ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
ТОШКЕНТ ДАВЛАТ АВИАЦИЯ ИНСТИТУТИ

Ф.Б.Бадалов, Ғ.Шодмонов

Олий математикадан амалий машғулотлар

ТОШКЕНТ - 2006

Тайёрлаганлар: **профессор Ф. Б. Бадалов,**
профессор Ғ. Шодмонов

Мазкур укув кулланмада, олий математика курсининг бир аргументли функциянинг интеграл хисоби, куп аргументли функциялар хамда оддий дифференциал тенгламалар каби мавзулари ёритилган. Кулланма, техника ва иктисодиёт йуналишлари буйича бакалавриат боскичидаги талабалар учун мулжалланиб тайёрланган.

Такризчилар:
1. Тошкент ирригация ва мелиорация институти «Олий математика» кафедрасининг мудири, профессор Э. Файзибоев.
2. ТДАИ «Олий математика ва информатика» кафедрасининг доценти Х. Рахматова

Тошкент Давлат авиация институтининг илмий- услубий Кенгашининг карорига биноан чоп этилди (Карор № __8___, __18___- июнь 2006 йил).

СЎЗ БОШИ

Қўлингиздаги ушбу китоб, муаллифларнинг турли йилларда чоп этилган «Олий математикадан амалий машғулотлар» номли туркум ўқув қўлланмаларининг тўртинчиси бўлиб ҳисобланади.

Ўқув қўлланмада, бир аргументли функциянинг интеграл ҳисоби, икки аргументли функциянинг дифференциал ҳисоби ҳамда оддий дифференциал тенгламалар каби муҳим мавзулар ёритилган бўлиб, улар амалий машғулот дарслари учун мўлжалланган.

Мавзуларни ёритишда, Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим Вазирлиги томонидан техника олий ўқув юртларининг бакалаврлар тайёрлаш борасидаги олий математика фани бўйича тасдиқланган дастури асос қилиб олинди.

Ҳар бир мавзуга доир мисол ва масалалар ечилишидан олдин керакли назарий тушунчалар ҳамда формулалар қисқача баён этилади. Шунингдек, ҳар бир мавзуга доир мустақил ечиш учун мисол ва масалалар ҳам берилган.

Ўқув қўлланмадан нафақат техникавий йўналишдаги талабалар, балки иқтисодиёт йўналиши бўйича таҳсил оладиган талабалар ҳамда академик лицейлар ва касб- хунар коллежларининг укувчилари хам фойдаланишлари мумкин.

Муаллифлар, профессор Э. Файзибоев хамда доцент Х. Рахматовага, улар китобни синчиклаб укиб уз фикр мулохазаларини билдирганликлари учун узларининг алохида миннатдорчиликларини билдирадилар.

Укув кулланмада айрим хато ва камчиликлар учраши табиий. Уларни бартараф этиш борасидаги барча таклифларни муаллифлар мамнуният билан қабул қиладилар.

БИРИНЧИ БОБ

Аниқмас интеграллар
1.1. Бошланғич функция ва аниқмас интеграл тушунчаси, ҳоссалари.

Асосий интеграллар жадвали.

1. Таърифлар. Агар (*a; b*) оралиқда берилган $f(x)$ функция учун $F'(x) = f(x)$ ёки $dF(x) = f(x)$ каби муносабат ўринли бўлса, *F(x)* функцияни у оралиқда *f(x)* функция учун бошланғич функция деб юритилади. Берилган *f(x)* функциянинг ҳар қандай иккита бошланғич функциялари бир-биридан ихтиёрий ўзгармас сон билан фарқланади. Агар *F(x)* функция *f(x)* функциянинг бошланғич функцияси бўлса $\left(x \in (a;b)\right)$, у ҳолда $F(x) + C$ (бу ерда С- иҳтиёрий ўзгармас сон) функциялар ҳам *f(x)* функция учун бошланғич функция бўлади ва улар *f(x)* функциянинг *(a;b)* оралиқдаги аниқмас интеграли деб аталади ва у қуйидагича ёзилади.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Бу ерда: $\int$ - белгиси, *f(x)* – интегралланувчи функция, *f(x)dx* – интеграл белгиси остидаги ифода, *x* – интеграллаш ўзгарувчисидир.

Функциянинг аниқмас интегралини ҳисоблашни уни интеграллаш деб юритилади.

2. Аниқмас интегралнинг асосий хоссалари қуйидагича ёзилади:

2.1. $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$,

2.2. $d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$,

2.3. $\int d\, f(x) = f(x) + C$,

2.4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx \qquad (a\text{- ызгармас сон })$,

2.5. $\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx$.

Интеграллаш натижасининг тўғрилигини топилган бошланғич функцияни диференциаллаш орқали текширилади, яъни:

$$(F(x) + C)' = f(x).$$

1. Асосий интеграллар жадвали

1. $\int dx = x + C,$

2. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad (a \neq -1),$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C,$

4. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C,$

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$

6. $\int e^x dx = e^x + C,$

7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C,$

9. $\int \cos x dx = \sin x + C,$

10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C,$

11. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C,$

12. $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C,$

13. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C,$

14. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C,$

15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C,$

16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm k}\right| + C,$

17. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right| + C,$

18. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C,$

19. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C,$

20. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C,$

+уйида келтириладиган мисоллардаги аниқмас интегралларни ҳисоблашда аниқмас интегралларнинг жадвали ҳамда унинг хоссаларидан фойдаланамиз.

1 - Мисол. $\int (x^2 + 2x + \frac{1}{x})dx = \int x^2 dx + 2\int xdx + \int \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} + x^2 + \ln|x| + C$.

2 - Мисол. $\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)dx = \int \sqrt{x}dx + \int \sqrt[3]{x}dx = \int x^{1/2}dx + \int x^{1/3}dx = \dfrac{x^{3/2}}{3/2} + \dfrac{x^{4/3}}{4/3} + C =$

$= \dfrac{2\sqrt{x^3}}{3} + \dfrac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C..$

3 - Мисол. $\int \dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{x} dx = \int \dfrac{\sqrt{x^3} - 3\sqrt{x^2} + 3\sqrt{x} - 1}{x} dx = \int \sqrt{x}dx - 3\int dx + 3\int x^{-\frac{1}{2}}dx - \int \dfrac{dx}{x} =$

$= \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} - 3x + 6\sqrt{x} - \ln|x| + C$.

4 - Мисол. $\int \dfrac{\cos 2x dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \int \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \dfrac{dx}{\sin^2 x} - \int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = -ctgx - tgx + C.$

5 - Мисол. $\int \sin^2 \dfrac{x}{2} dx = \int \dfrac{1-\cos x}{2} dx = \dfrac{1}{2}\int dx - \dfrac{1}{2}\int \cos x dx = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin x}{2} + C$.

6 - Мисол. $\int 3^x 4^{2x} 5^{3x} dx = \int \left(3 \cdot 4^2 \cdot 5^3\right)^x dx = \int 6000^x dx = \frac{6000^x}{\ln 6000} + C$.

7 - Мисол. $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx = \int \frac{(x^4 - 1 + 1)}{1+x^2} dx = \int \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2} =$

$$= \int x^2 dx - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^3}{3} - x + arctgx + C.$$

МАШҚЛАР

+уйидаги интеграллар ҳисоблансин.

1. $\int \frac{10x^6 + 5}{x^4} dx$
2. $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3} dx$
3. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx$
4. $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$
5. $\int 7^x \left(1 + \frac{7^{-x}}{\sqrt{x^3}} \right) dx$
6. $\int ctg^2 x dx$
7. $\int \frac{3 - 2ctg^2 x}{\cos^2 x} dx$
8. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$
9. $\int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$
10. $\int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$
11. $\int \frac{\cos 2x dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$
12. $\int (2^x 3^{2x} + 3\sin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}) dx$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$
14. $\int \frac{\cos 2x dx}{\cos x + \sin x}$
15. $\int \frac{dx}{25 + x^2}$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 8}}$

1.2. Аниқмас интегрални ўрнига қўйиш усули билан интеграллаш

Агар $x = \varphi(t)$ функция узлуксиз дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда $\int f(x)dx$ ни ҳар доим ўзгарувчи t га нисбатан ўзгартириш мумкин бўлади:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(t)dt.$$

Бу ерда, ўнг томондаги интеграл ҳисоблангандан кейин ҳосил бўлган натижада аввалги x ўзгарувчига қайтилади. Аниқмас интегрални мазкур усул билан ҳисоблаш усулини ўрнига қўйиш ёки ўзгарувчини алмаштириш усули деб юритилади.

Таъкидлаш лозимки, $x = \varphi(t)$ алмаштириш бажарилаётганда, $\varphi(t)$ ва *f(x)* функцияларнинг аниқланиш сохалари орасида ўзаро бир қийматли мослик шундай бажарилиши керакки, $\varphi(t)$ функция, x нинг барча қийматларини қабул қилиши лозим бўлади.

Айрим ҳолларда аниқмас интегралларни ҳисоблаш жараёнида интеграл белгиси остидаги ифодаларнинг айрим қисмларини дифференциал белгиси остига киритиб, ундан кейин интегралнинг инвариантлик хоссасидан фойдаланиш лозимлигини ҳам эслатиб кетамиз.

1-Мисол. $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ ҳисоблансин.

Ечилиши. $x = t^3$ десак, $dx = 3t^2dt$ бўлиб, интеграл эса $\int \frac{3t^2 \sin t}{t^2}dt = 3\int \sin tdt$ кўринишга келади. Уни ечамиз: $3\int \sin tdt = -3\cos t + C$. Жавобда, t нинг ўрнига унинг $\sqrt[3]{x}$ қийматини қўямиз.

Шунинг учун: $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = -3\cos\sqrt[3]{x} + C.$

2-Мисол. $\int (3x-1)^{15}dx = \frac{1}{3}\int (3x-1)^{15}d(3x-1) = \frac{(3x-1)^{16}}{48} + C$.

Бу интегрални ҳисоблашда ифодани дифференциал белгиси остига киритиш усулидан фойдаланилди.

3-Мисол. $\int x^2\sqrt{x^3-7}dx$ ҳисоблансин.

Ечилиши. $x^3 - 7 = t^2$ десак, $3x^2dx = 2tdt,\quad x^2dx = \frac{2}{3}tdt,$ демак,

$$\int x^2\sqrt{x^3-7}dx = \int t\frac{2}{3}tdt = \frac{2}{3}\int t^2dt = \frac{2}{9}t^3 + C = \frac{2}{9}\sqrt{(x^3-7)^3} + C = \frac{2}{9}(x^3-7)\sqrt{x^3-7} + C.$$

4-Мисол. $\int \frac{(3\ln x-5)^2}{x}dx$ ҳисоблансин.

Ечилиши. $3\ln x - 5 = t,\ 3\frac{dx}{x} = dt,\ \frac{dx}{x} = \frac{dt}{3},$ булардан

$$\int \frac{(3\ln x-5)^2}{x}dx = \int t^2\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int t^2dt = \frac{1}{9}t^3 + C = \frac{(3\ln x-5)^3}{9} + C.$$

5-Мисол. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x+5}}$ ҳисоблансин.

Ечилиши. $3x + 5 = t^2$ десак, $3dx = 2tdt,\ dx = \frac{2}{3}tdt$, ҳамда $x = \frac{t^2-5}{3}$ бўлгани учун

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{3x+5}} = \frac{2}{3}\int \frac{3tdt}{(t^2-5)t} = 2\int \frac{dt}{t^2-5} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{3x+3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3x+5}+\sqrt{5}}\right| + C.$$ Бу интеграл (14) формулага кўра ҳисобланди.

6-Мисол. $\int \frac{xdx}{x^4+2x^2+10}$ ҳисоблансин.

Ечилиши. $x^4 + 2x^2 + 10 = (x^2+1)^2 + 9,\quad x^2 + 1 = t,\ 2xdx = dt$ ларга кўра,

$$\int \frac{xdx}{x^4+2x^2+10} = \int \frac{dt}{2(t^2+9)} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+3^2} = \frac{1}{6}arctg\frac{t}{3} + C = \frac{1}{6}arctg\frac{x^2+1}{3} + C.$$

7-Мисол. $\int x^3(1-2x^4)^3dx$ ҳисоблансин.

Ечилиши. $1-2x^4=t, \quad -8x^3dx=dt, \ \ \mathrm{x^3dx=-\frac{dt}{8}}$ ларга асосан,

$$\int x^3(1-2x^4)^3\,dx=-\frac{1}{8}\int t^3dt=-\frac{1}{32}t^4+C=-\frac{1}{32}(1-2x^4)^4+C.$$

МАШҚЛАР

+уйидаги интеграллар ҳисоблансин

1. $\int\sqrt[3]{5-6x}dx$
2. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x+5}}$
3. $\int\frac{e^{2x}dx}{1-3e^{2x}}$
4. $\int\frac{\cos x}{12\sin x}dx$
5. $\int\frac{dx}{x(1+\ln x)}$
6. $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$
7. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$
8. $\int\sqrt{1+\sin x}\cos xdx$
9. $\int e^{\sin x}\cos xdx$
10. $\int\frac{dx}{x^2+4x+5}$
11. $\int\frac{x^4dx}{x^2-3}$
12. $\int\frac{3x-4}{x^2-4}dx$
13. $\int\frac{xdx}{\sqrt{4-x^4}}$
14. $\int\frac{\sin\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}}$
15. $\int\frac{x^{n-1}dx}{a^2+x^{2n}}dx$
16. $\int x^2\sqrt[3]{1-x}dx$
17. $\int\frac{ar\sin xdx}{\sqrt{1-x^2}}$
18. $\int\frac{\sin 2xdx}{1+\sin^2 x}$
19. $\int\left(\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)\frac{dx}{x}$
20. $\int\frac{(x^2+1)dx}{\sqrt[4]{x^3+3x-6}}$

1.3 Бўлаклаб интеграллаш усули

Бўлаклаб интеграллаш усули, бўлаклаб интеграллаш формуласи деб аталувчи ушбу $\int ud\vartheta=u\vartheta-\int\vartheta du$ формулага асосланган бўлиб, у ерда $u=u(x)$ ва $\upsilon=\upsilon(x)$ лар узлуксиз дифференциалланувчи функциялардир. Мазкур усулни, $x^k\sin ax,\ x^k\cos ax,\ x^ke^{ax},\ x^n\ln^k x, x^kchax,$

$x^kshax,\ a^{\beta x}\sin ax,\ a^{\beta x}\cos ax,\ \arcsin x,\ arctgx$ (бу ерда: $n,\ k$ – бутун мусбат сонлар, $a,\beta\in R$) каби ва бошқа функцияларнинг аниқмас интегралларини ҳисоблаш учун қўллаш тавсия этилади.

Айрим ҳолларда бўлаклаб интеграллаш формуласини бир неча марта қўллаш ҳоллари ҳам учрашини таъкидлаб ўтиш жоиздир.

1-Мисол. $\int x\sin xdx$ ҳисоблансин.

Ечилиши. $u=x,\ d\upsilon=\sin xdx$ лардан $du=dx,\ \upsilon=-\cos x$

$$\int x\sin xdx = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + C.$$

2-Мисол. $\int \ln xdx$ ҳисоблансин.

Ечилиши. $u = \ln x,\ d\upsilon = dx$ лардан $du = \frac{dx}{x},\ \upsilon = x$

$$\int \ln xdx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

3-Мисол. $\int x^2e^x dx$ ҳисоблансин

Ечилиши. $u = x^2,\ d\upsilon = e^x dx$ десак, $du = 2xdx,\ \upsilon = e^x$

$\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2\int xe^xdx.$ Охирги интегрални ҳисоблаш учун яна бўлаклаб интеграллаш усулидан фойдаланамиз.

$u = x,\ d\upsilon = e^xdx$ лардан $du = dx,\ \upsilon = e^x$

$$\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2(xe^x - \int e^xdx) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C\ .$$

4-Мисол. $\int \arcsin xdx$ ҳисоблансин.

Ечилиши. $u = \arcsin x,\ d\upsilon = dx$ лардан $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \upsilon = x$

$$\int \arcsin xdx = x\arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

5-Мисол. $\int e^x \sin xdx$ ҳисоблансин.

Ечилиши. $u = e^x, d\upsilon = \sin xdx$ десак $du = e^xdx,\ \upsilon = -\cos x$

$\int e^x \sin xdx = -e^x\cos x - \int e^x \sin dx.$ Охирги интегрални яна бўлаклаб интеграллаймиз. $u = e^x,\ d\upsilon = \cos xdx$ лардан $du = e^xdx,\ \upsilon = \sin x$

$\int e^x \sin xdx = -e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x \sin x$, бундан, $2\int e^x\sin xdx = e^x\sin x - e^x\cos x$

яъни: $\int e^x\sin xdx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$

Умуман, $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$ каби интегралларни юқоридаги мисолдагига ўхшаш йўл билан интеграллаб, қуйидагиларни ёзиш мумкин:

$$\int e^{ax}\sin bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin bx - b\cos bx\right) + C,$$

$$\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(b\sin bx + a\cos bx\right) + C.$$

МАШҚЛАР

+уйидаги интеграллар ҳисоблансин

1. $\int x\ln(x-1)dx$
2. $\int xarctgxdx$
3. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$
4. $\int \frac{\arcsin xdx}{\sqrt{1-x}}$
5. $\int \ln^2 xdx$
6. $\int x^3 e^{-x}dx$
7. $\int \ln(x^2+1)dx$
8. $\int \cos(\ln x)dx$
9. $\int e^x \cos xdx$
10. $\int \frac{x\cos xdx}{\sin^2 x}$
11. $\int arctg\sqrt{2x-1}dx$
12. $\int \sin\sqrt{x}dx$
13. $\int x2^{3x}dx$
14. $\int e^{\sqrt{x}}dx$
15. $\int x^2\ln^2 xdx$
16. $\int \frac{\ln xdx}{\sqrt{x}}$
17. $\int e^{2x}\cos xdx$
18. $\int \sin x(\ln x)dx$
19. $\int \frac{\ln(\sin x)dx}{\cos^2 x}$
20. $\int \sin x\ln(\cos x)dx$
21. $\int e^x\ln(e^x+1)dx$
22. $\int x^4\ln xdx$
23. $\int \arccos 2xdx$
24. $\int x^3\cos xdx$
25. $\int \frac{\ln(\cos x)dx}{\sin^2 x}$

2- БОБ

Интегралланувчи функцияларнинг асосий синфлари

2.1. Энг содда рационал касрларни интеграллаш

Энг содда рационал касрлар деб қуйидагиларга айтилади:

1. $\frac{A}{x-a}$
2. $\frac{A}{(x-a)k}$, $(k \geq 2$ ва бутунсон)
3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$
4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, $(n \geq 2$ ва бутунсон)

Бу ерда: A, B, a, p ва q лар ҳақиқий сонлар бўлиб, $D=\frac{p^2}{4}-q<0.$

Биринчи ва иккинчи турдаги касрларни интеграллаш осонгина жадвал интегралларига келтирилади:

$$\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

+уйидаги мисолларни кўриб чиқамиз.

1-Мисол. $\int \frac{dx}{x-3} = \ln|x-3| + C$.

2-Мисол. $\int \frac{dx}{5-x} = -\int \frac{dx}{x-5} = -\ln|x-5| + C = \ln\left|\frac{1}{x-5}\right| + C$.

3-Мисол. $\int \frac{4dx}{3x-1} = \frac{4}{3}\int \frac{d(3x-1)}{3x-1} = \frac{4}{3}\ln|3x-1| + C$.

4-Мисол. $\int \frac{6dx}{4-7x} = -\frac{6}{7}\int \frac{d(4-7x)}{4-7x} = -\frac{6}{7}\ln|4-7x| + C$.

5-Мисол. $\int \frac{3dx}{(x-2)^3} = 3\int (x-2)^{-3} d(x-2) = 3\frac{(x-2)^{-2}}{-2} + C = -\frac{3}{2(x-2)^2} + C$.

6-Мисол. $\int \frac{dx}{(2x-1)^4} = \frac{1}{2}\int (2x-1)^{-4} d(2x-1) = \frac{1}{2}\frac{(2x-1)^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{6(2x-1)^3} + C$.

7-Мисол. $\int \frac{5dx}{(4-3x)^6} = 5\int (4-3x)^{-6} dx = -\frac{5}{3}\int (4-3x)^{-6} d(4-3x) =$

$= -\frac{5}{3}\frac{(4-3x)^{-5}}{-5} + C = \frac{1}{3(4-3x)^5} + C.$

Учинчи турдаги касрни интеграллаш учун касрнинг суратига махражнинг ҳосиласи $2x+p$ ёзилади ва айний алмаштиришлар орқали $2x+p$ дан $Ax+B$ ни ҳосил қилинади, яъни: $Ax + B = (2x+p)\frac{A}{2} + B - \frac{Ap}{2}$

У ҳолда:

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q} = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Интеграллардан биринчиси $\ln|x^2+px+q|$ га тенг. Иккинчи интегралнинг махражида эса, тўла квадрат ажратамиз: $x^2+px+q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$, бу ерда $q - \frac{p^2}{4} > 0$, чунки шартга кўра $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$ эди. Демак, иккинчи интеграл ҳам жадвал интегралига келади. Юқоридаги мулоҳазаларга асосан:

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} arctg \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

Таъкидлаш жоизки, агар юқорида $A=0$ бўлса, суратда махражнинг ҳосиласини ажратиш шарт эмас, махражда дарҳол тўла квадрат ажратиш лозим.

Эслатма: Агар иккинчи тур касрнинг махражидаги x^2+px+q квадрат уч ҳад ўрнида ax^2+bx+c $(a \neq 0)$ каби квадрат уч ҳад қатнашганда ҳам юқорида баён этилганлар асосида иш юритилади, фарқи шуки, бу ерда коэффициент a ни қавсдан ташқарига чиқарилади.

1-Мисол.

$$\int\frac{(3x+4)dx}{x^2+7x+14}=\int\frac{(2x+7)\frac{3}{2}+4-\frac{21}{2}}{x^2+7x+14}dx=\frac{3}{2}\int\frac{(2x+7)dx}{x^2+7x+14}-\frac{13}{2}\int\frac{dx}{x^2+7x+14}=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d\left(x^2+7x+14\right)}{x^2+7x+14}-\frac{13}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{7}{2}\right)}{\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+7x+14\right)-\frac{13}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}arctg\frac{x+\frac{7}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}+C=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left(x^2+7x+14\right)-\frac{13}{\sqrt{7}}arctg\frac{2x+7}{\sqrt{7}}+C.$$

2-Мисол.

$$\int\frac{(5x-7)dx}{x^2+3x+8}=\int\frac{(2x+3)\frac{5}{2}-7-\frac{15}{2}}{x^2+3x+8}dx=\frac{5}{2}\int\frac{d\left(x^2+3x+8\right)}{x^2+3x+8}-\frac{29}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+8-\frac{9}{4}}=$$

$$=\frac{5}{2}\ln\left(x^2+3x+8\right)-\frac{29}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{23}{4}}=\frac{5}{2}\ln\left(x^2+3x+8\right)-\frac{29}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{23}}{2}}arctg\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{23}}{2}}+C=$$

$$=\frac{5}{2}\ln\left(x^2+3x+8\right)-\frac{29}{\sqrt{23}}arctg\frac{2x+3}{\sqrt{23}}+C.$$

3-Мисол. $$\int\frac{dx}{x^2+6x+19}=\int\frac{d(x+3)}{(x+3)^2+10}=\frac{1}{\sqrt{10}}arctg\frac{x+3}{\sqrt{10}}+C.$$

4-Мисол.

$$\int\frac{dx}{3x^2-11x+17}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2-\frac{11}{3}x+\frac{17}{3}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{11}{6}\right)^2+\frac{17}{3}-\frac{121}{36}}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x-\frac{11}{6}\right)}{\left(x-\frac{11}{6}\right)^2+\frac{83}{36}}=\frac{1}{3}\frac{1}{\frac{\sqrt{83}}{6}}arctg\frac{x-\frac{11}{6}}{\frac{\sqrt{83}}{6}}+C=\frac{2}{\sqrt{83}}arctg\frac{6x-11}{\sqrt{83}}+C.$$

Тўртинчи турдаги касрни интеграллаш ҳам учинчи турдаги касрни интеграллашга ўхшаш олиб борилади:

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n} = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} =$$

$$= \frac{A}{2}\int (x^2+px+q)^{-n} d(x^2+px+q) + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n} =$$

$$= \frac{A}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n}.$$

Агар иккинчи интегралда $x+\frac{p}{2}=z$ ва $q-\frac{p^2}{4}=m^2$ деб белгилаш киритсак (чунки $q-\frac{p^2}{4}>0$ эди), у интеграл $I_n=\int \frac{dz}{(m^2+z^2)^n}$ ни интеграллашга келтирилади ва у $I_n=\frac{z}{2(n-1)m^2(m^2+z^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)m^2}I_{n-1}$ каби рекуррент формула билан ҳисобланади, бу ерда: $I_{n-1}=\int \frac{dz}{(m^2+z^2)^{n-1}}$. Бу формула бўйича I_{n-1}ни I_{n-2} орқали, сунгра I_{n-2}ни I_{n-3} орқали ифодалаймиз ва ҳоказо. Бу жараён $I_1=\int \frac{dz}{m^2+z^2}=\frac{1}{m}arctg\frac{z}{m}+C$ ни ҳосил қилингунича давом эттирилади.

1-Мисол. $I_3=\int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$ ҳисоблансин.

Юқоридаги рекуррент формулага биноан,

$$I_3=\frac{x}{2(3-1)(1+x^2)^2}+\frac{2\cdot 3-3}{2(3-1)}=I_2=\frac{x}{4(1+x^2)^2}+\frac{3}{4}I_2.$$

Энди рекуррент формулани I_2 га қўллаймиз.

$$I_3=\frac{x}{4(1+x^2)^2}+\frac{3}{4}\left[\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}I_1\right]=\frac{x}{4(1+x^2)^2}+\frac{3x}{8(1+x^2)}+\frac{3}{8}I_1.$$

Агар $I_1=\int \frac{dx}{1+x^2}=arctgx+C$ эканлигини инобатга олсак,

$$I_3=\int \frac{dx}{(1+x^2)^3}=\frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2}+\frac{3}{8}\frac{x}{1+x^2}+\frac{3}{8}arctgx+C.$$

2-Мисол.

$$\int \frac{dx}{(3x^2+x+7)^2}=\int \frac{dx}{3^2(x^2+\frac{x}{3}+\frac{7}{3})^2}=\frac{1}{9}\int \frac{d(x+\frac{1}{6})}{\left[(x+\frac{1}{6})^2+\frac{83}{36}\right]^2}=\frac{1}{9}\frac{x+\frac{1}{6}}{2\cdot\frac{83}{36}\cdot\left[(x+\frac{1}{6})^2+\frac{83}{36}\right]}+$$

$$+\frac{1}{2\cdot\frac{83}{36}}\int\frac{d(x+\frac{1}{6})}{(x+\frac{1}{6})^2+\frac{83}{36}}=\frac{6x+1}{83(3x^2+x+7)}+\frac{12}{83\sqrt{83}}arctg\frac{6x+1}{\sqrt{83}}+C.$$

3-Мисол.

$$\int\frac{(3x+5)dx}{(x^2+2x+5)^4}=\int\frac{(2x+2)\frac{3}{2}+2}{(x^2+2x+4)^4}dx=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)^4}+2\int\frac{d(x+1)}{\left[(x+1)^2+2^2\right]^4}=$$

$$=\frac{1}{2(x^2+2x+4)^3}+2I_4.$$

Энди I_4 ни рекуррент формула ёрдамида ҳисоблаймиз:

$$I_4=\frac{(x+1)}{2\cdot3\cdot4(x^2+2x+5)^3}+\frac{5}{2\cdot3\cdot4}I_3=\frac{x+1}{24(x^2+2x+5)^3}+$$

$$+\frac{5}{24}\left[\frac{x+1}{2\cdot2\cdot4(x^2+2x+5)^2}+\frac{3}{2\cdot2\cdot4}I_2\right]=\frac{x+1}{24(x^2+2x+5)^3}+\frac{5(x+1)}{384(x^2+2x+5)^2}+$$

$$+\frac{15}{384}\frac{x+1}{2\cdot4\cdot(x^2+2x+5)}+\frac{15}{384}\frac{1}{2\cdot4}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4}=\frac{x+1}{24(x^2+2x+5)^3}+\frac{5(x+1)}{384(x^2+2x+5)^2}+$$

$$+\frac{5(x+1)}{1024(x^2+2x+5)}+\frac{5}{2048}arctg\frac{x+1}{2}+C$$

МАШҚЛАР

1.	$\int\frac{dx}{2x-1}$	7.	$\int\frac{2dx}{(4x-5)^6}$	13.	$\int\frac{(2x-3)dx}{x^2+4x+5}$
2.	$\int\frac{2dx}{x-13}$	8.	$\int\frac{6dx}{(5-6x)^4}$	14.	$\int\frac{(4x+5)dx}{3x^2-5x+4}$
3.	$\int\frac{4dx}{15-3x}$	9.	$\int\frac{7dx}{(1-8x)^2}$	15.	$\int\frac{(5-3x)dx}{4x^2+x+5}$
4.	$\int\frac{3dx}{3-8x}$	10.	$\int\frac{dx}{x^2-2x+5}$	16.	$\int\frac{(6x-5)dx}{(3x^2+4x+5)^2}$
5.	$\int\frac{dx}{4x-9}$	11.	$\int\frac{dx}{7+x+x^2}$	17.	$\int\frac{(4x+13)dx}{(x^2-6x+10)^3}$
6.	$\int\frac{4dx}{(x+3)^5}$	12.	$\int\frac{dx}{3x^2-5x+3}$	18.	$\int\frac{(3x-11)dx}{(x^2+8x+18)^2}$

2.2. Каср-рационал функцияларни интегралаш

1. Маълумки, $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ каби функция, n-даражали кўпҳад дейилади, бу ерда $a_0, a_1, ...,$ a_n лар ҳақиқий сонлар бўлиб, улар кўпҳаднинг коэффициентларидир, n-даража кўрсаткичи.

Икки кўпҳаднинг нисбати каср-рационал функция ёки рационал каср деб юритилади, яъни:

$R(x) = \dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$. Агар m<n бўлса, уни тўғри рационал каср, агар m≥n бўлса – нотўғри рационал каср деб айтилади.

Нотўғри рационал каср функциянинг суратидаги кўпҳадни махражидаги кўпҳадга бўлиш йўли билан уни кўпҳад билан тўғри рационал касрнинг йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкин бўлади. Демак, ҳар қандай каср-рационал функцияни интеграллаш ҳар доим кўпҳад билан тўғри рационал касрни интеграллашга келтирилади.

