УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ, ҚОРАҚАЛПОҚ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖА БЕРУВЧИ PhD.28.12.2017.FM.55.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

МАТЁҚУБОВ МУҲАММАД МАХСУДОВИЧ

МОСЛАНГАН МАНБАЛИ НОЧИЗИҚЛИ УМУМИЙ КОРТЕВЕГ-ДЕ ФРИЗ ТЕНГЛАМАСИНИ ДАВРИЙ ФУНКЦИЯЛАР СИНФИДА ИНТЕГРАЛЛАШ

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

УРГАНЧ – 2018

УДК: 517.957

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ, ҚОРАҚАЛПОҚ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖА БЕРУВЧИ PhD.28.12.2017.FM.55.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

МАТЁҚУБОВ МУҲАММАД МАХСУДОВИЧ

МОСЛАНГАН МАНБАЛИ НОЧИЗИҚЛИ УМУМИЙ КОРТЕВЕГ-ДЕ ФРИЗ ТЕНГЛАМАСИНИ ДАВРИЙ ФУНКЦИЯЛАР СИНФИДА ИНТЕГРАЛЛАШ

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

УРГАНЧ – 2018

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.3.PhD/FM110 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертацияси Урганч давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз(резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.ik-mat.urdu.uz/) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Хасанов Ақназар Бекдурдиевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Тахиров Жозил Останович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Хоитметов Умид Азадович физика-математика фанлари номзоди
Етакчи ташкилот:	**Ўзбекистон Миллий университети**

Диссертация ҳимояси Урганч давлат университети, Қорақалпоқ давлат университети ҳузуридаги PhD.28.12.2017.FM.55.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2018 йил «___»___________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 220100, Урганч ш., Х. Олимжон кўчаси, 14-уй. Тел.: (99862) 224-66-11, факс: (99862) 224-67-00, e-mail: ik-mat.urdu@umail.uz).

Диссертацияси билан Урганч давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 220100, Урганч ш., Х. Олимжон кўчаси, 14-уй. Тел.: (99862) 224-66-11, факс: (99862) 224-67-00).

Диссертация автореферати 2018 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2018 йил «____» _______________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

Б.И. Абдуллаев
Илмий даража берувчи Илмий
кенгаш раиси, ф.-м.ф.д.

А.А. Атамуратов
Илмий даража берувчи Илмий
кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

А.Б. Яхшимуратов
Илмий даража берувчи Илмий
кенгаш қошидаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д.

Кириш (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда, мосланган манбали ночизиқли тенгламаларни ўрганишга келтирилади. Спектрал анализнинг тўғри ва тескари масалалари табиатнинг ҳар хил жабҳаларида, масалан, самовий механикада, квант механикасида энергия сатҳлари маълум бўлганида атомларнинг ички кучларини аниқлашда, радиотехникада, эластиклик назариясида, эллиптик мембрананинг тебраниш жараёнини ўрганишда, қаттиқ жисмларнинг кристал тузилишини моделлаштиришда ва замонавий математик физиканинг ночизиқли эволюцион тенгламалари ечимларини аниқлашда вужудга келади. Шу боис тескари спектрал масалалар ёрдамида мосланган манбали умумий Кортевег-де Фриз тенгламаларини интеграллашга оид тадқиқотлар спектрал анализни ривожлантиришда муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда ночизиқли тўлқинлар назариясидаги тадқиқотлар, жумладан оптик солитонлар телекоммуникация технологияларида қўлланила бошланди. Ҳақиқий физик системалар классик тенгламаларнинг модификацияларидан бири бўлган мосланган манбали тенгламалар билан тавсифланади. Бундан ташқари, физик системаларга таъсир қилувчи кучлар фақат чекли вақт оралиғида чекли бўлади, шунинг учун ҳақиқий моделлар фазовий ўзгарувчи бўйича даврий ва деярли даврий функциялар синфларидаги тенгламаларни ўрганишга олиб келинади. Спектрал анализнинг тескари масалалар усулини ночизиқли оптика, плазма физикаси, гидродинамика ва бошқа соҳаларнинг турли масалаларига татбиқлари устувор йўналишлардан бири бўлиб келмоқда. Бу борада мосланган манбали ночизиқли умумий Кортевег-де Фриз тенгламасини, юкланган Кортевег-де Фриз тенгламасини, юқори тартибли Кортевег-де Фриз тенгламасини, озод ҳади фазовий ўзгарувчига боғлиқ бўлмаган юқори тартибли Кортевег-де Фриз тенгламасини даврий функциялар синфида ечиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг амалий татбиққа эга бўлган долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, математик физика тенгламалари ва дифференциал операторлар спектрал назариясининг ночизиқли тўлқинлар назариясидаги тадқиқотларни таҳлил қилишга алоҳида эътибор қаратилди. Бунинг натижасида математик физиканинг ночизиқли эволюцион тенгламаларини тўғри ва тескари спектрал масалалар ёрдамида тўла интеграллаш бўйича салмоқли натижаларга эришилди. Математик физика, математик физиканинг замонавий усуллари фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланади[1]. Қарор ижросини таъминлашда тескари спектрал назария, мосланган манбали

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида ”ги 292-сон қарори

ночизиқли тенгламаларни интеграллаш назарияларини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора тадбирлари тўғрисида»ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарори ва 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур диссертация республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналишига мувофиқ бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Умумий ҳолда даврий потенциалли Штурм-Лиувилл оператори учун тескари масала И.В.Станкевич, В.А.Марченко, И.В.Островский, Х.П.Мак-Кин, Е.Трубовиц, Х.Хохштадт, Б.Греберт, Т.Каппелер, J.Pöschel, Е.Коротяев, Х.Флашкалар томонидан батафсил ўрганилган.

С.П.Новиков, Б.А.Дубровин, А.Р.Итс, В.Б.Матвеев, П.Лакс ва бошқаларнинг ишларида Хилл оператори учун тескари масала ёрдамида, манбасиз Кортевег-де Фриз тенгламаси, чекли зонали функциялар синфида тўлиқ интегралланувчанлиги исботланган.

Мосланган манбали Кортевег-де Фриз тенгламаси учун Коши масаласи тез камаювчи функциялар синфида илк бор В.К.Мельников, зинасимон функциялар синфида А.Б.Хасанов, Г.Ў.Ўразбоев, комплекс қийматли тез камаювчи функциялар синфида У.А.Хоитметов, даврий функциялар синфида эса А.Б.Хасанов, А.Б.Яхшимуратов томонидан ечилган. Мосланган манбали тенгламалар учун қўйилган турли масалалар Ж.Леон, А.Латифи ҳамда П.Г.Гриневич, И.А.Тайманов томонидан ўрганилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация иши Урганч давлат университетининг «Амалий математика» кафедраси илмий тадқиқот ишлари режаси асосида ва ОТ-Ф4-04(05) «Спектрал усулни матрицавий ночизиқли эволюцион тенгламаларни ечишга татбиқлари; Юрак қон томир тизими биомеханикаси» (2017-2018 йй.) мавзуларидаги илмий-тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади даврий коэффициентли дифференциал операторлар учун тескари спектрал масалалар ёрдамида мосланган манбали ночизиқли умумий Кортевег-де Фриз тенгламасини даврий функциялар синфида ечимини топишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

даврий функциялар синфида юкланган Кортевег-де Фриз тенгламасини интегралланувчанлигини исботлаш;

даврий функциялар синфида юқори тартибли ва юқори тартибли юкланган Кортевег-де Фриз тенгламаларини интегралланувчанлигини исботлаш;

даврий функциялар синфида мосланган манбали юкланган Кортевег-де Фриз тенгламасини интегралланувчанлигини исботлаш;

даврий функциялар синфида озод ҳади фазовий ўзгарувчига боғлиқ бўлмаган юқори тартибли Кортевег-де Фриз тенгламасини интегралланувчанлигини исботлаш;

даврий функциялар синфида мосланган манбали юқори тартибли Кортевег-де Фриз тенгламасини интегралланувчанлигини исботлаш;

Тадқиқот объекти. Ночизиқли умумий Кортевег-де Фриз тенгламалари, юкланган ночизиқли умумий Кортевег-де Фриз тенгламалари.

Тадқиқотнинг предмети даврий коэффициентли Штурм-Лиувилл тескари спектрал масаласининг ночизиқли эволюцион тенгламаларни интеграллашга татбиқларидан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида математик физика, спектрал анализ, функционал анализ ва комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси, дифференциал тенгламаларни ечиш усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

Хилл оператори ёрдамида интегралланувчи умумий ночизиқли эволюцион тенгламаларни келтириб чиқариш усули берилган;

даврий функциялар синфида юкланган Кортевег-де Фриз тенгламаси интегралланувчанлиги исботланган;

даврий функциялар синфида юқори тартибли, юқори тартибли юкланган Кортевег-де Фриз тенгламаларини интегралланувчанлиги исботланган;

даврий функциялар синфида мосланган манбали юкланган Кортевег-де Фриз тенгламасини интегралланувчанлиги исботланган;

даврий функциялар синфида озод ҳади фазовий ўзгарувчига боғлиқ бўлмаган юқори тартибли Кортевег-де Фриз тенгламасини интегралланувчанлиги исботланган;

даврий функциялар синфида мосланган манбали юқори тартибли Кортевег-де Фриз тенгламасини интегралланувчанлиги исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари. Ночизиқли умумий Кортевег-де Фриз тенгламаларига қўйилган Коши масалаларининг ечимларини топиш алгоритмлари ишлаб чиқилган бўлиб, тенгламалар ечимларининг фазовий ўзгарувчи бўйича аналитиклиги ҳақида олинган хулосалари сонли ҳисоблашларда қўлланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Даврий коэффициентли дифференциал операторлар учун тескари спектрал масалаларни ечиш ва уларни ночизиқли эволюцион тенгламаларни ечишга татбиқ қилишда математик физика, спектрал анализ, функционал анализ ва комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси усулларидан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг ва исботларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ишда олинган илмий натижалардан чизиқли операторлар спектрал назариясида, гидродинамикада ва квант физикасида фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Диссертация тадқиқотининг амалий аҳамияти ишда олинган илмий натижалардан математик физикада ночизиқли эволюцион тенгламаларни интеграллашга татбиқ қилиш билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши:

Мосланган манбали ночизиқли умумий Кортевег-де Фриз тенгламасини даврий функциялар синфида ечимини топиш асосида: мосланган манбали ночизиқли умумий Кортевег-де Фриз тенгламасини даврий функциялар синфида интеграллашга оид натижалар Словакия лойиҳалар агентлиги VEGAнинг «Qualitative properties and bifurcations of differential equations and dynamical systems» лойиҳасида юқори тартибли ночизиқли дифференциал тенгламаларни ечишда қўлланилган (Братислава университетининг 2018 йил 18 февралдаги маьлумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши мосланган манбали эллиптик типдаги эволюцион тенгламалар билан боғлиқ динамик системалар ҳолатлари ўзгаришини баҳолаш имконини берган.

Мосланган манбали ночизиқли Кортевег-де Фриз тенгламаларини даврий функциялар синфида интеграллашга оид олинган натижалар Урганч давлат университетининг Ф-4-61 рақамли «Мосланган манбали ночизиқли эволюцион тенгламаларни тескари масалалар усулида интеграллаш» лойиҳасида мосланган манбали эволюцион тенгламаларни ечишга татбиқ этилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва Ўрта Махсус таълим вазирлигининг 2017 йил 3 мартдаги №89-03-1064 сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши турли хилдаги ночизиқли эволюцион тенгламалар ечимини аниқлаш ва уларнинг хусусиятларини ўрганиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 8 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 2 та халқаро ва 6 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 17 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 6 та мақола, жумладан 2 таси хорижий ва 4 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 119 бетни ташкил этади.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар берилган.

Диссертациянинг **«Хилл оператори ва унинг татбиқлари ҳақида баъзи маълумотлар»** деб номланган биринчи бобида Хилл оператори учун тескари спектрал масала ёрдамида даврий функциялар синфида Кортевег-де Фриз тенгламасини интеграллаш усули келтирилган.

