена стандартного вида и указать его степень:

а) $6x(x-3)-x(2-x)$; в) $ax(2x-3a)-x(ax+5a^2)$;

б) $-a^2(3a-5)+4a(a^2-a)$; г) $-4m^2(n^2-m^2)+3n^2(m^2-n^2)$.

16. Привести по три примера на симметрические многочлены и на однородные многочлены.

17. Преобразовать в многочлен стандартного вида:

а) $(2x^2+3x)+(-x+4)$;

б) $(b^2-b+7)-(b^2+b+8)$;

в) $8x^2+(4,5-x^2)-(5,4x^2-1)$;

г) $(7,3y-y^2+4)+0,5y^2-18,7y-2,4y^2$.

18. Раскрыть скобки:

а) $(25x^2+10xy+4y^2)(5x-2y)$;

б) $(5-2a+a^2)(4a^2-3a-1)$;

в) $(7-2a)(4a^2+4a+3)$;

г) $(a-1)(2c-3)(4-c^2)$.

19. Упростить выражение:

а) $x^3-(x^2-3x)(x+3)$;

б) $5b^3+(a^2+5b)(ab-b^2)$;

в) $(a-b)(a+2)-(a+b)(a-2)$;

г) $(x+y)(x-y)-(x-1)(x-2)$.

20. Разделить многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, если:

а) $P(x)=x^3+4x^2+4x+3$, $Q(x)=x^2+3x+1$;

б) $P(x)=x^3+3x^2+5x+4$, $Q(x)=x+2$;

в) $P(x)=x^4+4x^2+5x+3$, $Q(x)=x^2+2x+1$;

г) $P(x)=2x^5-3x^4-7x^3+5x^2-3x+4$, $Q(x)=x^2+2x-3$;

д) $P(x)=8x^6+26x^5-30x^2+8x+10$, $Q(x)=2x^3+8x^2-2$;

е) $P(x)=3x^5+6x^4+9x^3-12x^2+20x$, $Q(x)=x^3+2x$;

ж) $P(x)=2x^6+x^5-10x^2+4x+6$, $Q(x)=x^4-2x+1$.

21. Используя схему Горнера, разделить многочлен $P(x)$ на двухчлен $Q(x)$:

а) $P(x)=4x^3+3x^2-7x-30$, $Q(x)=x-2$;

б) $P(x)=3x^4-4x^3+5x^2+6x-7$, $Q(x)=x+1$;

в) $P(x)=4x^4+6x^3-4x^2+2x-1$, $Q(x)=2x-1$;

г) $P(x)=7x^5-8x^4+6x^3-x^2+1$, $Q(x)=x+3$.

22. Найти остаток от деления многочлена $P(x)$ на двухчлен $Q(x)$:

а) $P(x)=3x^3-2x^2+3x-4$, $Q(x)=x+2$;

б) $P(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+7$, $Q(x)=x-1$;

в) $P(x)=4x^5-5x^4+3x^3-7x^2+6$, $Q(x)=x-2$;

г) $P(x)=2x^3-3x^2+2x+1$, $Q(x)=x+3$.

§ 3. Формулы сокращенного умножения и их обобщение

Из курса средней школы известны следующие формулы сокращенного умножения:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2; \qquad (1)$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3; \qquad (2)$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2; \qquad (3)$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3; \qquad (4)$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3. \qquad (5)$$

В этом параграфе мы выведем формулу для $(a+b)^n$, обобщающую формулы (1) и (2), для случая произвольного натурального n.

При нахождении коэффициентов в разложении $(a+b)^4, (a+b)^5, \ldots, (a+b)^n$ можно пользоваться таблицей, называемой *треугольником Паскаля*. Эта таблица имеет следующий вид:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1 (n=3)
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1 (n=6)
. . . .

Здесь коэффициенты по краям таблицы равны 1, а внутренние коэффициенты любой строки получаются как сумма двух соседних коэффициентов из предыдущей строки. Тогда, например, при $n=6$ получим:

$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6.$$

Как видно из этого разложения, члены разложения располагаются по убывающим показателям степени a и по возрастающим показателям степени b.

В случае, когда значение n велико, пользоваться треугольником Паскаля неудобно. Так, например, при $n=20$ необходимо последовательно записать 19 предыдущих рядов. Поэтому, в общем случае, удобнее пользоваться другой формулой, называемой *биномом Ньютона*:

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot k}\cdot a^{n-k}b^k+\ldots+nab^{n-1}+b^n. \qquad (6)$$

Докажем эту формулу. Доказательство проведем методом математической индукции. При $n=1$ и $n=2$ получаем верные равенства:

$$a+b=a+b;$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Пусть бином Ньютона справедлив для $n=m$. Тогда для $n=m+1$ имеем:

$$(a+b)^{m+1}=(a+b)^m(a+b)=(a^m+ma^{m-1}b+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}b^2+$$

$$+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(k-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}a^{m-k}\cdot b^k+\ldots+mab^{m-1}+b^m)\times$$

$$\times(a+b)=a^{m+1}+(m+1)\,a^mb+\frac{m\cdot(m+1)}{1\cdot 2}a^{m-1}b^2+\ldots+$$

$$+\frac{(m+1)m\ldots(m+1-(k-1))}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}a^{m+1-k}b^k+\ldots+(m+1)ab^m+b^{m+1}.$$

Следовательно, формула (6) справедлива для любого натурального значения n.

Из формулы (6) вытекают следующие следствия:

1) коэффициенты членов, одинаково удаленных от концов разложения, равны между собой;

2) сумма всех коэффициентов (биномиальные коэффициенты) равна 2^n. Действительно, полагая в (6), что $a=b=1$, получим:

$$2^n=1+n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+1;$$

3) сумма всех биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах.

Действительно, положим в (6), что $a=1$, $b=-1$, получим:

$$0=1-n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+(-1)^n.$$

Отсюда вытекает следствие 3).

Формулой бинома Ньютона можно пользоваться при возведении в степень любого многочлена. Например,

$$(a+b+c)^4=\left[(a+b)+c\right]^4=(a+b)^4+4c(a+b)^3+6c^2(a+b)^2+4c^3(a+b)+c^4.$$

Разложив теперь $(a+b)^4$, $(a+b)^3$, $(a+b)^2$ и, приведя подобные члены, окончательно получим, что:

$$(a+b+c)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4+4a^3c+12a^2bc+12ab^2c+$$
$$+4b^3c+6a^2c^2+12abc^2+6b^2c^2+4ac^3+4bc^3+c^4.$$

Вопросы и задания

1. По какому правилу находятся коэффициенты в треугольнике Паскаля?
2. Указать достоинства и недостатки треугольника Паскаля?
3. Перечислить свойства коэффициентов в разложении бинома Ньютона.
4. Можно ли применять бином Ньютона для любого многочлена?

Упражнения

1. Преобразовать в многочлен:

а) $(3ab-\frac{1}{6}a^2)^2$; *б)* $(12c^4+\frac{1}{4}a^6c)^2$; *в)* $(0{,}2xy+0{,}5x^2y^2)^2$.

2. Представить в виде произведения:

а) $64-a^4b^4$; *б)* $16b^2c^{12}-0{,}25$; *в)* $81x^6y^2-0{,}36a^2$.

3. Разложить на множители:

а) $49x^2-(y+8x)^2$; *б)* $(5a-3b)^2-25a^2$; *в)* $(-2a^2+3b)^2-4a^4$.

4. Представить в виде суммы или разности кубов:

а) $125a^3-64b^3$; *б)* $\frac{1}{64}m^3+1000$; *в)* $\frac{1}{27}x^3+\frac{1}{125}y^3$.

5. Записать в виде многочлена:

а) $(2a-3b)^3$; *б)* $(3a+2b)^3$; *в)* $(3x-4y)^3$.

---

6. Используя бином Ньютона, представить в виде многочлена:

а) $(2a+3b)^7$; *б)* $(3x-4y)^6$; *в)* $(x+y+z)^3$; *г)* $(a+b-c)^3$.

7. Найти 6-й член в разложении $(5x^2+6a^2)^{10}$.

8. Найти 8-й член в разложении $(3a\ -2)^{12}$.

§ 4. Алгоритм Евклида

В этом параграфе мы покажем, как находить наибольший общий делитель двух многочленов от одной переменной.

Наибольшим общим делителем многочленов от одной переменной называется такой многочлен наибольшей степени, на который делятся без остатка заданные многочлены. Наибольший общий делитель многочленов определяется с точностью до числового множителя. Его нахождение осуществляется с помощью алгоритма Евклида. Алгоритм заключается в следующем. Пусть даны $P(x)$ — многочлен степени n и $Q(x)$ — многочлен степени $m (m \le n)$. Разделив многочлен $P(x)$ на $Q(x)$, получим частное $q_1(x)$ и остаток $r_1(x)$. Теперь делитель $Q(x)$ разделим на остаток $r_1(x)$. Тогда получим частное $q_2(x)$ и второй остаток $r_2(x)$. Затем, разделив первый остаток $r_1(x)$ на второй остаток $r_2(x)$, получим частное $q_3(x)$ и третий остаток $r_3(x)$. Продолжая этот процесс, получим:

$$P(x)=Q(x)\cdot q_1(x)+r_1(x),$$
$$Q(x)=r_1(x)\cdot q_2(x)+r_2(x),$$
$$r_1(x)=r_2(x)\cdot q_3(x)+r_3(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_{n-2}(x)=r_{n-1}(x)\cdot q_n(x)+r_n(x),$$
$$r_{n-1}(x)=r_n(x)\cdot q_{n+1}(x)+r_{n+1}(x).$$

В итоге, при некотором n, последний остаток $r_{n+1}(x)$ станет равным 0. В этом случае $r_n(x)$ является наибольшим общим делителем многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. Если наибольшим общим делителем является число, то многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ называются *взаимно простыми многочленами.*

Пример: Найти наибольший общий делитель многочленов $P(x)=x^3-3x^2+3x-1$ и $Q(x)=x^2-x$.

Разделим $P(x)$ на $Q(x)$ по правилу "деление углом"

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x^2+3x-1 & x^2-x \\ -\ \ x^3-x^2\qquad\qquad & \overline{x-2} \\ \hline -2x^2+3x\quad & \\ -\ \ -2x^2+2x\quad & \\ \hline x-1 & \end{array}$$

Теперь делитель $x^2 - x$ разделим на первый остаток $x-1$:

$$\begin{array}{r|l} x^2 - x & x-1 \\ \cline{2-2} -\underline{x^2 - x} & x \\ 0 & \end{array}$$

Второй остаток равен 0. Значит, наибольшим общим делителем является двучлен $x-1$.

Вопросы и задания

1. Дать определение наибольшего общего делителя многочленов?
2. Какие многочлены называются взаимно простыми?
3. Описать алгоритм нахождения наибольшего общего делителя двух многочленов.

Упражнения

1. Используя алгоритм Евклида, найти наибольший общий делитель многочленов:

а) $x^5+2x^4-x^3-2x^2+x$ и x^3+2x^2-1;

б) $x^5+2x^4+x^2-x-1$ и $x^4-x^3+4x^2-x+2$;

в) x^4-4x^3+1 и x^3-3x^2+1;

г) $x^6-7x^4+8x^3-7x+7$ и $3x^5-7x^3+3x^2-7$.

2. При каком значении a многочлен $P(x)=2x^4+3x^3-5x^2-6x+a$ делится без остатка на многочлен $Q(x)=2x^2+3x-1$?

3. При каких значениях a и b многочлен $x^4-4x^3-x^2+ax-b$ делится без остатка на трехчлен x^2-5x+4?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Вычислить:

а) $\dfrac{3,4^2}{1,7^2}$; в) $\dfrac{5^4\cdot 5^5}{5^8}$; д) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^3\cdot\dfrac{5^3}{2^2}$; ж) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^5$;

б) $\dfrac{4^{11}\cdot 8}{4^{12}}$; г) $\dfrac{2^7\cdot 4}{4^3}$; е) $\dfrac{7^6}{3^7}\cdot\left(\dfrac{3}{7}\right)^5$; з) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^7\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^9$.

2. Выполнить умножение одночленов:

а) $(0,3x^3y^4z^2)(-1,3x^2yz^4)$; в) $\left(-1\dfrac{2}{3}xy^2z^2\right)\left(-\dfrac{3}{4}x^2y^3z\right)$;

б) $(3n^2mk^3)(-1,5n^3m^4k)$; г) $\left(2\dfrac{1}{5}a^2b^3c\right)\left(1\dfrac{1}{2}ab^2c^3\right)$.

3. Выполнить сложение и вычитание многочленов:

а) $\left(\dfrac{3}{2}a+\dfrac{2}{3}b\right)-\left(\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{3}b\right)+(a-b)$;

б) $(0,4a-1,4b)+(2a-b)-(2,4a-0,4b)$;

в) $10p^4-3p^3-(2p^3-p^2)+(-5p^4+5p^3)$;

г) $4x^2+4x^3+(x^3-x^2)-(3x^3+2x^2)$.

4. Выполнить умножение многочлена на одночлен:

а) $\left(\dfrac{1}{3}a^2b^3-\dfrac{4}{5}a^3b^4\right)\cdot 15a^4b$; б) $\left(\dfrac{3}{5}ab^3+\dfrac{1}{3}a^3b\right)\cdot\dfrac{3}{2}a^2b^2$;

в) $\left(1\dfrac{5}{7}a^2x^3-2\dfrac{2}{5}ax-12a^3x^2\right)\cdot\left(-2\dfrac{5}{12}a^3x^4\right)$;

г) $\left(-2\dfrac{4}{9}x^5y+2\dfrac{1}{5}x^2y^3-11x^3y^2\right)\cdot\left(-2\dfrac{1}{22}xy\right)$.

5. Выполнить умножение многочленов:

а) $\left(\dfrac{1}{3}a+4b\right)\left(\dfrac{1}{4}a-3b\right)$; г) $(0,3a+0,4x)(0,3a-0,4x)$;

б) $(0,5-2m)(0,5+2m)$; д) $(3c-4d)(-5c+2x+6d)$;

в) $\left(\dfrac{1}{2}a-3b\right)\left(\dfrac{1}{2}a+3b\right)$; е) $(2a-3b+4c)(2a-3b)$.

6. Представить в виде произведения:

а) $6mnk^2+15m^2k-14n^3k-35mn^2$; в) $5ay-3bx+ax-15by$;

б) $a^2x^2-bx^2+a^2x-bx+a^2y-by$; г) $8x^2+8xy+3x+3y$.

7. Вычислить:

а) $135\cdot 15+18\cdot 135+15\cdot 165+18\cdot 165$;

б) $14,7\cdot 13-2\cdot 14,7+13\cdot 5,3-2\cdot 5,3$.

8. Разложить на множители:

а) a^2+3a+2; б) a^2-5a+6; в) a^2+7a-8; г) $a^2+9a-10$.

9. Разложить на множители:

а) x^3+2x^2-3; б) a^3-7a+6.

10. Разложить на множители:

а) $(a+3b)^2-4a^2$; в) $(3a-b)^2-(2b+a)^2$;

б) $(2x+y)^2-9y^2$; г) $(2a-3b)^2-(3b-2a)^2$.

11. Вычислить:

а) $38{,}7^2-38{,}6^2$; в) $\dfrac{64^2-26^2}{27^2-18^2}$;

б) $39{,}6^2-29{,}6^2$; г) $\dfrac{51{,}3^2-11{,}3^2}{113{,}9^2-73{,}9^2}$.

12. Разложить на множители:

а) $a^4-2a^3+a^2-1$; г) $8x^3+y^3+6y^2+12y+8$;

б) $c^8-c^4-2c^2-1$; д) $(a+b)(a-b)^3-(a-b)(a+b)^3$;

в) $a^3-b^3+3b^2-3b+1$; е) $(a-b)^2(a+b)^5+(a+b)^2(a-b)^5$.

13. Доказать, что $a^3+b^3+c^3=3abc$, если $a+b+c=0$.

14. Используя бином Ньютона, возвести в степень:

а) $(2a-3)^5$; б) $(3x-y)^7$.

15. Найти наибольший коэффициент многочлена $\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x\right)^4$.

16. Найти член разложения $\left(x^2+1\right)^{20}$, содержащий x^{20}.

17. Найти частное и остаток от деления:

а) x^3-3x^2+7x-8 на $x-1$;

б) x^4+5x^3-6x+1 на x^2-3x+1;

в) $2x^5-6x^4+3x^3-2$ на x^2-x-2.

18. При каких натуральных значениях n выражение $\dfrac{3n^2-16n+21}{n-3}$ является натуральным числом?

19. При каких натуральных значениях n выражение $\dfrac{3n^2-26n+35}{4n-28}$ является целым числом?

20. Найти a и b из тождества:

а) $\dfrac{1}{(x-5)(x+2)}=\dfrac{a}{x-5}+\dfrac{b}{x+2}$; б) $\dfrac{2}{x^2-5x+6}=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x-3}$.

ГЛАВА V

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 1. Рациональные выражения и действия над ними

1. Алгебраические выражения. *Алгебраическим выражением* называется выражение, состоящее из букв и чисел, соединенных знаками алгебраических действий: сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня.

Алгебраическое выражение, в которое входят величины $x, y, \cdots, z$ будем записывать в виде $A(x, y, \cdots, z)$. Предварительно должно быть указано множество, на котором рассматривается данное алгебраическое выражение, т. е. множество значений , которые могут принимать величины — x, $y, \cdots$, z целые, действительные или комплексные и т. д.

Если специально не оговорено, в дальнейшем мы будем рассматривать алгебраические выражения на множестве действительных чисел.

Значения величин, при которых в алгебраическом выражении $A(x, y, \cdots, z)$ выполнимы все алгебраические действия, называются *допустимыми значениями*. Они образуют область допустимых значений (ОДЗ). Например, область допустимых значений в алгебраическом выражении $\frac{1}{xy}$ составляют пары x, $y \in R$ такие, что $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Определение 1. Равенство, верное для всех допустимых значений, входящих в него величин, называется *тождеством* и обозначается символом $(\equiv)$.

$$A(x, y, \cdots, z) \equiv B(x, y, \cdots, z). \qquad (1)$$

Например, $(x+y)^2 \equiv x^2+2xy+y^2$ или $(x+y)(x-y) \equiv x^2-y^2$ являются тождествами.

Переход от алгебраического выражения $A(x, y, \cdots, z)$ к тождественному алгебраическому выражению $B(x, y, \cdots, z)$ называется тождественным преобразованием.

Алгебраические выражения разделяются на рациональные и иррациональные.

Определение 2. Алгебраическое выражение называется *рациональным относительно какой-либо величины*, входящей в это выражение, если над этой величиной производятся только действия сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень. Например, $a + x - x^2$, $\frac{x^3 - xy}{x^2 - y^2 + 1}$ — рациональные выражения.

Определение 3. Алгебраическое выражение называется *иррациональным относительно какой-нибудь величины*, если оно содержит эту величину под знаком корня (радикала).

В этом определении подразумевается, что в иррациональном относительно некоторой величины выражении эта величина остается под знаком корня и после возможного упрощения записи данного выражения. Например, выражение $\sqrt[3]{x^3}$ — рациональное относительно x, так как $\sqrt[3]{x^3} = x$.

Выражения $\sqrt{x+1}$, $y\sqrt{x} + y^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$ — иррациональные относительно x, а второе из них — рационально относительно y.

Рациональные выражения разделяются на целые и дробные.

Целыми рациональными выражениями являются многочлены, рассмотренные подробно в главе IV.

Дробным рациональным выражением или *рациональной дробью* называется отношение двух многочленов:

$$\frac{P(x, y, \cdots, z)}{Q(x, y, \cdots, z)}. \qquad (2)$$

2. Дробные рациональные выражения и действия над ними. Дроби вида (2) называют *рациональными дробями*. Примерами рациональных дробей служат дроби $\frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}$; $\frac{3}{m^2 - n^2}$ и т. д.

В рациональной дроби допустимыми являются те значения переменных, при которых не обращается в нуль знаменатель дроби.

Для рациональных дробей выполняются все свойства, существующие для обыкновенных дробей. Над рациональными дробями производятся такие же действия, как и для обыкновенных дробей, т. е. их можно складывать и вычитать, умножать и делить. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти сумму $\frac{x}{4a^3b} + \frac{5}{6ab^4}$.

Решение. Общим знаменателем дробей является одночлен $12a^3b^4$. Дополнительными множителями к числителям этих дробей являются $3b^3$ и $2a^2$.

Имеем $\overset{3b^3/}{\frac{x}{4a^3b}} + \overset{2a^2/}{\frac{5}{6ab^4}} = \frac{3b^3x + 10a^2}{12a^3b^4}$.

Пример 2. Найти разность $\frac{a+3}{a^2+ab} - \frac{b-3}{ab+b^2}$.

Решение. Общим знаменателем дробей служит выражение $(a+b)ab$. Дополнительные множители к числителям этих дробей соответственно равны b и a. Поэтому $\frac{a+3}{a^2+ab} - \frac{b-3}{ab+b^2} =$

$$= \overset{b/}{\frac{a+3}{a(a+b)}} - \overset{a/}{\frac{b-3}{b(a+b)}} = \frac{ab + 3b - ab + 3a}{ab(a+b)} = \frac{3(a+b)}{ab(a+b)} = \frac{3}{ab}.$$

При сложении нескольких рациональных дробей общий знаменатель находят следующим образом: разлагают все знаменатели на множители (если это можно), выбирают любой знаменатель и умножают его на недостающие множители из остальных знаменателей.

Пример 3. Найти сумму $\frac{1}{2b-2a} + \frac{1}{2b+2a} + \frac{a^2}{a^2b - b^3}$.

Решение. Разложим знаменатели на множители: $2(b-a)$, $2(b+a)$, $b(a-b)(a+b)$. Возьмем, например, первый знаменатель $2(b-a)$. Умножим его на $(b+a)$ из второго знаменателя и на $-b$ из третьего знаменателя. Получим общий знаменатель вида $2(b-a)(b+a)(-b)$. Поэтому

$$\frac{1}{2b-2a} + \frac{1}{2b+2a} + \frac{a^2}{a^2b-b^3} = \overset{(a+b)(-b)/}{\frac{1}{2(b-a)}} + \overset{(b-a)(-b)/}{\frac{1}{2(b+a)}} +$$

$$+ \overset{2/}{\frac{a^2}{(b-a)(a+b)(-b)}} = \frac{-ab - b^2 + ab - b^2 + 2a^2}{2(b-a)(b+a)(-b)} = \frac{-2b^2 + 2a^2}{-2(b-a)(b+a)b} =$$

$$= \frac{-2(b^2 - a^2)}{-2b(b^2 - a^2)} = \frac{1}{b}.$$

Умножение, деление и возведение в степень дробей производится по тем же правилам, что и для обыкновенных дробей:

а) $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$, $B \neq 0$; $D \neq 0$;

б) $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$ $(B,\ C,\ D \neq 0)$;

в) $\left(\frac{A}{B}\right)^m = \frac{A^m}{B^m}$, $B \neq 0$;

г) $(A^m)^n = A^{mn}$.

Вопросы и задания

1. Дать определение алгебраического выражения.
2. Что такое область допустимых значений переменных величин?
3. Назвать виды алгебраических выражений.
4. Назвать виды рациональных выражений.
5. Сформулировать правило нахождения общего знаменателя нескольких рациональных дробей.

Упражнения

1. Найти область допустимых значений:

а) $\dfrac{3x-2y}{x(x+y)}$; г) $\dfrac{x}{x-4}+\dfrac{y}{x+3}$; ж) $4-3x^2+(x+y)^2$.

б) $\dfrac{3x}{x^2-4y^2}$; д) $2x+3y-\dfrac{3x}{y-5}$;

в) $\dfrac{x-3y}{x^2-4y}$; е) $\dfrac{2x+y}{x^3+y^3}-\dfrac{3y}{2x+2y}$;

2. Сократить дроби:

а) $\dfrac{15a^2-9b}{18ab-30a^3}$; в) $\dfrac{x^2-3mx+3x-9m}{x^2+3mx+3x+9m}$; д) $\dfrac{b^2+3b}{b^2+2b-3}$;

б) $\dfrac{2m^2+4mn}{4nm+8n^2}$; г) $\dfrac{8ab+2a-12b-3}{4ab-2a-6b+3}$; е) $\dfrac{4x^2-9y^2}{4x^2+12xy+9y^2}$.

3. Выполнить действие:

а) $\dfrac{a^2}{a-3}-\dfrac{6a-9}{a-3}$; в) $\dfrac{a^2+4}{2-a}-\dfrac{4a}{2-a}$;

б) $\dfrac{a^2}{b(a-2)}-\dfrac{4}{b(a-2)}$; г) $\dfrac{4a^2+4a}{1+2a}+\dfrac{1}{1+2a}$.

4. Упростить выражение:

а) $\dfrac{2}{x^2-9}+\dfrac{1}{x+3}$; в) $\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{a^2}{a^2-b^2}$;

б) $\dfrac{5}{6m+6}-\dfrac{3}{2m+2}$; г) $\dfrac{x}{3}-\dfrac{x^2}{3x+3y}$.

5. Упростить выражение:

а) $\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b}+\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$; в) $\dfrac{x+1}{2x-2}-\dfrac{x^2+3}{2x^2-2}+\dfrac{2x-3}{x+1}$;

б) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}-\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b}$; г) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{x}{4-x^2}+\dfrac{x^2+4}{2x^3-8x}$.

6. Выполнить действие:

а) $\dfrac{m-n}{p+q}\cdot\dfrac{2p+2q}{3m-3n}$; в) $\dfrac{a^2-b^2}{x+y}:\dfrac{a-b}{x^2-y^2}$;

б) $\dfrac{mn-n^2}{pq+p^2}\cdot\dfrac{3q+3p}{n^2-mn}$; г) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{a^2-b^2}:\dfrac{x+y}{a+b}$.

---

7. Упростить выражение:

а) $\dfrac{a^2-9b^2}{c^2+8cd+16d^2}\cdot\dfrac{c^2-16d^2}{3b-a}$; в) $\dfrac{a^2-b^2+a+b}{x^2-y^2+x-y}:\dfrac{3a+3b}{2x-2y}$;

б) $\dfrac{4a^2}{2a-b}:\dfrac{12a^3}{4a^2-b^2}:\dfrac{2a^2}{6a^2-3ab}$; г) $\dfrac{x^2-x}{2x+2}\cdot\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+4x}:\dfrac{3x-3}{x^2-16}$.

8. Упростить выражение:

а) $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}-\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$; в) $\left(\dfrac{7a-3b}{2a}+\dfrac{2a-7b}{2b}\right)\cdot\dfrac{4ab}{2a^2-3b^2}$;

б) $\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}$; г) $\left(1-\dfrac{a}{1-a}\right):\left(1-\dfrac{3a^2}{1-a}\right)$.

9. Упростить выражение:

а) $\left(1+\dfrac{a+b}{a-b}\right)\left(2-\dfrac{2a}{a+b}\right)$;

б) $\left(1-\dfrac{a+3b}{2a}\right)\left(\dfrac{1}{a+3b}+\dfrac{1}{a-3b}\right)$;

в) $\left(\dfrac{8a^2+2a}{8a^3-1}-\dfrac{2a+1}{4a^2+2a+1}\right)\cdot\left(1+\dfrac{2a+1}{2a}-\dfrac{4a^2+10a}{4a^2+2a}\right)$;

г) $\left(\dfrac{1-x}{1+x}-\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{4x^2}{x^2-1}\right):\left(\dfrac{1}{x^2-x^3}-\dfrac{1+x}{x^2}-1\right)$.

§ 2. Степень с рациональным показателем

1. Арифметический корень. Пусть n — натуральное число, $n \geq 2$.

Определение 1. *Корнем n-ой степени* из числа a называется число b, n-я степень которого равна a ($b^n = a$).

Пример 1. Числа 2 и –2 являются корнями второй степени из числа 4, так как $2^2 = 4$ и $(-2)^2 = 4$. Число –4 является корнем третьей степени из числа –64.

Определение 2. *Арифметическим корнем n-ой степени* из неотрицательного числа a называется неотрицательное число b, для которого $b^n = a$.

Арифметический корень n-ой степени из числа a обозначается через $\sqrt[n]{a}$. Из определения следует, что $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Пример 2. $\sqrt[4]{625} = 5$, так как $5^4 = 625$; $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4} = 2$.

Значение арифметического корня не изменится, если показатель степени корня умножить на любое натуральное число m и одновременно подкоренное выражение возвести в степень с тем же показателем m, т. е.

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m} \quad (a \geq 0). \tag{1}$$

Равенство (1) является основным свойством корня. Справедливы также следующие свойства корней:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad (a \geq 0, b \geq 0). \tag{2}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (a \geq 0, b > 0). \tag{3}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad (a \geq 0,\ m,\ n \text{ — натуральные числа, } m \geq 2,\ n \geq 2). \tag{4}$$

Замечание 1. Для нечетных значений $n > 1$ корень n-ой степени из отрицательного числа обозначают в виде $\sqrt[n]{-a}$, $a > 0$. Причем его можно выразить через арифметический корень той же степени по следующей формуле $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$. Например, $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$.

2. Преобразование радикалов. Часто корни называют радикалами. Далее рассмотрим преобразование радикалов.

а) Вынесение множителей за знак корня. Если подкоренное выражение можно разложить на степени (множители), показатели которых кратны показателю степени корня, то такие множители могут быть вынесены за знак корня. Например,

$$\sqrt{b^5} = \sqrt{b^4 \cdot b} = \sqrt{b^4} \cdot \sqrt{b} = b^2 \cdot \sqrt{b},$$

$$\sqrt[3]{8x^5} = \sqrt[3]{8x^3 \cdot x^2} = 2x \cdot \sqrt[3]{x^2}.$$

б) Введение множителей под знак корня. Всегда можно ввести под знак корня множители, стоящие перед ним. Для этого достаточно возвести эти множители в степень, показатель которой равен показателю степени корня, а затем записать полученные выражения под знаком корня. Например,

$$b\sqrt{b} = \sqrt{(b)^2 \cdot b} = \sqrt{b^2 \cdot b} = \sqrt{b^3},$$

$$3x \cdot \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4]{(3x)^4 \cdot x^3} = \sqrt[4]{81x^4 \cdot x^3} = \sqrt[4]{81x^7}.$$

в) Освобождение подкоренного выражения от знаменателя. Пусть необходимо освободиться от знаменателя в выражении $\sqrt[3]{\frac{2}{3ax^2}}$. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на $9a^2x$. Имеем

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3ax^2}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 9a^2x}{3ax^2 \cdot 9a^2x}} = \frac{\sqrt[3]{18a^2x}}{\sqrt[3]{3^3a^3x^3}} = \frac{1}{3ax}\sqrt[3]{18a^2x}.$$

Полученное подкоренное выражение уже не содержит знаменателя.

Замечание 2. При извлечении корня из алгебраической суммы нельзя извлекать корни из каждого слагаемого по отдельности. Так, например, $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, тогда как $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.

г) Подобные радикалы. Радикалы (корни), у которых одинаковы показатели степеней и равны подкоренные выражения, называются подобными радикалами. Например, радикалы $4a^2 \cdot \sqrt[3]{x^2y^2}$ и $5b^2 \cdot \sqrt[3]{x^2y^2}$ подобны. Для того чтобы определить, подобны ли между собой данные радикалы, необходимо предварительно упростить их.

Пример 3. Радикалы $\sqrt[3]{16\,ax^3}$ и $\sqrt[6]{256\,a^2y^{12}}$ подобны, так как после упрощения они имеют вид соответственно $2x \cdot \sqrt[3]{2a}$ и $2y^2 \cdot \sqrt[6]{4a^2} = 2y^2 \cdot \sqrt[3]{2a}$, т. е. имеют равные подкоренные выражения и одинаковые показатели степеней у радикалов.

3. Степень с рациональным показателем. В предыдущих пунктах мы видели, что при извлечении корня из степени данного числа делят показатель этой степени на показатель степени корня, если деление выполняется нацело. Например,

$$\sqrt{a^6}=\sqrt{(a^3)^2}=a^3=a^{\frac{6}{2}},\ \sqrt[3]{x^{12}}=\sqrt[3]{(x^4)^3}=x^4=x^{\frac{12}{3}}.$$

Теперь распространим это правило и на случай, когда показатель степени числа не делится нацело на показатель степени корня. Пусть $a\geq 0$, m — целое, n — натуральное число ($n>1$). По определению положим $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ (при $m\leq 0$ считаем, что $a>0$).

Так как рациональное число r — это число вида $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число, то из формулы $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ получаем, что $a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$. Таким образом, определена степень неотрицательного числа с рациональным показателем r.

Свойство (1) можно теперь записать в виде

$$a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m\cdot p}{np}}=\sqrt[np]{a^{mp}},\ p \text{ — натуральное число.} \qquad (5)$$

Основываясь на этом свойстве, мы можем преобразовывать дробный показатель степени по тем же правилам, что и для обыкновенной дроби. Именно:

1) *при умножении степеней с одинаковыми основаниями их показатели складываются*:

$$a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}=a^{\frac{mq+np}{nq}}. \qquad (6)$$

Например,

$$a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{4}{5}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}}=a^{\frac{22}{15}}.$$

Действительно, представим степени с дробными показателями в виде радикалов и произведем умножение по правилу умножения радикалов. Тогда имеем:

$$a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{4}{5}}=\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[5]{a^4}=\sqrt[15]{a^{10}}\cdot\sqrt[15]{a^{12}}=\sqrt[15]{a^{22}}=a^{\frac{22}{15}}.$$

2) *При делении степеней с одинаковыми основаниями из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя*:

$$a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}=a^{\frac{mq-np}{nq}}. \qquad (7)$$

3) *При возведении степени в степень показатели степеней умножаются*

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{mp}{nq}}. \qquad (8)$$

Отметим еще два свойства степеней с рациональными показателями:

4) Пусть $0<a<b$ и r — рациональное число. Тогда $a^r<b^r$, если $r>0$; $a^r>b^r$, если $r<0$.

5) Пусть r, s — рациональные числа и $r>s$. Тогда $a^r>a^s$, если $a>1$; $a^r<a^s$, если $0<a<1$.

Вопросы и задания

1. Дать определение корня n-й степени из числа a.
2. Дать определение арифметического корня n-й степени из числа a.
3. Сформулировать свойства корней.
4. Какие радикалы называются подобными?
5. Объяснить правило введения множителей под знак радикала.
6. Сформулировать правило умножения степеней с одинаковыми основаниями.
7. Сформулировать правило деления степеней с одинаковыми основаниями.
8. Сформулировать правило возведения степени в степень.

Упражнения

1. Вычислить:

а) $\sqrt[3]{216\cdot 0{,}125}$; *б)* $\sqrt[3]{343\cdot 27}$; *в)* $\sqrt[4]{256\cdot 0{,}0016}$.

2. Вычислить:

а) $\sqrt[3]{4^3\cdot 5^3}$; *в)* $\sqrt[5]{(0{,}3)^5\cdot 7^5}$;

б) $\sqrt[4]{13^4\cdot 5^4}$; *г)* $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{5}\right)^7\cdot 15^7}$.

3. Вычислить:

а) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{16}$; *б)* $\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[4]{243}$; *в)* $\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{16}$.

4. Вычислить:

а) $\sqrt[5]{5^{10}\cdot 4^{15}}$; *б)* $\sqrt[3]{3^3\cdot 6^6}$; *в)* $\sqrt[4]{4^{12}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^8}$.

5. Извлечь корень:

а) $\sqrt[3]{8a^3 \cdot b^6}$; *б)* $\sqrt[4]{81x^8y^{12}}$; *в)* $\sqrt[5]{32a^{15}b^{20}}$; *г)* $\sqrt[6]{x^{18}y^{12}}$.

6. Упростить выражение:

а) $\sqrt[3]{4a^2b^4} \cdot \sqrt[3]{2a^4b^2}$;

б) $\sqrt[4]{81a^2b^3} \cdot \sqrt[4]{a^2b}$;

в) $\sqrt[3]{\dfrac{2a^2b}{c^2}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{4ac^2}{b}}$;

г) $\sqrt[4]{\dfrac{8a^2}{b^2}} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{2}{b^2a^2}}$;

д) $\sqrt[5]{\dfrac{16c^8a^2}{b}} \cdot \sqrt[5]{\dfrac{2b}{a^2c^3}}$.

7. Упростить выражение:

а) $\sqrt[4]{a^6b^7} : \sqrt[4]{a^2b^3}$;

б) $\sqrt[3]{16x^5y^2} : \sqrt[3]{2x^2y^2}$;

в) $\sqrt[5]{\dfrac{64x^2}{y^3}} : \sqrt[5]{\dfrac{2y^2}{x^3}}$;

г) $\sqrt[4]{\dfrac{2b^2}{a^3}} : \sqrt[4]{\dfrac{a}{8b^2}}$;

д) $\sqrt[3]{\dfrac{8x^2}{y^3}} : \sqrt[3]{\dfrac{y^3}{x}}$.

8. Вычислить:

а) $81^{\frac{1}{2}}$; *б)* $64^{\frac{1}{3}}$; *в)* $8^{\frac{2}{3}}$; *г)* $27^{\frac{2}{3}}$; *д)* $16^{-0,75}$.

9. Вычислить:

а) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{7}{5}}$; *в)* $4^{\frac{2}{3}} : 4^{\frac{1}{6}}$; *д)* $\left(6^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

б) $5^{\frac{3}{7}} \cdot 5^{\frac{4}{7}}$; *г)* $9^{\frac{1}{3}} : 9^{\frac{5}{6}}$; *е)* $\left(27^{\frac{1}{12}}\right)^{-4}$.

10. Представить в виде степени с рациональным показателем:

а) $a^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{a}$; *в)* $\sqrt[3]{c^2} : c^{\frac{1}{3}}$; *д)* $x^{1,3} \cdot x^{1,2} : \sqrt{x^3}$;

б) $b^{\frac{1}{5}} \cdot b^{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[15]{b^2}$; *г)* $a^{\frac{5}{4}} : \sqrt[4]{a}$; *е)* $y^{-2,7} : y^{-1,2} \cdot \sqrt{y^3}$.

11. Упростить выражение:

а) $\left(a^3\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(b^{-\frac{3}{4}}\right)^{-8}$;

б) $\left(\left(\dfrac{a^5}{b^{-\frac{5}{4}}}\right)^4\right)^{\frac{1}{10}}$;

в) $\left(\sqrt{x^{0,2} \cdot y^{0,6}}\right)^{10}$;

г) $\sqrt{12a^{-4}b^3} : \left[\left(\dfrac{a^5}{3b^{-4}}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{4}}$.

12. Сократить дробь:

а) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}$;

б) $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}}$;

в) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}}{m - 2\sqrt{m \cdot n} + n}$;

г) $\dfrac{x + 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + 1}{\sqrt{x} + 1}$.

13. Упростить выражение:

а) $\left(1 + 2\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \dfrac{b}{a}\right) : \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$;

б) $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right) : \left(\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} - 2 + \sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)$;

в) $\dfrac{\alpha^{\frac{1}{3}} - \alpha^{\frac{7}{3}}}{\alpha^{\frac{1}{3}} - \alpha^{\frac{4}{3}}} - \dfrac{\beta^{-\frac{1}{2}} - \beta^{\frac{3}{2}}}{\beta^{\frac{1}{2}} + \beta^{-\frac{1}{2}}}$;

г) $\dfrac{\sqrt{b} - b^{-\frac{1}{2}} \cdot a}{1 - \sqrt{b^{-1} \cdot a}} - \dfrac{\sqrt[3]{b^2} - b^{-\frac{1}{3}} \cdot a}{\sqrt[6]{b} + b^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}}$.

14. Упростить выражение:

а) $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \dfrac{x \cdot y^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} - \dfrac{2 \cdot x^2}{x - y}$;

б) $\dfrac{3 \cdot a \cdot b - b^2}{a - b} - \dfrac{b \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \dfrac{b \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$;

в) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} - \dfrac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{a^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{a \cdot b} + b^{\frac{2}{3}}}$;

г) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} - \dfrac{x + y}{x^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{x \cdot y} + y^{\frac{2}{3}}}$.

---

15. Упростить выражение:

а) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3$; *в)* $\left(\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{b}\right)^6$; *д)* $\left(\sqrt[3]{\sqrt{a^2b}}\right)^6$; *ж)* $\left(\sqrt[5]{a \cdot \sqrt[3]{b}}\right)^{15}$.

б) $\left(\sqrt[3]{y^2}\right)^3$; *г)* $\left(\sqrt{a^3} \cdot \sqrt[4]{b}\right)^4$; *е)* $\left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{27a^3}}\right)^3$;

16. Вычислить:

а) $\sqrt[3]{\frac{5}{3}}\cdot\sqrt[3]{2\frac{7}{9}}$;   *в)* $\sqrt[3]{6\frac{1}{4}}:\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$;   *д)* $\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{243}}}\right)^3$;

б) $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[4]{4\frac{10}{27}}$;   *г)* $\sqrt[4]{11\frac{1}{4}}:\sqrt[4]{2\frac{2}{9}}$;   *е)* $\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{64}}}\right)^6$.

17. Упростить:

а) $\sqrt[3]{\frac{a^2b}{c^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a^4b^2}{c}}$;   *в)* $\frac{\sqrt[4]{a^4b^3c^2}\cdot\sqrt[4]{c^3b^2a^3}}{\sqrt[4]{a^3bc}}$;

б) $\sqrt[5]{\frac{8a^7}{b^3}}\cdot\sqrt[5]{\frac{4a^3}{b^2}}$;   *г)* $\frac{\sqrt[4]{8x^2y^5}\cdot\sqrt[4]{4x^3y}}{\sqrt[4]{2xy^2}}$.

18. Вычислить:

а) $5^{\frac{1}{5}}\cdot 25^{\frac{2}{5}}$;   *б)* $6^{\frac{2}{3}}\cdot 36^{\frac{2}{3}}$;   *в)* $96^{\frac{3}{4}}:6^{\frac{3}{4}}$;   *г)* $128^{\frac{3}{2}}:8^{\frac{3}{2}}$.

19. Вычислить:

а) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0.25}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$;   *в)* $4^{\frac{7}{5}}:4^{\frac{2}{5}}-3^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}$;

б) $(0{,}04)^{-1{,}5}-(0{,}125)^{-\frac{2}{3}}$;   *г)* $\left(7^{-\frac{2}{7}}\right)^{-7}+\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{-3}$.

20. Упростить выражение:

а) $\frac{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{-\frac{1}{4}}+a^{\frac{3}{4}}\right)}{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\right)}$;   *в)* $\frac{a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}$;

б) $\frac{b^{\frac{1}{4}}\left(\sqrt[4]{b^3}-\sqrt[4]{b^{-1}}\right)}{b^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b^{-2}}\right)}$;   *г)* $\frac{\sqrt{a}b^{\frac{1}{3}}-\sqrt{b}a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}$.

21. Упростить выражение:

а) $\frac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}-\frac{x-y}{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}$;

б) $\frac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$;

в) $\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}-\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x-y}$;

г) $\frac{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}{a-b}-\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$.

§ 3. Действия над иррациональными выражениями

Над иррациональными выражениями производятся действия по тем же правилам, что и для рациональных выражений. Рассмотрим еще несколько специальных действий над иррациональными выражениями.

1. Освобождение знаменателя дроби от радикалов. При вычислении дробных выражений, знаменатели которых содержат радикалы, полезно предварительно преобразовать дробь так, чтобы ее знаменатель не содержал радикалов.

Пример 1. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $A=\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель данной дроби на ($\sqrt{5}+\sqrt{3}$). Тогда $A=\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

В общем случае, когда знаменатель дроби содержит выражение вида $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$, числитель и знаменатель дроби умножают на сопряженный множитель, т. е. на множитель вида $\sqrt{x}\mp\sqrt{y}$, поскольку в этом случае $\left(\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}\mp\sqrt{y}\right)=x-y$.

П р и м е р 2. Освободиться от иррациональности в знаменателе выражения $X=\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

Р е ш е н и е . Имеем:

$$X=\frac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\sqrt{c}\right]\cdot\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\sqrt{c}\right]}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}{a+b-c+2\sqrt{ab}}.$$

Теперь умножим числитель и знаменатель последней дроби на $(a+b-c-2\sqrt{ab})$. Тогда имеем:

$$X=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(a+b-c-2\sqrt{ab}\right)}{\left(a+b-c+2\sqrt{ab}\right)\left(a+b-c-2\sqrt{ab}\right)}=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(a+b-c-2\sqrt{ab}\right)}{(a+b-c)^2-4ab},$$

где $a+b-c\pm 2\sqrt{ab}\neq 0$.

Если в знаменателе дроби имеется выражение вида $A=\sqrt[3]{x}\pm\sqrt[3]{y}$, то в качестве сопряженного множителя следует взять $M=\sqrt[3]{x^2}\mp\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$, поскольку тогда $A\cdot M=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3\pm\left(\sqrt[3]{y}\right)^3=x\pm y$.

П р и м е р 3. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $X=\dfrac{7}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}}$.

Р е ш е н и е . Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $\left(\sqrt[3]{3}\right)^2-\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2$. Имеем:

$$X=\frac{7\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{16}\right)}{\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{16}\right)}=\frac{7\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{16}\right)}{3+4}=\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{16}.$$

Для выражений вида $A=\sqrt[m]{x}+\sqrt[m]{y}$ сопряженный множитель определяется с помощью тождеств

$$a^{2n}-b^{2n}=(a+b)\left(a^{2n-1}-a^{2n-2}b+\ldots+ab^{2n-2}-b^{2n-1}\right),$$
$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\left(a^{2n}-a^{2n-1}b+\ldots-ab^{2n-1}+b^{2n}\right).$$

П р и м е р 4. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $X=\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}}$ $(a>0, b>0)$.

Р е ш е н и е . Имеем:

$$X=\frac{1}{\sqrt[6]{a^3}+\sqrt[6]{b^2}}=\frac{\left(\sqrt[6]{a^3}\right)^5-\left(\sqrt[6]{a^3}\right)^4\sqrt[6]{b^2}+\ldots+\sqrt[6]{a^3}\left(\sqrt[6]{b^2}\right)^4-\left(\sqrt[6]{b^2}\right)^5}{\left(\sqrt[6]{a^3}\right)^6-\left(\sqrt[6]{b^2}\right)^6}.$$

После упрощений получаем:

$$X=\frac{a^2\sqrt{a}-a^2\sqrt[3]{b}+a\sqrt[3]{ab^2}-ab+b\sqrt[6]{a^3b^2}-b\sqrt[3]{b^2}}{a^3-b^2},$$

где $a>0$, $b>0$, $a^3-b^2\neq 0$.

2. Формула сложного квадратного радикала. Для выражений вида $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ имеет место следующая важная формула, называемая *формулой сложного квадратного радикала*:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},$$

где $A>0, B>0,\ A^2>B$.

Выведем эту формулу. Рассмотрим сумму вида $c=\sqrt{A+\sqrt{B}}+$ $+\sqrt{A-\sqrt{B}}$. После возведения в квадрат получим $c^2=2A+2\sqrt{A^2-B}$, откуда $c=\sqrt{2A+2\sqrt{A^2-B}}$. Следовательно,

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{2A+2\sqrt{A^2-B}}.$$

Рассмотрим теперь разность вида $(\sqrt{A+\sqrt{B}}-\sqrt{A-\sqrt{B}})$. Действуя аналогично, получим $\sqrt{A+\sqrt{B}}-\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{2A-2\sqrt{A^2-B}}$.

Складывая, а затем вычитая почленно последние два равенства, имеем соответственно

$$2\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{2A+2\sqrt{A^2-B}}+\sqrt{2A-2\sqrt{A^2-B}},$$

$$2\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{2A+2\sqrt{A^2-B}}-\sqrt{2A-2\sqrt{A^2-B}}.$$

Отсюда получаем искомые формулы:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} + \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},$$

$$\sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} - \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Пример 5. Вычислить $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

Решение. Применим формулу сложного квадратного радикала. Тогда имеем:

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{4-\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{16-12}}{2}} - \sqrt{\frac{4-\sqrt{16-12}}{2}} = \sqrt{3}-1.$$

Ответ: $\sqrt{3}-1$.

Рассмотрим еще несколько примеров, содержащих радикалы. При решении таких примеров часто допускаются ошибки вследствие неправильного применения правил действий над радикалами.

Пример 6. Упростить выражение $\sqrt{(5-b)^2}$.

Решение. Так как $\sqrt{(5-b)^2}$ — арифметический корень, то $\sqrt{(5-b)^2} = |5-b|$ и, следовательно, $\sqrt{(5-b)^2} = |5-b| = \begin{cases} 5-b, & \text{если } b \le 5 \\ b-5, & \text{если } b > 5 \end{cases}$.

Пример 7. Упростить выражение $\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}$, если $a<0$.

Решение. Так как $a<0$, $\sqrt{a^2} = |a| = -a$, то имеем:

$$\sqrt{1+\frac{1}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2+1}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}.$$

Пример 8. Ввести знаменатель под знак корня в выражении $\frac{\sqrt{a}}{b}$, если $a \ge 0$, $b<0$.

Решение. Так как $b<0$, то $b=-\sqrt{b^2}$. Поэтому $\frac{\sqrt{a}}{b} = \frac{\sqrt{a}}{-\sqrt{b^2}} = -\sqrt{\frac{a}{b^2}}$.

Пример 9. Вычислить $A=\sqrt{6}-\sqrt{4-\sqrt{33-12\sqrt{6}}}$.

Решение. Используя формулу сложного квадратного радикала, вычислим сначала $\sqrt{33-12\sqrt{6}}$. Имеем:

$$\sqrt{33-12\sqrt{6}} = \sqrt{33-\sqrt{864}} = \sqrt{\frac{33+\sqrt{1089-864}}{2}} - \sqrt{\frac{33-\sqrt{1089-864}}{2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{33+15}{2}} - \sqrt{\frac{33-15}{2}} = \sqrt{24}-3.$$

Далее получим:

$$\sqrt{4-\left(\sqrt{24}-3\right)} = \sqrt{7-\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{49-24}}{2}} - \sqrt{\frac{7-\sqrt{49-24}}{2}} = \sqrt{6}-1.$$

Откуда $A=\sqrt{6}-\left(\sqrt{6}-1\right)=1$.

Вопросы и задания

1. Объяснить, что такое сопряженный множитель?
2. Как освободиться от иррациональности в знаменателе дроби, если знаменатель содержит выражение вида $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$?
3. Записать формулу сложного квадратного радикала.

Упражнения

1. Вычислить:

а) $\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}$; в) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}-\sqrt[4]{256}+\sqrt[4]{81}$;

б) $\sqrt{147}-\sqrt{125}+\sqrt{27}$; г) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{686}-\sqrt[3]{16}$.

2. Вычислить:

а) $\sqrt[3]{11-\sqrt{57}}\cdot\sqrt[3]{11+\sqrt{57}}$; в) $\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}}}+\left(\sqrt[3]{\sqrt{a^4}}\right)^3$;

б) $\sqrt[4]{15-\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{15+\sqrt{7}}$; г) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}\right)^3+2\left(\sqrt{\sqrt[4]{x}}\right)^8$.

3. Вычислить:

а) $\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{16}\right)\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}\right)$;

б) $\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16}\right)\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}\right)$.

4. Доказать, что

а) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=4$; б) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$

5. Освободиться от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{2}{3+\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{10}{3\sqrt{5}}$; в) $\dfrac{43}{7-\sqrt{6}}$; г) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

6. Вычислить:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{25}+\sqrt{24}}$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}+\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{23}+\sqrt{22}}$.

7. Проверить справедливость равенств:

а) $\dfrac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{4}}+\dfrac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{4}}=\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$;

б) $\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\dfrac{5}{\sqrt{10}+\sqrt{5}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}$;

в) $\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{5\sqrt{3}}-\sqrt{2\sqrt{3}}}+\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5\sqrt{3}}+\sqrt{7\sqrt{3}}}=2\sqrt[3]{27}$.

8. Сократить дробь:

а) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[3]{b}}$; в) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}+b}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[3]{b}}$;

б) $\dfrac{a^3-\sqrt{b}}{a\sqrt{a}-\sqrt[4]{b}}$; г) $\dfrac{\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt{b}}$.

9. Упростить выражение:

а) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$; б) $\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$;

в) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

г) $\left(\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}+\sqrt[3]{ab}\right):\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^2$.

10. Упростить выражение:

а) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\dfrac{a-b}{a^2+ab}$;

б) $\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)\cdot\left(\sqrt{\dfrac{a}{4}}-\dfrac{1}{\sqrt{4a}}\right)$.

11. Упростить выражение:

а) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}-1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{a}}-\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{1+\sqrt[3]{a}}$;

б) $\left(\dfrac{\left(a+\sqrt[3]{a^2b}\right):\left(b+\sqrt[3]{ab^2}\right)-1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^3$;

в) $\left(\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{b^3}\right)\left(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}\right)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):\dfrac{a+b}{2}$;

г) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{ab^3}-\sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{1+\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right)^{-2}\cdot\sqrt{1+\dfrac{a}{b}+2\sqrt{\dfrac{a}{b}}}$.

---

12. Вычислить:

а) $4\sqrt{32}-7\sqrt{18}+0{,}5\sqrt{128}+2\sqrt{8}$;

б) $2\sqrt[3]{250}+3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{16}+\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{686}$.

13. Вычислить:

а) $\left(\sqrt[4]{\sqrt{x^8y^2}}\right)^4+\left(\sqrt[4]{x^2y^8}\right)^2$; б) $\left(\left(\sqrt[6]{a\sqrt[5]{a}}\right)^6-\sqrt[10]{a^2}\right):\sqrt[5]{a}$.

14. Освободиться от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{4}{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$; в) $\dfrac{10}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{7}}$; г) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+y}$.

15. Упростить выражение:

а) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{2\sqrt{ab}}{a-b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\dfrac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$;

б) $\dfrac{\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{a-b}+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{ab}}{a-b}$.

16. Упростить выражение:

а) $\left(\dfrac{\frac{1}{a}-a}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{\frac{1}{a}}+1\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{\frac{1}{a}}-1\right)}+\sqrt[3]{a}\right)^{-3}$;

б) $\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-4b}{(a-b)\left(b^{-0,5}+3a^{-0,5}\right)^{-1}}:\dfrac{a+9b+6\sqrt{ab}}{b^{-0,5}+a^{-0,5}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{2}(x-a)}{2x-a}-\left[\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}$;

г) $\left[\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+1+\dfrac{1}{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}-1}\right]^{-2}:\left(2-x^2-2\sqrt{1-x^2}\right)$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Сократить дробь:

а) $\dfrac{64x^3-27y^6}{9y^4-16x^2}$; в) $\dfrac{b^4+4}{b^2-2b+2}$;

б) $\dfrac{a^2-a+1}{a^4+a^2+1}$; г) $\dfrac{a^2-b^2-c^2+2bc}{b^2-c^2-a^2+2ac}$.

2. Выполнить действие:

а) $\dfrac{4a^2b}{(2a-3)^2}-\dfrac{9b}{(3-2a)^2}$; б) $\dfrac{x^2}{(x-3y)^3}+\dfrac{9y^2}{(3y-x)^3}$.

3. Доказать, что при всех допустимых значениях переменной, выражение $\dfrac{3a+2}{9a^2-6a+4}-\dfrac{18a}{27a^3+8}-\dfrac{1}{3a+2}$ не зависит от a.

4. Выполнить действие:

а) $\dfrac{4x^2-6xy+9y^2}{2x-3y}\cdot\dfrac{9y^2-4x^2}{8x^3+27y^3}$;

б) $\dfrac{a^2+ab}{5a-a^2+b^2-5b}\cdot\dfrac{a^2-b^2+25-10a}{a^2-b^2}$;

в) $\dfrac{27a^3-64b^3}{b^2-4}:\dfrac{9a^2+12ab+16b^2}{b^2+4b+4}$;

г) $\dfrac{x^4-3x^2+1}{x^3-27}:\dfrac{x^2+x-1}{x^2+3x+9}$.

5. Доказать, что при всех допустимых значениях переменной, выражение $\dfrac{4}{1-a}-\left(\dfrac{2a+2}{3-a}\right)^2\cdot\left(\dfrac{a+9}{a^2+2a+1}+\dfrac{2a}{1-a^2}\right)$ не зависит от a.

6. Упростить выражение:

а) $\left(\dfrac{x}{x^2+2x+4}+\dfrac{x^2+8}{x^3-8}-\dfrac{1}{x-2}\right)\cdot\left(\dfrac{x^2}{x^2-4}-\dfrac{2}{2-x}\right)$;

б) $\left(\dfrac{1}{2-a}+\dfrac{6a-4-a^2}{a^3-8}-\dfrac{2-a}{a^2+2a+4}\right)\cdot\dfrac{a^3+4a^2+8a+8}{4-4a+a^2-a^3}$;

в) $\left(\dfrac{x-2y}{x^3+y^3}+\dfrac{y}{x^3-x^2y+xy^2}\right):\dfrac{x^2+y^2}{x^3-xy^2}+\dfrac{2y^2}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}$.

7. Сократить дробь:

а) $\dfrac{a^{1,5}-b^{1,5}}{b-a}$; в) $\dfrac{b^{\frac{8}{7}}-a^{0,8}}{a^{\frac{6}{5}}+b^{\frac{12}{7}}}$.

б) $\dfrac{a+b}{a-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}$;

8. Упростите выражение:

$$\frac{8b-a}{6}\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{2a^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}}+\frac{a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}}{4a^{-\frac{2}{3}}+2a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}}\right).$$

9. Может ли выражение $\left(\dfrac{0{,}5a^{\frac{1}{4}}}{(2-a)^{\frac{3}{4}}}+\dfrac{(2-a)^{\frac{1}{4}}a^{-\frac{3}{4}}}{2}\right):(2a-a^2)^{\frac{1}{4}}$ быть

равным 1 ?

10. Упростить выражение:

а) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})^{-1}}{a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+1}-\dfrac{b^{\frac{1}{4}}}{(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{4}}+1)-2a^{\frac{1}{4}}}\right)\cdot(a-b)$;

б) $$\frac{(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})\left(a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{6}}\right)^2}{a^{-1}+b^{-1}-\left(a^{-\frac{2}{3}}-b^{-\frac{2}{3}}\right)\left(a^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}\right)}-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}.$$

11*. Упростить выражение:

$$\frac{\left(b^{\frac{5}{6}}a^{-\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(b^{\frac{5}{6}}a^{-\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}\right)^2}{\left(a^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)}-2a+\frac{4a^2}{a-b}.$$

12*. Упростить выражение:

$$\frac{\left(a^{\frac{5}{9}}b^{-\frac{1}{9}}-a^{\frac{2}{9}}b^{\frac{2}{9}}\right)^3+3\left(\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{a^3b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a^{-1}}+\sqrt[3]{b^{-1}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)}-\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}+\frac{a+b}{2}.$$

ГЛАВА VI

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 1. Уравнение. Равносильные уравнения

1. Уравнение. В курсе средней школы изучались различные уравнения — линейные, квадратные и др. Здесь мы дадим в общем виде определения уравнения и решения уравнения.

Определение 1. Равенство вида $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые выражения от x, называется *уравнением с одним неизвестным*.

Определение 2. Множество X значений x, при подстановке которых в уравнение получается верное числовое равенство, называют *решением данного уравнения*, а каждое такое значение x — *корнем уравнения*. Если такое множество является пустым, то говорят, что уравнение не имеет решения.

Решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что уравнение не имеет решения.

Пример 1. Равенства $3x+1=x^2-1$, $5x^2-2x=0{,}25$ и $x^4-3x^2+8=0$ являются примерами уравнений с одним неизвестным.

Пример 2. Решить уравнения: *а)* $x^2+x-20=0$; *б)* $|x|+1=x+1$; *в)* $x^2+x=-3$.

Решение.

а) равенство $x^2+x-20=0$ выполняется только в том случае, когда x принимает значения 4 и –5. Поэтому множество $\{-5;4\}$ является решением уравнения, а каждое из указанных чисел — корнем уравнения.

б) равенство $|x|+1=x+1$ выполняется для всех $x\in[0;+\infty)$. Поэтому множество $[0;+\infty)$ является решением уравнения, а каждое значение x из этого множества является корнем уравнения.

в) равенство $x^2+x=-3$ не выполняется при действительных значениях x, поэтому уравнение не имеет решения (на множестве действительных чисел).

2. Равносильные уравнения.