2. Агар $x = x_1$ да $P_n(x_1) = 0$ бўлса, x_1 ни $P_n(x)$ кўпҳаднинг илдизи деб аталади.

a) Агар $x_1, x_2, ..., x_n$ сонлари $P_n(x)$ кўпҳаднинг илдизлари бўлса, у ҳолда уни қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n)$$

Бу ёйилмада x-x_1 кўпайтувчи бир марта қатнашса, x_1 ни оддий илдиз, агар у α_1 марта қатнашса, x_1 ни α_1 каррали илдиз деб аталади.

Агар x_1, $P_n(x)$ нинг α_1 каррали, x_2, α_2 каррали ва ҳоказо x_k эса α_k каррали илдизи бўлса, $P_n(x) = a_n(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2}\dots(x - x_k)^{\alpha_k}$ деб ёзиш мумкин. Бу ерда: $\alpha_1 + \alpha_2 + ...\alpha_k = n.$

b) Агар $P_n(x)$ кўпҳад нафақат ҳақиқий илдизларга, балки ўзаро қўшма бўлган комплекс сон илдизларга ҳам эга бўлса, уни

$$\begin{gathered} P_n(x) = a_n(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2}...(x - x_k)^{\alpha_k}(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \\ (x^2 + p_2 x + q_2)^{\beta_2}...(x^2 + p_k x + q_k)^{\beta_k} \end{gathered} \qquad (*)$$

каби ифодалаш мумкин, бу ерда $a_1 + a_2 + ... + a_k + 2\beta_1 + 2\beta_2 + ... + 2\beta_k = n.$

Теорема. Ҳар қандай $R(x) = \dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ тўғри рационал касрнинг махражи (*) каби ёйилмага эга бўлса, уни I, II, III ва IV турдаги энг содда касрларнинг йиғиндиси кўринишида ифода этиш мумкин. Бунда:

1. (*) ёйилманинг (x-x_1) кўринишдаги кўпайтувчисига I-турдаги битта $\frac{A}{x-x_1}$ каср мос келади;
2. (*) ёйилманинг $(x-x_1)^\alpha$ каби кўпайтувчисига I ва II турдаги α дона каср йигиндиси мос келади:

$$\frac{A_1}{(x-x_1)^\alpha}+\frac{A_2}{(x-x_1)^{\alpha-1}}+\frac{A_3}{(x-x_1)^{\alpha-2}}+\ldots+\frac{A_\alpha}{x-x_1};$$

3. (*) ёйилманинг x^2+px+q каби кўпайтувчисига III турдаги $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ каср мос келади;
4. (*) ёйилманинг $(x^2+px+q)^\beta$ каби кўпайтувчисига III ва IV турдаги β дона каср йиғиндиси мос келади:

$$\frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)^\beta}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{A_\beta x+B_\beta}{x^2+px+q}.$$

Тўғри рационал касрнинг энг содда рационал касрлар йиғиндисига бўлган ёйилмасининг суратида қатнашувчи коэффициентларни аниқлашнинг сон қийматларни ўрнига қўйиш ва номаълум коэффициентлар усули деб аталувчи усуллари мавжуд.

3. Шундай қилиб, тўғри рационал каср функцияни интеграллаш, 4 хилдаги энг содда касрларни интеграллашга келтирилар экан. Тўғри рационал каср функцияларни интеграллаш масаласини қуйида келтирилган мисолларни ечиш жараёнида ўрганамиз. Шу мақсадда қуйидаги 4 ҳолни кўриб ўтамиз:

<u>Биринчи ҳол.</u> Тўғри рационал каср функция махражидаги кўпҳад фақат ҳақиқий ҳар хил илдизларга эга бўлсин.

1-Мисол. $\int\frac{(2x+3)dx}{x^2-7x+12}$

Ечилиши. $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$ бўлганлиги учун

$$\frac{2x+3}{x^2-7x+12}=\frac{2x+3}{(x-3)(x-4)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-4}$$

ва бу тенгликнинг ҳар иккала томонини (x-3)(x-4) га кўпайтириб, $2x+3=A(x-4)+B(x-3)$ни ҳосил қиламиз. Номаълум коэффициетларни аниқлаш учун хусусий қийматлларни ўрнига қўйиш усулидан фойдаланамиз.

Агар $x=3$ бўлса, $A=-9$ ва $x=4$ бўлса, $B=11$

Демак,

$$\int \frac{(2x+3)dx}{x^2-7x+12} = \int \frac{(2x+3)dx}{(x-3)(x-4)} = -9\int \frac{dx}{x-3} + 11\int \frac{dx}{x-4} = -9\ln|x-3| + 11\ln|x-4| + C =$$

$$= \ln\frac{(x-4)^{11}}{(x-3)^9} + C.$$

2-Мисол. $\int \frac{x^4-3x^3-11x^2+4x+15}{x^3-5x^2-x+5}dx$

Ечилиши. Интеграл ишораси остида нотўғри рационал каср функция қатнашганлиги учун суратдаги кўпҳадни махраждаги кўпҳадга бўлиб, унинг бутун қисмини ажратамиз. Махраж эса:

x^3-5x^2-x+5қ(x+1)(x-1)(x-5)

$$\frac{x^4-3x^3-11x^2+4x+15}{x^3-5x^2-x+5} = x+2+\frac{x+5}{(x+1)(x-1)(x-5)},$$

$$\frac{x+5}{(x+1)(x-1)(x-5)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-5}$$

дан x+5қA(x-1)(x-5)+B(x+1)(x-5)+C(x+1)(x-1).

Агар xқ-1 бўлса, $A=\frac{1}{3}$; Агар xқ1 бўлса, $B=-\frac{3}{4}$ ва агар xқ5 бўлса, $C=\frac{5}{12}$.

Натижада:

$$\int \frac{(x^4-3x^3-11x^2+4x+15)dx}{x^3-5x^2-x-5} = \int (x+2)dx + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{5}{12}\int \frac{dx}{x-5} =$$

$$= \frac{(x+2)^2}{2} + \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{5}{12}\ln|x-5| + C\ .$$

3-Мисол. $\int \frac{(2x^2-7x+8)dx}{x^4-10x^2+9} = \int \frac{(2x^2-7x+8)dx}{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)}$ ҳисоблансин.

Ечилиши. $\frac{2x^2-7x+8}{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-3}+\frac{D}{x+3}$ дан:

$$2x^2-7x+8 = A(x+1)(x^2-9)+B(x-1)(x^2-9)+C(x+3)(x^2-1)+D(x-3)(x^2-1)$$

Бу ерда ҳам A,B,C ва D ларни аниқлаш учун хусусий қийматлар бериш усулидан фойдаланамиз (умуман, агар махраж фақат ҳақиқий ва ҳар хил илдизларга эга бўлса, мазкур усулни қўллаш энг мақсадга мувофиқ усулдир).

Агар xқ1 бўлса, $A=-\frac{3}{16}$; xқ -1 да $B=\frac{17}{16}$; xқ3 да $C=\frac{5}{48}$ ва $x=-3$ ва $\mathrm{D} = -\frac{47}{48}$

Демак,

$$\int \frac{(2x^2 - 7x + 8)dx}{x^4 - 10x^2 + 9} = -\frac{3}{16}\ln|x-1| + \frac{17}{16}\ln|x+1| + \frac{5}{48}\ln|x-3| - \frac{47}{48}\ln|x+3| + C.$$

<u>Иккинчи ҳол.</u> Махраждаги кўпҳад фақат ҳақиқий илдизларга эга бўлиб, улардан айримлари каррали илдизлар бўлсин.

1-Мисол. $\int \frac{(x^2 + x - 1)dx}{x^2(x-2)}$ ҳисоблансин.

<u>Ечилиши.</u> $\frac{x^2 + x - 1}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-2}$ дан

$x^2 + x - 1 = A(x-2) + Bx(x-2) + Cx^2$ ни ёзамиз. Агар хқ0 бўлса, $A = \frac{1}{2}$ ни ва хқ2 бўлса, $C = \frac{5}{4}$ ни аниқлаймиз. В коэффициентини аниқлаш учун x^2 олдидаги коэффициентларни тенглаштирамиз:

$$1 = B + C, \qquad B = 1 - C = 1 - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}; \qquad B = -\frac{1}{4}.$$

Натижада:

$$\int \frac{(x^2 + x - 1)dx}{x^2(x-2)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x} + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{x-2} = -\frac{1}{2x} - \frac{1}{4}\ln|x| + \frac{5}{4}\ln|x-2| + C.$$

2-Мисол. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+4)^2}$ ҳисоблансин.

Ечилиши. $\frac{1}{(x-1)^2(x+4)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x+4)^2} + \frac{D}{x+4}$ дан

$$1 = A(x+4)^2 + B(x-1)(x+4)^2 + C(x-1)^2 + D(x-1)^2 \text{ ни}$$

ёки

$$Ax^2 + 8Ax + 16A + Bx^3 + 7Bx^2 + 8Bx - 16B + Cx^2 -$$
$$-2CxC + Dx^3 + 2Dx^2 - 7Dx + 4D = 1$$

Номаълум коэффициентлар усулига биноан х нинг даражаларига кўра, тенгликнинг ҳар иккала томонида улар олдидаги коэффициентларни тенглаштирамиз:

x^3: B+Dқ0,
x^2: A+7B+C+2Dқ0,
x: 8A+8B-2C-7Dқ0,
x^0: 16A-16B+C+4Dқ1

Ушбу системани ечиб, $A = C = \frac{1}{25}$, $B = -\frac{1}{125}$, $D = \frac{2}{25}$ ларни топамиз

У холда:

$$\int\frac{dx}{(x-1)^2(x+4)^2}=\frac{1}{25}\int\frac{dx}{(x-1)^2}-\frac{2}{125}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{25}\int\frac{dx}{(x+4)^2}+$$

$$+\frac{2}{125}\int\frac{dx}{x+4}=-\frac{1}{25(x-1)}-\frac{2}{125}\ln|x-1|-\frac{1}{25(x+4}+\frac{2}{125}\ln|x+4|+C=$$

$$=\frac{2}{125}\ln\left|\frac{x+4}{x-1}\right|-\frac{2x-3}{25(x^2+3x-4)}+C.$$

3-Мисол $\int\frac{(x^2-x+14)dx}{(x-4)^3(x-2)}$ ҳисоблансин.

Ечилиши. $\frac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)}=\frac{A}{(x-4)^3}+\frac{B}{(x-4)^2}+\frac{C}{x-4}+\frac{D}{x-2}$ дан

$x^2-x+14\text{қ}A(x-2)+B(x-2)(x-4)+C(x-2)(x-4)^2+D(x-4)^3$ ни ёки

$Ax-2A+Bx^2-6Bx+8B+Cx^3-10Cx^2+32Cx-32C+Dx^3-12Dx^2+48Dx-64D\text{қ}x^2-x+14$ ни ёзиб оламиз. Бундан :

x^3: $C+D\text{қ}0,$

x^2: $B-10C-12D\text{қ}1,$

x: $A-6B+32C+48D\text{қ}-1,$

x^0: $-2A+8B-32C-64D\text{қ}14$ ва

Aқ 13; Bқ -3; Cқ 2; Dқ -2 ларни ҳосил қиламиз.

Натижада:

$$\int\frac{(x^2-x+14)dx}{(x-4)^3(x-2)}=13\int\frac{dx}{(x-4)^3}-3\int\frac{dx}{(x-4)^2}+2\int\frac{dx}{x-4}-2\int\frac{dx}{(x-2)}=$$

$$-\frac{13}{2(x-4)^2}+\frac{3}{x-4}+2\ln|x-4|-2\ln|x-2|+C=-\frac{13}{2(x-4)^2}+\frac{3}{x-4}+2\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right|+C.$$

Учинчи ҳол. Тўғри рационал каср функция махражидаги кўпҳад илдизлари орасида ҳақиқий илдизлардан ташқари бир-бирига тенг бўлмаган комплекс илдизлар ҳам мавжуд бўлсин.

1-Мисол. $\int\frac{dx}{x^4-1}$ ҳисоблансин.

Ечилиши. $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ бўлгани учун $\frac{1}{x^4-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$ ва

$1=A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)$ ёки

$Ax^3+Ax^2+Ax+A+Bx^3-Bx^2+Bx-B+Cx^3+Dx^2-Cx-D=1$

x^3: $A+B+C\text{қ}0,$

x^2: $A-B+D\text{қ}0,$

x: $A+B-C\text{қ}0,$

x^0: $A-B-D\text{қ}1.$

Бундан: $A=\frac{1}{4}$; $B=-\frac{1}{4}$; $\mathrm{C}=0$ ва $\mathrm{D}=-\frac{1}{2}$.

Демак:

$$\int\frac{dx}{x^4-1}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2}arctg+C=$$

$$=\ln\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}-\frac{1}{2}arctg+C.$$

2-Мисол. $\int\frac{xdx}{x^3+1}$ ҳисоблансин.

$$\frac{x}{x^3+1}=\frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$ ва $x\text{ķ}Ax^2\text{-}Ax+A+Bx^2+Bx+Cx+C$

x^2: $A+B\text{ķ}0$,

x: $-A+B-C\text{ķ}1$,

x^0: $A+C\text{ķ}0$.

Бундан: $A=-\frac{1}{3}$; $B=\frac{1}{3}$; ва $\text{C}=\frac{1}{3}$.

Натижада,

$$\int\frac{xdx}{x^3+1}=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{3}\int\frac{(x+1)dx}{x^2-x+1}=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\int\frac{((2x-1)+3)dx}{x^2-x+1}=-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

3-Мисол. $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ ҳисоблансин.

Ечилиши. $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$ ва

$Ax^3+Bx^2+4Ax+4B+Cx^3+Dx^2+Cx+D\text{ķ}1$

x^3: $A+C\text{ķ}0$,

x^2: $B+D\text{ķ}0$,

x: $4A+C\text{ķ}0$,

x^0: $4B+D\text{ķ}1$

Бундан: $A=C=0$ ва $B=\frac{1}{3}$; $D=-\frac{1}{3}$.

Демак: $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{1+x^2}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{4+x^2}=\frac{1}{3}arctgx-\frac{1}{6}arctg\frac{x}{2}+C.$

<u>Тўртинчи ҳол</u> Тўғри рационал каср функция махражидаги кўпҳад илдизлари орасида ҳам каррали ҳақиқий ҳам каррали комплекс сон илдизлар мавжуд бўлсин.

1-Мисол. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+4)^2}$ ҳисоблансин.

Ечилиши. $\frac{1}{(x-1)^2(x^2+4)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+4}$;

$$A(x^2+4)^2 + B(x+1)(x^2+4)^2 + (Cx+D)(x+1)^2 + (Ex+F)(x-1)^2(x^2+4) = 1$$

Бундан: $A = \frac{1}{25}$; $B = -\frac{4}{125}$; $C = \frac{18}{125}$; $D = -\frac{31}{125}$; $E = \frac{4}{125}$; $F = \frac{3}{125}$.

У холда:

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+4)^2} = \frac{2}{125}\ln\frac{x^2+4}{(x-1)^2} - \frac{71x^2+41x+88}{1000(x-1)(x^2+4)} - \frac{7}{2000} arctg\frac{x}{2} + C.$$

2-Мисол. $\int \frac{(5x^2-12)dx}{(x^2-6x+13)^2}$ ҳисоблансин.

Ечилиши. Махраждаги квадрат уч хад x^2*-6x+13* нинг илдизлари икки каррали комплекс сонлар бўлганлиги учун

$$\frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2-6x+13)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-6x+13}$$ ва

Ax+B+Cx³+Dx²-6Cx²-6Dx+13Cx+13Dķ5x²-12

x³: Cķ0,

x²:-6C+Dķ5,

x: A+13C-6Dķ0,

x⁰: B+13Dķ-12

Бундан: *Aķ30, Bķ-77, Cķ0, Dķ5.*

У ҳолда:

$$\int \frac{(5x^2-12)dx}{(x^2-6x+13)^2} = \int \frac{(30x-77)dx}{(x^2-6x+13)^2} + \int \frac{5dx}{x^2-6x+13} = \frac{13x-159}{8(\mathrm{x}^2-6\mathrm{x}+13)} + \frac{53}{16}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{x}-3}{2} + \mathrm{C}.$$

Энди рационал каср функцияларни интеграллашга доир аралаш мисоллардан айримларининг ечилишини кўриб ўтамиз.

1-Мисол. $\int \frac{x^5dx}{x^3-8}$ ҳисоблансин.

Ечилиши. $\frac{x^5dx}{x^3-8} = x^2 + \frac{8x^2}{x^3-8}$ тенгликдан $\int \frac{x^5dx}{x^3-8} = \int (x^2 + \frac{8x^2}{x^3-8})dx =$

$$= \int x^2dx + 8\int \frac{x^2dx}{x^3-8} = \frac{x^3}{3} + \frac{8}{3}\ln\left|x^3-8\right| + C.$$

2-Мисол. $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx$ ҳисоблансин.

Ечилиши. $\frac{(x+1)^3}{x^2-x} = x+4+\frac{7x+1}{x^2-x}$ га кўра, $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx = \int xdx + 4\int dx + \int \frac{7x+1}{x^2-x}dx.$

Бундан: $\frac{7x+1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$;*Aķ-1, Bķ8.*

Демак $\frac{7x+1}{x^2-x}=-\frac{1}{x}+\frac{8}{x-1}$

$$\int\frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx=\int xdx+4\int dx-\int\frac{dx}{x}+8\int\frac{dx}{x-1}=\frac{x^2}{2}+4x-\ln|x|+8\ln|x-1|+C.$$

3-Мисол. $\int\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx$ ҳисоблансин.

Ечилиши. $\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-4}$ *дан*:

$x^2+2x+6\text{қ}A(x-2)(x-4)+B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x-2),$

$x^2+2x+6\text{қ}A(x^2-6x+8)+B(x^2-5x+4)+C(x^2-3x+2),$

$x^2+2x+6\text{қ}(A+B+C)x^2+(-6A-5B-3C)x+(8A+4B+2C).$

Бир хил даражали x ларнинг коэффициентларини таққослаб, қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз ва уни ечамиз:

$$\begin{cases}A+B+C=1,\\ -6A-5B-3C=2,\\ 8A+4B+2C=6,\end{cases}\qquad A=3,\quad B=-7,\quad C=5.$$

Демак: $\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\frac{3}{x-1}-\frac{7}{x-2}+\frac{5}{x-4}.$

Натижада: $\int\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx=3\int\frac{dx}{x-1}-7\int\frac{dx}{x-2}+5\int\frac{dx}{x-4}=$

$$=3\ln|x-1|-7\ln|x-2|+5\ln|x-4|+C=\ln\left|\frac{(x-1)^3(x-4)^5}{(x-2)^7}\right|+C.$$

4-Мисол. $\int\frac{dx}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}$ ҳисоблансин.

Ечилиши. $\frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-1}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}$ дан:

$1\text{қ}A(x-1)(x^2+x+1)+Bx(x-1)(x^2+x+1)+Cx^2(x^2+x+1)+(Dx+E)x^2(x-1),$

ёки $1\text{қ}A(x^3-1)+B(x^4-x)+C(x^4+x^3+x^2)+Dx^4+Ex^3-Dx^3-Ex^2.$

0 ва 1 сонлар махражнинг илдизлари бўлгани учун $x\text{қ}0$ да $1\text{қ}{-A}$, яъни $A\text{қ}{-1}$; $x\text{қ}1$ да $1\text{қ}3C$, яъни $C\text{қ}1/3$.

x^4, x^3, x^2 ларнинг коэффициентларини таққослаб, тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{cases}B+C+D=0,\\ A+C+E-D=0,\\ C-E=0.\end{cases}$$

Системани ечсак, Вқ0, Dқ-1/3, Ек1/3.

Демак, $\frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x-1}{3(x^2+x+1)}$

Натижада: $\int\frac{dx}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}=-\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx=$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

МАШҚЛАР

+уйидаги интеграллар ҳисоблансин.

1	$\int\frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$	8	$\int\frac{3x+2}{2x^2+x-3}dx$	15	$\int\frac{(2x+3)}{x^4-16}dx$
2	$\int\frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$	9	$\int\frac{dx}{x^3-8}$	16	$\int\frac{(x^3+x+2)dx}{(x-3)(x-4)}$
3	$\int\frac{5x-1}{x^3-3x-2}dx$	10	$\int\frac{xdx}{(x^2+2x+2)^2}$	17	$\int\frac{(x^2+x+5)dx}{x(x+3)(x-2)}$
4	$\int\frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4}dx$	11	$\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$	18	$\int\frac{(x^2+x-1)dx}{x^3(x-2)^2}$
5	$\int\frac{dx}{x^3+8}$	12	$\int\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx$	19	$\int\frac{(3x-7)dx}{x^3+x^2+4x+4}$
6	$\int\frac{x+1}{x^4+4x^2+4}dx$	13	$\int\frac{xdx}{(2x+1)(x-3)}$	20	$\int\frac{x^2dx}{x^4+x^2-2}$
7	$\int\frac{dx}{(x^2-9)(x^2+2)}$	14	$\int\frac{xdx}{x^3+1}$		

2.3. Тригонометрик функциялар қатнашган ифодаларни интеграллаш.

1. $\int SinmxCosnxdx$, $\int CosmxCosnxdx$ *ва* $\int SinmxSinnxdx$ каби интегралларни ҳисоблаш учун тригонометрик функцияларнинг кўпайтмаларини йиғиндига келтириш формулаларидан фойдаланилади:

$$\int SinmxCosnxdx=\frac{1}{2}\int[Sin(m+n)x+Sin(m-n)x]dx,$$

$$\int CosmxCosnxdx=\frac{1}{2}\int[Cos(m+n)x+Cos(m-n)x]dx,$$

$$\int SinmxSinnxdx=\frac{1}{2}\int[Cos(m-n)x-Cos(m+n)x]dx.$$

+уйидаги интеграллар ҳисоблансин:

1. $\int Sin8xCos7xdx,$

2. $\int Cos4xCos9xdx,$

3. $\int Sin3xSin7xdx,$

4. $\int Sin2xCos5xSin9xdx$.

Ечимлари.

1. $\int Sin8xCos7xdx = \frac{1}{2}\int Sin15xdx + \frac{1}{2}\int Sinxdx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{15}Cos15x\right) +$

$+\frac{1}{2}(-Cosx) + C = -\frac{Cos15x}{30} - \frac{Cosx}{2} + C.$

2. $\int Cos4xCos9xdx = \frac{1}{2}\int Cos13xdx + \frac{1}{2}\int Cos5xdx = \frac{Sin13x}{26} + \frac{Sin5x}{10} + C.$

3. $\int Sin3xSin7xdx = -\frac{1}{2}\int Cos4xdx - \frac{1}{2}\int Cos10xdx = -\frac{Sin4x}{8} - \frac{Sin10x}{20} + C.$

4. $\int Sin2xCos5xSin9xdx = \frac{1}{2}\int [Sin7x - Sin3x]Sin9x =$

$= \frac{1}{2}\int Sin7xSin9xdx - \frac{1}{2}\int Sin3xSin9xdx =$

$= \frac{1}{4}\int Cos2xdx - \frac{1}{4}\int Cos16xdx - \frac{1}{4}\int Cos6xdx + \frac{1}{12}\int cos12xdx =$

$= \frac{1}{8}Sin2x - \frac{1}{64}Sin16x - \frac{1}{24}Sin6x + \frac{1}{144}Sin12x + C.$

2. $\int Sin^m xCos^n xdx$ кўринишдаги интегралларни ҳисоблаш учун қуйидаги 3 ҳолни қараб ўтамиз.

<u>1-ҳол.</u> Агар *mқ2k+1* каби бутун мусбат тоқ сон бўлса,

$$\int Sin^{2k+1}xCos^n xdx = \int Sin^{2k}xCos^n xSinxdx = -\int (1-Cos^2x)^k Cos^n xd(Cosx),$$

яъни интеграл даражали функциялар йиғиндисини интеграллашга келтирилди.

Агар косинуснинг даражаси ҳам бутун мусбат тоқ сон бўлса, юқоридагига ўхшаш усулдан фойдаланилади.

Мисоллар:

1) $\int Sin^5 xdx = \int Sin^4 xSinxdx = -\int (1-Cos^2x)^2 d(Cosx) =$

$= -\int (1-2Cos^2x + Cos^4x)d(Cosx) = -\int d(Cosx) + 2\int Cos^2xd(Cosx) - \int Cos^4xd(Cosx) =$

$= -Cosx + \frac{2}{3}Cos^3x - \frac{1}{5}Cos^5x + C.$

$$2)\int Cos^7 xdx=\int (1-Sin^2x)^3 d(Sinx)=$$
$$=\int d(Sinx)-3\int Sin^2 xd(Sinx)+3\int Sin^4 xd(Sinx)-\int Sin^6 xd(Sinx)=Sinx-Sin^3x+\frac{3}{5}Sin^5x-$$
$$-\frac{1}{7}Sin^7x+C.$$
$$3)\int Sin^4xCos^3xdx=\int Sin^4xCos^2xCosxdx=\int Sin^4x(1-Sin^2x)d(Sinx)=$$
$$=\int Sin^4xd(Sinx)-\int Sin^6xd(Sinx)=\frac{1}{5}Sin^5x-\frac{1}{7}Sin^7x+C.$$
$$4)\int Sin^5xCos^2xdx=\int Sin^4xCos^2xSinxdx=-\int (1-Cos^2x)^2Cos^2xd(Cosx)=$$
$$=-\int Cos^2xd(Cosx)+2\int Cos^4xd(Cosx)-\int Cos^6xd(Cosx)=$$
$$=-\frac{1}{3}Cos^3x+\frac{2}{5}Cos^5x-\frac{1}{7}Cos^7x+C.$$
$$5)\int \frac{Cos^3xdx}{Sin^6x}=\int \frac{Cos^2xCosxdx}{Sin^6x}=\int \frac{(1-Sin^2x)d(Sinx)}{Sin^6x}=\int \frac{d(Sinx)}{Sin^6x}-\int \frac{d(Sinx)}{Sin^4x}=$$
$$=-\frac{1}{5Sin^5x}+\frac{1}{3Sin^3x}+C.$$
$$6)\int \frac{Sin^5xdx}{Cos^4x}=\int \frac{Sin^4xSinxdx}{Cos^4x}=-\int \frac{(1-Cos^2x)^2d(Cosx)}{Cos^4x}=$$
$$=-\int \frac{(1-2Cos^2x+Cos^4x)d(Cosx)}{Cos^4x}=-\int Cos^{-4}xd(Cosx)+2\int Cos^{-2}xd(Cosx)-\int d(Cosx)=$$
$$=\frac{1}{3Cos^3x}-\frac{1}{2Cosx}-Cosx+C.$$
$$7)\int \frac{Sin^3xdx}{Cos^5x}=\int \frac{Sin^2xSinxdx}{Cos^5x}=-\int \frac{(1-Cos^2x)d(Cosx)}{Cos^5x}=-\int \frac{d(Cosx)}{Cos^5x}+\int \frac{d(Cosx)}{Cos^3x}=$$
$$=\frac{1}{4Cos^4x}-\frac{1}{2Cos^2x}+C.$$

<u>2-ҳол.</u> Агар *m+nқ-2k (k>0 ва бутун сон)* бўлса, tgxқz ёки ctgxқz каби алмаштиришлар орқали қаралаётган интеграл даражали функцияларни интеграллашга келтирилади.

Бу ерда: tgxқz бўлса, $dx=\frac{dz}{1+z^2}$, $Sinx=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$,

$Cosx=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ *ва* $ctgx=z$ бўлганда $dx=-\frac{dz}{1+z^2}$, $Sinx=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$, $Cosx=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$

ларни инобатга олиш лозим.

Мисоллар:

1) $\int \frac{Sin^4 xdx}{Cos^8 x}$ да m = 4, n = -8 ва m + n = - 4; tgx = z алмаштиришдан фойдаланамиз :

$$\int \frac{Sin^4 xdx}{Cos^8 x} = \int \frac{z^4 dz}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)^4 (1+z^2)} = \int z^4(1+z^2)dz = \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + C = \frac{1}{5}tg^5 x + \frac{1}{7}tg^7 x + C.$$

$$2)\int \frac{Cos^2 xdx}{Sin^8 x} = \int ctg^2 x \frac{dx}{\sin^6 x} = |ctgx = z| = -\int z^2 \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}})^6} \frac{dz}{1+z^2} = -\int z^2(1+z^2)^2 dz =$$

$$= -\int z^2 dz - 2\int z^4 dz - \int z^6 dz = -\frac{z^3}{3} - \frac{2}{5}z^5 - \frac{z^7}{7} + C = -\frac{1}{3}ctg^3 x - \frac{2}{5}ctg^5 x - \frac{1}{7}ctg^7 x + C.$$

$$3)\int \frac{Cos^3 xdx}{Sin^9 x} = \int ctg^3 x \frac{dx}{Sin^6 x} = |ctgx = z| = \int z^3 \frac{-\frac{dz}{1+z^2}}{(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}})^6} = -\int z^3(1+z^2)^2 dz =$$

$$= -\int z^3 dz - 2\int z^5 dz - \int z^7 dz = -\frac{z^4}{4} - \frac{1}{3}z^6 - \frac{z^8}{8} + C = -\frac{1}{4}ctg^4 x - \frac{1}{3}ctg^6 x - \frac{1}{8}ctg^8 x + C.$$

$$4)\int \frac{dx}{Sin^8 x} = |ctgx = z| = \int \frac{-\frac{dz}{1+z^2}}{(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}})^8} = -\int (1+z^2)^3 dz = -\int dz - 3\int z^2 dz - 3\int z^4 dz - \int z^6 dz =$$

$$= -ctgx - ctg^3 x - \frac{3}{5}ctg^5 x - \frac{1}{7}ctg^7 x + C.$$

$$5)\int \frac{dx}{Cos^6 x} = |tgx = z| = \int \frac{(\sqrt{1+z^2})^6 dz}{(1+z^2)} = \int (1+z^2)^2 dz = \int dz + 2\int z^2 dz + \int z^4 dz =$$

$$= z + \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 + C = tgx + \frac{2}{3}tg^3 x + \frac{1}{5}tg^5 x + C.$$

$$6)\int \frac{dx}{Sin^3 x \cos^5 x} = |tgx = z| = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}})^3 (\frac{1}{\sqrt{1+z^2}})^5} = \int \frac{(1+z^2)^4 dz}{z^3(1+z^2)} = \int \frac{(1+z^2)^3 dz}{z^3} =$$

$$= \int \frac{dz}{z^3} + 3\int \frac{dz}{z} + 3\int zdz + \int z^3 dz = -\frac{1}{2z^2} + 3\ln|z| + \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{4}z^4 + C = -\frac{1}{2tg^2 x} + 3\ln|tgx| +$$

$$+ \frac{3}{2}tg^2 x + \frac{1}{4}tg^4 x + C.$$

<u>3-ҳол.</u> Агар $\int Sin^m x Cos^n xdx$ да $m+nқ0$ бўлса (m ва n лар бутун сонлар), мазкур интеграл, ёки $\int \frac{Sin^m x}{Cos^n x}dx = \int tg^m xdx$ (m>0), ёки $\int \frac{Cos^m xdx}{Sin^m x} = \int ctg^n xdx$ (n>0)

каби интегралларни интеграллашга келтириладики, улар мос равишда tgxқz ёки ctgxқz алмаштиришлар орқали ҳисобланади.