Биринчи бобнинг биринчи бўлимидан олтинчи бўлимигача, диссертация мазмунини очиб беришда ишлатиладиган, бутун ўқдаги Хилл оператори учун қўйилган тўғри ва тескари спектрал масалага оид бўлган маълумотлар келтирилган.

Қуйидаги Хилл операторини кўриб чиқамиз:

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda\, y\,, \quad x \in R\,, \tag{1}$$

бунда $q(x) \in C^1(R)$ – ҳақиқий π даврли функция. $c(x,\lambda)$ ва $s(x,\lambda)$ орқали (1) тенгламанинг $c(0,\lambda)=1$, $c'(0,\lambda)=0$ ва $s(0,\lambda)=0$, $s'(0,\lambda)=1$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимларини белгилаймиз. $\Delta(\lambda) = c(\pi,\lambda) + s'(\pi,\lambda)$ функцияга Ляпунов функцияси ёки Хилл дискриминанти дейилади. Қуйидаги

$$\psi_{\pm}(x,\lambda) = c(x,\lambda) + \frac{s'(\pi,\lambda) - c(\pi,\lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s(\pi,\lambda)}\, s(x,\lambda)$$

функцияга (1) тенгламанинг Флоке ечими деб аталади.

L операторнинг спектри қуйидаги тўпламдан иборат:

$$E = \{\lambda \in R:\ -2 \le \Delta(\lambda) \le 2\,\} = R \setminus \left\{ (-\infty, \lambda_0) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right\}.$$

Ушбу $(-\infty, \lambda_0)$, $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n = 1, 2, \ldots$ интервалларга лакуналар дейилади. Бу ерда λ_0, λ_{4k-1}, λ_{4k} сонлар (1) тенгламага қўйилган ($y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$) даврий, λ_{4k+1}, λ_{4k+2} сонлар эса ($y(0) = -y(\pi)$, $y'(0) = -y'(\pi)$) яримдаврий чегаравий масаланинг хос қийматлари.

ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$ орқали (1) тенглама учун қўйилган ($y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$) Дирихле чегаравий масаласининг хос қийматларини белгилаймиз. $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n = 1, 2, \ldots$ эканлигини кўриш қийин эмас.

Таъриф 1. ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$ сонлар билан $\sigma_n = sign\{s'(\pi, \xi_n) - c(\pi, \xi_n)\}$, $n = 1, 2, \ldots$ ишоралар кетма-кетлигига (1) операторнинг спектрал параметрлари дейилади.

Таъриф 2. Спектрнинг λ_n, $n=0,1,2,\ \ldots$ чегаралари ва ξ_n, σ_n, $n=1,2,\ \ldots$ спектрал параметрларга (1) операторнинг спектрал берилганлари дейилади.

Таъриф 3. (1) операторнинг спектрал берилганларини топиш масаласига тўғри масала дейилади, спектрал берилганлар бўйича $q(x)$ потенциални тиклаш масаласига эса тескари спектрал масала дейилади.

$q(x)$ – потенциал ўзининг $\{\lambda_{n-1},\ \xi_n,\ \sigma_n=\pm 1,\ n\geq 1\}$ спектрал берилганлари орқали ягона аниқланади.

Агар (1) тенгламада $q(x)$ ўрнида $q(x+\tau)$ ни қарасак, у ҳолда ҳосил бўлган операторнинг спектри τ параметрга боғлиқ бўлмайди: $\lambda_n(\tau)\equiv\lambda_n$, $n=0,1,2,\ \ldots$, спектрал параметрлар эса τ параметрга боғлиқ бўлади: $\xi_n=\xi_n(\tau)$, $\sigma_n=\sigma_n(\tau)$, $n=1,2,\ldots$. Бу спектрал параметрлар Дубровин дифференциал тенгламалар системасини қаноатлантиради:

$$\dot{\xi}_n=2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)h_n(\xi),$$

$$h_n(\xi)=\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}}\quad n=1,2,\ldots .$$

Бу ердаги $\sigma_n(\tau)=\pm 1$ ишора $\xi_n(\tau)$ спектрал параметр ўзининг $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$ лакунаси четига келганида қарама-қарши ишорага ўзгаради.

Дубровин дифференциал тенгламалар системаси ҳамда қуйидаги излар формуласи

$$q(\tau)=\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(\tau)),$$

биргаликда тескари спектрал масалани ечиш усулини беради.

1946 йилда Г.Борг фақат битта чегаравий шарт билан фарқ қилувчи иккита Штурм-Лиувилл чегаравий масаласини уларнинг спектрлари ёрдамида қуришнинг ягоналигини кўрсатган. Агар бу чегаравий масалаларда дифференциал тенгламалар умумий бўлиб, чегаравий шартлар ҳар хил бўлса, у ҳолда потенциални бир қийматли аниқлашнинг ягоналиги ҳақидаги теорема ўз кучини йўқотади.

2002 йилда V.Pierce[2] битта Штурм-Лиувилл тенгламасига қўйилган Дирихле ва Нейман чегаравий масалаларининг спектрлари ёрдамида потенциаллар оиласини қуриш усулини ишлаб чиқди.

Биринчи бобнинг еттинчи бўлимида V.Pierce усулидан фойдаланиб қуйидаги

$$-y''+q(x)y=\lambda y,\ y(0)=0,\ y'(\pi)=0$$

ва

$$-y''+q(x)y=\lambda y,\ y'(0)=0,\ y(\pi)=0$$

Штурм-Лиувилл чегаривий масалаларининг $\{a_n,\ n\geq 0\}$ ва $\{b_n,\ n\geq 0\}$ спектрлари орқали $q(x)\in C^1[0,\pi]$ потенциални тиклаш усули баён қилинган.

[2] Pierce V. Determining the potential of a Sturm-Liouville operator from its Dirichlet and Neumann spectra.// Pacific journal of mathematics, 2002. V. 204. N 2. P. 497-509.

Биринчи бобнинг саккизинчи бўлимида Хилл оператори учун тескари спектрал масала ёрдамида Кортевег-де Фриз тенгламасини даврий функциялар синфида интеграллаш усули келтирилган.

Ушбу

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x,\ x \in R,\ t > 0, \tag{2}$$

Кортевег-де Фриз тенгламасига қўйилган

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x) \tag{3}$$

Коши масаласини кўриб чиқамиз. Бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функция олдиндан берилган π даврли бўлиб, $q_0(x) \in C^3(R)$. Биз (2) тенгламанинг (3) бошланғич шартни ва қуйидаги

$$q(x,t) \in C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \ge 0) \tag{4}$$

силлиқлик шартларини қаноатлантирувчи, x ўзгарувчи бўйича π даврли

$$q(x+\pi,t) = q(x,t), \tag{5}$$

$q(x,t)$ ҳақиқий ечимини топиш билан шуғулланамиз.

Қуйидаги

$$L(t)y \equiv -y'' + q(x,t)y = \lambda\, y, \quad x \in R \tag{6}$$

Хилл тенгламасининг

$$c(0,\lambda,t) = 1,\ c'(0,\lambda,t) = 0\,; \qquad s(0,\lambda,t) = 0\,,\ s'(0,\lambda,t) = 1,$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимларини мос равишда $c(x,\lambda,t)$ ва $s(x,\lambda,t)$ орқали белгилаб оламиз. Шу билан бир қаторда (6) тенгламага қўйилган ушбу $y(0,t)=0,\ \ y(\pi,t)=0$ Дирихле чегаравий масаласининг хос қийматларини $\xi_j(t),\ j=1,2,...$ орқали ва уларга мос келувчи ортонормалланган хос функцияларини $y_j(x,t)$ орқали белгилаймиз. λ_k, $(k \ge 0)$ орқали (6) тенглама учун қўйилган даврий ёки яримдаврий масалаларнинг хос қийматларини белгилаймиз.

Биринчи боб саккизинчи бўлимининг асосий натижаси қуйидаги теоремада ифодаланган.

Теорема 1. Агар $q(x,t)$ функция (2)-(5) масаланинг ечими бўлса, у ҳолда $q(x+\tau,t)$ потенциалли Хилл операторининг спектри τ ва t параметрларга боғлиқ бўлмайди, $\xi_n(\tau,t)$, $n=1,2,...$ спектрал параметрлар эса Дубровин тенгламалар системаси аналогини қаноатлантиради:

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi) \{2q(\tau,t) + 4\xi_n(\tau,t)\},\ \ n=1,2,3,... \,. \tag{7}$$

Дубровин дифференциал тенгламалар системаси аналогини қаноатлантиради. Бу ерда $\sigma_n = \sigma_n(\tau,t) = \pm 1$ ишора $\xi_n = \xi_n(\tau,t)$ спектрал параметр $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$ ўз лакунасининг четига келганида қарама-қаршисига ўзгаради.

Изоҳ 1. Қуйидаги излар формуласи

$$q(\tau,t) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau,t)) \tag{8}$$

ёрдамида (7) системани ёпиқ кўринишда ёзиш мумкин.

Натижа 1. (7) система ва (8) излар формуласи (2)-(5) масалани ечиш усулини беради. Бунинг учун аввало (6) Хилл тенгламасининг $q_0(x+\tau)$ потенциалига мос келувчи λ_n, $n \ge 0$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \ge 1$ спектрал берилганларини аниқлаймиз. Сўнгра, (7) Дубровин тенгламалар системаси учун $\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau)$, $n \ge 1$ Коши масаласини ечиб, (8) излар формуласи бўйича $q(\tau,t)$ ни топамиз.

Натижа 2. Агар бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функция ҳақиқий аналитик бўлса, у ҳолда бу потенциалга мос келувчи лакуналар узунликлари экспоненциал камаяди. Бу лакуналар $q(x,t)$ потенциалга ҳам мос келади, шунинг учун $q(x,t)$ ечим x ўзгарувчи бўйича ҳақиқий аналитик бўлади.

Натижа 3. Агар бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функция π / n даврга эга бўлса, у ҳолда унга мос келувчи номерлари n га каррали бўлмаган барча чекли лакуналар ёпилади. Бу лакуналар $q(x,t)$ потенциалга ҳам мос келади. Шунинг учун $q(x,t)$ ечим x ўзгарувчи бўйича π / n даврга эга бўлади. Бу ерда $n \ge 2$ натурал сон ва $(\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k})$ лакунанинг номери k.

Диссертациянинг **«Даврий функциялар синфида юкланган ва юқори тартибли Кортевег-де Фриз тенгламасини интеграллаш»** деб номланган иккинчи бобида Хилл оператори ёрдамида интегралланувчи юқори тартибли ночизиқли тенгламаларни келтириб чиқаришнинг содда усули берилган. Даврий функциялар синфида юкланган Кортевег-де Фриз тенгламаси, даврий функциялар синфида юқори тартибли Кортевег-де Фриз тенгламаси, даврий функциялар синфида юқори тартибли юкланган Кортевег-де Фриз тенгламаси тўла интегралланувчанлиги исботланган.

Иккинчи бобнинг биринчи бўлимида Хилл оператори ёрдамида интегралланувчи қуйидаги

$$q_t = \frac{1}{2} c_N''' - 2qc_N' - q_x c_N, \ x \in R, \ t > 0, \qquad (9)$$

ночизиқли тенглама келтириб чиқарилган. Бу тенгламага юқори тартибли Кортевег-де Фриз тенгламаси дейилади. Бу ерда $c_N = c_N(x,t)$ функция $q = q(x,t)$ орқали қуйидагича тузилади: берилган $d_k = d_k(t)$, $k = 0,1, \dots, N$ узлуксиз функциялар ёрдамида қуйидаги функцияларни тузамиз

$$c_0 = d_0, \ c_{k+1} = -\frac{1}{4} c_k'' + qc_k - \frac{1}{2} \int_0^x q_x c_k dx + d_{k+1}, \ k = 0,1,\dots,N-1.$$

Масалан,

$$c_1 = \frac{1}{2} d_0 [q + q(0,t)] + d_1,$$

$$c_2 = \frac{1}{8} d_0 [-q_{xx} + 3q^2 + 2qq(0,t) + 3q^2(0,t)] + \frac{1}{2} d_1 [q + q(0,t)] + d_2$$

ва ҳоказо.