Определение 3. Уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ и $f_2(x)=g_2(x)$ называются *равносильными уравнениями*, если каждый корень первого уравнения является корнем второго и обратно, каждый корень второго уравнения является корнем первого уравнения, т. е., если решения уравнений совпадают. Равносильность уравнений обозначается знаком $\Leftrightarrow$.

Любые два уравнения, не имеющие решение, также считаются равносильными.

П р и м е р 3. Указать, какие из нижеследующих уравнений равносильны:

а) $3x^2+2=2x^2+3$; *г*) $x^2-1=0$; *ж*) $x^2+x+1=0$.
б) $3x+5=8$; *д*) $8x=5+3x$;
в) $-2x+1=3$; *е*) $x^2+1=0$;

Р е ш е н и е . Нетрудно проверить, что уравнения имеют следующие решения:

а) $\{-1;1\}$; *в*) $\{-1\}$; *д*) $\{1\}$; *ж*) $\varnothing$.
б) $\{1\}$; *г*) $\{-1;1\}$; *е*) $\varnothing$;

Следовательно, $3x^2+2=2x^2+3 \Leftrightarrow x^2-1=0$; $3x+5=8 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 8x=5+3x$; $x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2+x+1=0$.

Пусть X — множество, на котором определены выражения $f(x)$ и $g(x)$ (т. е. при $x\in X$ выражения $f(x)$ и $g(x)$ превращаются в числовые выражения, имеющие действительное значение). Тогда это множество будем называть *областью допустимых значений* (ОДЗ) переменной x.

О п р е д е л е н и е 4. Множество X, на котором определены выражения $f(x)$ и $g(x)$, называется ОДЗ уравнения $f(x)=g(x)$.

Т е о р е м а 1. Пусть X является ОДЗ уравнения $f(x)=g(x)$, а выражение $\varphi(x)$ определено на этом же множестве X.

Тогда $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x)$ на множестве X.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $\alpha\in X$ — корень уравнения

$$f(x)=g(x). \tag{1}$$

Тогда имеет место равенство $f(\alpha)=g(\alpha)$. Отсюда $f(\alpha)+\varphi(\alpha)=$ $=g(\alpha)+\varphi(\alpha)$. Это означает, что $x=\alpha$ является корнем уравнения

$$f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x). \tag{2}$$

Аналогично доказывается обратное утверждение, т. е., что любой корень уравнения (2) является корнем уравнения (1).

Т е о р е м а 2. Пусть X является ОДЗ уравнения $f(x)=g(x)$ и выражение $\varphi(x)$ определено на множестве X. Тогда при условии $\varphi(x)\neq 0$ на этом множестве $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x)$.

Доказательство. Пусть $\alpha\in X$ — корень уравнения (1). Тогда выполняется равенство $f(\alpha)=g(\alpha)$. Отсюда $f(\alpha)\cdot\varphi(\alpha)=g(\alpha)\cdot\varphi(\alpha)$, т. е. $x=\alpha$ является корнем уравнения $f(x)\cdot\varphi(x)=g(x)\cdot\varphi(x)$. Аналогично доказывается обратное утверждение, т. е., что любой корень уравнения $f(x)\cdot\varphi(x)=g(x)\cdot\varphi(x)$ является корнем уравнения (1).

П р и м е р 4. Напишите четыре уравнения, которые являются равносильными уравнению $3x^2-5x+2=0$.

Р е ш е н и е . Следующие уравнения являются равносильными заданному уравнению: $6x^2-10x+4=0$; $30x^2=50x-20$; $2=5x-3x^2$, $3x^2-5x=-2$.

Вопросы и задания

1. Что такое уравнение?
2. Дать определение решения уравнения.
3. Дать определение равносильных уравнений.
4. Сформулировать теоремы о равносильных уравнениях.

Упражнения

1. Проверить, является ли $x=3$ корнем уравнения:

а) $x^2-9x+18=0$; *в*) $x^3+x^2=x+33$;
б) $5x+6=2-x^2$; *г*) $15x-1=x+41$.

2. Решить уравнения:

а) $(x-5)(x+4)(x-11)=0$; *в*) $(3x-1)(4x+7)x=0$.
б) $(2x+11)(x-5)=0$;

3. Из нижеследующих уравнений укажите равносильные:

а) $\dfrac{5x-4}{x+1}=0$; *д*) $10x=8$;
б) $5x-4=0$; *е*) $6x-4=x$;
в) $(5x-4)(x+1)=0$; *ж*) $x^2+2x+18=0$;
г) $\left(x-\dfrac{4}{5}\right)(x+1)=0$; *з*) $2x^2+2x+11=0$.

4. Проверить, является ли $x=-1$ корнем уравнения:

а) $x^2+5x+4=0$;   в) $7x^3+8x=x^2-16$;

б) $8x-5=6x$;   г) $8x^2+9x=x^3$.

5. Решить уравнения:

а) $(8-x)(4x+5)(x-4)=0$;   в) $5(2x+1)(4x-3)x=0$.

б) $(7x+19)(5-3x)x=0$;

6. Какие из указанных ниже уравнений являются равносильными:

а) $\dfrac{6x+5}{x-3}=0$;   д) $12x-9=1$;

б) $12x=-10$;   е) $(3x+1)(6x+1)=0$;

в) $36x^2-25=0$;   ж) $\left(x+\dfrac{1}{3}\right)(6x+5)=0$;

г) $6x-5=0$;   з) $2x=1\dfrac{2}{3}$.

§ 2. Стандартные способы решения уравнений

1. Решение уравнений с применением способа разложения на множители. Из курса средней школы известны способы решения линейного и квадратного уравнений. Рассмотрим еще несколько способов решения уравнений с одним неизвестным.

Теорема. Пусть $A(x)=A_1(x)\cdot A_2(x)\cdot\ldots\cdot A_n(x)$ и $A_k(x)$, $k=1, 2, 3, \ldots, n$ — выражения, определенные на множестве X. Тогда любой корень $x\in X$ уравнения $A(x)=0$ будет корнем хотя бы одного из уравнений $A_k(x)=0$, $k=1, 2, 3, \ldots, n$. Обратно, если $x\in X$ при некотором k является корнем уравнения $A_k(x)=0$, то x является корнем уравнения $A(x)=0$.

Доказательство. Пусть $a\in X$ корень уравнения $A(x)=0$. Тогда $A(a)=A_1(a)\cdot A_2(a)\cdot\ldots\cdot A_n(a)=0$. Поскольку произведение чисел равно нулю только тогда, когда один из сомножителей равен нулю, то при некотором i имеем равенство $A_i(a)=0$.

Обратно. Пусть $A_i(a)=0$ при некотором $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда из равенства $A(x)=A_1(x)\cdot A_2(x)\cdot\ldots\cdot A_i(x)\cdot\ldots\cdot A_n(x)$ получаем, что $A(a)=0$.

Пример 1. Решить уравнение $(5x-1)(x+1)(7x+14)=0$.

Решение. Левая часть уравнения обращается в нуль, если либо $5x-1=0$, либо $x+1=0$, либо $7x+14=0$. Поэтому $x_1=\frac{1}{5}$, $x_2=-1$, $x_3=-2$ есть корни данного уравнения.

Пример 2. Решить уравнение с применением способа разложения на множители: $2x^2-3x+1=0$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения в виде $2x^2-3x+1=2x^2-2x-x+1=-2x(1-x)+(1-x)=(1-x)(-2x+1)$. Значит данное уравнение равносильно уравнению $(1-x)(-2x+1)=0$.

Отсюда $x_1=1$, $x_2=\dfrac{1}{2}$.

2. Решение уравнений с применением формул сокращенного умножения. Часто левую часть уравнения $A_n(x)=0$ можно разложить на множители, используя известные формулы сокращенного умножения:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b);$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2);$$
$$a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2);$$
$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4).$$

Рассмотрим один пример.

Пример 3. Решить уравнение: $(x^2-4x)^2-(x-7)^2=0$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения в виде

$$(x^2-4x)^2-(x-7)^2=(x^2-4x+x-7)(x^2-4x-x+7)=$$
$$=(x^2-3x-7)(x^2-5x+7).$$

Отсюда следует, что либо $x^2-3x-7=0$, либо $x^2-5x+7=0$. Второе из этих уравнений не имеет решения, поскольку $D_2==25-4\cdot1\cdot7=-3<0$. Корнями первого из уравнений являются числа $x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{37}}{2}$. Следовательно, $\left\{\dfrac{3+\sqrt{37}}{2};\dfrac{3-\sqrt{37}}{2}\right\}$ — решение данного уравнения.

3. Решение уравнений методом выделения полного квадрата. В некоторых уравнениях удобнее сначала выделить полный квадрат из данного выражения, а затем применить способ разложения на множители.

Пример 4. Решить уравнение: $x^4-8x^2-20=0$.

Решение. Сначала из левой части уравнения выделим полный квадрат, а затем разложим его на множители:

$$x^4-8x^2-20=(x^2-4)^2-20-16=(x^2-4)^2-36=(x^2-4)^2-6^2=$$
$$=(x^2-4-6)(x^2-4+6)=(x^2-10)(x^2+2).$$

Следовательно, данное уравнение равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} x^2-10=0 \\ x^2+2=0 \end{array}\right.$, или равносильно $\left[\begin{array}{l} x^2=10 \\ x^2=-2 \end{array}\right.$, откуда $x_1=-\sqrt{10}$, $x_2=\sqrt{10}$.

4. Метод неопределенных коэффициентов. Этот метод также часто используется при решении уравнений. Сущность его заключается в следующем. Предположим, что левая часть уравнения $P(x)=0$, где $P(x)$ — многочлен некоторой степени, разложена на множители, имеющие вид линейного или квадратного многочлена с неизвестными коэффициентами. Умножив эти многочлены, получаем новый многочлен с неизвестными коэффициентами, но тождественно равный многочлену $P(x)$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x у этих многочленов, получаем систему уравнений, из которой находим неизвестные коэффициенты.

Пример 5. Решить уравнение: $x^3+2x^2-5x+2=0$.

Решение. Запишем левую часть уравнения в виде

$$x^3+2x^2-5x+2=(x-a)(b_1x^2+b_2x+b_3).$$

Тогда $x^3+2x^2-5x+2=b_1x^3+(b_2-ab_1)x^2+(b_3-ab_2)x-ab_3$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов a, b_1, b_2, b_3:

$$\begin{cases} b_1=1 \\ b_2-ab_1=2 \\ b_3-ab_2=-5 \\ -ab_3=2. \end{cases}$$

Легко видеть, что системе удовлетворяют числа $b_1=1$, $b_2=3$, $b_3=-2$, $a=1$. Значит, исходное уравнение равносильно уравнению $(x-1)(x^2+3x-2)=0$. Решая последнее уравнение, легко получаем, что $x_1=1$, $x_{2,3}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$. Ответ: $\left\{1, \frac{-3+\sqrt{17}}{2}, \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right\}$.

5. Введение новой переменной. Биквадратное уравнение. Следующим способом решения уравнений является введение новой переменной. Этот способ часто применяется при решении так называемых *биквадратных уравнений* (т. е. уравнений вида $ax^4+bx^2+c=0$, $a\neq 0$) и уравнений, приводимых к квадратным уравнениям.

Пример 6. Решить уравнение: $(x^2+x+1)^2-3x^2-3x-1=0$.

Решение. Обозначим x^2+x+1 через z. Так как $-3x^2-3x-1=-3z+2$, то исходное уравнение превращается в квадратное уравнение $z^2-3z+2=0$. Решив его, находим корни $z_1=1$, $z_2=2$. Поскольку $x^2+x+1=z$, то корни исходного уравнения являются корнями уравнения $x^2+x+1=1$ или уравнения $x^2+x+1=2$.

Решая их, получаем корни $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $x_4=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ответ. $\left\{0; -1; \frac{\sqrt{5}-1}{2}; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Вопросы и задания

1. Сформулировать теорему, применяемую при решении уравнений с помощью способа разложения на множители.
2. Привести пример уравнения, которое решается с помощью формул сокращенного умножения.
3. Привести пример уравнения, которое решается с помощью метода выделения полного квадрата.
4. Объяснить сущность метода неопределенных коэффициентов.
5. Какое уравнение называется биквадратным уравнением?

Упражнения

1. Решить уравнения:

а) $(x^2+2x-1)(x-3)=0$; в) $(2x^2+3x-5)(5x-7)=0$;

б) $(x^2-3x+3)(2x+5)=0$; г) $(3x^2-4x)(x+1)=0$.

2. Решить уравнения, применяя способ разложения на множители:

а) $x^3+9x^2+23x+15=0$;

б) $2x^3-x^2-5x-2=0$;

в) $3x^4+5x^3-x^2-5x-2=0$;

г) $x^4-9x^3+30x^2-44x+24=0$;

д) $x^5+5x^4+3x^3-13x^2-8x+12=0$.

3. Решить уравнения, применяя формулы сокращенного умножения:

а) $x^6-27=0$; в) $(y-1)^3+(2y+3)^3=27y^3+8$;

б) $4x^2-4x+1=0$; г) $(5x+2)^3-(x+1)^3=64x^3+1$.

4. Решить уравнения с помощью метода выделения полного квадрата:

а) $y^4+6y^2-1=0$; б) $y^5-8y^3=7y$.

5. Решить уравнения с помощью метода неопределенных коэффициентов:

а) $x^3-2x^2-x-6=0$; в) $x^4-x^3+x^2+2=0$.

б) $2x^3-x^2+9x+5=0$;

6. Решить уравнения:

а) $(x^2+5)(2x^2+x+11)=0$; б) $(x^2+1)(x^2-x)=0$.

7. Решить уравнения, применяя способ разложения на множители:

а) $x^6-2x^5-28x^4+54x^3+79x^2-100x-100=0$;

б) $12x^4-5x^3-51x^2+20x+12=0$;

в) $6x^4+5x^3-12x^2-5x+6=0$;

г) $14x^4-37x^3-72x^2-17x+4=0$.

8. Решить уравнения, применяя формулы сокращенного умножения:

а) $(2x-3)^3-1=x^2-4x+4$; в) $64x^3-8=x^3+6x^2+12x$.

б) $8x^3=x^3+3x^2+3x+1$;

9. Решить уравнение с помощью метода выделения полного квадрата: $2x^5-34x^3-x=0$.

10. Решить уравнения с помощью метода неопределенных коэффициентов:

а) $x^4-2x^3-3x^2-4x-1=0$; б) $x^4-4x^3-7x^2+4x+1=0$.

§ 3. Комплексные корни алгебраических уравнений. Основная теорема алгебры. Теорема Виета

1. Основная теорема алгебры. Пусть сначала $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ *полином* (многочлен) степени n, коэффициенты полинома — действительные числа и $x=x_1$ является корнем уравнения $P(x)=0$. В этом случае из теоремы Безу вытекает, что $P(x)=(x-x_1)Q(x)$, где $Q(x)$ — полином степени $n-1$.

Поэтому для нахождения других корней уравнения $P(x)=0$, достаточно решить уравнение $Q(x)=0$, степень левой части $Q(x)$ которого на единицу меньше степени $P(x)$.

Пусть $x=x_2$ — корень уравнения $Q(x)=0$. Снова, применяя теорему Безу, имеем $Q(x)=(x-x_2)G(x)$, где $G(x)$ — полином степени $n-2$, откуда для нахождения оставшихся корней получим уравнение $G(x)=0$. Таким способом можно последовательно найти все корни полинома $P(x)$, т. е. корни уравнения $P(x)=0$.

Теорема 1. Если полином $P(x)$ имеет различные действительные корни $x_1,x_2,\ldots,x_k$, то он делится без остатка на $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)$.

Доказательство. Используя теорему Безу, имеем равенство $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)\,Q(x)$, где $Q(x)$ — полином степени $(n-k)$. Отсюда очевидно, что полином $P(x)$ делится без остатка на $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)$.

Теорема 2. Полином $P(x)$ степени n имеет не более n различных действительных корней.

Доказательство. Предположим обратное, т. е. пусть различные $x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}$ являются корнями полинома $P(x)$. Тогда из теоремы 1 имеем $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n+1})\,Q(x)$, где $Q(x)$ — полином степени (–1). Это противоречит определению полинома. Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы.

Сформулируем (без доказательства) следующую теорему, называемую *основной теоремой алгебры*.

Теорема 3 (основная теорема алгебры). Любой полином $P(x)$ степени n $(n\geq 1)$ имеет хотя бы один комплексный корень.

Из теоремы 3 вытекает, что полином $P(x)$ с действительными коэффициентами всегда имеет хотя бы один чисто действительный корень или комплексный корень $z=\alpha+\beta\cdot i$, α, $\beta\in R$, $\beta\neq 0$.

Теорема 4. Если комплексное число $z=\alpha+\beta\cdot i$ является корнем полинома $P(z)$, т. е. $P(\alpha+\beta\cdot i)=0$, то комплексное число $\bar{z}=\alpha-\beta\cdot i$ также является корнем полинома $P(z)$.

Доказательство теоремы 4 предоставляем для самостоятельной работы.

Замечание. Теорему 1 можно применять и в случае комплексных корней $x_1,\ldots,x_k$.

Пример 1. Задан полином $P(x)=x^3+x^2+x+1$. Доказать, что $P(x)$ делится без остатка на x^2+1.

Покажем сначала, что $z=i$ является корнем полинома. Действительно, $P(i)=i^3+i^2+i+1=i\cdot i^2-1+i+1=-i-1+i+1=0$.

Тогда из теоремы 4 следует, что $z=-i$ также является корнем полинома. Но так как $(x-i)(x+i)=x^2-i^2=x^2+1$, то полином $P(x)$ делится без остатка на x^2+1.

Ниже под корнями уравнения будем подразумевать не только действительные, но и комплексные числа.

Теорема 5 (теорема Виета). Пусть полином $P(x) = a_0x^2 + a_1x+a_2$, $a_0\neq 0$ имеет корни x_1 и x_2. Тогда справедлива система:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{a_2}{a_0}. \end{cases} \qquad (1)$$

Обратно, если x_1 и x_2 удовлетворяют системе (1), то они являются корнями уравнения $a_0x^2+a_1x+a_2=0$.

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $a_0x^2+a_1x+a_2=0$. Тогда из теоремы Безу следует равенство

$$a_0x^2+a_1x+a_2=a_0(x-x_1)(x-x_2).$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{a_2}{a_0}. \end{cases}$

Обратное утверждение доказывается аналогичным образом.

Теорема 6 (обобщенная теорема Виета). Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ — корни алгебраического уравнения $a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n=0$, $a_0\neq 0$. Тогда

$$\begin{cases} x_1+x_2+...+x_n=-\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1x_2...x_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}. \end{cases} \qquad (2)$$

Обратно, если $x_1, x_2, ..., x_n$ удовлетворяют системе (2), то они являются корнями исходного алгебраического уравнения.

Следствие. Если полином $P(x) = a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ имеет корни x_1, x_2, x_3, то $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{a_3}{a_0}. \end{cases}$

Пример 2. Найти сумму корней уравнения $x^3+2x^2+1=0$.

Решение. Из обобщенной теоремы Виета легко получаем, что $x_1+x_2+x_3=-2$.

Пример 3. Найти произведение корней уравнения $2x^4+3x^3-5x^2+x+7=0$.

Решение. Из обобщенной теоремы Виета следует, что $x_1x_2x_3x_4=(-1)^4\dfrac{7}{2}=3{,}5$.

Вопросы и задания

1. Сформулировать основную теорему алгебры.
2. Сформулировать теорему Виета.
3. Сформулировать обобщенную теорему Виета для полинома степени 4.

Упражнения

1. Найти сумму корней уравнения:

а) $x^3+3x^2-5x+4=0$; *г)* $3x^4-81x^3+9x+7=0$;

б) $x^4-3x^2+5x-7=0$; *д)* $-x^4+5x^3-6x+71=0$.

в) $2x^4+5x^2-7x+8=0$;

2. Найти произведение корней уравнения:

а) $x^3+3x^2-5x+4=0$; *г)* $3x^4-81x^3+9x+7=0$;

б) $x^4-3x^2+5x-7=0$; *д)* $-x^4+5x^3-6x+71=0$.

в) $2x^4+5x^2-7x+8=0$;

3. Найти $x_1^2+x_2^2$ и $x_1^3+x_2^3$, если x_1 и x_2 — корни уравнения:

а) $2x^2-5x-4=0$; *в)* $3x^2-5x-8=0$;

б) $x^2+x+2=0$; *г)* $-x^2+5x-8=0$.

4. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+x+1=0$. Найти $x_1^5+x_2^5$.

5. Составить приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

а) 2 и -3; *в)* $3-\sqrt{2}$ и $3+\sqrt{2}$;

б) -3 и 5; *г)* $-\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}$.

6. Составить приведенное квадратное уравнение с целыми коэффициентами, один из корней которого равен:

а) $3-\sqrt{7}$; *б)* $-5+\sqrt{3}$; *в)* $\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}$.

§ 4. Симметрические и возвратные уравнения

В этом параграфе и далее, если специально не оговорено, рассматриваются только действительные числа.

1. Симметрические уравнения третьей степени. Уравнение вида

$$ax^3+bx^2+bx+a=0\,,\quad a\neq 0 \qquad (1)$$

называется *симметрическим уравнением третьей степени.*

Так как

$$ax^3+bx^2+bx+a=a(x^3+1)+bx(x+1)=$$
$$=a(x+1)(x^2-x+1)+bx(x+1)=(x+1)(ax^2+(b-a)x+a)\,,$$

то уравнение (1) равносильно совокупности уравнений $x+1=0$ и $ax^2+(b-a)x+a=0$.

Следовательно, симметрические уравнения третьей степени всегда имеют корень, равный -1. Другие корни уравнения можно получить, применяя теорему Безу.

Пример 1. Решить уравнение $3x^3+4x^2+4x+3=0$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $(x+1)(3x^2+x+3)=0$, откуда $x+1=0$ или $3x^2+x+3=0$. Первое из этих уравнений имеет корень $x=-1$. Второе уравнение не имеет корней (действительных). Поэтому решением исходного уравнения является $x=-1$.

2. Симметрические уравнения четвертой степени. Уравнение вида

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0\,,\quad a\neq 0 \qquad (2)$$

называется *симметрическим уравнением четвертой степени.*

Поскольку $x=0$ не является корнем уравнения (2), то разделив обе части уравнения на x^2, получим равносильное уравнение $ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0$. Отсюда, сделав замену $y=x+\frac{1}{x}$, получим квадратное уравнение

$$ay^2+by+c-2a=0\,. \qquad (3)$$

При этом, если (3) имеет два различных действительных корня y_1 и y_2, то исходное уравнение (2) равносильно совокупности уравнений $x^2-xy_1+1=0$ и $x^2-xy_2+1=0$.

Если (3) имеет один действительный корень y_0, то исходное уравнение равносильно уравнению $x^2-xy_0+1=0$.

Если же уравнение (3) не имеет корней, то уравнение (2) также не имеет корней.

Пример 2. Решить уравнение: $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$.

Решение. Разделив обе части уравнения на x^2, имеем $x^2-3x+4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$. Сделаем замену $y=x+\frac{1}{x}$. Учитывая, что $y^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$, получаем $y^2-2-3y+4=0$ или $y^2-3y+2=0$, откуда $y_1=1$ и $y_2=2$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=1 \\ x+\frac{1}{x}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x+1=0 \\ x^2-2x+1=0\,. \end{array}\right.$$

Решая каждое из этих уравнений, получим единственный корень $x=1$. Ответ: $\{1\}$.

3. Возвратные уравнения. Уравнения вида

$$ax^5+bx^4+cx^3+\lambda cx^2+\lambda^2bx+\lambda^3a=0\,, \qquad (4)$$

$$ax^4+bx^3+cx^2+\lambda bx+\lambda^2a=0\,, \qquad (5)$$

где $a\neq 0$, $\lambda\neq 0$, называются *возвратными уравнениями пятого и четвертого порядка* соответственно.

Аналогично можно определить возвратные уравнения более высоких порядков. При $\lambda=1$ уравнения (4), (5) превращаются в симметрические уравнения. Покажем способ решения уравнения (5). Для этого разделим обе его части на x^2 (так как $x=0$ не является корнем уравнения). Имеем

$$ax^2+bx+c+\frac{\lambda b}{x}+\frac{\lambda^2a}{x^2}=0\,. \qquad (6)$$

Сделав замену $y=x+\frac{\lambda}{x}$, получим $y^2-2\lambda=x^2+\frac{\lambda^2}{x^2}$.

Подставляя эти выражения в уравнение (6), получим квадратное уравнение относительно y. Решаем последнее уравнение и находим y. Дальнейшие действия для нахождения корней уравнения (5) проводятся аналогично действиям, рассмотренным в пункте 2.

Пример 3. Решить уравнение: $3x^4-4x^3-3x^2-8x+12=0$.

Р е ш е н и е. Так как $x=0$ не является корнем рассматриваемого уравнения, то разделив обе его части на x^2 имеем: $3x^2-4x-3-\frac{8}{x}+\frac{12}{x^2}=0$. Сделаем замену $y=x+\frac{2}{x}$. Тогда получим $3(y^2-4)-4y-3=0$ или $3y^2-4y-15=0$. Решая квадратное уравнение, находим $y_1=3$, $y_2=-\frac{5}{3}$. Следовательно, $x+\frac{2}{x}=3$ и $x+\frac{2}{x}=-\frac{5}{3}$.

Отсюда находим $x_1=1$, $x_2=2$. О т в е т: $\{1;2\}$.

Вопросы и задания

1. Какие уравнения называются симметрическими уравнениями третьей степени?
2. Как решаются симметрические уравнения четвертой степени?
3. Какие уравнения называются возвратными уравнениями?
4. Как решаются возвратные уравнения четвертой степени?

Упражнения

1. Решить симметрические уравнения третьей степени:

а) $13x^3-9x^2-9x+13=0$; *б)* $x^3-5x^2-5x+1=0$.

2. Решить симметрические уравнения четвертой степени:

а) $3x^4+5x^3-16x^2+5x+3=0$; *б)* $2x^4-3x^3+2x^2-3x+2=0$.

3. Решить возвратные уравнения:

а) $2x^4+3x^3+5x^2+6x+8=0$; *в)* $x^4-3x^3+5x^2+6x+4=0$;

б) $-x^4+2x^3+7x^2+4x-4=0$; *г)* $2x^4+3x^3-11x^2-9x+18=0$.

---

4. Решить симметрические уравнения третьей степени:

а) $-2x^3+3x^2+3x-2=0$; *б)* $4x^3+7x^2+7x+4=0$.

5. Решить симметрические уравнения четвертой степени:

а) $-5x^4+x^3+11x^2+x-5=0$; *б)* $7x^4-2x^3+8x^2-2x+7=0$.

6. Решить возвратные уравнения:

а) $x^5+2x^4+3x^3-6x^2+8x-8=0$;

б) $x^5+3x^4-x^3+2x^2-24x-32=0$.

§ 5. Нахождение рационального корня алгебраических уравнений

1. Приведенное алгебраическое уравнение. Уравнение вида

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0, \qquad (1)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — целые числа, называется *приведенным алгебраическим уравнением.*

Т е о р е м а 1. Если уравнение (1) имеет целый корень (т. е. корень, являющийся целым числом), то этот корень является делителем свободного члена a_n ($a_n \neq 0$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_1 \neq 0$ — целый корень уравнения (1). Тогда $x_1^n+a_1x_1^{n-1}+a_2x_1^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x_1+a_n=0$. Разделив обе части этого равенства на x_1, получим $x_1^{n-1}+a_1x_1^{n-2}+\ldots+a_{n-1}+\frac{a_n}{x_1}=0$.

Отсюда $x_1^{n-1}+a_1x_1^{n-2}+\ldots+a_{n-2}x_1+a_{n-1}=-\frac{a_n}{x_1}$. По условию теоремы левая часть последнего равенства есть целое число. Поэтому правая часть $-\frac{a_n}{x_1}$ также является целым числом. Значит, свободный член a_n делится нацело на x_1.

П р и м е р 1. Решить уравнение $x^3+x^2-10x+8=0$.

Р е ш е н и е. Так как $a_1=1$, $a_2=-10$, $a_3=8$ — целые числа, то корнями уравнения могут быть только делители числа 8, т. е. $1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8$.

При $x=1$ имеем $1+1-10+8=0$. Значит, $x=1$ является корнем уравнения, и из теоремы Безу вытекает, что левая часть уравнения делится на двучлен $(x-1)$. Произведем деление:

$$\begin{array}{r|l}
x^3+x^2-10x+8 & x-1 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^3-x^2} & x^2+2x-8 \\
2x^2-10x+8 & \\
-\underline{2x^2-2x} & \\
-8x+8 & \\
-\underline{-8x+8} & \\
0 &
\end{array}$$

Отсюда имеем равенство $x^3+x^2-10x+8=(x-1)(x^2+2x-8)$.

Далее решаем уравнение $x^2+2x-8=0$. Его корнями являются числа -4 и 2. Следовательно, решением исходного уравнения является множество $\{-4;1;2\}$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0, \qquad (2)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — целые числа.

Теорема 2. Если уравнение (2) имеет рациональный корень $x_1=\frac{m}{k}$, где $\frac{m}{k}$ — несократимая дробь, m — целое, k — натуральное число, то m является делителем a_n, а k является делителем a_0.

Доказательство. Подставляя $\frac{m}{k}$ в (2) имеем:

$$a_0\frac{m^n}{k^n}+a_1\frac{m^{n-1}}{k^{n-1}}+a_2\frac{m^{n-2}}{k^{n-2}}+\ldots+a_{n-1}\frac{m}{k}+a_n=0.$$

Умножим обе части последнего на k^n. Тогда

$$a_0m^n+a_1m^{n-1}k+a_2m^{n-2}k^2+\ldots+a_{n-1}mk^{n-1}+a_nk^n=0. \qquad (3)$$

Разделив теперь обе части (3) на k, получим

$$a_1m^{n-1}+a_2m^{n-2}k+\ldots+a_{n-1}mk^{n-2}+a_nk^{n-1}=-\frac{a_0m^n}{k}. \qquad (4)$$

Так как левая часть (4) является целым числом, то правая часть также является целым. Поскольку $\frac{m}{k}$ несократимая дробь, то отсюда следует, что a_0 делится нацело на k. Значит, k является делителем a_0. Аналогично, разделив обе части (3) на m, можно убедиться, что m является делителем a_n.

Пример 2. Решить уравнение $6x^4+5x^3+10x^2-3x-2=0$.

Решение: Так как $a_0=6$, $a_1=5$, $a_2=10$, $a_3=-3$, $a_4=-2$, то рациональные корни уравнения надо искать среди чисел:

$$1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{6},\ -\frac{1}{6}.$$

При $x=1$ имеем $6+5+10-3-2\neq 0$; при $x=-1$ имеем $6-5+{}$ $+10+3-2\neq 0$; при $x=2$ имеем $96+40+40-6-2\neq 0$; при $x=-2$ имеем $96-40+40+6-2\neq 0$; при $x=\frac{1}{2}$ получим $6\cdot\frac{1}{16}+5\cdot\frac{1}{8}+10\cdot\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-2=0.$

Таким образом, $x_1=\frac{1}{2}$ — один из корней рассматриваемого уравнения. Разделим левую часть уравнения на $(2x-1)$:

$$\begin{array}{r|l}
6x^4+5x^3+10x^2-3x-2 & 2x-1 \\ \cline{2-2}
-\underline{6x^4-3x^3} & 3x^3+4x^2+7x+2 \\
8x^3+10x^2-3x-2 & \\
-\underline{8x^3-4x^2} & \\
14x^2-3x-2 & \\
-\underline{14x^2-7x} & \\
4x-2 & \\
-\underline{4x-2} & \\
0 &
\end{array}$$

Значит, $6x^4+5x^3+10x^2-3x-2=(2x-1)(3x^3+4x^2+7x+2)$.

Далее, нужно решить уравнение

$$3x^3+4x^2+7x+2=0. \qquad (5)$$

Решение уравнения (5) ищем из оставшихся чисел: $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{6}$. Так как левая часть (5) содержит только положительные коэффициенты, то достаточно проверить только отрицательные числа.

Подставляя значение $x=-\frac{1}{2}$ в (5) имеем $-3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{4}-7\cdot\frac{1}{2}+2\neq 0$. При $x=-\frac{1}{3}$ получим $-3\cdot\frac{1}{27}+4\cdot\frac{1}{9}-7\cdot\frac{1}{3}+2=0$. Следовательно, $x_2=-\frac{1}{3}$ является корнем уравнения (5), а значит, является корнем исходного уравнения.

Разделим теперь левую часть (5) на $(3x+1)$. Тогда имеем

$$\begin{array}{r|l}
3x^3+4x^2+7x+2 & 3x+1 \\ \cline{2-2}
-\underline{3x^3+x^2} & x^2+x+2 \\
3x^2+7x+2 & \\
-\underline{3x^2+x} & \\
6x+2 & \\
-\underline{6x+2} & \\
0 &
\end{array}$$

Остается решить уравнение $x^2+x+2=0$. Так как $D=1^2-4\cdot1\cdot2=-7<0$, то это уравнение не имеет корней. Таким образом, корнями исходного уравнения являются $x_1=\frac{1}{2}$ и $x_2=-\frac{1}{3}$.

Вопросы и задания

1. Сформулировать теорему о целом корне приведенного алгебраического уравнения.
2. Сформулировать теорему о рациональном корне алгебраического уравнения.

Упражнения

1. Найти целые корни алгебраического уравнения:

а) $x^3+2x^2-x-2=0$; *в)* $x^4-4x^3+7x^2-16x+12=0$;

б) $x^3-6x^2+15x-14=0$; *г)* $x^4+4x^3-2x^2-12x+9=0$.

2. Найти рациональные корни алгебраического уравнения:

а) $6x^4-x^3-7x^2+x+1=0$;

б) $6x^6+13x^5+3x^4+x^3-7x^2-12x-4=0$;

в) $24x^5+10x^4-x^3-19x^2-5x+6=0$;

г) $4x^6+5x^5-3x^4+11x^3+6x^2+20x-32=0$.

3. Решить уравнения:

а) $2x^4-x^3+3x^2-x+1=0$; *в)* $x^3-5x^2-5x+1=0$;

б) $(x-2)^4+(x-3)^4=1$; *г)* $x^5-2x^4-3x^3-3x^2+2x+1=0$.

---

4. Найти целые корни алгебраического уравнения:

а) $x^3-4x^2-4x-5=0$; *б)* $x^4+2x^3-13x^2-14x+24=0$.

5. Найти рациональные корни алгебраического уравнения:

а) $3x^3+2x^2+2x+3=0$; *б)* $x^4+3x^3-44x^2+15x+25=0$.

6. Решить уравнения:

а) $x^4+4x^3-2x^2-12x+9=0$;

б) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0$.

§ 6. Некоторые искусственные способы решения алгебраических уравнений

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые нестандартные способы решения алгебраических уравнений.

1. Умножение уравнения на многочлен. В некоторых случаях процесс решения алгебраического уравнения существенно облегчается, если умножить обе части уравнения на некоторый многочлен от неизвестной. При этом следует учесть, что возможно появление «посторонних» корней.

Пример 1. Найдите корни уравнения $x^8-2x^6+4x^4-8x^2+16=0$.

Решение. Умножив обе части уравнения на многочлен (x^2+2), не имеющий корней, получим уравнение $(x^2+2)(x^8-2x^6+4x^4-8x^2+16)=0$. Раскрыв скобки и упростив выражение, получим равносильное уравнение $x^{10}+32=0$.

Очевидно, что последнее уравнение не имеет корней (действительных корней). Следовательно, исходное уравнение также не имеет корней.

Пример 2. Решить уравнение:

$$10x^3-9x^2-48x+20=0\ . \qquad (1)$$

Решение. Умножив обе части уравнения на многочлен $(2x+1)$, получим уравнение:

$$20x^4-8x^3-105x^2-8x+20=0\,. \qquad (2)$$

При этом $x=-\frac{1}{2}$, являющийся корнем уравнения (2), не является корнем уравнения (1).

Уравнение (2) является симметрическим уравнением четвертой степени. Поскольку $x=0$ не является корнем этого уравнения, то разделив обе его части на x^2, получим равносильное уравнение:

$$20\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-8\left(x+\frac{1}{x}\right)-105=0\,.$$

Сделаем замену $x+\frac{1}{x}=y$. Тогда имеем уравнение:

$$20y^2-8y-145=0\,. \qquad (3)$$

Уравнение (3) имеет два корня: $y_1=\frac{29}{10}$ и $y_2=-\frac{5}{2}$. Поэтому уравнение (2) равносильно совокупности уравнений $x+\frac{1}{x}=\frac{29}{10}$ и $x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$. Решив каждое из этих уравнений, найдем четыре корня уравнения (2): $x_1=\frac{2}{5}$, $x_2=\frac{5}{2}$, $x_3=-2$, $x_4=-\frac{1}{2}$.

Так как корень $x_4=-\frac{1}{2}$ является "посторонним" для уравнения (1), то отсюда следует, что уравнение (1) имеет только три корня: $x_1=\frac{2}{5}$, $x_2=\frac{5}{2}$, $x_3=-2$.

2. «Угадывание» корня уравнения. Для некоторых типов уравнений легко удается найти один или несколько из его корней.

П р и м е р 3. Решить уравнение $2x^3+5x-2\cdot 4^3-5\cdot 4=0$.

Р е ш е н и е. Очевидно, что $x=4$ является корнем уравнения. Для нахождения остальных корней, преобразуем уравнение к виду $2x^3+5x-148=0$ и разделим левую часть последнего на $(x-4)$. Имеем:

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3+5x-148=0 & x-4 \\
\underline{-\,2x^3-8x^2} & \overline{2x^2+8x+37} \\
8x^2+5x-148 & \\
\underline{-\,8x^2-32x} & \\
37x-148 & \\
\underline{-\,37x-148} & \\
0 &
\end{array}
$$

Следовательно, $2x^3+5x-148=(x-4)(2x^2+8x+37)$.

Далее, решаем уравнение $2x^2+8x+37=0$.

Так как $D=8^2-4\cdot 2\cdot 37<0$, то последнее уравнение не имеет решения. Отсюда вытекает, что исходное уравнение имеет единственный корень $x=4$.

П р и м е р 4. Решить уравнение:

$$x^3-3x=a^3+\frac{1}{a^3},\ \text{где}\ a\neq 0. \qquad (4)$$

Р е ш е н и е. Так как

$$a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\cdot a\cdot\frac{1}{a}\left(a+\frac{1}{a}\right)=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right),$$

то уравнение (4) равносильно уравнению

$$x^3-3x=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right). \qquad (5)$$

Ясно, что $x_1=a+\frac{1}{a}$ является одним из корней уравнения (5), а значит, является корнем уравнения (4). Разделив многочлен $x^3-3x-a^3-\frac{1}{a^3}$ на многочлен $x-a-\frac{1}{a}$, получим:

$$x^2+x\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-3.$$

Далее, решаем квадратное уравнение:

$$x^2+x\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-3=0. \qquad (6)$$

Дискриминант этого уравнения имеет вид:

$$D=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4\cdot 1\cdot\left(\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-3\right)=-3\cdot\left(a-\frac{1}{a}\right)^2.$$

Следовательно, при всех $a\neq 0$ дискриминант $D\leq 0$. Уравнение (6) может иметь корень только при $D=0$, т. е. когда $a=1$ или $a=-1$. Таким образом, уравнение (6) не имеет корней при $a^2\neq 1$, имеет единственный корень $x=-1$ при $a=1$ и единственный корень $x=1$ при $a=-1$.

Добавляя к этим двум числам еще корень $x=a+\frac{1}{a}$, $a\neq 0$, находим все корни уравнения (4).

Вопросы и задания

1. Рассказать о способе умножения уравнения на многочлен.
2. Рассказать о способе угадывания корней уравнения.
3. Какие еще способы решения уравнений вам известны?

Упражнения

1. Решить уравнения:

а) $x^8-x^6+x^4-x^2+1=0$;

б) $6x^3-x^2-20x+12=0$;

в) $x^3+3x-12^3-3\cdot 12=0$;

г) $x(x+2)+(x+2)(x+4)+(x+4)(x+6)+(x+6)(x+8)+(x+8)(x+10)=$
$=2\cdot 4+4\cdot 6+6\cdot 8+8\cdot 10$.

---

2. Решить уравнения:

а) $x(x+1)(x+2)(x+3)+(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+$
$+(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)=$
$=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+3\cdot 4\cdot 5\cdot 6$;

б) $x(x+1)+(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)+(x+3)(x+4)+$
$+(x+4)(x+5)=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5$.

§ 7. Числовые неравенства и их свойства

1. Числовые неравенства. Пусть $a\in R$, $b\in R$. Введем следующие определения.

Определение 1. Если $a-b$ положительное число, то говорят, что число a больше чем число b и соотношение между этими числами обозначают через $a>b$.

Определение 2. Если $a-b$ отрицательное число, то говорят, что число a меньше чем число b, и соотношение между этими числами обозначают через $a<b$.

Определение 3. Если $a-b$ неотрицательное число, то говорят, что число a больше или равно числу b и соотношение между этими числами обозначают через $a\geq b$.

Определение 4. Если $a-b$ неположительное число, то говорят, что число a меньше или равно числу b и соотношение между этими числами обозначают через $a\leq b$.

Пример 1.

а) Так как $\sqrt{2}-1$ положительное число, то $\sqrt{2}>1$;

б) Число $5-6{,}21$ является отрицательным. Поэтому $5<6{,}21$.

2. Свойства числовых неравенств. Сформулируем свойства числовых неравенств. Пусть a, b, c, d — действительные числа.

1^0. Если $a>b$, то $b<a$.

Доказательство. Согласно определению 1 число $a-b$ положительное. Тогда $b-a$ является отрицательным числом. Отсюда и из определения 2 следует, что $b<a$.

2^0. Если $a>b$, $b>c$, то $a>c$.

Доказательство. По определению 1 числа $a-b$ и $b-c$ положительные. Сумма положительных чисел также является положительным числом, т. е. $(a-b)+(b-c)=a-c$ — положительное число. Отсюда и из определения 1 получаем, что $a>c$.

3^0. Если $a>b$, то $a+c>b+c$. Обратно, если $a+c>b+c$, то $a>b$.

Доказательство. Очевидно, что $(a+c)-(b+c)=a+c-$ $-b-c=a-b$. По определению 1 число $a-b$ является положительным, поэтому $(a+c)-(b+c)$ также есть положительное число и $a+c>b+c$.

Обратное утверждение доказывается аналогичным образом.

4^0. Если $a>b$ и c — положительное (отрицательное) число, то $ac>bc$ $(ac<bc)$.

Обратно, если $ac>bc$ $(ac<bc)$ и c — положительное (отрицательное) число, то $a>b$.

Доказательство. Так как $a-b$ и c — положительные числа, то их произведение также является положительным числом. Поэтому $c(a-b)>0$. Тогда из соотношения $ac-bc=c(a-b)$ и определения 1 получаем, что $ac>bc$.

Аналогично доказывается обратный случай и случай, когда c — отрицательное число.

5^0. Если $a>b$ и $c>d$, то $a+c>b+d$.

Доказательство. Согласно определению 1 числа $a-b$ и $c-d$ являются положительными. Поэтому число $(a-b)+(c-d)=$ $(a+c)-(b+d)$ также является положительным. Отсюда и из определения 1 получаем $a+c>b+d$.

6^0. Если для положительных чисел a, b, c, d имеют место неравенства $a>b$ и $c>d$, то $ac>bd$.

Доказательство. Запишем число $ac-bd$ следующим образом: $ac-bd=ac-bc+bc-bd=c(a-b)+b(c-d)$.

Из определения 1 следует, что $a-b$ и $c-d$ — положительные числа. По условию b и c также положительные числа. Поэтому число $ac-bd$ является положительным. Отсюда и из определения 1 получаем $ac>bd$.

7^0. Если a, b — положительные числа и $a>b$, то $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$. Обратно, если $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ и a, b – положительные числа, то $a>b$.

Доказательство. Запишем число $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$ следующим образом: $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$. По определению 1 число $a-b$ положительное. Тогда $b-a$ — отрицательное число. Поскольку a и b положительные числа, то $\frac{b-a}{ab}$ является отрицательным числом. Отсюда и из определения 2 получаем, что $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

Аналогично доказывается обратный случай.

8^0. Если $a,\ b$ — положительные числа, $n\in N$ и $a>b$, то $a^n>b^n$.

Доказательство. Для доказательства этого свойства применим метод математической индукции. Пусть $n=1$. Тогда имеем $a^1>b^1$. Предположим, что при $n=k$ верно $a^k>b^k$. Покажем, что тогда $a^{k+1}>b^{k+1}$. Действительно, применяя к неравенствам $a>b$ и $a^k>b^k$ свойство 6^0, получаем $a\cdot a^k>b\cdot b^k$ или $a^{k+1}>b^{k+1}$. Следовательно, неравенство $a^n>b^n$ справедливо и при $n=k+1$. Отсюда согласно принципу математической индукции неравенство $a^n>b^n$ является справедливым при всех натуральных n.

Все свойства числовых неравенств останутся справедливыми, если соответствующие знаки неравенств поменять на противоположные.

Пример 2. Пусть a и b — положительные числа. Сравните $\frac{a+b}{2}$ и $\sqrt{ab}$.

Решение. Так как число $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}\left(a+b-2\sqrt{ab}\right)=$ $=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$ является неотрицательным, то по определению 3 имеем $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$. Равенство имеет место только при $a=b$.

Пример 3. Сравните числа $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot49$ и 25^{49}.

Решение. Используя результат примера 2, имеем:

$\frac{1+49}{2}>\sqrt{1\cdot49}$		$1\cdot49<25^2$
$\frac{2+48}{2}>\sqrt{2\cdot48}$		$2\cdot48<25^2$
....	или же	....
$\frac{24+26}{2}>\sqrt{24\cdot26}$		$24\cdot26<25^2$.

Применим к полученным неравенствам свойство 6^0. Тогда имеет место соотношение $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot24\cdot26\cdot\ldots\cdot49<\left(25^2\right)^{24}=25^{48}$.

Умножив теперь обе части последнего неравенства на 25, получим неравенство $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot48\cdot49<25^{49}$.

Вопросы и задания

1. Что означают соотношения $a>b, a\geq b$?
2. Что означают соотношения $a<b,\ a\leq b$?
3. Сформулировать свойства числовых неравенств.

Упражнения

1. Сравнить числа:

а) $\frac{13}{14}$ и $\frac{17}{18}$; *в)* $0,66$ и $\frac{3}{7}$; *д)* $-\frac{1}{20}$ и $-\frac{1}{30}$;

б) $1,25$ и $1\frac{1}{4}$; *г)* $1,08$ и $1\frac{1}{7}$; *е)* $-\frac{1}{7}$ и $-0,26$.

2. Верно ли неравенство:

а) $0,241\cdot5>10\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$; *б)* $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{2}{3}>\frac{3}{4}\cdot\left(-1\frac{1}{3}\right)$;

в) $0,2\cdot0,3\cdot(-0,4)>0,81:(-0,3)$;

г) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7}>\frac{6}{7}$;

д) $\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\frac{1}{7\cdot9}+\frac{1}{9\cdot11}+\frac{1}{11\cdot13}+\frac{1}{13\cdot15}<\frac{1}{3}$;

е) $\sqrt{12}+\sqrt{13}>\sqrt{11}+\sqrt{14}$;

ж) $\sqrt{27}+\sqrt{23}>\sqrt{21}+\sqrt{30}$.

3. Расположить в порядке возрастания числа:

а) $\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4},\ \sqrt[5]{5}$; *в)* $1\frac{1}{3},\ 1\frac{1}{2},\ 1\frac{4}{7},\ 1\frac{5}{9}$;

б) $1,0(9),\ 1,100\ldots,\ \frac{10}{9}$; *г)* $-\sqrt{2},\ -\sqrt[3]{3},\ -\sqrt[4]{4},\ -\sqrt[5]{5}$.

4. Найти наибольшее из чисел: $-2\frac{2}{5}; -2,39(99);\ -2,399(9); -2,400$.

5. Найти наименьшее из чисел: 34,12; 34,11(9); 34,119(99); 34,120 .

6. Сравнить число 44 с числом:

а) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}$;

б) $\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{2}{\sqrt{2023}+\sqrt{2025}}$;

в) $\frac{1+2+3+\ldots+44}{2}$;

г) $1-2+3-4+\ldots+999-1000+1001$;

д) $1-3+5-7+\ldots+997-999+1001$.

7. Сравнить числа:

а) $\sqrt{2004}+\sqrt{2002}$ и $2\cdot\sqrt{2003}$;

б) $\sqrt{2004}+\sqrt{2000}$ и $2\cdot\sqrt{2002}$;

в) $55!$ и 28^{55};

г) $99!$ и 50^{99}.

§ 8. Решение линейных и квадратных неравенств

1. Неравенства с одной неизвестной. В курсе средней школы изучались линейные и квадратные неравенства. В этом параграфе мы дадим в общем виде определения неравенства с одной неизвестной и решения неравенства.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — выражения, определенные на некотором числовом множестве.

Определение 1. Неравенства вида $f(x)>g(x)$, $f(x)\geq g(x)$, $f(x)<g(x)$ или $f(x)\leq g(x)$, называются *неравенствами с одной неизвестной.*

Определение 2. Множество X значений x, при подстановке которых в одно из указанных выше неравенств получается верное числовое неравенство, называют *решением данного неравенства.* Если такое множество является пустым, то говорят, что неравенство не имеет решения.

Решить неравенство — это значит найти его решение X или доказать, что неравенство не имеет решения.

Пример 1. Решить неравенство $x\geq 1$.

Решение. Так как любое число, большее или равное 1, удовлетворяет неравенству, то решением является множество $[1;+\infty)$.

Определение 3. Если решение неравенства $f_1(x)>g_1(x)$ является также решением неравенства $f_2(x)>g_2(x)$ и обратно, решение неравенства $f_2(x)>g_2(x)$ является решением неравенства $f_1(x)>g_1(x)$, то такие неравенства называются *равносильными* и в этом случае пишут: $f_1(x)>g_1(x)\Leftrightarrow f_2(x)>g_2(x)$.

Теорема 1. Пусть выражение $\varphi(x)$ определено на множестве X и это множество является решением неравенства $f(x)>g(x)$. Тогда X является также решением неравенства $f(x)+\varphi(x)>g(x)+\varphi(x)$.

Доказательство. Пусть X — решение неравенства $f(x)>g(x)$. Тогда согласно свойству 3^0 из § 7 настоящей главы для каждого $x\in X$ справедливо неравенство $f(x)+\varphi(x)>g(x)+\varphi(x)$. Так как $\varphi(x)$ определено только на X, то значения $x\notin X$ не удовлетворяют последнему неравенству. Значит, множество X является решением неравенства $f(x)+\varphi(x)>g(x)+\varphi(x)$.

Теорема 2. Пусть множество X — решение неравенства $f(x)>g(x)$ и c — положительное число. Тогда X является также решением неравенства $c\cdot f(x)>c\cdot g(x)$.

Обратно, если X — решение неравенства $c\cdot f(x)>c\cdot g(x)$ и c — положительное число, то X является также решением неравенства $f(x)>g(x)$.

Доказательство. Так как для каждого $x\in X$ по свойству 4^0 из § 7 настоящей главы справедливо соотношение $f(x)>g(x)\Leftrightarrow cf(x)>cg(x)$, то решение неравенства $f(x)>g(x)$ совпадает с решением неравенства $cf(x)>cg(x)$.

2. Линейные неравенства. Пусть a, b заданные числа и x — неизвестное число. Неравенство вида $ax>b$ ($ax<b$, $ax\geq b$ или $ax\leq b$) называется *линейным неравенством.*

Рассмотрим следующие случаи:

а) a — положительное число. Тогда, применяя теорему 4 из § 7 настоящей главы, имеем $ax>b\Leftrightarrow x>\frac{b}{a}$. Отсюда следует, что множество $\left(\frac{b}{a};+\infty\right)$ является решением линейного неравенства;

б) $a=0$. В этом случае, если $b<0$, то множество $(-\infty;+\infty)$ является решением линейного неравенства, если же $b\geq 0$, то решения нет;

в) a — отрицательное число. Тогда, применяя теорему 4 из § 7 настоящей главы, имеем $ax > b \Leftrightarrow x < \frac{b}{a}$. Поэтому в этом случае множество $\left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$ является решением линейного неравенства.

Пример 2. Решить неравенства: *а)* $2x > -3$; *б)* $x - 2 \le 6$; *в)* $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} > \frac{5x}{6} + 1$.

Решение. *а)* $2x > -3 \Leftrightarrow x > -1{,}5$. Ответ: $(-1{,}5; +\infty)$.

б) $x - 2 \le 6 \Leftrightarrow x \le 6 + 2 \Leftrightarrow x \le 8$. Ответ: $(-\infty; 8]$.

в) $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} > \frac{5x}{6} + 1 \Leftrightarrow 2x + 3x > 5x + 6 \Leftrightarrow 0 > 6$. Ответ: $\varnothing$.

3. Квадратные неравенства. Неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ ($ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \ge 0$, $ax^2 + bx + c \le 0$), где a, b, c — заданные числа, $a \ne 0$, x — неизвестное число, называется *квадратным неравенством*.

Теорема 3. Пусть квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ имеет дискриминант $D > 0$, x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ и $x_1 < x_2$. Тогда

$$x \in (x_1; x_2) \Leftrightarrow x^2 + px + q < 0,$$

$$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty) \Leftrightarrow x^2 + px + q > 0.$$

Доказательство. Пусть $D = p^2 - 4q > 0$ и уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2, $x_1 < x_2$. Тогда имеем:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2). \qquad (1)$$

Если $x \in (x_1; x_2)$, то $x_1 < x < x_2$. Поэтому из (1) имеем $x^2 + px + q < 0$. Обратно, если $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) < 0$, то $(x - x_1)$ и $(x - x_2)$ имеют разные знаки. Отсюда, учитывая условие $x_1 < x_2$, получаем, что $x_1 < x < x_2$ или $x \in (x_1; x_2)$.

Если $x \in (-\infty; x_1)$, то $x - x_1 < 0$ и $x - x_2 < 0$. Поэтому из (1) имеем $x^2 + px + q > 0$. Аналогично, если $x \in (x_2; +\infty)$, то $x - x_1 > 0$ и $x - x_2 > 0$. Поэтому из (1) имеем $x^2 + px + q > 0$. Обратно, если $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) > 0$, то $(x - x_1)$ и $(x - x_2)$ имеют одинаковые знаки. Отсюда, учитывая условие $x_1 < x_2$, получаем, что либо $x < x_1$, либо $x > x_2$.

Теорема 4. Пусть квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ имеет дискриминант $D < 0$. Тогда множество $(-\infty; +\infty)$ является решением неравенства $x^2 + px + q > 0$, а неравенство $x^2 + px + q \le 0$ не имеет решения.

Доказательство. Пусть $D < 0$. Тогда с помощью метода выделения полного квадрата нетрудно проверить, что трехчлен $x^2 + px + q$ принимает только положительные значения. Поэтому $(-\infty; +\infty)$ является решением неравенства $x^2 + px + q > 0$. В то же время неравенство $x^2 + px + q \le 0$ не имеет решения.

Соответствующую теорему для случая, когда дискриминант $D = 0$ сформулируйте самостоятельно.

Пример 3. Решить неравенства: *а)* $2x^2 - 5x + 3 > 0$; *б)* $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Решение. *а)* Так как $D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1 > 0$, то $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 1}{4}$. Отсюда $x_1 = 1$ и $x_2 = 1{,}5$. Тогда, применяя теорему 3 из пункта 3, имеем $x \in (-\infty; 1) \cup (1{,}5; +\infty)$.

б) Имеем $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Поэтому, применяя теорему 3, получаем $x \in (1; 3)$.

Пример 4. Решить неравенства: *а)* $x^2 + 5x + 11 > 0$; *б)* $-x^2 + x - 1 > 0$.

Решение. *а)* Так как $D = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 11 < 0$, то из теоремы 4 следует, что $(-\infty; +\infty)$ является решением неравенства.

б) Умножая обе части неравенства на (-1), получаем $x^2 - x + 1 < 0$. Так как $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$, то из теоремы 4 следует, что неравенство $x^2 - x + 1 < 0$ не имеет решения. Следовательно, неравенство $-x^2 + x - 1 > 0$ также не имеет решения.

Вопросы и задания

1. Дать определение неравенства с одной неизвестной.
2. Что значит решить неравенство?
3. Дать определение равносильных неравенств.
4. Сформулировать свойства равносильных неравенств.
5. Объяснить, как решаются линейные неравенства?
6. Как решаются квадратные неравенства?

Упражнения

1. Решить линейные неравенства:

а) $3x \le 5$; *г)* $\frac{x+1}{2} > -3$;

б) $-2x+1<8$; *д)* $\frac{2x-1}{3} < 2\frac{1}{4}$;

в) $-3x > -7$; *е)* $\frac{1-x}{4} \ge 2{,}3$;

ж) $5(x+1)-4(2x-3) \le 5x+7$;

з) $-2(x+7)+8(3x-4) > 3x-5(x-4)$;

и) $-2(x+5)+8(x-7) < 6x+11$.

2. Решить линейные неравенства:

а) $\frac{x-1}{3}+\frac{2x-4}{2} > 1\frac{1}{3}$; *г)* $\frac{5x-7}{6}-\frac{x}{9} < 2\frac{1}{5}-\frac{x}{8}$;

б) $\frac{x-4}{5}+\frac{x}{7} \le -1{,}(2)$; *д)* $\frac{2x+3}{5}+\frac{6x-1}{4} \ge \frac{x-5}{3}-2\frac{2}{5}$;

в) $\frac{x+2}{8}-\frac{2x-3}{5} < \frac{x}{6}$; *е)* $\frac{-2x+8}{5}-\frac{2x+1}{8} \le -6\frac{2}{3}+\frac{x-1}{4}$.

3. Решить квадратные неравенства:

а) $3x^2-8x+5 \ge 0$; *д)* $x^2-3x+19>0$;

б) $-2x^2-8x+10<0$; *е)* $-2x^2-8x-27>0$;

в) $x^2-9x-10 \ge 0$; *ж)* $x^2-12x+36>0$.

г) $x^2+9x+80<0$;

4. Решить неравенства:

а) $3(x-2)^2-5(x+1)(x-3) \le 0$; *г)* $5(x-1)(x+8)-2(x+7) > 2x$;

б) $2(x+1)+3(x-4)(x-2) > 0$; *д)* $2(x+1)(3-2x) \le 6(x+1)-7x$.

в) $2(x+1)(x-1)-3(x-5)^2 < 0$;

5. При каких значениях x первое выражение будет больше второго?

а) $\frac{x+1}{3}$ и $\frac{2x-1}{4}$; *б)* $\frac{2x-1}{3}$ и $\frac{5x+7}{2}$;

в) x^2-5x+1 и $\frac{x}{2}$; *д)* $x^2+8x+11$ и $2x^2-5x+4$;

г) $\frac{3x+1}{5}$ и x^2+2; *е)* $-2x^2+9x+7$ и $6x^2-9x+25$.

§ 9. Доказательство неравенств. Неравенство Коши

1. Доказательство неравенств. Пусть выражения $f(x)$ и $g(x)$ определены на некотором числовом множестве X. На практике часто требуется "доказать" заданное неравенство вида

$$f(x) > g(x) \quad (f(x) < g(x),\ f(x) \ge g(x),\ f(x) \le g(x)). \qquad (1)$$

Доказать неравенство (1) означает, что нужно доказать его справедливость для каждого $x \in X$.

П р и м е р 1. Для $x \ne 0$ доказать, что $x^2+\frac{1}{x^2} \ge 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $x^2+\frac{1}{x^2}-2 = \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 \ge 0$. Так как $x^2+\frac{1}{x^2}-2$ — неотрицательное число, то $x^2+\frac{1}{x^2} \ge 2$.