Мисоллар:

$$1)\int tg^4xdx=\left|tgx=z\right|=\int z^4\frac{dz}{1+z^2}=\int(z^2-1+\frac{1}{1+z^2})dz=\frac{z^3}{3}-z+arctgzC=\frac{1}{3}tg^3x-tgx+$$

$$+arctg(tgx)+C=\frac{tg^3x}{3}-tgx+x+C.$$

$$2)\int ctg^3xdx=\left|ctgx=z\right|=-\int(z-\frac{z}{1+z^2})dz=-\int zdz+\int\frac{zdz}{1+z^2}=-\frac{z^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|1+z^2\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{2}ctg^2x+\frac{1}{2}\ln\left|1+ctg^2x\right|+C=-\frac{1}{2}ctg^2x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{Sin^2x}\right|+C=-\frac{1}{2}ctg^2x-\ln\left|Sinx\right|+C.$$

4. Агар $\int Sin^{2n}xdx$ ва $\int Cos^{2n}xdx$ (n>0 – бутун сон) ёки $\int Sin^{2m}xCos^{2n}xdx$ (m>0, n>0 – бутун сонлар) каби интегралларни ҳисоблаш лозим бўлса, $Sin^2x=\dfrac{1-Cos2x}{2}$, $Cos^2x=\dfrac{1+Cos2x}{2}$ кўринишдаги формулалар қўлланилади.

Мазкур формулаларни қўллаш натижасида интеграл ишораси остидаги тригонометрик функцияларнинг даражалари бирмунча пасаяди.

Мисоллар:

$$1)\int Cos^4xdx=\int(Cos^2x)^2dx=\int(\frac{1+Cos2x}{2})^2dx=\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{2}\int Cos2xdx+\frac{1}{4}\int Cos^2 2xdx=$$

$$=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}Sin2x+\frac{1}{4}\int\frac{1+Cos4x}{2}dx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}Sin2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}Sin4x+C=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}Sin2x+$$

$$+\frac{1}{16}Sin4x+C.$$

$$2)\int Sin^2xdx=\int\frac{1-Cos2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int Cos2xdx=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}Sin2x+C.$$

$$3)\int Sin^2xCos^2xdx=\frac{1}{4}\int Sin^2 2xdx=$$

$$=\frac{1}{4}\,\frac{1}{2}\int(1-Cos4x)dx=\frac{1}{8}\int dx-\frac{1}{8}\int Cos4xdx=\frac{x}{8}-\frac{1}{32}Sin4x+C.$$

$$4)\ \int Cos^4xSin^2xdx=\int\sin^2xCos^2xCos^2xdx=\frac{1}{4}\int\sin^2 2xCos^2x=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1-Cos4x}{2}\frac{1+Cos2x}{2}dx=\frac{1}{16}\int\left(1+Cos2x-Cos4x-Cos2xCos4x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{16}x+\frac{1}{32}\sin 2x-\frac{1}{64}Sin4x-\frac{1}{16}\int\frac{1}{16}(Cos6x+Cos2x)dx=$$

$$=\frac{1}{16}x+\frac{1}{32}\sin 2x-\frac{1}{64}Sin4x-\frac{1}{32}\frac{1}{6}Sin6x-\frac{1}{32}\frac{1}{2}Sin2x+C=$$

$$=\frac{1}{16}x+\frac{1}{64}\sin 2x-\frac{1}{64}Sin4x-\frac{1}{192}Sin6x+C.$$

4. Агар фақат тригонометрик функцияларга рационал равишда боғлиқ бўлган ифода, яъни *Sinx* ва *Cosx* нинг рационал функцияси бўлган R (Sinx, Cosx) нинг аниқмас интеграли $\int R(Sinx, Cosx)dx$ ни ҳисоблаш лозим бўлса, унда универсал тригонометрик алмаштириш деб аталувчи $tg\frac{x}{2} = z$ дан фойдаланилади. Чунки, бу алмаштириш ёрдамида R (Sinx, Cosx) функция ҳар доим z га нисбатан рационал функция кўринишига келтирилади.

Бу ерда, $Sinx = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2z}{1+z^2}$, $Cosx = \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-z^2}{1+z^2}$, $\frac{x}{2} = arctgz$

ёки xқ2arctgz дан $dx = \dfrac{2dz}{1+z^2}$ ни инобатга олсак,

$\int R(Sinx, Cosx)dx = \int R\left(\dfrac{2z}{1+z^2}, \dfrac{1-z^2}{1+z^2}\right)\dfrac{2dz}{1+z^2} = \int R_1(z)dz$ ни ҳосил қиламиз. Бу ерда, $R_1(z)$ - ўзгарувчи z га нисбатан рационал функция.

Таъкидлаш лозимки, амалиётда бу алмаштириш кўпинча анча мураккаб рационал функцияларга олиб келади. Шу сабабли, баъзан ундан фойдаланмасдан анча содда ўрнига қўйиш усуллардан фойдаланилади. +уйида биз 3 ҳолни кўриб ўтамизки, у ерда универсал тригонометрик алмаштиришларсиз иш юритиш мумкин.

<u>1-ҳол.</u> Агар R (*Sinx*, *Cosx*) функция *Sinx* га нисбатан тоқ бўлса, яъни R (-*Sinx*, *Cosx*)қ - R(*Sinx*, *Cosx*) бўлса, у ҳолда zқCosx, dzқ-Sinxdx каби ўрнига қуйиш бу функцияни рационаллаштиради.

<u>2-ҳол.</u> Агар R(*Sinx*, *Cosx*) функция Cosx га нисбатан тоқ бўлса, яъни R(*Sinx*, -*Cosx*)қ -R(*Sinx*, *Cosx*) бўлса, у ҳолда zқSinx, dzқCosxdx каби ўрнига қуйиш бу функцияни рационаллаштиради.

<u>3-ҳол.</u> Агар R(*Sinx*, *Cosx*) функция Sinx ва Cosx га нисбатан жуфт бўлса, яъни R(-*Sinx*,- *Cosx*)қ R(*Sinx*, *Cosx*) бўлса, у ҳолда zқtgx, $dx = \dfrac{dz}{1+z^2}$ каби ўрнига қуйиш бу функцияни рационаллаштиради. Бу ерда, $Sin^2x = \dfrac{tg^2x}{1+tg^2x} = \dfrac{z^2}{1+z^2}$ ни ва $Cos^2x = \dfrac{1}{1+tg^2x} = \dfrac{1}{1+z^2}$ларни инобатга олиш лозим.

Мисоллар.

1. $\int \dfrac{dx}{Sin^5x}$ ни ҳисоблашда $tg\frac{x}{2} = z$ алмаштиришдан фойдаланамиз.

$Sin^5x = \left(\dfrac{2z}{1+z^2}\right)^5 = \dfrac{32z^5}{(1+z^2)^5}$ ни ва $dx = \dfrac{2dz}{1+z^2}$ни инобатга олсак,

$$\int\frac{dx}{Sin^5x}=\frac{1}{16}\int\frac{(1+z^2)^4}{z^5}dz=\frac{1}{16}\int\frac{1+4z^2+6z^4+4z^6+z^8}{z^5}dz=$$

$$=\frac{1}{16}\int\frac{dz}{z^5}+\frac{1}{4}\int\frac{dz}{z^3}+\frac{3}{8}\int\frac{dz}{z}+\frac{1}{4}\int zdz+\frac{1}{16}\int z^3dz=-\frac{1}{64z^4}-\frac{1}{8z^2}+\frac{3}{8}\ln|z|+\frac{z^2}{8}+\frac{z^4}{64}+C.$$

ёки z ни $tg\frac{x}{2}$ билан алмаштирсак,

$$\int\frac{dx}{Sin^5x}=-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}ctg^4\frac{x}{2}+2ctg^2\frac{x}{2}-6\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|-2tg^2\frac{x}{2}-\frac{1}{4}tg^4\frac{x}{2}\right)+C.$$

2. $\int\frac{(2+Sinx)dx}{Sinx(4+3Cosx)}$ ни ҳисоблашда ҳам $tg\frac{x}{2}=z$ алмаштиришни қўллаймиз:

$$\int\frac{(2+\sin x)}{\sin x(4+3\cos x)}=\int\frac{2+\frac{2z}{1+z^2}}{(4+\frac{3(1-z^2)}{1+z^2})\frac{2z}{1+z^2}}\frac{2dz}{1+z^2}=2\int\frac{(z^2+z+1)dz}{z(z^2+7)};\frac{z^2+z+1}{z(z^2+7)}=\frac{A}{z}+\frac{Bz+D}{z^2+7}$$

дан, Ақ 1/7, Вқ 6/7 ва Dқ1 ларни топамиз. У ҳолда:

$$\int\frac{(2+Sinx)dx}{(4+3Cosx)Sinx}=\frac{2}{7}\int\frac{dz}{z}+\frac{6}{7}\int\frac{2zdz}{z^2+7}+2\int\frac{dz}{7+z^2}=\frac{2}{7}\ln|z|+\frac{6}{7}\ln(z^2+7)+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{z}{\sqrt{7}}+C=\frac{2}{7}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\frac{6}{7}\ln(7+tg^2\frac{x}{2})+\frac{2}{\sqrt{7}}arctg\left(\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{7}}\right)+C.$$

3. $\int\frac{dx}{Sin^3xCos^2x}$ ни ҳисоблашда Cosxқz алмаштиришни қўллаймиз, чунки $(-Sinx)^3$қ $-Sin^3x$. $Sinx=\sqrt{1-Cos^2x}=\sqrt{1-z^2}$ ни ва $-Sinxdx$қdz дан $dx=-\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ эканликларини инобатга олсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int\frac{dx}{Sin^3xCos^2x}=\int\frac{-\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}}{(\sqrt{1-z^2})^3z^2}=-\int\frac{dz}{(1-z^2)^2z^2}\text{ ва}$$

$$\int\frac{dx}{Sin^3xCos^2x}=\frac{1}{Cosx}-\frac{Cosx}{2Sin^2x}+\frac{3}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$$

ни ҳосил қиламиз.

4. $\int\frac{Cos^3xdx}{Sin^4x}$ ни ҳисобллашда $Sinx$қz алмаштиришдан фойдаланамиз.

$$\int\frac{Cos^3xdx}{Sin^4x}=\int\frac{Cos^2xCosxdx}{Sin^4x}=\int\frac{(1-z^2)dz}{z^4}=\int\frac{dz}{z^4}-\int\frac{dz}{z^2}=-\frac{1}{3z^3}+\frac{1}{z}+C$$

$$=-\frac{1}{3Sin^3x}+\frac{1}{Sinx}+C.$$

5. $\int \frac{dx}{(1+Sin^2x)Cos^2x}$ ни ҳисоблашда $tgxқz$ алмаштиришни қўллаймиз, чунки интеграл белгиси остидаги функция $Sinx$ ва $Cosx$ га нисбатан жуфт функциядир.

$$\int \frac{dx}{(1+Sin^2x)Cos^2x} = \int \frac{\frac{dx}{Cos^2x}}{1+Sin^2x} = \int \frac{dz}{1+\frac{z^2}{1+z^2}} = \int \frac{(1+z^2)dz}{1+2z^2} = \frac{1}{2}\int dz + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+2z^2} =$$

$$= \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\int \frac{dz}{\frac{1}{2}+z^2} = \frac{z}{2} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\,arctg\,\frac{z}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C = \frac{1}{2}tgx + \frac{\sqrt{2}}{4}arctg(\sqrt{2}tgx) + C.$$

<u>МУСТА+ИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР</u>

1. $\int Sin6xSin7xdx$
2. $\int Cos3xCos9xdx$
3. $\int Sin2xSin5xdx$
4. $\int Sin\frac{3x}{4}Cos\frac{x}{4}dx$
5. $\int SinxCos2xCos3xdx$
6. $\int CosxCos2xCos5xdx$
7. $\int Sin5xSin\frac{x}{2}dx$
8. $\int Sin\frac{x}{6}Sin\frac{5x}{6}dx$
9. $\int Cos\frac{x}{2}Cos\frac{x}{3}dx$
10. $\int Sin^3xdx$
11. $\int Cos^5xdx$
12. $\int Sin^7xdx$
13. $\int Cos^9xdx$

21. $\int \frac{Sinxdx}{Cos^3x}$
22. $\int \frac{Cos^3xdx}{Sinx}$
23. $\int \frac{Cosxdx}{Sin^3x}$
24. $\int \frac{Cos^7xdx}{Sin^4x}$
25. $\int \frac{Cos^3xdx}{\sqrt{Sinx}}$
26. $\int \frac{Cos^5xdx}{\sqrt[3]{Sin^2x}}$
27. $\int \frac{Sin^3xdx}{\sqrt{Cosx}}$
28. $\int Cos^5x\sqrt[3]{Sin^2x}dx$
29. $\int \frac{Cos^3xdx}{Sin^5x}$
30. $\int \frac{dx}{Sin^4x}$
31. $\int \frac{dx}{Cos^4x}$
32. $\int \frac{dx}{Sin^6x}$
33. $\int \frac{dx}{Cos^8x}$

41. $\int \frac{dx}{CosxSin^3x}$
42. $\int tg^6xdx$
43. $\int tg^5xdx$
44. $\int ctg^4xdx$
45. $\int ctg^5xdx$
46. $\int Sin^4xdx$
47. $\int Cos^2xSin^4xdx$
48. $\int Sin^6xdx$
49. $\int Cos^4xSin^4xdx$
50. $\int Sin^4xCos^6xdx$
51. $\int \frac{dx}{Cos^3x}$
52. $\int \frac{dx}{Sin^3x}$
53. $\int \frac{dx}{Cos^5x}$

14. $\int Cos^2 x Sin^3 x dx$

15. $\int Sin^4 x Cos^7 x dx$

16. $\int Sin^2 x Cos^5 x dx$

17. $\int Sin^2 x Cos^3 x dx$

18. $\int Sin^7 x Cos^6 x dx$

19. $\int \frac{Sin^3 x dx}{Cos^2 x}$

20. $\int \frac{Sin^3 x dx}{Cosx}$

34. $\int \frac{Sin^7 x dx}{Cos^{13} x}$

35. $\int \frac{Cos^4 x dx}{Sin^6 x}$

36. $\int \frac{Cos^4 x dx}{Sin^8 x}$

37. $\int \frac{dx}{Siin^4 x Cos^6 x}$

38. $\int \frac{dx}{Sin^7 x Cosx}$

39. $\int \frac{dx}{Sinx Cos^3 x}$

40. $\int \frac{dx}{Sin^3 x Cos^3 x}$

54. $\int \frac{dx}{Sin^7 x}$

55. $\int \frac{(5+9Sinx)dx}{Cosx(2+3Sinx)}$

56. $\int \frac{dx}{Cosx(1-Sinx)}$

57. $\int \frac{dx}{Cos^2 x(1+Cosx)}$

58. $\int \frac{Cos^5 x dx}{Sin^4 x}$

59. $\int \frac{dx}{Sin^2 x Cos^3 x}$

60. $\int \frac{dx}{(1+Cos^2 x)Sin^2 x}$

2.4. Алгебраик иррационалликларни интеграллаш.

1) $\int R(x^{\alpha}, x^{\beta}, ..., x^{\gamma})dx$ каби интегралларни ҳисоблаш лозим бўлсин. Бу ерда: $\alpha, \beta, ..., \gamma$- каср рационал сонлар бўлиб, $\int R(x^{\alpha}, x^{\beta}, ..., x^{\gamma})$ эса, ўз аргументларига нисбатан рационал функциядир. Бу хилдаги иррационаллик *x*қz^n, *dx*қ$nz^{n-1}dz$ каби алмаштириш орқали рационаллаштирилади. Буердаги *n*, $\alpha, \beta, ..., \gamma$ каср сонлар махражларининг энг кичик умумий карралисидир.

2) $\int R[x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\alpha}, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\beta}, ..., (\frac{ax+b}{cx+d})^{\gamma}]dx$ турдаги интегрални рационаллаштириш учун (бу ерда ҳам $\alpha, \beta, ..., \gamma$ лар каср рационал сонлар ва *R*, ўз аргументларига нисбатан рационал функция) $\frac{ax+b}{cx+d} = z^n$ алмаштиришдан фойдаланамиз. Хусусан, $\frac{ax+b}{cx+d}$ нинг ўрнида $ax+b$ қатнашганда ҳам $ax+b=z^n$ алмаштириш қўлланилади (*n*- $\alpha, \beta, ..., \gamma$ сонлар махражларининг энг кичик умумий карралисидир).

<u>1-Мисол.</u> $$\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}} = \int \frac{x^{\frac{1}{3}}dx}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{2}{3}}} = \begin{vmatrix} x = z^6 \\ dx = 6z^5 dz \\ z = \sqrt[6]{x} \end{vmatrix} = \int \frac{z^2 6z^5 dz}{z^3 - z^4} = 6\int \frac{z^7 dz}{z^3(1-z)} =$$

$$= -6\int \frac{z^4 dz}{z-1} = -6\int (z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z-1})dz = -6\left[\frac{z^4}{4} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2} + z + \ln|z-1|\right] + C =$$

$$=-6\left[\frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{3}\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}+\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|\right]+C.$$

<u>2-Мисол.</u> $$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}=\left|\begin{array}{l}x=z^6\\ z=\sqrt[6]{x}\\ dx=6z^5dz\end{array}\right|=\int\frac{6z^5dz}{z^4(z^3+z^2)}=6\int\frac{dz}{z(z+1)}=$$

$$=6\int\frac{(1+z-z)dz}{z(1+z)}=6\int\frac{dz}{z}-6\int\frac{dz}{1+z}=6\ln|z|-6\ln|z+1|+C=6\ln\left|\frac{z}{z+1}\right|+C=6\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}+1}\right|+C.$$

<u>3-Мисол.</u> $$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x-1}}=\left|\begin{array}{l}x-1=z^2\\ x=z^2+1\\ dx=2zdz\\ z=\sqrt{x-1}\end{array}\right|=\int\frac{(z^2+1)^2\,2zdz}{z}=2\int(z^4+2z^2+1)dz=$$

$$=2\left(\frac{z^5}{5}+\frac{2}{3}z^3+z\right)+C=\frac{2}{5}(x-1)^2\sqrt{x-1}+\frac{4}{3}(x-1)\sqrt{x-1}+C=$$

$$=2\sqrt{x-1}\left[\frac{(x-1)2}{5}+\frac{4}{3}(x-1)+1\right]+C.$$

<u>4-Мисол.</u> $$\int\frac{\sqrt{2x-3}}{x}dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt{2x-3}=z\\ 2x-3=z^2\\ x=\frac{1}{2}(3+z^2)\\ dx=zdz\end{array}\right|=2\int\frac{z^2dz}{3+z^2}=2\int\frac{z^2+3-3}{3+z^2}dz=$$

$$=2\int dz-6\int\frac{dz}{(\sqrt{3})^2+z^2}=2z-\frac{6}{\sqrt{3}}arctg\frac{z}{\sqrt{3}}+C=2\sqrt{2x-3}-\frac{6}{\sqrt{3}}arctg\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{3}}+C.$$

<u>5-Мисол.</u> $$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2}-\sqrt{1+x}}=\left|\begin{array}{l}\sqrt[6]{1+x}=z\\ 1+x=z^6\\ dx=6z^5dz\end{array}\right|=\int\frac{6z^5dz}{z^4-z^3}=6\int\frac{z^2dz}{z-1}=$$

$$=6\int\frac{(z^2-1+1)dz}{z-1}=6\int\left(z+1+\frac{1}{z-1}\right)dz=6\left(\frac{z^2}{2}+z+\ln|z-1|\right)+C=3\sqrt[3]{1+x}+6\sqrt[6]{1+x}+$$

$$+6\ln\left|\sqrt[6]{1+x}-1\right|+C.$$

<u>6-Мисол.</u> $$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx=\left|\begin{array}{l}\frac{x-1}{x+1}=z^2\\ x=\frac{1+z^2}{1-z^2}\\ dx=\frac{4zdz}{(1-z^2)^2}\end{array}\right|=\int\frac{1-z^2}{1+z^2}z\frac{4zdz}{(1-z^2)^2}=-4\int\frac{z^2dz}{(z^2+1)(z^2-1)}=$$

$$= -4\int \frac{z^2dz}{(z-1)(z+1)(z^2-1)}.$$

Интеграл белгиси остидаги функцияни энг содда касрларга ажратамиз:

$$\frac{z^2}{(z-1)(z+1)(z^2+1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{Cz+D}{z^2+1} \text{ дан}$$

$$z = Az^3 + Az^2 + Az + A + Bz^3 - Bz^2 - B + Cz^3 + Dz^2 - Cz - D$$

$$\left.\begin{array}{l} z^3 : A + B + C = 0, \\ z^2 : A - BD = 1, \\ z : A + B - C = 0, \\ z^0 : A - B - D = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = \frac{1}{4}, \\ B = -\frac{1}{4}, \\ C = 0, \\ D = \frac{1}{2} \end{array}$$

Демак, $$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = -\int \frac{dz}{z-1} + \frac{dz}{z+1} - \int \frac{2dz}{z^2+1} =$$

$$= \ln|z+1| - \ln|z-1| - 2arctgz + C = \ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right| - 2arctgz + C =$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1}\right| - 2arctg\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C = \ln\left|\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}\right| - 2arctg\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C =$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| - 2arctg\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C.$$

3) $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ каби интегралларни ҳисоблашнинг айрим ҳолларини кўриб ўтамиз.

a) Агар $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ кўринишдаги интегрални ҳисоблаш лозим бўлса, у ерда квадрат учҳаддан тўла квадрат ажратилгандан сўнг, мазкур интеграл жадвал интегралига келтирилади.

<u>1-Мисол.</u> $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+25}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2+16}} = \ln\left|(x+3) + \sqrt{x^2+6x+25}\right| + C$.

<u>2-Мисол.</u> $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+4x-5)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left[(x+2)^2-9\right]}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} =$

$$= \arcsin\frac{x+2}{3} + C.$$

b) Ушбу $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ кўринишдаги интегрални ҳисоблаш учун аввало, суратда квадрат учҳаднинг ҳосиласи $2ax+b$ ни ажратилади, кейин у иккита интеграл йиғиндисига ажралади. Улардан бири, даражали функциядан олинган интеграл бўлиб, иккинчиси а) бандда қаралган интегралдир.

<u>3-Мисол.</u> $\int \frac{(3x+8)dx}{\sqrt{3x^2+x+9}} = \int \frac{(6x+1)\frac{1}{2}+\frac{15}{2}}{\sqrt{3x^2+x+9}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(3x^2+x+9)}{\sqrt{3x^2+x+9}} +$

$$+\frac{15}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{3\left[(x+\frac{1}{6})^2+\frac{107}{36}\right]}} = \sqrt{3x^2+x+9}+\frac{15}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|(x+\frac{1}{6})+\sqrt{(x+\frac{1}{6})^2+\frac{107}{36}}\right|+$$

$$+C = \sqrt{3x^2+x+9}+\frac{5\sqrt{3}}{2}\ln\left|(x+\frac{1}{6})+\sqrt{x^2+\frac{1}{3}x+3}\right|+C\cdot$$

<u>4-Мисол.</u> $\int \frac{(5x-3)dx}{\sqrt{1-13x-5x^2}} = \int \frac{(-10x-13)(-\frac{1}{2})-\frac{19}{2}}{\sqrt{1-13x-5x^2}}dx =$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-13x-5x^2)}{\sqrt{1-13x-5x^2}} - \frac{19}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{-5(x^2+\frac{13}{5}x-\frac{1}{5})}} =$$

$$= -\sqrt{1-13x-5x^2} - \frac{19}{2\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{189}{100}-(x+\frac{13}{10})^2}} = -\sqrt{1-13x-5x^2} - \frac{19\sqrt{5}}{10}\arcsin\frac{x+\frac{13}{10}}{\frac{\sqrt{189}}{10}} +$$

$$+C = -\sqrt{1-13x-5x^2} - \frac{19\sqrt{5}}{10}\arcsin\frac{10x+13}{\sqrt{189}}+C\cdot$$

с) +уйидаги $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt[k]{ax^2+bx+c}}$ интегрални ҳисоблаш учун $\frac{1}{x-\alpha}=z$ алмаштириш орқали уни (а) бандда кўрилган) интегралга келтирилади.

<u>5-Мисол.</u> $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}$ни ҳисоблашда $\frac{1}{x-1}=z$ ёки $x-1=\frac{1}{z}$ дан фойдаланамиз. Агар $x=1+\frac{1}{z},\ dx=-\frac{dz}{z^2},\ \sqrt{1+x-x^2} = \sqrt{1+1+\frac{1}{z}-1-\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}}$ $= \frac{\sqrt{z^2-z-1}}{z}$ эканликларини инобатга олсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}} = -\int z\frac{zdz}{z^2\sqrt{z^2-z-1}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-z-1}} = -\int \frac{d(z-\frac{1}{2})}{\sqrt{(z-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}}} =$$

$$= -\ln\left|(z-\frac{1}{2})+\sqrt{(z-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}}\right|+C = -\ln\left|\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{x-1})^2-\frac{1}{x-1}-1}\right|+C =$$

$$= -\ln\left|\frac{3-x+\sqrt{1+x-x^2}}{2(x-1)}\right|+C\cdot$$

6-Мисол. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{15+3x^2}} = \left| \begin{array}{l} x=\frac{1}{z}, dx=-\frac{dz}{z^2}, \\ 15+3x^2=15+\frac{3}{z^2} \\ \sqrt{15+3x^2}=\frac{\sqrt{15z^2+3}}{z} \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{dz}{z^2}}{\frac{1}{z^2}\frac{\sqrt{3(5z^2+1)}}{z}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{zdz}{\sqrt{5z^2+1}} = -\frac{1}{3}\frac{1}{10}\int \frac{d(5z^2+1)}{\sqrt{5z^2+1}} = -\frac{1}{3}\frac{1}{10}2\sqrt{5z^2+1}+C = -\frac{1}{5\sqrt{3}}\sqrt{\frac{5}{x^2}+1}+C =$$

$$= -\frac{\sqrt{5+x^2}}{5\sqrt{3}x}+C = -\frac{1}{15}\frac{\sqrt{15+3x^2}}{x}+C.$$

4) Энди, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ га рационал боғлиқ бўлган умумий кўринишдаги $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ ни қараб чиқамиз. Квадрат учҳаддан тўла квадрат ажратилгандан сўнг, яъни, $ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$ да $x+\frac{b}{2a}=z,\ dx=dz$ деб белгилашларни киритамиз. Натижада, дастлабки интеграл *a* ва *(b²-4ac)* нинг ишораларига боғлиқ ҳолда интеграллардан бирини топишга келтирилади:

a) Агар *a>0* ва b^2*-4ac<0* бўлса, у холда

$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int R_1(z,\sqrt{m^2+n^2z^2})dz$, бу ерда $a=n^2$, $-\frac{b^2-4ac}{4a}=m^2$.

Мазкур интеграл $z=\frac{m}{n}tgt$ алмаштириш орқали $\int R_1(Sint;Cost)\mathrm{dt}$ га келтирилади.

b) Агар *a>0,* b^2*-4ac>0* бўлса, у ҳолда $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int R_2(z,\sqrt{n^2z^2-m^2})dz$ каби бўлиб (бу ерда: *a*қn^2, $m^2=\frac{b^2-4ac}{4ac}$), уни $\int R_2(Sint;Cost)dt$ га келтириш учун $z=\frac{m}{n}\sec t$ алмаштиришдан фойдаланилади.

c) Агар *a<0,* b^2*-4ac>0* бўлса, у ҳолда $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx =$ $=\int R_3(z,\sqrt{m^2-n^2z^2})dz$ да $z=\frac{m}{n}\sin t$ (ёки $z=\frac{m}{n}Cost$) алмаштириш қўлланади. Бу ерда : *n*^{2}*қ-a,* $m^2=-\frac{b^2-4ac}{4a}>0$.

Юқорида баён этилган алмаштиришлар, одатда, иррационалликларни интеграллашда тригонометрик алмаштиришлар деб юритилади.