Агар $N = 1$ бўлса, у ҳолда (9) тенглама

$$q_t = \frac{1}{4}[q_{xxx} - 6qq_x]d_0 - \frac{1}{2}[2d_1 + d_0 q(0,t)]q_x$$
кўринишда бўлади. Хусусан, агар $d_0 = 0$, $d_1 = -1$ бўлса,
$$q_t = q_x$$
тенглама ва $d_0 = 4$, $d_1 = -2q(0,t)$ бўлса ушбу
$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x$$
одатдаги Кортевег-де Фриз тенгламаси ҳосил бўлади.

Агар $N = 2$ бўлса, у ҳолда (9) тенглама ушбу
$$q_t = -\frac{1}{16}d_0(q_{xxxxx} - 10qq_{xxx} - 20q_x q_{xx} + 30q^2 q_x) +$$
$$+\frac{1}{8}[d_0 q(0,t) + 2d_1](q_{xxx} - 6qq_x) - \frac{1}{8}[3d_0 q^2(0,t) + 4d_1 q(0,t) + 8d_2]q_x,$$
кўринишни олади. Хусусан, $d_0 = -16$, $d_1 = 8q(0,t)$, $d_2 = 2q^2(0,t)$ бўлса, ушбу
$$q_t = q_{xxxxx} - 10qq_{xxx} - 20q_x q_{xx} + 30q^2 q_x, \tag{10}$$
ночизиқли тенглама ҳосил бўлади.

Агар $N = 1$ бўлиб, $d_0 = 4$, $d_1(t) = c(t)q(0,t)$ бўлса, ушбу
$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x + \gamma(t)q(0,t)q_x$$
юкланган Кортевег-де Фриз тенгламасига эга бўламиз. Худди шундай бошқа юкланган Кортевег-де Фриз тенгламаларини ҳосил қилиш мумкин.

Иккинчи бобнинг иккинчи бўлимида юкланган Кортевег-де Фриз тенгламаси даврий функциялар синфида интегралланган. Ушбу
$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x + \gamma(t)\cdot q\big|_{x=0}\cdot q_x, \quad x \in R,\ t > 0 \tag{11}$$
юкланган Кортевег-де Фриз тенгламасига қўйилган
$$q(x,t)\big|_{t=0} = q_0(x) \tag{12}$$
Коши масаласини кўриб чиқамиз. Бу ерда $\gamma(t)$ берилган ҳақиқий узлуксиз функция ва бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функция олдиндан берилган π даврли бўлиб, $q_0(x) \in C^3(R)$. Қуйидаги теорема (11) тенгламанинг (12) бошланғич шартни ва қуйидаги
$$q(x,t) \in C_x^3(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0), \tag{13}$$
силлиқлик шартини қаноатлантирувчи, x ўзгарувчи бўйича π даврли
$$q(x+\pi,t) \equiv q(x,t), \quad x \in R,\ t > 0 \tag{14}$$
$q = q(x,t)$ ҳақиқий ечимини топиш алгоритмини беради.

Теорема 2. Агар $q(x,t)$ функция (11)-(14) Коши масаласининг ечими бўлса, у ҳолда
$$L(\tau,t)y \equiv -y'' + q(x+\tau,t)y = \lambda y, \quad x \in R \tag{15}$$
оператор спектрининг чегаралари, яъни λ_n, $n \geq 0$ сонлар τ ва t параметрларга боғлиқ бўлмайди, $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$ $n \geq 1$ спектрал параметрлар эса қуйидаги

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t)[2q(\tau,t) - \gamma(t)q(0,t) + 4\xi_n]h_n(\xi), \quad n \geq 1 \tag{16}$$

Дубровин тенгламалар системасининг анологини қаноатлантиради. Бу ерда $\sigma_n(\tau,t) = \pm 1$ ишоралар $\xi_n(\tau,t)$ спектрал параметр $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$ ўз лакунасининг четига келганида қарама-қаршисига ўзгаради. Бундан ташқари қуйидаги бошланғич шартлар бажарилади:

$$\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \;\; \sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \geq 1, \tag{17}$$

бунда $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$ $n \geq 1$ кетма-кетлик $q_0(x+\tau)$ коэффициентли Хилл операторининг спектрал параметрлари.

Изоҳ 2. (8) излар формуласи ёрдамида (16) системани ёпиқ кўринишда ёзиш мумкин.

Натижа 4. Бу теорема (11)-(14) масалани ечиш усулини беради. Дастлаб ушбу

$$-y'' + q_0(x+\tau)y = \lambda y, \quad x \in R$$

тенгламанинг λ_n, $n \geq 0$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \geq 1$ спектрал берилганларини топамиз. Сўнгра $\tau = 0$ да (16)+(17) Коши масаласини ечиб $\xi_n(0,t)$, $n \geq 1$ ларни аниқлаймиз. Бу топилганларни (16) тенгламага қўйиб ихтиёрий τ да яна (16)+(17) Коши масаласини ечиб $\xi_n(\tau,t)$, $n \geq 1$ ларни топиб, (8) излар формуласидан $q(\tau,t)$ ни аниқлаймиз.

Натижа 5. Агар бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функция ҳақиқий аналитик бўлса, у ҳолда $q(x,t)$ ечим ҳам x бўйича ҳақиқий аналитик бўлади.

Натижа 6. Агар π/n сони бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функциянинг даври бўлса, у ҳолда π/n сони $q(x,t)$ ечимнинг ҳам x бўйича даври бўлади. Бу ерда $n \geq 2$ натурал сон.

Иккинчи бобнинг учинчи бўлимида даврий функциялар синфида юқори тартибли Кортевег-де Фриз тенгламаси интегралланган.

Қуйидаги

$$q_t = \frac{1}{2}c_N''' - 2qc_N' - q_x c_N, \; x \in R, \; t > 0 \tag{18}$$

тенгламани ушбу

$$q(x,t)\big|_{t=0} = q_0(x) \tag{19}$$

бошланғич шарт билан кўриб чиқамиз. Бу ерда $q_0(x) \in C^{2N+1}(R)$ - берилган ҳақиқий π даврли функция. (18) тенглама ва (19) бошланғич шартни ҳамда

$$q(x,t) \in C_x^{2N+1}(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0) \tag{20}$$

силлиқлик шартларини қаноатлантирувчи, x ўзгарувчи бўйича π даврли

$$q(x+\pi,t) \equiv q(x,t), \quad t \geq 0, \quad x \in R \tag{21}$$

бўлган $q(x,t)$ ҳақиқий функцияни топиш масаласини қарайлик.

Бу бўлимнинг асосий натижаси қуйидаги теоремада баён қилинган:

Теорема 3. $q(x,t)$ функция (18)-(21) масаланинг ечими бўлсин. У ҳолда, (6) Хилл операторининг спектри t параметрга боғлиқ бўлмайди, $\xi_n(t)$, $\sigma_n(t)$,

$n=1,2,\ldots$ спектрал параметрлар эса қуйидаги

$$\dot{\xi}_n = 2(-1)^n \sigma_n(t)\left\{\sum_{k=0}^{N} c_k(0,t)\xi_n^{N-k}\right\} h_n(\xi), \quad n \ge 1 \tag{22}$$

Дубровин тенгламалар системаси аналогини қаноатлантиради. Бунда $\sigma_n(t)=\pm 1$ ишора $\xi_n(t)$ спектрал параметр ўзининг $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$ лакунаси четига келганида қарама-қаршисига ўзгаради.

Натижа 7. Агар $q(x,t)$ ўрнида $q(x+\tau,t)$ функцияни қарасак, у ҳолда даврий ва яримдаврий масалаларнинг хос қийматлари τ ва t га боғлиқ бўлмайди, спектрал параметрлар эса τ ва t га боғлиқ бўлади: $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n=1,2,\ldots$. Бу ҳолда (22) Дубровин системаси қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\left\{\sum_{k=0}^{N} c_k(\tau,t)\xi_n^{N-k}\right\} h_n(\xi),\ n \ge 1. \tag{23}$$

Натижа 8. (18) тенгламада $N=2$ бўлса, у (10) кўринишни, (23) Дубровин тенгламалар системаси эса ушбу

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 4(-1)^n \sigma_n(\tau,t)\left\{8\xi_n^2 + 4\xi_n q - q_{\tau\tau} + 3q^2\right\} h_n(\xi), \quad n \ge 1 \tag{24}$$

кўринишни олади. (8) ва ушбу

$$q^2(\tau,t) - \frac{1}{2} q_{\tau\tau}(\tau,t) = \lambda_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2 - 2\xi_k^2(\tau,t)) \tag{25}$$

излар формуласи ёрдамида (24) Дубровин тенгламалар системасини ёпиқ кўринишда ёзиш мумкин.

Натижа 9. Юқоридаги (24) Дубровин тенгламалар системаси ва (25) излар формуласи (10), (18)-(21) масаланинг ечимини топиш усулини беради.

Натижа 10. Агар бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функция ҳақиқий аналитик бўлса, у ҳолда $q(x,t)$ ечим ҳам x бўйича ҳақиқий аналитик бўлади.

Натижа 11. Агар π/n сони бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функциянинг даври бўлса, у ҳолда π/n сони $q(x,t)$ ечимнинг ҳам x бўйича даври бўлади. Бу ерда $n \ge 2$ натурал сон.

Иккинчи бобнинг тўртинчи бўлимида даврий функциялар синфида юқори тартибли юкланган Кортевег-де Фриз тенгламаси интегралланган.

Қуйидаги

$$q_t = \frac{1}{2} c_N''' - 2qc_N' - q_x c_N + \gamma(t)\cdot q\big|_{x=0}\cdot q_x,\ x \in R,\ t > 0 \tag{26}$$

тенгламани ва (19)-(21) шартларни қаноатлантирувчи $q(x,t)$ ҳақиқий функцияни топиш масаласини кўриб чиқамиз.

Иккинчи боб тўртинчи бўлимининг асосий натижаси қуйидаги теоремада ифодаланган.

Теорема 4. $q(x,t)$ функция (26), (19)-(21) масаланинг ечими бўлсин. У ҳолда, (15) оператор спектрининг чегаралари, яъни λ_n, $n \ge 0$, сонлар τ ва t

параметрга боғлиқ бўлмайди, $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n\ge 1$ спектрал параметрлар эса Дубровин тенгламалар системасининг қуйидаги аналогини

$$\dot{\xi}_n = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t)\left\{\sum_{k=0}^{N} c_k(\tau,t)\xi_n^{N-k} - \gamma(t)q(0,t)\right\}h_n(\xi), \quad n\ge 1 \tag{27}$$

қаноатлантиради. Бунда $\sigma_n(\tau,t)=\pm 1$ ишора $\xi_n(\tau,t)$ спектрал параметр $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$ ўз лакунасининг четига келганида қарама-қаршисига ўзгаради, ҳамда (17) бошланғич шартлар бажарилади.

Натижа 12. (26) тенгламада $N=2$, $d_0=-16$, $d_1=8q(0,t)$, $d_2=2q^2(0,t)-\gamma(t)q(0,t)$ бўлса, у ҳолда (26) дифференциал тенглама ушбу

$$q_t = q_{xxxxx} - 10qq_{xxx} - 20q_x q_{xx} + 30q^2 q_x + \gamma(t)q(0,t)q_x \tag{28}$$

кўринишни, (27) Дубровин тенгламалар системаси эса ушбу

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 4(-1)^n \sigma_n(\tau,t)\left\{8\xi_n^2 + 4\xi_n q - q_{\tau\tau} + 3q^2 - \gamma(t)q(0,t)\right\}h_n(\xi), \quad n\ge 1 \tag{29}$$

кўринишни олади. (8) ва (25) излар формулалари ёрдамида (29) Дубровин тенгламалар системасини ёпиқ кўринишда ёзиш мумкин.

Натижа 13. (29) Дубровин тенгламалар системаси ва (8) излар формуласи (28), (19)-(21) масаланинг ечимини топиш усулини беради.