П р и м е р 2. Доказать, что для любых $x>-1$ и $n \in N$ имеет место неравенство $(1+x)^n \ge 1+nx$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим метод математической индукции. Пусть $n=1$. Тогда $1+x \ge 1+x$ верно для любого $x>-1$. Предположим, что при $n=m$ имеет место неравенство $(1+x)^m \ge 1+mx$, $x>-1$. Так как $1+x>0$, то используя свойство 4^0 из § 7 настоящей главы, имеем:

$$(1+x)^m(x+1) \ge (1+mx)(1+x) = 1+x+mx+mx^2 = 1+(m+1)x+mx^2.$$

Отсюда, учитывая, что $x^2 \ge 0$ и $m \ge 1$, получаем $(1+x)^{m+1} \ge 1+(m+1)x$. Таким образом, требуемое неравенство верно и при $n=m+1$, а значит, по методу математической индукции, оно верно при всех $n \in N$.

2. Н е р а в е н с т в о К о ш и. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неотрицательные числа.

О п р е д е л е н и е. Число $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ называется *средне-*

арифметическим, а число $\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}$ называется *среднегеометрическим* чисел x_1, x_2, ..., x_n.

Пример 3. (Неравенство Коши). Доказать, что для $n \in N$ и неотрицательных чисел x_1, x_2, ..., x_n имеет место неравенство:

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2...x_n}.$$

Доказательство. Случай $n=2$ доказан в примере 2 § 7 настоящей главы. Здесь мы ограничимся доказательством неравенства для случая $n=4$.

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \geq \frac{2\sqrt{x_1x_2}+2\sqrt{x_3x_4}}{4} = \frac{\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_3x_4}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_3x_4}} =$$

$$= \sqrt{\sqrt{x_1x_2x_3x_4}} = \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}.$$

Вопросы и задания

1. Что означает доказать неравенство?
2. Как определяется среднеарифметическое и среднегеометрическое заданных неотрицательных чисел?
3. Написать неравенство Коши для случая $n=5$.
4. Написать неравенство Коши для случая $n=8$.

Упражнения

1. Доказать неравенство для $n \in N$:

а) $2^n > n$;

б) $2^n \geq n+1$;

в) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<3$;

г) $\sqrt[n]{n!}<\frac{n+1}{2}$;

д) $1<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n+1}<3$;

е) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$;

ж) $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+...+\frac{1}{n!}<2$;

з) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

2. Доказать неравенство:

а) $(x+y)^2 \geq 4xy$;

б) $a^2+\frac{1}{a^2+1} \geq 1$;

в) $\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}$;

г) $x^2+y^2+z^2 \geq xy+xz+yz$;

д) $x^2+y^2+1 \geq xy+x+y$;

е) $x^4+x^3y+xy^3+y^4 \geq 0$;

ж) $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$;

з) $x^4+y^4+z^4 \geq xyz(x+y+z)$;

и) $(x^2+y^2)(x^4+y^4) \geq (x^3+y^3)^2$;

к) $(x+y+z+u)^2 \leq 4(x^2+y^2+z^2+u^2)$.

3. Доказать, что для положительных чисел a, b, c, d справедливо неравенство:

а) $ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c) \geq 6abc$;

б) $a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$;

в) $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{cd}$;

г) $\frac{2}{a+b}+\frac{2}{c+b}+\frac{2}{a+c} \geq \frac{9}{a+b+c}$;

д) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$.

§ 10. Решение неравенств высшего порядка методом интервалов. Решение систем неравенств

1. Метод интервалов для решения неравенств. Рассмотрим сначала линейное неравенство $ax+b<0$. Пусть $a=0$. Тогда решением этого неравенства является $(-\infty;+\infty)$, если $b<0$ и решения нет, если $b \geq 0$. Далее, пусть $a \neq 0$. Тогда $ax+b<0 \Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{a}\right)<0$. Отсюда, если $a<0$, то имеем $x>-\frac{b}{a}$. Если $a>0$, то $x<-\frac{b}{a}$.

Рассмотрим теперь неравенство вида

$$(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\dots(a_nx+b_n)<0, \qquad (1)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ ненулевые действительные числа. Из каждого линейного множителя вынесем за скобки соответственно $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тогда получим $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n \cdot \left(x+\frac{b_1}{a_1}\right)\left(x+\frac{b_2}{a_2}\right)\cdot\dots\cdot\left(x+\frac{b_n}{a_n}\right)<0$.

Предположим, что числа $-\frac{b_1}{a_1}, -\frac{b_2}{a_2}, \dots, -\frac{b_n}{a_n}$ различные. Тогда множитель $x+\frac{b_i}{a_i}$ будет отрицательным, если $x<-\frac{b_i}{a_i}$ и будет положительным, если $x>-\frac{b_i}{a_i}$. Поэтому множитель $x+\frac{b_i}{a_i}$ меняет свой знак только при переходе через точку с координатой $-\frac{b_i}{a_i}$.

Далее, точки с координатами $-\frac{b_1}{a_1}, \dots, -\frac{b_n}{a_n}$ делят числовую ось на $n+1$ интервалов, внутри каждого интервала $x+\frac{b_i}{a_i}$, $i=1, \dots, n$ сохраняет свой знак. Поэтому для определения знака множителя $x+\frac{b_i}{a_i}$ на каждом интервале достаточно взять одну пробную точку из этого интервала. Тем самым можно определить знаки выражений $x+\frac{b_i}{a_i}$, $i=1,\dots,n$ на каждом интервале. Откуда легко уяснить, является ли взятый интервал частью всего решения или не является. Объединение всех интервалов, координаты точек которых удовлетворяют неравенству (1), будет решением заданного неравенства. Рассмотренный метод решения неравенства (1) называется *методом интервалов*. Он применяется также и при решении многих других видов неравенств.

Пример 1. Решить неравенство $(2x+3)(3-5x)(4-2x)(8x-7)>0$.

Решение. Имеем $2\cdot(-5)\cdot(-2)\cdot 8\cdot(x+1{,}5)\left(x-\frac{3}{5}\right)(x-2)\left(x-\frac{7}{8}\right)>0$

или $(x+1{,}5)\left(x-\frac{3}{5}\right)(x-2)\left(x-\frac{7}{8}\right)>0$.

Числа $x_1=-1{,}5$, $x_2=\frac{3}{5}$, $x_3=2$, $x_4=\frac{7}{8}$ обращают левую часть неравенства в нуль. Отмечая эти числа на числовой оси, получим следующие интервалы: $(-\infty;-1{,}5)$, $\left(-1{,}5;\frac{3}{5}\right)$, $\left(\frac{3}{5};\frac{7}{8}\right)$, $\left(\frac{7}{8};2\right)$ и $(2;+\infty)$. Проверка знаков множителей на этих интервалах показывает, что последнее неравенство выполняется только на интервалах $(-\infty;-1{,}5)$, $\left(\frac{3}{5};\frac{7}{8}\right)$ и $(2;+\infty)$. Поэтому решением исходного неравенства является множество $(-\infty;-1{,}5)\cup\left(\frac{3}{5};\frac{7}{8}\right)\cup(2;+\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство $(x^2-6x+9)(x-5)^3(2x+5)<0$.

Решение. Найдем числа, обращающие заданные множители в нуль: 1) $x^2-6x+9=0$, $x_1=x_2=3$; 2) $(x-5)^3=0$, $x_3=x_4=x_5=5$; 3) $(2x+5)=0$, $x_6=-2{,}5$. Исходное неравенство равносильно неравенству $2(x-3)^2(x-5)^3(x+2{,}5)<0$. Далее, разбиваем числовую ось на интервалы: $(-\infty; -2{,}5)$, $(-2{,}5; 3)$, $(3, 5)$, $(5,+\infty)$. Легко проверить, что последнее неравенство выполняется только на интервалах $(-2{,}5 ; 3)$ и $(3 ; 5)$. Поэтому решением исходного неравенства является множество $(-2{,}5 ; 3)\cup(3 ; 5)$.

Пример 3. Решить неравенство $\frac{x^2-5x-6}{2x+3}\le 0$.

Решение. Найдем числа, обращающие числитель и знаменатель дроби в нуль: 1) $x^2-5x-6=0$, $x_1=6$, $x_2=-1$; 2) $2x+3=0$, $x_3=-1{,}5$. Теперь разбиваем числовую ось на промежутки: $(-\infty;-1{,}5)$, $(-1{,}5;-1]$, $[-1;6]$, $[6;+\infty)$. Нетрудно проверить, что решением неравенства является множество $(-\infty;-1{,}5)\cup[-1;6]$.

2. Решение систем неравенств. В курсе средней школы изучались системы неравенств и совокупности неравенств (или уравнений) с одной неизвестной. Пусть заданы неравенства вида $P_1(x)\alpha_1 0$, $P_2(x)\alpha_2 0$, ..., $P_n(x)\alpha_n 0$ с одной неизвестной x (здесь $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ один из знаков сравнений: $>, <, \le, \ge$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$ — некоторые выражения от x). Напомним, что множество значений x, которые удовлетворяют всем неравенствам, называют *решением системы* *заданных неравенств.* Решить систему неравенств означает — найти все значения x, для которых каждое неравенство данной системы превращается в верное числовое неравенство, или доказать, что таких значений нет.

Множество значений x, которые удовлетворяют хотя бы одному из указанных неравенств, называют *решением совокупности заданных неравенств.*

Как обычно, для записи системы и совокупности неравенств с одной неизвестной применяют обозначения $\{$ и $[$ соответственно.

Пример 4. Решить систему неравенств: $\begin{cases}2x+5\le x\\ -3x-7>2x\end{cases}$.

Решение. Используя равносильность неравенств, имеем:

$$\begin{cases}2x+5\le x\\ -3x-7>2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-x\le -5\\ -3x-2x>7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le -5\\ -5x>7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le -5\\ x<-\dfrac{7}{5}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x\le -5 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-5]$. Ответ: $(-\infty;-5]$.

Вопросы и задания

1. В чем сущность метода интервалов?
2. Что означает решить систему неравенств?
3. Может ли система неравенств не иметь решения?

Упражнения

1. Решить неравенство:

а) $(x-5)(3-7x)(2x+8)\le 0$;

б) $(x^2-5x-6)(7x+11)>0$;

в) $(3-5x)(2x^2-4x+4)<0$;

г) $\dfrac{x-5}{2x+1}\ge 0$;

д) $(x^2-6x-7)(x^2+x+1)\ge 0$;

е) $\dfrac{3x+1}{2-x}<0$;

ж) $\dfrac{x+1}{4x-1}<1$;

з) $\dfrac{2x-7}{3-7x}\ge 3$;

и) $\dfrac{x^2-5x+1}{x^2-7}\le 0$;

к) $\dfrac{x^3+1}{2x^2-3x+1}>1$.

2. Решить систему неравенств:

а) $\begin{cases}3x-5\le 7x\\ 2x+1>-2x+3\end{cases}$;

б) $\begin{cases}2(x-5)\le 4(x+3)\\ 2x-1>-5x\end{cases}$;

в) $\begin{cases}\dfrac{x}{3}+\dfrac{2x-1}{5}<1\\ -\dfrac{5x+1}{2}-\dfrac{7}{3}>\dfrac{x}{5}\end{cases}$;

г) $\begin{cases}\dfrac{5x}{3}-\dfrac{2x}{4}\ge 3\dfrac{1}{3}\\ 2-\dfrac{5-4x}{2}<\dfrac{6x}{5}\end{cases}$.

3. Сколько целых чисел удовлетворяют неравенству:

а) $2x^2-5x+3\le 0$;

б) $-x^2-x-1>0$;

в) $3x^2+7x-10<0$;

г) $-2x^2-3x+5\ge 0$.

4. Найти наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

а) $-x^2-7x+8>0$;

б) $\dfrac{2x+1}{3x-1}\le 0$;

в) $\dfrac{x-1}{2x+7}>1$;

г) $\dfrac{x^2+x+1}{x+1}\ge 1$;

д) $\dfrac{x+3}{2-x}>2$.

§ 11. Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля

1. Уравнения, содержащие знак модуля.

Определение 1. Если в заданном уравнении неизвестное содержится под знаком модуля, то такое уравнение называется *уравнением, содержащим знак модуля.*

Пусть $f(x)$, $g(x)$ — выражения от x, определенные на некотором числовом множестве. Рассмотрим несколько типов уравнений, содержащих знак модуля.

1) *Уравнения вида*

$$|f(x)|=g(x). \qquad (1)$$

Из определения модуля ясно, что уравнение (1) равносильно совокупности систем $\begin{cases}f(x)=g(x)\\ f(x)\ge 0\end{cases}$ и $\begin{cases}-f(x)=g(x)\\ f(x)<0\end{cases}$.

П р и м е р 1. Решить уравнение $|2x-5|=x$.

Р е ш е н и е.

$$|2x-5|=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-5\ge 0\\ 2x-5=x\end{cases}\\ \begin{cases}2x-5<0\\ 5-2x=x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=5\\ 2x\ge 5\end{cases}\\ \begin{cases}3x=5\\ 2x<5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=5\\ \begin{cases}x=\dfrac{5}{3}\\ 2x<5\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=5\\ x=\dfrac{5}{3}\end{array}\right..$$

О т в е т: $\left\{1\frac{2}{3};\ 5\right\}$.

2) *Уравнения вида* $|f(x)|=|g(x)|$. Пусть $f(x)=g(x)$. Тогда $|f(x)|=|g(x)|$. Если же $f(x)=-g(x)$, то снова $|f(x)|=|g(x)|$. Поэтому, если $f(x)=g(x)$ или $f(x)=-g(x)$, то $|f(x)|=|g(x)|$.

Обратно, пусть $|f(x)|=|g(x)|$ и $g(x)\ge 0$. Тогда $|f(x)|=g(x)$. Отсюда получаем $f(x)=g(x)$ или $f(x)=-g(x)$.

Остается рассмотреть случай $|f(x)|=|g(x)|$ и $g(x)<0$. Имеем $|f(x)|=-g(x)$. Отсюда получаем $f(x)=-g(x)$ или $f(x)=g(x)$.

Таким образом, уравнение $|f(x)|=|g(x)|$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}f(x)=g(x)\\ f(x)=-g(x)\end{array}\right.$.

П р и м е р 2. Решить уравнение $|x-3|=|2x+5|$.

Р е ш е н и е. $|x-3|=|2x+5| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-3=2x+5\\ x-3=-2x-5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-2x=5+3\\ x+2x=3-5\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-x=8\\ 3x=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-8\\ x=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$. О т в е т: $\left\{-\frac{2}{3};-8\right\}$.

3) *Уравнения вида* $|f(x)+g(x)|=|f(x)|+|g(x)|$. Рассмотрим несколько случаев. Пусть $f(x)>0$. Тогда при $g(x)>0$ верны равенства $|f(x)+g(x)|=f(x)+g(x)=|f(x)|+|g(x)|$.

Если же $g(x)<0$, то $|f(x)+g(x)|\ne f(x)-g(x)$, т. е. $|f(x)+g(x)|\ne$ $\ne|f(x)|+|g(x)|$. Пусть $f(x)<0$. Если $g(x)<0$, то $f(x)+g(x)<0$. Отсюда имеем $|f(x)+g(x)|=-(f(x)+g(x))=-f(x)-g(x)=$ $=|f(x)|+|g(x)|$. Если же $g(x)>0$, то $|f(x)+g(x)|\ne -f(x)+g(x)$, т. е. $|f(x)+g(x)|\ne|f(x)|+|g(x)|$. Наконец, пусть $f(x)=0$. Тогда $|f(x)+g(x)|=|g(x)|=|f(x)|+|g(x)|$.

Из симметричности уравнения относительно $f(x)$ и $g(x)$ следует, что аналогичные результаты будут справедливыми, если рассмотреть вместо $f(x)$ случаи с $g(x)$ ($>,=,<0$).

Таким образом, при всех x, удовлетворяющих условию $f(x)\cdot g(x)\ge 0$, верно равенство $|f(x)+g(x)|=|f(x)|+|g(x)|$. Так как при $f(x)\cdot g(x)<0$ равенство $|f(x)+g(x)|=|f(x)|+|g(x)|$ не имеет места, то $|f(x)+g(x)|=|f(x)|+|g(x)| \Leftrightarrow f(x)g(x)\ge 0$.

П р и м е р 3. Решить уравнение $|x^4-6x+2|=x^4+6|x|+2$.

Р е ш е н и е. $|x^4-6x+2|=x^4+6|x|+2 \Leftrightarrow |x^4-6x+2|=$ $=|x^4+2|+|-6x| \Leftrightarrow -6x(x^4+2)\ge 0 \Leftrightarrow -x\ge 0 \Leftrightarrow x\le 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in(-\infty;0]$. О т в е т: $(-\infty;0]$.

П р и м е р 4. Решить уравнение $|x-2|+|x+3|+|x|=7$.

Р е ш е н и е. $|x-2|+|x+3|+|x|=7 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll}-x+2-x-3-x=7 & \text{при} & x\in(-\infty;-3]\\ -x+2+x+3-x=7 & \text{при} & x\in(-3;0]\\ -x+2+x+3+x=7 & \text{при} & x\in(0;2]\\ x-2+x+3+x=7 & \text{при} & x\in(2;+\infty)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}-3x=8 & \text{при}\ x\in(-\infty;-3]\\ -x=2 & \text{при}\ x\in(-3;0]\\ x=2 & \text{при}\ x\in(0;2]\\ 3x=6 & \text{при}\ x\in(2;+\infty)\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll}x=-2\dfrac{2}{3} & \text{при} & x\in(-\infty;-3]\\ x=-2 & \text{при} & x\in(-3;0]\\ x=2 & \text{при} & x\in(0;2]\\ x=2 & \text{при} & x\in(2;+\infty)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\varnothing\\ x=-2\\ x=2\\ \varnothing\end{array}\right..$$

О т в е т: $\{-2;2\}$.

2. Неравенства, содержащие знак модуля.

Определение 2. Если в неравенстве неизвестное содержится под знаком модуля, то такое неравенство называется *неравенством, содержащим знак модуля.*

Рассмотрим несколько типов неравенств, содержащих знак модуля.

1) *Неравенства вида*

$$|f(x)| \ge g(x). \qquad (2)$$

Из определения модуля ясно, что неравенство (2) равносильно совокупности систем неравенств $\begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ f(x) \ge 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} -f(x) \ge g(x) \\ f(x) < 0 \end{cases}$.

Пример 5. Решить неравенство $|3x-6| \ge x$.

Решение. $|3x-6| \ge x \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x-6 \ge 0 \\ 3x-6 \ge x \end{cases} \\ \begin{cases} 3x-6 < 0 \\ -3x+6 \ge x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x \ge 6 \\ 2x \ge 6 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x < 6 \\ 6 \ge 4x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 2 \\ x \ge 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ 1{,}5 \ge x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ x \le 1{,}5 \end{array}\right..$$

Ответ: $(-\infty;\ 1{,}5] \cup [3;\ +\infty)$.

2) *Неравенства вида* $|f(x)| \ge |g(x)|$ (или $|f(x)| \le |g(x)|$).

Пример 6. Решить неравенство $|2x-6| \le |x|$.

Решение. *1-й способ:* $|2x-6| \le |x| \;\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} -2x+6 \le -x & \text{при} & x \in (-\infty; 0] \\ -2x+6 \le x & \text{при} & x \in (0; 3] \\ 2x-6 \le x & \text{при} & x \in (3; +\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} -x \le -6 & \text{при} & x \in (-\infty; 0] \\ -3x \le -6 & \text{при} & x \in (0; 3] \\ x \le 6 & \text{при} & x \in (3; +\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} x \ge 6 & \text{при} & x \in (-\infty; 0] \\ x \ge 2 & \text{при} & x \in (0; 3] \\ x \le 6 & \text{при} & x \in (3; +\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ x \in [2; 3] \\ x \in (3; 6] \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [2; 6].$$

Ответ: $[2;\ 6]$.

2-й способ: $|2x-6| \le |x| \Leftrightarrow (2x-6)^2 \le x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 24x + 36 \le x^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 36 \le 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 8x + 12 \le 0 \;\Leftrightarrow\; (x-2)(x-6) \le 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2 \ge 0 \\ x-6 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 \le 0 \\ x-6 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 2 \\ x \le 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 2 \\ x \ge 6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \le x \le 6 \\ \varnothing \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [2; 6].$$

Ответ: $[2;\ 6]$.

Вопросы и задания

1. Какое уравнение называется уравнением, содержащим знак модуля?
2. Как решаются уравнения вида $|f(x)| = g(x)$?
3. Как решаются уравнения вида $|f(x)| = |g(x)|$?
4. Какое неравенство называется неравенством, содержащим знак модуля?
5. Как решаются неравенства вида $|f(x)| \ge g(x)$?

Упражнения

1. Решить уравнение:

а) $|x-2| = 5$; *б)* $|2x+3| = -8$; *в)* $|2x-5| = 0$; *г)* $|3x+8| = 2$; *д)* $|x-5| = |x+4|$; *е)* $|6x+7| = |7x+9|$; *ж)* $|6x-1| = |2x+3|$; *з)* $|2x+1| = x-3$; *и)* $|3x-5| = |2x|$; *к)* $|2x+7| = |8x-1| + |x|$; *л)* $|x-5| + |3x+8| = |x+4|$; *м)* $|x^2-3x+5| = x^2 + 3|x| + 5$.

2. Решить неравенство:

а) $|x-2| \le 5$; *б)* $|x+3| > 6$; *в)* $|2x+3| < -3$; *г)* $|4x-1| > -2$; д) $|5x-4| \ge 2$; *е)* $|2x-1| \ge |x|$; *ж)* $|2x+3| \ge |x| - 3$; *з)* $|5x-2| > x + 3 - |x|$; *и)* $|2x+1| < |x-1|$; *к)* $|x+1| + |x-1| > |x|$.

3. Решить уравнение:

а) $\left|x^2-5x+4\right|=\left|x^2+6x+5\right|$;

б) $|x|+\left|x^2+x\right|=|x-1|$;

в) $\left|\left||x-1|-2\right|-3\right|=4$;

г) $\left|\left||x+2|+3\right|+4\right|=5$.

4. Решить неравенство:

а) $|x-2|-|x+3|\le x+|x|$;

б) $\left|x^2-3x+2\right|\le x+|x|$;

в) $\left|x^2-3x+5\right|>\left|x^2-5x+4\right|$;

г) $\left|\left||x-1|-2\right|-3\right|\ge 4$;

д) $\left|\left||x+2|+4\right|+6\right|<8$.

§ 12. Система и совокупность уравнений. Системы линейных уравнений

1. Система уравнений и совокупность уравнений. Из курса средней школы известны понятия системы двух уравнений с двумя неизвестными и ее решения. Дадим теперь более общее определение этих понятий. Рассмотрим два уравнения с двумя неизвестными x, y:

$$f_1(x,y)=g_1(x,y) \quad \text{и} \quad f_2(x,y)=g_2(x,y),$$

где $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$, $g_1(x,y)$ и $g_2(x,y)$ — выражения от x и y, определенные на некотором множестве пар $\{(x,y)\}$, x, y — действительные числа.

Определение 1. Говорят, что задана система двух уравнений с двумя неизвестными, если поставлена задача найти все пары чисел (α,β) таких, что при $x=\alpha$, $y=\beta$ указанные уравнения превращаются в верные числовые равенства.

Систему двух уравнений с двумя неизвестными записывают в виде:

$$\begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y), \\ f_2(x,y)=g_2(x,y) \ . \end{cases} \tag{1}$$

Определение 2. *Решением системы уравнений* (1) называется множество всех пар чисел (α,β) таких, что при $x=\alpha$, $y=\beta$ уравнения системы превращаются в верные числовые равенства. Если решением системы уравнений является пустое множество, то систему называют *несовместной*.

Аналогично можно определить решение системы уравнений с тремя и большим числом неизвестных.

Определение 3. Две системы уравнений называются *равносильными*, если их решения совпадают.

Определение 4. Если заданы две системы уравнений и каждая из них является несовместной, то они считаются равносильными системами уравнений.

Определение 5. Говорят, что задана совокупность двух уравнений с двумя неизвестными, если поставлена задача найти все пары чисел (α,β) таких, что при $x=\alpha$, $y=\beta$ хотя бы одно из указанных уравнений превращается в верное числовое равенство.

Совокупность двух уравнений с двумя неизвестными записывают в виде:

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x,y)=g_1(x,y) \\ f_2(x,y)=g_2(x,y). \end{array}\right. \tag{2}$$

Определение 6. *Решением совокупности уравнений* (2) называется множество всех пар чисел (α,β) таких, что при $x=\alpha$, $y=\beta$ хотя бы одно из уравнений совокупности превращается в верное числовое равенство.

Определение 7. Две совокупности уравнений называются *равносильными*, если их решения совпадают.

Определение 8. Пусть A множество, на котором определены выражения $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$, $g_1(x,y)$, $g_2(x,y)$. Тогда это множество называется *областью допустимых значений* (ОДЗ) системы уравнений (1) или совокупности уравнений (2).

Теорема 1. Пусть множество A является ОДЗ системы уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x,y)=g_1(x,y) \\ f_2(x,y)=g_2(x,y) \end{cases} \tag{3}$$

и выражения $h_1(x,y)$, $h_2(x,y)$ определены на множестве A. Тогда система уравнений (3) равносильна системе уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x,y)+h_1(x,y)=g_1(x,y)+h_1(x,y) \\ f_2(x,y)+h_2(x,y)=g_2(x,y)+h_2(x,y). \end{cases} \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть пара чисел $(\alpha,\beta)\in A$ удовлетворяет системе (3). Тогда:

$$\begin{cases} f_1(\alpha,\beta)=g_1(\alpha,\beta) \\ f_2(\alpha,\beta)=g_2(\alpha,\beta). \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$\begin{cases} f_1(\alpha,\beta)+h_1(\alpha,\beta)=g_1(\alpha,\beta)+h_1(\alpha,\beta) \\ f_2(\alpha,\beta)+h_2(\alpha,\beta)=g_2(\alpha,\beta)+h_2(\alpha,\beta). \end{cases}$$

Поэтому (α,β) удовлетворяет также системе (4). Значит, решение системы (3) является подмножеством решения системы (4). Аналогично доказывается обратное утверждение, т. е. решение системы (4) является подмножеством решения системы (3). Это означает, что системы (3) и (4) имеют одинаковые решения, т. е. являются равносильными.

Т е о р е м а 2. Пусть множество A является ОДЗ системы

$$\begin{cases} f_1(x,y)f_2(x,y)=0 \\ h(x,y)=0. \end{cases} \tag{5}$$

Тогда система (5) равносильна совокупности систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_1(x,y)=0 \\ h(x,y)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} f_2(x,y)=0 \\ h(x,y)=0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть пара чисел $(\alpha,\beta)\in A$ удовлетворяет системе (5). Тогда верно, что

$$\begin{cases} f_1(\alpha,\beta)\cdot f_2(\alpha,\beta)=0 \\ h(\alpha,\beta)=0. \end{cases}$$

Из $f_1(\alpha,\beta)\cdot f_2(\alpha,\beta)=0$ следует, что либо $f_1(\alpha,\beta)=0$, либо $f_2(\alpha,\beta)=0$. Поэтому (α,β) удовлетворяет либо системе $\begin{cases} f_1(x,y)=0 \\ h(x,y)=0 \end{cases}$, либо системе $\begin{cases} f_2(x,y)=0 \\ h(x,y)=0 \end{cases}$, т. е. удовлетворяет совокупности систем (6). Таким образом, решение системы (5) является подмножеством решения совокупности систем (6). Обратное утверждение доказывается аналогичным образом.

2. Системы линейных уравнений. В этом пункте мы дадим понятие системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

О п р е д е л е н и е 9. Пусть $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3$ заданные числа и x, y, z неизвестные. Тогда система уравнений вида:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \tag{7}$$

называется *системой трех линейных уравнений с тремя неизвестными.*

Определение решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными вводится аналогично определению решения системы двух уравнений с двумя неизвестными.

Аналогично можно определить системы двух, четырех и более линейных уравнений с неизвестными. Рассмотрим различные способы решения систем линейных уравнений.

3. Способ подстановки. Для простоты, сущность способа подстановки объясним в случае системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Способ состоит в следующем: одну из неизвестных, например x, в первом уравнении (или во втором) выражают через другую неизвестную y. Полученное выражение подставляют во второе уравнение (соответственно в первое) вместо выраженной неизвестной x. В результате получается уравнение, содержащее только одну неизвестную y. Эту неизвестную легко найти, решив последнее уравнение. Затем неизвестную x находят из формулы, по которой она была выражена через y (уже найденную).

П р и м е р 1. Решить систему $\begin{cases} 3x-4y=2 \\ x+3y=5. \end{cases}$

Р е ш е н и е . Из второго уравнения выразим $x=5-3y$. Подставляя $5-3y$ вместо x из первого уравнения получаем $3(5-3y)-4y=2$ или $15-9y-4y=2$, откуда $-13y=-13$ или $y=1$. Возвращаясь к формуле $x=5-3y$, находим $x=5-3\cdot1=2$. Таким образом, пара $x=2$, $y=1$ является решением системы.

Пример 2. Решить систему $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 4x+6y=2. \end{cases}$

Решение. Из первого уравнения находим $2x=1-3y$ или $x=0{,}5-1{,}5y$. Подставляя $0{,}5-1{,}5y$ вместо x, из второго уравнения получаем $4(0{,}5-1{,}5y)+6y=2$. Откуда $2-6y+6y=2$ или $2=2$. Последнее равенство является тождеством. Поэтому данной системе уравнений удовлетворяет бесконечно много пар чисел вида $(0{,}5-1{,}5y;\ y),\ y\in R$.

Пример 3. Решить систему $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 10x+15y=4. \end{cases}$

Решение. Из первого уравнения легко находим $2x=1-3y$ или $x=0{,}5-1{,}5y$. Подставляя $0{,}5-1{,}5y$ вместо x, из второго уравнения получаем $10(0{,}5-1{,}5y)+15y=4$, откуда имеем $5-15y+15y=4$ или $5=4$. Так как последнее соотношение чисел является неверным, то данная система уравнений несовместна.

4. Способ алгебраического сложения. Этот способ применяется с использованием равносильности систем уравнений. Проиллюстрируем его на примере.

Пример 4. Решить систему $\begin{cases} 3x-4y=2 \\ x+3y=5. \end{cases}$

Решение. Используя равносильность систем, имеем:

$$\begin{cases} 3x-4y=2 \\ x+3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4y-3(x+3y)=2-3\cdot 5 \\ x+3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4y-9y=-13 \\ x+3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -13y=-13 \\ x+3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x+3\cdot 1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1. \end{cases}$$

Следовательно, пара $x=2$, $y=1$ является решением системы.

Пример 5. Решить систему $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 4x+6y=2. \end{cases}$

Решение. Используя равносильность систем, получаем:

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 4x+6y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y-0{,}5\cdot(4x+6y)=1-0{,}5\cdot 2 \\ 4x+6y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 4x+6y=2. \end{cases}$$

Первое уравнение превратилось в тождество. Поэтому данная система уравнений имеет решение в виде множества $\{(0{,}5-1{,}5y;\ y),\ y\in R\}$.

Пример 6. Решить систему $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 10x+15y=4. \end{cases}$

Решение. Используя равносильность систем, получаем:

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 10x+15y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x+15y-5\cdot(2x+3y)=2-5\cdot 1 \\ 2x+3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=-3 \\ 2x+3y=1. \end{cases}$$

Откуда вытекает, что данная система является несовместной.

5. Метод Гаусса. Суть этого метода состоит в том, что с помощью равносильных преобразований из системы уравнений последовательно исключаются неизвестные, пока одно из уравнений не превращается в уравнение с одной неизвестной. Определив значение этой неизвестной, можно найти значения остальных неизвестных. Проиллюстрируем применение метода на конкретных примерах.

Пример 7. Решить систему $\begin{cases} x+3y-5z=4 \\ 2x+y+z=9 \\ x-y+z=2. \end{cases}$

Решение. Из второго и третьего уравнения исключим неизвестное x. Для этого умножим обе части первого уравнения системы сначала на -2 и сложим полученное уравнение (почленно) с вторым уравнением, затем умножим обе части первого уравнения системы на -1 и сложим полученное уравнение (почленно) с третьим уравнением. Тогда получим:

$$\begin{cases} x+3y-5z=4 \\ 2x+y+z=9 \\ x-y+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-5z=4 \\ -5y+11z=1 \\ -4y+6z=-2. \end{cases}$$

Теперь умножим обе части второго уравнения на $-0{,}8$ и сложим его с третьим уравнением. Имеем:

$$\begin{cases} x+3y-5z=4 \\ -5y+11z=1 \\ -2{,}8z=-2{,}8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ -5y=-10 \\ x+3y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ y=2 \\ x+6=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ y=2 \\ x=3. \end{cases}$$

Таким образом, тройка чисел $(3; 2; 1)$ является решением системы.

Пример 8. Решить систему: $\begin{cases} x+3y-5z=4 \\ 2x+6y-10z=7 \\ x-y+z=2. \end{cases}$

Решение. Из второго и третьего уравнений исключим неизвестное x. Для этого умножим обе части первого уравнения на -2 и сложим со вторым уравнением. Затем умножим первое уравнение на -1 и сложим его с третьим уравнением. В результате получим систему $\begin{cases} x+3y-5z=4 \\ 0=-1 \\ -4y+6z=-2 \end{cases}$. Поскольку второе уравнение в новой системе превратилось в неверное числовое равенство, то эта система, а значит и исходная система уравнений, является несовместной.

6. Понятия матрицы и определителей второго и третьего порядков. Прямоугольную таблицу из чисел, содержащую произвольное число m строк и произвольное число n столбцов, называют *матрицей*. Для обозначения матрицы обычно используют круглые скобки. Например,

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

обозначает матрицу, состоящую из двух строк и трех столбцов. Если число строк матрицы совпадает с числом ее столбцов, то матрица называется *квадратной*. Числа, входящие в состав матрицы, называются *элементами матрицы*.

Рассмотрим квадратную матрицу, состоящую из четырех элементов:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Определение 10. *Определителем второго порядка*, соответствующим матрице (8), называется число, равное $a_1b_2-a_2b_1$ и обозначаемое символом $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. Итак, по определению $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1$.

Аналогично, рассмотрим квадратную матрицу, состоящую из девяти элементов:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Определение 11. *Определителем третьего порядка*, соответствующим матрице (9), называется число, равное $a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+$ $+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-b_1a_2c_3-a_1c_2b_3$ и обозначаемое символом $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

Таким образом, по определению:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-b_1a_2c_3-a_1c_2b_3.$$

Рассмотрим основные свойства определителей второго и третьего порядков. Пусть $a, b, c, d, k, e, f, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, d_1, e_1, f_1, d_2, e_2, f_2$ — действительные числа.

Свойства определителей второго порядка:

1°. $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$; 2°. $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} = ac$;

3°. $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$; 4°. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$;

5°. $\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = 0$; 6°. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$.

Доказательство. Используя определение 10, получаем:

1°. $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab-ab=0$; 4°. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc=-(bc-ad)=-\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$;

2°. $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} = ac-0=ac$; 5°. $\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = a\cdot kb-k\cdot ab=0$;

3°. $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0-0=0$; 6°. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$.

Свойства определителей третьего порядка:

1°. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$; 2°. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = adf$;

3°. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & d_2 & 0 \\ b_2 & e_2 & 0 \\ c_2 & f_2 & 0 \end{vmatrix} = 0;$

4°. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & 0 \\ b_1 & e_1 & 0 \\ c_1 & f_1 & 0 \end{vmatrix} = 0;$

5°. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$

Доказательство свойств определителей третьего порядка вытекает из определения 11.

7. Метод Крамера. Метод решения систем линейных уравнений при помощи определителей называется *методом Крамера*. Пусть мы имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \qquad (10)$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — заданные числа, x, y — неизвестные.

Введем обозначения: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

Теорема 3. Пусть $\Delta_1 \neq 0$. Тогда система (10) имеет единственное решение $x = \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}$, $y = \dfrac{\Delta_3}{\Delta_1}$.

Если $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, то решение системы уравнений состоит из бесконечного числа элементов. Если $\Delta_1 = 0$, но $\Delta_2 \neq 0$ (или $\Delta_3 \neq 0$), то система несовместна.

Доказательство: Пусть $\Delta_1 \neq 0$. Используя равносильность систем, имеем:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ -a_2(a_1x + b_1y) + a_1(a_2x + b_2y) = -a_2c_1 + a_1c_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ (a_1b_2 - a_2b_1)y = -a_2c_1 + a_1c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x + b_1\dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = c_1 \\ y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ x = \dfrac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} \\ y = \dfrac{\Delta_3}{\Delta_1} \end{cases}.$$

Таким образом, пара $\left(\dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dfrac{\Delta_3}{\Delta_1}\right)$ является единственным решением (10).

Пусть $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Тогда мы имеем: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ -a_2(a_1x + b_1y) + a_1(a_2x + b_2y) = -a_2c_1 + a_1c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Поскольку второе уравнение последней системы есть тождество, то решение этой системы, а значит и системы (10), состоит из бесконечного числа элементов (например, если $a_1 \neq 0$, то пары вида $\left(\dfrac{c_1}{a_1} - \dfrac{b_1}{a_1}y;\ y\right)$, $y \in R$ удовлетворяют данной системе).

При $\Delta_1 = 0$, но $\Delta_2 \neq 0$ или $\Delta_3 \neq 0$, применяя аналогичные рассуждения, получаем, что система (10) несовместна.

Далее снова рассмотрим систему уравнений (7). Введем следующие обозначения:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема 4. Пусть $\Delta_1 \neq 0$. Тогда система (7) имеет единственное решение $x = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$, $y = \frac{\Delta_3}{\Delta_1}$, $z = \frac{\Delta_4}{\Delta_1}$.

Если $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$, то решение системы состоит из бесконечного числа элементов. Если $\Delta_1 = 0$, но либо $\Delta_2 \neq 0$, либо $\Delta_3 \neq 0$, либо $\Delta_4 \neq 0$, то система несовместна.

Теорема 4 доказывается аналогично теореме 3.

Пример 9. Решить систему $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$.

Решение. Сначала вычислим определители второго порядка:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - (-4) = 13, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 2 = 13.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 - (-20) = 26,$$

Так как $\Delta_1 \neq 0$, то решением системы является $x = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{26}{13} = 2$, $y = \frac{\Delta_3}{\Delta_1} = \frac{13}{13} = 1$.

Ответ: $(2;1)$.

Пример 10. Решить систему: $\begin{cases} x + 3y - 5z = 4 \\ 2x + y + z = 9 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$.

Решение. Сначала вычислим определители третьего порядка:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 + 10 + 5 - 6 + 1 = 14,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 9 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 6 + 45 + 10 - 27 + 4 = 42,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 + 4 - 20 + 45 - 8 - 2 = 28,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 27 - 8 - 4 - 12 + 9 = 14.$$

Так как $\Delta_1 = 14 \neq 0$, то решение системы есть $x = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = 3$, $y = \frac{\Delta_3}{\Delta_1} = 2$, $z = \frac{\Delta_4}{\Delta_1} = 1$.

Ответ: $(3;2;1)$.

Пример 11. Решить систему: $\begin{cases} x + 3y - 5z = 4 \\ 2x + 6y - 10z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$.

Решение. Вычислим определители третьего порядка:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 30 + 10 + 30 - 10 - 6 = 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 9 & 6 & -10 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 6 + 45 + 10 - 27 + 4 = 42,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 9 & -10 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 24 - 60 + 35 + 60 - 21 - 40 = -2,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 21 - 8 - 24 - 12 + 7 = -4.$$

Поскольку $\Delta_1 = 0$, а $\Delta_2 \neq 0$, то данная система несовместна.

Вопросы и задания

1. Дать определение системы уравнений.
2. Дать определение совокупности уравнений.
3. Что называется решением системы уравнений?
4. Какие системы уравнений называются равносильными?
5. Сформулировать свойства равносильных систем уравнений.
6. Дать определение системы линейных уравнений.
7. Как решаются системы линейных уравнений?
8. В чем состоит метод Гаусса?
9. Дать определения матрицы и определителей второго и третьего порядков.
10. Сформулировать свойства определителей второго и третьего порядков.
11. Рассказать о методе Крамера.

Упражнения

1. Проверить, является ли решением системы пара $x=3$, $y=2$?

а) $\begin{cases}3x-5y=-1\\2x+8y=22\end{cases}$; в) $\begin{cases}7x+y=23\\x-y=5\end{cases}$;

б) $\begin{cases}2x+7y=26\\x-3y=-3\end{cases}$; г) $\begin{cases}5x+4y=23\\2x-5y=-4\end{cases}$.

2. Решить систему способом подстановки:

а) $\begin{cases}2x-5y=-8\\3x+7y=17\end{cases}$; б) $\begin{cases}3x+8y=-1\\2x-y=-7\end{cases}$.

3. Решить систему методом Гаусса:

а) $\begin{cases}x+2y+z=7\\2x+y+z=8\\x+y+2z=9\end{cases}$; б) $\begin{cases}x+2y-3z=-1\\2x+3y+z=3\\3x+y+2z=4\end{cases}$.

4. Решить систему способом алгебраического сложения:

а) $\begin{cases}2x-5y=9\\x+3y=-1\end{cases}$; б) $\begin{cases}3x+4y=0\\2x-5y=23\end{cases}$.

5. Вычислить определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix}3&2\\-1&4\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}2&-5\\-3&4\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}6&-1\\4&5\end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix}4&3\\2&0\end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix}3&1\\21&7\end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix}-2&5\\0&7\end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix}2&5\\4&10\end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix}3&-6\\4&-8\end{vmatrix}$.

6. Решить систему методом Крамера:

а) $\begin{cases}2x-3y=3\\7x+5y=26\end{cases}$; б) $\begin{cases}-2x+3y=7\\71x+51y=-91\end{cases}$.

---

7. Решить систему методом Гаусса:

а) $\begin{cases}x+2y-z=-3\\2x+3y+z=7\\-x+2y-z=-7\end{cases}$; б) $\begin{cases}7x+3y-z=24\\x-y+z=-2\\2x+3y-4z=17\end{cases}$.

8. Решить систему способом подстановки:

а) $\begin{cases}3x+2y=5\\2x-y=8\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x+9y=15\\7x-8y=13\end{cases}$.

9. Вычислить определители третьего порядка:

а) $\begin{vmatrix}3&4&5\\2&5&1\\0&3&2\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}7&2&-5\\8&4&3\\-14&-4&10\end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix}2&0&0\\3&-1&0\\4&-2&3\end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix}6&4&-1\\2&5&4\\2&0&1\end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix}8&7&3\\6&1&5\\1&0&0\end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix}2&5&-6\\-3&4&9\\1&2&-3\end{vmatrix}$.

10. Решить систему методом Крамера:

а) $\begin{cases}2x-y+z=2\\x+y-z=4\\3x+2y-z=7\end{cases}$; б) $\begin{cases}5x+3y+z=4\\2x-y-2z=11\\-x+y+3z=12\end{cases}$.

§ 13. Системы нелинейных уравнений и неравенств

1. Метод исключения неизвестных. Одним из эффективных методов решения систем нелинейных уравнений является метод исключения неизвестных, позволяющий последовательно сводить данную систему (или совокупность систем) к системе, уравнения которой содержат на одну неизвестную меньше. Метод исключения неизвестных основан на равносильности следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ g(x, f(x)) = 0 \end{cases}.$$

П р и м е р 1. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x - y = 5, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}.$

Р е ш е н и е. Из первого уравнения находим $y = 2x - 5$. Подставляя во втором уравнении выражение $2x - 5$ вместо y, получаем следующие равносильные системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y = 5, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 5, \\ x^2 + (2x-5)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 5, \\ x^2 + 4x^2 + 25 - 20x - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 5, \\ 5x^2 - 20x + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 5, \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases}.$$

Решая второе уравнение полученной системы, легко получаем $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, откуда $y_1 = -3$, $y_2 = 1$. Значит, решением системы является множество $\{(1; -3); (3; 1)\}$.

2. Способ алгебраического сложения. Способ алгебраического сложения применяется и при решении систем нелинейных уравнений. Он основан на следующей теореме.

Т е о р е м а. Пусть множество A является ОДЗ системы уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

и выражение $h(x,y)$ определено на множестве A. Тогда система (1) равносильна системе уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0, \\ f_2(x,y) + h(x,y) f_1(x,y) = 0 \end{cases}. \qquad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $h_1(x,y) = 0$ на множестве A и $h_2(x,y) = h(x,y) f_1(x,y)$. Тогда справедливость теоремы вытекает из теоремы 1, § 12.

П р и м е р 2. Решить систему: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ x^2 y + xy^2 = 6. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Умножим обе части второго уравнения на 3, а затем сложим это уравнение (почленно) с первым уравнением. В силу формулы $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, получим следующие равносильные системы:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ x^2 y + xy^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y + xy^2 = 6, \\ x^3 + y^3 + 3(x^2 y + xy^2) = 9 + 3 \cdot 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 = 27, \\ xy(x+y) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y) = 3, \\ xy(x+y) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x(3-x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases}.$$

Из второго уравнения последней системы находим $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, откуда $y_1 = 2$ и $y_2 = 1$. Следовательно, множество $\{(1; 2); (2; 1)\}$ является решением исходной системы.

3. Метод замены переменных. Симметричная система уравнений. Заданная система нелинейных уравнений часто упрощается, если некоторые выражения от используемых переменных (неизвестных) заменить на новые переменные (неизвестные). В результате получается более простая система уравнений относительно новых неизвестных. Решив эту систему, можно по формулам замены переменных найти значения исходных неизвестных.

Проиллюстрируем этот метод на примере.

П р и м е р 3. Решить систему $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3(x+y) = 14 \\ xy = 2. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Воспользуемся равенством $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$. Тогда левые части обоих уравнений будут выражены через $(x+y)$ и xy. Положим $xy = u$, $x + y = v$. В результате получим более простую систему уравнений $\begin{cases} v^2 - 2u + 3v = 14 \\ u = 2 \end{cases}$ с неизвестными u, v. Из полученной системы следует, что $v^2 + 3v - 18 = 0$, откуда $v_1 = -6$ и $v_2 = 3$. Поскольку $x + y = v$ и $xy = u$, то для нахождения неизвестных x и y следует решить следующую совокупность систем уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = -6 \\ xy = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \end{array} \right.$$

Используя равносильность систем уравнений, имеем:

$$\left[\begin{cases} x+y=-6 \\ xy=2 \end{cases}\right. \atop \begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} y=-6-x \\ -x(x+6)=2 \end{cases}\right. \atop \begin{cases} y=3-x \\ x(3-x)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} y=-6-x \\ x^2+6x+2=0 \end{cases}\right. \atop \begin{cases} y=3-x \\ x^2-3x+2=0 \end{cases}.$$

Из двух последних квадратных уравнений находим:

$$D_1=36-4\cdot1\cdot2=28,\ x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{28}}{2\cdot1}=-3\pm\sqrt{7},$$

$$D_2=9-4\cdot1\cdot2=1,\quad x_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}=\frac{3\pm1}{2},\ \text{т. е. } x_3=2,\ x_4=1.$$

Соответствующие значения другой неизвестной имеют вид: $y_{1,2}=-3\mp\sqrt{7}$, $y_3=1$, $y_4=2$. Следовательно, множество $\{(-3-\sqrt{7};-3+\sqrt{7}),(-3+\sqrt{7};-3-\sqrt{7}),(2;1),(1;2)\}$ является решением исходной системы уравнений.

Определение 1. Если для выражения $f(x,y)$ на множестве A выполняется равенство $f(x,y)=f(y,x)$, то $f(x,y)$ называется *симметричным выражением*.

Определение 2. Если левые и правые части уравнений заданной системы уравнений содержат симметричные выражения, то саму систему уравнений называют *симметричной*.

Пример 4. Решить симметричную систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ x^2y+xy^2=6 \end{cases}.$$

Решение. Воспользуемся формулой $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$.

Тогда имеем систему $\begin{cases} (x+y)^3-3xy(x+y)=9 \\ xy(x+y)=6 \end{cases}$. Положив $x+y=u$, $xy=v$ и, используя равносильность систем, получаем:

$$\begin{cases} u^3-3uv=9 \\ uv=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3-18=9 \\ uv=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3=27 \\ uv=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3 \\ uv=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases}.$$

Значит, для нахождения неизвестных x, y следует решить систему $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$. Имеем $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ x(3-x)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ x^2-3x+2=0 \end{cases}$, откуда находим $x_1=1$, $y_1=2$; $x_2=2$, $y_2=1$. Следовательно, $\{(1;2),(2;1)\}$ — решение исходной системы уравнений.

4. Графический способ решения уравнений и систем уравнений. Пусть даны два уравнения $f_1(x,y)=0$ и $f_2(x,y)=0$. Первое из этих уравнений на координатной плоскости задает некоторую линию $Л_1$ (т. е. множество точек (x,y) на плоскости, координаты x, y которых удовлетворяют уравнению $f_1(x,y)=0$), а второе — линию $Л_2$. Поставим задачу: найти точки пересечения линий $Л_1$ и $Л_2$. Для нахождения точек пересечения этих линий, следует найти все пары чисел $(\alpha;\ \beta)$ такие, что при $x=\alpha$ и $y=\beta$ уравнения $f_1(x,y)=0$ и $f_2(x,y)=0$ превращаются в верные числовые равенства. Таким образом, для нахождения точек пересечения заданных линий следует решить систему уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x;y)=0 \\ f_2(x;y)=0 \end{cases}. \tag{3}$$

Обратно, пусть пара чисел $(\alpha;\beta)$ удовлетворяет системе (3). Тогда $f_1(\alpha,\beta)=0$ и $f_2(\alpha,\beta)=0$ — верные числовые равенства и поэтому линии $f_1(x,y)=0$ и $f_2(x,y)=0$ пересекаются в точке $(\alpha;\beta)$.

Если линии $Л_1$ и $Л_2$ совпадают, то решение системы уравнений (3) состоит из бесконечного числа пар $(\alpha;\beta)$ (на координатной плоскости эти пары $(\alpha;\beta)$ в совокупности образуют саму линию $Л_1$). Если же $Л_1$ и $Л_2$ не пересекаются, то система (3) несовместна.

Пример 5. Решить систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x+y=3 \end{cases}.$$

Решение. В прямоугольной декартовой системе координат построим линии $x^2+y^2=9$ и $x+y=3$ (рис. 21).

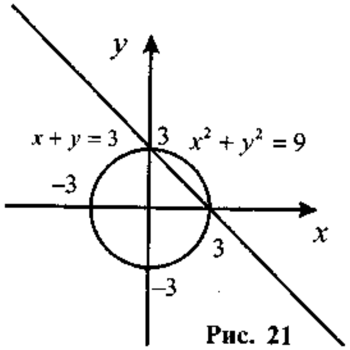


Рис. 21

Линия $x^2+y^2=9$ является окружностью с центром в начале координат и радиусом 3, а линия $x+y=3$ — прямой, проходящей через точки $(0;3)$ и $(3;0)$. Так как эти линии пересекаются в точках $(0;3)$ и $(3;0)$, то решением заданной системы является множество $\{(3;0),(0;3)\}$. Ответ: $\{(3;0),(0;3)\}$.

Пример 6. Решить уравнение: $x^3+5x=6$.

Решение. Из равносильности уравнений имеем: $x^3+5x=6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^3=6-5x \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-5x \\ y=x^3 \end{cases}.$$

В прямоугольной системе координат построим линии $y=6-5x$ и $y=x^3$ (рис. 22). Так как линии пересекаются только в точке $(1;1)$, то $\{(1;1)\}$ есть решение исходного уравнения.

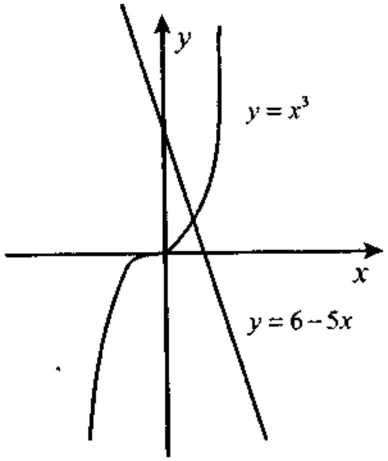


Рис. 22

Ответ: $\{(1;1)\}$.

5. Графический способ решения неравенств и систем неравенств с двумя неизвестными. Пусть на координатной плоскости задана некоторая линия *Л*: $F(x,y)=0$. Эта линия делит плоскость на несколько областей (частей), внутри каждой из которых $F(x,y)$ сохраняет знак (т. е. для всех точек (x,y) одной взятой области будет выполняться неравенство $F(x,y)>0$, а для всех точек другой области $F(x,y)<0$). Поэтому для графического решения неравенства $F(x,y)>0$ (или $F(x,y)<0$) линию *Л*: $F(x,y)=0$ изображают на координатной плоскости. Затем определяют знак $F(x,y)$ в каждой из областей, взяв по одной «пробной» точке в каждой области, на которые делится плоскость. Области, в которых взятая "пробная" точка удовлетворяет неравенству $F(x,y)>0$ ($F(x,y)<0$), в совокупности образуют решение неравенства $F(x,y)>0$ ($F(x,y)<0$).

Отметим также, что, присоединив к полученному решению линию *Л*, мы получим решение неравенства $F(x,y)\ge 0$ ($F(x,y)\le 0$).

Пример 7. Решить неравенство: $x^2-6x+y^2+2y<6$.

Решение. Выделив полный квадрат, получим $(x-3)^2+(y+1)^2<16$. Уравнение $(x-3)^2+(y+1)^2=16$ задает окружность с центром в точке $A(3,-1)$ и радиусом 4. В качестве «пробной» точки для области, находящейся внутри окружности, можно взять $A(3;-1)$, а для области, находящейся вне окружности точку $B(10;0)$.

Так как $(3-3)^2+(-1+1)^2<16$, то заданное неравенство выполняется для всех точек области, находящейся внутри окружности. Поскольку $(10-3)^2+(0+1)^2>16$, то точки области, находящейся вне окружности, не удовлетворяют заданному неравенству (рис. 23).

Ответ. Круг с центром в точке $A(3;-1)$ и радиусом 4.

Для графического решения системы неравенств $\begin{cases} F(x,y)>0, \\ \Phi(x,y)>0 \end{cases}$ нужно последовательно определить множество A_1 точек плоскости, в которых выполняется первое неравенство $F(x,y)>0$, затем определить множество A_2 точек плоскости, в которых имеет место второе неравенство $\Phi(x,y)>0$. Пересечение $A_1 \cap A_2$ полученных множеств есть решение заданной системы неравенств.

Пример 8. Решить систему неравенств $\begin{cases} x+y-2\ge 0 \\ x^2+y^2\le 36 \end{cases}$.

Решение. Запишем неравенство $x+y-2\ge 0$ в виде $y\ge -x+2$. Ясно, что это неравенство выполняется в точках прямой $y=-x+2$ и в точках, лежащих выше этой прямой на координатной плоскости. Неравенство $x^2+y^2\le 36$ выполняется в точках окружности радиуса 6 с центром в начале координат и в точках, находящихся внутри этой окружности. Пересечение (общая часть) этих множеств является решением заданной системы неравенств (рис. 24).

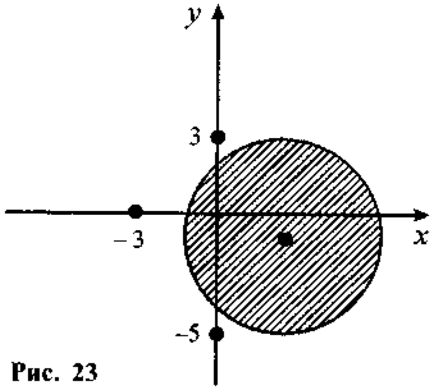


Рис. 23

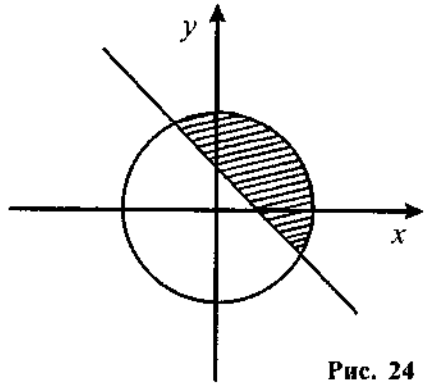


Рис. 24

Вопросы и задания

1. Какие способы и методы решений систем нелинейных уравнений вы знаете?
2. В чем заключается метод исключения неизвестных?
3. Рассказать о методе замены переменных.
4. Какие системы называются симметричными системами уравнений?
5. Рассказать о графическом способе решения уравнений и систем уравнений.
6. Рассказать о графическом способе решения неравенств и систем неравенств с двумя неизвестными.

Упражнения

1. Решить систему уравнений методом исключения:

а) $\begin{cases} 2x^2+5y^2=13 \\ 3x^2-y^2=11 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x-\dfrac{x-y}{2}=4 \\ y-\dfrac{x+3y}{x+2}=1 \end{cases}$.

2. Решить систему уравнений способом алгебраического сложения:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y^2-x=5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases}$.

3. Решить систему уравнений методом замены переменных:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{y+2}=1\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{3}{x-1}-\dfrac{1}{y+1}=1\dfrac{1}{6} \end{cases}$; б) $\begin{cases} xy+x-y=7 \\ x^2y-xy^2=6 \end{cases}$.

4. Решить симметричную систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^3+y^3+xy^2+x^2y=65 \end{cases}$; б) $\begin{cases} xy+2x+2y=5 \\ x^2+y^2+3x+3y=8 \end{cases}$.

5. Решить систему уравнений графическим способом:

а) $\begin{cases} |x|+|y|=1 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} |x|+|y|=3 \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$.

6. Решить уравнение графическим способом:

а) $x+\dfrac{1}{x}=1$; б) $x^3+x-2=0$;

в) $x^3-2x^2-2x-3=0$; г) $x^3-2x^2+3x-6=0$.

7. Решить неравенство графическим способом:

а) $3x+4y>12$; в) $2x-3y<6$;

б) $x^2+y^2-2y>1$; г) $x^2+y<2$.

---

8. Решить систему уравнений методом исключения:

а) $\begin{cases} x^2+y^2+6x+2y=0 \\ x+y+8=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+2y=6 \\ 3x^2-xy+4y^2=48 \end{cases}$.

9. Решить систему уравнений способом алгебраического сложения:

а) $\begin{cases} x^3-y^3=7 \\ x^2y-xy^2=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2y+xy^2=20 \\ x^3+y^3=65 \end{cases}$.

10. Решить систему уравнений методом замены переменных:

а) $\begin{cases} 3|x+1|+2|y-2|=20 \\ x+2y=4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} (x+1)(y+1)=10 \\ (x+y)(xy+1)=25 \end{cases}$.

11. Решить симметричную систему уравнений:

а) $\begin{cases} xy-29=x+y \\ x^2+y^2=x+y+72 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2+y^2+5x+5y+3xy=15 \\ x^2+y^2-x-y+xy=1 \end{cases}$.

12. Решить систему уравнений графическим способом:

а) $\begin{cases} x+y=2 \\ x^4+y^4=16 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y-x^2=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$.

13. Решить систему неравенств графическим способом:

а) $\begin{cases} x^2-2x+y^2+2y>2 \\ x^2+y^2<10 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x+5y>15 \\ x^2+y^2<100 \end{cases}$.

§ 14. Уравнения и неравенства с параметрами. Системы уравнений и неравенств с параметрами

1. Алгебраические уравнения и неравенства с параметрами. В уравнениях (неравенствах) кроме букв, обозначающих неизвестные, могут содержаться и другие буквы, называемые *параметрами.* Такие уравнения (неравенства) называются *уравнениями (неравенствами) с параметрами.* При этом бывает, что при одних значениях параметров заданное уравнение не имеет корней, при других — имеет один или несколько корней, при третьих — бесконечно много корней.

П р и м е р 1. При каком значении параметра m уравнение $mx+5=3$ не имеет корней; при каком значении параметра m это уравнение имеет только один корень?

Р е ш е н и е. Имеем $mx+5=3 \Leftrightarrow mx=-2$. Ясно, что при $m=0$ уравнение не имеет корней. Если $m \neq 0$, то уравнение имеет единственный корень $x=-\dfrac{2}{m}$.

О т в е т. При $m=0$ уравнение не имеет корней, а при $m \neq 0$ уравнение имеет только один корень $x=-\dfrac{2}{m}$.

П р и м е р 2. При каких значениях параметра a, уравнение $x^2-(2a+4)x-5-2a=0$ имеет два различных отрицательных (действительных) корня?