<u>1-Мисол.</u> $\int\frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$ ни ҳисоблашда $xқ2tgt$ алмаштиришни қўллаймиз. У ҳолда: $dx=\frac{2dt}{Cos^2t}$, $4+x^2=\frac{4}{Cos^2t}$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}=\int\frac{Cos^3t2dt}{Cos^2t8}=\frac{1}{4}\int Costdt=\frac{1}{4}S\text{int}+C=\frac{1}{4}Sin(arctg\frac{x}{2})+C\ .$$

Агар $Sin(arctg\frac{x}{2})=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$ эканлигини назарда тутсак, натижада:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}=\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}+C\ .$$

<u>2-Мисол.</u> $\int\frac{dx}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}=\begin{vmatrix}x=2S\text{int}\\ dx=2Cosdt\end{vmatrix}=\int\frac{2Cosdt}{4Cos^2t2Cost}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{Cos^2t}=\frac{1}{4}tgt+C\ .$

Агар $S\text{int}=\frac{x}{2}$ ва $Cost=\sqrt{1-Sin^2t}=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}$ эканлигини инобатга олсак, $tgt=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. Демак, $\int\frac{dx}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}=\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}+C\ .$

<u>3-Мисол.</u> $\int\frac{dx}{(x^2-10)\sqrt{x^2-10}}$ да $x=\sqrt{10}Sect$ ёки $x=\frac{\sqrt{10}}{C\quad o}$ алмаштириш бажарилади. Агар $dx=\frac{\sqrt{10}Sint}{\text{Cos}^2t}$ ва $x^2-10=\frac{10Sin^2t}{Cos^2t}$ ларни ўрнига қўйилса, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int\frac{dx}{(x^2-10)\sqrt{x^2-10}}=\frac{1}{10}\int\frac{Cosdt}{Sin^2t}=\frac{1}{10}\int\frac{d(Sint)}{Sin^2t}=-\frac{1}{10Sint}+C=-\frac{1}{10}\frac{x}{\sqrt{x^2-10}}+C\ .$$

<u>4-Мисол.</u> $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+2x+17)^3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left[(x+1)^2+16\right]^3}}=\begin{vmatrix}x+1=4tgt\\ dx=\frac{4dt}{Cos^2t}\end{vmatrix}=$

$$=\int\frac{\frac{4dt}{Cos^2t}}{\frac{64}{Cos^3t}}=\frac{1}{16}\int Costdt=\frac{1}{16}Sint+C=\frac{1}{16}Sint+C=\frac{1}{16}\frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}}+C=$$

$$=\frac{1}{16}\frac{\frac{x+1}{4}}{\sqrt{1+(\frac{x+1}{4})^2}}+C=\frac{1}{16}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+17}}+C.$$

<u>5-Мисол.</u> $\int\sqrt{-x^2+6x+7}dx=\int\sqrt{-\left[(x-3)^2-16\right]}dx=\int\sqrt{16-(x-3)^2}dx=$

$$=\begin{vmatrix} x-3=4Sint \\ dx=4Cosdt \end{vmatrix}=16\int Cos^2 tdt=8\int(1+Cos2t)dt=8t+4Sin2t+C=$$

$$=\begin{vmatrix} Sint=\frac{x-3}{4} \\ Cost=\frac{\sqrt{7+6x-x^2}}{4} \\ t=arcSin\frac{x-3}{4} \end{vmatrix}=8arcSin\frac{x-3}{4}+2\frac{x-3}{4}\frac{\sqrt{7+6x-x^2}}{4}+C=$$

$$=8arcSin\frac{x-3}{4}+\frac{(x-3)\sqrt{7+6x-x^2}}{8}+C.$$

<u>6-Мисол.</u> $\int\frac{(x+4)dx}{\sqrt{x^2+2x-8}}=\int\frac{(x+4)dx}{\sqrt{(x+1)^2-9}}=\begin{vmatrix} x+1=\frac{3}{Cost} \\ dx=\frac{3Sintdt}{Cos^2 t} \end{vmatrix}=$

$$=\int\frac{(\frac{3}{Cost}+3)\frac{3Sintdt}{Cos^2 t}}{\frac{3Sint}{Cost}}=3\int\frac{(1+Cost)dt}{Cos^2 t}=3\int\frac{dt}{Cos^2 t}+3\int\frac{dt}{Cost}=3tgt+3\ln\left|tg(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2})\right|+C.$$

Бу ерда, $Cost=\frac{3}{x+1}, Sint=\frac{\sqrt{x^2+2x-8}}{x+1}, tg(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2})=\frac{1+Sint}{Cost}=\frac{1+\frac{\sqrt{x^2+2x-8}}{x+1}}{\frac{3}{x+1}}=$

$=\frac{x+1+\sqrt{x^2+2x-8}}{3}$ ларни эътиборга олсак, мазкур интеграл охиригача ҳисобланади.

$$\int\frac{(x+4)dx}{\sqrt{x^2+2x-8}}=\sqrt{x^2+2x-8}+3\ln\left|\frac{(x+1)+\sqrt{x^2+2x-8}}{3}\right|+C.$$

➢ *<u>Эслатма.</u> Биз бу ерда алгебраик иррационалликларни интеграллашнинг Эйлер алмаштиришлари, дифференциал биномларни интеграллаш, гиперболик алмаштиришлар ва бошқа усулларни ёритмадик. Китобхон ушбу ва бошқа усулларни олий математикага бағишланган кўпгина адабиётлардан мустақил равишда ўрганиши мумкин.*

<u>МУСТА+ИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР</u>

1.	$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$	21.	$\int\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx$	41.	$\int\frac{xdx}{\sqrt{8-3x-2x^2}}$
2.	$\int\frac{\sqrt[3]{x}dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$	22.	$\int\sqrt{\frac{3-4x}{9-5x}}dx$	42.	$\int\frac{(2x+5)dx}{\sqrt{7+8x-11x^2}}$
3.	$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$	23.	$\int\sqrt{(\frac{1-x}{1+x})^3}$	43.	$\int\frac{(3x-7)dx}{\sqrt{5x^2+8x+1}}$

4. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^2}$

6. $\int \frac{(1-\sqrt[6]{x})^3 dx}{\sqrt[3]{x}}$

7. $\int \frac{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x^5}}$

8. $\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$

9. $\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$

10. $\int \frac{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})dx}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}$

11. $\int \frac{(x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x})dx}{x(1+\sqrt[3]{x})}$

12. $\int \frac{(\sqrt{x}-1)dx}{\sqrt[3]{x}+1}$

13. $\int \frac{xdx}{1+\sqrt{2x+1}}$

14. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$

16. $\int \frac{\sqrt{x-5}dx}{x^3}$

17. $\int \frac{\sqrt{3x+4}dx}{x^2}$

18. $\int \frac{\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}-4}$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3+2x)^2}-\sqrt{3+2x}}$

20. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}-1}dx$

24. $\int (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$

25. $\int \frac{(2+\sqrt{x+1})dx}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}$

26. $\int \frac{(3+\sqrt{x+4})dx}{(x+4)^2-\sqrt{x+4}}$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x)^3(1-x)}}$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)^4}}$

29. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$

30. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$

31. $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2+5x+4}}$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{14x^2+9x+1}}$

33. $\int \frac{dx}{\sqrt{5+13x+8x^2}}$

34. $\int \frac{dx}{\sqrt{11+5x+6x^2}}$

35. $\int \frac{dx}{\sqrt{5+3x-x^2}}$

36. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x-x^2}}$

37. $\int \frac{dx}{\sqrt{11+9x-7x^2}}$

38. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-5x^2}}$

39. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+5x+3}}$

40. $\int \frac{(2-3x)dx}{\sqrt{4x^2-x-7}}$

44. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5+x^2}}$

45. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{7-x^2}}$

46. $\int \frac{dx}{(x-2)^3\sqrt{3x^2-8x+5}}$

47. $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$

49. $\int \frac{dx}{9x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$

50. $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+3x+2}}$

51. $\int \frac{dx}{(x^2-14)\sqrt{x^2-14}}$

52. $\int \frac{dx}{(3-x^2)\sqrt{3-x^2}}$

53. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(4+x^2)}$

54. $\int \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$

55. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(4+x^2)^5}}$

56. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}dx$

57. $\int \frac{(5x+4)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

58. $\int \sqrt{x^2-2x+2}\ dx$

59. $\int \sqrt{x^2-4}dx$

60. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$

2.5 Гиперболик функцияларни интеграллаш.

Гиперболик функцияларга нисбатан рационал боғланишдаги функцияларни интеграллаш ҳам айнан тригонометрик функцияларни интеграллашга ўхшаш олиб борилади. Бу ерда, қуйидагиларни инобатга олиш мақсадга мувофиқдир:

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{(гиперболик синус)},$$

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{(гиперболик косинус)},$$

$$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{(гиперболик тангенс)},$$

$$cthx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad \text{(гиперболик котангенс)}$$

$$ch^2x - sh^2x = 1,\ ch^2x + sh^2x = ch2x,$$

$$sh^2x = \frac{1}{2}(ch2x - 1), ch^2x = \frac{1}{2}(ch2x + 1), Sh2x = 2shxchx$$

Шунингдек,

Агар $th\frac{x}{2} = t$ бўлса, $shx = \frac{2t}{1-t^2}$; $chx = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ ва $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ дир.

<u>1-Мисол.</u> $\int ch^2xdx = \frac{1}{2}\int (ch2x+1)dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int ch2xd(2x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sh2x + C$.

<u>2-Мисол.</u>

$$\int sh^3xdx = \int sh^2xshxdx = \int (ch^2x - 1)d(chx) = \int ch^2xd(chx) - \int d(chx) = \frac{ch^3x}{3} - chx + C.$$

<u>3-Мисол.</u> $\int sh^2xch^2xdx = \frac{1}{4}\int sh^2 2xdx = \frac{1}{4}\frac{1}{2}\int (ch4x - 1)dx = \frac{1}{8}\frac{1}{4}sh4x - \frac{1}{8}x + C =$

$= \frac{1}{8}(\frac{1}{4}sh4x - x) + C$.

<u>4-Мисол.</u> $\int \frac{dx}{sh^2xch^2x} = \int \frac{(ch^2x - sh^2x)dx}{sh^2xch^2x} = \int \frac{dx}{sh^2x} - \int \frac{dx}{ch^2x} = -cthx - thx + C$.

<u>5-Мисол.</u> $\int th^3xdx = \int \frac{sh^3x}{ch^3x}dx = \int \frac{sh^2xshxdx}{ch^3x} = \int \frac{(ch^2x-1)shxdx}{ch^3x} =$

$= \int \frac{shxdx}{chx} - \int \frac{shxdx}{ch^3x} = \int \frac{d(chx)}{chx} - \int ch^{-3}xd(chx) = \ln|chx| + \frac{1}{2ch^2x} + C$.

<u>6-Мисол.</u> $\int \frac{dx}{shx + 2chx}$ни ҳисоблашда, $th\frac{x}{2} = t$ алмаштиришни қўллаймиз.

Агар $shx + 2chx = \frac{2t}{1-t^2} + \frac{2+2t^2}{1-t^2} = \frac{2(t^2+t+1)}{1-t^2}$ ни инобатга олсак, натижада:

$$\int \frac{dx}{shx+2chx} = \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \int \frac{dx}{\frac{\sqrt{3}}{4}+(t+\frac{1}{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2th\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + C .$$

МУСТАҚИЛ ЕЧИШГА ДОИР МИСОЛЛАР:

1. $\int ch^3 xdx$
2. $\int ch^2 xdx$
3. $\int ch^4 xdx$
4. $\int ch^3 xchxdx$
5. $\int \frac{dx}{shxch^2 x}$
6. $\int cth^3 xdx$
7. $\int th^4 xdx$
8. $\int cth^4 xdx$
9. $\int \frac{dx}{sh^2 x+ch^2 x}$
10. $\int \frac{dx}{2shx+3chx}$
11. $\int \frac{shxdx}{\sqrt{ch2x}}$
12. $\int \frac{shxchxdx}{sh^2 x+ch^2 x}$
13. $\int sh^3 xch^3 xdx$
14. $\int \frac{sh\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}$
15. $\int \frac{dx}{chxsh^2 x}$
16. $\int \frac{dx}{3shx+4chx}$
17. $\int \frac{dx}{6-5chx}$
18. $\int xthx^2 dx$
19. $\int (10x+7)sh(5x^2+7x+9)dx$
20. $\int \frac{x^2 dx}{sh2(4x^3+9)}$

3 БОБ

АНИҚ ИНТЕГРАЛЛАР

3.1. Аниқ интеграл тушунчаси. Аниқ интегралнинг асосий хоссалари ва уни ҳисоблаш.

1. Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Шу кесмани $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b(x_0 < x_1 < \ldots < x_n)$ нуқталар орқали

узунлиги $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\,(k=\overline{1,n})$ бўлган n та бўлакларга иҳтиёрий равишда бўлиб чиқамиз. Ҳар бир $[x_{k-1}; x_k]$ кесмада ξ_k нуқтани иҳтиёрий танлаб, функциянинг $[a,b]$ кесма бўйича n-интеграл йиғиндиси деб аталувчи $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ ни тузамиз.

Таъриф. *Агар* $[x_{k-1}\ ; x_k]\,(k=\overline{1,n})$ *кесмалар ичидаги энг катта узунликка эга бўлган кесманинг узунлиги нолга интилганда,* S_n *интеграл йиғиндининг чекли лимити мавжуд бўлиб, у лимит [a,b] кесманинг бўлакларга бўлиниш усулига ва* ξ_k *нуқталарнинг танланилишига боғлиқ бўлмаса, у холда у лимит f(x) функциянинг [a,b] кесма бўйича аниқ интеграли деб аталади ва* $\int_a^b f(x)dx$ *каби белгиланади, яъни таърифга кўра,*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Бу ерда: $[a;b]$ – интеграллаш кесмаси, a ва b лар мос равишда аниқ интегралнинг қуйи ва юқори чегаралари, x эса интеграллаш ўзгарувчисидир.

2. Энди $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларни қаралаётган $[a;b]$ кесмада интегралланувчи функциялар деб фараз қилиб, аниқ интегралнинг асосий хоссаларини санаб ўтамиз:

1. $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx \quad (\mathrm{C} = \mathrm{const})$, яъни ўзгармас кўпайтувчини аниқ интеграл белгисидан ташқарига чиқариб ёзилади.
2. $\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x) \pm \int_a^b \varphi(x)dx$, яъни иккита функция алгебраик йиғиндисининг аниқ интеграли, қўшилувчилар интегралининг алгебраик йиғиндисига тенг.
3. $\int_a^a f(x)dx = 0$. Агар аниқ интегралнинг қуйи ва юқори чегаралари ўзаро тенг бўлсалар, аниқ интегралнинг қиймати нолга тенг.
4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, аниқ интеграл чегараларининг ўринлари алмаштирилса, унинг қиймати тескари ишорага ўзгаради.
5. Агар с,$[a;b]$ даги иҳтиёрий нуқта бўлса, у холда қуйидаги тенглик ҳар доим ўринлидир (аниқ интегралнинг аддитивлик хоссаси):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6. Аниқ интегралнинг қиймати интеграллаш ўзгарувчисининг кўринишига боғлиқ эмас: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt = \ldots = \int_a^b f(\alpha)d\alpha$

7. Агар $[a;b]$ кесмада $\varphi(x)\leq f(x)$ бўлиб, $a<b$ бўлса, у холда ҳар доим $\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$ дир.

8. Агар $[a;b]$ кесмада $f(x)\geq 0$ бўлиб, $a<b$ бўлса, у холда $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ дир.

9. Агар $f(x)$ функция $[a;b]$ да узлуксиз бўлиб, $a<b$ бўлса, у холда, $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$. Бу ерда, m ва M лар $f(x)$ функциянинг $[a;b]$ даги мос равишда энг кичик ва энг катта қийматларидир.

10. Агар $f(x)$ функция $[a;b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у холда шу кесмада ҳеч бўлмаганда шундай битта *хқс* нуқта мавжудки ($a\leq c\leq b$), ҳар доим қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ (ўрта қиймат ҳақидаги теорема).

3. Агар F(x) функция $[a;b]$ да $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлса, у холда аниқ интеграл, Ньютон-Лейбниц формуласи деб аталадиган қуйидаги формула орқали ҳисобланади.:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Энди аниқ интегралнинг хоссалари хамда Ньютон-Лейбниц формуласининг қўлланишига доир айрим мисолларнинг ечилишини келтирамиз.

<u>1-Мисол.</u> $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin2xdx = -\frac{1}{2}Cos2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}(Cos\pi - Cos0) = -\frac{1}{2}(-1-1) = 1.$

<u>2-Мисол.</u> $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = arcSin\frac{x}{4}\Big|_0^2 = arcSin\frac{1}{2} - arcSin0 = \frac{\pi}{6}.$

<u>3-Мисол.</u> Агар $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ га}, 0\leq x\leq 1 \\ \sqrt{x} \text{ га}, 1\leq x\leq 2 \end{cases}$ каби бўлса, $\int_0^2 f(x)dx$ ҳисоблансин.

<u>Ечилиши.</u> Аниқ интегралнинг аддитивлик хоссасига биноан,

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 \sqrt{x}dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(4\sqrt{2}-1).$$

<u>4-Мисол.</u> $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^{\sqrt{3}} = arctg\sqrt{3} - arctg\,0 = \frac{\pi}{3}.$

<u>5-Мисол.</u> $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \int_0^1 \frac{d(1+x)}{1+x} = \ln|1+x|\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$

<u>6-Мисол.</u> $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx$ бахолансин.

Ечилиши. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремага биноан,

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx = \sqrt{1+\zeta^4}, \quad 0 \le \zeta \le 1$$

Аммо $1 < \sqrt{1+\zeta^4} < \sqrt{2}$ лиги учун $1 < \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx \le \sqrt{2} \cong 1.414$

ҚУЙИДАГИ АНИҚ ИНТЕГРАЛЛАР ҲИСОБЛАНСИН

1. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$

2. $\int_{-\pi}^{\pi} Sin^2 \frac{x}{2}\,dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2 dx}{1+x^2}$

4. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$

5. $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

6. $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{1+x^8}$

7. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{Cosx - Cos^3 x}\,dx$

8. $\int_1^2 (x^2 + \frac{1}{x^4})dx$

9. $\int_0^{\pi/2} Sin^3 xdx$

10. $\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{Sin(1/x)dx}{x^2}$

11. $\int_3^8 \frac{dx}{3\sqrt{x+1}}$

12. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$

13. $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}$

16. $\int_0^{\pi/4} Cos^2 xdx$

17. $\int_1^e \frac{Sin(\ln x)}{x}\,dx$

18. $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$

19. $\int_2^{3.5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

20. $\int_0^1 chxdx$

21. $\int_0^{\pi} sh^2 xdx$

22. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{ch^2 x}$

23. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}$

24. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6+4}}$

25. $\int_{-1}^2 (x^2-1)^3 xdx$

26. $\int_0^2 \frac{4xdx}{(x^2-1)^3}$

27. $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{3x^2+1}}$

28. $\int_0^1 e^{x^2} xdx$

31. $\int_0^{\pi/2} \frac{Cosxdx}{2+Sinx}$

32. $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{5x^2-1}}$

33. $\int_0^{\pi} Sin\frac{x}{3}dx$

34. $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} Cos\frac{x}{2}dx$

35. $\int_0^{\pi/6} e^{Sinx} Cosxdx$

36. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{Cos^2 3x}$

37. $\int_0^{\pi/12} \frac{dx}{Sin^2(\frac{\pi}{6}x)}$

38. $\int_4^5 (4-x)^3\,dx$

39. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-1}}$

40. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9-x^2}$

41. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

42. $\int_0^3 \sqrt[3]{3x-1}\,dx$

43. $\int_0^1 (2x^3+1)^5 x^2 dx$

14. $\int_2^6 \sqrt{x-2}dx$ 29. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{3Sinx+1}Cosxdx$ 44. $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

15. $\int_0^8 (\sqrt[3]{x}+\sqrt{2x})dx$ 30. $\int_0^{\pi/2} \frac{Sinxdx}{3-Cosx}$

3.2. Аниқ интегрални интеграллаш усуллари.

1. Купинча $\int_a^b f(x)dx$ нинг ҳисобланиш жараёнини соддалаштириш мақсадида $x=\varphi(t)$ каби алмаштириш қўлланади:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Бу ерда : 1) $f(x)$ функция $[a;b]$ да узлуксиз; 2) $\varphi(t)$ функция ва унинг $\varphi'(t)$ хосиласи $[\alpha,\beta]$ да узлуксиз; 3) $a=\varphi(\alpha)$ ва $b=\varphi(\beta)$ тенгликлар ўринли;

4) хқφ(t) функция [α;β] да монотондир, яъни, φ(t) функциянинг барча қийматлари $[a;b]$ да жойлашган бўлиши керак.

Эслатма. Аниқ интегралда ўзгарувчини алмаштириб интеграллаш чегаралари ўзгартирилгандан сўнг уни ҳисоблашда эски ўзгарувчига қайтишнинг хожати йўқ.

1-Мисол. $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$ ни ҳисоблашда хқz^2 алмаштириш киритамиз. Янги интеграллаш чегараларини аниқлаймиз: хқ1 да zқ1 ва хқ4 да zқ2;

У холда:

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}} = 2\int_1^2 \frac{z^2dz}{1+z} = 2\int_1^2 \frac{z^2-1+1}{1+z}dx = 2\int_1^2 (z-1)dz + 2\int_1^2 \frac{dz}{1+z} = (z-1)^2\Big|_1^2 + 2\ln|1+z|\Big|_1^2 =$$

$$= 1+2(\ln 3-\ln 2) = 1+\ln\frac{9}{4}.$$

2-Мисол. $$\int_3^{10} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+6}} = \left| \begin{array}{l} x+6=z^2 \\ x=z^2-6 \\ dx=2zdz \\ x=3: z=3 \\ x=10: z=4 \end{array} \right| = \int_3^4 \frac{2zdz}{(z^2-7)z} = 2\int_3^4 \frac{dz}{z^2-\left(\sqrt{7}\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{7}}{z+\sqrt{7}}\right|\Bigg|_3^4 = \frac{1}{\sqrt{7}}\left[\ln\left|\frac{4-\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}\right| - \ln\left|\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}\right|\right] = \frac{1}{\sqrt{7}}\left[\ln\left|\frac{23-8\sqrt{7}}{9}\right| - \ln\left|\frac{16-6\sqrt{7}}{2}\right|\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2(23-8\sqrt{7})}{9(16-6\sqrt{7})}\right| = \frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2\cdot 2(16+5\sqrt{7})}{9\cdot 4}\right| = \frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left(\frac{16+5\sqrt{7}}{9}\right).$$

3-Мисол. $\int_0^3 \sqrt{9-x^2dx}$ ни ҳисоблашда хқ3Sint ва dxқ3Costdt алмаштириш бажариб, хқ0 да tқ0, хқ3 да $t=\dfrac{\pi}{2}$ эканлигини инобатга олсак, у холда:

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx = 9\int_0^{\pi/2} Cos^2tdt = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2}(1+Cos2t)dt = \frac{9}{2}(t+\frac{1}{2}Sin2t)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$=\frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0+\frac{1}{2}Sin\pi - 0\right)=\frac{9\pi}{4}.$$

4-Мисол. $$\int_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{1+x^2}dx = \left|\begin{matrix} 1+x^2=z^2 \\ 2xdx=2zdz \\ x=0:z=1 \\ x=\sqrt{3}:z=2\end{matrix}\right| = \int_1^2 (z^2-1)z^2dz = \frac{z^5}{5}\Big|_1^2 - \frac{z^3}{3}\Big|_1^2 =$$

$$=\frac{1}{5}(32-1)-\frac{1}{3}(8-1)=\frac{31}{5}-\frac{7}{3}=\frac{58}{15}.$$

5-Мисол. $\int_0^{\pi/2}\dfrac{dx}{3+2Cosx}$ ни ҳисоблашда $tg\dfrac{x}{2}=z$ алмаштиришдан фойдаланамиз.

Бу ерда : $dx=\dfrac{2dz}{1+z^2}, Cosx=\dfrac{1-z^2}{1+z^2}$, хқ0 да zқ0 ва $x=\pi/2$ да zқ1. Натижада.:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{3+2Cosx}=2\int_0^1\frac{dz}{5+z^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}arctg\frac{z}{\sqrt{5}}\Big|_0^1=\frac{2}{\sqrt{5}}arctg\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

1. Айтайлик, uқu(x) ва vқv(x) функциялар [*a;b*] кесмада узлуксиз диференциалланувчи функциялар бўлсин.

Ушбу $\int_a^в udv = uv\Big|_а^в - \int_a^b vdu$ формулани бўлаклаб интеграллаш формуласи деб юритилади ва унинг қўлланилиши аниқмас интегралдаги мос формулага ўхшашдир.

1-Мисол. $$\int_0^1 \arccos xdx = \left|\begin{matrix} u=\arccos x & dv=dx \\ du=-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & v=x\end{matrix}\right| = x\arccos x\Big|_0^1 + \int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$=1\cdot\arccos 1 - 0\cdot\arccos 0 - \sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = 1.$$

2-Мисол.

$$\int_1^e \ln^2 x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln^2 x \\ du = 2\ln x \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{matrix} \right| = x\ln^2 x \Big|_1^e - 2\int_1^e \ln x dx = e\ln^2 e - 2\int_1^e \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x \\ du = \dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{matrix} \right| =$$

$$= e - 2\left[x\ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx \right] = e - 2\left[e\ln e - 1\ln 1 - x\Big|_1^e \right] = e - 2(e - e + 1) = e - 2.$$

3-Мисол.

$$\int_0^{\pi/2} xCosxdx = \left| \begin{matrix} u = x, du = dx \\ dv = Cosxdx \\ v = Sinx \end{matrix} \right| = xSinx \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} Sinxdx = \frac{\pi}{2} + Cosx \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

4-Мисол.

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2; du = 2xdx \\ dv = e^x dx \\ v = e^x \end{matrix} \right| = x^2 e^x \Big|_0^1 - 2\int_0^1 xe^x dx = \left| \begin{matrix} u = x, du = dx \\ dv = e^x dx \\ v = e^x \end{matrix} \right| =$$

$$= e - 2\left[xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right] = e - 2\left(e - e^x \Big|_0^1 \right) = e - 2(e - e + 1) = e - 2.$$

5-Мисол.

$$\int_0^1 xarctgxdx = \left| \begin{matrix} u = arctgx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2} arctgx \Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} arctg1 - \frac{1}{2} x \Big|_0^1 + \frac{1}{2} arctg \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi - 2}{4}.$$

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР

1.	$\int_0^1 \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\, dx$	11.	$\int_0^2 \dfrac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}$	21.	$\int_0^1 arcSinxdx$
2.	$\int_0^1 \dfrac{xdx}{1+\sqrt{x}}$	12.	$\int_0^{2\pi} \dfrac{dx}{5 - 2Cosx}$	22.	$\int_1^e x^2 \ln xdx$
3.	$\int_0^{1/4} \dfrac{dx}{(4x+1)\sqrt{x}}$	13.	$\int_1^e \ln^3 xdx$	23.	$\int_0^{\pi/2} x^2 Sinxdx$

4. $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

5. $\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$

6. $\int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{7-2x}}$

7. $\int_{-3}^1 \frac{xdx}{\sqrt{3-2x}}$

8. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/3} \frac{dx}{1-Sinx}$

9. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

10. $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}dx$

14. $\int_0^{\pi^2/4} Sin\sqrt{x}dx$

15. $\int_0^1 arctg\sqrt{x}dx$

16. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{xdx}{Sin^2 x}$

17. $\int_0^1 x\ln(1+x^2)dx$

18. $\int_0^1 (x-1)e^{-x}dx$

19. $\int_1^2 \frac{\ln xdx}{x^5}$

20. $\int_0^{\pi/4} xtg^2 xdx$

24. $\int_0^1 \frac{\arcsin xdx}{\sqrt{1+x}}$

25. $\int_0^1 (arcSinx)^2 dx$

26. $\int_0^{\pi/4} \frac{xSinxdx}{Cos^2 x}$

27. $\int_1^e xlin^2 xdx$

28. $\int_0^2 (3-2x)e^{-3x}dx$

29. $\int_0^{\pi^2} Cos\sqrt{x}dx$

30 $\int_0^{\pi} x^3 Cos3xdx$

3. Қуйида аниқ интегралларни ҳисоблашни енгиллаштирадиган баъзи бир омилларни келтирамиз.

а) Агар *f(x)* функция [-*a*; *a*] кесмада жуфт бўлса, у холда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

b) Агар *f(x)* функция [-a;a] кесмада тоқ бўлса, у холда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

<u>1-Мисол.</u> $\int_{-1}^1 |x|dx$ ҳисоблансин.

<u>Ечилиши.</u> Интеграл белгиси остидаги функция *f(x)қ*|*x*|- жуфт функция бўлганлиги сабабли, $\int_{-1}^1 |x|dx = 2\int_0^1 |x|dx = 2\int_0^1 xdx = x^2\Big|_0^1 = 1.$

<u>2-Мисол.</u> $\int_{-5}^5 \frac{x^5 Sin^2 xdx}{x^4+2x^2 1}$ нинг қиймати нолга тенг, чунки интеграл белгиси остида тоқ функция иштирок этмоқда.

<u>3-Мисол.</u> $\int_{-1/2}^{1/2} Cosx \cdot \ln(\frac{1+x}{1-x})dx$ ни ҳисоблаш лозим бўлсин. Бу ерда Cosx жуфт функция, $f(x) = \ln(\frac{1+x}{1-x})$ эса тоқ функциядир.

Ҳақиқатан ҳам: $f(-x) = \ln(\frac{1-x}{1+x}) = \ln(\frac{1+x}{1-x})^{-1} = -\ln(\frac{1+x}{1-x}) = -f(x)$

Демак, интеграл белгиси остида жуфт ва тоқ функцияларнинг кўпайтмаси – тоқ функция штирок этмоқда. Шу сабабли, мазкур интегралнинг қиймати нолга тенг бўлади.

<u>4-Мисол.</u> $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2x^5+3x^4-x^3-6x^2+x}{x^2-2}dx$ ни ҳисоблаш учун уни шундай иккита интеграл йиғиндиси кўринишида ифодалаймизки, улардан бири тоқ функциянинг, иккинчиси эса жуфт функциянинг интеграли бўлсин, яъни:

$$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2x^5+3x^4-x-6x^2+x}{x^2-2}dx = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2x^5-x^3+x}{x^2-2}dx + \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{3x^4-6x^2}{x^2-2}dx =$$

$$= 0 + 2\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} \frac{3x^2(x^2-2)}{x^2-2}dx = 6\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} x^2dx = 6\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2})^3 = 4\sqrt{3}.$$

<u>МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР</u>

1. Агар *f(x)*–жуфт функция бўлса, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)Cosnxdx$ билан $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)Sinnxdx$ ларнинг қийматлари нимага тенг?
2. Агар *f(x)*–тоқ функция бўлса, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)Cosnxdx$ билан $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)Sinnxdx$ ларнинг қийматлари нимага тенг?
3. $\int\limits_{-a}^{a} Cosf(x^2)dx = 2\int\limits_{0}^{a} Cosf(x^2)dx$ ни исботланг.
4. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x^8+Sin^9x}{Sin^7x}dx$ ни ҳисобланг.
5. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} e^{Cosx}dx = 2\int\limits_{0}^{1/2} e^{Cosx}dx$ ни исботланг.
6. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} SinnxCosmxdx$ ни ҳисобланг.
7. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} Sinxf(Cosx)dx$ ни ҳисобланг.
8. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^4Sinx}{x^2+4}dx$ ни ҳисобланг.

<u>3.3. Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш усуллари.</u>

Маълумки, назарий жихатдан қаралганда ҳар қандай узлуксиз функциянинг бошланғич функцияси мавжуд бўлар эди. Аммо, амалда эса, кўпинча узлуксиз функция учун унинг бошланғич функциясини элементар функциялар орқали ифодалаш мумкин бўлавермайди. Бундай холларда аниқ интегрални ҳисоблаш учун Ньютон-Лейбниц формуласини қўллаш мумкин бўлмаганлиги сабабли, уни ҳисоблашда тақрибий ҳисоблаш усулларидан фойдаланилади.

1.Тўғри тўртбурчаклар усули.

Мазкур усулда интеграллаш кесмаси [*a;b*]ни x_0қа<x_1<x_2<…<x_{n-1}<x_nқb нуқталар орқали n та тенг бўлакларга бўлинади. Ҳар бир бўлакнинг узунлиги $h = \frac{b-a}{n}$ га тенг бўлиб, уни интеграллаш қадами деб юритилади.

Ҳар бир бўлиниш нуқтасида интегралланувчи функция *f(x)* нинг қийматлари $f(x_0), f(x_1), \ldots f(x_{n-1})$ ҳисобланади.