Натижа 14. Агар бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функция ҳақиқий аналитик бўлса, у ҳолда $q(x,t)$ ечим ҳам x бўйича ҳақиқий аналитик бўлади.

Натижа 15. Агар π/n сони бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функциянинг даври бўлса, у ҳолда π/n сони $q(x,t)$ ечимнинг ҳам x бўйича даври бўлади. Бу ерда $n\ge 2$ натурал сон.

Диссертациянинг **«Даврий функциялар синфида мосланган манбали юқори тартибли Кортевег-де Фриз тенгламасини интеграллаш»** деб номланган учинчи бобида Хилл оператори учун қўйилган тескари спектрал масала ёрдамида, даврий функциялар синфида мосланган манбали Кортевег-де Фриз тенгламасини интеграллаш усули келтирилган, даврий функциялар синфида мосланган манбали юкланган Кортевег-де Фриз тенгламаси, даврий функциялар синфида озод ҳади фазовий ўзгарувчига боғлиқ бўлмаган юқори тартибли Кортевег-де Фриз тенгламаси, даврий функциялар синфида мосланган манбали юқори тартибли Кортевег-де Фриз тенгламаси тўла интегралланувчанлиги исботланган.

Учинчи бобнинг биринчи бўлимида даврий функциялар синфида мосланган манбали юкланган Кортевег-де Фриз тенгламаси тўла интегралланувчанлиги исботланган.

Қуйидаги

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x + \gamma(t)q(0,t)q_x +$$
$$+2\int_0^\infty \beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t)\left(\psi_+(x,\lambda,t)\psi_-(x,\lambda,t)\right)_x d\lambda,\ t>0, x\in R \tag{30}$$

мосланган манбали юкланган Кортевег-де Фриз тенгламасини (12)-(14) шартни қаноатлантирувчи ҳақиқий $q=q(x,t)$ ечимини топиш талаб қилинади. Бу ерда $\gamma(t)$ берилган ҳақиқий узлуксиз функция ҳамда $\beta(\lambda,t)\in C([0,\infty)\times[0,\infty))$ - берилган ҳақиқий функция бўлиб, ушбу $\beta(\lambda,t)=O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, $\lambda\to\infty$ асимптотикани текис қаноатлантиради. $\psi_{\pm}(x,\lambda,t)$ орқали (6) Хилл тенгламасининг ($\psi_{\pm}(0,\lambda,t)=1$ шарт билан нормалланган) Флоке ечимлари белгиланган.

Теорема 6. Агар $q(x,t)$, $\psi_{\pm}(x,\lambda,t)$ функциялар (30), (12)-(14) масаланинг ечими бўлса, у ҳолда (15) оператор спектрининг чегаралари, яъни λ_n, $n\geq 0$, сонлар τ ва t параметрларга боғлиқ бўлмайди, $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n\geq 1$ спектрал параметрлар эса Дубровин тенгламалар системасининг қуйидаги аналогини

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial t}=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi)\times$$

$$\times\left\{2q(\tau,t)+4\xi_n-\gamma(t)q(0,t)+\int_0^{\infty}\frac{\beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_n-\lambda}d\lambda\right\},\ n=1,2,... \tag{31}$$

қаноатлантиради. Бу ерда $\sigma_n(\tau,t)=\pm1$ ишора $\xi_n(\tau,t)$ спектрал параметр $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$ ўз лакунасининг четига келганида қарама-қаршисига ўзгаради, ҳамда (17) бошланғич шартлар бажарилади.

Изоҳ 4. Агар (8) излар формуласидан фойдалансак, (31) система ёпиқ кўринишда ёзилади.

Натижа 16. Бу теорема (30), (12)-(14) масалани ечиш усулини беради.

Натижа 17. Агар бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функция ҳақиқий аналитик бўлса, у ҳолда $q(x,t)$ ечим ҳам x бўйича ҳақиқий аналитик бўлади.

Натижа 18. Агар π/n сони бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функциянинг даври бўлса, у ҳолда π/n сони $q(x,t)$ ечимнинг ҳам x бўйича даври бўлади. Бу ерда $n\geq 2$ натурал сон.

Учинчи бобнинг иккинчи бўлимида даврий функциялар синфида озод ҳади фазовий ўзгарувчига боғлиқ бўлмаган юқори тартибли Кортевег-де Фриз тенгламаси тўла интегралланувчанлиги исботланган.

Қуйидаги

$$q_t=\frac{1}{2}c_N'''-2qc_N'-q_x c_N+f(t),\ x\in R,\ t>0 \tag{32}$$

озод ҳади фазовий ўзгарувчига боғлиқ бўлмаган юқори тартибли Кортевег-де Фриз тенгламасини ва (19)-(21) шартларни қаноатлантирувчи $q(x,t)$ ҳақиқий функцияни топиш масаласини кўриб чиқамиз. Бу ерда $f(t)\in C[0,\infty)$ берилган ҳақиқий функция.

Теорема 7. $q(x,t)$ функция (32), (19)-(21) масаланинг ечими бўлсин. У ҳолда, (6) Хилл оператори спектрининг чегаралари λ_n, $n\geq 0$ ушбу

$$\dot{\lambda}_n(t)=f(t),\ n\geq 0, \tag{33}$$

тенгламалар системасини қаноатлантиради, $\xi_n(t)$, $\sigma_n(t)$, $n=1,2,...$ спектрал параметрлари эса қуйидаги

$$\dot{\xi}_n = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(t)\left\{\sum_{k=0}^{N} c_k(0,t)\xi_n^{N-k}\right\}h_n(\xi) + f(t), \quad n \ge 1 \qquad (34)$$

Дубровин тенгламалар системасининг аналогини қаноатлантиради. Бунда $\sigma_n(t) = \pm 1$ ишора $\xi_n(t)$ спектрал параметр ўзининг $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$ лакунаси четига келганида қарама-қаршисига ўзгаради. Бундан ташқари қуйидаги бошланғич шартлар бажарилади:

$$\xi_n(t)\big|_{t=0} = \xi_n^0, \ \ \sigma_n(t)\big|_{t=0} = \sigma_n^0 \ , \quad n \ge 1, \qquad (35)$$

бунда ξ_n^0, σ_n^0 $n \ge 1$ - кетма-кетликлар $q_0(x)$ коэффициентли Хилл операторига мос келувчи спектрал параметрлардир.

Натижа 19. Агар $q(x,t)$ ўрнида $q(x+\tau,t)$ функцияни қарасак, у ҳолда даврий ва яримдаврий чегаравий масалаларнинг хос қийматлари фақат t га боғлиқ бўлиб, (33) тенгламалар системасини қаноатлантиради, спектрал параметрлар эса τ ва t га боғлиқ бўлади: $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n=1,2,...$. Бу ҳолда (34) Дубровин системаси қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi)\left\{\sum_{k=0}^{N} c_k(\tau,t)\xi_n^{N-k}\right\} + f(t), \ n=1,2,... \ . \qquad (36)$$

Натижа 20. (32) тенгламада $N=2$ бўлсин, у ҳолда бу тенглама

$$q_t = \frac{1}{4}q_{xxxxx} - 5q_x q_{xx} - \frac{5}{2}qq_{xxx} + \frac{15}{2}q^2 q_x + f(t) \qquad (37)$$

кўринишда ва (36) Дубровин тенгламалар системаси

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\left\{4\xi_n^2 + 2\xi_n q - \frac{1}{2}q_{\tau\tau} + \frac{3}{2}q^2\right\}h_n(\xi) + f(t), \quad n \ge 1 \ (38)$$

кўринишда бўлиб, уни (8) ва (25) излар формулалари ёрдамида ёпиқ кўринишда ёзиш мумкин.

Натижа 21. (38) Дубровин тенгламалар системаси ва излар формулалари (37), (19)-(21) масалани ечиш усулини беради.

Натижа 22. Агар бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функция ҳақиқий аналитик бўлса, у ҳолда $q(x,t)$ ечим ҳам x бўйича ҳақиқий аналитик бўлади.

Натижа 23. Агар π/n сони бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функциянинг даври бўлса, у ҳолда π/n сони $q(x,t)$ ечимнинг ҳам x бўйича даври бўлади. Бу ерда $n \ge 2$ натурал сон.

Учинчи бобнинг учинчи бўлимида даврий функциялар синфида мосланган манбали юқори тартибли Кортевег-де Фриз тенгламаси тўла интегралланувчанлиги исботланган.

Қуйидаги

$$q_t = \frac{1}{2}c_N''' - 2qc_N' - q_x c_N +$$

$$+2\int_0^\infty \beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t)\left(\psi_+(x,\lambda,t)\cdot\psi_-(x,\lambda,t)\right)_x d\lambda\,,\ x\in R,\ t>0 \qquad (39)$$

мосланган манбали юқори тартибли Кортевег-де Фриз тенгламасининг (19)-(21) шартларни қаноатлантирувчи $q(x,t)$ ҳақиқий ечимини топиш масаласини кўриб чиқамиз.

Теорема 8. ($q(x,t)$, $\psi_\pm(x,\lambda,t)$) функциялар (39), (19)-(21) масаланинг ечими бўлсин. У ҳолда, (6) Хилл операторининг спектри t параметрга боғлиқ бўлмайди, $\xi_n(t)$, $\sigma_n(t)$, $n=1,2,...$ спектрал параметрлар эса қуйидаги

$$\dot{\xi}_n = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(t)\left\{\sum_{k=0}^{N} c_k(0,t)\xi_n^{N-k} + \int_0^\infty \frac{s(\pi,\lambda,t)\beta(\lambda,t)}{\lambda-\xi_n}d\lambda\right\}h_n(\xi),\quad n\ge 1 \quad (40)$$

Дубровин тенгламалар системасининг аналогини қаноатлантиради. Бунда $\sigma_n(t)=\pm 1$ ишора $\xi_n(t)$ спектрал параметр ўзининг $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$ лакунаси четига келганида қарама-қаршисига ўзгаради, ҳамда (35) бошланғич шартлар бажарилади.

Натижа 24. Агар $q(x,t)$ ўрнида $q(x+\tau,t)$ функцияни қарасак, у ҳолда даврий ва яримдаврий чегаравий масалаларнинг хос қийматлари τ ва t га боғлиқ бўлмайди, спектрал параметрлар эса τ ва t га боғлиқ бўлади: $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n=1,2,...$. Бу ҳолда (40) Дубровин системаси қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi)\left\{\sum_{k=0}^{N} c_k(\tau,t)\xi_n^{N-k} + \int_0^\infty \frac{\beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_n-\lambda}d\lambda\right\},\ n\ge 1. \quad (41)$$

Натижа 25. (39) тенгламада $N=2$ бўлсин, у ҳолда бу тенглама

$$q_t = \frac{1}{4}q_{xxxxx} - 5q_x q_{xx} - \frac{5}{2}qq_{xxx} + \frac{15}{2}q^2 q_x +$$

$$+2\int_0^\infty \beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t)\left(\psi_+(x,\lambda,t)\cdot\psi_-(x,\lambda,t)\right)_x d\lambda\,,\ x\in R,\ t>0 \qquad (42)$$

кўринишда ва (41) Дубровин тенгламалар системаси

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial t} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\left\{4\xi_n^2 + 2\xi_n q - \frac{1}{2}q_{\tau\tau} + \frac{3}{2}q^2 + \int_0^\infty \frac{s(\pi,\lambda,t,\tau)\beta(\lambda,t)}{\lambda-\xi_n}d\lambda\right\}h_n(\xi),$$

$$n\ge 1. \quad (43)$$

кўринишда бўлиб, уни (8) ва (25) излар формулалари ёрдамида ёпиқ кўринишда ёзиш мумкин.

Натижа 26. (43) Дубровин тенгламалар системаси ва излар формулалари (42), (19)-(21) масалани ечиш усулини беради.

Натижа 27. Агар бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функция ҳақиқий аналитик бўлса, у ҳолда $q(x,t)$ ечим ҳам x бўйича ҳақиқий аналитик бўлади.

Натижа 28. Агар π/n сони бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функциянинг даври бўлса, у ҳолда π/n сони $q(x,t)$ ечимнинг ҳам x бўйича даври бўлади. Бу ерда $n\ge 2$ натурал сон.