Р е ш е н и е. Уравнение имеет два различных корня, если дискриминант $D=(2a+4)^2+4\cdot1\cdot(5+2a)>0$. По теореме Виета для корней x_1 и x_2 имеем равенства $\begin{cases} x_1+x_2=2a+4 \\ x_1\cdot x_2=-\ (5+2a) \end{cases}$.

Поскольку корни x_1 и x_2 отрицательные, то $\begin{cases} 2a+4<0 \\ -\ (5+2a)>0 \end{cases}$.

Поэтому, для определения искомых значений параметра a, следует решить систему неравенств $\begin{cases} (2a+4)^2+4(5+2a)>0 \\ 2a+4<0 \\ -\ (5+2a)>0 \end{cases}$.

Имеем:

$$\begin{cases} (2a+4)^2+4(5+2a)>0 \\ 2a+4<0 \\ 5+2a<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+2)^2+2a+5>0 \\ a+2<0 \\ 2a<-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+4a+4+2a+5>0 \\ a<-2 \\ a<-2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+6a+9>0 \\ a<-2 \\ a<-2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+3)^2>0 \\ a<-2 \\ a<-2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\in(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty) \\ a\in(-\infty;-2) \\ a\in(-\infty;\ -2{,}5) \end{cases} \Leftrightarrow a\in(-\infty;-3)\cup(-3;\ -2{,}5).$$

О т в е т: $a\in(-\infty;-3)\cup(-3;\ -2{,}5)$.

П р и м е р 3. При каком значении параметра m уравнение $|x^2-m|=5$ имеет три корня?

Р е ш е н и е. Используя равносильность, имеем:

$$|x^2-m|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-m\ge0 \\ x^2-m=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-m<0 \\ x^2-m=-5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2\ge m \\ x^2=5+m \end{cases} \\ \begin{cases} x^2<m \\ x^2=m-5 \end{cases} \end{array}\right..$$

При $m+5<0$ уравнение $x^2=m+5$ не имеет корней; при $m+5>0$ оно имеет два корня $x_{1,2}=\pm\sqrt{m+5}$; при $m+5=0$ это уравнение имеет единственный корень $x=0$.

Аналогично, при $m-5<0$ уравнение $x^2=m-5$ не имеет корней; при $m-5>0$ оно имеет два корня $x_{1,2}=\pm\sqrt{m-5}$; при $m-5=0$ это уравнение имеет единственный корень $x=0$.

Из проведенных рассуждений ясно, что только при $m=5$ исходное уравнение имеет ровно три корня. При $m=5$ получим следующие корни: $\left[\begin{array}{l} x^2=10 \\ x^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{10} \\ x=-\sqrt{10} \\ x=0 \end{array}\right.$. О т в е т: $m=5$.

П р и м е р 4. При каком значении параметра m уравнение $m^2x-2=m+4x$ имеет бесконечно много корней?

Р е ш е н и е. Используя равносильность уравнений, получаем:

$$m^2x-2=m+4x \Leftrightarrow m^2x-4x=m+2 \Leftrightarrow x\left(m^2-4\right)=m+2.$$

Ясно, что если $\begin{cases} m^2-4=0 \\ m+2=0 \end{cases}$, то заданное уравнение имеет бесконечно много корней. Отсюда имеем $\begin{cases} m^2-4=0 \\ m+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2=4 \\ m=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m=-2.$

О т в е т: $m=-2$.

2. Система уравнений и система неравенств с параметрами.

П р и м е р 5. При каких значениях параметра m системе уравнений $\begin{cases} mx+2y=5 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ удовлетворяет только одна пара чисел (x, y)?

Р е ш е н и е. Используя равносильность систем, имеем:

$$\begin{cases} mx+2y=5 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ mx+2y+2(2x-y)=5+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ mx+4x=7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ x(m+4)=7 \end{cases}.$$

Второе уравнение последней системы имеет единственный корень $x=\frac{7}{m+4}$ при $m \neq -4$. Подставляя $\frac{7}{m+4}$ вместо x, в первом уравнении последней системы получаем $y=2\cdot\frac{7}{m+4}-1=\frac{10-m}{m+4}$. Следовательно, при $m \neq -4$ исходной системе уравнений удовлетворяет единственная пара $\left(\frac{7}{m+4}, \frac{10-m}{m+4}\right)$.

О т в е т: $m \in (-\infty;-4) \cup (-4;+\infty)$.

П р и м е р 6. При каких значениях параметра m система неравенств $\begin{cases} 2(x+1) \le 4 \\ x>m \end{cases}$ не имеет решения?

Р е ш е н и е. Используя равносильность систем неравенств, имеем:

$$\begin{cases} 2(x+1) \le 4 \\ x>m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2 \le 4 \\ x>m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \le 2 \\ x>m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x>m \end{cases} \Leftrightarrow m<x\le 1,$$

откуда следует, что при $m \ge 1$ заданная система неравенств не имеет решения. О т в е т: $m \in [1; +\infty)$.

П р и м е р 7. При каких значениях параметра m система уравнений $\begin{cases} 3x-y=1-m \\ x+y=2m+1 \end{cases}$ имеет решение, удовлетворяющее условиям $x \ge 1$, $y \le 4$?

Р е ш е н и е.

Имеем: $\begin{cases} 3x-y=1-m \\ x+y=2m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=2+m \\ x+y=2m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2+m}{4} \\ y=\dfrac{7m+2}{4} \end{cases}.$

В силу условий задачи следует решить следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{2+m}{4} \ge 1 \\ \dfrac{7m+2}{4} \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \ge 4 \\ 7m+2 \le 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 2 \\ 7m \le 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 2 \\ m \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$$

О т в е т: $m=2$.

Вопросы и задания

1. Какие уравнения называются уравнениями с параметрами?
2. Какие неравенства называются неравенствами с параметрами?
3. Сформулировать определение системы уравнений с параметрами.

Упражнения

1. Найти значения k, при которых уравнение $3x^2-2kx-k+6=0$ не имеет корней.
2. Найти значения p, при которых уравнение $(p-3)x^2+2x+3p-11=0$ имеет равные корни.

3. Найти значения параметра k в уравнении $x^2-2x+k=0$, если корни уравнения x_1 и x_2 связаны соотношением $2x_1+x_2=3$.
4. При каких значениях коэффициента p отношение корней уравнения $x^2+px+1=0$ равно 4?
5. Найти целые значения параметра m, при которых число $x=2$ удовлетворяет неравенству $\frac{x^3-x^2}{m^2x^2+x+2}\le\frac{x^2-3}{m^2x+m-1}$.
6. При каких значениях параметра k неравенство $kx^2+2kx+4>0$ выполняется на всей числовой оси?
7. Найти значения x, при которых неравенство $(2m-6)x^2+$ $+(32-10m)x-(8+m)<0$ выполняется для всех m, удовлетворяющих условию $2\le m\le 4$.
8. При каких значениях параметра m неравенству $(m-x)\sqrt{3+x-x^2}\ge 0$ удовлетворяют только два значения x?
9. При каких значениях k система уравнений $\begin{cases}kx+5y=3\\2x+y=4\end{cases}$ не имеет решения?
10. Найти значения параметра k, при которых система уравнений $\begin{cases}x^2+y=2x+k\\x^2+y^2=2x\end{cases}$ имеет решение.
11. При каких значениях параметра k системе уравнений $\begin{cases}x-(k+1)y=3\\2x-(k+3)y=k+5\end{cases}$ удовлетворяет бесконечное число пар чисел (x,y)?
12. Найти значения параметра k, при которых системе $\begin{cases}(x+y)^2=12\\x^2+y^2=2(k+1)\end{cases}$ удовлетворяют ровно две пары чисел (x,y).
13. При каких значениях параметра m система неравенств $\begin{cases}-x^2+12x-m\ge 0\\x\le 2\end{cases}$ выполняется хотя бы при одном значении x?

14. При каких значениях параметра k система неравенств $\begin{cases}y\ge x^2+2k\\x\ge y^2+2k\end{cases}$ выполняется только в одной точке $(x;y)$?

§ 15. Иррациональные уравнения и неравенства

1. Иррациональные уравнения.

Определение 1. Уравнение $A(x)=B(x)$, в котором хотя бы одно из выражений $A(x)$, $B(x)$ является иррациональным и неизвестное x находится под знаком корня, называется *иррациональным уравнением.*

Пример 1. Уравнения $\sqrt{x-13}+\sqrt{x+4}=10$, $\sqrt{x^2-5}=\sqrt[3]{x^2+5x+1}$ являются иррациональными уравнениями. Уравнение $\sqrt{2}x^4+\sqrt[5]{13}x=\sqrt[3]{\frac{2+\sqrt{3}}{5-\sqrt{2}}}$ не является иррациональным уравнением, так как в нем x не находится под знаком корня (это рациональное уравнение).

Понятия корня и решения иррационального уравнения определяются аналогично алгебраическим уравнениям.

Пример 2. Число 16 является корнем уравнения $\sqrt{x-7}=3$. Других корней это уравнение не имеет и поэтому его решением является одноэлементное множество $\{16\}$.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{x+1}=-3$.

Решение. Так как $\sqrt{x+1}$ принимает только неотрицательные значения, то уравнение $\sqrt{x+1}=-3$ не имеет корней.

Теорема 1. Если n — нечетное натуральное число, то $A^n(x)=B^n(x)\Leftrightarrow A(x)=B(x)$. Если n четное натуральное число, то любой корень уравнения $A^n(x)=B^n(x)$ удовлетворяет совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l}A(x)=B(x)\\A(x)=-B(x)\end{array}\right.$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $n=2k-1$, $k\in N$ и $x=\alpha$ корень уравнения $A(x)=B(x)$. Тогда $A(\alpha)=B(\alpha)$ и поэтому $A^n(\alpha)=B^n(\alpha)$. Значит, α — корень уравнения $A^n(x)=B^n(x)$. Обратно, пусть α — корень уравнения $A^n(x)=B^n(x)$, т. е. $A^n(\alpha)=B^n(\alpha)$. Так как n — нечетное число, то из последнего равенства следует $A(\alpha)=B(\alpha)$. Поэтому α — корень уравнения $A(x)=B(x)$. Таким образом, при нечетном n верно, что $A^n(x)=B^n(x) \Leftrightarrow A(x)=B(x)$.

Пусть теперь n — четное число. Если α — корень уравнения $A^n(x)=B^n(x)$, то $A^n(\alpha)=B^n(\alpha)$. Равенство $A^n(\alpha)=B^n(\alpha)$ может иметь место при $A(\alpha)=B(\alpha)$ или при $A(\alpha)=-B(\alpha)$. Следовательно, α удовлетворяет совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l}A(x)=B(x)\\ A(x)=-B(x)\end{array}\right.$.

Отметим, что на практике при решении иррациональных уравнений часто приходится производить операцию возведения обеих частей уравнения в некоторую степень. Если при этом показатель степени возведения является четным числом, то могут появиться «лишние корни». Поэтому после операции возведения в степень следует проверять, являются ли корни последнего уравнения корнями исходного уравнения.

Т е о р е м а 2. Пусть множество A является ОДЗ уравнения $\sqrt[2k]{A(x)}=\sqrt[2k]{B(x)}$, $k\in N$, $A(x), B(x)$ — рациональные выражения. Тогда на множестве A имеет место соотношение:

$$\sqrt[2k]{A(x)}=\sqrt[2k]{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases}A(x)=B(x)\\ B(x)\geq 0\end{cases}.$$

Теорема 3. Пусть множество A является ОДЗ уравнения $\sqrt[2k]{A(x)}=B(x)$, $k\in N$, $A(x)$, $B(x)$ — рациональные выражения. Тогда на множестве A имеет место соотношение:

$$\sqrt[2k]{A(x)}=B(x) \Leftrightarrow \begin{cases}A(x)=B^{2k}(x)\\ B(x)\geq 0\end{cases}.$$

Доказательства теорем 2, 3 проводятся аналогично доказательству теоремы 1 и, мы оставляем их для самостоятельной работы.

П р и м е р 5. Решить уравнение $x^2+2x+\sqrt{x^2+2x+8}=12$.

Р е ш е н и е . Положим $\sqrt{x^2+2x+8}=z$. Так как $x^2+2x=z^2-8$, то данное уравнение принимает вид: $z^2-8+z-12=0$. Корнями последнего уравнения являются –5 и 4. Уравнение $\sqrt{x^2+2x+8}=-5$ не имеет корней. Поэтому задача сводится к решению уравнения $\sqrt{x^2+2x+8}=4$. Используя теорему 3, имеем:

$$\sqrt{x^2+2x+8}=4 \Leftrightarrow x^2+2x+8=16 \Leftrightarrow x^2+2x-8=0.$$

Корнями последнего уравнения являются числа – 4 и 2. Непосредственной проверкой убеждаемся, что оба этих числа удовлетворяют исходному уравнению.

О т в е т : $\{-4;2\}$.

П р и м е р 6. Решить уравнение $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=3$.

Р е ш е н и е . Используя теоремы 1–3 и свойства равносильных уравнений, имеем:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=3 \Leftrightarrow \begin{cases}x+1+x-2+2\sqrt{(x+1)(x-2)}=9\\ x+1\geq 0\\ x-2\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\sqrt{x^2-x-2}=10-2x\\ x\geq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2-x-2}=5-x\\ x\geq 2\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-x-2=25-10x+x^2\\ x\geq 2\\ 5-x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9x=27\\ x\geq 2\\ x\leq 5\end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

О т в е т : $\{3\}$.

2. Иррациональные неравенства.

О п р е д е л е н и е 2. Неравенство $A(x)\ \alpha\ B(x)$, где α означает один из знаков неравенств «$>, <, \geq, \leq$», называется *иррациональным неравенством*, если хотя бы одно из выражений $A(x)$, $B(x)$ является иррациональным и неизвестное x находится под знаком корня.

Т е о р е м а 4. Пусть множество A является ОДЗ неравенства $\sqrt[2k]{A(x)} < B(x)$. Тогда на множестве A имеет место соотношение:

$$\sqrt[2k]{A(x)} < B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) < B^{2k}(x) \\ A(x) \ge 0 \\ B(x) > 0 \end{cases}.$$

Т е о р е м а 5. Пусть множество A является ОДЗ неравенства $\sqrt[2k]{A(x)} > B(x)$. Тогда на множестве A имеет место соотношение:

$$\sqrt[2k]{A(x)} > B(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B(x) \ge 0 \\ A(x) > B^{2k}(x) \end{cases} \\ \begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \ge 0 \end{cases} \end{array}\right..$$

Доказательство теорем 4, 5 предоставляем для самостоятельной работы.

П р и м е р 7. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 3x + 4} < x - 5$.

Р е ш е н и е . Используя теорему 4 и равносильность систем неравенств, имеем:

$$\sqrt{x^2 - 3x + 4} < x - 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 4 < x^2 - 10x + 25 \\ x - 5 > 0 \\ x^2 - 3x + 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x < 21 \\ x > 5 \\ x^2 - 3x + 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > 5 \\ x^2 - 3x + 4 \ge 0 \end{cases}.$$

Так как система неравенств $\begin{cases} x < 3 \\ x > 5 \end{cases}$ не имеет решения, то исходное неравенство также не имеет решения.

О т в е т : $\varnothing$.

П р и м е р 8. Решить неравенство $\sqrt{x^2 + 6x - 40} > x + 2$.

Р е ш е н и е . Используя теорему 5 и равносильность систем неравенств, имеем:

$$\sqrt{x^2 + 6x - 40} > x + 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 2 \ge 0 \\ x^2 + 6x - 40 > x^2 + 4x + 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 2 < 0 \\ x^2 + 6x - 40 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -2 \\ 2x > 44 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -2 \\ (x + 10)(x - 4) \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 22 \\ \begin{cases} x < -2 \\ x + 10 \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 22 \\ x \le -10 \end{array}\right..$$

О т в е т : $(-\infty; -10] \cup (22; +\infty)$.

Вопросы и задания

1. Сформулировать определение иррационального уравнения.
2. Как решаются уравнения вида $\sqrt[2k]{A(x)} = B(x)$?
3. Как решаются уравнения вида $\sqrt[2k]{A(x)} = \sqrt[2k]{B(x)}$?
4. Сформулировать определение иррационального неравенства.
5. Как решаются неравенства вида $\sqrt[2k]{A(x)} > B(x)$?
6. Как решаются неравенства вида $\sqrt[2k]{A(x)} < B(x)$?

Упражнения

1. Решить уравнение:

а) $(x^2 - 4)\sqrt{x + 1} = 0$;

б) $(x - 4)\sqrt{3 + 2x - x^2} = 0$;

в) $\sqrt{7 - x^2}\sqrt{10 - 3x - x^2} = 0$;

г) $\sqrt{x - 5} = 8$;

д) $(x^2 - x - 6)\sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{2x}} = 0$;

е) $\sqrt{4 - 6x - x^2} = x + 4$;

ж) $x + \sqrt{2x^2 - 7x + 5} = 1$;

з) $\sqrt{3x - 5} - \sqrt{4 - x} = 1$;

и) $\sqrt{15 - x} + \sqrt{3 - x} = 6$;

к) $\sqrt{x + 1} - \sqrt{2x - 5} = \sqrt{x - 2}$.

2. Решить неравенство:

а) $\sqrt{x-1}<3-x$;

б) $\sqrt{2x+3}\le x$;

в) $x-\sqrt{3-2x}<0$;

г) $\sqrt{x+7}\ge 7-2x$;

д) $\sqrt{x^2+3x-18}>2x+3$;

е) $x>\sqrt{x^2-x-12}$.

---

3. Решить уравнение:

а) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$;

б) $2\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}=18$;

в) $x+42-11\sqrt{x^2-x-42}=x^2$;

г) $\sqrt{\dfrac{2x}{1+2x}}+\sqrt{\dfrac{2x+1}{2x}}=\dfrac{5}{2}$;

д) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$.

4. Решить неравенство:

а) $\dfrac{\sqrt{3+2x}}{2x^2-x-1}>0$;

б) $\sqrt{-25x^2+15x-2}\left(8x^2-6x+1\right)\ge 0$;

в) $\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10}\le\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$;

г) $\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}\le 6$;

д) $\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}>-\sqrt{x-5}$.

§ 16. Текстовые задачи

Текстовые задачи, как правило, решаются по следующей схеме:

а) неизвестные обозначают некоторыми буквами;

б) исходя из смысла и условий задачи, составляют уравнение (систему уравнений) или неравенство (систему неравенств), связывающее неизвестные;

в) решают составленное уравнение (систему уравнений) или неравенство (систему неравенств) и находят неизвестные.

Условно, содержание текстовых задач можно классифицировать по следующим основным типам:

1) задачи, связанные с понятием процента;
2) задачи, связанные с понятием концентрации;
3) задачи, связанные с понятием движения;
4) задачи, связанные с понятием работы.

Рассмотрим несколько примеров, соответствующих указанным типам задач:

1. Задачи, связанные с понятием процента.

Задача 1. Сумма двух положительных чисел равна 170. Если 50% большего числа на 43 больше, чем 10% другого числа, то найдите эти числа.

Решение. Обозначим неизвестные числа через x и y, причем $x>y$. По условию задачи имеем: $x+y=170$ и $\dfrac{x\cdot 50\%}{100}=\dfrac{y\cdot 10\%}{100}+43$.

Составим систему и решим ее:

$$\begin{cases}x+y=170\\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{10}+43\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=170\\ x=\dfrac{y}{5}+86\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{y}{5}+86+y=170\\ x=\dfrac{y}{5}+86\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+\dfrac{y}{5}=84\\ x=\dfrac{y}{5}+86\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5y+y=420\\ x=\dfrac{y}{5}+86\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6y=420\\ x=\dfrac{y}{5}+86\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=70\\ x=\dfrac{70}{5}+86=100\end{cases}.$$

Ответ: 100 и 70.

2. Задачи, связанные с понятием концентрации.

Задача 2. Имеются растворы с концентрациями 10 % и 20 %. Сколько граммов вещества надо взять из растворов с концентрациями 10 % и 20 %, чтобы получить 1000 г раствора с концентрацией 18 %?

Решение. Возьмем x г раствора с концентрацией 10 % и $(1000-x)$ г раствора с концентрацией 20 %. В итоге получается 1000 г раствора с концентрацией 18 %.

Согласно условию задачи составляем уравнение: $\dfrac{x\cdot 10}{100}+\dfrac{(1000-x)\cdot 20}{100}=\dfrac{1000\cdot 18}{100}$, откуда имеем: $x+2(1000-x)=1800$; $x+2000-2x=1800$; $x=200$.

Ответ: 200 г из раствора с концентрацией 10 % и 800 г из раствора 20 %.

3. Задачи, связанные с понятием движения.

Задача 3. Два поезда отправляются навстречу друг другу из городов A и B. Если поезд из города A отправится на 1,5 ч. раньше, чем поезд из города B, то они встретятся в середине пути. Если оба поезда выйдут одновременно, то через 6 ч. расстояние между ними будет составлять десятую часть первоначального расстояния. Найдите скорости поездов, если расстояние между городами 480 км.

Р е ш е н и е . Обозначим расстояние между городами A и B через S км ($S=480$), скорость поезда, отправляющегося из города A, через x км/ч, а скорость поезда, отправляющегося из города B, через y км/ч. Тогда $\frac{S}{2x}$ ч — время, за которое первый поезд (отправляющийся из города A) преодолевает половину пути, $\frac{S}{2y}$ ч — время, за которое проходит половину пути второй поезд.

Из условия задачи получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{S}{2x}-\frac{S}{2y}=1,5 \\ 6x+6y=S-0,1S \end{cases}.$$

Учитывая, что $S=480$, решаем полученную систему:

$$\begin{cases} \frac{S}{2x}-\frac{S}{2y}=1,5 \\ 6x+6y=0,9S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{480}{x}-\frac{480}{y}=3 \\ 6x+6y=0,9\cdot 480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 480(x-y)=-3xy \\ 6(x+y)=432 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=32 \\ y=40 \end{cases}.$$

О т в е т . 32 км/ч, 40 км/ч.

4. Задачи, связанные с понятием работы.

З а д а ч а 4. Две бригады рабочих начали работу в 8 часов. Изготовив вместе 72 детали, они стали работать раздельно. В 15 часов выяснилось, что за время раздельной работы первая бригада изготовила на 8 деталей больше, чем вторая. На другой день первая бригада стала изготавливать за 1 час на одну деталь больше, а вторая за 1 час на одну деталь меньше, чем в первый день. Работу бригады начали вместе в 8 часов и, изготовив 72 детали, снова стали работать раздельно. Теперь за время раздельной работы первая бригада изготовила на 8 деталей больше, чем вторая уже к 13 часам. Сколько деталей в час первоначально изготовляла каждая бригада?

Р е ш е н и е . Пусть первая бригада изготовляла x деталей в час, вторая бригада y деталей в час. Тогда 72 детали бригады изготовили вместе за $\frac{72}{x+y}$ часа. Поэтому в первый день бригады работали раздельно $\left(7-\frac{72}{x+y}\right)$ ч. За время раздельной работы первая бригада изготовила $\left(7-\frac{72}{x+y}\right)\cdot x$ деталей, а вторая $\left(7-\frac{72}{x+y}\right)\cdot y$ деталей. Из условия задачи заключаем, что

$$\left(7-\frac{72}{x+y}\right)x-\left(7-\frac{72}{x+y}\right)y=8. \qquad (1)$$

Во второй день первая бригада стала изготовлять $(x+1)$ деталей в час, а вторая $(y-1)$ деталей в час. Значит, 72 детали бригады изготовили вместе за $\frac{72}{x+y}$ ч. Поэтому во второй день бригады работали раздельно $\left(5-\frac{72}{x+y}\right)$ ч и изготовили $\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(x+1)$ деталей — первая бригада, $\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(y-1)$ деталей — вторая бригада. Из условия задачи заключаем, что

$$\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(x+1)-\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(y-1)=8. \qquad (2)$$

Отсюда получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(7-\frac{72}{x+y}\right)(x-y)=8 \\ \left(5-\frac{72}{x+y}\right)(x-y+2)=8 \end{cases}.$$

Положим $x-y=u$, $\frac{72}{x+y}=v$. Тогда $\begin{cases} (7-v)u=8 \\ (5-v)(u+2)=8 \end{cases}.$

Выразим из первого уравнения переменную u и подставим ее выражение во второе уравнение системы:

$$\begin{cases} u = \dfrac{8}{7-v} \\ (5-v)\left(\dfrac{8}{7-v}+2\right)=8 \end{cases}.$$

Второе уравнение последней системы приводится к виду $v^2-12v+27=0$, откуда $v_1=3$, $v_2=9$. Теперь находим соответствующие значения u: $u_1=2$, $u_2=-4$. Из условия задачи следует, что $x>y$. Поэтому $u_2=-4$ не удовлетворяет условию задачи. Следовательно, для определения x и y имеем систему уравнений $\begin{cases} x-y=2 \\ \dfrac{72}{x+y}=3 \end{cases}$. Решая ее, находим $x=13$, $y=11$.

Ответ: 13 деталей в час изготовляла первая бригада, 11 деталей в час изготовляла вторая бригада.

Вопросы и задания

1. По какой примерной схеме решаются текстовые задачи?
2. Какие типы текстовых задач вы знаете?

Упражнения

1. Два завода по плану должны были выпустить за месяц 260 станков. Первый завод выполнил план на 112 %, а второй — на 110 %, вместе заводы выпустили за месяц 400 станков. Сколько станков сверх плана выпустил каждый завод в отдельности?
2. Для выпечки пшеничного хлеба взято столько килограммов муки, сколько процентов составляет припек на эту муку. Для выпечки ржаного хлеба взято на 10 кг муки больше, а именно столько килограммов, сколько процентов составляет припек на ржаную муку. Сколько взято той и другой муки, если выпечено 112,5 кг хлеба?
3. Если рабочий день уменьшить с 8 до 7 ч, то на сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы при тех же расценках заработная плата выросла на 5 %?

4. Процент числа студентов курса, успешно сдавших все зачеты, заключен в пределах от 96,8 до 97,2 %. Найти минимальное число студентов, которые могут быть на этом курсе.
5. Велосипедист должен был проехать 48 км с определенной средней скоростью. Но по некоторым причинам первую половину пути он ехал со скоростью на 20% меньше, а вторую половину пути — на 2 км больше, чем ему полагалось. На весь путь велосипедист затратил 5 ч. Найдите предполагаемую вначале скорость.
6. Самолет летел сначала со скоростью 220 км/ч. Когда ему осталось лететь на 385 км меньше, чем он пролетел, то скорость его стала равной 330 км/ч. Средняя скорость самолёта на всём пути равна 220 км/ч. Какое расстояние пролетел самолёт?
7. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу вышли два поезда. Скорость первого поезда на 10 км/ч больше скорости второго. Поезда встретились в 28 км от середины пути AB. Если бы первый поезд отправился из A на 45 минут позже второго, то поезда встретились бы в середине пути AB. Найдите расстояние AB и скорости обоих поездов.
8. Два школьника вышли одновременно из дома в школу с одинаковой скоростью. Через 3 минуты один из товарищей вспомнил, что забыл дома нужную книгу и побежал обратно со скоростью, больше первоначальной на 60 м/мин. Взяв книгу, он побежал с такой же скоростью и догнал товарища, который шел с постоянной скоростью, уже у дверей школы. Найдите скорости учеников, если расстояние от школы до дома равно 280 м.

---

9. Трое рабочих должны изготовить 870 одинаковых деталей. Известно, что все трое вместе изготавливают за 1 час 20 деталей. К работе приступил сначала первый рабочий. Он сделал 20 деталей, затратив на их изготовление более 3 ч. Оставшуюся часть выполнили вместе второй и третий рабочие. На всю работу ушло 8 ч. Сколько часов потребовалось бы первому рабочему на изготовление 80 деталей?
10. Двое рабочих выполнили вместе некоторую работу за 12 ч. Если бы сначала первый рабочий сделал половину этой работы, а затем другой — остальную часть, то вся работа была бы выполнена за 25 ч. За какое время мог бы выполнить эту работу каждый рабочий в отдельности?

11. Двое рабочих выполняют некоторую работу. После 45 мин. совместной работы первый рабочий был переведен на другую работу, и второй рабочий закончил оставшуюся часть работы за 2 ч 15 мин. За какое время мог бы выполнить всю работу каждый в отдельности, если известно, что второму на это понадобится на 1 ч больше, чем первому?

12. Два токаря должны были изготовить определенное число деталей. После трехчасовой совместной работы работу продолжил только второй токарь, который проработал еще 4 ч. После этого, задание было перевыполнено на 12,5%. За какое время мог бы выполнить задание каждый токарь в отдельности, если известно, что второму на это понадобится на 4 ч меньше, чем первому?

13. При смешивании 40%-ного раствора кислоты с 10%-ным раствором кислоты получили 800 г 20%-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было для этого взято?

14. Имеется 735 г 16%-ного раствора йода в спирте. Нужно получить 10%-ный раствор йода. Сколько граммов спирта для этого нужно добавить к имеющемуся раствору?

15. Имеется сталь двух сортов, один из которых содержит 5 %, а другой — 10 % никеля. Сколько тонн каждого из этих сортов нужно взять, чтобы получить сплав, содержащий 8 % никеля, если во втором куске никеля на 4 тонны больше, чем в первом?

16. Руда содержит 40 % примесей, а выплавленный из нее металл — 4 % примесей. Сколько получится металла из 24 т руды?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Найти действительные корни уравнения **(1–19)**:

1. $x^4-1=0$.

2. $x^3+x-2=0$.

3. $x^3+9x^2+23x+15=0$.

4. $(x-1)^3+(2x+3)^3=27x^3+8$.

5. $2x^4-21x^3+74x^2-105x+50=0$.

6. $x^5-4x^4+4x^3-x^2+4x-4=0$.

7. $x^5+4x^4-6x^3-24x^2-27x-108=0$.

8. $x^4-27x^2-14x+120=0$.

9. $x^4+2x^3-13x^2-38x-24=0$.

10. $x^4+10x^3+37x^2+60x+36=0$.

11. $x^4+x^3-6x^2-4x+8=0$.

12. $x^4-4x^3+5x^2+22x-24=0$.

13. $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)=144$.

14. $(x-3)(x+2)(x-6)(x+1)+56=0$.

15. $(x+3)(x-2)(x-6)(x+7)=-180$.

16. $(x+6)(x-7)(x+2)(x-3)+180=0$.

17. $2x^4+3x^3-8x^2-9x+6=0$.

18. $5x^4-3x^3-4x^2-3x+5=0$.

19. $3x^4-4x^3-7x^2+4x+4=0$.

Если корни квадратного уравнения x_1 и x_2, то найти **(20–21)**:

а) $x_1^2+x_2^2$; *б)* $x_1^3+x_2^3$; *в)* $x_1x_2^2+x_1^2x_2$.

20. $2x^2+3x-5=0$. **21.** $x^2+x+7=0$.

22. Составить квадратное уравнение, если $x_1=3$ и $x_2=-5$.

23. Составить квадратное уравнение с целыми коэффициентами, если один из его корней равен $2-\sqrt{5}$.

Решить неравенство **(24–32)**:

24. $(2-x)(3x+1)(2x-3)>0$.

25. $(3x-2)(x-3)^3(x+1)^3(x+2)^4<0$.

26. $x^4+8x^3+12x^2\geq 0$.

27. $(16-x^2)(x^2+4)(x^2+x+1)(x^2-x-3)\leq 0$.

28. $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+x-1}<0$. **29.** $\dfrac{3x-2}{2x-3}<3$.

30. $\dfrac{7x-4}{x+2}\geq 1$. **31.** $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+3}<\dfrac{3}{x+2}$.

32. $\dfrac{3}{6x^2-x-12}<\dfrac{25x-47}{10x-15}-\dfrac{3}{3x+4}$.

Доказать неравенства (**33–36**):

33. Если $a \neq 2$, то $\frac{1}{a^2-4a+4} > \frac{2}{a^3-8}$.

34. $a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(a+b+c)$.

35. Если $m, n, k \in N$, то $mn+mk+nk \leq 3mnk$.

36. Если a, b, c, d — положительные числа, то $\frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \leq \sqrt[4]{abcd}$.

Решить систему неравенств (**37–41**):

37. $\begin{cases} \frac{3x+5}{7}+\frac{10-3x}{5} > \frac{2x+7}{3}-7\frac{3}{21} \\ \frac{7x}{3}-\frac{11(x+1)}{6} > \frac{3x-1}{3}-\frac{13-x}{2}. \end{cases}$

38. $\begin{cases} \frac{2x-11}{4}+\frac{19-2x}{2} < 2x \\ \frac{2x+15}{9} > \frac{x-1}{5}+\frac{x}{3}. \end{cases}$

39. $\begin{cases} 2x^2+2 < 5x \\ x^2 \geq x. \end{cases}$

40. $\begin{cases} \frac{x+3}{x-2} < 1 \\ \frac{2x+3}{3x-2} < 2. \end{cases}$

41. $\begin{cases} \frac{(x+2)(x^2-3x+8)}{x^2-9} \leq 0 \\ \frac{1-x^2}{x^2+2x-8} \geq 0. \end{cases}$

Решить уравнения, содержащие модуль (**42–48**):

42. $|x^2-x-3| = -x-1$.

43. $2|x^2+2x-5| = x-1$.

44. $|x-2|+|x-3|+|2x-8| = 9$.

45. $|2x-1|-|3-x| = |x-4|$.

46. $|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2| = |x+2|$.

47. $|x-x^2-1| = |2x-3-x^2|$.

48. $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} = 1$.

Решить неравенства, содержащие модуль (**49–56**):

49. $|2x-1| < |4x+1|$.

50. $\left|-\frac{5}{x+2}\right| < \left|\frac{10}{x-1}\right|$.

51. $\left|\frac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right| \leq 3$.

52. $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \geq 1$.

53. $\frac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geq 2$.

54. $\frac{x^2-|x|-12}{x-3} \geq 2x$.

55. $\big|2x-|3-x|-2\big| \leq 4$.

56. $\left|\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+4}\right|+\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-12 < 0$.

Решить систему уравнений (**57–62**):

57. $\begin{cases} 4x-5y+6z=5 \\ 2x+7y+11z=20 \\ 2x-3y+z=0. \end{cases}$

58. $\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ x+2y+z=8 \\ x+y+2z=9. \end{cases}$

59. $\begin{cases} xy+xz=-4 \\ yz+yx=-1 \\ xz+yz=-9. \end{cases}$

60. $\begin{cases} 15x^2+xy-2y^2=0 \\ 7x^2-4xy-3y^2=-32. \end{cases}$

61. $\begin{cases} x+y+x^2+y^2=18 \\ xy+x^2+y^2=19. \end{cases}$

62. $\begin{cases} \frac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\frac{31}{7} \\ x^2+xy+y^2=3. \end{cases}$

Решить уравнения с параметрами (**63–65**):

63. $\frac{x}{x+2a}-\frac{x+2a}{x-2a}=\frac{16a^2}{4a^2-x^2}$.

64. $x^4-8x^2+16=8ax+a^2$.

65. $|x+3a|-|x-a|=2a$.

Решить неравенства с параметрами (**66–68**):

66. $|x| < ax$.

67. $3(2a-x) < ax+1$.

68. $\frac{a}{x-a}+\frac{a}{x+a} < 0$.

Решить иррациональные уравнения (**69–73**):

69. $\sqrt{8x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x-2}$.

70. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+2}-\sqrt{2x+5}=\sqrt{3x}$.

71. $\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{4-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}$.

72. $\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}+3\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}=4$.

73. $\sqrt[3]{x+44}-\sqrt[3]{x-19}=3$.

Решить иррациональные неравенства (74–77):

74. $\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}-\sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}\geq\frac{7}{12}$.

75. $\sqrt[3]{x+5}+2>\sqrt[3]{x-3}$.

76. $\frac{2}{2+\sqrt{4-x^2}}+\frac{1}{2-\sqrt{4-x^2}}>\frac{1}{x}$.

77. $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\frac{5}{\sqrt{x-3}}$.

78. Цену товара снизили на 20 %, затем новую цену снизили на 15 %; наконец, после перерасчета произвели снижение еще на 10 %. На сколько процентов в итоге снизилась первоначальная цена?

79. Количество студентов в институте, увеличиваясь на одно и то же число процентов ежегодно, возросло за три года с 5000 до 6555 человек. На сколько увеличивалось число студентов ежегодно?

80. Расстояние между двумя городами по реке равно 80 км. Катер проходит это расстояние дважды (вверх и вниз) за 8 ч 20 мин. Определить скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

81. Два велосипедиста выехали одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Велосипедист, выехавший из A, прибыл в B через 4 ч, а велосипедист, выехавший из B, прибыл в A через 9 ч после встречи. Сколько часов в пути был каждый велосипедист?

82. Бассейн заполняется водой через первую трубу на 5 ч быстрее, чем через вторую трубу, и на 30 ч быстрее, чем через третью трубу. Известно, что пропускная способность третьей трубы в 2,5 раза меньше пропускной способности первой трубы и на 40 м^3/ч меньше пропускной способности второй трубы. Найти пропускную способность первой и третьей труб.

83. В 500 кг руды содержится некоторое количество железа. После удаления из руды 200 кг примесей, содержащих в среднем 12,5 % железа, процент содержания железа в оставшейся руде повысился на 20 %. Сколько осталось железа в руде?

84. Свежие грибы содержат 90 % воды, а сухие — 12 %. Сколько получится сухих грибов из 88 кг свежих?

ГЛАВА VII

ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

§ 1. Понятие функции

1. Определение понятия функции. На практике нам часто приходится встречаться с зависимостями между различными переменными величинами. Примерами таких взаимосвязанных между собой величин являются: радиус и площадь круга; высота местности и давление воздуха; масса металлического предмета и его плотность; значения переменных величин x и y, удовлетворяющие уравнению $y=x+1$ и др.

Отвлечемся от конкретного смысла переменных величин и предположим, что x и y связаны таким образом, что каждому рассматриваемому значению величины x соответствует одно определенное значение величины y. В таком случае говорят, что величины x и y связаны между собой функциональной зависимостью.

После выбора единиц измерения значения любой переменной величины выражаются числами. Поэтому, на самом деле, мы будем изучать определенного вида функциональные зависимости между числами.

Определение 1. Величина y называется *функцией* переменной величины x на заданном множестве ее изменения D ($x\in D$), если по некоторому правилу (закону) f каждому значению x из D поставлено в соответствие одно определенное значение величины y.

При этом переменная величина x называется *независимой переменной (аргумент)*, а величина y, значения которой определяются выбранными значениями x, называется *зависимой* или же *функцией от аргумента* x.

2. Область определения и область значений функции. Функциональную зависимость величины y от величины x символически и сокращенно записывают в виде $y=f(x)$.

При этом говорят, что y есть функция x (читают: y равно f от x).

Множество D (или $D(f)$), которое пробегает переменная x, называется *областью определения функции* $y=f(x)$.

Значение зависимой переменной y, соответствующее определенному значению a аргумента x, называют значением функции при $x=a$ и обозначают символом $f(a)$ или $y(a)$ (или же $y\big|_{x=a}$).

Все различные значения y, принимаемые ею, когда аргумент x пробегает область определения D, образуют множество, называемое *областью значений функции*.

Область значений функции $y = f(x)$ будем обозначать через E (или $E(f)$). Таким образом,

$$E(f) = \{f(x) \mid x \in D(f)\}.$$

Из определений понятия функции и области определения следует, что функция считается заданной, если:

1) указана область определения D этой функции;

2) указано правило f, с помощью которого по каждому значению аргумента $x \in D$ можно найти соответствующее ему значение функции.

П р и м е р 1. Записью $y = x^2+1$ (или $f(x) = x^2+1$), $-2 \le x \le 2$ задается функция, область определения которой есть отрезок $D(f) = [-2\ ;\ 2]$. Нетрудно проверить, что областью значений заданной функции тоже является отрезок $E(f) = [1\ ;\ 5]$.

Во многих случаях, когда функция задана некоторым выражением на всей области существования этого выражения, область определения явно не указывают. Например, функция, выражающая зависимость между радиусом окружности и ее длиной, дается формулой $C = 2\pi R$. Очевидно, что областью определения D этой функции является множество всех положительных чисел. В этом случае говорят, что D является *естественной* областью определения функции. В дальнейшем, в тех случаях, когда область определения функции явно не указана, условимся под D понимать естественную область определения.

П р и м е р 2. Найдем область определения (естественную область определения) функции $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$.

В данном примере проще сначала найти те значения, которые аргумент x не может принимать. Очевидно, что при $x = 1$ и $x = 2$ знаменатель дроби обращается в нуль. Поскольку на нуль делить нельзя, то естественно, что числа 1 и 2 не входят в область определения $D(f)$. При остальных значениях аргумента x можно легко вычислить соответствующие значения функции. Например, при $x = 3$

$$f(3) = \frac{3+1}{3^2-3\cdot 3+2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Таким образом, областью определения заданной функции является вся числовая прямая, за исключением точек $x = 1$ и $x = 2$, т. е. $D(f) = (-\infty\ ;\ 1) \cup (1\ ;\ 2) \cup (2\ ;\ +\infty)$.

В дальнейшем, под значениями аргумента x будем подразумевать только действительные числа (вообще же, могут быть и другие числа, например, комплексные числа) и будем рассматривать лишь те функции, которые принимают только действительные значения. Такие функции называются *действительными функциями действительного переменного*.

3. Действия над функциями. Определим теперь понятие равенства двух функций и действия над функциями, поскольку в математическом анализе очень часто приходится употреблять выражения: "функции равны", "сумма функций" и др.

О п р е д е л е н и е 2. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *равными*, если:

1) у них одинаковая область определения;

2) их значения, соответствующие одному и тому же значению аргумента из области определения, являются равными.

П р и м е р 3. Пусть $y = x^2+1$, $x \in R$. Тогда для этой функции $D = R$, $E = [1;\ +\infty)$. Данная функция отличается от функции из примера 1, так как различны области определения этих функций.

П р и м е р 4. Функции $f(x) = \dfrac{x^2-49}{x-7}$ и $g(x) = x+7$, каждая из которых рассматривается в своей области определения, различны, так как область определения $f(x)$ есть множество $(-\infty\ ;\ 7) \cup (7\ ;\ +\infty)$, а областью определения $g(x)$ является вся числовая прямая.

В то же время, если обе функции считать заданными на множестве $(-\infty\ ;\ 7) \cup (7\ ;\ +\infty)$, то они по определению будут равными.

Пусть теперь $f(x)$ и $g(x)$ — две функции с областями определения D_1 и D_2. Положим, $D = D_1 \cap D_2$ $(D \ne \varnothing)$.

О п р е д е л е н и е 3. *Суммой функций* $f(x)$ и $g(x)$ называется функция $F(x)$, определенная на множестве D, такая, что для всех x из D имеет место равенство: $F(x) = f(x) + g(x)$.

Аналогично определяется разность, произведение или частное двух функций. При этом, определяя частное $\Phi(x)$ функций $f(x)$ и $g(x)$, мы должны считать, что областью определения $\Phi(x)$ является все множество D, за исключением тех значений x, при которых знаменатель $g(x)$ дроби $\Phi(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ обращается в нуль.

Пример 5. Пусть $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x-1$. Ясно, что $D_1=[0;+\infty)$, $D_2=(-\infty;+\infty)$. Тогда $D=D_1\cap D_2=[0;+\infty)$, а область определения функции $\Phi(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ есть множество $[0;1)\cup(1;+\infty)$.

Вопросы и задания

1. Когда зависимость одной величины от другой называется функциональной?
2. Дать определение функции, ее области определения и области значений.
3. Когда функция считается заданной?
4. Что понимают под естественной областью определения функции?
5. Какие функции называются равными?
6. Дать определение произведения двух функций.

Упражнения

1. Среди величин, указанных ниже, выбрать такие, в которых вторая величина функционально зависит от первой. Определить также случаи, когда первая величина функционально зависит от второй:
   а) длина стороны квадрата и его площадь;
   б) время и скорость, с которой движется человек из пункта A в пункт B;
   в) масса тела и его объем;
   г) температура тела человека и производительность его труда.
2. Вычислить $f(-3)$, $f(0)$, $f(a)$, $a<0$, если $f(x)=|x|+x$.
3. Является ли y функцией от x, если $y^2=x$, $x\geq 0$?
4. Дана функция $f(x)=x^5-9x^3+x$. Показать, что $f(-x)=-f(x)$.
5. Дана функция $f(x)=x^2-2x+3$. Решить уравнение:
   а) $f(x)=f(0)$; *б)* $f(x)=f(-1)$.
6. Найти область определения функции:
   а) $f(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$; *в)* $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$;
   б) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^4}$; *г)* $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$.

7. Найти область значений функции:
   а) $y=-x^2$; *в)* $y=\dfrac{1}{x-7}$;
   б) $y=2x^2+1$; *г)* $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.
8. $f(x)=x^2+1$; $g(x)=x^3$. Найти выражения для:
   а) $f^3(x)-g^2(x)-1$; *в)* $\dfrac{x\cdot f(x)-g(x)}{x}$;
   б) $\dfrac{f^2(x)-1}{g(x)}$; *г)* $\dfrac{g(x)}{f(x)}-\dfrac{f^2(x)}{g(x)}$.

---

9. Вычислить $f(-2)+f(2)$, если $f(x)=x^2+x+1$.
10. $f(x)=x^4-x^2+1$. Показать, что $f(-x)=f(x)$.
11. Найти область определения функции:
    а) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+5}$; *г)* $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}$;
    б) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}$; *д)* $f(x)=\sqrt{|x|-2}$;
    в) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$; *е)* $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}$.
12. Найти область значений функции:
    а) $y=(x-1)^2$; *г)* $y=\sqrt{x}$;
    б) $y=\dfrac{1}{x-4}$; *д)* $y=|x-2|+1$;
    в) $y=\dfrac{x-2}{x-3}$; *е)* $y=3x^2-6x+1$.
13. $f(x)=x^2$, $g(x)=x^4$. Найти выражение для:
    а) $\dfrac{f(x)+1}{g(x)-1}$; *б)* $g(x)-2f(x)+1$.
14. Расстояние h (в метрах) от стрелы, выпущенной вверх, до поверхности земли выражается формулой $h(t)=-t^2+10t+2$. Через какое время (в секундах) стрела достигнет наибольшей высоты, и какова эта высота?
15. Привести пример функции двух переменных величин.

§ 2. Способы задания функции

Закон соответствия между функцией и ее аргументом может задаваться различными способами: аналитически, таблицей, графически и др.

1. Аналитический способ задания функции. В математическом анализе закон соответствия между функцией и аргументом обычно задается с помощью формулы. Пусть функция задана при помощи формулы $y=f(x)$. Тогда правую часть равенства, т. е. $f(x)$, называют *аналитическим выражением функции*, а сам способ задания функции при помощи формулы называется *аналитическим способом*.

Аналитический способ задания функции состоит в том, что с помощью формулы конкретно устанавливается алгоритм вычисления значений функции $y=f(x)$ для каждого из значений аргумента. При аналитическом задании функции область определения $D(f)$ либо указывают, например, $f(x)=x+1$, $D(f)=[0;1]$, либо ее не указывают, понимая под $D(f)$ множество значений x, при которых данная формула имеет смысл. Например, $f(x)=\sqrt{x}$ — функция, заданная аналитически. Под областью определения этой функции понимают естественную область определения, т. е. множество $D(f)=[0;+\infty)$.

Иногда функцию задают различными формулами, определенными на разных множествах.

П р и м е р 1. Формулами $y=-x^2$ при $x<0$, $y=x^2$ при $x\geq 0$ аналитически задается функция на интервале $(-\infty;+\infty)$. Заданную таким образом функцию обычно записывают в виде:

$$y=\begin{cases}-x^2, & x<0\\ x^2, & x\geq 0\end{cases}.$$

В данном примере мы имеем не две функции, а две формулы, определяющие в своей совокупности одну функцию.

Иногда функция задается различными формулами на множествах более сложной структуры. Примером такой функции может служить *функция Дирихле*

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ рационально}\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}\end{cases}.$$

2. Табличный способ задания функции. На практике аналитический способ задания функции часто оказывается неудобным из-за того, что он сопряжен с необходимостью выполнения в каждом отдельном случае многочисленных и громоздких вычислений. В связи с этим, в практических целях заранее вычисляются значения наиболее употребительных функций для большого числа значений аргумента и составляются таблицы значений таких функций. Например, в различных справочниках по математике можно встретить таблицы значений часто используемых функций: $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$, $y=\sin x$ и др.

Если имеется таблица, сопоставляющая значения аргумента x с соответствующими им значениями величины y, то тем самым задается некоторая функция y от x. Такой способ задания функции называется *табличным способом*. К достоинствам табличного способа относят то, что для заданных значений аргумента x из таблицы сразу (без дополнительных вычислений) можно получить соответствующие значения функции y.

К недостаткам такого способа относятся: отсутствие наглядности, т. е. трудно судить о характере изменения функции; невозможность определения промежуточных значений функции по таблице.

Если функция задана аналитически, то для нее всегда можно построить таблицу некоторых значений. Если же функция задана таблично, то в общем случае найти точное аналитическое выражение функции по ее табличным данным невозможно. Кроме того, одной и той же таблице значений может соответствовать несколько аналитических выражений. Например, пусть задана таблица:

x	-1	1	0
y	1	1	0

Ей соответствуют, по крайней мере, две функции $y=|x|$ и $y=x^2$. Однако, если заранее известно, какому виду функций соответствует заданная таблица значений, то по этим значениям можно составить аналитическое выражение, задающее функцию. Например, пусть задана таблица значений

x	1	2	3
y	-1	0	1

линейной функции вида $y=kx+b$, где k и b — некоторые числа.

Требуется найти точное выражение для линейной функции, т. е. надо определить значения k и b. Для того чтобы их найти, подставим значения переменных x и y, взятых из таблицы, в формулу $y = kx + b$. Так как неизвестных здесь всего два, то достаточно использовать только два значения x и два значения y.

При $x = 1$, $y = -1$ и $x = 3$, $y = 1$ имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} -1 = k \cdot 1 + b \\ 1 = k \cdot 3 + b \end{cases}.$$

Решая ее, получим $k = 1$, $b = -2$. Значит, искомая функция имеет вид $y = x - 2$.

Аналогично по трем значениям x и y можно найти квадратическую функцию вида $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c — числа), соответствующую заданной таблице значений.

3. Графический способ задания функции. *Графический способ* задания функции состоит в наглядном представлении функции $y = f(x)$ ее графиком.

Определение. *Графиком функции* $y = f(x)$, заданной на множестве D, называется множество Γ всех точек координатной плоскости, имеющих вид $M(x, f(x))$, $x \in D$, т. е.

$$\Gamma = \left\{ M(x, f(x)) \mid x \in D \right\}.$$

Чаще всего график функции — это некоторая линия на координатной плоскости. Если аргумент x принимает только отдельные значения, например, $x \in N$, то графиком функции является множество отдельных (изолированных) точек.

Пример 2. Графиком функции $y = n^2$, $n \in N$ является множество $\Gamma = \left\{ M(n, n^2), n \in N \right\}$ изолированных точек координатной плоскости.

Следует отметить, что не каждая линия на координатной плоскости является графиком некоторой функции. Например, окружность не может быть графиком никакой функции, поскольку окружность может пересекаться с прямой, перпендикулярной к оси абсцисс, более чем в одной точке.

Линия Γ является графиком некоторой функции тогда и только тогда, когда каждая прямая, параллельная оси ординат, либо не пересекается с этой линией, либо пересекает ее только в одной точке. Например, кривая линия на рис. 25 является графиком некоторой функции.

Для построения графика функции $y = f(x)$ из множества D выбирают несколько значений аргумента $x_1, x_2, \dots, x_n$, находят соответствующие значения функции $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ и строят на координатной плоскости точки $M_1(x_1; f(x_1))$, $M_2(x_2; f(x_2))$, ..., $M_n(x_n; f(x_n))$. Затем, соединяя полученные точки гладкой линией, получают приближенное изображение (эскиз) графика функции.

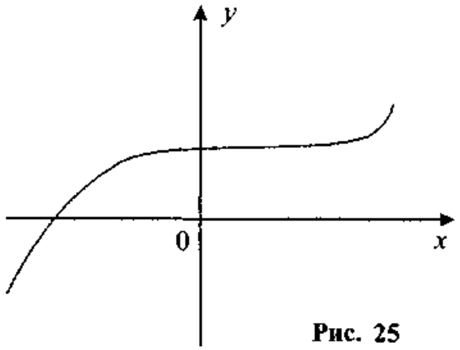


Рис. 25

Пример 3. Построим график (эскиз) функции $y = x^2 + 1, -2 \le x \le 2$.

Выберем для аргумента x значения $-2, -1, 0, 1, 2$. Им соответствуют значения функции $5, 2, 1, 2, 5$. Нанесем теперь на координатную плоскость точки $M_1(-2; 5)$, $M_2(-1; 2)$, $M_3(0; 1)$, $M_4(1; 2)$, $M_5(2; 5)$ и соединим их гладкой линией. Получим эскиз графика, изображенный на рис. 26.

Не следует думать, что графики всех функций являются гладкими и состоят из одной лишь кривой. Например, график функции, изображенный на рис. 27, состоит из бесконечного числа отдельных полуотрезков единичной длины. Левый конец отрезка принадлежит графику, а правый — нет.

Графический способ задания функции широко распространен. Например, в метеорологии употребляются самопишущие приборы, вычерчивающие кривые, которые изображают графически функциональ-

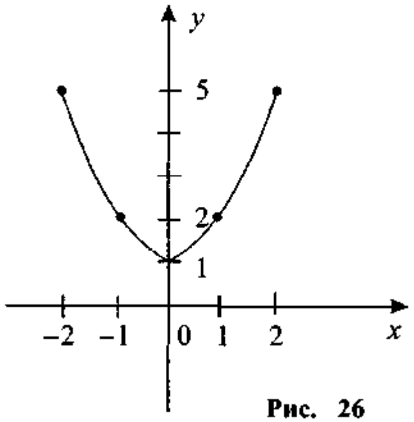


Рис. 26

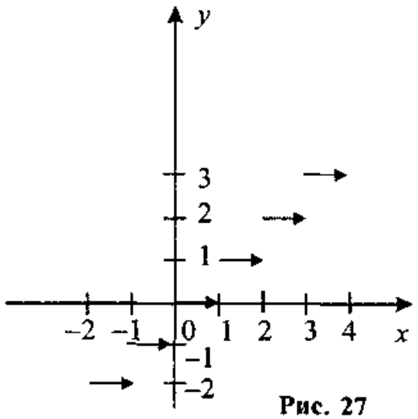


Рис. 27

ную зависимость между давлением и временем. К достоинствам графического способа задания функции можно отнести его наглядность, т. е. можно получить общее представление о ходе изменения рассматриваемой функции. Поскольку эскиз графика строится по нескольким точкам, то по графику можно лишь приближенно находить другие промежуточные значения функции. Поэтому к недостаткам графического способа относят его неточность.

4. Словесный способ задания функции. В некоторых случаях функцию трудно или невозможно задать одним из указанных выше способов и задают ее словесным образом. Задание функции при помощи словесного описания закона соответствия, позволяющего по заданному значению аргумента находить соответствующее значение функции, называется *словесным способом задания функции*.

Пример 4. Пусть $f(n)$, $n \in N$ равно n-му десятичному знаку в разложении $\sqrt{2}$ в бесконечную десятичную дробь. Для такой функции $f(1)=4$, $f(2)=1$, $f(4)=2$ и т. д., так как $\sqrt{2}=1{,}4142\ldots$.

Пример 5. Пусть y означает наибольшее целое число, не превосходящее данного действительного числа x. Эту функцию обычно обозначают через $y=[x]$ (читается: y равно целой части x). Например, $f(1)=1$, $f(1{,}2)=1$, $f(-2)=-2$, $f(-2{,}5)=-3$ и т. д. График этой функции изображен на рис. 27.

За последние годы в связи с бурным развитием и применением компьютерных технологий широко распространился *программный способ задания функции*, при котором функция задается с помощью указания программы на одном из машинных языков. В настоящее время разработаны и применяются стандартные программы, т. е. набор команд, задающих функцию.

В заключение отметим, что указанные выше способы задания функции являются наиболее употребительными, но не исчерпывают всех возможных способов. Кроме того, задание функции каким-либо способом не исключает возможности ее задания и другими способами.

Вопросы и задания

1. Как называется способ задания функции, при котором закон соответствия между функцией и аргументом задается формулой?
2. Назвать преимущества и недостатки табличного способа задания функции.

3. В каких случаях по табличному заданию функции можно определить ее аналитическое выражение?
4. Что называется графиком функции?
5. Назвать преимущества и недостатки графического способа задания функции.
6. Привести примеры словесного задания функции.
7. Какие еще способы задания функции вам известны?

Упражнения

1. Вычислить значения $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(\sqrt{3})$, $f(2)$, $f(\sqrt{5})$, $f(3)$,

если $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<-2 \\ x^2, & -2\le x\le 2. \\ 1-x^2, & x>2 \end{cases}$

2. Функция задана формулой $y=\frac{2}{5}x$. Заполнить следующую таблицу:

x	-5			3	6	1,25	0
y		0	2				

3. Привести пример функции, соответствующей таблице значений:

x	-1	0	1	2
y	-1	1	3	5

4. Найти линейную функцию, заданную таблицей:

x	5	10	15	20
y	2	4	6	8

5. Найти квадратическую функцию, заданную таблицей:

x	-1	1	2	-2	0
y	-1	-1	5	5	-3

6. Построить по «точкам» график функции:

а) $y=x^2-2$; *в)* $y=\frac{1}{x}$; *д)* $y=x+\frac{1}{x}$;

б) $y=x^3$; *г)* $y=|x-3|$; *е)* $y=\frac{x^2+1}{x^2-4}$.

7. Построить график функции $y=[x]+1$.

---

8. Вычислить значения $f(0)$, $f(2)$, $f(5)$, $f(\sqrt{2})$, если:

$$f(x)=\begin{cases} x-2, & x\ge 2 \\ 0, & x<2 \end{cases}.$$

9. Функция задается формулой $y=\dfrac{x-2}{x+3}$. Заполните следующую таблицу:

x	0	1	3				12	–4	–2
y				0	0,5	2			

10. Координата $x(t)$ точки, движущейся по прямой с постоянным ускорением a и имеющей в начальный момент $t=0$ начальную координату x_0 и начальную скорость ϑ_0, определяется формулой $x(t)=\dfrac{at^2}{2}+\vartheta_0 t+x_0$. Определить значения ускорения, начальной координаты и начальной скорости точки, если в моменты времени $t=0$, $t=1$, $t=2$ координаты точки равны соответственно 1, 3, 7.

11. Составить таблицу значений и построить график функции, заданной формулой $y=x^2-4x$, $-3\le x\le 3$. Какова область значений этой функции?

§ 3. Элементарное исследование функций

Одной из главных задач математического анализа является изучение функций. Изучить данную функцию — это значит охарактеризовать ход ее изменения при изменении независимой переменной.

Средствами элементарной математики для функции $f(x)$ с областью определения $D(f)$ в большинстве случаев можно определить следующие характеристики:

1) нули и знак функции;
2) интервалы возрастания, убывания;
3) ограниченность или неограниченность;
4) четность или нечетность;
5) периодичность.

1. Нули функции и знак функции.

Определение 1. Значение $x_0\in D(f)$, при котором функция $f(x)$ обращается в нуль, называется *нулем функции*, т. е. нули функции являются корнями уравнения $f(x)=0$.

Пример 1. Рассмотрим функцию $y=x^2-1$. Ясно, что нулями этой функции являются $x=-1$ и $x=1$.

Пример 2. Рассмотрим функцию $y=x^2-1$, $2\le x\le 3$. В заданной области определения этой функции не имеется нулей, так как корни уравнения $x^2-1=0$, т. е. $x=\pm1$ не принадлежат отрезку $[2;3]$.

В интервале, на котором значения функции положительны, график функции располагается над осью OX, а в интервале, на котором значения отрицательны, график располагается ниже оси OX. Такие интервалы называются *промежутками знакопостоянства функции*. В нулях функции график имеет общую точку с осью OX. На рис. 28 изображен график функции, значения которой на интервале $(x_0;x_1)$ отрицательны, а на интервале $(x_1;x_3)$ положительны. Число $x=x_1$ является нулем этой функции.

2. Монотонные функции. Пусть функция задана графически кривой (рис. 28).