$\int_a^b f(x)dx$ ни тақрибий ҳисоблаш учун қуйидаги формуладан фойдаланилади:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}\left[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right].$$

Мазкур формула ёрдамида аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш усулини тўғри тўртбурчаклар усули деб аталади.

2.Трапециялар усули.

Бу холда ҳам [*a;b*] оралиқни n та тенг бўлакларга бўлинади ва тақрибий интеграллаш формуласи қуйидагича ёзилади:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{2n}\left\{f(x_0) + f(x_n) + 2\left[f(x_1) + f(x_2) + .. + f(x_{n-1})\right]\right\}.$$

3.Параболалар ёки Симпсон усули.

Ушбу усулда интеграллаш кесмасини x_0қа<x_1<x_2<…<x_{2n-2}<x_{2n-1}қb каби нуқталар орқали 2*n* жуфт сон миқдоридаги тенг бўлакларга бўлинади. Агар интегралланувчи функциянинг бу нуқталардаги қийматларини y_0, y_1, y_2,……., y_{2n-2},y_{2n-1},y_{2n} деб белгиласак, аниқ интегрални тақрибий интеграллаш формуласи қуйидаги Симпсон формуласи деб аталувчи формула билан амалга оширилади:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{2n}\left[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + .. + y_{2n-2})\right].$$

Таъкидлаш лозимки, мазкур формула аввалги формулаларга нисбатан юқорирок даражадаги аниқликни таъминлайди.

<u>Мисол.</u> $\int_0^1 \sqrt{1+10x}dx$ ни юқорида баён қилинган ҳар уччала усулда ҳам тақрибий ҳисоблансин. Бу ерда, интеграллаш кесмаси 10 қисмга бўлинсин.

<u>*Ечилиши.*</u> а) Тўғри тўртбурчаклар усули билан ечамиз. $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1-0}{10} = 0.1$ бўлганлигидан, бўлиниш нуқталари:

x_0қ0; x_1қ0.1; x_2қ0.2; x_3қ0.3; x_4қ0.4; x_5қ0.5; x_6қ0.6; x_7қ0.7; x_8қ0.8; x_9қ0.9

У холда:

$$f(x_0) = \sqrt{1+10\cdot 0} = 1$$
$$f(x_1) = \sqrt{1+10\cdot 0.1} = \sqrt{2} = 1.414$$
$$f(x_2) = \sqrt{1+10\cdot 0.2} = \sqrt{3} = 1.732$$
$$f(x_3) = \sqrt{1+10\cdot 0.3} = \sqrt{4} = 2$$
$$f(x_4) = \sqrt{1+10\cdot 0.4} = \sqrt{5} = 2.236$$
$$f(x_5) = \sqrt{1+10\cdot 0.5} = \sqrt{6} = 2.449$$
$$f(x_6) = \sqrt{1+10\cdot 0.6} = \sqrt{7} = 2.646$$
$$f(x_7) = \sqrt{1+10\cdot 0.7} = \sqrt{8} = 2.828$$
$$f(x_8) = \sqrt{1+10\cdot 0.8} = \sqrt{9} = 3$$
$$f(x_9) = \sqrt{1+10\cdot 0.9} = \sqrt{10} = 3.162$$

$$\sum = 22.467$$

Натижада, $\int_0^1 \sqrt{1+10x}dx \cong 0.1\cdot 22.467 = 2.2467$ ҳосил бўлади.

б) Трапециялар формуласини қўллаб ечамиз.

Бу ерда, $\dfrac{b-a}{2n} = \dfrac{1}{20} = 0.05$

$$f(x_0) = f(0) = \sqrt{1+10\cdot 0} = 1$$
$$f(x_{10}) = f(1) = \sqrt{1+10\cdot 1} = \sqrt{11} = 3.317$$

$$\sum = 4.317$$
$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_9) = 21.467$$

У холда : $\int_0^1 \sqrt{1+10x}dx \cong 0.05(4.317 + 2\cdot 21.467) = 0.05(4.317 + 42.934) =$

қ$0.05\cdot 47.251 = 2.36225$

в) Энди Симпсон формуласидан фойдаланамиз.

Бу ерда, 2nқ10 ёки nқ5

$$h=\frac{b-a}{6n}=\frac{1}{30}$$

$$y_0=\sqrt{1+10\cdot 0}=1$$

$$y_{10}=\sqrt{1+10\cdot 1}=\sqrt{11}=3.37$$

$$\sum=4.317$$

$$y_1=\sqrt{1+10\cdot 0.1}=1.414 \qquad y_2=\sqrt{1+10\cdot 0.2}=1.732$$

$$y_3=\sqrt{1+10\cdot 0.3}=2 \qquad y_4=\sqrt{1+10\cdot 0.4}=2.236$$

$$y_5=\sqrt{1+10\cdot 0.5}=2.449 \qquad y_6=\sqrt{1+10\cdot 0.6}=2.646$$

$$y_7=\sqrt{1+10\cdot 0.7}=2.828 \qquad y_8=\sqrt{1+10\cdot 0.8}=3$$

$$\sum=11.853 \qquad \sum=9.614$$

У холда: $\int_0^1\sqrt{1+10x}dx\cong\frac{1}{30}(4.317+4\cdot 11.853+2\cdot 9.614)=\int_0^1\sqrt{1+10x}dx=$

$$=\frac{1}{10}\int_0^1(1+10x)^{\frac{1}{2}}d(1+10x)=0.1\cdot\left.\frac{(1+10x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1=0.2\cdot\frac{1}{3}\left[11^{\frac{3}{2}}-1\right]=0.2\cdot\frac{1}{3}\left(11\sqrt{11}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{30}(4.317+47.412+19.228)=\frac{1}{30}\cdot 70.957=2.3652$$

Агар юқоридаги интегралнинг аниқ ечими 2.3658 эканлигини инобатга олсак, Симпсон усули билан ҳосил қилинган тақрибий қийматнинг жуда яхши аниқликда ҳисобланганлигини кўрамиз.

+УЙИДАГИ ИНТЕГРАЛЛАР ҲАР УЧЧАЛА ТА+РИБИЙ УСУЛДА ҲАМ ҲИСОБЛАНСИН

(интеграллаш кесмаси nқ10 тенг бўлакка бўлинсин)

1. $\int_1^2\frac{dx}{x}$
2. $\int_0^{0.8}Cosxdx$
3. $\int_0^1\frac{arctgxdx}{x}$

8. $\int_1^6\frac{dx}{\sqrt{8+x^3}}$
9. $\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{7x+3}}$
10. $\int_0^3\frac{dx}{9+x^2}$

4. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

5. $\int_0^{\pi/2} \frac{Sinx}{x} dx$

6. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$

7. $\int_0^4 \sqrt{2+x^3}\, dx$

11. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$

12. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

13. $\int_0^4 e^x dx$

14. $\int_1^7 \frac{dx}{2+\lg x}$

3.4. Хосмас интеграллар.

Маълумки, $\int_a^b f(x)dx$ аниқ интеграл тушунчаси киритилганда, интеграллаш кесмаси *[a;b]* нинг чекли эканлиги ва интегралланувчи функция *f(x)* нинг мазкур кесмада узлуксзлиги фараз қилинган эди. Агар ушбу шартлардан бирортаси бажарилмаса, «одатдагидек» аниқ интеграл тушунчасини киритиб бўлмайди. Шу маънода қаралганда бу холдаги интеграл «одатдагидек бўлмаган» яъни хосмас интеграл деб юритилади.

+уйида уларнинг икки хилини кўриб чиқамиз.

Чегаралари чексиз хосмас интеграллар.

Айтайлик, *f(x)* функция [a; +∞) да узлуксиз бўлсин. У холда мазкур функциянинг [a; +∞) даги хосмас интеграли $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, қуйидаги тенглик билан аниқланади:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Агар ушбу тенгликнинг унг томонидаги лимит мавжуд бўлса, у холда хосмас интеграл яқинлашувчи дейилади ва лимит интегралнинг қиймати сифатида қабул қилинади.

Агарда кўрсатилган лимит мавжуд бўлмаса, хосмас интеграл узоқлашувчи дейлади.

$\int_{-\infty}^a f(x)dx$ каби хосмас интеграл ҳам айнан юқоридагига ўхшаш аниқланади.

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Шунингдек, агар *f(x)* функция (-∞;+∞) да узлуксиз бўлса, у холда умумлашган хосмас интеграл қуйидагича аниқланади:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

Ушбу тенгликнинг унг томонидаги ҳар иккала хосмас интеграл ҳам яқинлашувчи бўлса, у холда чап томондаги хосмас интеграл ҳам яқинлашувчи бўлади. Аксинча, агар ўнг томондаги хосмас интеграллардан ҳеч бўлмаганда бирортаси узоқлашувчи бўлса, ўнг томондаги хосмас интеграл ҳам узоқлашувчи бўлади.

<u>1-Мисол.</u> $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x^2}=-\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{x}\Big|_1^b=-\lim\limits_{b\to+\infty}(\frac{1}{b}-1)=1-\frac{1}{\infty}=1-0=1.$ Демак, мазкур хосмас интеграл яқинлашувчи ва қиймати 1 га тенг экан.

<u>2-Мисол.</u> $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2+2x+5}=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{-1}\frac{dx}{(x+1)^2+4}=\lim\limits_{a\to-\infty}\frac{1}{2}arctg\,\frac{x+1}{2}\Big|_a^{-1}=$

$$=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}(arctg\,0-arctg\,\frac{a+1}{2})=\frac{1}{2}arctg\infty=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

<u>3-Мисол.</u> $\int\limits_{0}^{+\infty}Cosxdx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}Cosxdx=\lim\limits_{b\to+\infty}Sinx\Big|_0^b=\lim\limits_{b\to+\infty}(Sinb-Sin0)=\lim\limits_{b\to+\infty}Sinb.$

Аммо, охирги лимит мавжуд эмас. Шунинг учун мазкур хосмас интеграл узоқлашувчидир.

<u>4-Мисол.</u> $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xe^{-x^2}dx$ ҳисоблансин.

<u>Ечими.</u> Таърифга асосан,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xe^{-x^2}dx=\int\limits_{-\infty}^{0}xe^{-x^2}dx+\int\limits_{0}^{+\infty}xe^{-x^2}dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}xe^{-x^2}dx+\lim_{a\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}e^{-x^2}\Big|_a^0-\frac{1}{2}\lim_{a\to+\infty}e^{-x^2}\Big|_0^b=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\lim_{a\to-\infty}(1-e^{-a^2})+\lim_{b\to+\infty}(e^{-b^2}-1)\right]=-\frac{1}{2}(1-e^{-\infty}+e^{-\infty}-1)=0.$$

1.

2. *1. Чегараланмаган (чексиз) функцияларнинг хосмас интеграллари*

Агар *f(x)* функция (*c; b*] ярим очиқ оралиқда узлуксиз бўлиб, хқс чап чегаравий нуқтада аниқланмаган ёки 2-тур узилишга эга бўлса, мазкур функциянинг хосмас интеграли $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$ каби белгиланиб, у қуйидаги тенглик билан аниқланади:

$$\int\limits_{c}^{b}f(x)dx=\lim_{a\to c+0}\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$$

Ушбу тенгликнинг ўнг томонидаги лимит мавжуд бўлса, у холда хосмас интеграл яқинлашувчи дейилиб, акс холда эса узоқлашувчи дейилади.

Агар *f(x)* функция [*a;c*) ярим очиқ оралиқда узлуксиз бўлиб, хқс ўнг чегаравий нуқтада аниқланмаган ёки 2-тур узилишга эга бўлса, унинг хосмас интеграли ҳам юқоридагидек аниқланади.

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b\to c-0}\int_a^b f(x)dx$$

Умуман, [*a;b*] кесманинг бирон бир хқс оралиқ нуқтасида аниқланмаган ёки чексиз узилишга эга бўлган *f(x)* функциянинг хосмас интеграли қуйидагича аниқланади:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Бу хосмас интегралнинг яқинлашувчи бўлиши учун тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар иккала хосмас интеграллар ҳам яқинлашувчи бўлишлари лозим, акс холда, яъни улардан ҳеч бўлмаганда биттаси узоқлашувчи бўлса ҳам мазкур хосмас интеграл узоқлашувчи бўлади.

<u>Эслатма:</u> Одатда, 1-бандда қаралган хосмас интегралларни I-тур хосмас интеграллар ва 2-бандда қаралганларни II-тур хосмас интеграллар ҳам деб юритилади.

+уйидаги мисолларда берилган 2-тур хосмас интеграллар текширилсин.

<u>1-Мисол.</u> $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{a\to+0}\int_a^2 \frac{dx}{x^{2/3}} = 3\lim_{a\to+0}\sqrt[3]{x}\Big|_a^2 = 3\lim_{a\to+0}(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{a}) = 3\sqrt[3]{2}.$

Демак, интеграл яқинлашувчидир.

<u>2-Мисол.</u>

$$\int_1^3 \frac{dx}{3-x} = \lim_{b\to3-0}\int_1^b \frac{dx}{3-x} = -\lim_{b\to3-0}\ln|3-x|\Big|_1^b = -\lim_{b\to3-0}\left[\ln|3-b|-\ln 2\right] = \ln 2-\ln 0 = \ln 2+\infty = \infty.$$

- интеграл узоқлашувчи экан.

<u>3-Мисол.</u> $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\frac{dx}{Sinx}$ каби 2-тур хосмас интегралдаги интегралланувчи функция хқ0 да аниқланмаган. Шунинг учун уни иккита хосмас интегралларнинг йиғиндиси шаклида ифодалаб оламиз:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{dx}{\sin x} + \int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x};$$

ўнг томондаги хосмас интегралларни текширамиз:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{dx}{\sin x} = \lim_{a\to-\frac{\pi}{2}+0}\int_a^0\frac{dx}{\sin x} = \lim_{a\to-\frac{\pi}{2}+0}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|\Bigg|_a^0 = \lim_{a\to-\frac{\pi}{2}+0}\left[\ln 0-\ln\left|tg\frac{a}{2}\right|\right] = -\infty.$$

Иккинчи хосмас интегрални текширишнинг хожати йўқ, чунки биринчи қўшилувчи хосмас интеграл узоқлашувчи экан. Демак, мазкур хосмас интеграл ҳам узоқлашувчидир.

4-Мисол. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} 9 + \int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim\limits_{b\to 2-0} \int\limits_0^b \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} + \lim\limits_{a\to 2+0} \int\limits_a^3 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} =$

$$= \lim_{b\to 2-0} \arcsin\frac{x}{2}\bigg|_0^b + \lim_{a\to 2+0} \arcsin\frac{x}{2}\bigg|_a^3 = \lim_{b\to 2-0}\left(\arcsin\frac{b}{2} - \arcsin 0\right) +$$

$$+ \lim_{a\to 2+0}\left(\arcsin\frac{3}{2} - \arcsin\frac{a}{2}\right) = \arcsin\frac{2-0}{2} + \arcsin\frac{3}{2} - \arcsin\frac{2+0}{2} = \arcsin\frac{3}{2}.$$

+аралаётган хосмас интеграл узоқлашувчи, чунки arcsin1,5 мавжуд эмас.

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР

1. $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10}$;
3. $\int\limits_0^{\infty} x\sin x dx$;
4. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x\left(1+x^2\right)}$;
5. $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$;
6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2}$;
7. $\int\limits_1^{\infty} \frac{xdx}{3+x^2}$;
8. $\int\limits_2^{\infty} \frac{x^2dx}{x^2+9}$;
9. $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{(x+1)^3}$;
10. $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{(1+x)^2}$;
11. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$;
12. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$;
13. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;
14. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$;
15. $\int\limits_0^1 x\ln x dx$;
16. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$;
17. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$;
18. $\int\limits_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$;
19. $\int\limits_{-3}^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$;
20. $\int\limits_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2-4\right)^3}}$;

2. Таққослаш теоремалари.

Агар *f(x)* функцияга бошланғич функцияни топиш қийин бўлса, ёки умуман топиш мумкин бўлмаса, у холда хосмас интегралларни текшириш, таққослаш теоремалари орқали хал қилиниши мумкин.

1. Агар *f(x)* ва φ(x) функциялар [*a*;+∞)да $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ шартни қаноатлантириб, $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ яқинлашувчи бўлса, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ҳам яқинлашувчи бўлади, аксинча, агар $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ узоқлашувчи бўлса, $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ ҳам узоқлашувчи бўлади.

2. Агар *f(x)* функциянинг [*a;*+∞) да ишораси ўзгарувчи бўлса, у холда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ нинг яқинлашувчи бўлиши учун $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ яқинлашувчи бўлиши лозим. Бунда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ни мутлоқ яқинлашувчи деб юритилади. Агар $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ яқинлашувчи бўлиб, $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ узоқлашувчи бўлса, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ни шартли яқинлашувчи деб аталади.

Юқорида баён этилган теоремалар $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$, ва умуман $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ каби интеграллар учун ҳам ўринлидир. Шунингдек 2-тур хосмас интегралларни текшириш учун ҳам мазкур таққослаш теоремаларидан фойдаланилади.

Амалиётда таққослаш функциялари сифатида кўпинча кўрсаткичли e^{-kx} ва даражали x^{-m} функциялар қўлланилади.

<u>1-Мисол.</u> $\int_0^{+\infty} \frac{Cosxdx}{x^2}$ текширилсин.

<u>Ечилиши.</u> $\left|\frac{Cosx}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ бўлганлиги ва $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ яқинлашувчи бўлганлиги учун мазкур хосмас интеграл нафақат яқинлашувчи, балки мутлақ яқинлашувчидир.

<u>2-Мисол.</u> $\int_0^{=\infty} \frac{x^2dx}{4+x^2}$ ни текшириш учун $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{4+x^2}$ ни текширамиз. $\frac{x^2}{4+x^2} \ge \frac{x}{4+x^2}$ бўлганлигидан ва $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{4+x^2}$ нинг узоқлашувчанлигидан, мазкур хосмас интеграл ҳам узоқлашувчидир.

<u>+уйидаги хосмас интеграллар текширилсин.</u>

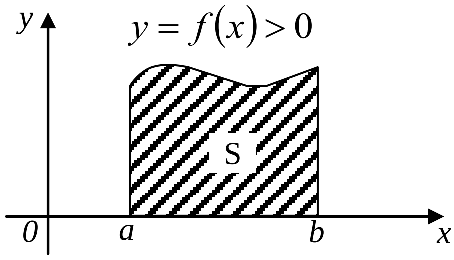
1. $\int_0^{+\infty} \frac{Cosxdx}{1+x^2}$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{Sinxdx}{1+x^2}$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{Sinx}{x}dx$
4. $\int_0^{+\infty} \frac{Cosx}{x}dx$
5. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$

4 – БОБ

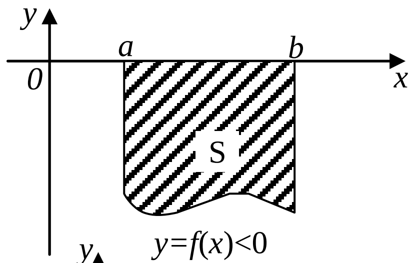
АНИ+ ИНТЕГРАЛНИНГ ТАТБИ+ЛАРИ

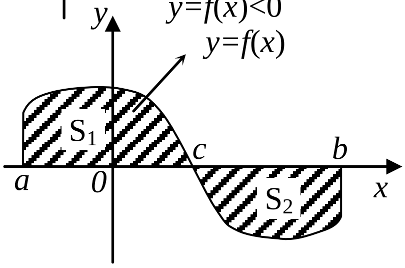
4.1. Ясси фигураларнинг юзларини ҳисоблаш.

1. Маълумки, агар [*a; b*] кесмада $f(x)\geq 0$ бўлса, мазкур функциянинг мазкур кесма бўйича аниқ интеграли геометрик жихатдан *хқа* ва *хқb* тўғри чизиқлар,*Ох* ўқи хамда $y=f(x)$ эгри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини ифодалар эди.



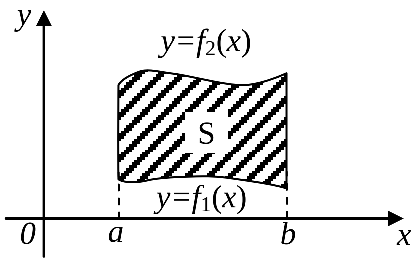
Агар [*a; b*] кесмада $f(x)\leq 0$ бўлса, мазкур эгри чизиқли трапеция *Ох* ўқидан пастда жойлашади ва унинг юзи $S=\int_a^b |f(x)|dx$ формула орқали ҳисобланади.





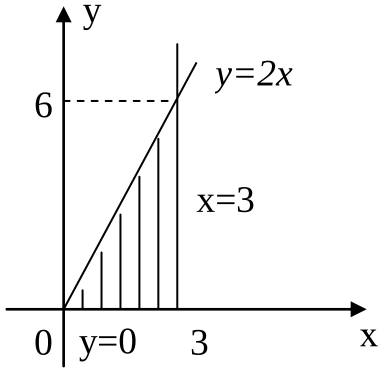
Агар $y=f(x)$ эгри чизиқ, *Ох* ўқи ва *хқа*, *хқb* тўғри чизиқлар билан чегараланган фигура *Ох* ўқидан юқорида ва пастда жойлашган бўлса, унинг юзи $S=S_1+S_2=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b |f(x)|dx$ формула билан ҳисобланади

Агар *хқа*, *хқb* тўғри чизиқлар, $y=f_1(x)$ ва $y=f_2(x)$ эгри чизиқлар $(f_1(x)\leq f_2(x))$ билан чегараланган юзани ҳисоблаш лозим бўлса, уни ушбу $S=\int_a^b [f_2(x)-f_2(x)]dx$ формула билан ҳисобланади.



1-Мисол. Тенгламалари *yқ2x, yқ0* ва *xқ3* бўлган тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзи ҳисоблансин.

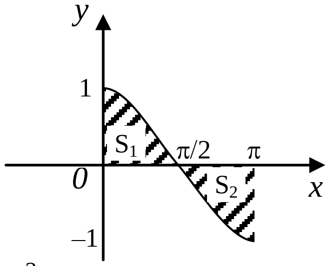
Ечилиши. $S=\int_0^3 2xdx=2\int_0^3 xdx=x^2\Big|_0^3=9$ кв.б.



2-Мисол. *yқcosx, yқ0* чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзи ҳисоблансин, бунда $x\in[0;\pi]$.

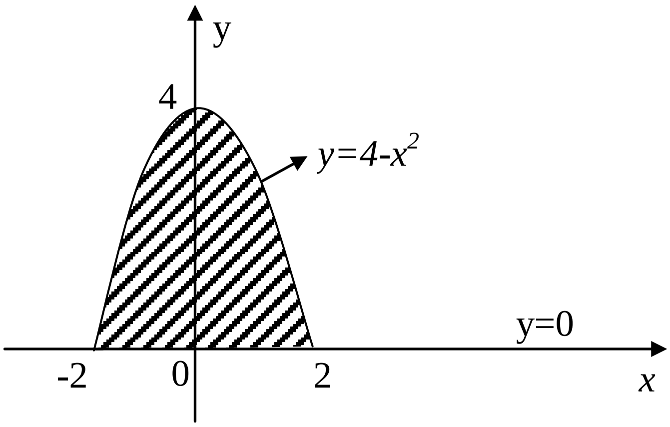
Ечилиши.

$$S=S_1+S_2=\int_0^{\pi/2}\cos xdx+\int_{\pi/2}^{\pi}|\cos x|dx=\sin x\Big|_0^{\pi/2}+|\sin x|\Big|_{\pi/2}^{\pi}=1+1=2 \text{ кв.б.}$$



3-Мисол. *yқ0* ва *yқ-x*^{2}*+4* чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзи ҳисоблансин.

Ечилиши. Бу ерда ҳисобланиши лозим бўлган юза *yқ4-x*^{2} парабола билан *Ox* ўқ орасида жойлашган. Агар *yқ0* бўлса, *xқ±2*.

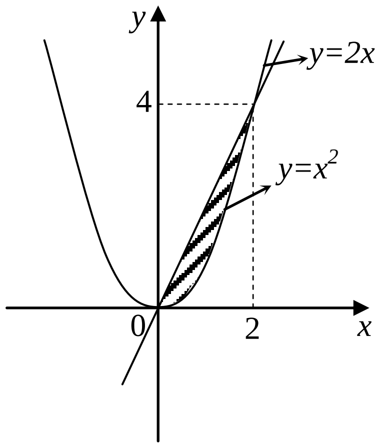


$$S=\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx=2\int_{0}^{2}\left(4-x^2\right)dx=2\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=2\left(8-\frac{8}{3}\right)=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}\ \text{кв. б.}$$

<u>4-Мисол.</u> Тенгламалари *уқх*^{2} ва *уқ2х* бўлган парабола ва тўғри чизиқ орасида жойлашган юза ҳисоблансин.

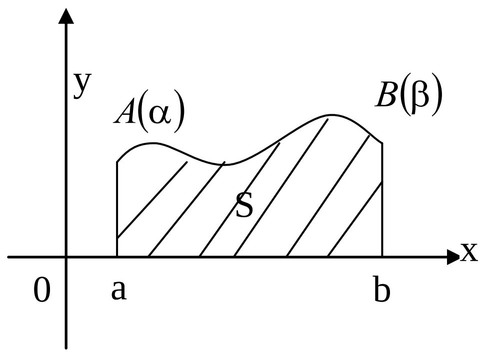
<u>Ечилиши.</u> *уқх*^{2} ва *уқ2х* тенгламаларни биргаликда ечиб, парабола билан тўғри чизиқнинг кесишиш нуқталарининг абсциссалари *х*$_1$*қ0* ва *х*$_2$*қ2* ларни топамиз.

$$S=\int_{0}^{2}\left(2x-x^2\right)dx=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}\ \text{кв. б.}$$

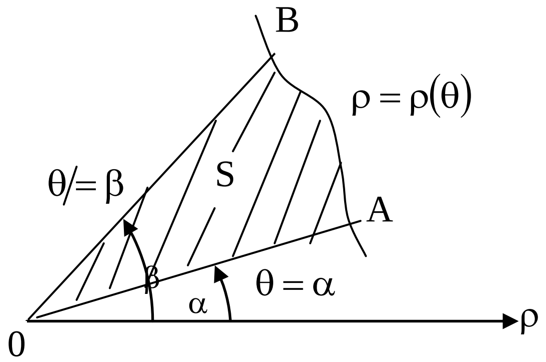


2. а) Агар эгри чизиқли трапециянинг юзи *хқх(t), уқу(t)* каби параметрик шаклда берилган эгри чизиқ, *хқа* ва *хқb* тўғри чизиқлар ҳамда *Ох* ўқ билан чегараланган бўлса, у юза қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$S=\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt \ \text{бунда}\ \alpha\le t\le\beta\ \text{ва}\ x(\alpha)=a,\ x(\beta)=b$$



б) Агар $(\rho;\theta)$ қутб координатлари системасида бирор узлуксиз эгри чизиқ ўзининг $\rho=\rho(\theta)$ каби тенгламаси орқали берилган бўлса, у холда $\theta=\alpha, \theta=\beta$ қутб бурчаклари ҳамда эгри чизиқнинг AB ёйи билан чегараланган AOB сектор юзи $S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\theta$ формула билан ҳисобланади.



<u>5-Мисол.</u> $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипс билан чегараланган юза топилсин.

<u>Ечиш.</u> Эллипснинг параметрик тенгламасини ёзиб оламиз: $x=a\cos t,\ y=b\sin t$. У холда

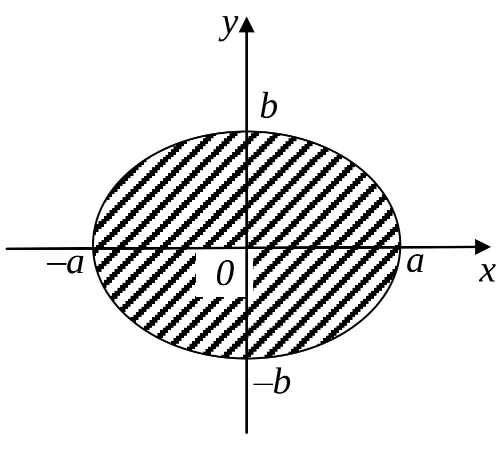
$$S=\int_0^{2\pi} в\mathrm{sint(-asint)dt}=\text{-ab}\int_0^{2\pi}\sin^2 tdt=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}(\cos 2t-1)dt=\frac{ab}{2}\left[\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{2\pi}-t\Big|_0^{2\pi}\right]=$$

$=-\pi ab.$ $\qquad S=|-\pi ab|=\pi ab$ *кв.б.*

<u>6-Мисол.</u> $\rho^2=2\cos 2\theta$ лемниската билан чегараланган юза топилсин.

<u>Ечиш.</u> Изланаётган юзанинг тўртдан бир қисмига $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ бурчак мос келади. Шунинг учун $S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}2\cos 2\theta d\theta=2\sin 2\theta\Big|_0^{\pi/4}=2$ кв.б.

<u>МУСТА+ИЛ ЕЧИШ УЧУН МИСОЛЛАР</u>



+уйидаги чизиқлар билан чегараланган юзалар ҳисоблансин.

1.	$y=0,\ y=3-2x+x^2;$	16.	$x+2y-=0,\ y=0,\ x=-3,\ x=2;$
2.	$x=e,\ y=0,\ y=\ln x;$	17.	$x=2,\ x=3,\ y=0,\ y=x^2;$
3.	$y=0;\ x\pm 1,\ y=x^2-2x;$	18.	$y\ \ =x,\ y\geq 0,\ x=1,\ x=4;$
4.	$y=x+4,\ y=x^2+4x$	19.	$y=\sin x,\ y=0,\ x=0,\ x=\pi;$
5.	$y=0;\ y=4x-x^2;$	20.	$y=-6x,\ y=0,\ x=4;$
6.	$x=0,\ y=8,\ y=x^3;$	21.	$\rho=2\cos\varphi;$
7.	$y=-x;\ y=2x-x^2;$	22.	$\rho=3\cos 2\varphi;$
8.	$x=1,\ y=e^{-x},\ y=e^x;$	23.	$\rho=\cos 3\varphi;$
9.	$x+y=3,\ y=1+x^2;$	24.	$\rho=2\cos 4\varphi;$
10.	$x=4,\ y=0,\ y=3x^2-6x;$	25.	$\rho=2,\ \rho=2(1-\cos\theta);$
11.	$y=0,\ y=x^2+6x+5;$	26.	$\rho=3\sqrt{2}\cos\theta,\ \rho=3\sin\theta;$
12.	$x=1,\ x=2,\ y=2x^2;$	27.	$x=\frac{t}{3}(6-t),\ y=\frac{t^2}{8}(6-t)$ эгри чизиқ сиртмоғи
13.	$x+y=4,\ xy=3;$	28.	$x=t^2,\ y=t-\frac{t^3}{3};$
14.	$y=3x,\ y^2=9x;$	29.	$x=t^2,\ y=t-\frac{t^3}{3};$
15.	$y=0,\ y=x^3-4x;$	30.	*Ox* ўқи ва $x=2(t-\sin t),\ y=2(1-\cos t)$ циклоиданинг бир аркаси.