Муаллиф, ўзининг илмий маслаҳатчиси профессор Хасанов Акназар Бекдурдиевичга доимий эътибори ҳамда мазкур диссертация натижаларини муҳокамасидаги қимматли маслаҳатлари учун самимий миннатдорчилигини билдиради.

ХУЛОСА

Диссертация иши Хилл оператори учун тўғри ва тескари спектрал назарияси масалаларини мосланган манбали ночизиқли юқори тартибли Кортевег-де Фриз тенгламасини даврий функциялар синфида интеграллашга татбиқ қилишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Хилл оператори ёрдамида интегралланувчи юқори тартибли ночизиқли тенгламаларни келтириб чиқаришнинг содда усули берилган.

2. Даврий функциялар синфида юкланган Кортевег-де Фриз тенгламаси тўла интегралланувчанлиги исботланган.

3. Даврий функциялар синфида юқори тартибли Кортевег-де Фриз тенгламасига қўйилган Коши масаласининг ечимини топиш алгоритми ишлаб чиқилган.

4. Даврий функциялар синфида юқори тартибли юкланган Кортевег-де Фриз тенгламасининг интегралланувчанлиги кўрсатилган.

5. Даврий функциялар синфида мосланган манбали юкланган Кортевег-де Фриз тенгламасининг тўла интегралланувчанлиги исботланган.

6. Даврий функциялар синфида озод ҳади фазовий ўзгарувчига боғлиқ бўлмаган юқори тартибли Кортевег-де Фриз тенгламасига қўйилган Коши масаласи ечилган.

7. Даврий функциялар синфида мосланган манбали юқори тартибли Кортевег-де Фриз тенгламасининг тўла интегралланувчанлиги исботланган.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.28.12.2017.FM.55.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ПРИ УРГЕНЧСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ, КАРАКАЛПАКСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

УРГЕНЧСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЯКУБОВ МУХАММАД МАХСУДОВИЧ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЩЕГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С САМОСАГЛОСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

**01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика
(физико-математические науки)**

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

УРГЕНЧ – 2018

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2017.3.PhD/FM110.

Диссертация выполнена в Ургенчском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-mat.urdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный руководитель:	**Хасанов Акназар Бекдурдиевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Тахиров Жозил Останович** доктор физико-математических наук, профессор
	Хоитметов Умид Азадович кандидат физико-математических наук
Ведущая организация:	**Национальный университет Узбекистана**

Защита диссертации состоится «____» __________2018 года в ____ часов на заседании Научного совета PhD.28.12.2017.FM.55.01 при Ургенчском государственном университете, Каракалпакском государственном университете. (Адрес: 220100, г. Ургенч, ул. Х. Алимджана, дом 14. Тел.: (99862)224-66-11, факс: (99862) 224-67-00, e-mail: ik-mat.urdu@umail.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Ургенчского государственного университета (зарегистрирована за №____). (Адрес: 220100, г. Ургенч, ул. Х. Алимджана, дом 14. Тел.: (99862) 224-66-11, факс: (99862) 224-67-00).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2018 года.
(протокол рассылки №________ от «____» _______________2018 года).

Б.И.Абдуллаев
Председатель Научного совета по
присуждению ученой степени, д.ф.-м.н.

А.А.Атамуратов
Ученый секретарь Научного совета по
присуждению ученой степени, к.ф.-м.н.

А.Б.Яхшимуратов
Председатель научного семинара
при Научном совете по присуждению
ученой степени, д.ф.-м.н.

ВВЕДЕНИЕ(аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Статистический анализ результатов многих международных научно-практических исследований мира показывает актуальность изучения нелинейных уравнений с самосогласованным источником. Прямые и обратные задачи спектрального анализа возникают в различных областях природы, в таких как небесная механика, при определении внутренних сил атомов по известным уровням энергии в квантовой механике, радиотехнике, теории упругости, при изучении процесса вибрации эллиптической мембраны, моделировании кристаллических структур твердых тел и при определении решений нелинейных эволюционных уравнений современной математической физики. Таким образом, проблема интегрирования общего уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником остаётся важной в теории спектральных задач.

В настоящее время в мире, исследования в теории нелинейных волн начали использоваться, в частности в области телекоммуникационных технологий оптических солитонов. Реальные физические системы характеризуются уравнениями с самосогласованным источником, являющимся одной из модификацией классических уравнений. Кроме того, силы, действующие на физические системы, ограничены только в течение определенного периода времени, поэтому реальные модели приводятся к изучению уравнений в классе периодических и почти периодических функций по пространственным переменным. Применение обратных задач спектрального анализа к различным вопросам нелинейной оптики, физики плазмы, гидродинамики и других областей является одним из приоритетных направлений. В этом отношении считается научно-целевым исследованием решение нелинейного общего уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником, нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза, уравнений Кортевега-де Фриза высших порядков, высшего уравнения Кортевега-де Фриза со свободным членом независящим от пространственной переменной, в классе периодических функций.

В нашей стране особое внимание уделяется фундаментальным наукам, которые имеют практическое применение. В частности, особое внимание было уделено анализу исследования в теории нелинейных волн, спектральной теории дифференциальных операторов и задачам математической физики. Вследствие этого достигнуты значительные результаты для полной интегрируемости нелинейных эволюционных уравнений математической физики при помощи прямых и обратных спектральных задач. Основными задачами и направлениями деятельности являются научные исследования на уровне международных стандартов в области математики, физики и современных методов математической физики[3]. При обеспечении исполнения этих решений имеет большое значение развитие теории обратных спектралных задач, интегрирование нелинейных уравнений с самосогласованным источником.

Эта диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан №-ПП-2909 «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования» от 20 апреля 2017 года, №-ПП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года и №-УП-4947 «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 7 февраля 2017 года, а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом изучалась И.В.Станкевичем, В.А.Марченко, И.В.Островским, Х.П.Мак-Кином, Е.Трубовицом, Х.Хохштадтом, Б.Гребертом, Т.Каппелер, J.Pöschel, Е.Коротяев, Х.Флашка.

В работах С.П.Новикова, Б.А.Дубровина, А.Р.Итса, В.Б.Матвеева, П.Лакса и других была доказана полная интегрируемость уравнения Кортевега-де Фриза без источника с помощью обратной задачи для оператора Хилла, в классе конечнозонных функций.

Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе “быстроубывающих” функций, впервые была рассмотрена в работах В.К.Мельникова, в классе “ступенчатых” функций А.Б.Хасановым и Г.У.Уразбоевым, в классе комплекснозначных функций У.А.Хоитметовым, а в классе периодических функций А.Б.Хасановым и А.Б.Яхшимуратовым. Различные нелинейные уравнения с самосогласованным источником рассматривались в работах Ж.Леона, А.Латифи, П.Г.Гриневича и И.А.Тайманова.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполняется диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ кафедры «Прикладная математика» Ургенчского государственного университета и в рамках научно-исследовательского проекта Ургенчского государственного университета по теме ОТ-Ф4-04(05) «Применение спектрального метода к решению матричных нелинейных эволюционных уравнений; Биомеханика сердечно-сосудистой системы» (2017-2018 гг.).

---

[3] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан №292 “О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений академии наук Республики Узбекистан” от 18 мая 2017 года.

Цель исследования нахождение решений нелинейных общих уравнений Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций с помощью обратных спектральных задач для дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами.

Задачи исследования:

доказать интегрируемость нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических функций;

доказать интегрируемость высшего и нагруженного высшего уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических функций;

доказать интегрируемость нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций;

доказать интегрируемость высшего уравнения Кортевега-де Фриза со свободным членом независящим от пространственной переменной в классе периодических функций;

доказать интегрируемость высшего уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций.

Объект исследования. Нелинейное общее уравнение Кортевега-де Фриза, нагруженное нелинейное высшее уравнение Кортевега-де Фриза.

Предмет исследования. Применение спектральной задачи Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом к интегрированию нелинейных эволюционных уравнений.

Методы исследования. В исследовательской работе использованы методы математической физики, спектрального анализа, функционального анализа и теории функций комплексных переменных, методы решения дифференциальных уравнений.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

дан метод построения общих нелинейных эволюционных уравнений, интегрируемых при помощи оператора Хилла;

доказана интегрируемость нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических функций;

доказана интегрируемость высшего и нагруженно высшего уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических функций;

доказана интегрируемость нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций;

доказана интегрируемость высшего уравнения Кортевега-де Фриза со свободным членом независящим от пространственной переменной в классе периодических функций;

доказана интегрируемость высшего уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованым источником в классе периодических функций.

Практические результаты исследования состоят из применения алгоритмов решения задач Коши, для нелинейных общих уравнений Кортевега-де Фриза, получены результаты об аналитичности решений уравнений по пространственным переменным для численных расчетов.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов математической физики, спектрального анализа, функционального анализа и теории функций комплексных переменных при решении обратных спектральных задач для дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами и их применению для решения нелинейных эволюционных уравнений, а также строгостью математических рассуждений и доказательств.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования заключается в том, что полученные научные результаты могут быть использованы в спектральной теории линейных операторов, в гидродинамике и в квантовой физике.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что полученные научные результаты могут быть использованы в математической физике при интегрировании нелинейных эволюционных уравнений.

Внедрение результатов исследования. Результаты, полученные в диссертации, были внедрены на практике в следующих направлениях:

интегрирования общих уравнений Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций применена в проекте «Qualitative properties and bifurcations of differential equations and dynamical systems» Агенства исследовательских проектов Словакии VEGA (справка университета Братислава от 18 февраля 2018 года). Методы интегрирования высших уравнений Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций дала возможность оценить изменения фаз динамических систем связанных с эволюционными эллиптическими уравнениями с самосогласованными источниками.

Результаты интегрирования общего нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником были использованы в работах, выполненных в рамках научно-исследовательского проекта Ф-4-61 Ургенчского государственного университета по теме «Интегрирование нелинейных эволюционных уравнений с самосогласованным источником методом обратных задач» 2012-2016 гг. (справка №89-03-1064 Министерство высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан от 3 марта 2017 года). Методы интегрирования высших уравнений Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций использованы для нахождения решения различных эволюционных уравнений с источником.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования обсуждались на 8 научно-практических конференциях, в том числе на 2 международных и 6 республиканских.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 17 научных работ, из них 6 статей входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей Аттестационной Комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе 2 опубликовано в зарубежных журналах и 4 в республиканских научных изданиях.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объём диссертации составляет 119 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и восстребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Некоторые сведения об операторе Хилла и его применение»** рассмотрен метод интегрирования уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических функций с использованием обратной задачи Хилла.

С первого по шестой части первой главы приведены необходимые сведения, о прямой и обратной спектральной задачи для оператора Хилла на всей оси.

Рассмотрим следующий оператор Хилла

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda\, y\,, \quad x \in R\,, \tag{1}$$

где $q(x) \in C^1(R)$ – действительная π периодическая функция. Обозначим через $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ решения уравнения (1) удовлетворяющих начальным условиям $c(0,\lambda)=1$, $c'(0,\lambda)=0$ и $s(0,\lambda)=0$, $s'(0,\lambda)=1$. Функция $\Delta(\lambda)=c(\pi,\lambda)+s'(\pi,\lambda)$ называется функцией Ляпунова или дискриминантом Хилла. Следующая

$$\psi_{\pm}(x,\lambda)=c(x,\lambda)+\frac{s'(\pi,\lambda)-c(\pi,\lambda)\mp\sqrt{\Delta^2(\lambda)-4}}{2s(\pi,\lambda)}\,s(x,\lambda)\,,$$

функция называется решением Флоке уравнения (1).

Спектр оператора L состоит из следующего набора:

$$E=\{\lambda\in R:\ -2\le\Delta(\lambda)\le 2\,\}=R\setminus\left\{(-\infty,\lambda_0)\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})\right\},$$

при этом интервалы $(-\infty,\lambda_0)\,,(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})$, $n=1,2,\ldots$ называются лакунами, где λ_0, λ_{4k-1}, λ_{4k} – собственные значения периодической задачи ($y(0)=y(\pi)$, $y'(0)=y'(\pi)$), а λ_{4k+1}, λ_{4k+2} – собственные значения антипериодической задачи ($y(0)=-y(\pi)$, $y'(0)=-y'(\pi)$) для уравнения (1).