Из рисунка видно, что на участке от $x=x_0$ до $x=x_2$ кривая поднимается вверх, т. е. большим значениям x соответствуют большие значения y. В этом случае говорят, что функция возрастает. В то же время на участке от $x=x_2$ до $x=x_3$ кривая идет вниз, так что большим значениям x соответствуют меньшие значения y. В этом случае функция убывает.

Введем теперь точные определения понятий возрастания и убывания функции.

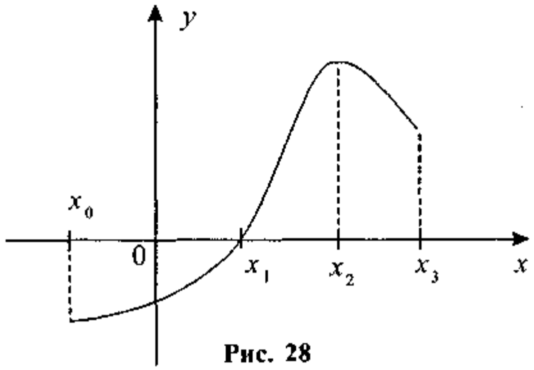
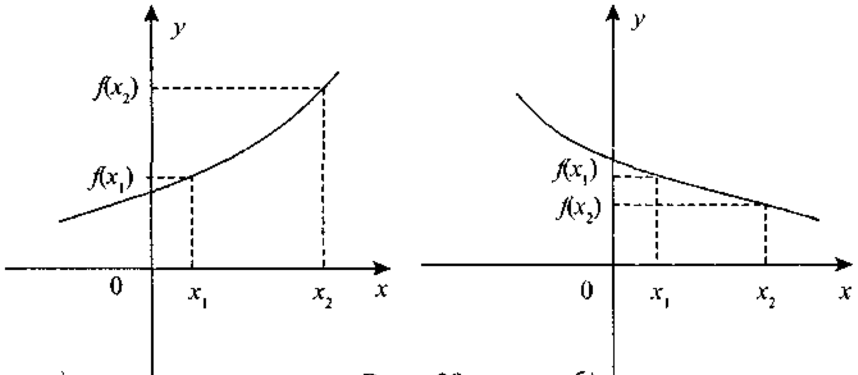


Рис. 28



а) **Рис. 29** *б)*

О п р е д е л е н и е 2. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (соответственно *убывающей*) на множестве D, если для любых двух значений x_1, x_2 из D из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$).

Таким образом, функция $f(x)$ возрастает на множестве D (соответственно убывает), если большему значению аргумента соответствует большее (соответственно меньшее) значение функции (рис. 29 *а*, *б*).

О п р е д е л е н и е 3. Функция $f(x)$ называется *нестрого возрастающей* (соответственно *нестрого убывающей*) на множестве D, если из $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in D$ следует неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) \ge f(x_2)$).

Графики нестрого возрастающих (нестрого убывающих) функций могут содержать как участки возрастания (убывания), так и горизонтальные участки, т. е. линии, параллельные оси абсцисс.

Функции, возрастающие или убывающие на множестве D, называются *монотонными* на D, а функции нестрого возрастающие или нестрого убывающие на множестве D, называются *нестрого монотонными* на D.

П р и м е р 3. Рассмотрим функцию $y = x^3$. Покажем, что она возрастает на $(-\infty; +\infty)$. Пусть $x_2 > x_1$, $x_1, x_2 \in (-\infty; +\infty)$. Имеем:

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1 \cdot x_2 + x_1^2) .$$

Квадратный трехчлен $x_2^2 + x_1 \cdot x_2 + x_1^2 = (x_2 + \frac{1}{2}x_1)^2 + \frac{3}{4}x_1^2$ положителен при любых действительных значениях x_1 и x_2. Кроме того,

множитель $x_2 - x_1 > 0$, так как $x_2 > x_1$. Поэтому разность $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Таким образом, из $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) > f(x_1)$, что и доказывает возрастание рассматриваемой функции.

При доказательстве монотонности функций полезны следующие общие утверждения:

1) Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на множестве D, то для любого числа c функция $f(x) + c$ тоже возрастает (убывает) на D;

2) Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на множестве D и число $c > 0$, то функция $cf(x)$ тоже возрастает (убывает) на D;

3) Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на множестве D, то функция $-f(x)$ убывает (возрастает) на D;

4) Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) и сохраняет знак на множестве D, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ убывает (возрастает) на D;

5) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ возрастают (убывают) на множестве D, то их сумма $f(x) + g(x)$ тоже возрастает (убывает) на D;

6) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ возрастают (убывают) и неотрицательны на множестве D, то их произведение $f(x) \cdot g(x)$ тоже возрастает (убывает) на D;

7) Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на множестве D, неотрицательна на этом множестве и n — натуральное число, то функция $f(x)^n$ тоже возрастает (убывает) на D.

Все эти утверждения непосредственно вытекают из свойств неравенств и определения возрастания и убывания функций. Например, докажем утверждение 4).

Пусть $x_2 > x_1$, $x_2, x_1 \in D$, $f(x)$ возрастает на множестве D и $f(x) > 0$ на D. Тогда имеем:

$$\frac{1}{f(x_2)} - \frac{1}{f(x_1)} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_2) \cdot f(x_1)} < 0,$$

так как $f(x_2) > f(x_1)$. Следовательно, при $x_2 > x_1$ имеет место неравенство $\dfrac{1}{f(x_2)} < \dfrac{1}{f(x_1)}$. Это означает, что функция $\dfrac{1}{f(x)}$ убывает на множестве D. Аналогично доказываются случаи, когда $f(x)$ возрастает на D и $f(x) < 0$; $f(x)$ убывает на D и $f(x) > 0$; $f(x)$ убывает на D и $f(x) < 0$.

П р и м е р 4. Докажем, что функция $f(x)=\frac{1}{x^3}$ убывает на $(0;+\infty)$.

Действительно, в силу примера 3 функция x^3 является возрастающей на $(-\infty;+\infty)$. На интервале $(0;+\infty)$ она также возрастает и положительна. Тогда из утверждения 4) следует, что функция $\frac{1}{x^3}$ убывает на $(0;+\infty)$.

3. Ограниченные функции.

О п р е д е л е н и е 4. Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной* на множестве D, если существует такое положительное число K, при котором для всех значений аргумента x из D имеет место неравенство $|f(x)|<K$.

В частности, если функция ограничена в естественной области определения, то говорят, что она ограниченная функция.

П р и м е р 5. Функция $y=\frac{x^2}{x^2+1}$ ограничена на $(-\infty;+\infty)$ (ограниченная функция), так как при всех действительных значениях x имеет место неравенство $\left|\frac{x^2}{x^2+1}\right|<1$.

Поскольку неравенство $|f(x)|<K$ равносильно неравенствам $-K<f(x)<K$, то ограниченность функции $f(x)$ на множестве D геометрически означает, что точки графика функции $y=f(x)$, соответствующие всем x из D, лежат между двумя прямыми: $y=-K$ и $y=K$, параллельными оси OX (рис. 30).

Если нельзя найти такое число K, чтобы неравенство $|f(x)|<K$ выполнялось для всех $x\in D$, то функция $f(x)$ называется *неограниченной* на множестве D. В этом случае, каково бы ни было число K, всегда найдется такое значение x_1 аргумента x из D, для которого будет выполнено неравенство $|f(x_1)|>K$.

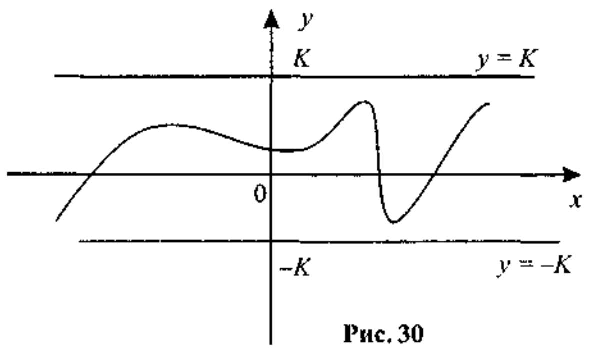


Рис. 30

Для неограниченной функции не существует полосы $-K<f(x)<K$, внутри которой был бы целиком расположен график этой функции.

Пример 6. Функция $f(x)=\frac{1}{x}$ является неограниченной на $(0;+\infty)$.

Действительно, возьмем любое число $K>0$. Положим $x_1=\frac{1}{K+1}$. Число x_1 принадлежит $(0;+\infty)$. Кроме того, имеет место неравенство $|f(x_1)|=\left|\frac{1}{x_1}\right|=K+1>K$. Это означает, что данная функция неограниченная.

Введем еще понятия функций, ограниченных сверху, снизу.

О п р е д е л е н и е 5. Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной сверху* (*снизу*) на множестве D, если найдется такое число K, что для всех x из D выполняется неравенство $f(x)<K$ ($f(x)>K$).

Ограниченность сверху (снизу) для функции $y=f(x)$ геометрически означает, что точки графика, соответствующие всем x из D, лежат ниже (выше) прямой $y=K$, параллельной оси OX (рис. 31 *а*, *б*).

Отметим, что функция $y=f(x)$ является ограниченной на множестве D тогда и только тогда, когда она ограничена на D одновременно и сверху, и снизу.

Однако и среди неограниченных функций можно указать ограниченные сверху (или снизу) функции. Например, функция $f(x)=-x^2$ не является ограниченной на всей числовой прямой (неограниченная функция). В то же время она ограничена сверху, так как для всех x выполняется неравенство $-x^2<1$.

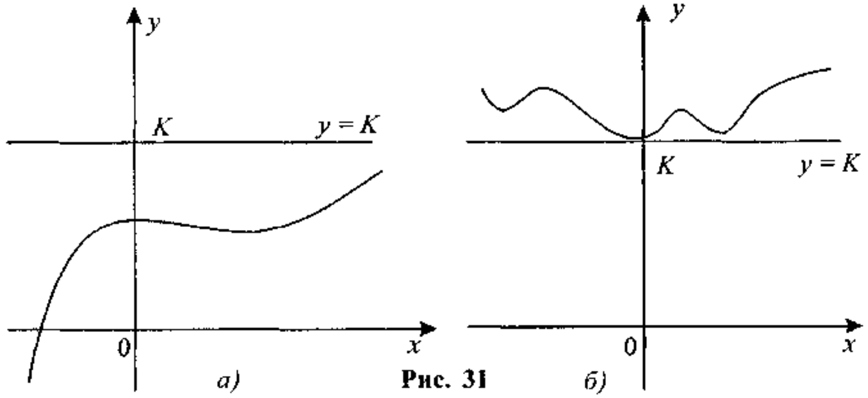


Рис. 31

4. Четные и нечетные функции. Введем сначала понятие симметричного числового множества.

О п р е д е л е н и е 6. Числовое множество D называется *симметричным относительно начала координат*, если для любого x из D число $-x$ также принадлежит множеству D.

Примерами таких множеств могут служить: множество всех целых чисел, любой отрезок $[-a; a]$ или интервал $(-a; a)$.

О п р е д е л е н и е 7. Функция $f(x)$, определенная на симметричном относительно начала координат множестве D, называется *четной* на этом множестве, если для всех x из D имеет место равенство $f(-x) = f(x)$.

Таким образом, функция $f(x)$ будет четной, если при замене значения аргумента x на значение $-x$ функция не меняет своего значения.

П р и м е р 7. Функции $y=x^2$, $y=|x|$, $x\in(-\infty; +\infty)$; $y=\sqrt{1-x^2}$, $x\in(-1; 1)$ являются четными.

График четной функции всегда располагается симметрично относительно оси OY. Действительно, если $y=f(x)$ — четная функция, то в силу равенства $f(x)=f(-x)$ графику этой функции вместе с точкой $M(x; f(x))$ принадлежит и точка $M'(-x; f(x))$, симметричная точке M относительно оси OY (рис. 32).

О п р е д е л е н и е 8. Функция $f(x)$, заданная на симметричном относительно начала координат множестве D, называется *нечетной* на этом множестве, если для всех x из D имеет место равенство $f(-x) = -f(x)$.

Таким образом, если функция $f(x)$ нечетная, то при значениях аргумента, отличающихся только знаком, соответствующие значения функции тоже будут отличаться только знаком.

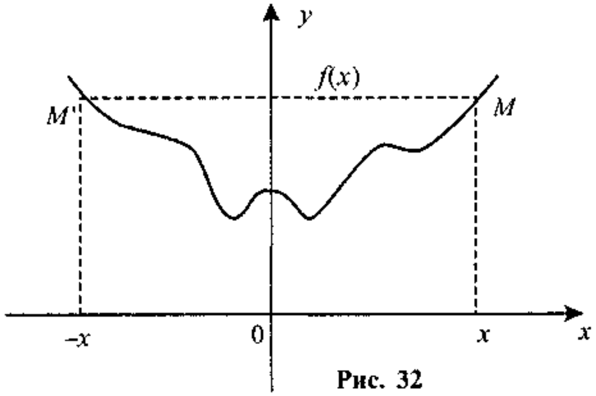


Рис. 32

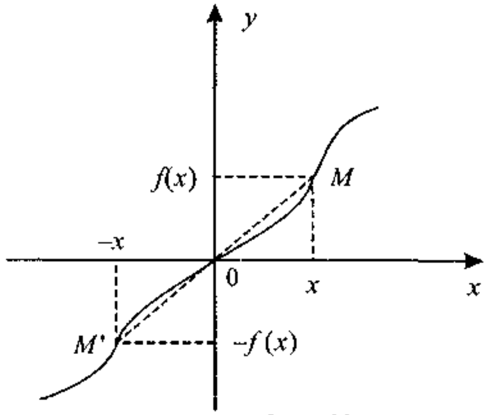


Рис. 33

П р и м е р 8. Функции $y=x$, $y=x^3$, $y=x^5-x$ являются нечетными на $(-\infty; +\infty)$.

График нечетной функции $y=f(x)$ всегда располагается симметрично относительно начала координат, так как вместе с точкой $M(x; f(x))$ этого графика ему будет принадлежать и точка $M'(-x; -f(x))$, симметричная точке M относительно начала координат (рис. 33).

Отметим, что если нечетная функция $f(x)$ определена в точке $x=0$, то ее значение в этой точке равно нулю. Действительно, имеем $f(0)=-f(0)$, откуда следует, что $f(0)=0$. Таким образом, если нечетная функция $f(x)$ определена при $x=0$, то ее график проходит через начало координат (рис. 33).

Не следует думать, что каждая функция есть либо четная, либо нечетная. Если область определения функции является несимметричной относительно начала координат, то говорить о четности или нечетности этой функции бессмысленно. Например, функция $y=x^2$, $0\le x\le 1$ не относится ни к четным, ни к нечетным функциям.

На симметричных множествах также не каждая функция является четной или нечетной. Например, функция $y=2x+3$, $x\in(-\infty; +\infty)$ не является четной и не является нечетной функцией.

Относительно четных и нечетных функций имеют место следующие утверждения:

1) сумма или разность двух четных (нечетных) функций есть функция четная (нечетная);

2) произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная;

3) произведение четной функции на нечетную есть функция нечетная.

В сформулированных утверждениях имеется в виду, что функции рассматриваются на одном и том же симметричном относительно начала координат множестве.

Докажем, например, утверждение относительно произведения четной и нечетной функции. Пусть $F(x)=f(x)\cdot g(x)$, где $f(x)$ — четная функция, $g(x)$ — нечетная функция, заданные на симметричном относительно начала координат множестве D. Тогда при всех $x \in D$ $F(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot(-g(x))=-f(x)\cdot g(x)=-F(x)$. Равенство $F(-x)=-F(x)$ означает, что $F(x)$ — нечетная функция на множестве D.

5. Периодические функции. В природе часто встречаются процессы, которые повторяются по истечении некоторого постоянного промежутка времени. Такие процессы называются периодическими. Например, периодически меняются времена года. При изучении периодических процессов важную роль играют периодические функции. Значения этих функций повторяются через известный промежуток изменения аргумента, который называют периодом.

Дадим теперь точное определение этих понятий.

Определение 9. Число T называется *периодом функции* $f(x)$, если для любого x из области определения функции выполнены равенства $f(x-T)=f(x)=f(x+T)$.

Из этого определения следует, что если T — период функции $f(x)$, то вместе с x области определения функции должны принадлежать и числа: $x-T,\ x+T,\ x-2T,\ x+2T,\ \ldots$.

Определение 10. Функция $f(x)$ называется *периодической,* если она имеет период $T \neq 0$.

Из определений 9 и 10 вытекает, что областью определения периодической функции всегда является неограниченное множество.

Пример 9. В § 2 настоящей главы было дано определение функции, называемой функцией Дирихле. Эта функция является периодической, причем любое отличное от нуля рациональное число является ее периодом.

Действительно, пусть T — произвольное рациональное число, $T\neq 0$. Для рационального значения x числа $x-T$ и $x+T$ тоже являются рациональными. Тогда в силу определения функции Дирихле имеют место равенства $D(x-T)=D(x)=D(x+T)=1$.

Если x — иррациональное число, то и числа $x-T,\ x+T$ будут иррациональными. Поэтому из определения функции Дирихле следует, что $D(x-T)=D(x)=D(x+T)=0$. Таким образом, для всех действительных значений x выполнены равенства $D(x-T)=D(x)=$ $=D(x+T)$.

Как видно из этого примера, у функции Дирихле имеется бесконечно много различных, не кратных друг другу периодов. При этом среди ее положительных периодов нельзя найти наименьший, так как среди положительных рациональных чисел нет наименьшего.

Если некоторая периодическая функция имеет наименьший положительный период, то этот период называют *основным*.

Пример 10. Покажем, что функция $f(x)=x-[x]$ периодическая и найдем ее основной период (данную функцию называют дробной частью числа x и обозначают через $\{x\}$).

При прибавлении к x целого числа m имеем: $[x+m]=[x]+m$. Поэтому $f(x+m)=(x+m)-[x+m]=(x+m)-[x]-m=x-[x]=f(x)$ (то же самое получится, если рассматривать разность $x-m$). Следовательно, любое не равное нулю целое число m является периодом данной функции. Наименьшим из положительных целых чисел является число 1. Покажем, что это число — основной период функции. Будем следовать от противного. Пусть число $T\,(0<T<1)$ является периодом рассматриваемой функции. Тогда

$$f(x+T)=(x+T)-[x+T]=f(x)=x-[x]\,.$$

При $x=0$ получаем, что $T-[T]=0$ или $T=[T]$.

Так как $0<T<1$, то $[T]=0$, откуда $T=0$. Это противоречит условию $T>0$. Таким образом, у функции нет положительного периода, меньшего 1. Это означает, что основной период функции равен 1.

При исследовании периодических функций полезны следующие утверждения:

1) если T — период функции $f(x)$, то и число $-T$ период этой функции;

2) если T_1 и T_2 — периоды для $f(x)$, то число $T_1 + T_2$ также период для $f(x)$;

3) если T — период для $f(x)$, то при любом целом n число $n\cdot T$ также является периодом для $f(x)$;

4) если T основной период функции $f(x)$, то все остальные периоды этой функции будут кратны числу T.

Докажем, например, утверждение 4). При этом будем использовать результаты предыдущих утверждений.

В силу утверждения 1) доказательство достаточно привести для положительных периодов функции. Пусть T_1 — период функции $f(x)$. Тогда $T_1 > 0$, $T_1 > T$, где T — основной период. Очевидно, существует такое натуральное число n, что

$$n \cdot T \le T_1 < (n+1) \cdot T \;.$$

Из утверждений 1) – 3) вытекает, что число $-n \cdot T$, а потому и число $T_1 - nT$ — периоды функции $f(x)$. При этом

$$0 \le T_1 - nT < T \;.$$

Так как T — основной период, то число $T_1 - nT$ не может быть меньшим, чем T положительным периодом. Значит, $T_1 - nT = 0$, откуда $T_1 = nT$, т. е. T_1 является кратным числу T.

График периодической функции $f(x)$ с положительным периодом T на всей области определения можно легко получить, если известен график этой функции на каком-либо промежутке $[a;\, a+T)$. Для этого нужно осуществить параллельные переносы (определение см. в § 5 данной главы) этой части графика вдоль оси абсцисс на $n \cdot T$ $(n \in N)$ единиц вправо и влево (рис. 34).

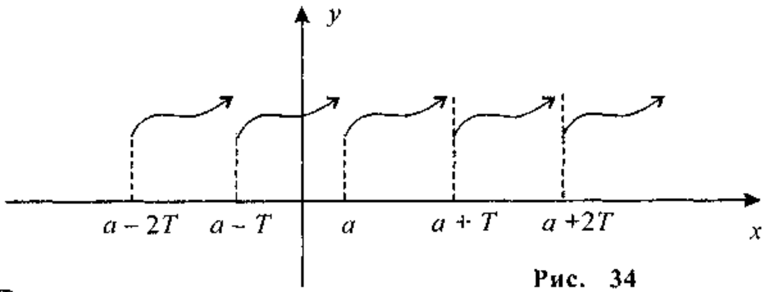


Рис. 34

Вопросы и задания

1. Назвать основные характеристики функции.
2. Что называется нулем функции ?
3. Дать определение убывающей функции.
4. Дать определение нестрого возрастающей функции.
5. Какие функции называются монотонными ?
6. Какая функция называется неограниченной ?
7. Какая функция называется ограниченной снизу ?
8. Дать определение четной, нечетной функции.
9. График какой функции всегда симметричен относительно начала координат ?
10. Сформулировать основные утверждения относительно четных и нечетных функций.
11. Что называется периодом функции ?
12. Какая функция называется периодической ?
13. Что называют основным периодом функции ?
14. Сформулировать основные утверждения относительно периодических функций.

Упражнения

1. Найти нули функции:

а) $f(x) = x^2 - 9$; г) $f(x) = \sqrt{x-1}$;

б) $f(x) = x^2 - 5x + 6$; д) $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-4}$;

в) $f(x) = |x| - 2$; е) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$.

2. Доказать, что функция:

а) $y = 3x + 2$ возрастающая на $(-\infty; +\infty)$;

б) $y = -4x + 3$ убывающая на $(-\infty; +\infty)$;

в) $y = kx + b$ на $(-\infty; +\infty)$ возрастает, если $k>0$ и убывает, если $k < 0$ (k, b — числа);

г) $y = \dfrac{2}{x+3}$ убывающая на $(-\infty; -3)$;

д) $y = \dfrac{3}{3-x}$ возрастающая на $(3;\ +\infty)$;

е) $y = \dfrac{x+2}{x+5}$ возрастающая на $(0;\ +\infty)$.

3. Найти интервалы возрастания и убывания функции:

а) $y = x^2 - 6x + 5$; в) $y = \dfrac{3}{x+1}$;

б) $y = x^2 - 4x + 4$; г) $y = |x-3| + 2$.

4. Доказать, что функция $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ ограничена на $(-\infty; +\infty)$.

5. Доказать, что функция $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ ограничена на $(-\infty; +\infty)$.

6. Доказать, что функция $y = -\dfrac{1}{x^2}$ в своей области определения ограничена сверху, но не ограничена снизу.

7. Доказать, что функция $y = x^2 - 8x + 7$ на $(-\infty; +\infty)$ ограничена снизу, но не ограничена сверху.

8. Определить, какие из указанных ниже функций являются четными и какие являются нечетными:

а) $f(x)=x^4-x^2+5$; г) $f(x)=x^5-x^3+x$;

б) $f(x)=(x-1)^2$; д) $f(x)=x^4+x^3$;

в) $f(x)=|x|-x^2+1$; е) $f(x)=x+3$.

9. Доказать, что функция Дирихле (определение см. в § 2) является четной функцией.

10. Пусть $f(x)$ — нечетная функция и $f(x)=-x^2,\ x\geq 0$. Постройте график функции $f(x)$.

11. Определить, какие из указанных ниже функций являются периодическими:

а) $y=x-2$; в) $y=\{x\}+3$; д) $y=\{2x\}$;

б) $y=1$; г) $y=2\cdot\{x\}$; е) $y=[x]$.

12. Числа $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{6}$ являются периодами функции $f(x)$. Доказать, что число $\frac{11}{12}$ также является периодом для $f(x)$.

13. Найти основной период функции:

а) $y=\{x\}+1$; б) $y=\left\{\frac{x}{2}\right\}$; в) $y=\{2x\}$; г) $y=\left\{\frac{x}{2}\right\}+\{2x\}$.

---

14. Найти нули функции:

а) $f(x)=x^2-8$; в) $f(x)=|x-1|-1$;

б) $f(x)=x^2-8x+7$; г) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$.

15. Доказать, что функция

а) $y=-2x+1$ убывающая на $(-\infty;+\infty)$;

б) $y=-\dfrac{3}{x+2}$ возрастающая на $(-2;+\infty)$;

в) $y=x^2+4$ возрастающая на $(0;+\infty)$.

16. Доказать, что функция $y=-x^2+9x-8$ ограничена сверху, но не ограничена снизу.

17. Определите, какие из указанных ниже функций являются четными и какие являются нечетными:

а) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$; в) $f(x)=|x-1|$;

б) $f(x)=(x^6-1)^2$; г) $f(x)=\dfrac{1}{x^3-x}$.

18. Найти основной период функции:

а) $y=\{3x\}$; в) $y=\{x\}-1$;

б) $y=5\{x\}$; г) $y=\left\{\frac{x}{4}\right\}+2\{x\}$.

§ 4. Понятие сложной функции. Обратная функция

1. Сложная функция. В математическом анализе очень часто приходится из данных функций образовывать новые функции более сложной структуры. Одним из способов образования новых функций является способ композиции. Он заключается в следующем. Пусть $t=g(x)$ — функция с областью определения D, а $y=f(t)$ — функция аргумента t с областью определения D_1, причем значения функции $t=g(x)$ лежат в области определения D_1 функции $y=f(t)$, т. е.

$$E(g)\subset D_1(f).$$

В этом случае каждому значению $x=x_0\in D$ соответствует некоторое значение $t=t_0=g(x_0)\in D_1$, а значению $t=t_0$ в свою очередь соответствует некоторое значение $y=y_0=f(t_0)$.

Если теперь значению $x=x_0$ поставить в соответствие полученное значение $y=y_0$, то на множестве D определится новая функция от переменной x

$$y=F(x).$$

Такая функция называется *сложной функцией* и ее символически записывают в виде

$$y=f(g(x))\quad (\text{или } y=(f\circ g)(x)).$$

Если функции $f(t)$ и $g(x)$ заданы своими аналитическими выражениями, то для получения аналитического выражения композиции $f(g(x))$ этих функций нужно вместо аргумента t в выражении $f(t)$ подставить выражение $g(x)$.

П р и м е р 1. Пусть $f(t)=\sqrt{1-t}$, $D_1=(-\infty\ ;\ 1]$, $g(x)=\sqrt{x}$, $D=[0\ ;\ 1]$. Нетрудно проверить, что область значений функции $g(x)$ есть множество $E(g)=[0\ ;\ 1]$. Так как $E(g)\subset D_1$, то функции $f(t)$ и $g(x)$ определяют на множестве D сложную функцию вида $f(g(x))=\sqrt{1-\sqrt{x}}$.

П р и м е р 2. Пусть $f(t)=\sqrt{t}$, $g(x)=-x^2-1$. При каждом действительном значении x соответствующее значение $t=g(x)=-x^2-1<0$. Но так как для значений $t<0$ функция $f(t)$ не определена, то ни на каком числовом множестве заданные функции не определяют сложную функцию $f(g(x))$.

На практике обычно требуется найти аналитическое выражение для композиции функций $f(x)$ и $g(x)$ от одного аргумента x, подразумевая при этом, что область значений функции $g(x)$ лежит в области определения функции $f(x)$.

П р и м е р 3. Найдем аналитическое выражение $f(g(x))$ для композиции функций $f(x)=x^2+x$ и $g(x)=x-1$.

Для этого заменим в выражении x^2+x аргумент x на выражение $x-1$. Тогда получим новое выражение $(x-1)^2+(x-1)$, т. е. $f(g(x))=$ $=(x-1)^2+x-1=x^2-x$.

П р и м е р 4. Пусть $f(x)=x^2$. Найдем выражение для $f(2-x)$.

В данном примере подразумевается, что кроме функции $f(x)$ еще задается функция $g(x)=2-x$ и требуется найти аналитическое выражение для сложной функции $f(g(x))=f(2-x)$. Заменяя в выражении для $f(x)$ переменную x на $2-x$ получим $f(2-x)=(2-x)^2=$ $=x^2-4x+4$.

2. Обратная функция. В § 1 было отмечено, что многие величины взаимосвязаны. Например, по длине стороны квадрата можно однозначно вычислить его периметр и наоборот, по известному периметру квадрата можно однозначно определить длину его стороны. Такого рода зависимости величин называются взаимно обратными. Однако не всегда для данной функциональной зависимости величин существует обратная функциональная зависимость.

П р и м е р 5. Пусть величины x и y связаны соотношением $y=x^2$. Тогда по каждому числовому значению величины x можно однозначно вычислить значение величины y. В то же время по заданному числовому значению y нельзя однозначно определить соответствующее значение x. Например, при $y=4$ переменная x может быть равна 2 или -2.

Сформулируем условие, при котором зависимости величин являются взаимно обратными.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть функция $f(x)$ с областью определения D такая, что для всех x_1, $x_2\in D$ из соотношения $x_1\neq x_2$ следует $f(x_1)\neq f(x_2)$. Тогда функция $f(x)$ называется *обратимой* на множестве D.

П р и м е р 6. Рассмотрим функцию $f(x)=3x+2$, $D=(-\infty;+\infty)$. Если x_1, $x_2\in D$ и $x_1\neq x_2$, то верны следующие соотношения: $3x_1\neq 3x_2$, $3x_1+2\neq 3x_2+2$, т. е. $f(x_1)\neq f(x_2)$. Это означает, что данная функция является обратимой.

Пусть функция $f(x)$ обратима на $D(f)$. Тогда для каждого $y\in E(f)$ однозначно определено $x\in D(f)$ такое, что $f(x)=y$. Действительно, если предположить, что некоторому $y\in E(f)$ соответствуют два значения x_1 и x_2, причем $x_1\neq x_2$, то имеют место равенства $f(x_1)=$ $=y=f(x_2)$, противоречащие условию обратимости $f(x)$ (т. е. тому, что $f(x_1)\neq f(x_2)$). Таким образом, если функция $f(x)$ обратима на $D(f)$, то на множестве $E(f)$ может быть определена новая функция со значениями из $D(f)$. Такую функцию называют обратной к функции $f(x)$ и обозначают через $f^{-1}(y)$. Введем теперь точное определение обратной функции.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть функция $f(x)$ обратима на $D(f)$. Функция $f^{-1}(y)$, заданная на множестве $E(f)$, называется *обратной* к $f(x)$, если из выполнения равенства $f(x)=y$, $x\in D(f)$, $y\in E(f)$ следует выполнение равенства $f^{-1}(y)=x$ при тех же значениях x и y. При этом $f(x)$ и $f^{-1}(y)$ называются *взаимно обратными функциями*.

П р и м е р 7. Пусть $f(x)=3x+2$. Как было показано в примере 6, данная функция обратима на $(-\infty;+\infty)$. Найдем обратную функцию. Для этого заменим $f(x)$ на y. Тогда получим уравнение $y=3x+2$. Решая его относительно переменной x, находим, что $x=\dfrac{y-2}{3}$. Значит, обратная функция имеет вид $f^{-1}(y)=\dfrac{y-2}{3}$.

Следует отметить, что не каждая функция имеет обратную (например, функция $y=x^2$, $x\in(-\infty;+\infty)$ не имеет обратной). Но можно указать условие (достаточное), при выполнении которого заданная функция имеет обратную. Именно, если функция $y=f(x)$ является монотонной в своей области определения $D(f)$, то существует обратная к ней функция $f^{-1}(y)$, определенная на множестве значений $E(f)$.

Действительно, пусть $f(x)$ — монотонная функция, x_1, $x_2 \in D(f)$ и $x_1 \neq x_2$ (например, $x_1 < x_2$). Тогда, если $f(x)$ — возрастающая функция, то $f(x_1) < f(x_2)$, если $f(x)$ — убывающая функция, то $f(x_1) > f(x_2)$. В обоих случаях $f(x_1) \neq f(x_2)$. Это означает, что $f(x)$ — обратимая функция. Отсюда следует, что существует обратная к ней функция $f^{-1}(y)$.

Пример 8. Функция $f(x) = x^2$, $x \in (0\ ;\ +\infty)$ является возрастающей. Поэтому существует обратная к ней функция. Нетрудно проверить, что она имеет вид $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, $y \in (0\ ;\ +\infty)$.

Пусть $f^{-1}(y)$ — функция обратная к $f(x)$ (т. е. $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$). Тогда, если точка $M(x; y)$ лежит на графике функции $f(x)$, то точка $N(y; x)$ будет лежать на графике функции $f^{-1}(y)$. Но поскольку эти точки располагаются симметрично относительно прямой $y = x$, то и графики функций $f(x)$ и $f^{-1}(y)$ будут симметричными относительно прямой $y = x$.

На практике не принято обозначать аргумент функции буквой y, а саму функцию через x. Поэтому в записи обратной к $y = f(x)$ функции аргумент, как обычно, обозначают через x, а саму обратную функцию через y, т. е. $y = f^{-1}(x)$ — функция, обратная к $y = f(x)$. В дальнейшем мы также будем придерживаться этих обозначений.

На рисунке 35 изображены графики функции $y = 2x - 3$ и обратной к ней функции $y = \dfrac{x+3}{2}$.

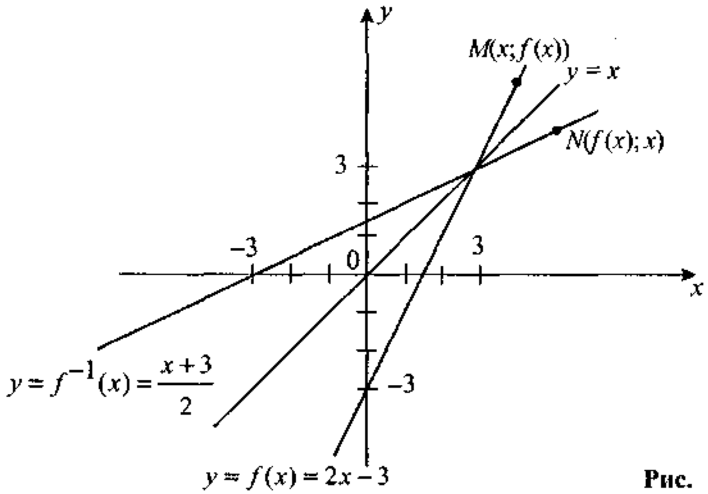


Рис. 35

Вопросы и задания

1. При каких условиях из двух функций можно построить одну сложную функцию? Ответить на этот же вопрос, если даны три функции.
2. Какая функция называется обратимой?
3. Дать определение обратной функции.
4. При каком достаточном условии функция имеет обратную?
5. Как на координатной плоскости располагаются графики взаимно обратных функций?

Упражнения

1. Пусть $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Найти выражение для:

а) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; *б)* $f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$; *в)* $f(x-1)$; *г)* $f(x+1)$.

2. Пусть $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2 + 1$. Найти выражение для:

а) $\dfrac{f(x^2)}{g(x)-1}$; *в)* $f(g(x))$;

б) $f(x) + 3g(x) + 3x - 2$; *г)* $g(f(x))$.

3. Пусть $f(x+1) = x^2 - 1$. Найти $f(x)$.

4. Пусть $f(x) + 3 \cdot f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}$. Найти $f(x)$.

5. Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[0; 1]$. Найти область определения функции:

а) $f(x^2)$; *б)* $f(x+1)$; *в)* $f(3x)$; *г)* $f\left(\dfrac{|x|}{x}\right)$.

6. Найти обратную функцию для:

а) $f(x) = 3x + 3$; *в)* $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1\ ;\ 0) \\ x^2, & x \in [0\ ;\ 1]\ ; \end{cases}$

б) $f(x) = x^2$, $x \in (-\infty\ ;\ 0]$; *г)* $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $x \in [1\ ;\ +\infty)$.

---

7. Пусть $f(x) = x^2 - 1$. Найти выражение для:

а) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; *б)* $f(2x)$; *в)* $f(x^2 - 1)$; *г)* $f(x+1) - f(x-1)$.

8. Пусть $f(x)=x^2$, $g(x)=x-1$. Найти выражение для:

а) $f(g(x))$; *б)* $g(f(x))$.

9. Пусть $f(x+3)=x^2-4$. Найти $f(x)$.

10. Пусть $2f(x)+f(\frac{1}{x})=x$. Найти $f(x)$.

11. Функция $f(x)$ задана на отрезке $[-1;0]$. Найти область определения функции:

а) $f(-x^2)$; *б)* $f(x+1)$; *в)* $f\left(\frac{x}{2}\right)$; *г)* $f\left(\frac{|x|}{x}\right)$.

12. Найти обратную функцию для:

а) $f(x)=x^2+1$, $x\in(0;+\infty)$;

б) $f(x)=x^2-4x+5$, $x\in(-\infty;2)$.

§ 5. Простейшие преобразования графиков

1. Простейшие геометрические преобразования.

1) Перемещение прямой. Рассмотрим координатную прямую l с началом в точке O, и пусть на этой прямой при некотором геометрическом преобразовании каждая точка перемещается на a единиц. При этом считаем, что точки перемещаются в положительном направлении, если $a>0$, перемещаются в отрицательном направлении, если $a<0$ и остаются на месте, если $a=0$. В указанных случаях точка M с координатой x переходит в точку M' с координатой $x'=x+a$ (рис. 36). Такое геометрическое преобразование называется *перемещением прямой на а единиц.* Координатно его можно задать по формуле: $x'=x+a$.

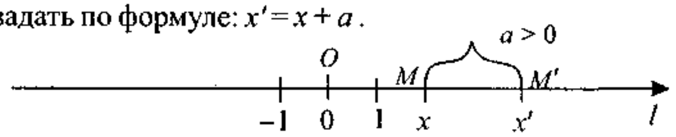


Рис. 36

2) Растяжение прямой. Рассмотрим геометрическое преобразование, при котором точка O прямой l остается неподвижной, а любая другая точка M переходит в точку M' так, что при $k>0$ точки M и M' находятся по одну сторону от точки O, но

расстояние $|OM'|$ от точки O до точки M' получается из расстояния $|OM|$ от точки O до точки M умножением последнего на k. Поэтому при $k>1$ это расстояние увеличивается, а при $0<k<1$ расстояние уменьшается (рис. 37 *а*, *б*). Такое геометрическое преобразование называется *растяжением прямой от точки O с коэффициентом* $k>0$.

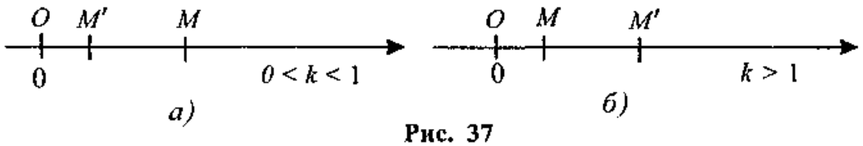


Рис. 37

При $k<0$ считаем, что сначала происходит растяжение прямой от точки O с коэффициентом $|k|$, а затем симметрия относительно точки O (рис. 38). В частном случае, когда $k=-1$ точки M и M' будут симметричны относительно точки O. Такое геометрическое преобразование называется *растяжением прямой от точки O с коэффициентом* $k<0$.

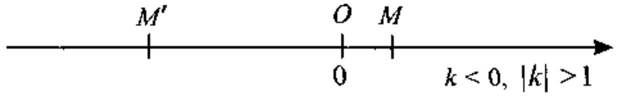


Рис. 38

В каждом из разобранных случаев ($k>0$ и $k<0$) точка M с координатой x переходит в точку с координатой $x'=k\cdot x$. Поэтому растяжение прямой от точки O с коэффициентом k ($k\neq0$) можно задать координатно следующей формулой: $x'=k\cdot x$.

3) Параллельный перенос. Пусть при геометрическом преобразовании плоскости начало системы координат точка O переходит в точку $N(a;b)$, а любая другая точка $M(x;y)$ плоскости переходит в точку $M'(x';y')$ так, что направленные отрезки (вектора) параллельны, имеют одинаковую длину и направление (т. е. равны). Такое геометрическое преобразование плоскости называют *параллельным переносом* (рис. 39).

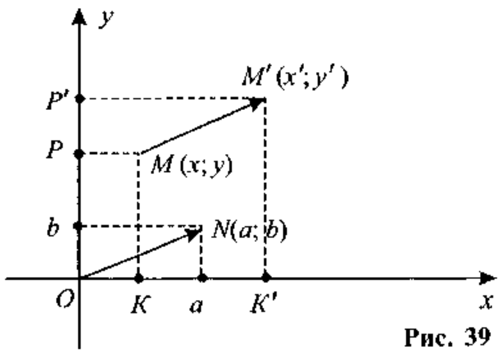


Рис. 39

Из рисунка 39 видно, что координаты точек K и K' на оси абсцисс отличаются на a единиц ($x' - x = a$), а координаты точек P и P' на оси ординат отличаются на b единиц ($y' - y = b$). Поэтому при параллельном переносе точка $M(x;\ y)$ переходит в точку $M'(x';\ y') = M'(x + a;\ y + b)$ и данное геометрическое преобразование координатно задается следующими формулами: $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$.

4) Гомотетия. Рассмотрим геометрическое преобразование плоскости, при котором точка $M(x; y)$ переходит в точку $M'(x'; y')$, лежащую на луче OM, причем $|OM'| = k \cdot |OM|$, $k > 0$.

При этом преобразовании обе координаты точки M умножаются на k, т. е. точка M' имеет координаты $x' = kx$, $y' = ky$ (рис. 40). Такое геометрическое преобразование плоскости называется *гомотетией с центром в точке* O (0;0) *и коэффициентом* $k > 0$.

Координатное задание этого преобразования имеет вид $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$.

Указанные формулы верны и для гомотетии с коэффициентом $k < 0$. В частном случае, когда $k = -1$, получаются следующие формулы $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$, задающие центральную симметрию относительно точки O.

5) Растяжение плоскости. Пусть l — прямая линия, $k \neq 0$. Геометрическое преобразование плоскости, при котором происходит растяжение каждой прямой, перпендикулярной l, от точки пересечения A этих прямых с коэффициентом k, называется *растяжением плоскости от прямой* l *с коэффициентом* k (рис. 41 *а*, *б*).

Значит, при этом преобразовании каждая точка M плоскости переходит в точку M' такую, что M и M' лежат на одной прямой

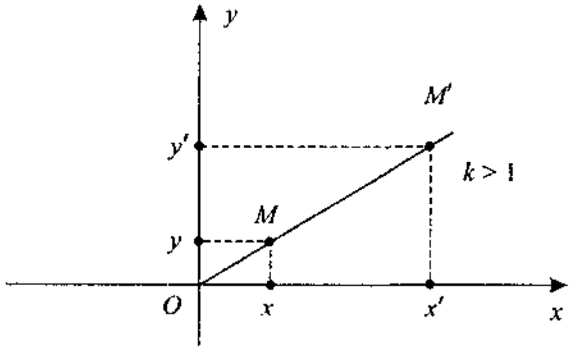


Рис. 40

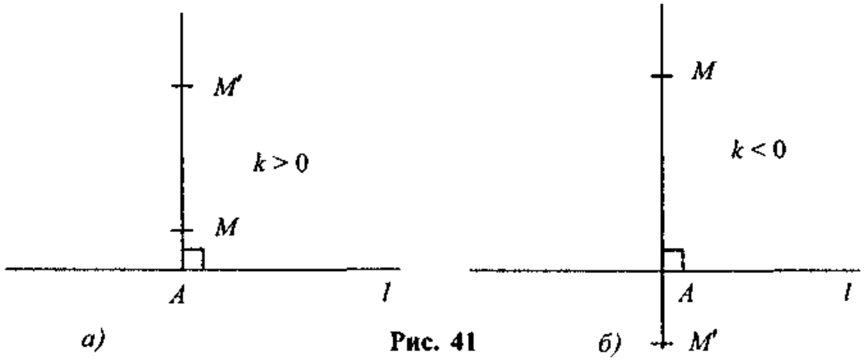


Рис. 41

перпендикулярной l и выполняется равенство $|AM'| = |k| \cdot |AM|$, причем точки M и M' находятся по одну сторону относительно l, если $k > 0$ и по разные стороны относительно l, если $k < 0$. В частном случае, когда прямая l совпадает с осью абсцисс, данное преобразование координатно можно выразить формулами $\begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases}$.

При растяжении плоскости с коэффициентом k относительно прямой l, совпадающей с осью ординат, получаем следующие формулы: $\begin{cases} x' = kx \\ y' = y \end{cases}$. Следует заметить, что при $k = -1$ растяжение плоскости от прямой l является симметрией относительно этой прямой, так как в этом случае точки M и M' лежат по разные стороны от l и выполняется равенство $|AM'| = |AM|$. Например, растяжение плоскости от оси абсцисс при $k = -1$ означает симметрию относительно оси абсцисс и точка $M(x; y)$ переходит в точку $M'(x; -y)$.

2. Преобразование графиков. Рассмотренные выше геометрические преобразования позволяют по графику заданной функции $y = f(x)$ получить (относительно одной системы координат) графики сходных функций одного из следующих видов:

$$y = f(x - a) + b,\ \ y = m \cdot f\left(\frac{x}{k}\right),$$

где a, b, m, k — некоторые постоянные, $m \neq 0$, $k \neq 0$.

Теорема 1. Пусть задан график функции $y = f(x)$. Тогда график функции вида $f(x - a) + b$ получается из графика функции $f(x)$ с помощью параллельного переноса, при котором начало координат точка $O(0; 0)$ переходит в точку $N(a; b)$.

Доказательство. Пусть точка $M(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. Это означает, что $y_0 = f(x_0)$. Тогда точка $M'(x_0+a;\ y_0+b)$ будет принадлежать графику функции $y = f(x-a) + b$. Действительно, подставив в последнем соотношении вместо x значение $x_0 + a$, а вместо y значение $y_0 + b$, получим верное равенство:

$$y_0 + b = f(x_0 + a - a) + b \text{ или } y_0 = f(x_0).$$

Обратно, если точка $M'(x_0 + a; y_0 + b)$ принадлежит графику функции $y = f(x - a) + b$, то $y_0 + b = f(x_0 + a - a) + b$. Откуда $y_0 = f(x_0)$, т. е. точка $M(x_0; y_0)$ будет принадлежать графику функции $y = f(x)$.

Далее, было отмечено ранее, что при параллельном переносе, который переводит начало координат $O(0; 0)$ в точку $N(a; b)$, любая другая точка $M(x_0; y_0)$ переходит в точку $M'(x_0 + a; y_0 + b)$. Значит, при таком параллельном переносе каждая точка $M(x_0; y_0)$ графика функции $y = f(x)$ переходит в точку $M'(x_0 + a; y_0 + b)$ графика функции $y = f(x-a) + b$, т. е. график функции $y = f(x)$ переходит в график функции $y = f(x-a) + b$.

Пример 1. Пусть дан график функции $y = f(x)$ (рис. 42). Построим график функции $y = f(x-2) + 3$. Для этого проведем через точку $N(a; b) = N(2; 3)$ вспомогательные оси координат NX' и NY', параллельные соответственно осям OX и OY. Затем осуществим параллельный перенос, при котором точка $O(0; 0)$ перейдет в точку $N(2; 3)$. Согласно теореме 1 при этом параллельном переносе точки графика функции $y = f(x)$ перейдут в точки кривой, которая является графиком функции $y = f(x-2) + 3$.

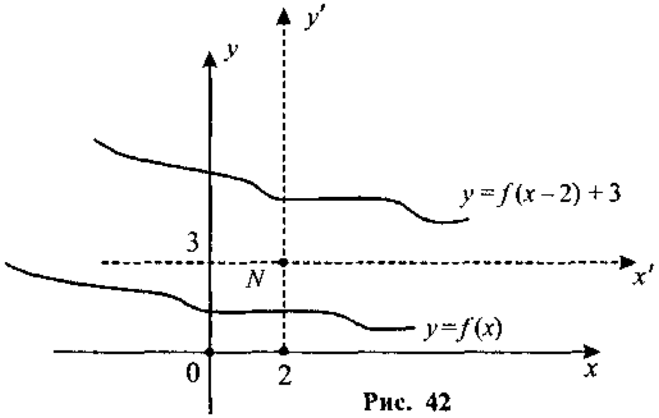


Рис. 42

Теорема 2. Пусть задан график функции $y = f(x)$. Тогда график функции вида $m f\left(\frac{x}{k}\right)$, где $m \neq 0$, $k \neq 0$ получается из графика функции $f(x)$ с помощью растяжения от оси абсцисс с коэффициентом m и последующим растяжением от оси ординат с коэффициентом k.

Доказательство. Пусть точка $M(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, т. е. $y_0 = f(x_0)$. Рассмотрим соотношение $y = mf\left(\frac{x}{k}\right)$ и подставим вместо x значение $k \cdot x_0$, а вместо y значение $m \cdot y_0$.

Тогда получится верное равенство $m \cdot y_0 = mf\left(\frac{k \cdot x_0}{k}\right)$ или $y_0 = f(x_0)$.

Обратно, если точка $M'(kx_0; my_0)$ принадлежит графику функции $y = m \cdot f\left(\frac{x}{k}\right)$, то $m \cdot y_0 = mf\left(\frac{k \cdot x_0}{k}\right)$. Откуда $y_0 = f(x_0)$, т. е. точка $M(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. Поскольку точка $M'(kx_0; my_0)$ получается из точки $M(x_0; y_0)$ с помощью растяжения от оси абсцисс с коэффициентом m и последующим растяжением от оси ординат с коэффициентом k, то при этих преобразованиях график функции $y = f(x)$ переходит в график функции $y = m \cdot f\left(\frac{x}{k}\right)$.

Пример 2. Пусть дан график функции $y = f(x)$ (рис. 43). Построим график функции $y = 3 \cdot f(2x)$. Для этой цели график функции $y = f(x)$ подвергнем растяжению от оси абсцисс с коэффициен-

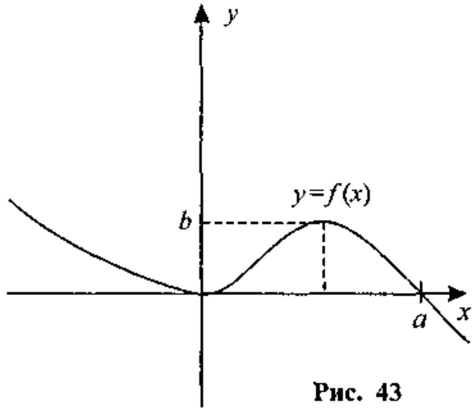


Рис. 43

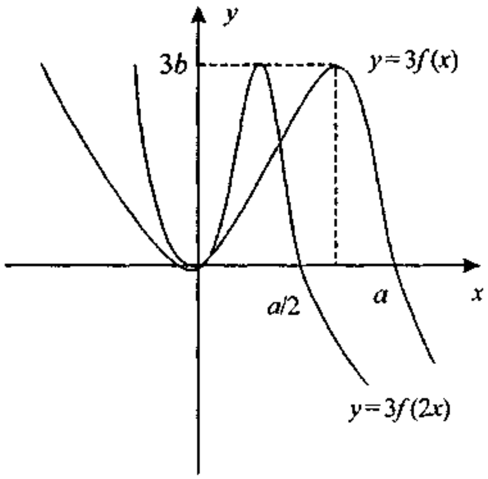


Рис. 44

том $m = 3$. Затем полученный график подвергнем растяжению от оси ординат с коэффициентом $k = \frac{1}{2}$. В итоге получим график функции $y = 3 \cdot f(2x)$ (рис. 44).

Ранее мы отметили, что при $k = -1$ растяжение от прямой есть симметрия относительно этой прямой. Поэтому из теоремы 2 можно вывести следующие следствия.

Следствие 1. График функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью симметрии относительно оси абсцисс.

Следствие 2. График функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью симметрии относительно оси ординат.

Следствие 3. График функции $y = -f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью композиции симметрий относительно осей координат (т. е. с помощью симметрии относительно начала координат).

Вопросы и задания

1. Назвать известные вам простейшие геометрические преобразования.
2. В чем заключается растяжение прямой от некоторой точки O с коэффициентом k?
3. Какое геометрическое преобразование плоскости называется параллельным переносом?
4. Что такое гомотетия?

5. Как координатно задается центральная симметрия относительно начала координат?
6. В чем заключается растяжение плоскости от заданной прямой с заданным коэффициентом?
7. С помощью какого геометрического преобразования из графика функции $y = f(x)$ можно получить график функции $y = f(x - a)$?
8. С помощью какого геометрического преобразования из графика функции $y = f(x)$ можно получить график функции $y = f\left(\frac{x}{k}\right)$?

Упражнения

1. При параллельном переносе начало координат переходит в точку $A(2; -3)$. В какие точки на плоскости при этом преобразовании перейдут точки $M(1; 1)$, $N(2; 0)$, $A(2; -3)$?
2. При параллельном переносе точка $A(1; 2)$ переходит в точку $B(2; 3)$. В какие точки на плоскости при этом преобразовании перейдут точки $O(0; 0)$, $M(1; 0)$, $N(0; 1)$?
3. Доказать, что геометрическое преобразование $\begin{cases} x' = k \cdot (x - a) + a \\ y' = k \cdot (y - b) + b \end{cases}$ является гомотетией с коэффициентом k и центром в точке $A(a; b)$.
4. Какое геометрическое преобразование плоскости задается формулами:

   а) $\begin{cases} x' = 3x - 2, \\ y' = 3y + 1; \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} x' = 2(x - 1) + 3, \\ y' = 2(y + 1) - 3. \end{cases}$

5. По заданному графику функции $y = f(x)$ (рис. 45) построить графики следующих функций:

   а) $y = f(x) + 1$;
   б) $y = f(x - 1) + 1$;
   в) $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$;
   г) $y = 3 \cdot f(x)$;
   д) $y = 3 \cdot f(x) - 2$;

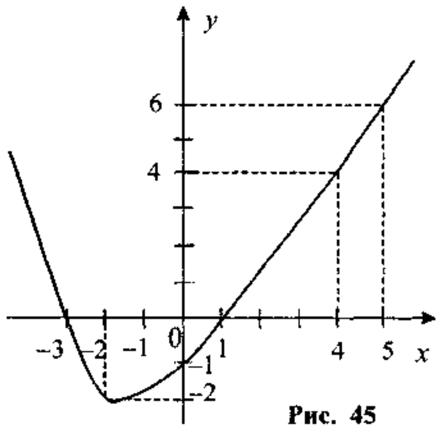


Рис. 45

е) $y = 2 \cdot f(x-1) + 1$; ж) $y = f(2x) - 3$; з) $y = \frac{1}{2} f(2x)$.

---

6. При параллельном переносе начало координат переходит в точку $A(-1; 1)$. Найти точки, которые при данном преобразовании переходят в точки $B(2; 1)$, $C(1; 2)$, $O(0; 0)$.

7. Описать геометрическое преобразование плоскости, задающееся формулами:

а) $\begin{cases} x' = 4x \\ y' = 4y \end{cases}$; в) $\begin{cases} x' = 4\cdot(x-2) \\ y' = 4\cdot(x+2) \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x' = 4x - 1 \\ y' = 4x + 1 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x' = 4(x-2)+1 \\ y' = 4(x+2)-1 \end{cases}$.

8. При параллельном переносе точка $A(1; 1)$ переходит в точку $B(-1; -1)$. Найти точки, которые при данном преобразовании переходят в точки $O(0; 0)$, $C(2; 3)$, $D(-1; 1)$.

9. По заданному графику функции $y = f(x)$ (рис. 46) постройте графики следующих функций:

а) $y = f(x-1)$; г) $y = -f(-x)$; ж) $y = 2f(x) - 3$;

б) $y = f(2x)$; д) $y = f\left(\frac{x}{3}\right)$; з) $y = 2f(x-1) + 5$.

в) $y = -f(x)$; е) $y = 3f\left(\frac{x}{3}\right)$;

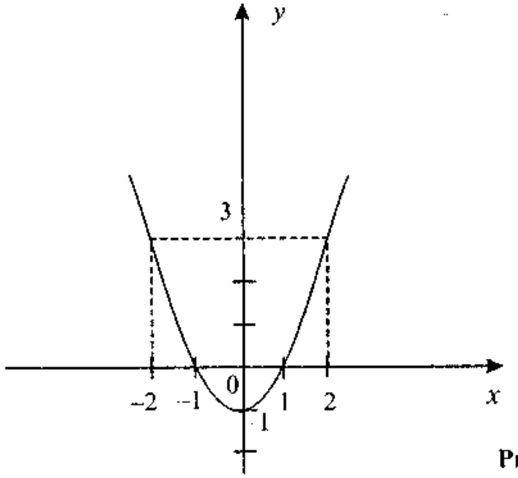


Рис. 46

§ 6. Простейшие функции и их графики

1. Линейная функция. Функция вида $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа, называется *линейной*. Из предыдущего параграфа можно сделать заключение, что график линейной функции получается из графика функции $y = kx$ путем сдвига на b единиц вдоль оси ординат. Поэтому вначале рассмотрим график функции $y = kx$.

Пусть $k > 0$, а l — прямая линия, проходящая через I и III четверти координатной плоскости, начало координат и точку $A(1; k)$ (рис. 47). На прямой l обозначим точки $M(x_1; y_1)$ и $N(x_2; y_2)$, симметричные относительно начала координат. Тогда треугольники AOB и MOE подобны и имеет место равенство $\frac{|AB|}{|ME|} = \frac{|OB|}{|OE|}$.

Учитывая, что $|AB| = k$, $|OB| = 1$, $|OE| = x_1$, $|ME| = y_1$ получим, что $\frac{k}{y_1} = \frac{1}{x_1}$, откуда $y_1 = kx_1$. Такое же равенство имеет место и для координат точки N. Действительно, так как $x_2 = -x_1$, $y_2 = -y_1$, то из $y_1 = k \cdot x_1$ следует, что $-y_2 = k \cdot (-x_2)$. Отсюда $y_2 = k \cdot x_2$. Следовательно, для каждой точки, лежащей на прямой l выполняется равенство вида $y = kx$. Причем, координаты x, y любой точки, не лежащей на l, не удовлетворяют равенству $y = kx$. Поэтому прямая l является графиком функции $y = kx$.

В случае $k < 0$ рассмотрим прямую l, проходящую через II и IV четверти координатной плоскости, начало координат и точку $A(1; k)$

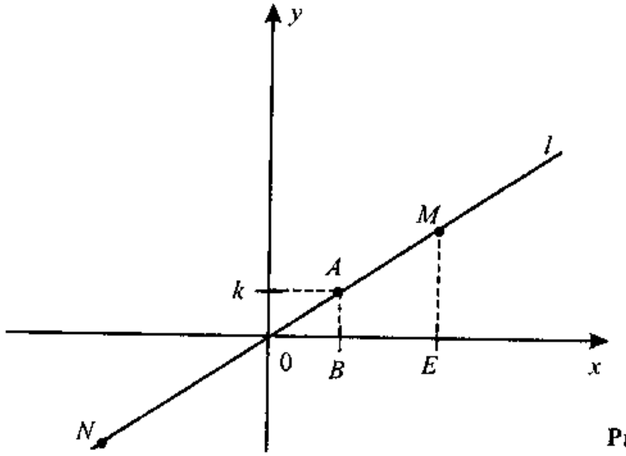


Рис. 47

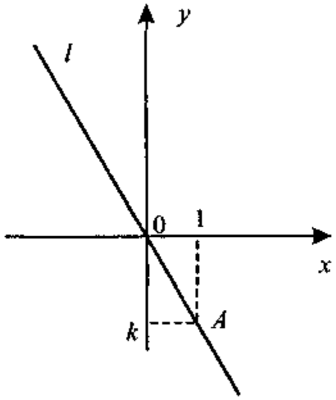


Рис. 48

(рис. 48). Используя аналогичные рассуждения, приведенные в случае $k>0$, нетрудно показать, что для каждой точки $M(x;y)$, лежащей на прямой l выполняется равенство $y=kx$. В то же время, координаты x, y любой точки, не лежащей на l, не удовлетворяют равенству $y=kx$. Поэтому данная прямая l является графиком функции $y=kx$, $k<0$ (см. рис. 48).

Наконец, при $k=0$ прямая $y=0$, проходящая через начало координат и точку $A(1;k)$ является графиком функции $y=kx$.