4.2. Эгри чизиқ ёйининг узунлигини ҳисоблаш.

1. Агар текис эгри чизиқ узининг *уқf(x)* тенгламаси билан берилган бўлиб, $y'=f'(x)$ ҳосила узлуксиз бўлса, у ҳолда эгри чизиқнинг [*a;b*] кесмага мос келувчи ёйининг узунлиги $l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$ формула билан ҳисобланади.
2. Эгри чизиқ ўзининг *хқх(t)* ва *уқу(t)* каби параметрик шаклдаги тенгламаси билан берилган бўлсин. Агар $x'(t)$ ва $y'(t)$ ҳосилалар $[\alpha;\beta]$ кесмада узлуксиз бўлсалар, мазкур эгри чизиқнинг $[\alpha;\beta]$ кесмага мос

келувчи ёйининг узунлиги $l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$ формула орқали ҳисобланади. Бу ерда: $\alpha\le t\le\beta$.

3. Айтайлик, эгри чизиқнинг тенгламаси қутб координаталари системасида $\rho=\rho(\theta)$ тенглама билан берилган бўлсин: У ҳолда унинг бирор *AB* ёйининг узунлиги $l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta$ формула билан ҳисобланади. Бу ердаги α ва β лар қутб бурчакларининг *AB* ёй учларига мос келувчи қийматларидир.

<u>1-Мисол. $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$</u> функция билан берилган эгри чизиқнинг абсциссалари *хқ1* ва *хқ2* бўлган нуқталари орасидаги ёйининг узунлиги ҳисоблансин.

<u>Ечилиши. $y'=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}$ ва $y'^2=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}$</u> бўлганлигидан, $1+y'^2=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2$ дан иборатдир.

У холда:

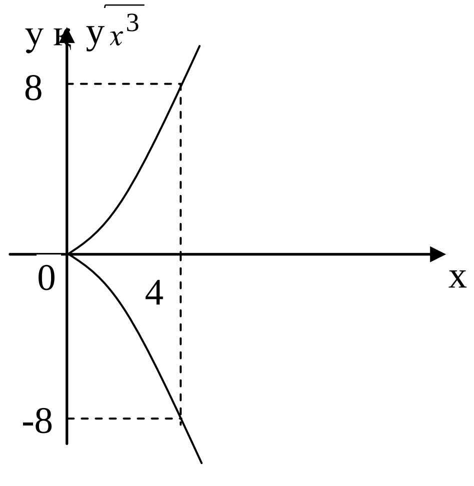
$$l=\int\limits_1^2\sqrt{1+y'^2}dx=\int\limits_1^2\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}\ln x\right)\Bigg|_1^2=1+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

<u>2-Мисол.</u> Тенгламаси $y^2=x^3$ бўлган яримкубик параболанинг (0; 0) ва (4;8) нуқталар орасидаги ёйининг узунлиги хисоблансин.

<u>Ечилиши.</u> Берилган нуқталар I-чоракда жойлашганликлари учун $y=\sqrt{x^3}$,

$$y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}\ \text{ва}\ \sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\ \text{дир}.$$

$$l=\int\limits_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^4=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right).$$



3-Мисол. $\rho = 2(1+\cos\theta)$ кардиоиданинг $0 \le \theta \le \pi$ га мос келувчи ёйининг узунлиги ҳисоблансин.

Ечилиши. $\rho' = -2\sin\theta$ лигидан,

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{4(1+\cos\theta)^2 + 4\sin^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{4[1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta]}\,d\theta =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta = 4\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8.$$

МАШ+ЛАР

+уйидаги тенгламалар орқали берилган эгри чизиқларнинг кўрсатилган ёйларининг узунликлари хисоблансин.

$y = 2\sqrt{x};\ x = 0$ дан $x = 1$ гача;

$y = \ln x; x = \sqrt{3}$ дан $x = \sqrt{8}$ гача;

$y = 4 - x^2;\ Ox$ ўқ билан кесишиш нуқталари орасидаги қисми;

$x^{2/3} + y^{2/3} = \sqrt[3]{4}$ циклоиданинг бутун узунлиги;

$x = 4(t - \sin t), y = 4(1-\cos t)$ циклоиданинг бир аркаси;

$y = 1 - \ln\cos x; x = 0$ дан $x = \dfrac{\pi}{4}$ гача.

$\rho = 2\sin^3\dfrac{\rho}{3}$ нинг бутун узунлиги;

$x = \dfrac{1}{6}t^6$ ва $y = 2 - \dfrac{1}{4}t^4$ ларнинг Ox ўқ билан кесишиш нуқталари орасидаги бўлаги;

$x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t,\ y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t$ нинг $t_1 = 0$ ва $t_2 = \pi$ гача бўлаги.

$\rho = 3\theta$ Архимед спиралининг биринчи ўрами.

4.3. Айланма сиртларнинг юзи ва айланма жисмларнинг хажмларини ҳисоблаш.

Айтайлик, эгри чизиқ *yқf(x)* тенглама орқали берилган бўлсин. Агар бу функция [a;b] кесмада узлуксиз дифференциалланувчи бўлиб, эгри чизиқнинг [a;b] га мос келувчи *AB* ёйи *Ox* ўқ атрофида айлантирилса, у ҳолда ҳосил бўладиган айланма сиртнинг юзи $S_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$ формула билан ҳисобланади.

Агар эгри чизиқ бошқа ҳилдаги тенгламалари билан берилган бўлса, у ҳолда мазкур юзани ҳисоблаш учун юқоридаги формуладаги ҳар бир ҳолга мос келувчи алмаштиришларни бажариш етарлидир.

а) Агар эгри чизиқли трапеция *yқf(x)* эгри чизиқ *xқa* ва *xқb* вертикал тўғри чизиқлар ҳамда *Ox* ўқ билан чегараланган бўлсин. У ҳолда уни *Ox* ва *Oy* ўқлар атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган айланма жисмларнинг хажмлари мос равишда қуйидаги формулалар билан ҳисобланади.

$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx; \; V_y = 2\pi\int_a^b xydx.$$

Бу ерда ҳам, агар эгри чизиқ ўзининг *yқf(x)* каби тенгламасидан бошқа ҳилдаги тенгламалари билан берилган бўлса, юқоридаги формулада керакли алмаштиришлар бажарилади.

б) Агар $y_1 = f_1(x)$ ва $y_2 = f_2(x)(f_1(x) \le f_2(x))$ эгри чизиқлар, *xқa* ва *xқb* тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг *Ox* ва *Oy* ўқлари атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма жисмларнинг ҳажмлари мос равишда.

$V_x = \pi\int_a^b (y_1^2 - y_2^2)dx$ ва $V_y = 2\pi\int_a^b x(y_2 - y_1)dx$ каби формулалар билан ҳисобланади.

1-Мисол. Тенгламаси $y = \frac{1}{2}\sqrt{4x-1}$ бўлган эгри чизиқ ёйининг $x_1 = 1$ дан $x_2 = 9$ гача бўлган қисми *Ox* атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сирт юзи ҳисоблансин.

Ечилиши. $y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{2\sqrt{4x-1}} = \frac{1}{\sqrt{4x-1}}$ ва $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4x-1}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{4x-1}}$

ларни инобатга олсак

$$S_x = 2\pi\int_1^9 \frac{1}{2}\sqrt{4x-1}\cdot\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{4x-1}}dx = 2\pi\int_1^9 \sqrt{x}dx = 2\pi\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 = \frac{104\pi}{3}.$$

2-Мисол. $y^2 = 4 + x$ парабола ёйининг абциссалари $x_1 = -4$ ва $x_2 = 2$ бўлган нуқталари орасида жойлашган бўлагининг Ox ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлаги айланма сиртнинг юзи аниқлансин.

Ечилиши. $y = \sqrt{4+x}, \; y' = \frac{1}{2\sqrt{4+x}}, \; y'^2 = \frac{1}{4(4+x)}$ ларга асосан

$$S_x = 2\pi\int_{-4}^{2}\sqrt{4+x}\sqrt{1+\frac{1}{4(4+x)}}dx = 2\pi\int_{-4}^{2}\sqrt{4+x+\frac{1}{4}}dx = 2\pi\int_{-4}^{2}\sqrt{x+\frac{17}{4}}dx =$$

$$= 2\pi\int_{1/2}^{5/2} 2t^2 dt = \frac{4\pi}{3}t^3\Big|_{1/2}^{5/2} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{125}{8} - \frac{1}{8}\right) = \frac{4\pi\cdot 124}{3\cdot 8} = \frac{62\pi}{3} \text{ кв.б.}$$

Бу интегрални ҳисоблашда $x+\frac{17}{4}=t^2, dx=2tdt, \frac{1}{2}\le t\le\frac{5}{2}$ алмаштириш бажарилди.

3-Мисол. $y=\frac{x^2}{2}$ параболанинг $y=\frac{3}{2}$ тўғри чизиқ билан кесилган бўлагининг *Oy* ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт юзи ҳисоблансин.

Эслатма. Агарда $x=\varphi(y)$ *силлиқ эгри чизиқнңг ёйи Oy ўқ атрофида айланса, айланма сиртнинг юзи* $S_y=2\pi\int_c^d x\sqrt{1+x'^2}dy$ *формуладан топилади.*

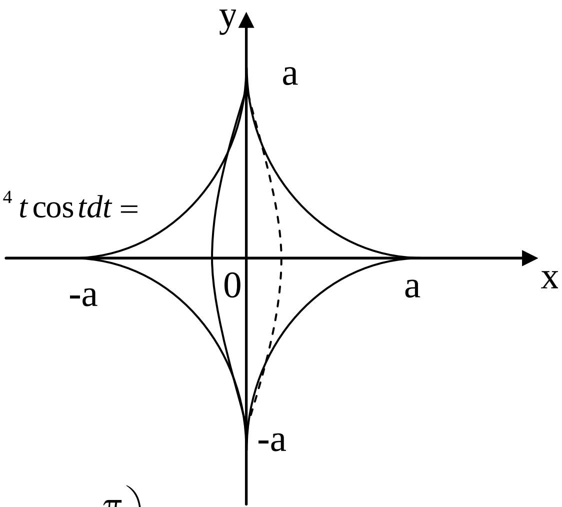
Ечилиши. $x=\sqrt{2y}, x'=\frac{1}{\sqrt{2y}}, x'^2=\frac{1}{2y}, 0\le y\le\frac{3}{2}$ ларги кўра,

$$S_y=2\pi\int_0^{3/2}\sqrt{2y}\sqrt{1+\frac{1}{2y}}dy=2\pi\int_0^{3/2}\sqrt{2y+1}dy=2\pi\int_1^2 t^2dt=\frac{2\pi}{3}t^3\Big|_1^2=\frac{2\pi}{3}(8-1)=\frac{14\pi}{3}\text{ кв.б.}$$

бу интегрални ҳисоблашда $2y+1=t^2, dy=tdt, 1\le\tau\le 2$ алмаштириш бажарилди.

4-Мисол. $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ астроиданинг Ох ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сиртнинг юзи аниқлансин.

Ечилиши. $x'=-3a\cos^2 t\sin t, y'=3a\sin^2 t\cos t.$



$$S_x=2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/2}a\sin^3 t\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}dt=$$

$$=4\pi a\int_0^{\pi/2}\sin^3 t\sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}dt=12\pi a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos tdt=$$

$$=12\pi a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 td\sin t=\frac{12}{5}\pi a^2\sin^5 t\Big|_0^{\pi/2}=2{,}4\pi a^2\text{ кв.б.}$$

5-Мисол. $\rho=\sqrt{\cos2\theta}$ лемнискатанинг $\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right)$ қутб ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма сиртнинг юзи ҳисоблансин.

Ечилиши. $y=\rho\sin\theta$ бўлганлигидан, $y=\sin\theta\sqrt{\cos2\theta}$.

$dl=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta$ дан эса, $dl=\sqrt{\cos2\theta+\left(\frac{-\sin2\theta}{\sqrt{\cos2\theta}}\right)^2}=\frac{d\theta}{\sqrt{\cos2\theta}}$ ни инобатга олсак, у ҳолда:

$$S_\rho=2\pi\int_0^{\pi/4}\sin\theta\sqrt{\cos2\theta}.dl=2\pi\int_0^{\pi/4}\sin\theta d\theta=2\pi(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/4}=2\pi\left(-\frac{\sqrt2}{2}+1\right)=\pi\left(2-\sqrt2\right).$$

6-Мисол. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ эллипснинг *Ох* ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми аниқлансин.

Ечилиши. Эллипс тенгламасини y^2га нисбатан ечамиз ва уқ0 ва $x^2=9$, $x_{1,2}=\pm 3$ бўлгани учун

$$V_x=\pi\int_{-3}^{3}\frac{4}{9}\left(9-x^2\right)dx=\frac{4}{9}\pi\left[9\int_{-3}^{3}dx-\int_{-3}^{3}x^2dx\right]=\frac{9}{4}\pi\left[9x\Big|_{-3}^{3}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^{3}\right]=$$

$$=\frac{4}{9}\pi(27+27-9-9)=\frac{4}{9}\pi 36=16\pi \text{ кв.б.}$$

7-Мисол. $x^2-y^2=4,\ y=\pm 2$ чизиқлар билан чегараланган ясси фигура Оу ўқ атрофида айланади. Айланма жисмнинг ҳажми аниқлансин.

Ечилиши. $x^2=4+y^2$, $y_1=-2$ ва $y_2=2$лардан

$$V_y=\pi\int_{-2}^{2}\left(4+y^2\right)dy=\pi\left[4\int_{-2}^{2}dy+\int_{-2}^{2}y^2dy\right]=\pi\left[4y\Big|_{-2}^{2}+\frac{y^3}{3}\Big|_{-2}^{2}\right]=$$

$$=\pi\left(8+8+\frac{8}{3}+\frac{8}{3}\right)=\frac{64}{3}\text{ куб.б.}$$

МАШ+ЛАР

+уйидаги эрги чизиқларнинг айланишидан ҳосил бўлган айланма сиртнинг юзи ҳисоблансин.

$y=\frac{x^3}{3}$ кубик параболанинг [-2;2] кесмага мос ёйи *Ох* ўқи атрофида айланади.

$x=t^2,\ y=\frac{1}{3}t\left(t^2-3\right)$ эгри чизиқ сиртмоғи *Ох* ўқи атрофида айланади.

$y=\cos x$ нинг битта ярим тўлқини *Оу* ўқ атрофида айланади.

$y=\sin x$ нинг битта ярим тўлқини *Ох* ўқ атрофида айланади.

$y=2x$ тўғри чизиқнинг *хқ0* ва *хқ2* гача бўлган оралиқдаги кесмаси *Оу* ўқ атрофида айланади.

$\rho=2(1+\cos\theta)$ кардиоида қутб ўқи атрофида айланади.

$4x^2+y^2=4$ эллипс *Оу* ўқ атрофида айланади.

3. Тенгламаси $x=e^t\sin t,\ y=e^t\cos t$ бўлган эгри чизиқнинг *tқ0* дан $t=\frac{\pi}{2}$ гача бўлган бўлаги *Ох* ўқ атрофида айланади.
4. $\rho=4\sin\theta$ эгри чизиқ қутб ўқи атрофида айланади.
5. $x=2(t-\sin t),\ y=2(1-cst)$ циклоиданинг битта аркаси $(0\le t\le 2\pi)$ *Ох* ўқ атрофида айланади.

+уйидаги чизиқлар билан чегараланган ясси фигураларнинг айланишидан ҳосил бўлган айланма жисмларнинг ҳажмлари аниқлансин.

3. $xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0$. Ox ўқ атрофида;
4. $(y-a)^2 = ax, x = 0, y = 2a$. Ox ўқ атрофида;
5. $y^2 = 4 - x, x = 0$. Oy ўқ атрофида;
6. $y = x^3, x = 0, y = 8$. Oy ўқ атрофида;
7. $y = \dfrac{64}{x^2+16}, x^2 = 8y$. Ox ўқ атрофида;
8. $y^2 = (x-1)^3, x = 2$. Oy ўқ атрофида;
9. $y = 2x - x^2, y - 0$. Ox ўқ атрофида;
10. $x^2 - y^2 = 4, y = \pm 2$. Oy ўқ атрофида;
11. $y = x^2, y = \sqrt{x}$. Ox ўқ атрофида;
12. $x = 2\cos^3 t, y = 2\sin^3 t$. Oy ўқ атрофида;
13. $y = 3 - x^2, y = 1 + x^2$. Ox ўқ атрофида;
14. $y = x^2 + 3, x = 4, y = 0, x = 0$. Ox ўқ атрофида;
15. $xy = 9, y = 3, y = 9, x = 0$. Oy ўқ атрофида;
16. $y = 10 - x^2, 2x + y - 4 = 0$. Ox ўқ атрофида.

4.4. Аниқ интеграл ёрдамида физика ва механика масалаларини ечиш.

2) а) Агар $V = f(t)$ функция моддий нуқтанинг бирор чизиқ бўйлаб ҳаракатининг тезлигини ифодаласа, у ҳолда $[t_1; t_2]$ вақт мобайнида босиб ўтилган йўл $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt$ формуласи орқали ифодаланади.

1-Мисол. Моддий нуқтанинг ҳаракат тезлиги $V = (6t^2 + 4)\,{}^{м}\!/_{сек}$ бўлса, ҳаракат бошланишидан бошлаб 5 сек. мобайнида босиб ўтилган йўл ҳисоблансин.

Ечилиши. Шартга кўра, $f(t) = 6t^2 + 4, t_1 = 0$ ва $t_2 = 5$.

$$S = \int\limits_0^5 (6t^2 + 4)dt = (2t^3 + 3t)\Big|_0^5 = 2 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5 = 250 + 20 = 270м.$$

2-Мисол. Жисмнинг ҳаракат тезлиги $V = (18t - 3t^2)\,{}^{м}\!/_{сек}$ бўлса, унинг ҳаракат бошланишидан то ҳаракат тугагунга қадар босиб ўтган йўли ҳисоблансин.

Ечилиши. Жисмнинг ҳаракат бошланиши ва тугаши пайтидаги тезлиги нолга тенг. Ҳаракат қайси пайтда тугашини аниқлаймиз, унинг учун $18t - 3t^2 = 0$ тенгламани ечамиз. Бундан: $3t(6-t) = 0$ ва $t_1 = 0, t_2 = 6$.

$$S=\int_0^6\left(18t-3t^2\right)dt=\left(9t^2-t^3\right)\Big|_0^6=9\cdot 6^2-6^3=36\cdot 3=108м.$$

3-Мисол. Агар жисм ер сиртининг юзасидан вертикал ҳолатда юқорига томон $V=(29{,}4-9{,}8t)\,м/сек$ тезлик билан отилган бўлса, у ҳолда жисм энг кўпи билан неча метр баландликка кўтарилади?

Ечилиши. Жисм энг катта баландликка t вақтнинг шундай бир пайтида эришадики, ўша пайтда $\vee=0$ бўлади.

Демак, $24{,}9-9{,}8t=0$ дан $t=3сек$.

$$S=\int_0^3(29{,}4-9{,}8t)dt=\left(29{,}4t-4{,}9t^2\right)\Big|_0^3=44{,}1м.$$

б) Айтайлик, моддий нуқта ўзгарувчан *F(x)* куч таъсирида *Ox* ўқ бўйлаб тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган бўлсин. Моддий нуқта *xқa* ҳолатдан *xқb* ҳолатга кўчганда, ушбу кучнинг бажарган иши $A=\int_a^b F(x)dx$ формула билан ҳисобланади.

Эслатма. Кучнинг бажарган ишини ҳисоблашга доир масалаларни ечишда, кўпинча Гук қонунининг формуласи Fқrx дан фойдаланилади (r-пропорционаллик коэффициенти).

4-Мисол. Агар пружина 60 Н куч остида 0,02м чўзиладиган бўлса, уни 0,12м чўзиш учун қанча иш бажарилиши керак бўлади?

Ечилиши. Гук қонунига кўра, пружинани *x* м га чўзувчи куч *Fқrx.* Агар xқ0,02 м бўлса, Fқ60H. Демак,

$r=\dfrac{60}{0{,}02}=3000$ ва $F=3000x$. Натижада:

$$A=\int_0^{0{,}12}3000xdx=1500x^2\Big|_0^{0{,}12}=1500\cdot 0{,}0144=21{,}6(Ж).$$

5-Мисол. Агар пружинанинг дастлабки узунлиги 0,1 м га тенг бўлиб, пружинани 0,01 м га чўзиш учун 20Н куч керак бўлса, уни 0,12 м дан 0,14 м га чўзиш учун қанча иш бажариш керак бўлади?

Ечилиши. $к=\dfrac{20}{0{,}01}=2000$ ва $F=2000x;a=0{,}12-0{,}1=0{,}02$ ва $b=0{,}14-0{,}1=0{,}04.$

$$A=\int_{0{,}02}^{0{,}04}2000xdx=1000x^2\Big|_{0{,}02}^{0{,}04}=1000(0{,}0016-0{,}0004)=1{,}2(Ж).$$

3) а) Маълумки, бирор *l* ўқдан *r* масофада бўлган *m* массали моддий нуқтанинг *l* ўқига нисбатан статик моменти деб, $M_l=mr$ миқдорга айтилар эди. Фараз қилайлик, *xOy* координаталар текислигида тенгламаси $y=f(x)$ бўлган моддий эгри чизиқнинг бирор *AB* ёйи $a\le x\le b$ қаралаётган бўлсин. Унинг ҳар бир нуқтасида зичлик эса $\gamma=\gamma(x)$ каби функция билан ифодалансин. У ҳолда *AB* ёйнинг *Ox* ва *Oy* ўқларга нисбатан статик моментлари мос ҳолда қуйидаги формулалар билан ҳисобланади:

$$M_x = \int_a^b \gamma(x) \cdot y \cdot \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

$$M_y = \int_a^b \gamma(x) \cdot x \cdot \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

Ҳусусан агар $\gamma(x) = \gamma$ ўзгармас сон бўлса (эгри чизиқ бир жинсли бўлганда), юқоридаги формулалар қуйидагича кўринишида ёзиладилар:

$$M_x = \gamma \int_a^b ydl, M_y = \gamma \int_a^b xdl.$$

Бу ерда, $dl = \sqrt{1+y'^2}\,dx$ - ёй узунлигининг элементи.

б) Шунингдек эгри чизиқнинг АВ ёйи оғирлик маркази $P_0(x_0; y_0)$ нуқтанинг координаталари қуйидаги формула билан топилади:

$$x_0 = \frac{\int_a^b \gamma(x) \cdot xdl}{\int_a^b \gamma(x) dl}, \quad y_0 = \frac{\int_a^b \gamma(x) \cdot ydl}{\int_a^b \gamma(x) dl}$$

ёки агар $\gamma(x) = \gamma$ ўзгармас сон бўлса

$$x_0 = \int_a^b \frac{xdl}{\int_a^b dl}, \quad y_0 = \int_a^b \frac{ydl}{\int_a^b dl}$$

в) Айтайлик, *xOy* координаталар текислигида $y = f(x)$ эгри чизиқ, *Ox* ўқи ва *xқa, xқb* вертикал тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапеция қаралаётган бўлиб, унинг зичлиги ҳам яна $\gamma = \gamma(x)$ каби узлуксиз функция бўлсин.

У ҳолда, ушбу эгри чизиқли трапециянинг *Ox* ва *Oy* ўқларга нисбатан статик моментлари қуйидаги формулалардан аниқланади:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \gamma(x) y^2 dx, \; M_y = \int_a^b \gamma(x) \cdot xydx$$

Агар $\gamma = const \neq 0$ бўлса, яъни эгри чизиқли трапеция биржинсли бўлса, юқоридаги формулалар қуйидаги кўринишда ёзилади.

$$M_x = \frac{\gamma}{2}\int_a^b y^2 dx, \; M_y = \gamma \int_a^b xydx.$$

г) Юқорида қаралган эгри чизиқли трапециянинг оғирлик маркази $P_0(x_0; y_0)$ нуқтанинг координаталари қуйидагича ҳисобланади:

$$x_0 = \frac{\int_a^b \gamma(x) xydx}{\int_a^b \gamma(x) ydx}, y_0 = \frac{1}{2}\frac{\int_a^b \gamma(x) y^2 dx}{\int_a^b \gamma(x) ydx}$$

ёки агар $\gamma = const \neq 0$ бўлса,

$$x_0=\frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx},\quad y_0=\frac{1}{2}\frac{\int_a^b y^2dx}{\int_a^b ydx}$$

6-Мисол. Тенгламаси $y=\sqrt{x}$ бўлган параболанинг абциссалари *хқ0* ва *хқ4* бўлган нуқталарга мос келувчи ёйининг координата ўқларига нисбатан статик моментлари ҳисоблансин.

Ечилиши. $\gamma=1$ деб оламиз $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ бўлганлиги учун

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4x}}=\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}};$$

$$M_x=\int_0^4\sqrt{x}\cdot\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}\int_0^4\sqrt{4x+1}dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{(4x+1)^3}\Big|_0^4=\frac{1}{3}\left(17\sqrt{17}-1\right).$$

$$M_y=\int_0^4 x\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}dx\frac{1}{2}\int_0^4\sqrt{4x^2+x}dx=\int_0^4\sqrt{x^2+\frac{x}{4}+\frac{1}{64}-\frac{1}{64}}dx=$$

$$\int_0^4\sqrt{\left(x+\frac{1}{8}\right)^2-\frac{1}{64}}dx=\left[\frac{x+\frac{1}{8}}{2}\sqrt{x^2+\frac{x}{4}}-2\ln\left|x+\frac{1}{8}+\sqrt{x^2+\frac{x}{4}}\right|\right]_0^4=$$

$$=\frac{33}{16}\sqrt{17}-2\ln\left|\frac{33}{8}+\sqrt{17}\right|+2\ln\frac{1}{8}=\frac{33\sqrt{17}}{16}+\ln\left|\frac{1}{8\left(\frac{33}{8}+\sqrt{17}\right)}\right|^2=$$

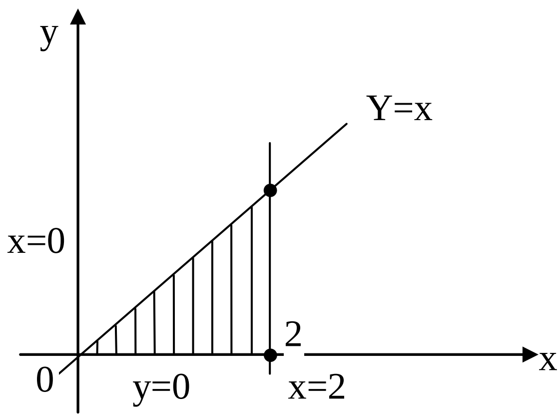
$$=\frac{33\sqrt{17}}{16}-2\ln\left(33+8\sqrt{17}\right);$$

7-Мисол. $y=x, x=2, y=0$ тўғри чизиқлар билан чегараланган учбурчакнинг координата ўқларига нисбатан статик моментлари ҳисоблансин.

Ечилиши. $\gamma=1$ деб оламиз.

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^2 y^2dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{4}{3};$$

$$M_y=\int_0^2 xydx=\int_0^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{3};$$



8-Мисол. Тенгламаси $x^2+y^2=4$ бўлган айлананинг юқори ярим палласи оғирлик марказининг координаталари ҳисоблансин.

Ечилиши. Бу ерда ҳам $\gamma=1$ деб оламиз. $y=\sqrt{4-x^2}$ дан

$y'=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ ва $M=\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\dfrac{x^2}{4-x^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{4-x^2}}$.

$$x_0=\frac{\int_{-2}^{2}\frac{2xdx}{\sqrt{4-x^2}}}{\int_{-2}^{2}\frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}}}=\frac{-2\sqrt{4-x^2}\Big|_{-2}^{2}}{2\arcsin\frac{x}{2}\Big|_{-2}^{2}}=0;$$

$$y_0=\frac{\int_{-2}^{2}2dx}{\int_{-2}^{2}\frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}}}=\frac{4}{2\arcsin 1}=\frac{4}{\pi};$$

9-Мисол. 7-мисолдаги учбурчакнинг оғирлик маркази топилсин.

Ечилиши. $x_0=\dfrac{\int_{0}^{2}x^2dx}{\int_{-2}^{2}xdx}=\dfrac{\frac{x^3}{3}\Big|_0^2}{\frac{x^2}{2}\Big|_0^2}=\dfrac{\frac{8}{3}}{2}=\dfrac{4}{3};$ $y_0=\dfrac{\frac{1}{2}\int_{0}^{2}x^2dx}{\int_{-2}^{2}xdx}=\dfrac{\frac{x^3}{6}\Big|_0^2}{\frac{x^2}{2}\Big|_0^2}=\dfrac{\frac{8}{6}}{2}=\dfrac{2}{3};$

МАШ+ЛАР

(9-Масаладан бошлаб, $\gamma=1$ деб олинсин)

4) Жисмнинг ҳаракат тезлиги $v=\left(3t^2+2t-1\right){м}/{сек.}$ қонун билан ўзгаради. Унинг ҳаракат бошлангандан сўнг 10 сек. мобайнида босиб ўтган йўли ҳисоблансин.
5) Нуқтанинг ҳаракат тезлиги $\upsilon=\left(2t+8e^{-2}\right){м}/{сек.}$ бўлса, унинг 2сек. да босиб ўтган йўли ҳисоблансин.
6) Агар жисмнинг ҳаракат тезлиги $\upsilon=\left(24t-3t^2\right){м}/{сек.}$ бўлса, унинг ҳаракат бошланишидан то тўхтагунча бўлган вақт мобайнида босиб ўтган йўли ҳисоблансин.
7) Жисм ер сиртининг юзасидан вертикал ҳолатда юқорига томон $\upsilon=\left(39{,}2-9{,}8t\right){м}/{сек.}$ тезлик билан отилди. Жисм энг кўпи билан неча метр баландликка кўтарилди.
8) Пружинани 0,05 метрга чўзиши учун 80Н куч лозим. Агар пружинанинг узунлиги 0,15 метрга тенг бўлса, уни 0,2 метргача чўзиш учун қандай иш бажариш керак бўлади.

9) Пружинани 0,05 метрга чўзиш учун 30Ж иш бажариш керак бўлади. Уни 0,08 метрга чўзиш учун эса қанча иш бажариш лозим.