Через ξ_n, $n=1,2,\ldots$ обозначим собственные значения задачи Дирихле ($y(0)=0,\ y(\pi)=0$) для уравнения (1), для которых выполняются следующие включения $\xi_n\in[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$, $n=1,2,\ldots$.

Определение 1. Числа ξ_n, $n=1,2,\ldots$ вместе со знаками $\sigma_n=sign\{s'(\pi,\xi_n)-c(\pi,\xi_n)\}$, $n=1,2,\ldots$ называются спектральными параметрами оператора (1).

Определение 2. Спектральные параметры ξ_n, σ_n, $n=1,2,\ ...$ и границы λ_n, $n=0,1,2,\ ...$ спектра называются спектральными данными оператора (1).

Определение 3. Задача нахождения спектральных данных оператора (1) называется прямой спектральной задачей, а восстановление потенциала $q(x)$ по спектральным данным называется обратной спектралной задачей для оператора (1).

Потенциал $q(x)$ определяется единственным образом по спектральным данным $\{\lambda_{n-1}, \xi_n, \sigma_n = \pm 1, n \geq 1\}$.

Если в уравнении (1) вместо $q(x)$ рассмотрим $q(x+\tau)$, то возникший спектр оператора не будет зависеть от параметра τ: $\lambda_n(\tau) \equiv \lambda_n$, $n=0,1,2,\ ...$, а спектральные параметры зависят от параметра τ: $\xi_n = \xi_n(\tau)$, $\sigma_n = \sigma_n(\tau)$, $n=1,2,...$. Эти спектральные параметры удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Дубровина:

$$\dot{\xi}_n = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)h_n(\xi),$$

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \times \sqrt{(\xi_n - \lambda_0)\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}},\ n \geq 1,$$

где знак $\sigma_n(\tau) = \pm 1$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

Система дифференциальных уравнений Дубровина и следующая формула первого следа

$$q(\tau) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau))$$

дают метод решения обратной задачи.

В 1946 году Г.Борг показал единственность построения оператора Штурма-Лиувилля по спектрам двух краевых задач. Если в этих граничных задачах дифференциальное уравнение, будучи общим, граничные условия будут различными, то теорема о единственности определения потенциала теряет свою силу.

В 2002 году V.Pierce[4] разработал метод построения семейств потенциалов с помощью спектров граничных задач Неймана и Дирихле, поставленных для одного уравнения Штурма-Лиувилля.

В седьмой части первой главы воспользовавшись методом V.Pierce описано восстонавление потенциала $q(x) \in C^1[0,\pi]$, через спектры $\{a_n, n \geq 0\}$ и $\{b_n, n \geq 0\}$ граничных задач Штурма-Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y,\ y(0) = 0,\ y'(\pi) = 0$$

и

$$-y'' + q(x)y = \lambda y,\ y'(0) = 0,\ y(\pi) = 0.$$

[4] Pierce V. Determining the potential of a Sturm-Liouville operator from its Dirichlet and Neumann spectra.// Pacific journal of mathematics, 2002. V. 204. N 2. P. 497-509.

В восьмой части первой главы используя обратную задачу Хилла, приведен метод интегрирования уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических функций.

Рассмотрим уравнение Кортевега-де Фриза

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x\,,\, x \in R\,,\; t > 0\,, \tag{2}$$

с начальным условием

$$q(x,t)\,|_{t=0} = q_0(x)\,, \tag{3}$$

где $q_0(x) \in C^3(R)$ – заданная действительная π-периодическая функция. Требуется найти действительную функцию $q(x,t)$, π-периодическую по переменной x:

$$q(x+\pi,t) = q(x,t)\,, \tag{4}$$

и удовлетворяющую условиям гладкости

$$q(x,t) \in C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \ge 0)\,. \tag{5}$$

Рассмотрим следующий оператор Хилла на всей прямой

$$L(t)y \equiv -y'' + q(x,t)y = \lambda\, y, \quad x \in R\,. \tag{6}$$

Обозначим через $c(x,\lambda,t)$ и $s(x,\lambda,t)$ решения уравнения (6), удовлетворяющие начальным условиям:

$$c(0,\lambda,t) = 1,\; c'(0,\lambda,t) = 0\,; \qquad s(0,\lambda,t) = 0\,,\; s'(0,\lambda,t) = 1\,.$$

Обозначим через $y_j(x,t)$ ортонормированные собственные функции соответствующие собственным значениям $\xi_j(t)$, $j = 1,2,...$ граничной задачи Дирихле $y(0,t) = 0$, $y(\pi,t) = 0$ для уравнения (6). Через λ_k, $(k \ge 0)$ обозначим собственные значения периодической или антипериодической задачи для уравнения (6).

Основной результат восьмой части первой главы выражается в следующей теореме.

Теорема 1. Если функция $q(x,t)$ является решением задачи Коши (2)-(5), то спектр оператора Хилла с коэффициентом $q(x+\tau,t)$ не зависит от τ и t, а спектральные параметры ξ_n, σ_n удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi)\{2q(\tau,t) + 4\xi_n(\tau,t)\},\;\; n = 1,2,3,...\;, \tag{7}$$

где знак $\sigma_n = \sigma_n(\tau,t) = \pm 1$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n = \xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

Замечание 1. С помощью следующей формулы следов

$$q(\tau,t) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau,t)) \tag{8}$$

систему (7) можно переписать в замкнутом виде.

Следствие 1. Система (7) и формула следов (8) дает метод решения задачи (2)-(5). Для этого сначала находим спектральные данные λ_n, $n \ge 0$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \ge 1$ соответствующие потенциалу $q_0(x+\tau)$ уравнения Хилла

(6). Затем, решая задачу Коши $\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0}=\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau)$, $n\geq 1$ для системы уравнений Дубровина (7), по формуле следов (8) находим $q(\tau,t)$.

Следствие 2. Если в начальном условии $q_0(x)$ является действительной аналитической функцией, то длины лакун соответствующие этому потенциалу экспоненциально убывают. Эти лакуны соответствуют и потенциалу $q(x,t)$, поэтому решение $q(x,t)$ будет действительной аналитической функцией по переменной x.

Следствие 3. Если в начальном условии функция $q_0(x)$ имеет период π/n, то лакуны, номера которых не деляется на n исчезают. Потенциалу $q(x,t)$ соответствуют те же лакуны. Поэтому решение $q(x,t)$ имеет период π/n по переменной x. Здесь $n\geq 2$ натуральное число и k номер лакуны $(\lambda_{2k-1},\lambda_{2k})$.

Во второй главе диссертации **«Интегрирование нагруженного и высшего уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических функций»** предложен простейший способ вывода нелинейных уравнений высших порядков интегрируемых с помощью оператора Хилла. Доказана полная интегрируемость нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических функций, высшего уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических функций и нагруженного высшего уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических функций.

В первой части второй главы выведено следующее нелинейное уравнение

$$q_t=\frac{1}{2}c_N'''-2qc_N'-q_xc_N,\ x\in R,\ t>0, \tag{9}$$

интегрируемое с помощью оператора Хилла. Это уравнение называется высшим уравнением Кортевега-де Фриза. Здесь функция $c_N=c_N(x,t)$ строится посредством $q=q(x,t)$ следующим образом: с помощью заданных непрерывных функций $d_k=d_k(t)$, $k=0,1,\ldots,N$ строятся функции

$$c_0=d_0,\ \ c_{k+1}=-\frac{1}{4}c_k''+qc_k-\frac{1}{2}\int_0^x q_xc_k\,dx+d_{k+1},\ k=0,1,\ldots,N-1.$$

Например,

$$c_1=\frac{1}{2}d_0[q+q(0,t)]+d_1,$$

$$c_2=\frac{1}{8}d_0[-q_{xx}+3q^2+2qq(0,t)+3q^2(0,t)]+\frac{1}{2}d_1[q+q(0,t)]+d_2$$

и т.д.

При $N=1$, уравнение (9) будет иметь вид

$$q_t=\frac{1}{4}[q_{xxx}-6qq_x]d_0-\frac{1}{2}[2d_1+d_0q(0,t)]q_x.$$

В частности при $d_0=0$, $d_1=-1$ получим уравнение

$$q_t=q_x,$$

а при $d_0 = 4$, $d_1 = -2q(0,t)$, получим уравнение Кортевега-де Фриза

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x.$$

При $N = 2$ уравнение (9) примет вид:

$$q_t = -\frac{1}{16}d_0(q_{xxxxx} - 10qq_{xxx} - 20q_xq_{xx} + 30q^2q_x) +$$

$$+\frac{1}{8}[d_0q(0,t) + 2d_1](q_{xxx} - 6qq_x) - \frac{1}{8}[3d_0q^2(0,t) + 4d_1q(0,t) + 8d_2]q_x.$$

Полагая $d_0 = -16$, $d_1 = 8q(0,t)$, $d_2 = 2q^2(0,t)$ получим уравнение

$$q_t = q_{xxxxx} - 10qq_{xxx} - 20q_xq_{xx} + 30q^2q_x. \tag{10}$$

В случае $N = 1$, $d_0 = 4$, $d_1(t) = c(t)q(0,t)$ получим нагруженное уравнение Кортевега-де Фриза

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x + \gamma(t)q(0,t)q_x.$$

Точно также можно построить и другие нагруженные уравнения Кортевега-де Фриза.

Во второй части второй главы проинтегрировано нагруженное уравнение Кортевега-де Фриза в классе периодических функций.

Рассмотрим нагруженное уравнение Кортевега-де Фриза

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x + \gamma(t)\cdot q\big|_{x=0}\cdot q_x, \quad x \in R,\ t > 0 \tag{11}$$

с начальным условием

$$q(x,t)\big|_{t=0} = q_0(x), \tag{12}$$

где $\gamma(t)$ является данной действительной непрерывной функцией и $q_0(x) \in C^3(R)$ заданная действительная π-периодическая функция. Требуется найти действительную функцию $q = q(x,t)$, которая π-периодическая по переменной x:

$$q(x+\pi,t) \equiv q(x,t), \quad x \in R,\ t > 0 \tag{13}$$

и удовлетворяет условиям гладкости:

$$q(x,t) \in C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \ge 0). \tag{14}$$

Теорема 2. Если функция $q(x,t)$ является решением задачи Коши (11)-(14), то границы спектра оператора

$$L(\tau,t)y \equiv -y'' + q(x+\tau,t)y = \lambda y, \quad x \in R \tag{15}$$

т.е. числа λ_n, $n \ge 0$ не зависят от параметров τ и t, а спектральные параметры $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$ $n \ge 1$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)[2q(\tau,t) - \gamma(t)q(0,t) + 4\xi_n]h_n(\xi), \quad n \ge 1, \tag{16}$$

где знак $\sigma_n(\tau,t) = \pm 1$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \xi_n^0(\tau),\ \ \sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \ge 1, \tag{17}$$

где $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$ $n \geq 1$ – спектральные параметры оператора Хилла с коэффициентом $q_0(x+\tau)$.

Замечание 2. С помощью формулы следов (8) систему (16) можем переписать в замкнутом виде.

Следствие 4. Эта теорема даёт способ решения задачи (11)-(14). Изначально мы находим спектральные данные λ_n, $n \geq 0$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \geq 1$ уравнения

$$-y'' + q_0(x+\tau)y = \lambda y, \quad x \in R.$$

Затем, при $\tau = 0$ решая задачу Коши (16)+(17), определяем $\xi_n(0,t)$, $n \geq 1$. Подставляя в уравнение (16) найденные выражения и снова решая задачу Коши (16)+(17) при произвольном τ, находим $\xi_n(\tau,t)$, $n \geq 1$. После этого из формулы следов (8) определяем $q(\tau,t)$.

Следствие 5. Если начальная функция $q_0(x)$ является действительной аналитической функцией, то $q(x,t)$ тоже является действительной аналитической функцией по x.