Таким образом, при всех действительных значениях k графиком функции $y=kx$ является прямая линия, проходящая через начало координат $O(0;0)$ и точку $A(1;k)$ (точек, не лежащих на этой прямой, график функции $y=kx$ не имеет, поскольку каждой точке x_0 оси абсцисс соответствует точка $M(x_0;kx_0)$ данной прямой, а другая точка координатной плоскости по определению понятия функции уже не может соответствовать x_0).

График линейной функции $y=kx+b$ получается из графика функции $y=kx$ путем сдвига последнего на b единиц вдоль оси ординат. Поэтому графики функций $y=kx+b$ и $y=kx$ параллельны друг другу (вообще, графики всех линейных функций, имеющих одинаковый коэффициент k, параллельны друг другу. Этот коэффициент можно определить с помощью угла между прямой, изображающей график и осью абсцисс. По этой причине, число k называют *угловым коэффициентом прямой*).

Следует отметить, что при $k>0$ прямая $y=kx+b$ образует острый угол с осью абсцисс, а при $k<0$ она образует тупой угол с осью абсцисс (рис. 49, 50).

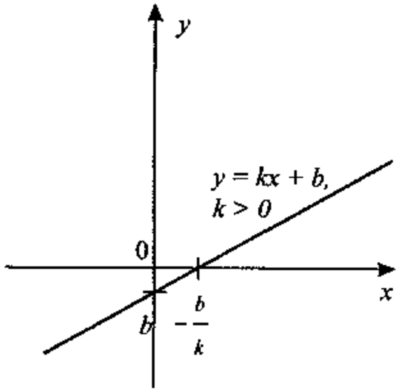


Рис. 49

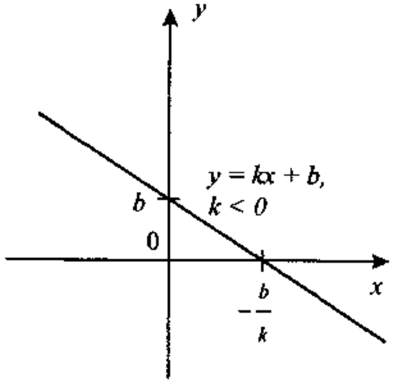


Рис. 50

Через любую точку $N(a;b)$ можно провести только одну прямую с угловым коэффициентом k. Эта прямая получается из прямой $y=kx$ с помощью параллельного переноса, при котором начало координат $O(0;0)$ переходит в точку $N(a;b)$. В силу теоремы 1 из предыдущего параграфа, уравнение такой прямой имеет вид $y=k(x-a)+b$.

П р и м е р 1. Найдем уравнение прямой, проходящей через точку $N(1;2)$ и имеющей угловой коэффициент $k=3$.

Уравнение искомой прямой имеет вид : $y=3(x-1)+2$, откуда получаем $y=3x-1$.

П р и м е р 2. Найдем уравнение прямой, проходящей через точки $M(1;2)$ и $N(-1;-4)$.

Так как прямая проходит через точку M, то ее уравнение имеет вид $y=k(x-1)+2$.

Точка N также принадлежит этой прямой. Следовательно, уравнение прямой можно записать еще в виде $y=k(x+1)-4$.

Решая систему уравнений $\begin{cases} y=k(x-1)+2 \\ y=k(x+1)-4 \end{cases}$, получаем равенство $-k+2=k-4$, откуда $k=3$. Таким образом, уравнение искомой прямой есть $y=3(x-1)+2$ или $y=3x-1$.

В общем случае, угловой коэффициент k прямой, проходящей через точки $M(x_1;y_1)$ и $N(x_2;y_2)$ выражается по формуле $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (где $x_1 \neq x_2$), а уравнение прямой, проходящей через эти точки, получается из уравнения $y=k(x-x_1)+y_1$ путем замены коэффициента k на $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, т. е. оно имеет вид $y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$.

Рассмотрим теперь свойства линейной функции $y = kx + b$, $k \neq 0$.

1) Область определения функции есть интервал $(-\infty; +\infty)$;

2) Областью значений функции также является интервал $(-\infty; +\infty)$;

3) График функции пересекает ось абсцисс в точке $A\left(-\frac{b}{k};\ 0\right)$, а ось ординат в точке $B(0; b)$;

4) Пусть $k > 0$. Тогда $y > 0$ при $x > -\frac{b}{k}$ и $y < 0$ при $x < -\frac{b}{k}$ (рис. 49). Пусть $k < 0$. Тогда $y > 0$ при $x < -\frac{b}{k}$ и $y < 0$ при $x > -\frac{b}{k}$ (рис.50).

5) При $k > 0$ функция $y = kx + b$ является возрастающей, а при $k < 0$ убывающей.

Докажем, например, что при $k > 0$ функция $y = kx + b$ возрастает. Пусть x_1, x_2 — произвольные значения аргумента и $x_2 > x_1$. Соответствующие им значения функции обозначим через y_1 и y_2. Тогда $y_1 = kx_1 + b$, $y_2 = kx_2 + b$, откуда $y_2 - y_1 = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = kx_2 - kx_1 = k(x_2 - x_1)$.

Так как $k > 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, то $y_2 - y_1 > 0$, т. е. при $k > 0$ из $x_2 > x_1$ следует $y_2 > y_1$. Это означает, что при $k > 0$ функция является возрастающей. Аналогично доказывается, что при $k < 0$ функция $y = kx + b$ убывает.

2. Квадратическая функция. Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — некоторые числа, $a \neq 0$, называется *квадратической*. С помощью простейших геометрических преобразований график квадратической функции можно получить из графика функции $y = x^2$, известной еще из курса средней школы (рис. 51). Действительно, в силу теоремы 2 из предыдущего параграфа с помощью растяжения от оси абсцисс с коэффициентом a из графика функции $y = x^2$ мы получим график функции $y = ax^2$ (рис. 52).

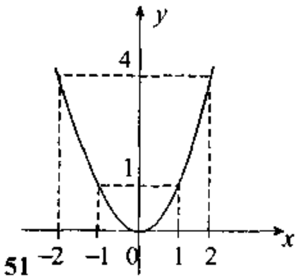


Рис. 51

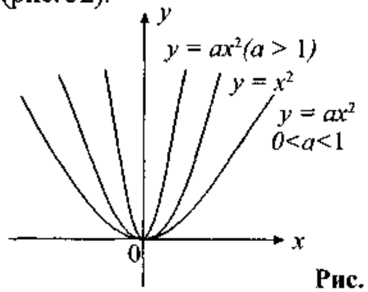


Рис. 52

Рассмотрим теперь общую квадратическую функцию $y = ax^2 + bx + c$. Выделим из трехчлена $ax^2 + bx + c$ квадрат двучлена:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x\cdot\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Значит, $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$. Тогда, используя теорему 1 из предыдущего параграфа, можно сделать заключение, что график функции $y = ax^2 + bx + c$ получается из графика функции $y = ax^2$ с помощью параллельного переноса, при котором начало координат точка $O(0; 0)$ переходит в точку $N\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

П р и м е р 3. Построим график функции $y = 3x^2 + 6x - 1$. Для этого из трехчлена $3x^2 + 6x - 1$ выделим полный квадрат:

$$3x^2 + 6x - 1 = 3(x^2 + 2x) - 1 = 3(x + 1)^2 - 4.$$

В заданной системе координат OXY через точку $N(-1; -4)$ проведем вспомогательные оси координат NX' и NY' и изобразим в этих осях график функции $y = x^2$. Затем с помощью растяжения от оси абсцисс с коэффициентом 3 получаем в этих же осях координат график функции $y = 3x^2$. Полученная линия одновременно будет являться графиком функции $y = 3x^2 + 6x - 1$ в заданной системе координат (рис. 53).

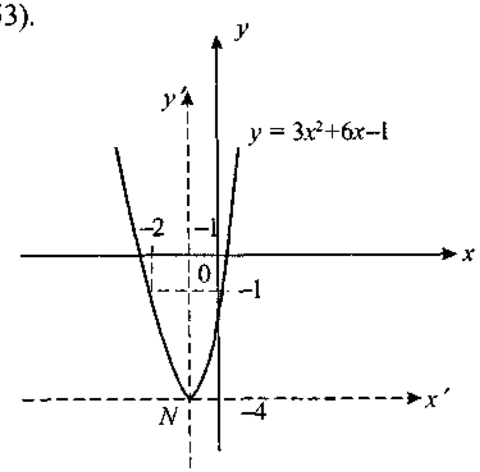


Рис. 53

График квадратической функции $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ как и график функции $y = x^2$ называют *параболой*.

Сформулируем некоторые свойства квадратической функции.

1) Область определения функции есть интервал $(-\infty; +\infty)$;

2) При $x = 0$ получим $y = c$, т. е. график функции пересекает ось ординат в точке $A\ (0;\ c)$. Если $D = b^2 - 4ac > 0$, то $y = 0$ при $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Поэтому график пересекает ось абсцисс (при $D > 0$) в точках $B(x_1;\ 0)$ и $C(x_2;\ 0)$. Если $D = 0$, то $y = 0$ при $x = -\dfrac{b}{2a}$ и график пересекает ось абсцисс только в одной точке $B\left(-\dfrac{b}{2a};\ 0\right)$. Если $D < 0$, то график функции не пересекается с осью абсцисс и располагается выше этой оси при $a > 0$; график функции располагается ниже оси абсцисс при $a < 0$.

3) Вершина параболы (т. е. графика) находится в точке $N\left(-\dfrac{b}{2a};\ \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ ветви направлены вниз.

4) При $a > 0$ функция убывает на промежутке $\left(-\infty\ ;\ -\dfrac{b}{2a}\right]$ и возрастает на промежутке $\left[-\dfrac{b}{2a}\ ;\ +\infty\right)$. Наоборот, при $a < 0$ функция возрастает на промежутке $\left(-\infty\ ;\ -\dfrac{b}{2a}\right]$ и убывает на промежутке $\left[-\dfrac{b}{2a}\ ;\ +\infty\right)$.

5) При $a > 0$ наименьшее значение функции равно $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$ и оно достигается при $x = -\dfrac{b}{2a}$. Наибольшего значения функция не имеет. При $a < 0$ наибольшее значение функции равно $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$ и оно достигается при $x = -\dfrac{b}{2a}$. В этом случае функция не имеет наименьшего значения.

6) График функции симметричен относительно прямой $x = -\dfrac{b}{2a}$ (рис. 54–57).

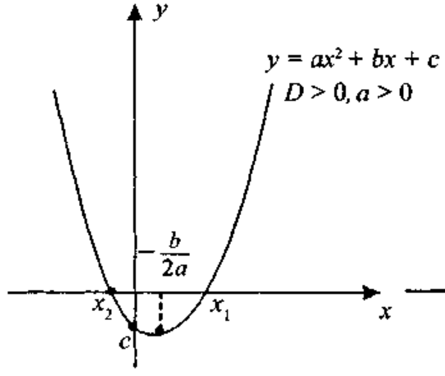


Рис. 54

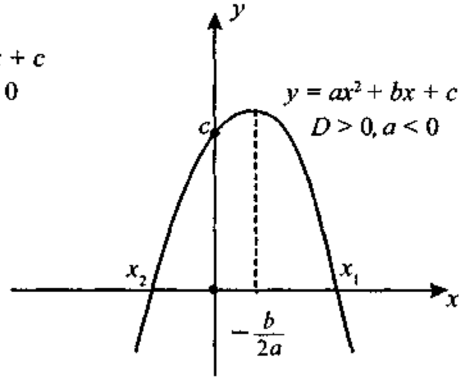


Рис. 55

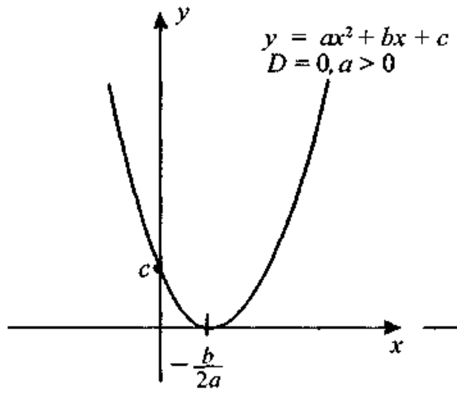


Рис. 56

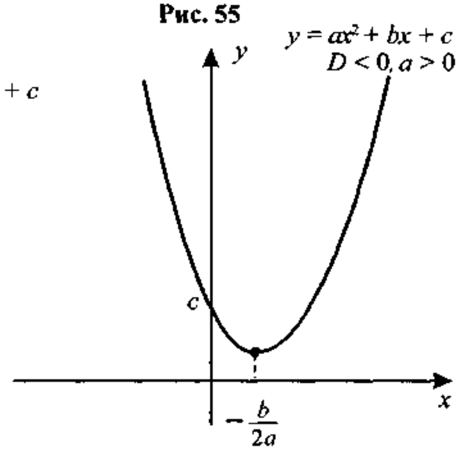


Рис. 57

3. Дробно-линейная функция. *Дробно-линейной функцией* называется функция, являющаяся частным двух линейных функций, т. е. функция вида $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, где a, b, c, d — некоторые числа. Предполагается также, что $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$ (в случае $c = 0$ из формулы получается линейная функция $y = \dfrac{a}{d}x + \dfrac{b}{d}$, которая уже изучена. При $c \neq 0$, но $ad - bc = 0$ имеем равенство $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} = k$, откуда следует, что $y = \dfrac{ax + b}{cx + d} = \dfrac{ckx + dk}{cx + d} = \dfrac{k(cx + d)}{cx + d} = k = \dfrac{a}{c}$ $\left(x \neq -\dfrac{d}{c}\right)$, т. е. в этом случае получается функция вида $y=\dfrac{a}{c}$, где x — любое число, отличное от $-\dfrac{d}{c}$. Графиком такой функции является прямая линия, параллельная оси абсцисс и пересекающая ось ординат в точке $A\left(0;\ \dfrac{a}{c}\right)$, из которой исключена точка $B\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ (рис. 58)).

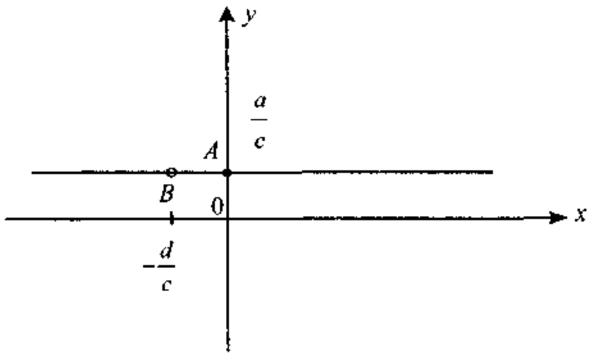


Рис. 58

С помощью простейших геометрических преобразований график дробно-линейной функции можно получить из графика функции $y=\dfrac{1}{x}$, известной еще из курса средней школы (рис. 59). Действительно, с помощью растяжения от оси абсцисс с коэффициентом $k \neq 0$ из графика функции $y=\dfrac{1}{x}$ сначала получим график функции $y=\dfrac{k}{x}$. Далее, имеет место равенство:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{\dfrac{bc-ad}{c^2}}{x+\dfrac{d}{c}}.$$

Следовательно, график дробно-линейной функции получается из графика функции $y=\dfrac{k}{x}$ (где $k=\dfrac{bc-ad}{c^2}$) с помощью параллельного переноса, при котором начало координат точка $O(0;0)$ переходит в точку $N\left(-\dfrac{d}{c};\ \dfrac{a}{c}\right)$.

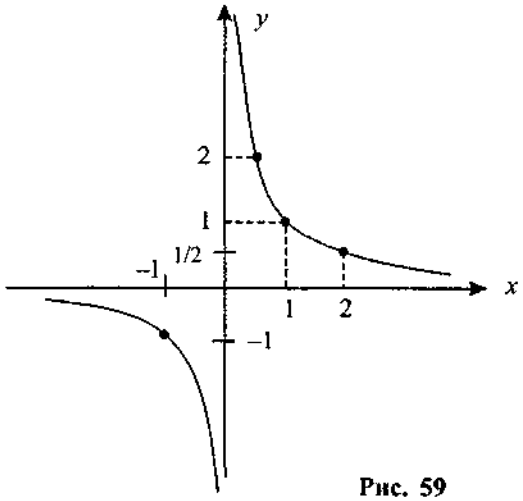


Рис. 59

Пример 4. Рассмотрим функцию $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$. Выделив целую часть от дроби, получим $\dfrac{2x+5}{x+1}=2+\dfrac{3}{x+1}$. Проведем через точку $N(-1;\ 2)$ вспомогательные оси координат NX' и NY', затем построим в этих осях сначала график функции $y=\dfrac{1}{x}$, а потом график функции $y=\dfrac{3}{x}$. Следуя нашей теории, относительно исходной системы координат OXY полученная линия будет одновременно являться графиком функции $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$ (рис. 60).

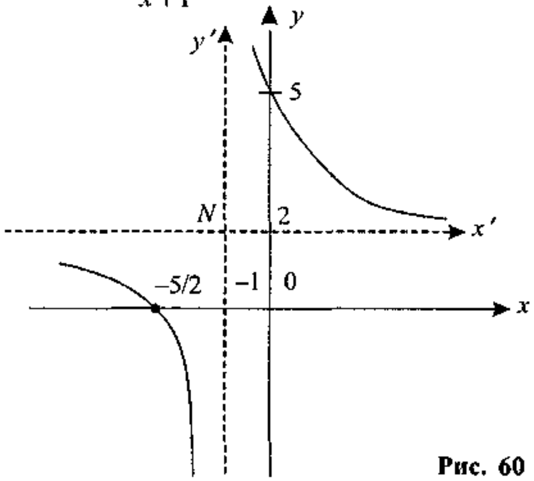


Рис. 60

Отметим теперь некоторые свойства дробно-линейной функции

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$.

1) Область определения функции состоит из двух промежутков: $\left(-\infty\ ;\ -\dfrac{d}{c}\right)$ и $\left(-\dfrac{d}{c}\ ;\ +\infty\right)$;

2) Область значений функции состоит из промежутков $\left(-\infty\ ;\ \dfrac{a}{c}\right)$ и $\left(\dfrac{a}{c}\ ;\ +\infty\right)$;

3) График функции пересекает ось абсцисс в точке $A\left(-\dfrac{b}{a};\ 0\right)$, если $a\neq 0$. Если $a=0,\ b\neq 0$, функция не имеет нулей. С осью ординат график функции пересекается в точке $B\left(0;\ \dfrac{b}{d}\right)$, если $d\neq 0$. Если $d=0$ график не имеет общих точек с осью ординат;

4) Так как $\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{\dfrac{bc-ad}{c^2}}{x+\dfrac{d}{c}}$, то при $bc-ad>0$ функция убывает на каждом из промежутков $\left(-\infty;\ -\dfrac{d}{c}\right)$ и $\left(-\dfrac{d}{c};\ +\infty\right)$, а при $bc-ad<0$ функция возрастает на каждом из этих промежутков (рис. 61, 62).

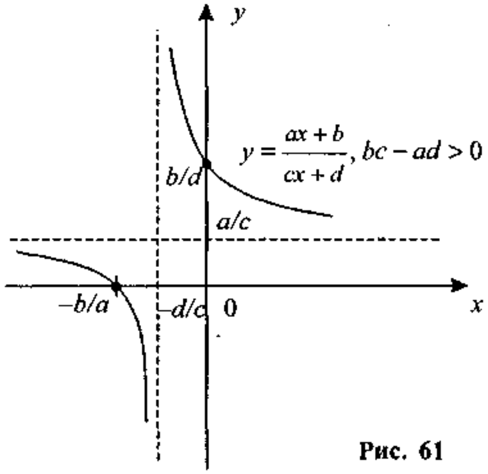


Рис. 61

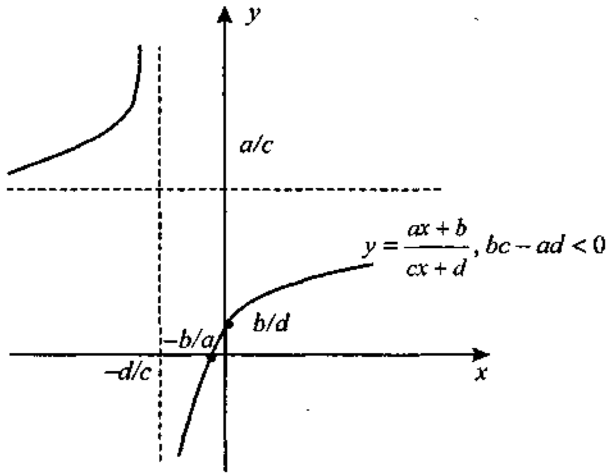


Рис. 62

4. Функции $y=|x|$, $y=[x]$, $y=\{x\}$ и их графики. Рассмотрим функцию $y=|x|$. По определению модуля:

$$|x|=\begin{cases} x, \text{ если } x\geq 0 \\ -x, \text{ если } x<0 \end{cases}.$$

Отсюда следует, что график функции $y=|x|$ в правой полуплоскости $(x\geq 0)$ координатной плоскости совпадает с графиком функции $y=x$, а в левой полуплоскости $(x<0)$ совпадает с графиком функции $y=-x$ (рис. 63).

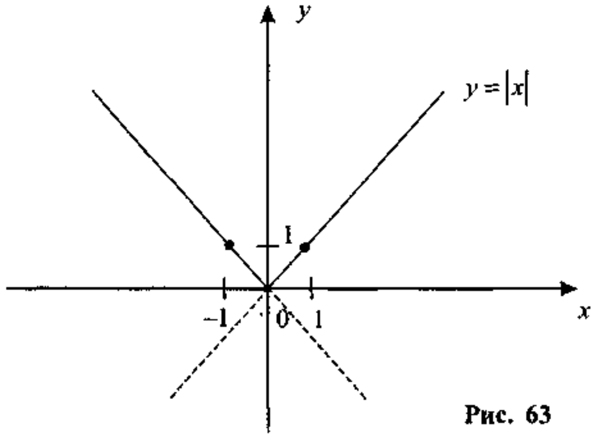


Рис. 63

Сформулируем свойства данной функции:

1) область определения функции есть интервал $(-\infty; +\infty)$;

2) областью значений функции является полуинтервал $[0; +\infty)$;

3) $y = 0$ при $x = 0$, т. е. график функции проходит через начало координат;

4) функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 0]$;

5) функция является четной и ее график симметричен относительно оси ординат (рис. 63).

В § 2 (пункты 3, 4) настоящей главы было дано определение функции $y = [x]$ и показан ее график (рис. 27). Отметим некоторые свойства этой функции:

1) область определения функции есть интервал $(-\infty; +\infty)$;

2) $y = 0$ при $x \in [0; 1)$;

3) при $x \geq 0$ функция принимает неотрицательные значения, а при $x < 0$ значения функции являются отрицательными;

4) на каждом из промежутков $\ldots, [-3;-2), [-2;-1), [-1;0), [0;1), [1;2), [2;3), \ldots$ функция сохраняет постоянное значение, соответственно равное $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, т. е. областью значений функции является множество всех целых чисел;

5) функция является нестрого возрастающей на $(-\infty; +\infty)$;

6) график функции представляет собой ступенчатую линию, состоящую из бесконечного числа отдельных полуотрезков (без правых концов) единичной длины, параллельных оси абсцисс (рис. 27).

Рассмотрим еще свойства функции $y = \{x\}$, определение которой было дано в § 3 (пункт 5) настоящей главы. Там же было показано, что функция является периодической (по определению $\{x\} = x - [x]$):

1) область определения функции есть интервал $(-\infty; +\infty)$;

2) областью значений функции является полуинтервал $[0;1)$. Поэтому функция является ограниченной;

3) $y = 0$, если x — целое число, а при нецелых значениях x значения $y > 0$;

4) функция является периодической и ее основной период равен 1;

5) график функции можно получить, рассмотрев ее сначала на полуинтервале $[0; 1)$, а затем сдвигая полученную на $[0; 1)$ часть графика вдоль оси абсцисс вправо и влево на $1, 2, 3, \ldots$ и т. д. единиц.

Так как для $x \in [0; 1)$ имеем $[x] = 0$, то на $[0;1)$ верно равенство $\{x\} = x$. Значит, графиком функции $y = \{x\}$ на промежутке $[0;1)$ является часть (кусок) биссектрисы первого координатного угла. График функции $y = \{x\}$ во всей ее области определения состоит из бесконечного множества таких же частей (рис. 64).

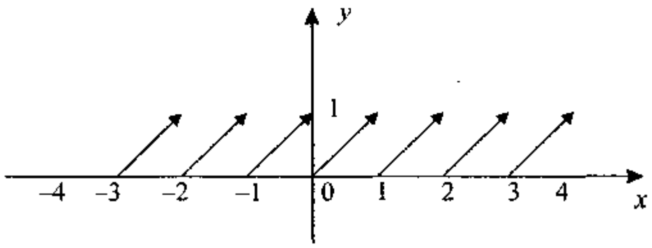


Рис. 64

Вопросы и задания

1. Назвать простейшие виды функций.
2. Сформулировать основные свойства линейной функции.
3. Какая функция называется квадратической? Привести примеры.
4. Сформулировать основные свойства квадратической функции.
5. Какая функция называется дробно-линейной? Сформулировать ее свойства.
6. Какова область значений функций $y = |x|$, $y = [x]$, $y = \{x\}$? Указать интервалы возрастания, убывания этих функций. Какая из указанных функций является четной, какая из них ограниченная функция?

Упражнения

1. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $A(6; -7)$ и $B(-4; 3)$.
2. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $A(1; 0)$.
3. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(2; 1)$ и $B(0; -1)$.
4. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 3)$ и имеющей угловой коэффициент $k = 3$.

5. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;4)$ и параллельной прямой $y=2x-3$.

6. Построить график функции:

а) $y=4x$; б) $y=\frac{1}{2}x-4$; в) $y=-x+1$; г) $y=5$.

7. Написать уравнение параболы, проходящей через точки A, B и C, если:

а) $A(1;1), B(-1;1), C(0;0)$; в) $A(0;-1)$, $B(1;1)$, $C(-1;1)$;

б) $A(1;-3)$, $B(2;-4)$, $C(0;0)$; г) $A(0;3), B(1;0), C(2;-1)$.

8. Построить график функции:

а) $y=2x^2$; в) $y=x^2-4x$; д) $y=2x-x^2$;

б) $y=x^2-4$; г) $y=-x^2+5$; е) $y=x^2-4x+3$.

9. Доказать, что при всех x значения функции:

а) $y=x^2-4x+6$ являются положительными;

б) $y=-x^2+3x-7$ являются отрицательными;

в) $y=3x^2-6x+3$ являются неотрицательными;

г) $y=-x^2-6x-9$ являются неположительными.

10. При каком значении x функция $y=x^2-6x+8$ принимает свое наименьшее значение? Чему равно это значение функции?

11. Построить график функции:

а) $y=\frac{4}{x}$; б) $y=\frac{1}{x-2}$; в) $y=\frac{x}{x+1}$; г) $y=\frac{2x+1}{x-2}$.

12. Функция задана формулой $f(x)=\frac{x-3}{2x-4}$. При каких значениях x:

а) $f(x)=0$; б) $f(x)>0$; в) $f(x)<0$; г) $f(x)>1$.

13. Построить график функции:

а) $y=2|x|$; д) $y=|x-1|+3$; и) $y=\{x\}+1$;

б) $y=-3|x|$; е) $y=-2|x-1|+5$; к) $y=[-x]$;

в) $y=|x|+2$; ж) $y=3[x]$; л) $y=-2\{x\}$;

г) $y=|x-2|$; з) $y=[x+1]$; м) $y=\{x-1\}$.

14. Найти значение углового коэффициента k для линейной функции, график которой проходит через точку $A(-2;4)$ и начало координат.

15. Дан треугольник с вершинами в точках $A(-1;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$. Написать уравнения прямых AB, BC и AC.

16. Функция задана формулой $f(x)=-6x+12$. При каких значениях x:

а) $f(x)=0$; б) $f(x)>0$; в) $f(x)\le 0$; г) $f(x)>2$.

17. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;2)$ и параллельной прямой $y=2x$.

18. Построить график функции:

а) $y=\frac{1}{2}x^2$; в) $y=x^2-2x+3$;

б) $y=(x-3)^2+4$; г) $y=-x^2+4x-4$.

19. Функция задана формулой $f(x)=x^2-5x+6$. При каких значениях x:

а) $f(x)\ge 0$; в) $f(x)=6$;

б) $f(x)<0$; г) $f(x)=-6$.

20. При каком значении x функция $y=-x^2+8x-7$ принимает наибольшее значение? Найти это значение функции.

21. Построить график функции и перечислить ее свойства:

а) $y=-\frac{3}{x}$; б) $y=\frac{4}{x-4}$.

22. Перечислить основные свойства функции:

а) $y=-\{x\}$; б) $y=-[x]$.

23. Построить график функции:

а) $y=x-|x|$; б) $y=x+|x|$.

24. Найти координаты точек пересечения графиков функций $y=-x^2$ и $y=5x-6$. Нарисовать графики заданных функций.

25. При каких значениях a функция $y=ax^2+1$ имеет нули?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. *а*) Задать формулой площадь правильного треугольника как функцию его стороны;

б) В круг радиуса R вписан прямоугольник, одна из сторон которого равна x. Выразить периметр прямоугольника как функцию от x.

2. Найти область определения функции:

а) $y=\dfrac{x-2}{x+4}$; *в*) $y=\dfrac{1}{x^2+2x-8}+\sqrt{x}$;

б) $y=\dfrac{x-2}{x^2+2x-8}$; *г*) $y=\begin{cases} x, & \text{если } x\ge 2 \\ -x, & \text{если } x<0. \end{cases}$

3. Найти область значений функции:

а) $y=\sqrt{x-8}$; *в*) $y=\dfrac{x-7}{x-8}$;

б) $y=\sqrt{-x}-1$; *г*) $y=x^2-6x+5$.

4. Найти промежутки знакопостоянства функции:

а) $y=\dfrac{x-2}{5x}$; *в*) $y=|x|$;

б) $y=\dfrac{9-x^2}{x^2-4x-5}$; *г*) $y=\begin{cases} 0, & \text{если } x\le 0 \\ x, & \text{если } x>0. \end{cases}$

5. Доказать, что функция $y=(x-1)^2$ убывает на $(-\infty;\ 1)$.

6. Найти интервалы возрастания и убывания функции:

а) $y=\dfrac{x-3}{x}$; *в*) $y=x^2-10x+9$;

б) $y=1+\dfrac{2}{x-1}$; *г*) $y=\begin{cases} x, & \text{если } x>2 \\ 0, & \text{если } -2\le x\le 2 \\ -x, & \text{если } x<-2. \end{cases}$

7. Привести пример монотонных функций на $(-\infty;+\infty)$, произведение которых не является монотонной функцией на этом интервале.

8. Доказать, что функция $y=\dfrac{1}{x}$, $x>0$ ограничена снизу, но не ограничена сверху.

9. Доказать четность или нечетность функции:

а) $y=x^5-4x$; *в*) $y=\dfrac{x^2-1}{x^3}$;

б) $y=x^2(x^4-1)$; *г*) $y=\dfrac{|x|+1}{x^2}$.

10. Привести пример функции, которая:

а) не является четной и не является нечетной;

б) является четной и нечетной функцией одновременно.

11. Представить функцию в виде суммы четной и нечетной функций, если:

а) $y=\dfrac{x+2}{|x|}$; *в*) $y=\dfrac{x^3+x^2+x}{x^2+1}$;

б) $y=x^5-x|x|+1$; *г*) $y=f(x)$, где $f(x)$ — произвольная функция, определенная на $(-\infty;+\infty)$.

12. Доказать, что функция $y=\{5x\}$ — периодическая. Найти основной период и построить график заданной функции.

13. Периодическая функция $y=f(x)$ с периодом $T=2$ на промежутке $[0;2)$ совпадает с функцией $y=x^2$. Построить график функции $y=f(x)$.

14. Числа $\dfrac{2}{3}$ и $\dfrac{1}{4}$ являются периодами функции $f(x)$. Доказать, что число $\dfrac{19}{12}$ также является периодом для $f(x)$.

15. Пусть $f(x-2)=x^2-4x$. Найти $f(x)$.

16. Найти выражение для $f(g(x))$, если:

а) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$;

б) $f(x)=\dfrac{x^3}{x-4}$, $g(x)=x+4$.

17. Функция $f(x)$ задана на интервале $(0;2)$. Найти область определения функции:

а) $f(x^2)$; б) $f(2x)$; в) $f(x-1)$; г) $f\left(\dfrac{|x|}{x}\right)$.

18. Найти функцию обратную для $f(x)$ и построить график обратной функции, если:

а) $f(x)=4x-5$;

б) $f(x)=-x^2$, $x\in(0;+\infty)$;

в) $f(x)=x^2-4x+5$, $x\in(2;+\infty)$;

г) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$, $x\in(1;+\infty)$.

19. При параллельном переносе начало координат переходит в точку $A(2;3)$. Найти точки, которые при этом преобразовании переходят в точки $B(4;5)$, $C(2;0)$ и $O(0;0)$.

20. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(2;0)$ и $B(0;2)$.

21. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;3)$ и параллельной прямой $y=2x-5$.

22. Точка $A(-1;2)$ — вершина параболы, являющейся графиком функции $y=x^2+bx+c$. Найти значения b и c.

23. График функции $y=ax^2+bx+c$ проходит через точки $A(1;-1)$, $B(2;2)$, $C(-1;5)$. Найти значения a, b и c.

24. Наименьшее значение функции $y=x^2-4x+c$ равно 3. Найти значение c.

25. Наибольшее значение функции $y=-x^2+bx+2$ равно 6. Найти значение b.

26. Построить график функции:

а) $y=3x-4$; в) $y=-1+\dfrac{x}{2}$;

б) $y=x^2+4x-5$; г) $y=2x^2+7x+3$.

27. Найти точки пересечения графиков функций:
а) $y=x^2$ и $y=x+2$; б) $y=x^4$ и $y=2x^2-1$.

28. Определить значения a, при которых функция $y=ax^2+4x+a$ не имеет нулей.

29. При каких значениях b графики функций $y=x^2+bx-2$ и $y=2x^2-3x+b$ пересекаются в одной точке. Найти координаты этой точки.

30. Доказать, что графики функций $y=-x^2-1$ и $y=x^2+bx+b^2$, где b — любое действительное число, не имеют общих точек пересечения.

31. Пусть $f(x)=x-4$. Построить график функции:

а) $y=f(x)+4$; д) $y=f(4x)$;

б) $y=f(x+4)$; е) $y=|f(x)|$;

в) $y=3f(x)$; ж) $y=f^2(x)$;

г) $y=-f(x)$; з) $y=f^2(x)+4f(x)$.

32. Построить график функции:

а) $y=\dfrac{x-4}{x+5}$; б) $y=x-\dfrac{x^2}{x+1}$.

33. Функция задана формулой $f(x)=\dfrac{4x-8}{3x-9}$. При каких значениях аргумента x

а) значения функции являются положительными;
б) значения функции являются отрицательными?

34. Построить график функции:

а) $y=x\cdot|x|$; в) $y=\big|[x]\big|$;

б) $y=\dfrac{|x-1|}{x-1}$; г) $y=\begin{cases}\{x\}, & \text{если } x\ge 0\\ -\{x\}, & \text{если } x<0.\end{cases}$

ГЛАВА VIII

СТЕПЕННАЯ, ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

§ 1. Степенная функция

Функция, заданная формулой $f(x) = x^{\alpha}$, где x — независимая переменная, α — действительное число, называется *степенной*.

Степенная функция определена при всех $x \in (0; +\infty)$. При некоторых значениях α область определения функции может быть шире, чем $(0;+\infty)$. Например, при $\alpha > 0$ степенная функция определена и при $x = 0$ ($0^{\alpha} = 0$). При целых значениях α формулой $f(x) = x^{\alpha}$ степенная функция определена и для значений $x \in (-\infty; 0)$.

В настоящем параграфе мы рассмотрим основные свойства степенной функции для случая рационального показателя α.

1) Пусть $\alpha = n$ — натуральное число.

При $n = 1$ имеем $f(x) = x$. Свойства такой функции нам уже известны. Пусть $n > 1$. Тогда имеют место следующие свойства функции $y = x^n$:

а) область определения функции есть интервал $(-\infty;+\infty)$;

б) $y = 0$ при $x = 0$, т. е. график функции проходит через начало координат;

в) при четном n область значений функции есть полуинтервал $[0;+\infty)$, а при нечетном n областью значений функции является множество всех действительных чисел, т.е. интервал $(-\infty;+\infty)$;

г) При четном n график функции располагается в I и II координатных четвертях, а при нечетном n график функции располагается в I и III координатных четвертях (при четном n для всех $x \neq 0$ значения $y > 0$, при нечетном n значения $y > 0$, если $x > 0$ и значения $y < 0$, если $x < 0$);

д) при четном n верно равенство $(-x)^n = x^n$. Поэтому при четном n функция является четной, а ее график симметричен относительно оси ординат. При нечетном n имеем $(-x)^n = -x^n$. Следовательно, при нечетном n функция является нечетной, а график симметричен относительно начала координат;

е) при четном n функция возрастает на $[0;+\infty)$ и убывает на $(-\infty;0]$.

Действительно, пусть $x_2 > x_1 \geq 0$. Умножив почленно n одинаковых неравенств $x_2 > x_1$, получим верное неравенство $x_2^n > x_1^n$, т. е. в промежутке $[0;+\infty)$ функция возрастает. Пусть $x_2 < x_1 \leq 0$. Тогда $-x_2 > -x_1 \geq 0$. По доказанному выше имеем $(-x_2)^n > (-x_1)^n$. Так как n — четно, то отсюда получим неравенство $x_2^n > x_1^n$. Это означает, что в промежутке $(-\infty;0]$ функция убывает.

При нечетном n функция возрастает на всей области определения $(-\infty;+\infty)$. В промежутке $[0;+\infty)$ доказательство этого утверждения проводится аналогично случаю степенной функции с четным показателем. Рассмотрим промежуток $(-\infty;0]$. Пусть $x_1,\ x_2 \in (-\infty;\ 0]$ и $x_2 > x_1$. Тогда $0 \leq -x_2 < -x_1$. Откуда $(-x_2)^n < (-x_1)^n$. Так как n — нечетно, то последнее неравенство можно записать в виде $-x_2^n < -x_1^n$. Отсюда получаем, что $x_2^n > x_1^n$. Это означает, что функция возрастает в промежутке $(-\infty;0]$.

Если $x_1 < x_2$, $x_1 \in (-\infty;\ 0]$, $x_2 \in [0;\ +\infty)$, то $x_1^n \leq 0$, $x_2^n \geq 0$ при нечетном n. Таким образом, и в этом случае выполняется неравенство $x_1^n < x_2^n$. Значит, при нечетном n степенная функция возрастает на всем интервале $(-\infty;+\infty)$.

Из приведенных рассуждений видно, что свойства функции $y = x^n$ при четном n аналогичны свойствам функции $y = x^2$, а при нечетном n — свойствам функции $y = x^3$.

График функции $y = x^n$ с четным показателем n изображен на рис. 65, при нечетном показателе $n > 1$ график показан на рис. 66.

2) Пусть α — целое отрицательное число, т. е. $\alpha = -n$, где n — натуральное число.

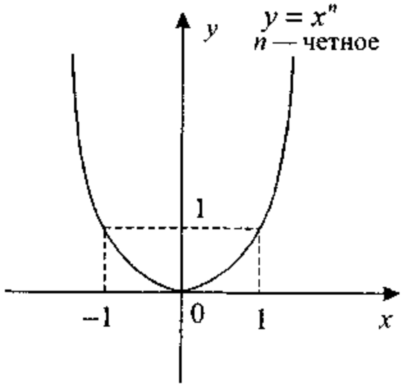


Рис. 65

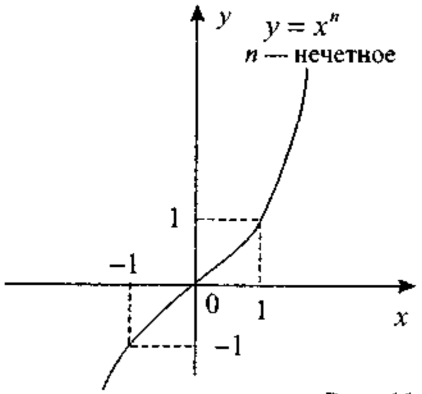


Рис. 66

В этом случае по определению полагают (для $x \neq 0$) $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.
Таким образом, функцию можно записать в виде $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

Отметим основные свойства этой функции.

а) при $x = 0$ выражение x^{-n} не определено. Поэтому областью определения функции является множество $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

б) при четном n область значений функции есть множество $(0; +\infty)$, а при нечетном n областью значений является множество $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ (при четном n значения $y > 0$, а при нечетном n имеем: $y > 0$, если $x > 0$ и $y < 0$, если $x < 0$);

в) при четном n функция является четной, а при нечетном n функция нечетная;

г) Так как при $x_2 > x_1 > 0$ верны неравенства $x_2^n > x_1^n > 0$, $\frac{1}{x_2^n} < \frac{1}{x_1^n}$, то функция убывает в промежутке $(0; +\infty)$.

Аналогичным образом можно показать, что в промежутке $(-\infty; 0)$ функция убывает, если n — нечетное и возрастает, если n — четное.

График функции $y = x^{-n}$ для случаев четного и нечетного n изображен на рис. 67, 68.

3) Пусть α — дробное положительное рациональное число.

Любое дробное положительное рациональное число α может быть (и притом единственным образом) представлено в виде частного $\frac{m}{n}$, где m и n — взаимно простые натуральные числа. Исходя из этого, по определению полагают: $y = x^\alpha = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$.

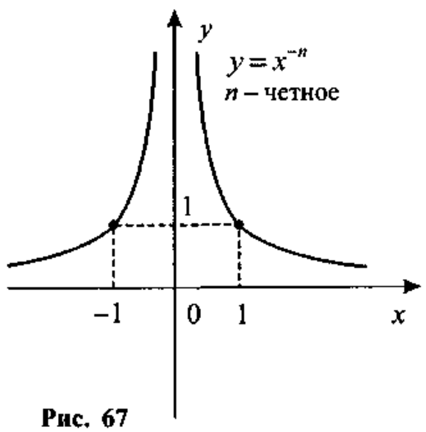


Рис. 67

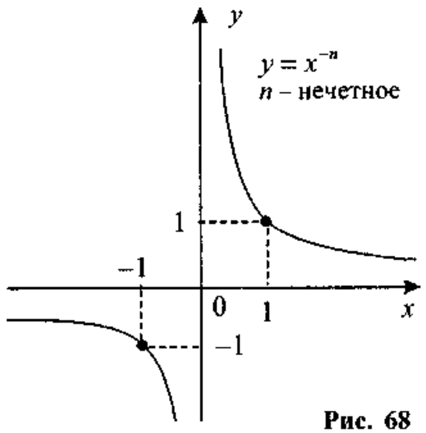


Рис. 68

При таком определении каждому значению x, при котором $\sqrt[n]{x^m}$ существует, сопоставляется единственное число y. Тем самым задается функция от x. Ее называют степенной функцией с положительным рациональным показателем.

Отметим некоторые свойства указанной функции:

а) при нечетном n областью определения функции является интервал $(-\infty; +\infty)$. При четном n число m должно быть нечетным, иначе дробь $\frac{m}{n}$ окажется сократимой. Поэтому в данном случае выражение $\sqrt[n]{x^m}$ имеет смысл только при $x \geq 0$. Значит, при четном n областью определения функции является множество $[0; +\infty)$;

б) $y = 0$ при $x = 0$, т. е. график функции проходит через начало координат;

в) при четном n область значений функции есть множество $[0; +\infty)$. При нечетном n и нечетном m областью значений функции является интервал $(-\infty; +\infty)$, а при нечетном n и четном m область значений функции есть множество $[0; +\infty)$;

г) при четном m функция является четной, так как тогда n должно быть нечетным и выполняется равенство $\sqrt[n]{(-x)^m} = \sqrt[n]{x^m}$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

При нечетном m и нечетном n функция является нечетной, так как $\sqrt[n]{(-x)^m} = \sqrt[n]{-x^m} = -\sqrt[n]{x^m}$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

При нечетном m и четном n функция не определена для значений $x < 0$. Поэтому в этом случае нельзя ставить вопроса о четности или нечетности функции;

д) исследуем функцию на монотонность. Пусть $x_2 > x_1 \geq 0$. Положим $z_2 = x_2^m$, $z_1 = x_1^m$. Тогда $z_2 > z_1 \geq 0$. Функция $y = \sqrt[n]{z}$ возрастает на $[0; +\infty)$. Поэтому из $z_2 > z_1$ следует неравенство $\sqrt[n]{z_2} > \sqrt[n]{z_1}$ или $\sqrt[n]{x_2^m} > \sqrt[n]{x_1^m}$. Это означает, что на промежутке $[0; +\infty)$ функция $y = x^{\frac{m}{n}}$ возрастает.

При четном n функция определена только на $[0; +\infty)$. Следовательно, при четном n функция $y = x^{\frac{m}{n}}$ является возрастающей (во всей области определения).

При нечетном n функция определена и для значений $x \in (-\infty; 0]$. Исследуем ее на монотонность в этом промежутке.

Пусть n — нечетно и m — нечетно. Тогда по доказанному выше, функция будет нечетной и, потому должна возрастать в промежутке $(-\infty; 0]$.

Пусть n — нечетно и m — четно. Тогда функция будет четной и, потому она убывает в промежутке $(-\infty; 0]$.

На рис. 69, 70 изображены графики функции $y = x^{\alpha}$ для частных значений $\alpha = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}$.

4) Пусть α — отрицательное рациональное число.

В этом случае, под записью $y = x^{\alpha}$ по определению понимают функцию $y = \frac{1}{x^{|\alpha|}}$. Отметим некоторые свойства этой функции. Положим $|\alpha| = \frac{m}{n}$, где m и n — взаимно простые натуральные числа. Тогда при четном n область определения функции есть интервал $(0; +\infty)$, а при нечетном n областью определения является множество $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. На интервале $(0; +\infty)$ функция убывает, а на интервале $(-\infty; 0)$ (n — нечетное) функция возрастает при четном m и убывает при нечетном m. При m — четном (n — нечетное) функция является четной, а при m — нечетном (n — нечетное) функция является нечетной на $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

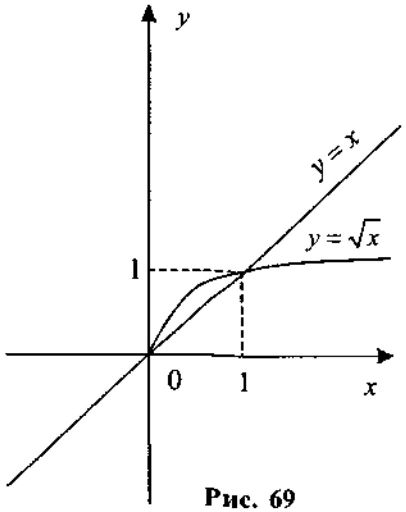


Рис. 69

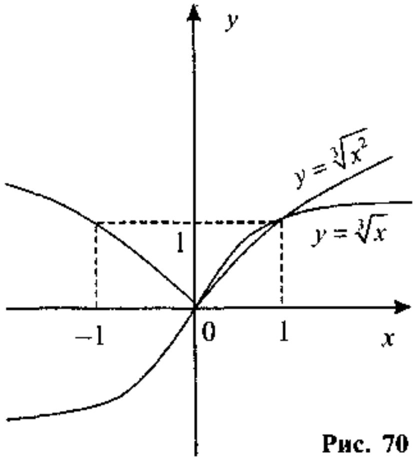


Рис. 70

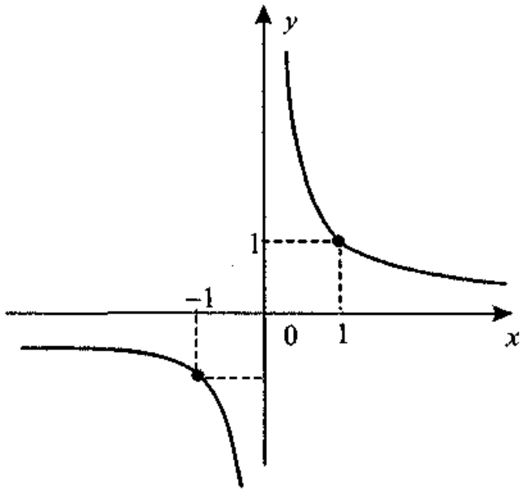


Рис. 71

График функции $y = x^{\alpha} = x^{-\frac{m}{n}}$ для случая нечетных m и n изображен на рис.71.

5) Пусть, наконец, $\alpha = 0$. В этом случае имеем функцию вида $y = x^0$. При $x = 0$ такая функция не определена, а для остальных значений x значения $y = 1$, т. е. получается функция вида $y = 1$ $(x \neq 0)$. График этой функции показан на рис. 72 (точка $A(0; 1)$ не принадлежит графику).

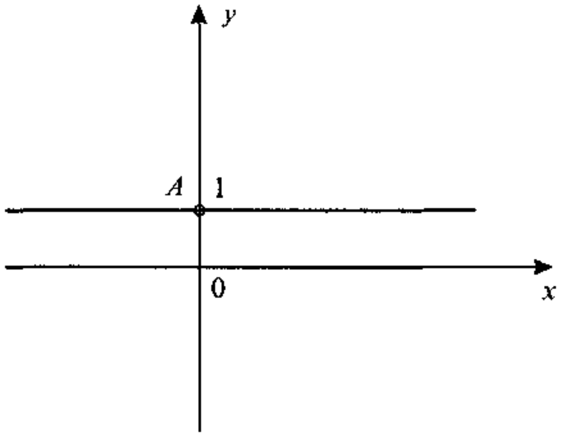


Рис. 72

Вопросы и задания

1. Какая функция называется степенной?
2. Сформулировать основные свойства степенной функции с целым отрицательным показателем степени.
3. Дать определение степенной функции с положительным рациональным показателем степени.
4. Сформулировать некоторые свойства степенной функции с отрицательным рациональным показателем степени.
5. Назвать общие свойства степенных функций с натуральным и целым отрицательным показателем степени.

Упражнения

1. Функция задана формулой $f(x) = x^6$. Сравнить значения:

а) $f(-2)$ и $f(3)$; *в)* $f(-2)$ и $f(0)$;

б) $f(-3)$ и $f(2)$; *г)* $f(\sqrt{2})$ и $f(-\sqrt{2})$.

2. Функция задана формулой $f(x) = x^{-3}$. Сравнить значения:

а) $f(2)$ и $f(3)$; *в)* $f(1)$ и $f(-1)$;

б) $f(-2)$ и $f(-3)$; *г)* $-f(-5)$ и $f(5)$.

3. Функция задана формулой $f(x) = x^{2/3}$. Сравнить значения:

а) $f(0)$ и $f(1)$; *в)* $f(-1)$ и $f(1)$;

б) $f(-2)$ и $f(-1)$; *г)* $f(1)$ и $f(-2)$.

4. Построить график (эскиз) функции:

а) $y = x^{3/2}$; *в)* $y = x^{4/3}$; *д)* $y = x^{-5}$; *ж)* $y = -x^{-2}$;

б) $y = x^{3/4}$; *г)* $y = x^{-1/2}$; *е)* $y = x^{-3/2}$; *з)* $y = -\sqrt{x}$.

5. В каких координатных четвертях расположен график функции:

а) $y = x^{20}$; *в)* $y = x^{23}$; *д)* $y = \sqrt[4]{x}$; *ж)* $y = \sqrt[5]{x^2}$;

б) $y = x^{-20}$; *г)* $y = x^{-23}$; *е)* $y = \sqrt[5]{x}$; *з)* $y = x^{-1/2}$?

6. Функция задана формулой $f(x) = x^{-4}$. Сравнить значения:

а) $f(-2)$ и $f(3)$; *в)* $f(-2)$ и $f(2)$;

б) $f(-3)$ и $f(2)$; *г)* $f(2)$ и $f(3)$.

7. Функция задана формулой $f(x) = x^{3/2}$. Сравнить значения:

а) $f(0)$ и $f(1)$; *б)* $f(1)$ и $f(\sqrt{2})$.

8. Функция задана формулой $f(x) = x^{-2/3}$. Сравнить значения:

а) $f(-1)$ и $f(1)$; *в)* $f(1)$ и $f(2)$;

б) $f(-2)$ и $f(-1)$; *г)* $f(-2)$ и $f(1)$.

9. Построить график (эскиз) функции:

а) $y = x^{-3}$; *в)* $y = \sqrt[7]{x}$; *д)* $y = x^{-3/5}$;

б) $y = x^{5/2}$; *г)* $y = x^{-3/4}$; *е)* $y = x^{4/5}$.

Указать, какие из перечисленных выше функций являются четными, а какие — нечетными.

10. В каких координатных четвертях расположен график функции:

а) $y = x^8$; *в)* $y = x^{1/9}$; *д)* $y = x^9$; *ж)* $y = x^{4/7}$;

б) $y = x^{-7}$; *г)* $y = x^{-1/6}$; *е)* $y = x^{-6}$; *з)* $y = x^{-1/5}$?

Какая из перечисленных выше функций не относится ни к четным, ни к нечетным функциям?

§ 2. Показательная функция

1. Степень с иррациональным показателем. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Поставим каждому рациональному числу x в соответствие число a^x. Тогда на множестве Q рациональных чисел будет задана функция вида

$$f(x) = a^x,$$

обладающая всеми свойствами степени с рациональным показателем. Дальнейшей нашей целью являются определения числа a^α и функции $y = a^x$ для иррациональных значений α и x.

Рассмотрим случай $a>1$. Так как для любых рациональных чисел r и s из неравенства $r<s$ следует, что $a^r<a^s$, то число a^α естественно определить так, чтобы функция $y=a^x$ сохранила свойство монотонности (возрастания). Тогда при любых рациональных r и s таких, что $r<\alpha<s$, значение a^α будет удовлетворять неравенствам:

$$a^r<a^\alpha<a^s.$$

Приближая выбираемые значения r и s к значению α (при этом значения r и s приближаются друг к другу), мы тем самым будем приближать друг к другу соответствующие значения a^r и a^s. Можно доказать, что существует единственное число y, которое больше всех чисел вида a^r и меньше всех чисел вида a^s (доказательство этого утверждения приводится в курсе высшей математики). Указанное число y по определению полагают равным значению a^α.

В случае $0<a<1$ число a^α определяется аналогичным образом. При этом функция $y=a^x$ должна сохранять свойство монотонности (убывания).

В случае $a=1$, для всех значений α по определению полагают $1^\alpha=1$, а при $a=0$ полагают $0^\alpha=0$ для всех $\alpha>0$.

Степень с иррациональным показателем обладает теми же свойствами, что и степень с рациональным показателем. Перечислим их:

1. $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$; **4.** $(a\cdot b)^x=a^x\cdot b^x$;

2. $a^x:a^y=a^{x-y}$; **5.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$.

3. $(a^x)^y=a^{x\cdot y}$;

В этих формулах предполагается, что $a>0$, $b>0$, x и y — действительные числа.

Далее, пусть $0<a<b$. Тогда имеет место следующее свойство:

6. $a^x<b^x$ при $x>0$; $a^x>b^x$ при $x<0$.

Пусть $x<y$. Тогда верно свойство:

7. $a^x<a^y$ при $a>1$; $a^x>a^y$ при $0<a<1$.

П р и м е р 1. Сравним значения $2^{-\sqrt{3}}$ и $3^{-\sqrt{3}}$. Так как $0<2<3$ и $-\sqrt{3}<0$, то по свойству **6** имеем неравенство $2^{-\sqrt{3}}>3^{-\sqrt{3}}$.

П р и м е р 2. Сравним значения $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{0,2}$ и $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{0,3}$.

Поскольку $0,2<0,3$ и $0<\dfrac{1}{2}<1$, то используя свойство 7, получим неравенство: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{0,2}>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{0,3}$.

2. Показательная функция и ее свойства. Функция, заданная формулой $f(x)=a^x$, где x — независимая переменная, $a>0$, $a\neq1$, называется *показательной функцией с основанием* a.

Сформулируем основные свойства показательной функции (их доказательство приводится в курсе высшей математики).

1) Областью определения функции является интервал $(-\infty;+\infty)$;

2) Область значений функции есть интервал $(0;+\infty)$;

3) При всех значениях a ($a>0$, $a\neq1$) имеет место равенство $a^0=1$, т. е. график функции проходит через точку $(0;1)$ координатной плоскости;

4) Пусть $x>0$. Тогда $a^x>1$, если $a>1$ и $a^x<1$, если $0<a<1$. В случае $x<0$ имеем $a^x<1$, если $a>1$ и $a^x>1$, если $0<a<1$;

5) При $a>1$ функция возрастает, а при $0<a<1$ функция убывает на всей области определения.

П р и м е р 3. Найдем область значений функции $y=2^x+1$.

График заданной функции получается из графика функции $y=2^x$ с помощью параллельного переноса, при котором начало координат точка O (0; 0) переходит в точку N (0; 1) (см. теорему 1, § 5, гл. VII). Областью значений функции $y=2^x$ является интервал $(0;+\infty)$. Поэтому область значений функции $y=2^x+1$ будет совпадать с интервалом $(1;+\infty)$.

График показательной функции для случаев $a>1$ и $0<a<1$ изображен на рис.73, 74.

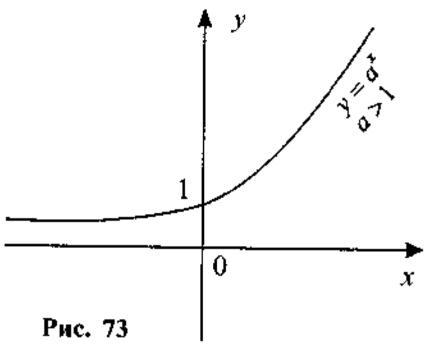


Рис. 73

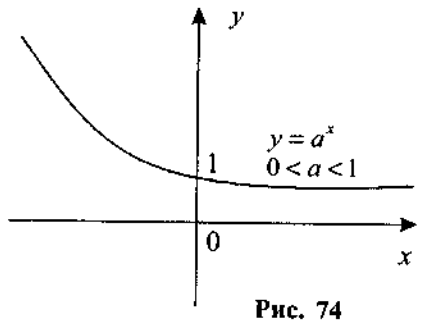


Рис. 74

Вопросы и задания

1. Сформулировать основные свойства степени с иррациональным показателем.
2. Дать определение показательной функции.
3. Какова область значений показательной функции ?
4. Сформулировать основные свойства показательной функции.

Упражнения

1. Вычислить значение:

а) $\left((\sqrt{3})^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; *б)* $\left(2^{\sqrt[3]{4}}\right)^{\sqrt[3]{2}}$; *в)* $9^{\sqrt{3}} : 3^{2\sqrt{3}}$; *г)* $4^{6\sqrt{2}-1} \cdot 16^{1-3\sqrt{2}}$.

2. Сравнить числа:

а) $2^{-\sqrt{3}}$ и 1; *в)* $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{2}}$; *д)* $-3^{\sqrt{2}}$ и -1;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}$ и 1; *г)* $4^{-\sqrt{6}}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$; *е)* $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$.

3. Найти область значений функции:

а) $y = 4^x$; *б)* $y = 5^x - 2$; *в)* $y = -3^x$; *г)* $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$.

4. Перечислить свойства функции и построить график, если:

а) $y = 10^x$; *б)* $y = 0{,}2^x$.

5. Найти графически число корней уравнения:

а) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = x$; *б)* $2^x = x + 2$; *в)* $3^x = 10 \cdot x$; *г)* $3^x = 10 \cdot |x|$.

6. Упростить выражение:

а) $(a^{\sqrt[5]{2}})^{\sqrt[5]{16}}$; *в)* $a^{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{a} : \sqrt[4]{a^{4\sqrt{2}}}$;

б) $a^{\sqrt{3}} \cdot (\frac{1}{a})^{\sqrt{3}-2}$; *г)* $\dfrac{x^{2\sqrt{3}} - y^{2\sqrt{3}}}{x^{\sqrt{3}} + y^{\sqrt{3}}} + y^{\sqrt{3}}$;

д) $\dfrac{x^{\sqrt{2}} - y^{\sqrt{2}}}{\left(x^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - y^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^2} + 1$; е) $\dfrac{x^{\sqrt{3}} - y^{\sqrt{2}}}{x^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} + x^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \cdot y^{\frac{\sqrt{2}}{3}} + y^{\frac{2\sqrt{2}}{3}}}$.