10) Агар пружинани 0,02 метрга чўзиш учун 16Ж иш бажариш лозим бўлса, 100Ж иш бажарилганда пружина қанча узунликка чўзилади.

11) Пружинанинг узунлиги 0,1 метрга тенг бўлиб, уни 20Н куч 0,01 метрга чўза олади. Пружинани 0,12 метрдан 0,14 метргача чўзиш учун қандай иш бажариш керак бўлади?

12) $y = 2 - x$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари орасидаги кесмасининг *Ох* ва Оу ўқларга нисбатан статик моментлари ҳисоблансин.

13) $y = \cos x$ нинг $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ кесмага мос келувчи ёйнинг *Ох* ўққа нисбатан статик моменти топилсин.

14) $y = x^2$ ва $y = \sqrt{x}$ параболалар ҳосил қилган фигуранинг *Ох* ўққа нисбатан статик моменти топилсин.

15) $y^2 = 2x$ параболанинг *хқ0* дан *хқ2(у>0)* гача бўлган оралиқда ёйнинг *Ох* ва *Оу* ўқларга нисбатан статик моментлари ҳисоблансин.

16) $y^2 = 4x$ парабола, *хқ4* тўғри чизиқ ва *Ох* ўқлар билан чегараланган фигуранинг оғирлик марказининг координаталари ҳисоблансин.

17) $y = 2x - x^2$ билан *Ох* ўқ чегаралаган фигуранинг оғирлик маркази топилсин.

18) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ эллипснинг I-чоракдаги қисмининг оғирлик маркази топилсин.

19) $y = 6 - x^2$ парабола, *уқ2* тўғри чизиқлар чегаралаган фигуранинг оғирлик маркази ҳисоблансин.

20) *уқх* тўғри чизиқ билан $y = x^2 - 2x$ парабола чегаралаган фигуранинг оғирлик маркази ҳисоблансин.

21) $y = \sin x$ синусоиданинг $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ кесмага мос келувчи бўлагининг оғирлик марказининг координаталари топилсин.

22) Тенгламаси $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$ бўлган циклоиданинг биринчи аркасига мос келувчи ёйи $(0 \le t \le 2\pi)$нинг оғирлик маркази топилсин.

23) Тенгламаси $9x^2 + 16y^2 = 144$ бўлган эллипс, *Ох* ва *Оу* координата ўқлари билан чегараланган фигура $(x \ge 0; y \ge 0)$нинг оғирлик маркаси ҳисоблансин.

5 – БОБ

КЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБИ

5.1. Кўп ўзгарувчили функцияларга доир асосий тушунчалар.

5) *Таъриф. Агар бирор D тўпламнинг ҳар бир жуфт (x;y) ҳақиқий сонларига бирор қонун ёки қоида ёрдамида бошқа бир E тўпламдан ягона z ҳақиқий сон мос қилиб қуйилган бўлса, у ҳолда D тўпламда икки ҳақиқий x ва y ўзгарувчиларнинг функцияси аниқланган деб аталади. Бу ерда x ва y эркли ўзгарувчилар ёки аргументлар, z эса эрксиз ўзгарувчи ёки функция деб юритилади.*

Икки ўзгарувчининг функцияси $z = f(x;y), z = z(x;y)$ *ва ҳакозо кўринишларда белгиланади. Шунингдек, D ва E ларни мос равишда икки ўзгарувчили функциянинг аниқланиш ва ўзгариш соҳалари деб аталади. Икки аргументли функциянинг аниқланиш соҳаси D, xOy текисликнинг бирор чизиқлар билан чегараланаган қисми сифатида ифода этилади ҳамда агар чизиқлар D соҳада етса уни ёпиқ соҳа деб аталиб* $\overline{D}$ *билан белгиланади, аксинча D ни очиқ соҳа деб юритилади. Бирор* $z = f(x;y)$ *функциянинг графиги дейилганда фазодаги шундай* $M(x;y;z)$ *нуқталар тўпламидан ташкил топган сирт тушуниладики, у сиртдаги нуқталарнинг координаталари* $z = f(x;y)$ *тенгламани қаноатлантиради.*

Икки аргументли функциянинг таърифини уч ва ундан ортиқ ҳақиқий ўзгарувчиларнинг функциялари учун ҳам осонликча умумлаштириши мумкин.

Кўп аргументли функцияларга доир бундан буёнги тушунчаларни фақат икки аргументли функцияларга мослаб баён этамиз, чунки уларни уч ва ундан ортиқ ўзгарувчили функцияларга кўчириш ҳеч қандай қийинчиликларсиз амалга оширилади.

6) *<u>Таъриф.</u> Агар олдиндан берилган исталганча кичик* $\varepsilon > 0$ *сон учун шундай бир кичик* $\delta > 0$ *сон мавжуд бўлиб,* $|x - x_0| < \delta$ *ва* $|y - y_0 < \delta|$ *тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча x ва y лар учун* $|f(x) - A| < \varepsilon$ *тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда A сонини* $z = f(x;y)$*функциянинг тайинли* $M_0(x_0;y_0)$ *нуқтадаги лимити деб аталади ва уни қуйидагича ёзилади:*

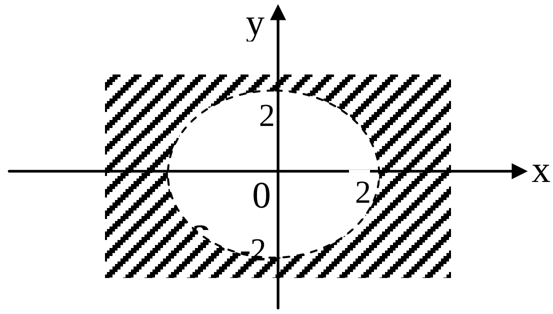
$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y)$$

<u>Таъриф.</u> Агар $z = f(x;y)$*функция бирор* $M_0(x_0;y_0)$*нуқтада ва унинг атрофида аниқланган бўлиб,* $A = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0)$ *бўлса, у ҳолда мазкур функцияни* $M_0(x_0;y_0)$ *нуқтада узлуксиз функция деб аталади. Бирор D соханинг барча нуқталарида узлуксиз бўлган функцияни у соҳада узлуксиз дейилади.* $z = f(x;y)$ *функция учун узлуксизлик шартлари бажарилмаган нуқталарни узилиш нуқталари деб аталиб, функцияни эса мазкур нуқталарда узилишга эга дейилади.*

Эслатиб ўтамизки, икки ўзгарувчининг функциялари айрим нуқталарда ёки бутун бир чизиқларда узилишга эга бўлишлари мумкин.

1-Мисол. $z = \ln\left(x^2 + y^2 - 4\right)$ функциянинг аниқланиш соҳаси топилсин.

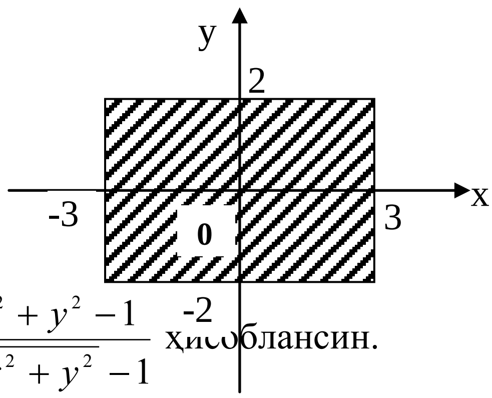
Ечилиши. Мазкур функциянинг аниқланиш соҳаси шундай *(x; y)* жуфт сонлардан иборатки, улар учун $x^2 + y^2 - 4 > 0$ ёки $x^2 + y^2 > 4$ шарт бажарилиши даркор. Бу эса геометрик жиҳатдан маркази *(0, 0)* нуқтада бўлиб, радиуси 2 дан иборат бўлган доирадан ташқарида ётувчи *xOy* текисликдаги нуқталар тўпламини ифода этади.



2-Мисол. $z = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{4 - y^2}$ функциянинг аниқланиш соҳаси топилсин.

Ечилиши. Бу функциянинг аниқланиш соҳаси $9 - x^2 \geq 0$ ва $4 - y^2 \geq 0$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча жуфт (x, y) сонлардан иборат, яъни: $-3 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 2$.

Демак, функция $x = \pm 3, y = \pm 2$ лар билан чегараланган тўғри тўртбурчакда аниқланган экан.



3-Мисол. $A = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{\sqrt{x^2 + y^2} - 1}$ ҳисоблансин.

Ечилиши.

$$A = \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{x^2 + y^2 - 1}{\sqrt{x^2 + y^2} - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{\left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right)\left(\sqrt{x^2 + y^2} + 1\right)}{\sqrt{x^2 + y^2} - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \left(\sqrt{x^2 + y^2} + 1\right) = 2.$$

4-Мисол. $z = \dfrac{1}{x^2 + 3y^2}$ функция узлуксизликка текширилсин.

Ечилиши. Ушбу функция текисликнинг O(0,0) нуқтасидан ташқари барча нуқталарда узлуксиз бўлиб, O(0,0) да узилишга эга (чунки функция, O(0,0) да аниқланмаган).

МАШ+ЛАР

+уйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳалари топилсин.

1. $z=\sqrt{x^2-4y+4}.$

2. $z=\sqrt{x+y}.$

3. $z=\sqrt{4-x^2-y^2}.$

4. $z=\ln(3-xy).$

5. $z=\sqrt{xy}+\sqrt{x-y}.$

6. $z=\arcsin\frac{x}{y}.$

+уйидаги лимитлар ҳисоблансин.

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{1-\sqrt{xy+1}}$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{x}$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)\frac{1}{x}.$

4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}.$

+уйидаги функцияларни узлуксизликка текширилсин.

1. $z=\frac{1}{(x-1)^2+(y+1)^2}.$

2. $z=\frac{1}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}.$

3. $z=\ln\left(1-x^2-y^2\right).$

4. $z=\frac{x^2+y^2}{(x+y)\left(y^2-x\right)}.$

5. $z=\frac{1}{x^2+y^2-4}.$

6. $z=\frac{1}{x+y}.$

<u>5.2. Хусусий ҳосилалар ва хусусий дифференциаллар</u>

- Агар $z=f(x,y)$ функциядаги y ни ўзгаришсиз қолдириб, ўзгарувчи x га бирор Δx орттирма берилса, у ҳолда функция x ўзгарувчига нисбатан хусусий орттирма деб аталувчи $\Delta_x z$ орттирмага эга бўлади. $\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y).$

Айнан юқоридагидек, x ўзгаришсиз қолдирилиб y га Δy орттирма берилса, у ҳолда функциянинг y га нисбатан хусусий орттирмаси $\Delta_y z=f(x,y+\Delta x)-f(x,y)$ каби ёзилади.

Агар $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}\equiv\frac{\partial z}{\partial x}\equiv z'_x\equiv f'_x(x,y)$ ва $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}\equiv\frac{\partial z}{\partial y}\equiv z'_y\equiv f'_y(x,y)$ дек чекли лимитлар мавжуд бўлса, уларни мос равишда $z=f(x,y)0$ функциянинг x ва y ўзгарувчиларга нисбатан хусусий ҳосилалари деб аталади.

Уч ва ундан ортиқ аргументли функцияларнинг хусусий ҳосилалари ҳам айнан юқоридагидек аниқланади.

Таъкидлаш жоизки, бир аргументли функциянинг асосий дифференциаллаш қоидалари ва формулаларининг барчаси икки ва ундан ортиқ ўзгарувчили функцияларнинг хусусий ҳосилаларини ҳисоблаш учун ҳам ўринли бўлаверади.

<u>1-Мисол.</u> $z=x^3+3x^2y-4xy^2+5y^3+2x-3y+1.$ $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ лар топилсин.

Ечилиши. y ни ўзгармас деб, $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+6xy-4y^2+2.$

Энди x ни ўзгармас ҳисоблаб, топамиз.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2+8xy-15y^2-3.$$

2-Мисол. $z=xe^{-xy}$; $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ лар топилсин.

Ечилиши.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-xy}+xe^{-xy}(-y)=e^{-xy}(1-xy).$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=xe^{-xy}(-x)=-x^2e^{-xy}.$$

3-Мисол. $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$ функциянинг хусусий ҳосилалари топилсин.

Ечилиши. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$.

4-Мисол. $z=\sin^2(x+y)-\sin^2 x-\sin^2 y.$ $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ лар топилсин.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2\sin(x+y)\cos(x+y)-2\sin x\cos x=\sin 2(x+y)-\sin 2x=2\sin y\cos(2x+y).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2\sin(x+y)\cos(x+y)-2\sin y\cos y=\sin 2(x+y)-\sin 2y=2\sin y\cos(x+2y).$$

5-Мисол. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}-xyz$ нинг хусусий ҳосилалари ҳисоблансин.

Ечилиши. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-yz,$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-xz,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-xy.$$

- Агар $z=f(x,y)$ функциянинг эркли ўзгарувчиларидан бирини ўзгаришсиз қолдириб, иккинчиси бўйича ундан дифференциал ҳисобланадиган бўлса, у дифференциаллар одатда функциянинг ўзгарувчиларига нисбатан хусусий дифференциаллари деб аталади:

$$d_x z=f'_x(x;y)dx,\ d_y z=f'_y(x;y)dy.$$

Бу ерда, $dx=\Delta x$ ва $dy=\Delta y$ лар эркли ўзгарувчиларнинг ихтиёрий орттирмалари бўлиб, улар эркли ўзгарувчиларнинг дифференциаллари деб юритилади.

6-Мисол. $z=\sqrt[3]{\left(x^2-y^3\right)^2}$ нинг хусусий дифференциаллари топилсин.

Ечилиши. $z'_x=\frac{2}{3}\left(x^2-y^3\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot 2x=\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-y^3}}$ ва

$z'_y=\frac{2}{3}\left(x^2-y^3\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(-3y^2\right)=-\frac{2y^2}{\sqrt[3]{x^2-y^3}}$ бўлгани учун $d_xz=\frac{4xdx}{3\sqrt[3]{x^2-y^3}}$ ва

$d_yz=\frac{2y^2dy}{\sqrt[3]{x^2-y^3}}$;

7-Мисол. $u=\arcsin\sqrt{xy^2z^3}$ берилган. d_xu, d_yu ва d_zu лар топилсин.

Ечилиши. $d_xu=\frac{\frac{y^2z^3}{2\sqrt{xy^2z^3}}}{\sqrt{1-x^2y^3z^6}}dx=\frac{y\sqrt{z^3}dx}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x^2y^4z^6}}$;

$$d_yu=\frac{\frac{2xyz^3}{2\sqrt{xy^2z^3}}dy}{\sqrt{1-x^2y^4z^6}}=\frac{\sqrt{xz^3}dy}{\sqrt{1-x^2y^4z^6}};\quad d_zu=\frac{\frac{3xy^2z^2}{2\sqrt{xy^2z^3}}dz}{\sqrt{1-x^2y^4z^6}}=\frac{3\sqrt{xz}ydz}{2\sqrt{1-x^2y^4z^6}};$$

МИСОЛЛАР

+уйидаги функцияларнинг хусусий ҳосилалари ҳисоблансин.

1. $z=\arcsin\frac{x}{y}$;
2. $z=3^{\sin\frac{y}{x}}$;
3. $z=x^y$;
4. $z=tg^2(x-y)$;
5. $z=\ln(xy+\ln xy)$;
6. $z=\ln(x-2y)$;
7. $z=e^{\frac{x}{y}}+e^{-\frac{y}{x}}$;
8. $z=\left(x^3+y^3\right)^4$;
9. $z=\cos^2(x+y)$;
11. $z=\sqrt{x^2-y^2}$;
12. $z=\frac{x-y}{x+y}$;
13. $u=z^{xy}$;
14. $u=(xy)^z$;
15. $z=arctg\frac{y}{x}$;
16. $u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$;
17. $u=\ln\left(\sin\frac{x+y}{z}\right)$;
18. $u=tg^2\left(x-y^2+z^3\right)$;
19. $u=arctg\left(\frac{xy}{z}\right)$;

10. $z = xy + \dfrac{y}{x}$;

20. $u = \ln\sqrt{\dfrac{(x^2 + y^2)}{(x^2 + z^2)}}$;

5.3. Тўла орттирма ва тўла дифференциал. Мураккаб ва ошкормас функцияларни дифференциаллаш.

11. $z = f(x;y)$ функциянинг бирор *(x;y)* нуқтадаги тўла орттирмаси деб, $\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y)$ ифодага айтилади.

Агар $z = f(x, y)$ функция *(x,y)* нуқтада узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса, унинг тўла орттирмасини $\Delta z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial x}{\partial y}\Delta y + \varepsilon\rho$ кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда, агар $\rho = \sqrt{|\Delta x|^2 + |\Delta y|^2} \to 0$ да $\varepsilon \to 0$. Ушбу тенгликдаги $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ ни $z = f(x, y)$ функциянинг *(x;y)* нуқтадаги тўла дифференциали деб аталиб, dz оркали белгиланади. Агар $\Delta x = dx, \Delta y = dy$ эканликларини назарда тутсак, у ҳолда:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Тақрибий ҳисоблашларда $\Delta z \approx dz$ деб олинади. Демак $f(x+\Delta x; y+\Delta y) \approx f(x, y) + dz$ экан.

12. Агар $u = \varphi(x;y)$ ва $\upsilon = \phi(x;y)$ лар берилган бўлсалар, у ҳолда $z = f(u;\upsilon)$ ни x ва y ўзгарувчиларга нисбатан мураккаб функция деб аталади ва унинг хусусий ҳосилалари қуйидаги формулалар ёрдамида ҳисобланади:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y},$$

Ҳусусан, агар $u = \varphi(x), \upsilon = \varphi(x)$ бўлсалар, юқоридаги формулалардан биринчиси $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{dv}{dx}$ дек ёзилиб, иккинчиси эса айнан 0 га тенг бўлади.

Охирги формулада $u = x, \quad V = y = \varphi(x)$ бўлсалар, у ҳолда:

$\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}$. Ушбу ифодани икки ўзгарувчили тўла функциянинг ҳосиласи деб аталади.

13. Агар $F(x;y) = 0$ тенглама, бирор $y = y(x)$ функцияни ошкормас шаклда ифодалайдиган бўлиб, $F'_y(x;y) \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x;y)}{F'_y(x;y)}.$$

Агар $F(x;y)=0$ тенглама, $z=z(x;y)$ функцияни ошкормас кўринишда ифодалаб, $F'_x(x;y;z)\neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{F'_x(x;y;z)}{F'_x(x;y;z)},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x;y;z)}{F'_z(x;y;z)}.$$

<u>1-Мисол.</u> $z=arctg\frac{x+y}{x-y}$, dz ҳисоблансин.

<u>Ечилиши.</u> $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{-2y}{(x-y)^2}=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{2x}{(x-y)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

у ҳолда $dz=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$.

<u>2-Мисол.</u> $z=\ln^2(x^2+y^2)$, dz ҳисоблансин.

<u>Ечилиши.</u> $$\frac{\partial z}{\partial x}=2\ln(x^2+y^2)\cdot\frac{2x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2\ln(x^2+y^2)\cdot\frac{2y}{x^2+y^2},$$

$$dz=4\ln(x^2+y^2)\cdot\frac{(xdx+ydy)}{x^2+y^2}.$$

<u>3-Мисол.</u> $\sqrt{5e^{0,02}+2,03^2}$ ни тақрибий ҳисоблансин.

<u>Ечилиши.</u> Изланаётган сонни $\sqrt{5e^x+y^2}$ функциянинг *хқ0, уқ2* нуқталаридаги қийматининг орттирмаси деб қараймиз.

$$\Delta x=0,02,\Delta y=0,03,z\Big|_{\substack{x=0\\y=2}}=\sqrt{5e^0+2^2}=\sqrt{9}=3.$$

Функциянинг тўла орттирмасини топамиз:

$$\Delta z\neq dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\frac{5e^x}{2\sqrt{5e^x+y^2}}\Delta x+\frac{2y}{2\sqrt{5e^x+y^2}}\Delta y=$$

$$=\frac{5\cdot 0,02+2\cdot 2\cdot 0,03}{2\cdot 3}=\frac{0,1+0,12}{6}=\frac{0,22}{6}=0,037.$$

Демак, $\sqrt{5e^{0,02}+2,03^2}\approx 3+0,037=3,037.$ Бу мисолни ечишда $f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+dz$ формуладан фойдаландик.

<u>4-Мисол.</u> $(1,02)^{3,01}$ ни тақрибий ҳисоблансин.

<u>Ечилиши.</u> Изланаётган сонни $z=x^y$ функциянинг тўла орттирмасидан фойдаланиб ҳисоблаймиз.

хқ1 ва *уқ3* да $z=1^3=1,\Delta x=1,02-1=0,02,\Delta y=3,01-3=0,01.$

$dz = yx^{y-1}\Delta x + x^{y}\ln x \cdot \Delta y$ лигидан, $dz = 3\cdot 1^{2}\cdot 0{,}02 + 1^{3}\cdot \ln 1 \cdot 0{,}01 = 0{,}06.$
У ҳолда $z = (1{,}02)^{3{,}01} \approx z + dz + 1 + 0{,}06 = 1{,}06.$

5-Мисол. Агар $u = 3x - 2y, v = xy$ бўлса, $z = \cos(u \cdot v)$ нинг хусусий ҳосилалари ҳисоблансин.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\vee \sin(u\cdot\vee)\cdot 3 - u\sin(u\cdot\vee)\cdot y = -3xy\cdot\sin\left(3x^2y - 2xy^2\right) - 3xy - 2y^2\cdot$$
$$\cdot\sin\left(3x^2y - 2xy^2\right) = -\sin\left(3x^2y - 2xy^2\right)\cdot\left(6xy - 2y^2\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\vee\sin(u\cdot v)\cdot(-2) - u\sin(u\cdot\vee)\cdot x = 2xy\cdot\sin\left(3x^2y - 2xy^2\right) - \left(3x^2 - 2xy\right)\cdot$$
$$\cdot\sin\left(3x^2y - 2xy^2\right) = \sin\left(3x^2y - 2xy^2\right)\cdot\left(4xy - 3x^2\right)$$

6-Мисол. Агар $z = x + y^2$ бўлиб, $y = \sin x$ бўлса, $\dfrac{dz}{\partial x}$ ҳисоблансин.

Ечилиши. $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx} = 1 + 2y\cdot\cos x = 1 + 2\sin x\cos x = 1 + \sin 2x.$

7-Мисол. Агар $x^2 - y^2 + e^{x/y} + 3 = 0,$ бўлса, $\dfrac{dy}{dx}$ ҳисоблансин.

Ечилиши. $\left(x^2 - y^3 + e^{x/y} + 3\right)'_x = 2x + \dfrac{1}{y}\cdot e^{x/y}$ ва

$\left(x^2 - y^3 + e^{x/y} + 3\right)'_y = -3y^2 - \dfrac{x}{y^2}\cdot e^{x/y}$ лардан

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + \frac{1}{y}\cdot e^{x/y}}{-3y^2 - \frac{x}{y^2}\cdot e^{x/y}} = \frac{\left(2xy + e^{x/y}\right)\cdot y}{3y^4 + xe^{x/y}}.$$

8-Мисол. Агар $\left(xyz - x^2 + y^2 - z^2\right) = 0$ бўлса, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ва $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ лар ҳисоблансин.

Ечилиши. Агар $\left(xyz - x^2 + y^2 - z^2\right)'_x = yz - 2x,$

$$\left(xyz - x^2 + y^2 - z^2\right)'_y = xz + 2y \text{ ва}$$
$$\left(xyz - x^2 + y^2 - z^2\right)'_z = xy - 2z$$

эканлигини инобатга олсак, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{yz - 2x}{xy - 2z}$ ва $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{xz + 2y}{xy - 2z}.$

МАШ+ЛАР

+уйидаги берилган функцияларнинг тўла диференциаллари ҳисоблансин.

1. $z=\sqrt{x^2+y^2}$

2. $z=e^{y/x}$

3. $z=\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}.$

4. $z=x\ln y.$

5. $z=\sin\left(x^2+y^2\right).$

6. $z=\ln\left(tg\dfrac{x}{y}\right).$

7. $z=e^x\left(\cos y+x\sin y\right).$

8. $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

9. $z=x\ln\dfrac{y}{x}.$

10. $z=arcctg\dfrac{x}{x+1}.$

11. $z=x^3+3x^2y-y^3.$

12. $z=\left(x+y\right)e^{xy}.$

+уйидаги ифодалар тақрибий ҳисоблансин.

13. $1{,}02^{4{,}05}.$

14. $\ln\left(0{,}09^3+0{,}99^3\right).$

15. $\sqrt[3]{1{,}02^2+0{,}05^2}.$

16. $arctg\dfrac{1{,}02}{0{,}95}.$

17. $\sqrt[3]{tg1{,}05+\ln 1{,}02}.$

18. $\sqrt{\sin^2 1{,}55+8e^{0{,}01}}.$

19. $\sqrt{\left(4{,}05\right)^z+\left(2{,}93\right)^z}.$

20. $\left(1{,}02\right)^3\cdot\left(0{,}97\right)^4.$

21. Агар $u=x\sin y, v=\cos x, z=\sqrt{u^2+v^2}$ берилган бўлса, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ва $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ лар ҳисоблансин.

22. Агар $u=xy, \mathrm{v}=\dfrac{x}{y}, z=\ln\left(u^3+v^3\right)$ берилган бўлса, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ва $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ лар ҳисоблансин.

23. Агар $u=\dfrac{y}{x}, \mathrm{v}=x^2+y^2, z=u^2\ln v$ берилган бўлса, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ва $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ лар ҳисоблансин.

24. Агар $u=\ln\left(x^2+y\right), \mathrm{v}=y^2x, z=\sqrt{u\cdot v}$ берилган бўлса, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ва $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ лар ҳисоблансин.

25. Агар $y=\sin\sqrt{x}$ ва $z=tg^2\left(x^2-y^2\right)$ бўлса, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ҳисоблансин.

26. Агар $y=e^{-x}$ ва $z=arctg\sqrt{x^2+y^2}$ бўлса, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ҳисоблансин.

27. Агар $\sin xy-x^2-y^2=5$ булса, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ҳисоблансин.

28. Агар $x^2y^2z^2+7y^4-8xz^3+z^4=10$ бўлса, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ва $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ лар ҳисоблансин.

29. Агар $\sin^2\left(xy^2z^2\right)+4xyz=0$ бўлса, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ва $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ лар ҳисоблансин.

30. Агар $x^3 + y^3 + z^3 - xyz = 2$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ ларнинг $M_0(1;1;1)$ нуқтадаги қийматлари ҳисоблансин.

5.4. Юқори тартибли хусусий ҳосилалар ва тўла дифференциаллар

2. $z = f(x, y)$ функциядан олинган иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар деб, унинг биринчи тартибли хусусий ҳосилаларидан ҳар иккала ўзгарувчилар бўйича олинган хусусий ҳосилаларга айтилади ва улар қуйидагича бўладилар.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y); \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$

Учинчи ва ундан юқори тартибли хусусий ҳосилалар ҳам юқоридагига ўхшаш аниқланади ва белгиланади, масалан:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f'''_{xxx}(x, y); \; \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{xxy}(x, y) \text{ ва ҳоказо.}$$

Фақат ҳосиласининг тартиби билан фарқ қиладиган хусусий ҳосилаларни аралаш хусусий ҳосилалар дейилади. Аралаш хусусий ҳосилалар узлуксиз функциялар бўлсалар, у ҳолда улар ўзаро тенг бўладилар: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$;

$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$ ва ҳоказо.

3. Юқори тартибли тўла дифференциаллар қуйидагича ҳисобланадилар ва белгиланадилар:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2;$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 dy} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial^3 y} dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3 \text{ ва ҳоказо.}$$

Умуман олганда, $d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n z$ -символик формула ўринли бўлиб, у биноминал қонун бўйича очилади.

1-Мисол. $z = x^3 + x^2 y + y^3$ функциянинг учинчи тартибли хусусий ҳосилалари топилсин.

Ечилиши. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2xy,\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3y^2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 2y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x,$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2x,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 2,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = 2,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 0,\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = 0,$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=6,\ \frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}=2,\ \frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x\partial y}=0.$$

<u>2-Мисол.</u> $z=arctg\frac{y}{x}$ функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари топилсин.

<u>Ечилиши.</u> $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

<u>3-Мисол.</u> $z=\sin x\cos y$ функциянинг иккинчи тартибли тўла дифференциали топилсин.

<u>Ечилиши.</u> $\frac{\partial z}{\partial x}=\cos x\cos y,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\sin x\sin y,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\sin x\cos y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\cos x\sin y,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2=-\sin x\cos y},$$

$$d^2z=-\sin x\cos y dx^2-2\cos x\sin y dxdy-\sin x\cos y dy^2.$$

<u>4-Мисол.</u> $z=x^2y$ функциянинг иккинчи тартибли тўла дифференциали топилсин.

<u>Ечилиши.</u> $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy,\ \frac{\partial z}{\partial y}=x^2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2=2y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$

$$d^2z=2ydx^2+4xydxdy.$$

<u>МАШ+ЛАР</u>

<u>3.</u> $z=x^4+3x^2y^2-2y^2$ функциянинг 4-тартибли хусусий ҳосилалари топилсин.

<u>4.</u> $z=xy+\sin(x+y)$ функциянинг 3-тартибли хусусий ҳосилалари топилсин.

<u>5.</u> $z=x^2\ln(x+y)$ функциянинг 2-тартибли хусусий ҳосилалари топилсин.

<u>6.</u> $z=x\ln\frac{y}{x}$ функциянинг 2-тартибли тўла дифференциали топилсин.

<u>7.</u> $z=e^{xy}$ функциянинг 2-тартибли тўла дифференциали топилсин.

<u>8.</u> $z=\cos(x+y)$ функциянинг 2-тартибли тўла дифференциали топилсин.

<u>9.</u> $z=e^x(x\cos y-y\sin y)$ функциянинг $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ тенгламани қаноатлантириши исботлансин.

<u>10.</u> $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$ функциянинг 2-тартибли хусусий ҳосилалари топилсин.

11. $z = arctg\dfrac{y}{x}$ функциянинг $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ тенгламани қаноатлантириши исботлансин.

12. Агар $z = e^{x^2 y}$ функция берилган бўлса, $z'''_{xxx}(0;1)$ ва $z'''_{yyy}(0;1)$ лар ҳисоблансин.

13. Сиртга уринма текислик ва нормалнинг тенгламалари.

Таъриф. *Сиртнинг $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтасидан унинг ҳамма эгри чизиқларига ўтказилган уринма тўғри чизиқлар ётадиган текисликни сиртнинг M_0 нуқтасидаги уринма текислиги деб аталади.*

M_0 нуқтада уринма теккисликка ўтказилган перпендикуляр тўғри чизиқни сиртнинг M_0 нуқтасидаги нормали деб аталади.