Следствие 6. Если число π/n является периодом начальной функции $q_0(x)$, то это число π/n является периодом функции $q(x,t)$ по переменной x. Здесь $n \geq 2$ натуральное число.

В третьей части второй главы проинтегрировано высшее уравнение Кортевега-де Фриза в классе периодических функций.

Рассмотрим следующее уравнение

$$q_t = \frac{1}{2}c_N''' - 2qc_N' - q_x c_N, \; x \in R, \; t > 0 \tag{18}$$

при начальном условии

$$q(x,t)\big|_{t=0} = q_0(x). \tag{19}$$

Здесь $q_0(x) \in C^{2N+1}(R)$ – действительная π-периодическая функция. Требуется найти действительную функцию $q(x,t)$ удовлетворяющую уравнению (18) и начальному условию (19), которая π-периодическая по переменной x:

$$q(x+\pi,t) \equiv q(x,t), \quad t \geq 0, \quad x \in R \tag{20}$$

и удовлетворяет условиям гладкости:

$$q(x,t) \in C_x^{2N+1}(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0). \tag{21}$$

Основной результат этой главы выражен в следующей теореме:

Теорема 3. Пусть функция $q(x,t)$ решение задачи (18)-(21). Тогда спектр оператора Хилла (6) не зависит от параметра t, а спектральные параметры $\xi_n(t)$, $n = 1,2,...$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\dot{\xi}_n = 2(-1)^n \sigma_n(t) \left\{ \sum_{k=0}^{N} c_k(0,t) \xi_n^{N-k} \right\} h_n(\xi), \quad n \geq 1, \tag{22}$$

где знак $\sigma_n(t) = \pm 1$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

Следствие 7. Если вместо $q(x,t)$ рассмотрим функцию $q(x+\tau,t)$, то собственные значения периодической и антипериодической граничной задачи не зависят от τ и t, а спектральные параметры $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n=1,2,...$, зависят от τ и t. Тогда система Дубровина (22) примет следующий вид:

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\left\{\sum_{k=0}^{N} c_k(\tau,t)\xi_n^{N-k}\right\}h_n(\xi),\ n\geq 1. \qquad (23)$$

Следствие 8. Если в уравнении (18) $N=2$, то оно примет вид (10), а система уравнений Дубровина (23) примет следующий вид

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 4(-1)^{n}\sigma_n(\tau,t)\left\{8\xi_n^2 + 4\xi_n q - q_{\tau\tau} + 3q^2\right\}h_n(\xi), \quad n\geq 1. \qquad (24)$$

С помощью формулы следов (8) и

$$q^2(\tau,t) - \frac{1}{2}q_{\tau\tau}(\tau,t) = \lambda_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2 - 2\xi_k^2(\tau,t)) \qquad (25)$$

систему уравнений Дубровина (24) можем переписать в замкнутом виде.

Следствие 9. Система уравнений Дубровина (24) и формула следов (8) дают способ решения задач (10), (18)-(21).

Следствие 10. Если начальная функция $q_0(x)$ является действительной аналитической, то и функция $q(x,t)$ тоже будет действительной аналитической по x.

Следствие 11. Если в начальном условии функция $q_0(x)$ имеет период π/n, то решение $q(x,t)$ тоже будет π/n периодичной по переменной x.

В четвёртой части второй главы проинтегрировано нагруженное высшее уравнение Кортевега-де Фриза в классе периодических функций.

Рассмотрим нахождение действительной функции $q(x,t)$, удовлетворяющей условиям (19)-(21) и следующему уравнению

$$q_t = \frac{1}{2}c_N''' - 2qc_N' - q_x c_N + \gamma(t)\cdot q\big|_{x=0}\cdot q_x,\ x\in R,\ t>0. \qquad (26)$$

Основной результат червёртой части второй главы выражен в следующей теореме.

Теорема 4. Пусть функция $q(x,t)$ является решением задач (26), (19)-(21). Тогда, границы спектра оператора (15), т.е. числа λ_n, $n\geq 0$, не зависят от параметров τ и t, а спектральные параметры $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n\geq 1$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\dot{\xi}_n = 2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)\left\{\sum_{k=0}^{N} c_k(\tau,t)\xi_n^{N-k} - \gamma(t)q(0,t)\right\}h_n(\xi), \quad n\geq 1, \qquad (27)$$

где знак $\sigma_n(\tau,t)=\pm 1$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$, а также выполняются начальные условия (17).

Следствие 12. Пусть в уравнении (26) $N=2$, $d_0=-16$, $d_1=8q(0,t)$, $d_2=2q^2(0,t)-\gamma(t)q(0,t)$, то уравнение (26) примет вид

$$q_t = q_{xxxxx} - 10qq_{xxx} - 20q_x q_{xx} + 30q^2 q_x + \gamma(t)q(0,t)q_x, \tag{28}$$

а система уравнений Дубровина (27) запишется в виде

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 4(-1)^n \sigma_n(\tau,t)\left\{8\xi_n^2 + 4\xi_n q - q_{\tau\tau} + 3q^2 - \gamma(t)q(0,t)\right\} h_n(\xi), \quad n \ge 1. \tag{29}$$

С помощью формулы следов (8) и (25) можно записать систему уравнений Дубровина (29) в замкнутом виде.

Следствие 13. Система уравнений Дубровина (29) и формула следов (8) дают способ решения задач (28), (19)-(21).

Следствие 14. Если начальняя функция $q_0(x)$ является действительной аналитической фенкцией, то и функция $q(x,t)$ тоже будет действительной аналитической по x.

Следствие 15. Если в начальном условии функция $q_0(x)$ имеет период π/n, то решение $q(x,t)$ тоже будет π/n периодической по переменной x.

В третьей главе диссертации под названием **«Интегрирование высшего уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций»** используя обратную задачу, для оператора Хилла, приводится способ интегрирования уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций, доказывается полная интегрируемость: нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций, уравнения Кортевега-де Фриза высшего порядка со свободным членом не зависящим от пространственной переменной в классе периодических функций и уравнения Кортевега-де Фриза высшего порядка с самосогласованным источником в классе периодических функций.

В первой части третьей главы доказана полная интегрируемость нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций, а именно, рассмотрим следующее уравнение

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x + \gamma(t)q(0,t)q_x +$$
$$+2\int_0^\infty \beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t)\left(\psi_+(x,\lambda,t)\psi_-(x,\lambda,t)\right)_x d\lambda,\ t>0,\ x\in R, \tag{30}$$

где $\gamma(t)$ является заданной действительной непрерывной функцией и $\beta(\lambda,t)\in C\left([0,\infty)\times[0,\infty)\right)$ – заданная действительная функция, имеющая равномерную асимптотику $\beta(\lambda,t)=O\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right)$, $|\lambda|\to\infty$, а $\psi_\pm(x,\lambda,t)$ – решения Флоке (нормированные условием $\psi_\pm(0,\lambda,t)=1$) уравнения Хилла (6). Требуется найти действительное решение $q=q(x,t)$ уравнения (30), удовлетворяющее условиям (12)-(14).

Теорема 6. Если функции $q(x,t)$, $\psi_{\pm}(x,\lambda,t)$ являются решением задачи (30), (12)-(14), то границы спектра оператора (15), т.е. числа λ_n, $n \ge 0$, не зависят от параметров τ и t, а спектральные параметры $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n \ge 1$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi) \times$$

$$\times \left\{ 2q(\tau,t) + 4\xi_n - \gamma(t) q(0,t) + \int_0^{\infty} \frac{\beta(\lambda,t) s(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_n - \lambda} d\lambda \right\}, \ n = 1,2,..., \quad (31)$$

где знак $\sigma_n(\tau,t) = \pm 1$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, а также выполняются начальные условия (17).

Замечание 4. Если воспользуемся формулой следов (8), то система (31) перепишется в замкнутом виде.

Следствие 16. Эта теорема даёт способ решения задачи (30), (12)-(14).

Следствие 17. Если начальная функция $q_0(x)$ является действительной аналитической, то и функция $q(x,t)$ также будет действительной аналитической по x.

Следствие 18. Если в начальном условии функция $q_0(x)$ имеет период π / n, то решение $q(x,t)$ тоже будет π / n периодической по переменной x.

Во второй части третьей главы доказана полная интегрируемость уравнения Кортевега-де Фриза высшего порядка со свободным членом не зависящим от пространственной переменной, в классе периодических функций.

Рассмотрим вопрос нахождения действительной функции $q(x,t)$, удовлетворяющей условиям (19)-(21) и уравнению Кортевега-де Фриза высшего порядка со свободным членом не зависящим от пространственной переменной

$$q_t = \frac{1}{2} c_N''' - 2qc_N' - q_x c_N + f(t), \ x \in R, \ t > 0. \quad (32)$$

Здесь $f(t) \in C[0,\infty)$ заданная действительная функция.

Теорема 7. Пусть функция $q(x,t)$ является решением задачи (32), (19)-(21). Тогда, границы спектра λ_n, $n \ge 0$ оператора Хилла (6) удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{\lambda}_n(t) = f(t), \ n \ge 0, \quad (33)$$

а спектральные параметры $\xi_n(t)$, $\sigma_n(t)$, $n = 1,2,...$, удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\dot{\xi}_n = 2(-1)^n \sigma_n(t) \left\{ \sum_{k=0}^{N} c_k(0,t) \xi_n^{N-k} \right\} h_n(\xi) + f(t), \quad n \ge 1, \quad (34)$$

где знак $\sigma_n(t)=\pm 1$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(t)\big|_{t=0}=\xi_n^0,\ \ \sigma_n(t)\big|_{t=0}=\sigma_n^0\ ,\quad n\geq 1, \tag{35}$$

где ξ_n^0, σ_n^0 $n\geq 1$ – спектральные параметры оператора Хилла с коэффициентом $q_0(x)$.

Следствие 19. Если вместо $q(x,t)$ рассмотрим функцию $q(x+\tau,t)$, то собственные значения периодической и антипериодической граничной задачи зависят от t и удовлетворяют системе уравнений (33), а спектральные параметры $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n=1,2,...$, зависят от τ и t. Тогда система уравнений Дубровина (34) примет следующий вид:

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial t}=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi)\left\{\sum_{k=0}^{N}c_k(\tau,t)\xi_n^{N-k}\right\}+f(t),\ n=1,2,...\ . \tag{36}$$

Следствие 20. Пусть в уравнении (32) $N=2$, тогда это уравнение имеет вид

$$q_t=\frac{1}{4}q_{xxxxx}-5q_xq_{xx}-\frac{5}{2}qq_{xxx}+\frac{15}{2}q^2q_x+f(t), \tag{37}$$

а система уравнений Дубровина (36) примет вид

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial t}=2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\left\{4\xi_n^2+2\xi_nq-\frac{1}{2}q_{\tau\tau}+\frac{3}{2}q^2\right\}h_n(\xi)+f(t),\quad n\geq 1, \tag{38}$$

которую можно переписать в замкнутом виде с помощью формул следов (8) и (25).

Следствие 21. Система уравнений Дубровина (38) и формулы следов дают способ решения задач (37), (19)-(21).

Следствие 22. Если начальная функция $q_0(x)$ является действительной аналитической, то и функция $q(x,t)$ также будет действительной аналитической по x.

Следствие 23. Если в начальном условии функция $q_0(x)$ имеет период π/n, то решение $q(x,t)$ тоже будет иметь период π/n по переменной x.

В четвёртой части третьей главы доказана полная интегрируемость уравнения Кортевега-де Фриза высшего порядка с самосогласованным источником в классе периодических функций.

Рассмотрим задачу нахождения действительного решения $q(x,t)$ уравнения Кортевега-де Фриза высшего порядка с самосогласованным источником

$$q_t=\frac{1}{2}c_N'''-2qc_N'-q_xc_N+$$

$$+2\int_0^\infty\beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t)\big(\psi_+(x,\lambda,t)\cdot\psi_-(x,\lambda,t)\big)_x\,d\lambda\ ,\ \ x\in R,\ \ t>0, \tag{39}$$

удовлетворяющего условиям (19)-(21).