---

7. Указать, какие из перечисленных ниже функций являются возрастающими, какие из них являются убывающими на множестве действительных чисел:

$y = \sqrt{3}^x$; $y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$; $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$;

$y = \left(\sqrt{3} - 1\right)^x$; $y = \left(\sqrt{3} - 1\right)^{-x}$; $y = \left(\sqrt{10} - 2\right)^x$.

8. Найти область значений функции:

а) $y = 2^{x+1}$; б) $y = 3^x - 3$; *в)* $y = |3^x - 3|$; *г)* $y = 2^{|x|}$.

9. Определить знак корня уравнения:

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 5$; *б)* $0{,}2^x = \frac{1}{2}$; *в)* $0{,}3^x = 4$; *г)* $4^x = 7$.

10. Решить графически уравнение:

а) $2^x = 3 - x$; *б)* $\left(\frac{1}{5}\right)^x = x + 1$; *в)* $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 4$; *г)* $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$.

11. Упростить выражение:

а) $a^{1+\sqrt{3}} \cdot a^{1-\sqrt{3}}$; *в)* $\dfrac{x^{2\sqrt{3}} - y^{2\sqrt{2}}}{x^{\sqrt{3}} - y^{\sqrt{2}}} - x^{\sqrt{3}}$;

б) $a^{1-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{a^{2\sqrt{2}}}$; *г)* $\dfrac{a^{4\sqrt{3}} - a^{\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{3}} - 1\right)\left(a^{3\sqrt{3}} + a^{2\sqrt{3}} + a^{\sqrt{3}}\right)}$.

12. Определить значения x, при которых выполняется неравенство $2^{3-2x} > 1$.

§ 3. Показательные уравнения и неравенства

1. Уравнения. Простейшим показательным уравнением является уравнение вида $a^x = b$, где $a > 0, a \neq 1$, b — действительное число.

Известно, что показательная функция $y = a^x$ на $(-\infty; +\infty)$ возрастает, если $a > 1$ и убывает на этом промежутке, если $0 < a < 1$. Областью значений функции является множество всех положительных чисел. Поэтому при $b > 0$ рассматриваемое уравнение имеет корень. Для того чтобы его найти, нужно число b представить в виде a^c и тогда уравнение примет вид $a^x = a^c$, откуда получим, что число c есть корень исходного показательного уравнения. Но так как функция $y = a^x$ является монотонной на $(-\infty; +\infty)$, то графики функций $y = a^x$ и $y = a^c$ — const могут пересекаться только в одной точке. Следовательно, число c является единственным корнем простейшего показательного уравнения.

При $b \leq 0$ рассматриваемое уравнение не имеет решения, поскольку $a^x > 0$ при всех $x \in (-\infty; +\infty)$. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решим уравнение $3^{x-1} = 27$. Так как $27 = 3^3$, то уравнение можно записать в виде $3^{x-1} = 3^3$. Откуда $x - 1 = 3$ или $x = 4$.

Пример 2. Рассмотрим уравнение $2^{x^2-5x+9} = 8$. Его можно записать в виде $2^{x^2-5x+9} = 2^3$.

Отсюда $x^2 - 5x + 9 = 3$. Решив полученное квадратное уравнение, получим корни $x = 3$ и $x = 2$. Значит, исходное уравнение имеет два корня: $x = 3$, $x = 2$.

Пример 3. $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$. Введем новую переменную $y = 2^x$. Так как $4^x = (2^x)^2 = y^2$, то уравнение можно записать в виде $y^2 - 3 \cdot y - 4 = 0$, откуда получим, что $y = -1$ и $y = 4$. Для того чтобы найти неизвестное значение x, нужно решить уравнения $2^x = -1$ и $2^x = 4$.

Первое уравнение не имеет решения, а корнем второго уравнения является $x = 2$. Таким образом, решением исходного показательного уравнения является одноэлементное множество: $\{2\}$.

Пример 4. $2 \cdot 3^{x+1} - 3^x = 45$. Для того чтобы решить данное уравнение, вынесем 3^x за скобку. Тогда получим: $3^x \cdot (2 \cdot 3 - 1) = 45$.

Отсюда $5 \cdot 3^x = 45$ или $3^x = 9$. Следовательно, единственным корнем исходного уравнения является число $x = 2$.

Пример 5. Решим систему уравнений $\begin{cases} x - y = 1 \\ 4^x + 4^y = 20 \end{cases}$.

Из первого уравнения системы найдем $x = y + 1$. Затем подставим во втором уравнении вместо x выражение $y + 1$. Тогда получим уравнение $4^{y+1} + 4^y = 20$. Вынесем 4^y за скобку и после упрощения получим уравнение $4^y = 4$, откуда $y = 1$. Возвращаясь к формуле $x = y + 1$, получим значение $x = 2$. Таким образом, решением системы уравнений является пара $\{(2; 1)\}$.

2. Неравенства. Решение простейших показательных неравенств сводится к решению алгебраических неравенств, рассмотренных в главе VI. При этом используется свойство монотонности показательной функции $y = a^x$.

Пример 6. Решить неравенство $2^{2x+3} > \frac{1}{8}$. Запишем правую часть неравенства в виде 2^{-3}. Тогда имеем $2^{2x+3} > 2^{-3}$.

Показательная функция $y = 2^x$ является возрастающей, поскольку основание $a = 2 > 1$. Поэтому исходное неравенство сводится к равносильному неравенству $2x + 3 > -3$. Решив его, получим $x > -3$ или $x \in (-3; +\infty)$.

Пример 7. $0{,}2^{4-2x} < 5$. Запишем правую часть неравенства в виде $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 0{,}2^{-1}$. Тогда имеем неравенство $0{,}2^{4-2x} < 0{,}2^{-1}$.

Показательная функция $y = 0{,}2^x$ является убывающей, поскольку в данном случае $a = 0{,}2 < 1$. Следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству $4 - 2x > -1$, откуда получим, что $x < 2{,}5$ или $x \in (-\infty; 2{,}5)$.

Пример 8. $4^x + 2^{x+1} - 8 > 0$. Сделаем замену $t = 2^x$. Тогда $4^x = (2^x)^2 = t^2$ и данное неравенство можно записать в виде $t^2 + 2t - 8 > 0$. Решив последнее неравенство, получим $t < -4$ или $t > 2$. Отсюда, возвращаясь к сделанной ранее замене переменных, будем иметь неравенства $2^x < -4$ или $2^x > 2$. Первое из них не имеет решения, поскольку $2^x > 0$. Решением второго неравенства является множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $x > 1$. Значит, решением исходного неравенства является интервал $(1; +\infty)$.

П р и м е р 9. $3^{x^2-4x} < \frac{1}{27}$. Данное неравенство можно записать в виде $3^{x^2-4x} < 3^{-3}$. Показательная функция $y = 3^x$ является возрастающей, поэтому исходное неравенство равносильно неравенству $x^2 - 4x < -3$, откуда получим, что $1 < x < 3$ или $x \in (1\ ;\ 3)$.

В рассмотренных примерах на решение показательных уравнений и неравенств нам удавалось правые части последних представить в виде нужной степени. Вообще, любое положительное число можно представить в виде необходимой степени. Например, при решении уравнения $3^{x+1} = 4$ число 4 представляется в виде 3^c. Ответ на вопрос о том, как при этом находить нужное число c, будет дан в следующих параграфах, когда мы введем понятие логарифма числа.

Вопросы и задания

1. Сколько корней может иметь простейшее показательное уравнение?
2. Какое свойство показательной функции позволяет утверждать, что уравнение $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ имеет единственный корень?
3. Какие известные способы решений применяются при решении систем показательных уравнений?
4. Почему любое положительное число b можно представить в виде a^c, где $a > 0$, $a \neq 1$?

Упражнения

1. Решить уравнение:

а) $5^x = 625$;

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$;

в) $2^{3-x} = 2^{x-5}$;

г) $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4x-9}$;

д) $\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^x = \frac{81}{256}$;

е) $\sqrt{3^x} \cdot \sqrt{5^x} = 225$;

ж) $3^{x^2-5x+4} = \frac{1}{9}$;

з) $3 \cdot 5^{x+3} - 2 \cdot 5^{x+1} = 73$;

и) $4^{x-1} = 9^{x-1}$;

к) $4^{x+2} + 4^{x+1} + 4^x = 84$;

л) $4^x + 8 = 5 - 2^x$;

м) $25^x - 4 \cdot 5^x - 5 = 0$;

н) $3^x - 9 \cdot 3^{-x} = 8$;

о) $5 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x = 7 \cdot 10^x$;

п) $9 \cdot 5^x + \frac{4}{5} \cdot 4^{x+2} = 4^{x+2} + 5^{x+1}$;

р) $2^{x+1} = 14 - 3x$.

2. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3^x - 3^y = 2 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 4^{x+y} = 64 \\ 4^{x-2y+3} = 1 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 2^{y-3x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 3^{2x-y} = \sqrt{3} \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2^{x^2-2y+2} - 2^{3y+1} = 0 \end{cases}$.

3. Пусть $\begin{cases} 2^{x+y-1} = 1 \\ 3^{xy} = (\frac{1}{3})^{\sqrt{2}} \end{cases}$. Найти сумму $x^2 + y^2$.

4. Решить неравенство:

а) $\left(\frac{1}{7}\right)^x < 49$;

б) $0{,}5^x \geq 4$;

в) $\sqrt{3}^x > 27$;

г) $5^{3-2x} \leq 0{,}2^x$;

д) $4^{x^2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{4x-6}$;

е) $3^{2x+1} - 28 \cdot 3^{x-1} + 1 < 0$;

ж) $\left(\frac{4}{3}\right)^x + \left(\frac{4}{3}\right)^{x-1} < \frac{7}{4}$;

з) $3^{x+3} + 2 \cdot 3^{x-1} \leq 83$;

и) $2^x - 2^{3x} < 0$;

к) $5^{\frac{x-1}{x+1}} > \frac{1}{5}$.

5. Решить графически неравенство:

а) $5^x > 6 - x$;

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq x + 6$.

---

6. Решить уравнение:

а) $3^{x-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}$;

б) $4^{x-1} = 5^{1-x}$;

в) $2^x + 2^{x+1} = 3^{x+1} - 3^x$;

г) $4^x + 4^{3-x} = 20$;

д) $5^x - 0{,}2^{1-x} = 4$;

е) $49^{\sqrt{x-1}} + 7 = 8 \cdot 7^{\sqrt{x-1}}$.

7. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} 6^{x-y}=36 \\ 2^x+2^y=10 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 9^{x+y}=27 \\ 4^{x+y^2+1}=32 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 4^{x+y}=8 \\ 3^{3x-2y-2}=1 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 3^{|x-y|}=27 \\ y-2x=1. \end{cases}$

8. Решить неравенство:

а) $2^x\cdot 3^{x-2}>4$; г) $16^x-9\cdot 4^x+8\le 0$;

б) $2^{\frac{x-2}{x+1}}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3x+2}{x+1}}$; д) $\left(\frac{1}{2}\right)^x-8^x<0$;

в) $3^{5x+4}>\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}$; е) $36^{-x}-5\cdot 6^{-x}-6>0$.

9. Решить графически неравенство:

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^x\ge 9x+1$; б) $4^x\ge 18-x$.

§ 4. Логарифмическая функция

1. Логарифмы и их основные свойства. Пусть $a>0,\ a\ne 1$. Как было отмечено ранее, простейшее показательное уравнение $a^x=b$ при $b>0$ имеет единственный корень. Показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы при этом получить число b, называют *логарифмом числа* b *по основанию* a и обозначают через $\log_a b$. Таким образом, число $x=\log_a b$ — корень указанного уравнения. При этом для всех $a>0,\ a\ne 1,\ b>0$ имеет место формула:

$$a^{\log_a b}=b,$$

которую называют *основным логарифмическим тождеством.*

Пример 1. Найти значение $\log_3 27$. Для того чтобы получить число 27, надо число 3 возвести в третью степень. Поэтому $\log_3 27=3$.

Пример 2. Найти значение x, при котором $\log_4 x=\frac{1}{2}$.

Применим основное логарифмическое тождество. Тогда получим (для $x>0$) $x=4^{\log_4 x}=4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$.

В первом из рассмотренных выше примеров мы находили логарифм числа. Нахождение логарифма заданного выражения называют *логарифмированием выражения.*

Во втором примере по заданному значению логарифма некоторого числа мы находили само число. Такое действие называют *потенцированием выражения.*

Таким образом, если $a>0,\ a\ne 1,\ b>0$, то при логарифмировании равенство $a^x=b$ преобразуется к виду $x=\log_a b$. Наоборот, при потенцировании равенства $x=\log_a b$ получим равносильное равенство $a^x=b$.

Рассмотрим основные свойства, которыми обладают логарифмы. При любом $a>0,\ a\ne 1$ и $x>0,\ y>0$ выполняются следующие равенства:

а) $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$. Действительно, при всех указанных значениях a имеем равенства:

$$a^0=1 \quad \text{и} \quad a^1=a.$$

б) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$ (логарифм произведения равен сумме логарифмов). Для доказательства этого свойства запишем основное логарифмическое тождество в следующих видах:

$$x=a^{\log_a x},\quad y=a^{\log_a y}.$$

Тогда $x\cdot y=a^{\log_a x}\cdot a^{\log_a y}=a^{\log_a x+\log_a y}$. Отсюда по определению логарифма получим равенство:

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y.$$

в) $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ (логарифм частного равен разности логарифмов). Действительно, имеет место равенство:

$$\frac{x}{y}=\frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}}=a^{\log_a x-\log_a y}.$$

Отсюда по определению логарифма получим:

$$\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y.$$

В частности, при $x=1$ имеем $\log_a\frac{1}{y}=-\log_a y$.

г) Для любого действительного значения N имеет место равенство:

$$\log_a x^N = N \cdot \log_a x$$

(логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени).

Используя основное логарифмическое тождество, получим:

$$x^N = (a^{\log_a x})^N = a^{N \cdot \log_a x}.$$

Отсюда по определению логарифма получим формулу:

$$\log_a x^N = N \cdot \log_a x.$$

д) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, где $b > 0$, $b \neq 1$ (формула перехода от одного основания логарифма к другому основанию).

Для доказательства этого свойства используем доказанное свойство *г*) и основное логарифмическое тождество. Имеем:

$$\log_b x = \log_b (a^{\log_a x}) = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Отсюда $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

Следующие два свойства вытекают из свойств показательной функции и основного логарифмического тождества.

Пусть $M > 0$, $N > 0$. Тогда справедливы следующие свойства:

е) $\log_a M = \log_a N$ тогда и только тогда, когда $M = N$.

Докажем это свойство. Пусть $M = N$. Тогда очевидно, что $\log_a M = \log_a N$. Пусть $\log_a M = \log_a N$. Тогда имеем $a^{\log_a M} = a^{\log_a N}$, откуда получим, что $M = N$.

ж) При $a > 1$ из $0 < M < N$ следует, что $\log_a M < \log_a N$ и наоборот. При $0 < a < 1$ из $0 < M < N$ следует, что $\log_a M > \log_a N$ и наоборот.

В самом деле, пусть $a > 1$ и $0 < M < N$. Тогда $a^{\log_a M} = M < N = a^{\log_a N}$. Так как показательная функция $y = a^x$ является возрастающей, то отсюда получим неравенство:

$$\log_a M < \log_a N.$$

Обратно, пусть $a > 1$ и $\log_a M < \log_a N$. Тогда по свойству возрастания показательной функции имеем $a^{\log_a M} < a^{\log_a N}$. Это означает, что $M < N$.

Случай $0 < a < 1$ доказывается аналогичным образом.

Для вычисления значений логарифмов с произвольным основанием a на практике часто используют таблицы наиболее употребляемых логарифмов по основанию 10 (десятичный логарифм $\lg = \log_{10}$) и по основанию $e = 2{,}71828\ldots$ (натуральный логарифм $\ln = \log_e$).

П р и м е р 3. Найти значение $\log_{0,2} 7$.

Пользуясь таблицами десятичных логарифмов, получим:

$$\lg 7 \approx 0{,}84,\ \lg 0{,}2 = \lg \frac{2}{10} = \lg 2 - \lg 10 = \lg 2 - 1 \approx 0{,}3 - 1 = -0{,}7.$$

Отсюда, используя формулу перехода от основания 0,2 к основанию 10, имеем:

$$\log_{0,2} 7 = \frac{\lg 7}{\lg 0{,}2} \approx \frac{0{,}84}{-0{,}7} = -1{,}2.$$

Отметим также, что целую часть десятичного логарифма от некоторого числа называют *характеристикой* логарифма, а дробную часть — *мантиссой*. Например, $\lg 0{,}3 \approx -0{,}52$. Целая часть числа $-0{,}52$ равна -1, а дробная часть равна 0,48. Поэтому характеристика данного логарифма равна -1, а мантисса (приближенно) равна 0,48. Для $\lg 20$ характеристика равна 1, а мантисса (приближенно) равна 0,3, так как $\lg 20 = \lg 2 + \lg 10 \approx 0{,}3 + 1 = 1{,}3$.

3. Логарифмическая функция и ее свойства. Функция, заданная формулой $f(x) = \log_a x$, где x — независимая переменная, $a > 0$, $a \neq 1$, называется *логарифмической функцией с основанием* a.

Из определений обратной функции (глава VII, § 4) и логарифма числа ясно, что логарифмическая функция является обратной к показательной функции с тем же основанием.

Сформулируем основные свойства логарифмической функции.

1) Область определения функции есть множество всех положительных чисел, т. е. интервал $(0;+\infty)$.

Данное свойство логарифмической функции имеет место в силу того, что только для положительного числа x определен его логарифм по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$).

2) Область значений функции есть множество всех действительных чисел, т. е. интервал $(-\infty;+\infty)$.

Действительно, для каждого $y_0 \in (-\infty;+\infty)$ в соответствующей точке $x_0 = a^{y_0}$ имеет место равенство $y_0 = \log_a x_0 = \log_a a^{y_0}$.

3) При любом a $(a>0,\ a\neq 1)$ справедливо равенство $\log_a 1 = 0$, т. е. график функции проходит через точку (1;0) координатной плоскости.

4) При $a>1$ логарифмическая функция возрастает, а при $0<a<1$ убывает на всей области определения.

Рассмотрим случай $a>1$. Докажем указанное свойство от противного. Пусть для некоторых x_1, $x_2 \in (0;+\infty)$, $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $\log_a x_2 \leq \log_a x_1$.

Так как в рассматриваемом случае показательная функция $y = a^x$ возрастает, то из последнего неравенства следует, что $a^{\log_a x_2} \leq a^{\log_a x_1}$.

Используя теперь основное логарифмическое тождество, отсюда получим, что $x_2 \leq x_1$. Это противоречит условию $x_2 > x_1$.

В случае $0<a<1$ убывание логарифмической функции в области определения доказывается аналогичным образом.

5) При $a>1$ имеют место неравенства $\log_a x > 0$, если $x>1$ и $\log_a x < 0$, если $0<x<1$.

При $0<a<1$ справедливы неравенства $\log_a x > 0$, если $0<x<1$ и $\log_a x < 0$, если $x>1$.

Указанное свойство вытекает из свойств 3), 4) логарифмической функции.

Пример 4. Сравним числа $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ и 0. Так как $0<\frac{1}{2}<1$ и $0<\frac{1}{3}<1$, то по свойству 5) получаем, что $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > 0$.

Пример 5. Найдем область определения функции:

$$f(x) = \log_2 \frac{x^2-5x+6}{x-1}.$$

Данная функция определена для тех значений x, при которых $\frac{x^2-5x+6}{x-1} > 0$. Решая это неравенство методом интервалов, получим: $x \in (1;2) \cup (3;+\infty)$.

График функции $y = \log_a x$ для случаев $a>1$ и $0<a<1$ изображен на рис.75, 76. Его проще всего получить из графика показательной функции $y = a^x$ как график обратной функции, так как графики показательной и логарифмической функций, имеющих одинаковое основание, симметричны относительно прямой $y = x$.

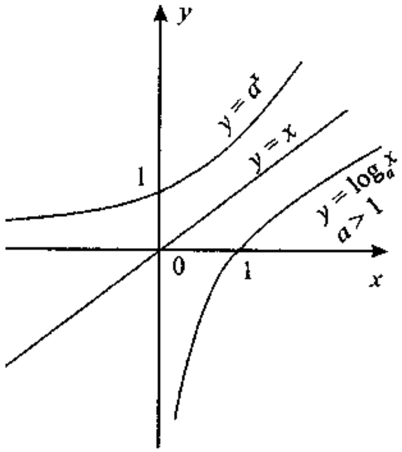


Рис. 75

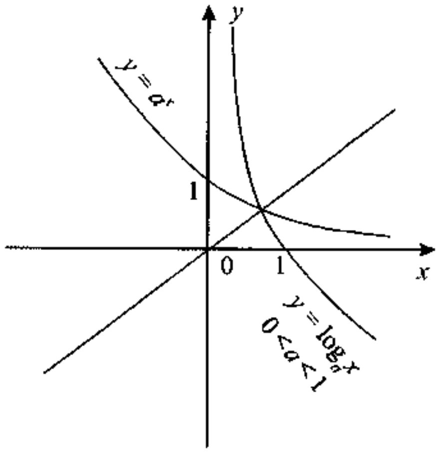


Рис. 76

4. Тождественные преобразования выражений, содержащих степени и логарифмы. Пользуясь свойствами логарифмов, рассмотрим преобразования выражений, содержащих степени и логарифмы.

Пример 6. Сравнить числа $\log_3 2 + \log_3 8$ и $\log_3(2+8)$.

Используя свойства логарифмов, имеем:

$$\log_3 2 + \log_3 8 = \log_3(2\cdot 8) = \log_3 16,\quad \log_3(2+8) = \log_3 10.$$

Так как основание логарифма число $3>1$, то имеет место неравенство $\log_3 16 > \log_3 10$. Отсюда следует, что

$$\log_3 2 + \log_3 8 > \log_3(2+8).$$

Пример 7. Упростить выражение $27^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\log_3 4} + 4^{\log_8 125}$.

Решение.

$$\frac{1}{2}\log_3 4 = \log_3 2,\quad \log_8 125 = \frac{\log_2 125}{\log_2 8} = \frac{3\log_2 5}{3} = \log_2 5.$$

Поэтому $4^{\log_8 125} = 4^{\log_2 5} = 2^{2\log_2 5} = 2^{\log_2 25} = 25$.

Отсюда получим, что

$$27^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\log_3 4} + 4^{\log_8 125} = 27^{\frac{1}{3}-\log_3 2} + 25 = 27^{\frac{1}{3}}\cdot 27^{-\log_3 2} + 25 =$$

$$= 3\cdot 3^{-3\log_3 2} + 25 = 3\cdot 3^{\log_3 \frac{1}{8}} + 25 = 3\cdot\frac{1}{8} + 25 = 25\frac{3}{8}.$$

Пример 8. Найти значение выражения $\dfrac{\lg 54 + \lg \frac{1}{2}}{\lg 72 - \lg 8}$.

Решение. Имеют место следующие равенства:

$$\lg 54 + \lg \frac{1}{2} = \lg\left(54 \cdot \frac{1}{2}\right) = \lg 27 = \lg 3^3 = 3\lg 3,$$

$$\lg 72 - \lg 8 = \lg \frac{72}{8} = \lg 9 = \lg 3^2 = 2\lg 3.$$

Поэтому $\dfrac{\lg 54 + \lg \frac{1}{2}}{\lg 72 - \lg 8} = \dfrac{3\lg 3}{2\lg 3} = \dfrac{3}{2}$.

Пример 9. Найти логарифм выражения $4a^2 \cdot \sqrt{b}$ по основанию 2 $(a > 0,\ b > 0)$.

Используя свойства логарифмов, получим:

$$\log_2(4a^2 \cdot \sqrt{b}) = \log_2(4 \cdot a^2 \cdot b^{\frac{1}{2}}) = \log_2 4 + \log_2 a^2 + \log_2 b^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2 + 2\log_2 a + \frac{1}{2}\log_2 b.$$

Пример 10. Пусть $\log_4 5 = a$, $\log_4 7 = b$. Выразить $\log_4 700$ через a и b.

Решение. Представим число 700 в виде произведения $700 = 7 \cdot 5^2 \cdot 4$. Тогда получим:

$$\log_4 700 = \log_4(7 \cdot 5^2 \cdot 4) = \log_4 7 + \log_4 5^2 + \log_4 4 = b + 2a + 1.$$

Вопросы для повторения

1. Что называют логарифмом числа b по основанию a?
2. Какое равенство называют основным логарифмическим тождеством?
3. Что понимают под потенцированием выражения?
4. Сформулировать основные свойства логарифмов.
5. Что называется характеристикой логарифма? Что такое мантисса логарифма?
6. Какая функция называется логарифмической?
7. Какая функция является обратной к логарифмической функции?
8. Сформулировать основные свойства логарифмической функции.

Упражнения

1. Найти значение:

а) $\log_5 125$; *в)* $\log_3 \frac{1}{27}$; *д)* $\log_{0,1} 1000$;

б) $\log_5 0,04$; г) $\log_{\frac{1}{3}} 9$; *е)* $\log_{\sqrt{2}} 0,25$.

2. Найти число x, если:

а) $\log_2 x = -5$; *в)* $\log_9 x = \frac{1}{2}$; *д)* $\log_x 128 = 7$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$; *г)* $\log_{\sqrt{3}} x = 0$; *е)* $\log_{\sqrt{x}} 27 = 3$.

3. Сравнить числа:

а) $\log_2 3$ и $\log_2 5$; *г)* $\dfrac{\log_2 3}{\log_2 5}$ и $\log_5 4$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ и $\log_{\frac{1}{2}} 5$; *д)* $\log_2 3$ и 1;

в) $\log_3 2 + \log_3 5$ и $\log_3(2+5)$; *е)* $\log_7 \frac{1}{2}$ и 0.

4. Упростить выражение:

а) $1,5^{\log_{1,5} 2}$; *в)* $7^{-2\log_7 6}$; *д)* $3^{2+\log_3 5}$;

б) $2^{3\log_2 5}$; *г)* $e^{\ln 5}$; *е)* $3^{3-\log_3 54}$.

5. Упростить выражение:

а) $\log_{a^2} a^3$; *б)* $\log_{a^5} a^{-5}$; *в)* $\log_{a^3} \sqrt{a}$; *г)* $\log_{\sqrt{a}} a^{5/6}$.

6. Вычислить:

а) $\log_6 2 + \log_6 18$; *в)* $\log_4 7 - \log_4 \frac{7}{16}$; *д)* $\dfrac{\lg 2 + \lg 162}{2\lg 3 + \lg 2}$;

б) $\log_3 \frac{5}{9} + \log_3 \frac{1}{5}$; *г)* $\lg 25 + \lg 4$; *е)* $\dfrac{\ln 64}{\ln 4}$.

7. Найти логарифм выражения по основанию $2 (a > 0; b > 0)$:

а) $8a^2 \cdot \sqrt[3]{b}$; *б)* $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{ab^3}$; *в)* $\dfrac{a^{1/4}}{16b^5}$; *г)* $(4 \cdot \sqrt[3]{a^2 b})^{1/4}$.

8. Известно, что $\log_3 2 = a$, $\log_3 5 = b$. Выразить через a и b:

а) $\log_3 20$; *б)* $\log_3 1000$; *в)* $\log_3 6$; *г)* $\log_3 30$.

9. Найти $\log_{20} 50$, если $\log_5 16 = a$.

10. При каких значениях a верно неравенство:

а) $\log_2 3a < \log_2 5a$; *б)* $\log_{0,2} a < 0$; *в)* $\log_a 6 < \log_a 5$?

11. Найти область определения функции:

а) $\log_3(2x-5)$; *в)* $\log_{\sqrt{2}}(3-x)$; *д)* $\log_2(x^2-2x+1)$;

б) $\log_5(4-x^2)$; *г)* $\log_7(x^2-2x-3)$; *е)* $\log_2 \dfrac{x-1}{x+2}$.

12. Перечислить свойства функции и построить ее график:

а) $y = \log_2 x$; *б)* $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

13. Найти значение x, если:

а) $\log_2 x = 2\log_4 6 - \log_4 18$; *б)* $\log_{\frac{1}{3}} x = \log_{0,1} 8 + 3 \cdot \log_{0,1} 5$.

14. Решить графически уравнение:

а) $\log_3 x = 1 - x$; *б)* $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 4$.

15. Найти область значений функции:

а) $y = |\log_2 x|$; *в)* $y = \log_2 x - 3$;

б) $y = \log_2(x-1)$; *г)* $y = \log_2 x$, $x \ge 2$.

---

16. Найти значение:

а) $\log_{16}\sqrt{8}$; *в)* $\log_{\sqrt[4]{3}} 27$; *д)* $2^{3-\log_2 3}$;

б) $\log_{\sqrt{5}} 625$; *г)* $\log_4 \log_9 \sqrt{3}$; *е)* $5^{-2\log_5 3}$.

17. Найти число x, если:

а) $\log_{\sqrt{3}} x = -2$; *в)* $\log_x 0{,}09 = 2$;

б) $\log_{2\sqrt{2}} x = -4$; *г)* $\log_{\sqrt[3]{x}} 125 = 9$.

18. Вычислить:

а) $\lg 125 + 3 \cdot \lg 2$; *б)* $\lg 5 - \lg 4 + \lg 8$;

в) $\dfrac{\lg 243 - \frac{1}{2}\cdot \lg 9}{\lg 72 - \lg 8}$; *д)* $\dfrac{\log_3 36}{\log_{12} 3} - \dfrac{\log_3 108}{\log_4 3}$;

г) $\log_{0,2} 4 - 2 \cdot \log_{0,2} 10$; *е)* $\lg 5 \cdot \lg 20 + \lg 2 \cdot \lg 2$.

19. Доказать, что:

а) $3^{\log_4 6} = 6^{\log_4 3}$; *б)* $\log_4 12 < \log_3 10$.

20. Найти логарифм выражения по основанию 3 $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$:

а) $(\sqrt[7]{a^3 b^2 c})^{2/5}$; *б)* $\left(\dfrac{a^3}{\sqrt{bc}}\right)^{-0,5}$; *в)* $\dfrac{a^3\sqrt{b}}{9c}$; *г)* $\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{a\sqrt{b}}$.

21. Известно, что $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$. Выразить через a и b:

а) $\log_2 \sqrt{15}$; *б)* $\log_2 \dfrac{9}{25}$; *в)* $\log_2 \dfrac{6}{5}$; *г)* $\log_2 60$.

22. Найти $\log_{24} 72$, если $\log_8 6 = a$.

23. Пользуясь таблицей десятичных логарифмов, найти значение $\log_{0,3} 2$.

24. Найти область определения функции:

а) $y = \log_2(3^x - 9)$; *б)* $y = \lg(1 - 2^x)$.

25. Построить график функции:

а) $y = \log_4(x-1)$; *б)* $y = -\log_3 x$.

26. Решить графически уравнение:

а) $\log_5 x = 6 - x$; *б)* $\log_{\frac{1}{2}} x = x - 3$.

27. Найти область значений функции:

а) $y = 2^{\log_2 x}$; *б)* $y = \log_2 x$, $0 < x < 2$.

28. Определить значения x, при которых:

а) $\log_5(2-3x) > 0$; *б)* $\log_3(x-2) < 0$.

§ 5. Логарифмические уравнения и неравенства

1. Уравнения. Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида

$$\log_a x = b,$$

где $a>0$, $a \neq 1$, b — действительное число.

Логарифмическая функция $y=\log_a x$ монотонна в своей области определения $(0;+\infty)$, а областью значений функции является множество всех действительных чисел. Поэтому указанное уравнение всегда имеет корень. Из определения логарифма числа вытекает, что число $x=a^b$ есть корень данного уравнения. Вследствие монотонности логарифмической функции, графики функций $y=\log_a x$ и $y=b$ могут пересекаться только в одной точке. Следовательно, число a^b является единственным корнем простейшего логарифмического уравнения.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $\log_3 x = \frac{1}{2}$. Его корнем является число $x=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$.

Пример 2. Решим уравнение $\log_x 16 = 2$.

Из определения логарифма получаем равенство $x^2=16$, откуда $x=\pm 4$. Поскольку основание логарифма есть положительное число, то единственным корнем исходного уравнения является число $x=4$.

Пример 3. Решим уравнение $2^{3-x}=5$.

Ранее уравнения подобного вида мы решали, представляя правую часть в виде соответствующей степени. С помощью логарифмов число 5 можно записать в виде степени с основанием 2. А именно, $5=2^{\log_2 5}$. Тогда уравнение примет вид $2^{3-x}=2^{\log_2 5}$.

Отсюда $3-x=\log_2 5$ или $x=3-\log_2 5$.

Пример 4. $\log_2(x^2-5x+10)=4$.

Данному уравнению удовлетворяют только те значения x, при которых выполняется равенство $x^2-5x+10=2^4$.

Решая полученное квадратное уравнение, получим корни $x_1=6$, $x_2=-1$. Таким образом, множество $\{6\,;\,-1\}$ является решением исходного уравнения.

Пример 5. $\lg(2x-3)=\lg(x-1)$.

Указанное уравнение определено только при тех значениях x, для которых выполняются неравенства $2x-3>0$ и $x-1>0$. Учитывая эти условия, можно записать равносильное уравнение $2x-3=x-1$, откуда $x=2$. Поскольку число 2 удовлетворяет обоим неравенствам, то множество $\{2\}$ является искомым решением исходного уравнения.

Пример 6. $\log_x(x+2)=2$.

Данное уравнение определено для тех значений x, при которых выполняются условия $x>0$, $x\neq 1$ и $x+2>0$. При этих условиях можем записать равносильное уравнение $x+2=x^2$. Решая это квадратное уравнение, найдем два корня $x_1=-1$, $x_2=2$. Из них только $x=2$ удовлетворяет указанным условиям и поэтому является единственным корнем исходного уравнения.

Пример 7. $\log_3^2 x-5\log_3 x+6=0$.

Сделаем замену переменной $t=\log_3 x$. Тогда получим квадратное уравнение $t^2-5t+6=0$. Корнями этого уравнения являются числа $t=2$ и $t=3$. Возвращаясь теперь к сделанной ранее замене переменных, получим два уравнения $\log_3 x=2$ и $\log_3 x=3$. Отсюда следует, что множество $\{9;\ 27\}$ — решение исходного уравнения.

Пример 8. Решим систему уравнений $\begin{cases} x+y=11 \\ \lg x-\lg y=1. \end{cases}$

При решении данной системы уравнений надо учитывать, что второе уравнение системы определено только для значений $x>0$, $y>0$. Преобразуем это уравнение к виду $\lg\frac{x}{y}=1$, откуда $\frac{x}{y}=10$ или $x=10y$. Подставляя $x=10y$ в уравнение $x+y=11$, получим уравнение $10y+y=11$. Значит, $y=1$. Тогда $x=10$. Поскольку $x=10>0$, $y=1>0$, то система уравнений имеет решение: $\{(10;\ 1)\}$.

2. Неравенства. Решение простейших логарифмических неравенств, как и в случае показательных неравенств, можно свести к решению алгебраических неравенств. При этом используется свойство монотонности логарифмической функции.

Пример 9. Решим неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)>-3$.

Сначала представим число -3 в виде $\log_{\frac{1}{2}} 8$. Тогда получим неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)>\log_{\frac{1}{2}} 8$.

Оно определено только для тех значений x, при которых $3-x>0$. Так как основание логарифма, т. е. число $\frac{1}{2}<1$, то из свойств логарифмической функции следует выполнение неравенства $3-x<8$.

Таким образом, исходному логарифмическому неравенству удовлетворяют только те значения x, для которых выполняются неравенства $0<3-x<8$, откуда получим, что $-5<x<3$. Следовательно, решением исходного неравенства является интервал $(-5\ ;\ 3)$.

Пример 10. Решим неравенство $\lg(x+1)<\lg(2x-3)$.

Для заданного неравенства можно записать равносильную ему систему неравенств вида:

$$\begin{cases} x+1<2x-3 \\ x+1>0 \\ 2x-3>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x>4 \\ x>-1 \\ x>\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что решением последней системы неравенств, а значит и исходного логарифмического неравенства, является интервал $(4;+\infty)$.

Пример 11. $\log^2_{\frac{1}{2}} x-9\le 0$.

Учитывая, что $x>0$, сделаем замену в виде $t=\log_{\frac{1}{2}} x$. Тогда получим неравенство $t^2-9\le 0$. Решая его с помощью метода интервалов, получим решение $-3\le t\le 3$. Возвращаясь теперь к сделанной ранее замене переменных, имеем неравенства $-3\le \log_{\frac{1}{2}} x\le 3$, откуда $\frac{1}{8}\le x\le 8$. Так как все значения x, удовлетворяющие этим неравенствам, являются положительными, то отрезок $\left[\frac{1}{8}\ ;\ 8\right]$ есть решение исходного неравенства.

Пример 12. $\log_x \dfrac{x-0{,}5}{x+1}\ge 0.$

Для решения заданного неравенства нужно рассмотреть следующие два случая:

1) $x>1$. Так как $0=\log_x 1$, то можно записать равносильное неравенство $\dfrac{x-0{,}5}{x+1}\ge 1$. Решая полученное неравенство с помощью метода интервалов, получим $x<-1$. Но значения $x<-1$ не удовлетворяют условию $x>1$. Поэтому в указанном случае исходное логарифмическое неравенство не имеет решения.

2) $0<x<1$. В этом случае заданное логарифмическое неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases} \dfrac{x-0{,}5}{x+1}\le 1 \\ \dfrac{x-0{,}5}{x+1}>0. \end{cases}$

Решением первого из неравенств системы является интервал $(-1;+\infty)$. Решение второго неравенства есть множество $(-\infty;-1)\cup(0{,}5;+\infty)$. Тогда решением системы неравенств будет интервал $(0{,}5;+\infty)$. Но так как $0<x<1$, то в рассматриваемом случае решением логарифмического неравенства будет интервал $(0{,}5;\ 1)$. Окончательно имеем, что решением исходного логарифмического неравенства является интервал $(0{,}5;\ 1)$.

Вопросы и задания

1. Сколько корней имеет простейшее логарифмическое уравнение?
2. Какие известные способы решений применяются при решении систем логарифмических уравнений?
3. Какое свойство логарифмической функции используется при решении логарифмических неравенств?

Упражнения

1. Решить уравнение:

а) $\log_3 x=5$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} x=-2$;

в) $\log_{\frac{1}{3}}(3x-6)=-2$;

г) $\log_x 5=2$;

д) $2^x=9$;

е) $5^{4-x}=6$;

ж) $5^{x^2}=6$;

з) $5^{x^2}=\frac{1}{2}$;

и) $\lg(x^2-6x+19)=1$;

к) $\log_2(x-5)=\log_2(4x+1)$;

л) $\log_5(3-2x)=\log_{\frac{1}{5}} x$;

м) $\log_2(x+1)+\log_2(8-x)=3$;

н) $\lg(x^2+x-10)-\lg(x-3)=1$;

о) $\log_7^2 x - \log_7 x = 2$;

п) $\log_x 3+\log_3 x=2$;

р) $\log_3 x-2\cdot\log_x x^3=-4$;

с) $x^{\log_2 x}=16$;

т) $\log_5(5^x-4)=1-x$.

2. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases}2x-y=4\\ \log_2 x-\log_2 3y=-1\end{cases}$;

б) $\begin{cases}x^2-5y^2+1=0\\ \log_3 x-\log_3 y=0\end{cases}$;

в) $\begin{cases}\log_3(x-y)=1\\ \log_7 x+\log_7 y=1+\log_7 4\end{cases}$;

г) $\begin{cases}3^{x-y}=\dfrac{1}{3}\\ \log_2(x+1)+\log_2(y-1)=1.\end{cases}$

3. Решить неравенство:

а) $\log_8 x>2$;

б) $\log_8 x<2$;

в) $\log_{\frac{1}{2}} x>1$;

г) $\lg(3-2x)>1$;

д) $\log_3(2x-4)<\log_3(x+1)$;

е) $\log_3^2 x-3>2\cdot\log_3 x$;

ж) $|\log_3 x-2|<1$;

з) $\log_x\dfrac{x-3}{3x+5}>0$;

и) $2^{x+1}<3$;

к) $2^{|x+1|}>3$.

---

4. Решить уравнение:

а) $\dfrac{\lg x}{\lg(3x-4)}=1$;

б) $\dfrac{2\lg x}{\lg(5x-6)}=1$;

в) $\dfrac{1}{\lg x-6}+\dfrac{6}{\lg x+4}=1$;

г) $\log_4(2^x-7)=x-3$;

д) $|3^x-4|=1$;

е) $3^{|x+2|}=2$;

ж) $3^{|x+1|}=\dfrac{1}{2}$;

з) $\dfrac{\sqrt{\log_5(-x)}}{\log_5|x|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

и) $\log_2(x+2)+\log_2(x-2)=\log_2(6x-9)$;

к) $\log_5\log_2(x^2-4x+35)=1$;

л) $x^{\log_3 x}=3$;

м) $\lg x=11-x$.

5. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases}\log_2 x-\log_4 y=2\\ x-y^2+8=0\end{cases}$;

б) $\begin{cases}2^{x+y}=\dfrac{1}{4}\\ \lg(x+11)-\lg(2-y^2)=1\end{cases}$;

в) $\begin{cases}2^x\cdot 3^{y-1}=192\\ \log_2(x-y)=2\end{cases}$;

г) $\begin{cases}2^x\cdot 8^y=256\\ \log_3(x+y)+\log_3(xy)=2\log_3 4\end{cases}$;

д) $\begin{cases}\log_2|x-y|=3\\ \log_3 x-\log_3 y=2\end{cases}$;

е) $\begin{cases}\log_5 x+\log_5(x+y)=\log_5 y+\log_5(3x-y)\\ \log_3(x-y^2+3)=1\end{cases}$.

6. Решить неравенство:

а) $\log_7 x<-1$;

б) $\log_6(1-5x)>2$;

в) $\log_3(x+1)>\log_3(3x-7)$;

г) $\log_2[(x-4)(x+3)]<3$;

д) $\log_5 x+\log_5(x-1)>\log_5 6$;

е) $|1-2\lg x|>2$;

ж) $8^{\log_3 x}<1$;

з) $10^x<3\cdot 2^x$;

и) $\lg x+\dfrac{1}{\lg x}>\lg 100$;

к) $\log_x\dfrac{x+2}{x-\frac{1}{3}}<0$;

л) $\sqrt{\lg(x-2)}<1$;

м) $\lg\sqrt{x^2+x-2}\le\dfrac{1}{2}$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Сравнить числа:

а) $\sqrt[4]{27}$ и $3^{\frac{2}{3}}$; д) $7^{-0,3}$ и $7^{-\frac{1}{3}}$; и) $2^{-\sqrt{3}}$ и $2^{-\sqrt{5}}$;

б) $0,2^{\frac{3}{5}}$ и $0,2^{-\frac{3}{5}}$; е) $4,2^{-\sqrt{2}}$ и 1; к) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}$ и $3^{-\sqrt{3}}$.

в) $4^{0,5}$ и $4^{\sqrt{3}/3}$; ж) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}$ и 1;

г) $2^{-\frac{3}{4}}$ и $8^{-\frac{4}{9}}$; з) $\sqrt{3}^{\,0,2}$ и $3^{0,2}$;

2. Найти область определения функции:

а) $y=x^{-\frac{3}{8}}$; е) $y=5^{\sqrt{x^2-1}}$;

б) $y=(x-2)^{-2/3}$; ж) $y=\frac{1}{3^x+1}$;

в) $y=\sqrt{4x-x^3}$; з) $y=\frac{1}{3^{x^2}-9}$;

г) $y=\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$; и) $y=\sqrt{2^x-1}$;

д) $y=3^{\frac{1}{2-x}}$; к) $y=\frac{1}{5^x-1}+3^{\sqrt{x+1}}$.

3. Найти область значений функции:

а) $y=6x^{-2}$; в) $y=-6^x$; д) $y=3+4^{x+1}$;

б) $y=3-\sqrt[6]{x}$; г) $y=2^{-|x|}$; е) $y=5^{|x|}+1$.

4. Найти знак корня уравнения:

а) $\left(\frac{1}{9}\right)^x=5$; б) $0,4^x=0,1$.

5. Среди указанных ниже функций определите четные и нечетные функции:

а) $y=7^x+7^{-x}$; в) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$;

б) $y=8^x-8^{-x}$; г) $y=x\cdot\sqrt[3]{x}+x^2$.

6. Решить уравнение:

а) $8^x=2^{\frac{1}{5}}$; г) $121^x-7\cdot 11^x=5\cdot 11^x-11$;

б) $0,5^{x^2+x-3,5}=2\sqrt{2}$; д) $6^{2x}-5^{2x-1}=6^{2x-1}+5^{2x}$;

в) $4^{x+3}+4^x=130$; е) $125^x+20^x=2^{3x+1}$.

7. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=5 \\ 5^{y-x^2}=0,2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3^{x-1}=2^y \\ 0,1^{2x-y}=0,01. \end{cases}$

8. Определить значения a, при которых:

а) $a^{0,3}<a^{0,4}$; б) $\sqrt{a}\ge\sqrt[3]{a^2}$; в) $a^{\frac{2}{3}}>a^{0,6}$; г) $a^{-\frac{3}{2}}>a^{\frac{1}{2}}$.

9. Решить неравенство:

а) $3^{x^2-5}>\frac{1}{27}$; в) $4^x\cdot 5^{1-x}<\frac{25}{4}$; д) $16^x-7\cdot 4^x-8<0$;

б) $4^x\le 3^x$; г) $x^2\cdot 9^x-3^{2x+2}<0$; е) $6^{\frac{x-3}{x+8}}\ge 1$.

10. Сравнить числа:

а) $\log_2 3$ и 2; в) $\log_3 5$ и $2\cdot\log_3 2$;

б) $\log_{0,2} 5$ и $\log_{0,2} 6$; г) $\log_4 3$ и $\log_3 4$.

11. Определить знак выражения:

а) $\log_{\frac{1}{3}} 2\cdot\log_2 3$; б) $\log_3 2-\log_3 5$; в) $3-\log_2 9$; г) $\lg 2\cdot\lg 3$.

12. Найти x, если:

а) $\log_3 x=\log_3 0,3-\frac{1}{3}\log_3 27+2\log_3 5$; б) $\lg x=\frac{1}{2}+3\cdot\lg 2-\lg 5$.

13. Найти логарифм выражения по основанию 3 $(a>0,\ b>0)$:

а) $9a^3\cdot\sqrt[4]{b}$; б) $\frac{1}{3}\sqrt{ab}$; в) $\frac{b^4}{243a^2}$; г) $\frac{27a^5}{b^3\cdot\sqrt{b}}$.

14. Найти $\log_{45} 225$, если $\log_9 5=a$.

15. Найти область определения функции:

а) $y=\log_2(2x+7)$; в) $y=\log_{\frac{1}{3}}(4-x^2)$;

б) $y=\log_5(-8x)$; г) $y=\lg\frac{x-3}{x+8}$.

16. Построить график функции:

а) $y=5^x-2$; *в)* $y=\log_2(x-5)$; *д)* $y=\lg x^2$;

б) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x+1$; *г)* $y=\left|\log_{\frac{1}{3}}x\right|$; е) $y=10^{\lg(x+1)}$.

17. Найти область значений функции:

а) $y=|\log_5 x|-1$; *б)* $y=\lg x,\ x>0{,}1$.

18. Решить уравнение:

а) $\lg(x-9)+\lg(2x-1)=2$; *ж)* $x^{\lg x-1}=100$;

б) $\log_2\sqrt{x-3}+\log_2\sqrt{x+3}=2$; *з)* $x^{\log_6 x}=216x^2$;

в) $\lg(\lg x)=\frac{1}{2}\lg(3+2\lg x)$; *и)* $(x-3)\log_4 3=\log_4 3^{\sqrt{x+3}}$;

г) $x\cdot\lg 2=\lg(2^x+x+5)$; *к)* $\lg(5\cdot 2^x+9\cdot 10^x)=x+1$;

д) $x\cdot\lg 50-x=\lg(5^x+x-2)$; *л)* $\lg|x|=\sqrt{\lg(-x)}$.

е) $\lg x+\frac{9}{\log_x 10}=20$;

19. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases}5^{x-y}=1\\2^{\log_2(x+y)}=6\end{cases}$; *в)* $\begin{cases}\log_2 x+5^{\log_5 y}=4\\x^y=16\end{cases}$; *д)* $\begin{cases}2^x\cdot 5^y=40\\5^x\cdot 2^y=250\end{cases}$;

б) $\begin{cases}\log_{17}(3^x+2^y)=1\\3^{x+1}-4\cdot 2^y=-5\end{cases}$; *г)* $\begin{cases}\lg x+\lg y=4\\\lg x-\lg y=6\end{cases}$; *е)* $\begin{cases}3^x\cdot 3^y=81\\3^x-3^y=24\end{cases}$.

20. Решить неравенство:

а) $\log_3(x^2+x+1)\ge 1$; *д)* $\log_2(x^2+x-6)-\log_2(x+3)\le 1$;

б) $\log_{\sqrt{2}}(x^2-x)<2$; *е)* $\lg^2 x<\lg x^5-6$;

в) $\log_{(\sqrt{2}-1)}(3-6x)>2$; *ж)* $\log_3(4^x-5\cdot 2^x+13)>2$;

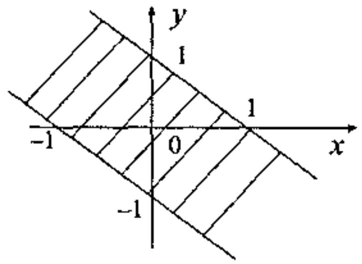
г) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{3x-9}{x-2}>-1$; *з)* $5^{x+7}>2$.

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

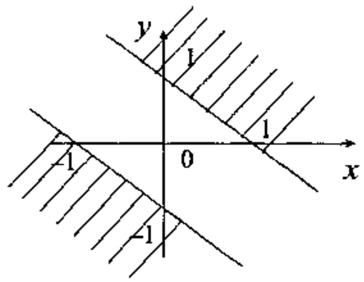
ГЛАВА I
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

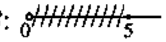
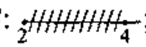
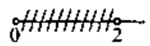
§ 1

1. *а)*

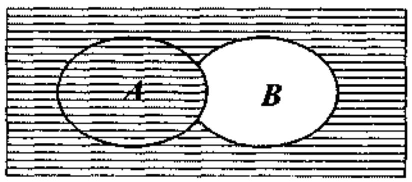


б)

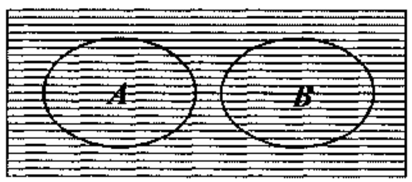


2. 8 человек. **3.** *а)* $[-5;5]$; *б)* $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$; *в)* $(-\infty,0]$; *г)* $(1,+\infty)$; *д)* $[-6;9)\cup(9,10)$. **4.** *а)* $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4\}$; *б)* $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4,..\}$; *в)* $A=\{\Delta,\square,1,2,3\}$, $B=\{\Delta,\square\}$. **5.** *а)* $A\cup B$:  ; *б)* $A\cap B$: ; *в)* $(A\cup B)\cap C$: .

6. *а)*



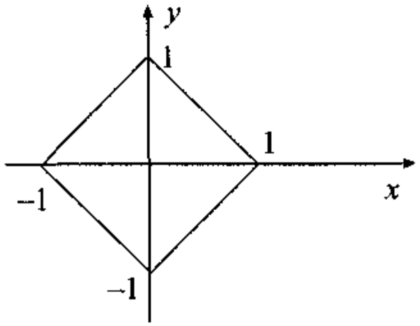
б)



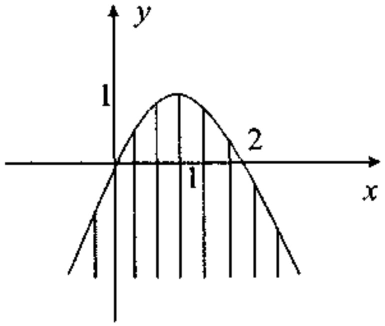
7. *а)* $(-1,1]$; *б)* $\left[-\sqrt{10},\sqrt{10}\right]$; *в)* $[1,+\infty]$. **8.** Пусть $x\in A\backslash B$, тогда $x\in A\wedge x\notin B$. Следовательно, $x\in A\ \wedge\ x\in E\backslash B$. Поэтому $x\in A\cap\overline{B}$. Таким образом, $A\backslash B\subset A\cap\overline{B}$. Аналогично доказывается, что $A\cap\overline{B}\subset A\backslash B$. **9.** Если $A\cap B=\varnothing$, то доказательство очевидно.

Пусть $A\cap B \neq \varnothing$. Предположим, что $A \cap B = \{c_1,c_2,\ldots,c_l\}$ и $A = \{a_1,a_2,\ldots,a_{m-l}, c_1,c_2,\ldots,c_l\}$, $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_{k-l}, c_1,c_2,\ldots,c_l\}$. Тогда $A\cup B=\{a_1,a_2,\ldots,a_{m-l}, c_1,c_2,\ldots,c_l, b_1,b_2,\ldots,b_{k-l}\}$. Откуда $n(A\cup B) = (m-l)+l+(k-l) = m+k-l = n(A)+n(B)-n(A\cap B)$.

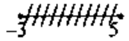
10. *а)*



б)

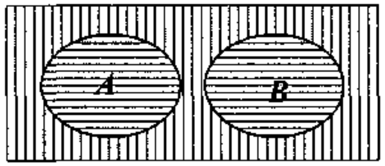


11. *а)* $\left(0;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$; *б)* $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$; *в)* $(-\infty;-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2};-1)\cup(1;\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$. **12.** *а)* $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{1,2\}$; *б)* $A=\{2\}$, $B=\{2\}$. **13.** *а)* $A\cap C=\varnothing$; *б)* $B\cup C$:

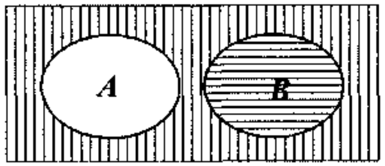


; *в)* $A\cap B\cap C=\varnothing$.

14. *а)*



б)



15. *а)* $\{0\}$; *б)* $\left[-\sqrt{a^2+b^2},\sqrt{a^2+b^2}\right]$; *в)* $[0,2]$. **17.** Пусть A – множество, состоящее из n элементов. Тогда известно, что число подмножеств из k элементов равно C_n^k. Поэтому, число всех подмножеств равно $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=(1+1)^n=2^n$.

§ 2

1. *а)* число 28 делится на 7; л; и; *б)* $4>5$; и; л.
2. *а)* $\neg(4<0)\equiv 4\geq 0$, нет; *б)* нет, поскольку кроме тупоугольных треугольников, существуют и треугольники с острым углом. **3.** *а)* $a\geq b$; *б)* $a>b$. **4.** *а)* $(a\cdot b\neq 0)\equiv(a\neq 0)\wedge(b\neq 0)$; *б)* $a^2+b^2=0\equiv(a=0)\wedge(b=0)$; *в)* $|a|=3\equiv(a=3)\vee(a=-3)$; *г)* $|a|>3\equiv(a<-3)\vee(a>3)$; *д)* $\frac{a}{b}\neq 0\equiv(a\neq 0)\vee(b=0)$. **5.** *а)*, *б)*, *в)* – истинно, *г)* – ложно.
6. Формулы принимают значение 1 при следующих значениях переменных: *а)* $P=1$; *б)* $P=1$; *в)* $P=1$, $Q=0$, $R=1$. **7.** *а)*, *б)* – тавтология; *в)* – противоречие.

8. *а)*

P	$\neg P$	$P\wedge\neg P$	$\neg(P\wedge\neg P)$
1	0	0	1
0	1	0	1

9. *а)*

A	B	$A\Rightarrow B$	$B\Rightarrow A$	$A\Leftrightarrow B$	$(A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

10. *а)* $6\leq 3$; и; л. *б)* существует четное простое число; л; и. **11.** *а)* $\neg(6<9)\equiv 6\geq 9$, да. **12.** *а)* $a<b$; *б)* $a\leq b$. **13.** *а)* $(a\cdot b=0)\equiv(a=0)\vee(b=0)$; *б)* $\frac{a}{b}=0\equiv(a=0)\wedge(b\neq 0)$; *в)* $|a|<3\equiv(a>-3)\wedge(a<3)$; *г)* $a^2+b^2\neq 0\equiv(a\neq 0)\vee(b\neq 0)$. **14.** *а)*, *б)* – истинно; *в)*, *г)* – ложно. **15.** Формулы принимают значение 1 при следующих значениях переменных: *а)* $P=1$, $Q=1$, $R=0$; *б)* $P=1$, $Q=0$, $R=0$. **16.** *а)* – противоречие; *б)*, *в)* – выполнимые.

17. *б)*

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P\Leftrightarrow Q$	$\neg P\Leftrightarrow\neg Q$	$(P\Leftrightarrow Q)\Leftrightarrow(\neg P\Leftrightarrow\neg Q)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

18. *г*)

A	B	C	$A\vee B$	$A\vee C$	$B\wedge C$	$A\vee(B\wedge C)$	$(A\vee B)\wedge(A\vee C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Ответы
к упражнениям для повторения

1. *а*) $A\backslash B = A$, $B\backslash A = B$, $A\cup B = \{1, 3, 5, 11, 13, 15\}$, $A\cap B = \varnothing$, $A' = \{2, 4, 6, 7, 8, \ldots, 20\}$, $B' = \{1,\ldots,10, 12, 14, 16, 17, 18, 19, 20\}$. **2.** *а*) $\forall x\ (x\in ((A\backslash B)\backslash C) \Leftrightarrow ((x\in (A\backslash B) \wedge x\notin C) \Leftrightarrow ((x\in A) \wedge (x\notin B) \wedge (x\notin C)) \Leftrightarrow (((x\in A) \wedge (x\notin C)) \wedge (x\notin B)) \Leftrightarrow ((x\in (A\backslash C)) \wedge (x\notin B)) \Leftrightarrow ((x\in (A\backslash C))\wedge(x\notin (B\backslash C))) \Leftrightarrow x\in ((A\backslash C)\backslash(B\backslash C))$. **3.** *а*) $\left(-\infty; \frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)\cup[2; 3]\cup\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}; +\infty\right)$; *б*) $(-\infty; 2)\cup[4; +\infty)$; *в*) $(1; +\infty)$; *г*) $(1; +\infty)$. **4.** *а*) $\left(1\frac{1}{3}; 6\right)$; *б*) $\varnothing$; *в*) $\left(-\infty; \frac{5-\sqrt{29}}{2}\right)\cup\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2}; +\infty\right)$; *г*) $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}; 0\right)\cup\left(3; \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$. **5.** *а*) $(A \Rightarrow \rceil B) \Rightarrow (B \Rightarrow \rceil A) \equiv \rceil(\rceil A\vee \rceil B) \vee (\rceil B \vee \rceil A) \equiv 1$; *б*) $A \wedge (A \Leftrightarrow B) \Rightarrow B \equiv A \wedge (\rceil A \vee B) \wedge (A \vee \rceil B) \Rightarrow B \equiv A \wedge B \Rightarrow B \equiv \rceil(A \wedge B) \vee B \equiv \rceil A \vee \rceil B \vee B \equiv \rceil A \vee 1 \equiv 1$. **6.** *а*) $A\Rightarrow B = 1$. Пусть $B = 1$. Тогда для любого C $(1 \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) = 1$. Если же $B = 0$, то из условия $A = 0$. Тогда для любого C $(0 \Rightarrow C) \Rightarrow (0 \Rightarrow C) = 1$; *в*) Если $\rceil A = 1$, то $A = 0$. Тогда $0 \Rightarrow B = 1$. **7.** Рассмотрим предикаты, определенные на N \ {1}: *а*) пусть $A(x)$ означает «x – составное число» и $B(x)$ означает «x – простое число». Тогда $A(x) \vee B(x) = 1$; *б*) пусть $A(x)$ означает «x – четное число», $B(x)$ означает «x – нечетное число». Тогда $A(x) \wedge B(x) = 0$.