Агарда сиртнинг тенгламаси $F(x,y,z)=0$ берилган бўлиб, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтада $\left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}, \left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}, \left.\dfrac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}$ хусусий ҳосилалар чекли ва бир вақтнинг ўзида нолга айланмаса, сиртнинг M_0 нуқтасидаги уринма текисликнинг тенгламаси

$\dfrac{x-x_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}}=\dfrac{y-y_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}}=\dfrac{z-z_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}}$ кўринишда ёзилади.

Агар сиртнинг тенгламаси $z=f(x,y)$ кўринишда берилган бўлса, уринма текисликнинг тенгламаси

$z-z_0=\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}(x-x_0)+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}(y-y_0)$ кўринишда, нормалининг тенгламаси эса $\dfrac{x-x_0}{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}}=\dfrac{y-y_0}{\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}}=\dfrac{z-z_0}{-1}$ кўринишда бўлади.

<u>1-Мисол.</u> $z=x^2+2y^2$ сиртнинг $M_0(1;1;3)$ нуқтасидаги уринма текислиги ва нормалининг тенгламалари ёзилсин.

<u>Ечилиши.</u> $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}=2x\Big|_{x=1}=2, \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}=4y\Big|_{y=1}=4$ ларга кўра, уринма текисликнинг тенгламаси $z-3=2(x-1)+4(y-1)$ ёки $2x+4y-z-3=0$ кўринишда бўлади. Нормалининг тенгламаси эса, $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-3}{-1}$ дир.

<u>2-Мисол.</u> $x^2+4y^2+z^2=36$ сиртнинг $x+y-z=0$ ёки сликка параллел бўлган уринма текислиги топилсин.

Ечилиши. Сиртнинг тенгламасини $F(x,y,z)=x^2+4y^2+z^2-36=0$ кўринишда ёзиб оламиз. $\frac{\partial F}{\partial x}2x, \frac{\partial F}{\partial y}=8y, \frac{\partial F}{\partial z}=2z.$ Уринма текислик берилган текисликка параллел бўлгани учун уларнинг нормалларининг проекциялари ўзаро пропорционал бўлади, яъни $\frac{2x}{1}=\frac{8y}{1}=\frac{2z}{-1}$ ёки $\frac{x}{1}=\frac{4y}{1}=\frac{z}{-1}$ тўғри чизиқ берилган сиртни иккита нуқтада кесиб ўтади. Бу нуқталарни топиш учун $x^2+4y^2+z^2=36$ ва $\frac{x}{1}=\frac{4y}{1}=\frac{z}{-1}$ тенгламаларни биргаликда ечамиз: $z=-x, z=-4y,$

$z^2+4\frac{z^2}{16}+z^2=36,$ ёки $z^2+\frac{z^2}{4}+z^2=36, z^2=16, z_{1,2}=\pm4, x_{1,2}=\mp4, y_{1,2}=\mp1.$

Демак, уринма текисликлар $M_1(-4;-1;4)$ ва $M_2(4;1;-4)$ нуқталардан ўтади:

а) $(x+4)+1\cdot(y+1)-1\cdot(z-4)=0$ ёки $x+y-z+9=0$.

б) $(x-4)+1\cdot(y-1)-1\cdot(z+4)=0$ ёки $x+y-z-9=0$

Жавоб. Уринма текислик иккита экан: $x+y-z=\pm9.$

МАШ+ЛАР

3. $z=x^2-4xy+y^2-x+4y$ сиртнинг $M_0(1,1,1)$ нуқтадаги уринма текислиги ва нормали топилсин.
4. $x^2+2y^2+3z^2=11$ сиртнинг $x+y+z=1$ текисликка параллел бўлган уринма текислиги топилсин.
5. $z=1+x^2+y^2$ сиртнинг $M_0(1;1;3)$ нуқтадаги уринма текислиги ва нормали топилсин.
6. $x^2+2y^2+3z^2=21$ сиртнинг $x+4y+6z=0$ текисликка параллел бўлган уринма текисликлари топилсин.
7. $z=\sin x\cos y$ сиртнинг $M_0\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right)$ нуқтадаги уринма текислиги ва нормали топилсин.

8. Икки ўзгарувчили функциянинг экстремуми ҳамда энг кичик ва энг катта қийматлари.

3. $z=f(x;y)$ икки ўзгарувчили функция ва $M_0(x_0;y_0)$ нуқта берилган бўлсин. Агарда $M_0(x_0;y_0)$ нуқтанинг етарлича кичик атрофида $f(x_0;y_0)>f(x;y)$ шарт бажарилса, $f(x;y)$ функция M_0 нуқтада максимумга эга деб аталиб, агарда $f(x_0;y_0)<f(x;y)$ шарт бажарилса, $f(x;y)$ функция M_0 нуқтада минимумга эга деб аталади.

Функциянинг максимум ва минимумини унинг экстремуми дейилади.

Агарда дифференциалланувчи $z = f(x;y)$ функция $M_0(x_0;y_0)$ нуқтада экстремумга эришса, у ҳолда $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$ ёки хусусий ҳосилалардан ҳеч бўлмаганда бирортаси мавжуд бўлмайди (экстремумнинг зарурийлик шарти).

Функциянинг хусусий ҳосилаларини нолга ёки аниқмасликка айлантирадиган, ҳамда унинг аниқланиш соҳасида ётадиган нуқталарни критик ёки стационар нуқталар дейилади.

$M_0(x_0,y_0)$ нуқта $z = f(x,y)$ функциянинг критик нуқтаси бўлсин.

+уйидагича белгилашларни киритамиз:

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2},\ B = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y},\ C = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}.$$

У ҳолда:

4. $AC - B^2 > 0$ ва $A < 0$ шартлар бажарилса, $f(x,y)$ функция M_0 нуқтада максимумга эришади;
5. $AC - B^2 > 0$ ва $A > 0$ шартлар бажарилса, $f(x,y)$ функция M_0 нуқтада минимумга эришади;
6. $AC - B^2 < 0$ бўлса $f(x,y)$ функция экстремумга эришмайди;
7. $AC - B^2 = 0$ бўлса $f(x,y)$ функция экстремумга эришиши ҳам мумкин, эришмаслиги ҳам мумкин. (шубҳали ҳол).

<u>1-Мисол.</u> $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$ функциянинг экстремуми топилсин.

<u>Ечилиши.</u> Биринчи тартибли хусусий ҳосилаларини топамиз:

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 9, \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 6.$ Энди критик нуқталарини топамиз.

$\begin{cases} 2x - y + 9 = 0 \\ x - 2y + 6 = 0 \end{cases}$ тенгламалар системасидан $x = -4, y = 1; M_0(-4;1)$ ягона критик нуқта. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларнинг M_0 нуқтадаги қийматларини топамиз:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, B = \frac{\partial^1 z}{\partial x \partial y} = -1, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

$AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0, A > 0$ лар бажарилганлиги учун берилган функция $M_0(-4;1)$ нуқтада минимумга эришади: $z_{\min} = -1.$

<u>2-Мисол.</u> $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ функциянинг экстремуми топилсин.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{2\sqrt{x}} - 1, \frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{x} - 2y + 6. \quad \begin{cases} \frac{y}{2\sqrt{x}} - 1 = 0, \\ \sqrt{x} - 2y + 6 = 0, \end{cases}$$

системани ечиб, $M_0(4;4)$ критик нуқта топилади.

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{M_0}=\frac{y}{4\sqrt{x^3}}\bigg|_{M_0}=-\frac{1}{8},\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_{M_0}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\bigg|_{M_0}=\frac{1}{4},\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial z^2}=-2.$$

$AC-B=\frac{3}{16}>0$ ва $A=-\frac{1}{8}<0$ ларга асосан берилган функция $M_0(4;4)$ нуқтада максимумга эришади: $z_{\max}=12.$

<u>МАШ+ЛАР</u>

<u>+уйидаги функцияларнинг экстремумлари топилсин:</u>

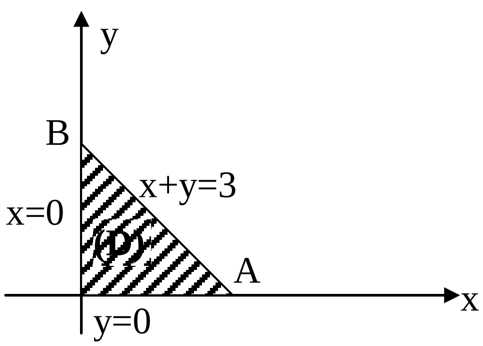
1. $z=x^2+8y^3-6xy+1.$
2. $z=2xy-4x-2y.$
3. $z=xy^2(1-x-y).$
4. $z=3x^2-2x\sqrt{y}y-8x+8.$
5. $z=1+6x-x^2-xy-y^2.$
6. $z=(x-5)^2+y^2+1.$
7. $z=xy6-x-y.$
8. $z=2xy-2x^2-4y^2.$
9. $z=x^3+8y^3-6xy+1.$
10. $z=x^3+y^3-3xy.$

4. Агар $z=f(x;y)$ функция чегараланган ёпиқ $\overline{D}$ соҳада дифференциалланувчи бўлса, ўзининг энг кичик ва энг катта қийматларига ёки $\overline{D}$ соҳа ичида ётувчи критик нуқталарда ёки унинг чегарасида эришиши мумкин.

Умуман, $z=f(x;y)$ функциянинг чегараланаган ёпиқ $\overline{D}$ соҳадаги энг кичик ва энг катта қийматларини топиш учун $\overline{D}$ соҳа ичида ётувчи барча критик нуқталарда функциянинг қийматлари ҳисобланиб, кейин эса $\overline{D}$ соҳанинг чегарасида функциянинг энг кичик ва энг катта қийматлари ҳисобланади. Топилган барча қийматлар ўзаро таққосланиб, улар ичидан энг кичиги ва энг каттаси танланилади.

<u>1-Мисол.</u> $f=x^2-2y^2+4xy-6x+5$ функциянинг $x=0, y=0,\quad x+y=3$ тўғри чизиқлар билан чегараланган соҳадаги энг кичик ва энг катта қийматлари ҳисоблансин.

<u>Ечилиши.</u> $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=2x+4y-6=0,\\ \frac{\partial z}{\partial x}=-4y+4x=0\end{cases}$



дан $x=1, y=1$ ларни аниқлаймиз.

Демак, (1;1) нуқта критик нуқта экан: $z_1(1;1)=2.$ +аралаётган функцияни D соҳанинг чегарасида текширамиз.
OA кесмада $y=0$ бўлгани учун $z=x^2-6x+5.$
Бу функциянинг $[0;3]$ кесмадаги энг кичик ва энг катта қийматларни топамиз:
$z'_x=2x-6=0, x=3$ ва $z_2(3;0)=-4.$
OB кесмада: $x=0$ ва $z=-2y^2+5; z'_y=-4y=0$ дан $y=0.$ $z_3(0;0)=5$
AB кесмада: $x+y=3.$ У ҳолда $z=-5x^2+18x-13,$
$z'_x=-10x+18=0$ дан $x=\dfrac{9}{5}$ ва $z_4\left(\dfrac{9}{5}\right)=\dfrac{16}{5}.$

Барча топилган қийматларни ўзаро таққослаб энг кичик $z(3;0)=-5$ ва энг катта $z(0;0)=5$ларни ҳосил қиламиз.

МАШ+ЛАР

+уйидаги функцияларнинг кўрсатилган соҳалардаги энг кичик ва энг катта қийматлари ҳисоблансин.

1. $z=3x+y-xy,$ $\quad\overline{D}: y=x, x=0, y=4.$
2. $z=x^2+2xy-y^2-4x,$ $\quad\overline{D}: x=3, x-y=1.$
3. $z=x^2y(4-x-y),$ $\quad\overline{D}: x=0, y=0, x+y=6.$
4. $z=4-2x^2-y^2,$ $\quad\overline{D}: y=x, y=\sqrt{1-x^2}.$
5. $z=x^2+2xy+4x-y^2,$ $\quad\overline{D}: x=0, y=0, x+y=-2.$
6. $z=x^3+y^3-3xy,$ $\quad\overline{D}: x=0, x=2, y=-1, y=2.$
7. $z=xy-3x-2y,$ $\quad\overline{D}: x=0, x=4, y=0, y=4.$
8. $z=x^2+xy-2,$ $\quad\overline{D}: y=0, y=4x^2-4.$
9. $z=x^3+y^3-3xy,$ $\quad\overline{D}: x=0, x=2, y=-1, y=2.$
10. $z=x^2-y^2,$ $\quad\overline{D}: x^2+y^2\le 1.$

3. Шартли экстремум.
<u>Таъриф.</u> *$z=f(x,y)$ функциянинг шартли экстремуми деб, $\varphi(x,y)=0$ шартни ҳисобга олиб топилган экстремумига айтилади.*
Шартли экстремумни топиш учун Лагранж функцияси деб аталадиган қуйидаги ёрдамчи функция тузилади:
$U(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$ λ-топилиши керак бўлган ўзгармас кўпайтувчи.
Лагранж функциясининг экстремумга эришишининг зарурийлик шартлари қуйидаги кўринишда бўлади.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \qquad \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Бу учта тенгламалар системасини ечиб ноъмалумлар x,y ва λ лар топилади.

1-Мисол. Хажми v га тенг бўлган тўғрибурчакли очиқ бассейннинг сирти энг кичик бўлиши учун унинг ўлчовлари қандай бўлиши керак?

Ечилиши. Бассейннинг бўйи, эни ва баландлиги x, y, z, лар орқали белгилаймиз. Масала, $S = xy + xz + 2yz$ функциянинг $xyz = v$ шарт бажарилганда минимумини топишга олиб келинади. Лагранж функциясини топамиз $u(x, y, z\lambda) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - v)$.

Унинг хусусий ҳосилаларини топамиз ва уларни нолга тенглаймиз.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = y + 2z + \lambda yz = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x + 2z + \lambda xz = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 2y + 2x + \lambda xy = 0, \\ \qquad xyz - v = 0. \end{cases}$$

Бу системани ечиш учун биринчи тенгламани x га, иккинчисини y га учинчисини z га кўпайтириб қўшамиз:

$$\begin{cases} xy + 2xz + \lambda xyz = 0, \\ xy + 2yz + \lambda xyz = 0, \\ 2yz + 2xz + \lambda xyz = 0. \end{cases}$$

Энди биринчи тенгламадан иккинчи тенгламани айирамиз:

$2xz - 2yz = 0$ ёки $(x - y)z = 0, z > 0$ бўлгани учун $x - y = 0$, бундан $x = y$.

Худди шунга ўхшаб, иккинчи тенгламадан учинчисини айирамиз:

$xy - 2xz = 0$ ёки $(y - 2z)x = 0, x > 0$ бўлгани учун $y - 2z = 0$, бундан $z = \dfrac{y}{2}$. x ва z ларнинг қийматларини системадаги туртинчи тенгламага қўйиб топамиз: $y \cdot y \cdot \dfrac{y}{2} = v, y^3 = 2v, y = \sqrt[3]{2v}, z = 0{,}5\sqrt[3]{2v}$. Демак бассейннинг сирти энг кичик бўлиши учун бўйи билан эни тенг бўлиши, баландлиги эса бўйи ёки энининг ярмига тенг бўлиши керак экан. Савол туғилади, нима учун айнан x, y,z ларнинг топилган қийматларида сирт энг кичик бўлади? Бошқача айтганда S функция минимумга эришади? Бу саволга жавоб бериш учун геометрик нуқтаи назардан мулоҳаза юритамиз. Фараз қилайлик, агарда $x \to 0$ ёки $y \to 0$ бажарилса $z \to \infty$, бундан кўринадики сирт ниҳоятда катталашиб кетади. Аксинча, агарда $z \to 0$ бажарилса, у ҳолда х ёки у лар чексизликка интилади, демак сирт яна катталашади. Шундай қилиб сирт $x = y = \sqrt[3]{2v}, z = 0{,}5\sqrt[3]{2v}$ қийматлардагина энг кичик бўлади.

2-Мисол. Юзи *S* га тенг бўлган барча тўғри бурчакли учбурчаклардан шундай бири топилсинки, унинг гипотенузаси энг кичик қийматга эга бўлсин.

Ечилиши. Изланаётган учбурчакнинг катетлари *x* ва *y*, гипотенузаси эса *z* бўлсин. $z^2 = x^2 + y^2$ бўлгани учун масала $x^2 + y^2$ функциянинг $\frac{xy}{2} = S$ шарт бажарилгандаги энг кичик қийматини топишга келтирилади. Лагранж функцияси $u(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 2S)$ ни тузамиз ва унинг хусусий ҳосилаларини топамиз.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2x + \lambda y,\ \frac{\partial u}{\partial z} = 2y + \lambda x.$$

Энди $\begin{cases} 2x + \lambda y = 0, \\ 2y + \lambda x = 0, \\ \quad \frac{xy}{2} = S. \end{cases}$ системани ечиб *z, y, λ* ларни топамиз.

Бунинг учун $x > 0,\ y > 0$ ларни олиб системанинг биринчи тенгламасини *x* га, иккинчисини эса *y* га кўпайтириб айирамиз:

$2x^2 + \lambda xy - 2y^2 - \lambda xy = 0, 2x^2 - 2y^2 = 0, x^2 = y^2$, бундан $x = y, \lambda = -2.$

Шундай қилиб, $x = y = \sqrt{2S}$, яъни учбурчакнинг катетлари ўзаро тенг бўлса гипотенуза энг кичик қийматга эга бўлади.

МАШ+ЛАР

Тўла сирти *S* га тенг бўлган цилиндрнинг ҳажми энг катта бўлиши учун унинг ўлчовлари (радиус ва баландлиги) қандай бўлиши керак.

$z = x^2 + y^2$ функциянинг $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ шартдаги экстремуми топилсин.

Доира ичига чизилган барча учбурчакларнинг шундайини топингки, унинг юзи энг катта бўлсин.

$z = x + 2y$ функциянинг $x^2 + y^2 = 5$ шартдаги экстремуми топилсин.

$z = xy^2$ функциянинг $x + 2y = 1$ шартдаги экстремуми топилсин.

6-БОБ.

БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

6.1. Дифференциал тенгламаларга доир асосий тушунчалар.

Эркли ўзгарувчилар ва шу эркли ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган номаълум функция ҳамда унинг турли тартибдаги ҳосилалари (ёки дифференциаллари)ни боғловчи муносабат дифференциал тенглама деб юритилади.

Агар дифференциал тенглама таркибидаги номаълум функция битта эркли ўзгарувчигагина боғлиқ бўлса, ундай дифференциал тенгламани оддий дифференциал тенглама деб аталиб, агар дифференциал тенглама таркибидаги номаълум функция биттадан ортиқ эркли ўзгарувчиларга боғлиқ бўлса, у дифференциал тенгламани хусусий ҳосилали дифференциал тенглама деб юритилади. Биз бундан буён фақат оддий дифференциал тенгламаларнигина ўрганамиз.

Диференциал тенгламанинг тартиби дейилганда унинг таркибидаги ҳосилаларнинг энг юқори тартиби тушунилади.

Масалан, $x^2y'' + 5xy' - y^3 = 0 -$ иккинчи тартибли, $x(1+y^2)dx + y(1-x^2)dy = 0$ эса, биринчи тартибли дифференциал тенгламалардир ва х.к.

Умуман, биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг умумий кўриниши $\mathrm{F}(x; y; y') = 0$ каби ёзилади (бу ердаги F ўзининг аргументларига нисбатан узлуксиз функциядир).

Агар уни y'га нисбатан ечиш мумкин бўлса, ечиб, $y' = f(x; y)$ни ҳосил қиламиз.

Мазкур тенглама ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли дифференциал тенглама деб юритилади. Шунингдек, $P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0$ ни диференциал шаклдаги биринчи тартибли дифференциал тенглама деб аталади.

Биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг ечими ёки интеграли деб, уни айниятга айлантирадиган ҳар қандай дифференциаланувчи $y = \varphi(x)$ каби функцияга айтилади ва у ечимнинг графигини интеграл эгри чизиқ дейилади.

Биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг умумий ечими деб, шундай бир $y = \varphi(x; C)$ функцияга айтиладики (бунда С-иҳтиёрий ўзгармас сон), у қуйидаги шартларга бўйсунади:

- у иҳтиёрий ўзгармас С нинг ҳар қандай қийматида ҳам тенгламани қаноатлантиради;
- бошланғич шартлар деб аталувчи х қ x_0 бўлганда у қ y_0 бўладиган қўшимча шартлар қандай бўлмасин С нинг шундай муайян C_0 қийматини топиш мумкинки, $y = \varphi(x; C_0)$ функция берилган бошланғич шартни қаноатлантиради, яъни $y_0 = \varphi(x_0; C_0)$.

Умумий ечимдан иҳтиёрий ўзгармас С нинг мумкин бўлган қийматларида ҳосил қилинадиган ечимлар хусусий ечимлар дейилади.

Агар умумий ёки хусусий ечимлар ошкормас функциялар ҳолида берилсалар, уларни мос равишда умумий ёки хусусий интеграллар деб юритилади.

Умумий ечим (ёки умумий интеграл) геометрик жиҳатдан битта С параметрга боғлиқ интеграл эгри чизиқлар оиласи билан тасвирланади. Хусусий ечим (ёки хусусий интеграл) бу оиланинг интеграл эгри чизиқларидан биридир.

Биринчи тартибли $y' = f(x;y)$ дифференциал тенгламанинг берилган у(x_0)қy_0 каби бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топиш масаласи, одатда Коши масаласи деб юритилади.

<u>1-Мисол.</u> $xy' = 2y$ тенгламанинг ечими $y = 5x^2$ эканлиги кўрсатилсин.

<u>Ечилиши.</u> $y' = 10x$ бўлганлигидан, $x \cdot 10x = 2 \cdot 5x^2$ ёки $10x^2 = 10x^2$

<u>2-Мисол.</u> $y = Ce^x$ эгри чизиқлар оиласининг дифференциал тенгламаси тузилсин.

<u>Ечилиши.</u> $y = Ce^x$ бўлганлигидан, $\frac{y'}{y} = 1$ ёки $y' = y$ ни ҳосил қиламиз. Мазкур тенгламани $y = Ce^x$ қаноатлантиришини текшириш қийин эмас.

<u>3-Мисол.</u> $x^2 - y^2 = C$ каби эгри чизиқлар оиласидан $y(0) = 5$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи эгри чизиқ топилсин.

<u>Ечилиши.</u> хқ0 бўлганда уқ5 бўлганлигидан, 0-25қС ва Сқ -25. У ҳолда, $y^2 - x^2 = 25$ ҳосил бўлади.

+уйида берилган дифференциал тенгламалар учун кўрсатилган функциялар ечим бўла олишлиги кўрсатилсин.

1. $y' = \frac{y}{x}$, у = 10х;
2. $y' + y = 0$, $y = 3e^{-x}$
3. $xy' + y = 0$, $y = \frac{6}{x}$;
4. $yy' + xy - 3x^3 = 0$, $y = x^2$
5. $(x + y)y' - 2y = 0$, $y = x$;

+уйидаги тенгламалар билан берилган эгри чизиқлар оиласининг дифференциал тенгламалари тузилсин.

1. $y = Cx^3$
2. $y = Sin(x + C)$
3. $x^2 + Cy^2 = 2y$
4. $y^2 + Cx = x^3$
5. $x^2 + y^2 = C^2$

6.2. Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалар.

Ушбу M(x)dx+N(y)dyқ0 тенглама, ўзгарувчилари ажралган дифференциал тенглама деб юритилади. Мазкур тенгламанинг умумий интегралини топиш учун уни ҳадлаб интеграллаймиз:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

Бу ердаги C ни берилган тенглама учун қулай бўлган исталган кўринишда танланади.

1-Мисол. $xdx - \frac{ydy}{1+y^2} = 0$- ўзгарувчилари ажралган тенгламадир. Уни ҳадлаб интегралласак, $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = C$ ни ҳосил қиламиз. Юқорида айтилган мулоҳазага асосан, C нинг ўрнига $\frac{1}{2}\ln C$ и танлаб $x^2 = C(1+y^2)$ ни топамиз.

Агар ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли $y' = f(x;y)$ каби тенгламанинг ўнг томонидаги функция фақат битта x ёки y ўзгарувчига боғлиқ бўлган функцияларнинг кўпайтмаси (ёки нисбати) кўринишида берилган бўлса, уни ўзгарувчилари ажраладиган тенглама деб аталади, яъни:

$$y' = \varphi(x) \cdot q(y)$$

Бу ерда, $y' = \frac{dy}{dx}$ ва $q(y) \neq 0$ эканликларини эътиборга олсак, $\frac{dy}{q(y)} = \varphi(x)dx$ ни ҳосил қиламиз. Бу эса, ўзгарувчилари ажралган тенгламадир. Уни интеграллаб, $\int \frac{dy}{q(y)} = \int \varphi(x)dx + C$ кўринишдаги умумий интеграл топилади.

+уйидаги $f_1(x) \cdot f_2(y)dx + \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y)dy = 0$ тенглама ҳам ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир. Тенгликнинг ҳар иккала томонини $\varphi_1(x) \cdot f_2(y) \neq 0$га ҳадлаб бўлиб юбориб, ўзгарувчилари ажралган тенглама $\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0$ ни ҳосил қиламиз. Уни интеграллаб, умумий интегралини топамиз.

2-Мисол. $x(1+y^2)dx + (1+x^2)ydy = 0$ тенглама ечилсин.

Ечилиши. Ўзгарувчиларни ажратиш учун тенгликнинг ҳар иккала томонини $(1+x^2)(1+y^2) \neq 0$ га бўлиб юборамиз: $\frac{xdx}{1+x^2} + \frac{ydy}{1+y^2} = 0$. Мазкур ўзгарувчилари ажралган тенгламани ҳадлаб интеграллаб,

$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=C$ ни ёки $\ln\left[(1+x^2)(1+y^2)\right]=\ln C$ (бу ерда, 2CқlnC деб олинади) ни ҳосил қиламиз. Бундан: $(1+x^2)(1+y^2)=C$ - умумий интеграл.

3-Мисол. $xyy'=1-x^2$ тенглама ечилсин.

Ечилиши. Тенгламани y'га нисбатан ечамиз: $y'=\frac{1-x^2}{xy}$. Бу эса, ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир. $y'=\frac{dy}{dx}$ эканлиги эътиборга олинса, $ydy=\frac{1-x^2}{x}dx$ ҳосил бўлади. У ҳолда, $\frac{y^2}{2}=\ln|x|-\frac{x^2}{2}+C$ ёки $x^2+y^2=\ln(Cx^2)$ каби умумий интеграл топилади (бу ерда 2CқlnC деб олинади).

4-Мисол. $y'tgx=y$ тенгламанинг $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечими топилсин.

Ечилиши. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{tgx}$ ёки $\frac{dy}{y}=ctgxdx$ дан $\ln|y|=\ln|Sinx|+\ln C$ ни ва бундан $y=CSinx$ каби умумий ечимни топамиз.

$x=\frac{\pi}{4}$ бўлганда $y=\sqrt{2}$ бўлганлигидан, $\sqrt{2}=CSin\frac{\pi}{4}$ ёки $\frac{\sqrt{2}}{2}C=\sqrt{2}$.

Бундан эса, Cқ2. Демак, хусусий ечим $y=2Sinx$ экан.

$y'=f(ax+by+c)$ кўринишдаги тенгламани қараймиз. Ушбу тенгламада $ax+by+c=z$ алмаштириш киритамиз. Бундан, $a+by'=z'$ ёки $y'=\frac{z'-a}{b}$ бўлганлиги сабабли, $\frac{1}{b}(z'-a)=f(z)$ ёки $z'=a+bf(z)$ни ҳосил қиламиз. Бу эса, ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир. Уни ечиб, ечимнинг қийматини $ax+by+c=z$ га қўйсак, дастлабки тенгламанинг умумий ечими ёки умумий интеграли аниқланади.

5-Мисол. $y'=\frac{1}{x+2y}$ тенглама ечилсин.

Ечилиши. $x+2y=z,\ 1+2y'=z',\ y'=\frac{1}{2}(z'-1)$ ларни инобатга олсак, $\frac{1}{2}(z'-1)=\frac{1}{z}$ ёки $z'=\frac{2}{z}+1$ни ҳосил қиламиз. $z'=\frac{dz}{dx}$лигидан: $\frac{dz}{dx}=1+\frac{2}{z}$. Бу ерда ўзгарувчиларни ажратиб интеграллаймиз:

$\frac{zdz}{z+2}=dx,\ \int dz-2\int\frac{dz}{z+2}=\int dx+C$ ёки $z-2\ln|z+2|=x+C$

z ни x+2y билан алмаштириб, берилган тенгламанинг $y - \ln|x + 2y + 2| = C$ каби умумий интегралини топамиз.

<u>МИСОЛЛАР</u>

<u>+уйидаги дифференциал тенгламалар ечилсин</u>

1. $y'x^3 = 2y$
2. $(x^2 + x)y' = 2y + 1$
3. $(1 + x^2)y' = 1 + y^2$
4. $(1 - y)dx + (1 + x)dy = 0$
5. $y' = 2\sqrt{y}\ln x$
6. $2xyy' = 1 - y^2$
7. $3^{x-y}dx - 4^{x+y}dy = 0$
8. $ytgxdx + dy = 0$
9. $\sqrt{1 + y^2}dx - xdy = 0$
10. $xy' = y^2 - y$
11. $y' = \sqrt{\dfrac{y}{x}}$
12. $y' + y^2 = 1$
13. $y' = 2x^2 5x + 12$
14. $y' - y^2 - 3y + 4 = 0$
15. $xydx = (1 + x^2)dy$
16. $y^2dx + (x - 2)dy = 0$
17. $(1 + y^2)dx - \sqrt{x}dy = 0$
18. $\sqrt{1 - x^2}dy - x\sqrt{1 - y^2}dx = 0$
19. $(x^2 - yx^2)dy + (y^2 + xy^2)dx = 0$
20. $x^2dy - (2xy + 3y)dx = 0$
21. $y' = \dfrac{1}{3x + y}$
22. $y'(x + y) = 1$
23. $y' = 2^{2y+3x}$
24. $y' = 4x + 3y$
25. $y' = \sqrt{2x + y + 4}$
26. $y' = 3 - \dfrac{2}{x + 2y}$
27. $z' = 10^{x+z}$
28. $y' = Cos(y - x)$
29. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$
30. $y' - y = 2x - 3$

+уйидаги дифференциал тенгламаларнинг берилган бошланғич шартларга биноан хусусий ечимлари ёки хусусий интеграллари топилсин