Теорема 8. Пусть функции $q(x,t)$, $\psi_{\pm}(x,\lambda,t)$ являются решением задачи (39), (19)-(21). Тогда спектр оператора Хилла (6) не зависит от параметра t, а спектральные параметры $\xi_n(t)$, $\sigma_n(t)$, $n=1,2,...$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\dot{\xi}_n = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(t)\left\{\sum_{k=0}^{N} c_k(0,t)\xi_n^{N-k} + \int_0^\infty \frac{s(\pi,\lambda,t)\beta(\lambda,t)}{\lambda-\xi_n}d\lambda\right\}h_n(\xi), \quad n\geq 1, \quad (40)$$

где знак $\sigma_n(t)=\pm 1$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$, а также выполняются начальные условия (35).

Следствие 24. Если вместо $q(x,t)$ рассмотрим функцию $q(x+\tau,t)$, то собственные значения периодической и антипериодической граничной задачи не зависят от τ и t, а спектральные параметры $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n=1,2,...$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^{n}\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi)\left\{\sum_{k=0}^{N} c_k(\tau,t)\xi_n^{N-k} + \int_0^\infty \frac{\beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_n-\lambda}d\lambda\right\}, \ n\geq 1. \quad (41)$$

Следствие 25. Пусть в уравнении (39) $N=2$. Тогда это уравнение имеет вид

$$q_t = \frac{1}{4}q_{xxxxx} - 5q_x q_{xx} - \frac{5}{2}qq_{xxx} + \frac{15}{2}q^2 q_x +$$

$$+2\int_0^\infty \beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t)\left(\psi_+(x,\lambda,t)\cdot\psi_-(x,\lambda,t)\right)_x d\lambda, \ x\in R, \ t>0, \quad (42)$$

и система уравнений (41) примет вид

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\left\{4\xi_n^2 + 2\xi_n q - \frac{1}{2}q_{\tau\tau} + \frac{3}{2}q^2 + \int_0^\infty \frac{s(\pi,\lambda,t,\tau)\beta(\lambda,t)}{\lambda-\xi_n}d\lambda\right\}h_n(\xi),$$

$$n\geq 1. \quad (43)$$

Эту систему с помощью формул следов (8) и (25) можно переписать в замкнутом виде.

Следствие 26. Система уравнений Дубровина (43) и формулы следов (8), дают способ решения задачи (42), (19)-(21).

Следствие 27. Если начальная функция $q_0(x)$ является действительной аналитической, то и функция $q(x,t)$ также будет действительной аналитической по x.

Следствие 28. Если в начальном условии функция $q_0(x)$ имеет период π/n, то решение $q(x,t)$ тоже будет иметь период π/n по переменной x.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Хасанову Акназару Бекдурдиевичу за постоянное внимание и ценные советы при обсуждении результатов этой диссертации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена применению прямой и обратной задачи спектральной теории для оператора Хилла к интегрированию нелинейного общего уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Предложен простой способ вывода нелинейных уравнений высшего порядка, интегрируемых с помощью оператора Хилла.
2. Доказана полная интегрируемость нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических функций.
3. Разработан алгоритм нахождения решений задачи Коши для высшего уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических функций.
4. Показана интегрируемость нагруженного высшего уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических функций.
5. Доказана полная интегрируемость нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций.
6. Решена задача Коши для высшего уравнения Кортевега-де Фриза со свободным членом не зависящим от пространственной переменной в классе периодических функций.
7. Доказана полная интегрируемость высшего уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREE PhD.28.12.2017.FM.55.01 URGENCH STATE UNIVERSITY AND KARAKALPAK STATE UNIVERSITY

URGENCH STATE UNIVERSITY

MATYOQUBOV MUKHAMMAD MAXSUDOVICH

INTEGRATION OF NONLINEAR GENERAL KORTEWEG-DE VRIES EQUATION WITH SELF-CONSISTENT SOURCE IN THE CLASS OF PERIODIC FUNCTIONS

01.01.02 – Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences)

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOFHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATEMATICAL SCIENCES

URGENCH – 2018

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2017.3.FM110.

Dissertation has been prepared at Urgench State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english(resume)) on the website (www.ik-mat.urdu.uz) and the «Ziyonet» information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Khasanov Aknazar Bekdurdievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Takhirov Jozil Ostanovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Hoitmetov Umid Azadovich Candidat of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**National University of Uzbekistan**

Defense will take place «____» _____________2018 at _____ at the meeting of Scientific Council number PhD.28.12.2017.FM.55.01 at Urgench State University. (Address: 14 Kh. Olimjan str., Urgench city, 220100, Uzbekistan, Ph.: (99862)224-66-11, fax: (99862)224-67-00, e-mail: ik-mat.urdu@umail.uz

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Urgench state University (is registered №______) (Address: 14 Kh. Olimjan str., Urgench city, 220100, Uzbekistan, Ph.: (99862)224-66-11, fax: (99862)224-67-00), e-mail: ursubox@gmail.com).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2018 year
(Mailing report № ____________on «____» _______________2018 year)

B.I.Abdullayev
Chairman of scientific council on award of scientific degrees, D.F.M.S.

A.A.Atamurotov
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degrees, C.F.M.S.

A.A.Yakhshimratov
Chairman of scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.M.S.

INTRODUCTION (abstract of the PhD thesis)

The aim of the research work is finding the solutions of nonlinear general Korteweg-de Vries equations with self-consistent source in the class of periodic functions via inverse spectral problems for the differential operators with periodic coefficients.

The object of the research work consists of nonlinear general Korteweg-de Vries equations, loaded nonlinear general Korteweg-de Vries equations.

Scientific novelty of the research work consists on the following:

the method of evolutional nonlinear equations, which are integrable via Sturm-Liouville operator with periodic coefficients is given;

the complete integrability of the loaded Korteweg-de Vries equation in the class of periodic functions is proved;

the complete integrability of the higher order Korteweg-de Vries equation in the class of periodic functions is proved;

the complete integrability of the higher order loaded Korteweg-de Vries equation in the class of periodic functions is proved;

the complete integrability of loaded Korteweg-de Vries equation with self consistent source in the class of periodic functions is proved;

the complete integrability of the higher order Korteweg-de Vries equation in the class of periodic functions, in which the free term does not depend on the spacial variable, is proven;

the complete integrability of the higher order Korteweg-de Vries equation with self-consistent source in the class of periodic functions is proved;

Implementation of the research results. The results obtained during the dissrtation research are practiced in the following areas:

The results of integrating the loaded Korteweg-de Vries equations and integrating the higher order Korteweg-de Vries equations with a self-consistent source in the class of periodic functions are used in the project "Qualitative properties and bifurcations of differential equations and dynamical systems" of the Slovak Grant Agency VEGA (Confirmation from Bratislava, February 2018). The methods of integrating the higher Korteweg-de Vries equations with self-consistent resources in the class of periodic functions made it possible to estimate the phase changes of dynamical systems associated with evolutionary elliptic equations with self-consistent sources.

The results of integrating the general nonlinear Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source were used in the works carried out in the framework of the research project F-4-61 of the Urgench State University on the theme "Integration of nonlinear evolution equations with a self-consistent source by the inverse scattering method" 2012-2016 years. (Reference No. 89-03-1064 Ministry of Higher and Secondary Specialized Education of the Republic of Uzbekistan, March 3, 2017). The methods of integrating the higher Korteweg-de Vries equations with a self-consistent source in the class of periodic functions are used to find the solution of various evolutionary equations with the source.

The structure and volume of the thesis. The dissertation work consists: introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the dissertation is 119 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Матякубов М.М. Интегрирование высшего уравнения Кортевег-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций. // Доклады АН РУз. № 3, (2012), С. 16-18. (01.00.00;№7).
2. Матякубов М.М. Интегрирование высшего уравнения Кортевега-де Фриза со свободным членом независящим от пространственной переменной, в классе периодических функций.// Узбекский математический журнал, № 3, (2012), С. 106-114.(01.00.00;№6).
3. Matyoqubov M. M., Yakshimuratov A. B. Integration of higher Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source in class of periodic functions.// Ufa Matematical Journal. Volume 5, № 1, (2013). pp. 102-112. (№3, Scopus CiteScore 0,24).
4. Матякубов М.М. Интегрирование нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций.// Узбекский математический журнал, № 4, (2016), С. 84-94.(01.00.00;№6).
5. Яхшимуратов А.Б., Матякубов М.М. Интегрирование нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических функций. // Известия вузов. Математика. Казань. N 2, (2016), С. 87-92. (№3, Scopus CiteScore 0,26).
6. Матякубов М.М. Построение общего потенциала по спектрам двух граничных задач Штурма-Лиувилля. // Доклады АН РУз. № 2, (2017), С. 6-8. (01.00.00;№7).

II бўлим (2 часть; part 2)

7. Яхшимуратов А.Б., Матякубов М.М., Гаппаров С.А. Об одном методе вывода нелинейных уравнений, интегрируемых с помощью оператора Штурма-Лиувилля.// Илм сарчашмалари. Ургенч, № 3, (2013), С. 13-16.
8. Яхшимуратов А.Б., Матякубов М.М., Гаппаров С.А. Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза высшего порядка в классе периодических функций. // Илм сарчашмалари. Ургенч, № 5, (2013), С. 8-13.
9. Yaxshimuratov A. B., Matyoqubov M.M., Ko'palova K. Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза высшего порядка в классе периодических функций. // Илм сарчашмалари. Ургенч, № 5, (2013), С. 3-8.
10. Матякубов М.М. Интегрирования уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженным членом в классе периодических функций. Международная конференция «Спектральная теория и дифференциальные уравнения», посвященная 100-летию Б.М.Левитана. 23-27 июня 2014. – Москва. – С. 97-98.

11. Хасанов А.Б., Матякубов М.М. Интегрирование высшего уравнения Кортевега-де Фриза со свободным членом независящим от пространственной переменной, в классе периодических функций. // Тезисы докладов республиканской научной конференции «Операторные алгебры и смежные проблемы», 12-14 сентября 2012. – Ташкент. – С. 237-239.
12. Хасанов А.Б., Матякубов М.М. Интегрирование нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций. // Тезисы докладов республиканской научной конференции «Проблемы современной топологии и её приложения», 5-6 мая 2016. – Ташкент. – С. 193-195.
13. Хасанов М.М., Матякубов М.М. Интегрирование высшего уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженным членом в классе периодических функций. // Тезисы докладов республиканской научной конференции «Неклассические уравнения математической физики и их приложения», 23-25 октября 2014. – Ташкент. – С. 211-212.
14. Яхшимуратов А.Б., Матякубов М.М. Интегрирование высшего уравнения Кортевег-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций. // Тезисы докладов республиканской научной конференции «Операторные алгебры и смежные проблемы», 12-14 сентября 2012. – Ташкент. – С. 264-266.
15. Yakhshimuratov A.B., Matyoqubov M.M. The Korteweg-de Vries equation with a loaded term in the class of periodic functions. // International seminar on mathematics and natural sciences, 2013. – Samarkand. pp. 22-23.
16. Yaxshimuratov A.B., Matyoqubov M.M. Integration of the nonlinear Schrodinger equation with a loaded term in the class of periodic functions. // Abstracts of “The second Usa-Uzbekistan conference on analysis and mathematical physics”, August, 08-12, 2017, Urgench (Uzbekistan). - pp. 61-62.
17. Яхшимуратов А.Б., Матякубов М.М., Хасанов Т.Г. Об интегрировании одного нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических функций. // Тезисы докладов Республиканской научной конференции «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения», 15-17 декабря 2017. – Ташкент. – С. 187-188.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари
«Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди.
(__ __ 2018 йил).

Босишга руҳсат этилди: __.__.2018
Офсет қоғози. Қоғоз бичими 60х84 1/16.
«Times New Roman» гарнитураси рақамли
босма усулида босилди. Адади 100. Буюртма: №66
Шартли босма табоғи 1,6.
УрДУ босмахонасида чоп этилди.
Манзил: 220110. Урганч шаҳри,
Ҳ. Олимжон кўчаси, 14-уй
Телефон: (0-362)-224-66-01