ГЛАВА II
ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1

3. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109. **5.** Да. **7.** 397, 401, 409, 677, 701 – простые, 403, 679 – составные.

§ 2

2. *б*) Если $n = 1$, то $3^1 > 1$. Пусть $3^k > k$. Докажем утверждение при $n = k + 1$. Имеем $3^{k+1} = 3^k\cdot 3 > k\cdot 3 > k + 1$. **5.** *а*) Если $n = 1$, то $1=1^2$. Пусть $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$. Докажем, что $1 + 3 + 5 + \ldots + (2(k+1) - 1) = (k+1)^2$. Имеем $1 + 3 + 5 + \ldots + (2(k+1) - 1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$. **7.** *а*) Если $n = 1$, то $(1-1) \,\vdots\, 5$. Пусть $(k^5 - k) \,\vdots\, 5$. Докажем утверждение для $n = k + 1$. Имеем $(k+1)^5 - (k+1) = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1 = ((k^5 - k) + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)) \,\vdots\, 5$.

§ 3

1. *а*) $2^5\cdot 5$; *б*) $2\cdot 13\cdot 19$; *в*) $11\cdot 91$. **2.** *б*) 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199. **3.** *а*) 12,168; *б*) 9, 217; *в*) 24, 1170. **4.** 6, а именно: 20, 40, 140, 160, 220, 260. **5.** *а*) нет; *б*) 8; *в*) 3. **6.** *а*) 2520; *в*) 138600. **7.** 1. **8.** 223650. **10.** *а*) 1009. **11.** *а*) 1259, 1277, 1279, 1283, 1289, 1291, 1297. **12.** *а*) 8, 624; *б*) 30, 2418. **13.** $n = 20$. **14.** *а*) 1; *б*) 71; *в*) 60. **15.** *а*) 3276; *б*) 1116; *в*) 67818. **16.** 23. **17.** 4272.

§ 4

1. *а*) $q = 7$, $r = 150$; *б*) $q = 1$, $r = 0$; *в*) $q = 0$, $r = 100$. **4.** *а*) $203^{20} \equiv 3^{20} \equiv (3^4)^5 \equiv 81^5 \equiv 1^5 \equiv 1 (mod\ 10)$. **6.** *а*) $q = -2$, $r = 2$; *б*) $q = -4$, $r = 1$. **9.** Если число делится на 3 и на 4, то такое число делится и на 12.

§ 5

1. *а*) 10,8. **2.** *а*) 1,874999…; *б*) –1,(703). **5.** *а*) 4,63479… < 463497; *б*) $15{,}5 = \frac{62}{4}$; *в*) – 2,4833…> – 2,5829…. **6.** Например, $\frac{5{,}2}{0{,}3} = \frac{52}{3} = 17{,}333\ldots$ **7.** *а*) $\frac{25}{99}$; *б*) $101\frac{77}{90}$. **8.** *а*) 84/275. **9.** *а*) 0,4285714…; *б*) 0,(0); *в*) –0,3928571. **11.** *а*) – 16,0010…< – 16,0001; *б*) 0 < 0,000005…. **12.** *а*) $\frac{8}{11}$; *б*) $32\frac{1}{33}$.

§ 6

5. 1,732. **6.** *а)* 3,146; *б)* –1,486. **7.** 4,3778. **8.** *а)* 0,564; *б)* 1,04; *в)* 0,15; *г)* –1,22. **10.** *а)* $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$; *б)* $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}$; *в)* $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$. **13.** –1,734. **14.** *а)* 2,039; *б)* –1,014. **15.** –0,9137. **16.** *а)* 1,4; *б)* –2,2; *в)* 2,37; *г)* 0,91. **18.** *а)* $\sqrt{2}(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$; *б)* $\sqrt[3]{2}-1$; *в)* $\frac{\sqrt[3]{3}-1}{2}$.

Ответы
к упражнениям для повторения

1. 1, 3, 5, 7. **2.** 24, 25, 26, 27, 28. **3.** $n = 3, 9, 27$. **4.** $p = 3$. **6.** Если $n = 1$, то $15^1 = 15 = 7 \cdot 2 + 1$, $r = 1$. Пусть $15^k = 7 \cdot m + 1$. Если $n = k + 1$, то $15^{k+1} = 15^k \cdot 15 = (7 \cdot m + 1) \cdot 15 = 7(15m) + 15 = 7(15m + 2) + 1$, $r = 1$. **10.** d. **14.** $x = 3k$, $\forall k \in Z$. **15.** Применить бином Ньютона. **16.** *а)* $\frac{1}{2}(\sqrt[4]{13}+\sqrt{3})(\sqrt{13}+3)$; *в)* $3-\sqrt{2}$; *г)* $1-\sqrt{2}$; *д)* $\sqrt{3}-1$; *е)* $\sqrt{3}-\sqrt{5}$. **17.** *а)* 2; *б)* 1,5; *г)* 2,4. **18.** *а)* 32/99; *б)* 0,8; *в)* 387/495.

ГЛАВА III
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

§ 1

1. *а)* $\mathrm{Re}(\alpha)=-3$, $Jm(\alpha)=7$; *в)* $\mathrm{Re}(\alpha)=-2$, $Jm(\alpha)=-5$; *д)* $\mathrm{Re}(\alpha)=0$, $Jm(\alpha)=3$. **2.** *а)* $\alpha=4-5i$; *в)* $\alpha=8i$; *г)* $\alpha=7$. **3.** $4-3i$ и $\sqrt{16}-\sqrt{9}i$; $3+4i$ и $\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{64}\,i$. **4.** *а)* $\bar{\alpha}=5+3i$; *в)* $\bar{\alpha}=1+i$; *д)* $\bar{\alpha}=7{,}2$; *ж)* $\bar{\alpha}=4+3i$. **5.** *а)* $-3+2i$; *в)* 0; *д)* 16; *ж)* $3+i$. **6.** *а)* $-1+2i$; *в)* $6+2i$; *д)* $-\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$; *ж)* $\frac{34+\sqrt{3}}{4}+i$. **7.** *а)* $-12+34i$; *в)* $-6-48i$; *д)* $1\frac{1}{6}-\frac{1}{6}i$. **8.** *а)* $-\frac{2}{5}+\frac{6}{5}i$; *в)* $-\frac{7}{25}+\frac{24}{25}i$; *д)* $-\frac{23}{13}-\frac{2}{13}i$; *ж)* $\frac{5}{3}-\frac{2}{3}i$; *и)* $-\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i$. **9.** *а)* $-5-10i$; *в)* $1{,}7-0{,}1i$; *д)* $\frac{12}{13}$. **10.** *а)* $1+i$; *в)* $0{,}5+3{,}5i$. **11.** *а)* $(a+3bi)(a-3bi)$; *в)* $(4a+2\sqrt{2}bi)(4a-2\sqrt{2}bi)$; *д)* $(2\sqrt{2}a+3\sqrt{3}b^2i)(2\sqrt{2}a-3\sqrt{3}b^2i)$; *ж)* $\left(a^{\frac{n}{2}}+\sqrt{11}b^{\frac{n}{2}}i\right)\left(a^{\frac{n}{2}}-\sqrt{11}b^{\frac{n}{2}}i\right)$.
13. *а)* $9+7i$; *в)* $28i$; *д)* $-3+10i$. **14.** *а)* $-7{,}5+7{,}5i$; *в)* $0{,}62-0{,}34i$; *д)* $\frac{399}{221}+\frac{19}{221}i$; *ж)* $-\frac{3}{8}-i$. **15.** *а)* $-5-12i$; *в)* $24i$; *д)* $-2-1{,}5i$; *ж)* $\frac{72}{289}-\frac{154}{289}i$. **16.** *а)* $\frac{1}{15}+\frac{13}{15}i$; *б)* $\frac{37}{50}+\frac{41}{50}i$. **17.** (–2;3), (–2;–3). **19.** $\frac{7}{5}+\frac{11}{5}i$.

§ 2

1. *а)* $|\alpha|=\sqrt{13}$; *в)* $|\alpha|=2$; *д)* $|\alpha|=10$; *ж)* $|\alpha|=2$; *и)* $|\alpha|=1$; *к)* $|\alpha|=13$.
2. *а)* $\varphi=\frac{\pi}{6}$; *в)* $\varphi=\frac{5\pi}{3}$; *д)* $\varphi=0$; *ж)* $\varphi=\frac{11\pi}{6}$.
3. *а)* $\alpha=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{5\pi}{4}\right)$; *в)* $\alpha=2\cdot\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{11\pi}{6}\right)$; *д)* $2\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{7\pi}{4}\right)$; *ж)* $\alpha=\sqrt{11}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{11\pi}{6}\right)$; *и)* $\alpha=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}$.
4. *а)* $\alpha_1\cdot\alpha_2=\frac{\sqrt{3}}{4}(\cos\frac{5\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{5\pi}{12})$; *в)* $\alpha_1\cdot\alpha_2=\cos\frac{13\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{13\pi}{12}$.
5. *а)* $\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{24}+i\cdot\sin\frac{\pi}{24})$; *в)* $\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}$. **6.** *а)* $243\cdot(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3})$; *в)* $8\sqrt{2}\cdot(\cos\pi+i\cdot\sin\pi)$; *д)* $\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}$. **7.** *а)* $\cos3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi$; *б)* $\sin3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi$; *г)* $\sin4\varphi=4\cos^3\varphi\cdot\sin\varphi-4\cos\varphi\cdot\sin^3\varphi$.
8. *а)* $-4i$; *в)* 4. **9.** *а)* $\alpha_0=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6})$, $\alpha_1=\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{7\pi}{6})$; *в)* $\alpha_0=\cos\frac{\pi}{8}+i\cdot\sin\frac{\pi}{8}$, $\alpha_1=-\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}$. **10.** $\sqrt[3]{\alpha}=\alpha_0=2\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$, $\alpha_1=2\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right)$, $\alpha_2=2\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$; $\sqrt[4]{\alpha}=\alpha_0=\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ $\alpha_1=\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{8\pi}{12}+i\sin\frac{8\pi}{12}\right)$, $\alpha_2=\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{14\pi}{12}+i\sin\frac{14\pi}{12}\right)$, $\alpha_3=\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$.
12. *а)* $x_1=-2(1-\sqrt{3})\,i$, $x_2=-2(1+\sqrt{3})\,i$; *в)* $x_1=4i+2\sqrt{7}\,i$, $x_2=4i-2\sqrt{7}\,i$; **13.** *в)* $\alpha_{1,2}=\pm\sqrt{11}$, $\alpha_{3,4}=\pm1$.

Ответы
к упражнениям для повторения

1. а) 52; в) $-\frac{3-i}{2}$. **2.** а) $\frac{2}{9}+\frac{2\sqrt{3}}{9}i$. **3.** а) $32i$; в) $-256i$. **4.** $\alpha=1$; $\alpha=\cos 0+i\sin 0$. **5.** а) $\mathrm{Re}(\alpha)=-7/25, \mathrm{Im}(\alpha)=24/25$; в) $\mathrm{Re}(\alpha)=0$; $\mathrm{Im}(\alpha)=-1$. **6.** а) $-\frac{42}{29}$; б) $-18i$. **7.** а) при $x_1=1, y_1=2$; $x_2=2, y_2=1$; $x_3=1, y_3=-2$; $x_4=-2, y_4=1$. **8.** а) $x_1=\sqrt{\frac{3}{2}}$, $y_1=1/2$; $x_2=-\sqrt{\frac{3}{2}}$, $y_2=1/2$; б) $x=6$, $y=5$. **10.** а) $4\sqrt{6}(\cos 25^\circ+i\sin 25^\circ)$. **11.** а) $5(\cos 70^\circ+i\sin 70^\circ)$. **12.** а) $16(1+\sqrt{3}i)$; б) -1; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 i$. **13.** а) $Z_0=-3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1/2i\right)$, $Z_1=-3(\cos 5\pi/6+i\sin 5\pi/6)$; в) $Z_0=2(\cos\pi/12+i\sin\pi/12)$, $Z_1=2(\cos 7\pi/12+i\sin 7\pi/12)$, $Z_2=2(\cos 13\pi/12+i\sin 13\pi/12)$, $Z_3=2(\cos 19\pi/12+i\sin 19\pi/12)$. **14.** а) $Z_1=1-i$, $Z_2=i$; б) $Z_1=1+i$, $Z_2=-2i$. **15.** а) $Z_1=3-i$, $Z_2=-1+2i$; б) $Z_1=3+7i$, $Z_2=-3-3i$.

ГЛАВА IV
МНОГОЧЛЕНЫ

§ 1

4. а) 10^4; в) -3; д) $\frac{1}{9}$; ж) 225; и) $\frac{17}{2}$. **8.** а) a^{-8}; в) b^{-10}; д) x^2y^{-6}; ж) $1/81a^8$. **9.** а) b^9/a^{15}; в) $\frac{4a^{10}b^6}{9}$. **10.** а) $\frac{ab}{b-a}$; б) $b-a$; в) $\frac{1}{a^2b^2}$; г) 1. **11.** а) 3/16; б) 13.

§ 2

1. в) $\frac{2}{3}a^2b^4$; г) $-6x^4y^6$. **2.** в) $3x^4y^6$; г) $-3a^5b^5x^6$. **3.** а) $64a^5b^{11}$; в) $-6x^6y^3$. **4.** а) $-0{,}1x^4y^6$; в) x^4y^4. **5.** а) $27x^6$; в) $-a^{10}b^5c^{15}$. **6.** а) $-0{,}216m^9n^6$; в) $b^8x^4y^{16}$. **7.** а) $(11a^3)^2$; в) $\left(\frac{2}{3}b^3\right)^2$. **8.** а) $x^{10}y^5$; в) $-1/2m^8n^4$. **10.** а) $2a^2x^3+a^4-a^2x^5$; б) $16xy^2-16x^2y$. **11.** а) 107.

12. а) $-8a^5+17a^4-a^3+3a-1$. **13.** а) $0{,}2a^2+0{,}35a+1{,}2$; в) $2xy-4x^2$. **14.** а) $-4x+2$; в) $2a^3$. **15.** а) $7x^2-20x$; в) ax^2-8a^2x. **17.** а) $2x^2+2x+4$; в) $1{,}6x^2+5{,}5$. **20.** а) $P(x)=Q(x)(x+1)+2$; в) $P(x)=Q(x)(x^2-2x+7)-7x-4$; д) $P(x)=Q(x)(4x^3-3x^2+12x-44)+316x^2+32x-7$; ж) $P(x)=Q(x)(2x^2+x)+4x^3-10x^2+3x+6$. **21.** а) $4x^2+11x+15$; в) $2x^3+4x^2+1$. **22.** а) -42; в) 50.

§ 3

1. в) $0{,}25x^4y^4+0{,}2x^3y^3+0{,}04x^2y^2$. **2.** в) $(9x^3y-0{,}6a)(9x^3y+0{,}6a)$. **3.** в) $3b\cdot(3b-4a^2)$. **4.** в) $\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y\right)\cdot\left(\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{15}xy+\frac{1}{25}y^2\right)$. **5.** в) $27x^3-108x^2y+144xy^2-64y^3$. **6.** а) $128a^7+1344a^6b+6048a^5b^2+15120a^4b^3+22680a^3b^4+20412a^2b^5+10206ab^6+2187b^7$; б) $a^3+3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)+6abc+c^3$. **7.** а) $252\cdot 30^5a^{10}x^{10}$. **8.** $-792\cdot(3a)^7\cdot 2^5$.

§ 4

1. а) $x+1$; в) 1. **2.** $a=2$. **3.** $a=4$; $b=0$.

Ответы
к упражнениям для повторения

1. в) 5; д) 2; ж) $\frac{3}{2}$. **2.** а) $-0{,}39x^5y^5z^6$; в) $\frac{5}{4}x^3y^5z^3$. **3.** а) $2a$; в) $5p^4+p^2$. **4.** а) $5a^6b^4-12a^7b^5$; в) $-\frac{29}{7}a^5x^7+\frac{29}{5}a^4x^5+29a^6x^6$. **5.** а) $\frac{1}{12}a^2-12b^2$; в) $\frac{1}{4}a^2-9b^2$; д) $-15c^2+38dc+6cx-8dx-24d^2$. **6.** а) $(2nk+5m)(3mk-7n^2)$; в) $(a-3b)(5y+x)$. **7.** а) 9900. **8.** а) $(a+1)(a+2)$; в) $(a+8)(a-1)$. **9.** а) $(x-1)(x^2+3x+3)$. **10.** а) $3(a+b)(3b-a)$; в) $(2a-3b)(4a+b)$. **11.** а) 7,73; в) $8\frac{4}{9}$. **12.** а) $(a^2-a-1)(a^2-a+1)$. Указание: $a^4-2a^3+a^2-1=a^2(a-1)^2-1^2$; б) $(c^4-c^2-1)(c^2+c+1)\times(c^2-c+1)$; в) $(a-b+1)(a^2+b^2+ab-a-2b+1)$; д) $4ab(b-a)(b+a)$. **13.** Указание: возвести в куб $c=-(a+b)$. **14.** а) $32a^5-240a^4+720a^3-$

$-1080a^2+810a-243$. **15.** $\frac{27}{32}$. **16.** $13\cdot17\cdot19\cdot44x^{20}$. **17.** *а)* x^2-2x+5 и $R=-3$; *в)* $2x^3-4x^2+3x-5$ и $R=x-12$. **18.** $n\geq4$. **19.** $n=4k-1$, где k – натуральное число, $n\neq7$. **20.** *а)* $a=\frac{1}{7}$, $b=-\frac{1}{7}$.

ГЛАВА V
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 1

1. *а)* $x\in R,\ y\in R,\ x\neq0,\ x\neq-y$; *б)* $x\in R,\ y\in R,\ |x|\neq2|y|$; *г)* $x\in R,\ y\in R,\ x\neq4,\ x\neq-3$; *д)* $x\in R,\ y\in R,\ y\neq5$; е) $x\in R,\ y\in R,\ x\neq-y$. **2.** *а)* $-\frac{1}{2a}$; *в)* $\frac{x-3m}{x+3m}$; *д)* $\frac{b}{b-1}$. **3.** *а)* $a-3$; *в)* $2-a$. **4.** *а)* $\frac{x-1}{x^2-9}$; *в)* $\frac{ab}{a^2-b^2}$. **5.** *а)* $\frac{2a^3}{a^2-b^2}$; *в)* $\frac{2(x-1)}{x+1}$. **6.** *а)* $\frac{2}{3}$; *в)* $(a+b)\cdot(x-y)$. **7.** *а)* $\frac{(a+3b)(4d-c)}{c+4d}$; *в)* $\frac{2}{3}\cdot\frac{a-b+1}{x+y+1}$. **8.** *а)* $\frac{ab}{a+b}$; *в)* 2. **9.** *а)* $\frac{4ab}{a^2-b^2}$; *в)* $\frac{2a-1}{2a(2a+1)}$.

§ 2

1. *б)* 21. **2.** *а)* 20; *в)* 2,1. **3.** *б)* 9. **4.** *б)* 108. **5.** *а)* $2ab^2$; в) $2a^3b^4$. **6.** *а)* $2a^2b^2$; *в)* 2a; *д)* 2c. **7.** *а)* ab; *в)* $\frac{2x}{y}$; *д)* $\frac{2x}{y^2}$. **10.** *а)* $a^{\frac{5}{6}}$; *в)* $c^{\frac{1}{3}}$; *д)* x. **11.** *а)* $a^{-2}b^6$; *в)* xy^3. **12.** *а)* $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$; *в)* $\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}$. **13.** *а)* $\frac{1}{a}$; *в)* $\alpha+\beta$. **14.** *а)* $-x$; *в)* $\frac{3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{a-b}$. **15.** *в)* a^2b^3; *д)* a^2b; *ж)* a^3b. **16.** *а)* $\frac{5}{3}$; *в)* $\frac{5}{2}$; *д)* 3. **17.** *а)* $\frac{a^2b}{c}$; *в)* abc. **18.** *а)* 5; *в)* 8. **19.** *а)* 6; *в)* –5. **20.** *а)* $\frac{1}{a}$; *в)* $a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{-1}{3}}$. **21.** *а)* $-2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$; *в)* $\frac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{x-y}$.

§ 3

1. *а)* $\sqrt{2}$; *в)* $\frac{1}{2}$. **2.** *а)* 4; *в)* $2a^2$. **3.** *а)* 7. **5.** *в)* $7+\sqrt{6}$; **6.** *а)* –6. **8.** *а)* $\sqrt[4]{a}+\sqrt[3]{b}$; *в)* $\sqrt[4]{a^2}-\sqrt[4]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}$. **9.** *а)* $-\sqrt[4]{b}$; *в)* 1. **10.** *а)* $\frac{1}{a}$. **11.** *а)* $\sqrt[3]{a^2}+2$; *в)* 2. **12.** *а)* $3\sqrt{2}$. **13.** *а)* $xy(x^3+y^3)$. **14.** *а)* $2+\sqrt{6}-\sqrt{2}$; *в)* $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{49}$. **15.** *а)* $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. **16.** *а)* a; *в)* $\frac{\sqrt{ax}}{a-2x}$.

Ответы
к упражнениям для повторения

1. *а)* $-\frac{16x^2+12xy^2+9y^4}{3y^2+4x}$; *в)* b^2+2b+2. **2.** *а)* $b\cdot\frac{2a+3}{2a-3}$. **4.** *а)* –1; *в)* $\frac{(3a-4b)(b+2)}{b-2}$. **6.** *а)* $\frac{1}{x+2}$; *в)* $\frac{1}{x+y}$. **7.** *а)* $-\frac{a+a^{0,5}b^{0,5}+b}{a^{0,5}+b^{0,5}}$; *в)* $\frac{b^{\frac{4}{7}}-a^{0.4}}{b^{\frac{8}{7}}-a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{4}{7}}+a^{\frac{4}{5}}}$. **8.** ab. **9.** $\frac{1}{2a-a^2}$, где $0<a<2$; при $a=1$. **10.** *а)* $a+b$, где $a>0$, $b>0$; *б)* $a+b$, где $a>0$, $b>0$. **11.** $2(b+a)$, где $a>0$, $b>0$, $a\neq b$. **12.** a, где $a>0$, $b>0$.

ГЛАВА VI
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 1

1. *а)* да; *б)* нет; *в)* да; *г)* да. **2.** *а)* $\{-4;5;11\}$; *б)* $\{-5,5;5\}$. **3.** а, б, д, е; в, г; ж, з. **4.** *а)* да; *б)* нет; *в)* да; *г)* да. **5.** *а)* $\{-1,25;4;8\}$; *б)* $\left\{-\frac{19}{7};0;\frac{5}{3}\right\}$; *в)* $\{-0,5;0;0,75\}$. **6.** *а, б, г, д, з.*

§ 2

1. *а)* $\{-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2};3\}$; *б)* $\{-2,5\}$; *в)* $\{-2,5;1;1,4\}$; *г)* $\left\{-1;0;\frac{4}{3}\right\}$. **2.** *а)* $\{-1;-3;-5\}$; *б)* $\{-1;-0,5;2\}$; *в)* $\left\{1;-1;-\frac{2}{3}\right\}$; *г)* $\{2;3\}$; *д)* $\{-1;-2;-3\}$. **3.** *а)* $\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$; *б)* $\{0,5\}$; *в)* $\left\{-0,5;3;-\frac{2}{3}\right\}$;

г) $\{-0{,}25; -0{,}2; -2\}$. **4.** *а)* $\left\{-\sqrt{\sqrt{10}-3}; \sqrt{\sqrt{10}-3}\right\}$; *б)* $\left\{0; -\sqrt{4+\sqrt{23}}; \sqrt{4+\sqrt{23}}\right\}$.
5. *а)* $\{3\}$; *б)* $\{-0{,}5\}$; *в)* $\varnothing$. **6.** *а)* $\varnothing$; *б)* $\{0; 1\}$. **7.** *а)* $\{2; 5; -5; -1\}$;
б) $\left\{-2; 2; \frac{3}{4}; -\frac{1}{3}\right\}$; *в)* $\left\{-1{,}5; -1; 1; \frac{2}{3}\right\}$; *г)* $\left\{-0{,}5; -1; \frac{1}{7}; 4\right\}$. **8.** *а)* $\{2\}$; *б)* $\{1\}$;
в) $\left\{\frac{2}{3}\right\}$. **9.** $\left\{-\sqrt{\frac{17}{2}+\frac{\sqrt{291}}{2}}; \sqrt{\frac{17}{2}+\frac{\sqrt{291}}{2}}\right\}$. **10.** *а)* $\left\{\frac{3-\sqrt{3}}{2}; \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right\}$;
б) $\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{5-\sqrt{29}}{2}; \frac{5+\sqrt{29}}{2}\right\}$.

§ 3

1. *а)* $\{-3\}$; *б)* $\{0\}$; *в)* $\{0\}$; *г)* $\{27\}$; *д)* $\{5\}$. **2.** *а)* $\{-4\}$; *б)* $\{-7\}$; *в)* $\{4\}$; *г)* $\left\{\frac{7}{3}\right\}$;
д) $\{-71\}$. **3.** *а)* $\{10{,}25; 30{,}625\}$; *б)* $\{-3; 5\}$; *в)* $\left\{\frac{73}{9}; \frac{385}{27}\right\}$; *г)* $\{9; 5\}$. **4.** -1.
5. *а)* $x^2+x-6=0$; *б)* $x^2-2x-15=0$; *в)* $x^2-6x+7=0$; *г)* $x^2-5=0$.
6. *а)* $x^2-6x+2=0$; *б)* $x^2+10x+22=0$; *в)* $x^2-x+2{,}75=0$.

§ 4

1. *а)* $\{-1\}$; *б)* $\{-1; 3-\sqrt{8}; 3+\sqrt{8}\}$. **2.** *а)* $\left\{1; \frac{-11-\sqrt{85}}{6}; \frac{-11+\sqrt{85}}{6}\right\}$;
б) $\{1\}$. **3.** *а)* $\varnothing$; *б)* $\left\{\frac{\left(1+\sqrt{12}+\sqrt{5+2\sqrt{12}}\right)}{2}; \frac{\left(1+\sqrt{12}-\sqrt{5+2\sqrt{12}}\right)}{2}\right\}$;
в) $\varnothing$; *г)* $\left\{-2; 1{,}5; \frac{-1-\sqrt{3}}{2}; \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right\}$. **4.** *а)* $\{-1; 2; 0{,}5\}$; *б)* $\{-1\}$.
5. *а)* $\left\{0{,}115+\frac{\left(\sqrt{4{,}21}+\sqrt{0{,}1684}\right)}{2}; -0{,}105+\frac{\left(\sqrt{4{,}21}-\sqrt{0{,}1684}\right)}{2}\right\}$; *б)* $\varnothing$.
6. *а)* $\{1\}$; *б)* $\left\{1; 2; \frac{-5+\sqrt{17}}{2}; \frac{-5-\sqrt{17}}{2}\right\}$.

§ 5

1. *а)* $\{-2; -1; 1\}$; *б)* $\{2\}$; *в)* $\{1; 3\}$; *г)* $\{-3; 1\}$. **2.** *а)* $\left\{-\frac{1}{3}; -1; \frac{1}{2}; 1\right\}$;
б) $\left\{-2; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right\}$; *в)* $\left\{\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; -\frac{2}{3}\right\}$; *г)* $\left\{-2; 1; -\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right\}$. **3.** *а)* $\varnothing$; *б)* $\{2; 3\}$;
в) $\{-1; 3+2\sqrt{2}; 3-2\sqrt{2}\}$; *г)* $\left\{-1; 1; \frac{-3+\sqrt{5}}{2}; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right\}$. **4.** *а)* $\{5\}$;
б) $\{-4; -2; 1; 3\}$. **5.** *а)* $\{-1\}$; *б)* $\{1; 5\}$. **6.** *а)* $\{-3; 1\}$;
б) $\{-6; -2; -4-\sqrt{6}; -4+\sqrt{6}\}$.

§ 6

1. *а)* $\varnothing$; *б)* $\left\{-2; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right\}$; *в)* $\{12\}$; *г)* $\{-10; 0\}$. **2.** *а)* $\{-6; 0\}$; *б)* $\{-5; 0\}$.

§ 7

1. *а)* меньше; *б)* равно; *в)* больше; *г)* меньше; *д)* меньше; *е)* больше.
2. *а)* нет; *б)* да; *в)* да; *г)* нет; *д)* да; *е)* да; *ж)* нет. **3.** *а)* $\sqrt[5]{5} < \sqrt{2} = \sqrt[4]{4} < \sqrt[3]{3}$;
б) $1{,}0(9) = 1{,}1 < \frac{10}{9}$; *в)* $1\frac{1}{3} < 1\frac{1}{2} < 1\frac{5}{9} < 1\frac{4}{7}$; *г)* $-\sqrt[3]{3} < -\sqrt{2} = -\sqrt[4]{4} < -\sqrt[5]{5}$.
4. Все равны. **5.** Все равны. **6.** *а)* равно; *б)* меньше; *в)* меньше; *г)* меньше; *д)* меньше. **7.** *а)* меньше; *б)* меньше; *в)* меньше; *г)* меньше.

§ 8

1. *а)* $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right]$; *б)* $(-3{,}5; +\infty)$; *в)* $\left(-\infty; \frac{7}{3}\right)$; *г)* $(-7; +\infty)$; *д)* $\left(-\infty; \frac{31}{8}\right)$;
е) $(-\infty; -8{,}2]$; *ж)* $[1{,}25; +\infty)$; *з)* $\left(\frac{11}{4}; +\infty\right)$; *и)* $(-\infty; +\infty)$. **2.** *а)* $\left(\frac{11}{4}; +\infty\right)$;
б) $\left(-\infty; -\frac{133}{108}\right)$; *в)* $\left(\frac{102}{53}; +\infty\right)$; *г)* $\left(-\infty; \frac{1212}{305}\right)$; *д)* $\left(-\frac{265}{94}; +\infty\right)$;
е) $\left[\frac{1007}{108}; +\infty\right)$. **3.** *а)* $(-\infty; 1] \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$; *б)* $(-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$;
в) $(-\infty; 1] \cup [10; +\infty)$; *г)* $\varnothing$; *д)* $\varnothing$; *е)* $\varnothing$; *ж)* $(-\infty; 6) \cup (6; +\infty)$.
4. *а)* $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{109}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{109}}{2}; +\infty\right)$; *б)* $(-\infty; +\infty)$;

в) $(15-2\sqrt{37};15+2\sqrt{37})$; *г)* $\left(-\infty;\frac{-3-\sqrt{1089}}{10}\right)\cup\left(\frac{-3+\sqrt{1089}}{2};+\infty\right)$; *д)* $\left[-\frac{10}{3};0\right]$. **5.** *а)* $(-\infty;3{,}5)$; *б)* $\left(-\infty;-\frac{23}{11}\right)$; *в)* $\left(-\infty;\frac{11-\sqrt{105}}{4}\right)\cup\left(\frac{11+\sqrt{105}}{4};+\infty\right)$ *г)* $\varnothing$; *д)* $\left(-\infty;\frac{13-\sqrt{197}}{2}\right)\cup\left(\frac{13+\sqrt{197}}{2};+\infty\right)$; *е)* $\varnothing$.

§ 10

1. *а)* $\left[-4;\frac{3}{7}\right]\cup[5;+\infty)$; *б)* $\left(-\frac{11}{7};-1\right)\cup(6;+\infty)$; *в)* $\left(-\infty;\frac{3}{5}\right)$; *г)* $(-\infty;-0{,}5)\cup[5;+\infty)$; *д)* $(-\infty;-1]\cup[7;+\infty)$; *е)* $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup(2;+\infty)$; *ж)* $(0{,}25;1)$; *з)* $\left(-\infty;\frac{3}{7}\right)\cup\left[\frac{16}{23};+\infty\right)$; *и)* $\left(-\sqrt{7};\frac{15-\sqrt{21}}{2}\right)\cup\left(\sqrt{7};\frac{15+\sqrt{21}}{2}\right)$; *к)* $(0;0{,}5)\cup(1;+\infty)$. **2.** *а)* $(0{,}5;+\infty)$; *б)* $\left(\frac{1}{7};+\infty\right)$; *в)* $\left(-\infty;\frac{85}{78}\right)$; *г)* $\varnothing$. **3.** *а)* 1; *б)* 0; *в)* 4; *г)* 4. **4.** *а)* 0; *б)* 0; *в)* −4; *г)* 0; *д)* 1.

§ 11

1. *а)* $\{-3;7\}$; *б)* $\varnothing$; *в)* $\{2{,}5\}$; *г)* $\left\{-\frac{10}{3};-2\right\}$; *д)* $\{0{,}5\}$; *е)* $\left\{-2;-\frac{16}{13}\right\}$; *ж)* $\{-0{,}25;1\}$; *з)* $\varnothing$; *и)* $\{1;5\}$; *к)* $\left\{-\frac{6}{11};\frac{8}{7}\right\}$; *л)* $\varnothing$; *м)* $(-\infty;0]$.
2. *а)* $[-3;7]$; *б)* $(-\infty;-9)\cup(3;+\infty)$; *в)* $\varnothing$; *г)* $(-\infty;+\infty)$; *д)* $(-\infty;0{,}4]\cup[1{,}2;+\infty)$; *е)* $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]\cup[1;+\infty)$; *ж)* $(-\infty;+\infty)$; *з)* $\left(-\infty;-\frac{1}{7}\right]\cup(1;+\infty)$; *и)* $(-2;0)$; *к)* $(-\infty;+\infty)$. **3.** *а)* $\left\{-\frac{1}{11}\right\}$; *б)* $\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{13}-3}{2}\right\}$; *в)* $\{-2;0;2;4\}$; *г)* $\varnothing$. **4.** *а)* $[-0{,}5;+\infty)$; *б)* $\left[\frac{5-\sqrt{17}}{2};\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right]$; *в)* $(0{,}5;+\infty)$; *г)* $(-\infty;-8]\cup[10;+\infty)$; *д)* $\varnothing$.

§ 12

1. *а)* да; *б)* нет; *в)* нет; *г)* да. **2.** *а)* $(1;2)$; *б)* $(-3;1)$. **3.** *а)* $(2;1;3)$; *б)* $(2;0;-1)$. **4.** *а)* $(2;-1)$; *б)* $(4;-3)$. **5.** *а)* 14; *б)* 25; *в)* 34; *г)* −6; *д)* 0; *е)* −14; *ж)* 0; *з)* 0. **6.** *а)* $(3;1)$; *б)* $(-2;1)$. **7.** *а)* $(2;-1;3)$; *б)* $(2;3;-1)$. **8.** *а)* $(3;-2)$; *б)* $(3;-1)$. **9.** *а)* 35; *б)* 64; *в)* 0; *г)* 32; *д)* −6; *е)* 0. **10.** *а)* $(2;-1;3)$.

§ 13

1. *а)* $\{(2;1),(2;-1),(-2;-1),(-2;1)\}$; *б)* $\{(5;3),(2;6)\}$.
2. *а)* $\{(4;3),(4;-3),(-5;0)\}$; *б)* $\{(2;1),(1;2),(-2;-1),(-1;-2)\}$. **3.** *а)* $\{2;3\}$; *б)* $\{(3;2),(2;3),(\sqrt{10}+3;\sqrt{10}-3),(\sqrt{10}-3;3+\sqrt{10})\}$. **4.** *а)* $\{(3;2),(2;3)\}$; *б)* $(1;1)$. **5.** *а)* $\varnothing$; *б)* $\{(0;3),(3;0),(0;-3),(-3;0)\}$. **6.** *а)* $\varnothing$; *б)* $\{1\}$; *в)* $\{3\}$; *г)* $\{2\}$. **7.** *а)* точки, лежащие выше прямой, проходящей через точки $(4;0)$ и $(0;3)$; *б)* точки, лежащие вне окружности с радиусом $\sqrt{2}$ и центром в точке $(0;1)$; *в)* точки, лежащие ниже прямой, проходящей через точки $(3;0)$ и $(0;-2)$; *г)* точки, лежащие ниже параболы $y=-x^2+2$. **8.** *а)* $\{(-6;-2);(-4;-4)\}$; *б)* $\left\{(4;1);\left(-\frac{2}{3};\frac{10}{3}\right)\right\}$.
9. *а)* $\{(2;1);(-1;-2)\}$; *б)* $\{(4;1);(1;4)\}$. **10.** *а)* $\left\{\left(\frac{17}{4};-\frac{1}{8}\right),\left(-\frac{23}{4};\frac{39}{8}\right)\right\}$; *б)* $\{(1;4),(4;1)\}$. **11.** *а)* $\{(6;7),(7;6),(-5+\sqrt{6};-5-\sqrt{6}),(-5-\sqrt{6};-5+\sqrt{6})\}$; *б)* $(1;1)$. **12.** *а)* $\{(0;2),(0;-2),(2;0),(-2;0)\}$; *б)* $\{(1;0),(-1;0),(0;-1)\}$.

§ 14

1. $(-6;3)$. **2.** $\left(4;\frac{8}{3}\right)$. **3.** 1. **4.** $\left\{-\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right\}$. **5.** $\{-2;1\}$. **6.** $[0;4)$. **7.** $\left[2-\sqrt{10};1\right]\cup\left[5;2+\sqrt{10}\right]$. **8.** $\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right]$. **9.** 10. **10.** $\left(-2;\frac{1}{4}\right]$. **11.** 1. **12.** 2. **13.** $(-\infty;20]$. **14.** $\frac{1}{8}$.

§ 15

1. *а)* $\{-1; 2\}$; *б)* $\{-1; 3\}$; *в)* $\{-\sqrt{7}; 2\}$; *г)* $\{69\}$; *д)* $\{-1; 1; 3\}$; *е)* $\{-1\}$; *ж)* $\{1\}$; *з)* $\{3\}$; *и)* $\{-1\}$; *к)* $\{3\}$. **2.** *а)* $[1; 2)$; *б)* $[3; +\infty)$; *в)* $(-\infty; 1)$; *г)* $[2; +\infty)$; *д)* $(-\infty; -6]$; *е)* $[4; +\infty)$. **3.** *а)* $\{5\}$; *б)* $\{64\}$; *в)* $\{-6; 7\}$; *г)* $\left\{-\frac{2}{3}; \frac{1}{6}\right\}$; *д)* $\{0\}$. **4.** *а)* $(-1{,}5; 0{,}5)$; *б)* $\left[\frac{1}{5}; \frac{1}{4}\right] \cup \left\{\frac{2}{5}\right\}$; *в)* $[-4; 1] \cup \{2\}$; *г)* $[0; 16]$; *д)* $[5; +\infty)$.

§ 16

1. 24 и 16. **2.** 3,5 кг пшеничной и 4,5 кг ржаной муки. **3.** На 20 %. **4.** 32 чел. **5.** 10 км/ч. **6.** 1375 км. **7.** 840 км, 80 км/ч. **8.** 40 м/мин. **9.** 16 ч. **10.** За 20 ч и за 30 ч. **11.** За 3 ч и за 4 ч. **12.** За 12 ч и за 6 ч. **13.** 300 г и 500 г. **14.** 441 г. **15.** 40 т и 60 т. **16.** 15 т.

Ответы
к упражнениям для повторения

1. $\{-1; 1\}$. **2.** $\{1\}$. **3.** $\{-1; -3; -5\}$. **4.** $\left\{-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}; 3\right\}$. **5.** $\left\{1; 2; 5; \frac{5}{2}\right\}$. **6.** $\{1; 2\}$. **7.** $\{3; -3; -4\}$. **8.** $\{-4; -3; 2; 5\}$. **9.** $\{-3; -2; -1; 4\}$. **10.** $\{-3; -2\}$. **11.** $\{-2; 1; 2\}$. **12.** $\{-2; 1\}$. **13.** $\{4; 5\}$. **14.** $\{-1; 5; 2-2\sqrt{2}; 2+2\sqrt{2}\}$. **15.** $\left\{-4; 3; \frac{-1-\sqrt{145}}{2}; \frac{-1+\sqrt{145}}{2}\right\}$. **16.** $\left\{-3; 4; \frac{1-\sqrt{145}}{2}; \frac{1+\sqrt{145}}{2}\right\}$. **17.** $\left\{-2; \frac{1}{2}; -\sqrt{3}; \sqrt{3}\right\}$. **18.** $\{1\}$. **19.** $\left\{-1; -\frac{2}{3}; 1; 2\right\}$. **20.** *а)* $\frac{29}{4}$; *б)* $-\frac{117}{8}$; *в)* $-\frac{5}{2}$. **21.** *а)* –13; *б)* 20; *в)* –7. **22.** $x^2 + 2x - 15 = 0$. **23.** $x^2 - 4x - 1 = 0$.

24. $(0; 1) \cup (1; +\infty)$. **25.** $(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup \left(\frac{2}{3}; 3\right)$. **26.** $(-\infty; -6] \cup [-2; +\infty)$. **27.** $(-\infty; -4] \cup \left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$. **28.** $\left(-2; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 2\right)$. **29.** $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$. **30.** $(-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$. **31.** $(-3; -2) \cup (-1; 1)$. **32.** $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{79}{75}; \frac{3}{2}\right) \cup (2; +\infty)$. **37.** $(-\infty; 5)$.

38. $(2{,}7; 6)$. **39.** $[1; 2)$. **40.** $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4}; 2\right)$. **41.** $(-4; -3) \cup [-2; -1] \cup [1; 2)$. **42.** $\{-\sqrt{2}; 1-\sqrt{5}\}$. **43.** $\left\{\frac{-5+\sqrt{113}}{4}\right\}$. **44.** $\{1; 5{,}5\}$. **45.** $\{1{,}5\}$. **46.** $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. **47.** $\left\{\frac{-1+\sqrt{17}}{4}; \frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right\}$. **48.** $\left\{-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}; 2\right\}$. **49.** $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. **50.** $(-\infty; -5) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. **51.** $(-\infty; -2] \cup [-1; +\infty)$. **52.** $(-\infty; -2) \cup (-2; 0] \cup [1{,}6; 2) \cup (2; 2{,}5]$. **53.** $[1{,}5; 2)$. **54.** $(-\infty; 3)$. **55.** $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$. **56.** $\left(-\infty; \frac{7}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$. **57.** $(1; 1; 1)$. **58.** $(1; 2; 3)$. **59.** $\{(-2; -1; 3), (2; 1; -3)\}$. **60.** $\left\{(1; 3), (-1; -3), \left(8\sqrt{\frac{2}{7}}; -20\sqrt{\frac{2}{7}}\right) \left(-8\sqrt{\frac{2}{7}}; 20\sqrt{\frac{2}{7}}\right)\right\}$.
61. $\{(2; 3), (3; 2), (-2+\sqrt{7}; -2-\sqrt{7}), (-2-\sqrt{7}; -2+\sqrt{7})\}$.
62. $\{(2; -1), (-2; -1), (1; -2), (-1; 2)\}$. **63.** Если $a = 0$, то $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; если $a \neq 0$, то $\varnothing$. **64.** Если $a \in (-\infty; 0)$, то $\{-2-\sqrt{-a}; -2+\sqrt{-a}\}$; если $a = 0$, то $\{-2; 2\}$; если $a \in (0; +\infty)$, то $\{2+\sqrt{a}; 2-\sqrt{a}\}$. **65.** Если $a \in (-\infty; 0)$, то $x = -2a$; если $a = 0$, то $x \in (-\infty; +\infty)$; если $a \in (0; +\infty)$, то $x = 0$. **66.** Если $a \in (-\infty; -1)$, то $x \in (-\infty; 0)$; если $a \in [-1; 1]$, то $x \in \varnothing$; если $a \in (1; +\infty)$, то $x \in (0; +\infty)$. **67.** Если $a \in (-\infty; -3)$, то $x \in \left(-\infty; \frac{6a-1}{a+3}\right)$; если $a = -3$, то $x \in (-\infty; +\infty)$; если $a \in (-3; +\infty)$, то $x \in \left(\frac{6a-1}{a+3}; +\infty\right)$.
68. Если $a \in \{1; 4\}$, то $x \in \varnothing$; если $a \in (1; 4)$, то $x \in \left(-\infty; \frac{1-a}{12-3a}\right)$; если $a \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$, то $x \in \left(\frac{1-a}{12-3a}; +\infty\right)$. **69.** $\{3\}$. **70.** $\{2\}$. **71.** $\{27\}$. **72.** $\{1{,}2; 2\}$. **73.** $\{-45; 20\}$. **74.** $(-\infty; -2) \cup [205{,}5; +\infty)$. **75.** $(-\infty; +\infty)$. **76.** $[-2; 0) \cup (0; 2]$. **77.** $(5; +\infty)$. **78.** На 38,8 %. **79.** На 10 %. **80.** 20 км/ч. **81.** 15 ч и 10 ч. **82.** 60 м^3/ч и 24 м^3/ч. **83.** 187,5 кг. **84.** 10 кг.

ГЛАВА VII
ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

§ 1

5. *а)* 0,2; *б)* −1, 3. **6.** *в)* $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; *г)* $[0;+\infty)$. **7.** *а)* $(-\infty;0]$; *б)* $[1;+\infty)$; *в)* $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; *г)* $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. **8.** *а)* $3x^4+3x^2$; *б)* $\frac{x^2+2}{x}$. **11.** *б)* $(-\infty;-3)\cup(-3;3)\cup(3;+\infty)$; *г)* $\{1\}$; *д)* $(-\infty;-2]\cup$ $\cup[2;+\infty)$; *е)* $(0;1)\cup(1;+\infty)$. **12.** *в)* $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$; *д)* $[1;+\infty)$; *е)* $[-2;+\infty)$. **13.** *б)* $(x^2-1)^2$. **14.** $t=5$ с, $h=27$ м.

§ 2

3. $y=2x+1$. **4.** $y=\frac{2}{5}x$. **5.** $y=2x^2-3$. **10.** $a=2$, $x_0=1$, $\vartheta_0=1$. **11.** $[-4;21]$.

§ 3

1. *в)* −2, 2; *д)* 3; *е)* −2. **3.** *а)* убывает на $(-\infty;3)$, возрастает на $(3;+\infty)$; *в)* убывает на $(-\infty;-1)$ и на $(-1;+\infty)$. **13.** *а)* 1; *б)* 2; *в)* $\frac{1}{2}$; *г)* 2. **14.** *а)* $-\sqrt{8}$, $\sqrt{8}$; *б)* 1, 7; *в)* 0, 2; *г)* −2. **17.** четные – *б)*, нечетные – *а)*, *г)*. **18.** *а)* $\frac{1}{3}$; *б)* 1; *в)* 1; *г)* 4.

§ 4

1. *б)* $\frac{1+x^2}{1-x^2}$; *г)* $\frac{x+2}{x}$. **2.** *б)* $(x+1)^3$; *г)* x^6+1. **3.** $f(x)=x^2-2x$. **4.** $f(x)=\frac{3}{8}x-\frac{1}{8x}$. **5.** *а)* $[-1;1]$; *б)* $[-1;0]$; *в)* $\left[0;\ \frac{1}{3}\right]$; *г)* $(0;+\infty)$. **6.** *б)* $y=-\sqrt{x}$; *г)* $y=\sqrt{x-1}+1$. **7.** *в)* x^4-2x^2; *г)* $4x$. **8.** *а)* x^2- $-2x+1$; *б)* x^2-1. **9.** $f(x)=x^2-6x+5$. **10.** $f(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3x}$. **11.** *а)* $[-1;1]$; *б)* $[-2;-1]$; *в)* $[-2;0]$; *г)* $(-\infty;0)$. **12.** *б)* $y=2-\sqrt{x-1}$.

§ 5

1. Точка $M(1;1)$ перейдет в точку $M'(3;-2)$, точка $N(2;0)$ перейдет в точку $N'(4;-3)$, точка $A(2;-3)$ перейдет в точку $A'(4;-6)$. **6.** При данном преобразовании точка $B'(3;0)$ переходит в точку $B(2;1)$, точка $C'(2;1)$ переходит в точку $C(1;2)$, точка $O'(1;-1)$ переходит в начало координат $O(0;0)$. **8.** При данном преобразовании точка $O'(2;2)$ переходит в точку $O(0;0)$, точка $C'(4;5)$ переходит в точку $C(2;3)$, точка $D'(1;3)$ переходит в точку $D(-1;1)$.

§ 6

1. −1. **2.** $y=0$. **3.** $y=x-1$. **4.** $y=3x-3$. **5.** $y=2x+2$. **7.** *б)* $y=x^2-4x$; *г)* $y=x^2-4x+3$. **10.** $x=3, y=-1$. **12.** *б)* $x<2$ или $x>3$; *г)* $1<x<2$. **14.** −2. **16.** *б)* $x<2$; *г)* $x<1\frac{2}{3}$. **17.** $y=2x+6$. **19.** *б)* $2<x<3$; *в)* $x=0$, $x=5$. **20.** $x=4$, $y=9$. **25.** $a<0$.

Ответы к упражнениям для повторения

2. *б)* $(-\infty;-4)\cup(-4;2)\cup(2;+\infty)$; *в)* $[0;2)\cup(2;+\infty)$; *г)* $(-\infty;0)\cup$ $\cup[2;+\infty)$. **3.** *б)* $[-1;+\infty)$; *в)* $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$; *г)* $[-4;+\infty)$. **4.** *б)* $(-\infty;-3)$, $(-3;-1)$, $(-1;3)$, $(3;5)$, $(5;+\infty)$; *г)* $(0;+\infty)$. **6.** *б)* убывает на $(-\infty;1)$ и на $(1;+\infty)$; *г)* убывает на $(-\infty;-2)$, возрастает на $(2;+\infty)$. **15.** $f(x)=x^2-4$. **16.** *а)* $\frac{\sqrt{x+1}}{|x|}$. **17.** *б)* $(0;1)$; *г)* $(0;+\infty)$.

19. При данном преобразовании точка $B'(2;2)$ переходит в точку $B(4;5)$, точка $C'(0;-3)$ переходит в точку $C(2;0)$, точка $O'(-2;-3)$ переходит в начало координат $O(0;0)$. **20.** $y=-x+2$. **22.** $b=2$, $c=3$. **23.** $a=2$, $b=-3$, $c=0$. **24.** $c=7$. **25.** $b=\pm4$. **27.** *б)* $(-1;1)$, $(1;1)$. **28.** $a<-2$ или $a>2$. **29.** $b=-1$. Точка пересечения имеет координаты $x=1$, $y=-2$. **33.** *б)* $2<x<3$.

ГЛАВА VIII
СТЕПЕННАЯ, ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

§ 1

5. *б)* I и II; *г)* I и III; *д)* I; *е)* I и III; *ж)* I и II; *з)* I. **10.** *г)* I четверть. Данная функция не является четной и не является нечетной.

§ 2

1. а) 3; б) 4; в) 1; г) 4. **3.** б) $(-2;+\infty)$; г) $(-\infty;1)$. **5.** а) 1; б) 2; в) 2; г) 3. **6.** б) a^2; г) $x^{\sqrt{3}}$; е) $x^{\frac{\sqrt{3}}{3}}-y^{\frac{\sqrt{2}}{3}}$. **8.** а) $(0;+\infty)$; б) $(-3;+\infty)$; в) $[0;+\infty)$; г) $[1;+\infty)$. **10.** б) 0; в) -1; г) -2. **11.** б) a; г) 1. **12.** $x<1{,}5$.

§ 3

1. б) -4; г) 2; е) 4; з) -1; и) 1; л) нет решений; н) 2; о) 0, 1; п) -1; р) 2. **2.** б) $(1;2)$; г) $(2;1),(3;2)$. **3.** $1+2\sqrt{2}$. **4.** б) $(-\infty;-2]$; г) $[3;+\infty)$; д) $(-3;1)$; е) $(-2;1)$; ж) $(-\infty;0)$; и) $(0;+\infty)$; к) $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$.

5. б) $(-\infty;-2]$. **6.** б) 1; г) 1, 2; е) 1, 2. **7.** б) $\left(1;\frac{1}{2}\right)$; г) $(2;5),(-4;-7)$.

8. б) $(-1;0]$; г) $\left[0;\frac{3}{2}\right]$; е) $(-\infty;-1)$. **9.** б) $[2;+\infty)$;

§ 4

1. д) -3; е) -4. **2.** д) 2; е) 9. **4.** в) $\frac{1}{36}$; е) $\frac{1}{2}$. **5.** а) $\frac{3}{2}$; б) -1; в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{5}{3}$.

6. в) 2; д) 2; е) 3. **8.** а) $2a+b$; б) $3a+3b$; в) $a+1$; г) $a+b+1$. **9.** $\frac{a+8}{2a+4}$.

10. а) $a>0$; б) $a>1$; в) $0<a<1$. **11.** б) $(-2;2)$; г) $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$; д) $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$; е) $(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$. **13.** б) 27. **14.** б) 3. **15.** а) $[0;+\infty)$; б) $(-\infty;+\infty)$; в) $(-\infty;+\infty)$; г) $[1;+\infty)$. **16.** а) $\frac{3}{8}$; г) -1; д) $\frac{8}{3}$. **17.** в) 0, 3; г) 5. **18.** б) 1; д) 2; е) 1. **21.** а) $\frac{a+b}{2}$; б) $2a-2b$; в) $a-b+1$; г) $a+b+2$.

22. $\frac{6a+1}{3a+2}$. **24.** а) $(2;+\infty)$; б) $(-\infty;0)$. **26.** б) 2. **27.** а) $(0;+\infty)$; б) $(-\infty;1)$.

28. а) $x<\frac{1}{3}$; б) $2<x<3$.

§ 5

1. г) $\sqrt{5}$; д) $\log_2 9$; ж) $\pm\sqrt{\log_5 6}$; з) нет решений; и) 3; л) $\frac{1}{2}$, 1; н) 4, 5; о) $\frac{1}{7}$, 49; п) 3; р) 9; с) $\frac{1}{4}$, 4; т) 1. **2.** б) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; г) $(1;2)$.

3. б) $(0;64)$; в) $\left(0;\frac{1}{2}\right)$; д) $(2;5)$; е) $\left(0;\frac{1}{3}\right)\cup(27;+\infty)$; ж) $(3;27)$; з) нет решений; и) $\left(-\infty;\log_2\frac{3}{2}\right)$; к) $\left(-\infty;\log_2\frac{1}{6}\right)\cup\left(\log_2\frac{3}{2};+\infty\right)$.

4. б) 2, 3; г) 3, $\log_2 56$; е) $\log_3\frac{1}{18}$, $\log_3\frac{2}{9}$; ж) нет решений; з) -125; к) 1, 3; л) $\frac{1}{3}$, 3; м) 10. **5.** б) $(-3{,}1;1{,}1),(-1;-1)$; г) $(2;2),\left(1+\sqrt{37};\frac{7-\sqrt{37}}{3}\right)$; е) $(1;1)$. **6.** б) $(-\infty;-7)$; г) $(-4;-3)\cup(4;5)$; е) $\left(0;\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\cup\left(10\sqrt{10};+\infty\right)$; з) $(-\infty;\log_5 3)$; к) $\left(\frac{1}{3};1\right)$; л) $[3;12)$; м) $[-4;-2)\cup(1;3]$.

Ответы
к упражнениям для повторения

2. б) $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$; г) $(-1;+\infty)$; е) $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$; з) $(-\infty;-\sqrt{2})\cup\cup(-\sqrt{2};\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$; к) $[-1;0)\cup(0;+\infty)$. **3.** б) $(-\infty;3]$; г) $(0;1]$; е) $[2;+\infty)$. **6.** б) 1, -2; г) 0, 1; е) 0. **7.** б) $(1;0)$. **8.** б) $0\le a\le 1$; г) $0<a<1$. **9.** б) $(-\infty;0]$; г) $(-3;3)$; е) $(-\infty;-8)\cup[3;+\infty)$. **12.** б) $\frac{16}{\sqrt{10}}$.

14. $\frac{2a+1}{a+1}$. **15.** б) $(-\infty;0)$; г) $(-\infty;-8)\cup(3;+\infty)$. **17.** а) $[-1;+\infty)$; б) $(-1;+\infty)$. **18.** б) 5; г) -5; е) 100; з) $\frac{1}{6}$, 216; к) 1. **19.** б) $(2;3)$; д) $(3;1)$; е) $(3;1)$. **20.** б) $(-1;0)\cup(1;2)$; г) $(3;5)$; е) $(100;1000)$; з) $\left(-7+\log_5 2;+\infty\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alimov Sh. A., Xalmuhamedov A. R., Mirzahmedov M. A.* Algebra va analiz asoslari. 10-sinf uchun darslik. T.: O'qituvchi, 2003.
2. *Alimov Sh. A., Xalmuhamedov A. R., Mirzahmedov M. A.* Algebra va analiz asoslari. 11-sinf uchun darslik. T.: O'qituvchi, 2004.
3. *Колмогоров А. Н. и др.* Алгебра и начала анализа. Учебник для 10–11 классов средней школы. М.: Просвещение, 1990.
4. *Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Шварцбурд С. И.* Алгебра и математический анализ для 10 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 1992.
5. *Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Шварцбурд С. И.* Алгебра и математический анализ для 11 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 1998.
6. *Сканави и др.* Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы. М.: Мир и образование, 2001.
7. *Лихтарников Л. М., Сукачева Т. Г.* Математическая логика. Санкт - Петербург, 1999.
8. *Уваренков И. М., Маллер М. З.* Курс математического анализа, Т. 1. М.: Просвещение, 1966.
9. *Abduhamedov A.U., Nasimov H.A., Nosirov U.M.,Husanov J.H.* Algebra va matematik analiz asoslari, I qism. T.: O'qituvchi, 2003.
10. *Карп А. П.* Сборник задач по алгебре и началам анализа. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 1995.
11. *Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И.* Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. Справочник. М.: МГУ, 1991.

12. *Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Звавич Л. И.* Сборник задач по алгебре для 8–9 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 1992.
13. *Звавич Л. И., Шляпочник Л. Я., Чинкина М. В.* Алгебра и начала анализа для 8–11 классов. Пособие для школ и классов с углубленным изучением математики. М.: Дрофа, 2002.
14. *Кочетков Е. С., Кочеткова Е. С.* Алгебра и начала анализа. Пробный учебник. М.: Просвещение, 1969.
15. *Кравцев С.В. и др.* Методы решения задач по алгебре.Экзамен ОНИКС 21 век. Москва, 2001.
16. *Вавилов В.В. и др.* Задачи по математике. Алгебра. М.: Наука, 1987.
17. *Вавилов В.В. и др.* Задачи по математике. Уравнения и неравенства. М.: Наука, 1987.
18. *Yunusov A.S., Yunusova D.I., Musurmonov O.L.* Ko'rsatkichli, logarifmik tenglama va tengsizliklar. T.: Ilm Ziyo, 2005.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

САЙДАМАТОВ ЭРКИН МАМАДЖАНОВИЧ,
АМАНОВ АБДУКАДИР КАХАРОВИЧ,
ЮНУСОВ АБДУХАЛИК САЛИЖАНОВИЧ,
ХОДЖАБАГЯН СТАНИСЛАВ СУРЕНОВИЧ

АЛГЕБРА И ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ЧАСТЬ I

Учебное пособие для учащихся академических лицеев
с углубленным изучением математики

Издание четвертое

Издательско-полиграфический творческий дом «O'qituvchi»
Ташкент — 2009

Редактор *Г. Хубларов*
Художественный редактор *Т. Каноатов*
Технические редакторы *Т. Грешникова, С. Турсунова*
Компьютерная верстка *Г. Полещиковой*

Подписано в печать с оригинала-макета 04.09.2009. Формат 60 x 90 $^1/_{16}$.
Кегль 11,5 н/шп. Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл.п.л. 21,0.
Изд. л. 18,0. Тираж 2172. Заказ №96.

Издательско-полиграфический творческий дом «O'qituvchi» Узбекского агентства по печати и информации. Ташкент, 129, ул. Навои, 30. //
Ташкент, массив Юнусабад, ул. Мурадова, дом 1.
Договор № 14–81–09

22.14
A45

Алгебра и основы математического анализа: учебн. пособие для учащихся академ. лицеев с углубленным изучением математики. Ч. I. /Авт.: Э. М. Сайдаматов, А. К. Аманов, А. Юнусов, С. С. Ходжабагян. Под общей ред. Э. Сайдаматова. – Т.: ИПТД «O'qituvchi», 2009. — 336 с.

I. Сайдаматов Э. М. и др.

ББК 22.14 я 722+22.161я722