САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ PhD.27.06.2017.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ХУРРАМОВ АБДИМАЖИД МОЛИКОВИЧ

ПАНЖАРАДАГИ ИККИ ЗАРРАЧАЛИ СИСТЕМАГА МОС БАЪЗИ МОДЕЛ ОПЕРАТОРИНИНГ СПЕКТРАЛ ХОССАЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд шаҳри – 2018 йил

УДК: 517.984

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ PhD.27.06.2017.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ХУРРАМОВ АБДИМАЖИД МОЛИКОВИЧ

ПАНЖАРАДАГИ ИККИ ЗАРРАЧАЛИ СИСТЕМАГА МОС БАЪЗИ МОДЕЛ ОПЕРАТОРИНИНГ СПЕКТРАЛ ХОССАЛАРИ

01.01.02 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд шаҳри – 2018 йил

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.2.PhD/FM55 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Самарқанд давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.samdu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Лакаев Саидахмат Норжигитович** физика-математика фанлари доктори, академик
Расмий оппонентлар:	**Халмухамедов Алимжан Рахимович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Имомкулов Севдиёр Акрамович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	**Қарши давлат университети**

Диссертация ҳимояси Самарқанд давлат университети ҳузуридаги PhD.27.06.2017.FM.02.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2018 йил «___»_________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (99866) 235-19-38, 239-12-47, e-mail: patent@samdu.uz).

Диссертация билан Самарқанд давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (99866) 231-06-32.

Диссертация автореферати 2018 йил «____» _______________куни тарқатилди.

(2018 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.С. Солеев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

А.М. Халхўжаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

И.А.Икромов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси ўринбосари, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Дунё миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар панжарадаги икки заррачали системага мос модел операторларни ўрганишга келтирилади. Жумладан, тартибланган муҳитларда мураккаб турғун объектлар пайдо бўлишини тавсифлашда фойдаланиладиган Бозе-Хаббард модели, панжарадаги икки заррачали системага мос операторларни экспериментал кузатишларнинг назарий асоси ва қўллашнинг назарий базаси ҳисобланади. Шунинг учун қаттиқ жисмлар физикаси ва квант майдонлар назарияси ҳамда чизиқли чегараланган ўз-ўзига қўшма операторларнинг спектрал назариясида учрайдиган панжарадаги икки заррачали системага мос модел операторларга оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда панжарадаги икки заррачали системага мос модел операторлар спектри система квазиимпульси ўзгаришига нисбатан ўта сезувчан бўлганлиги учун ушбу модел операторлар спектрига оид муаммоларни ҳал этиш, яъни боғланган ҳолатлар мавжудлигини кўрсатиш ва уларнинг сонини аниқлаш мухим аҳамият касб этмоқда. Бу борада мақсадли илмий тадқиқотларни амалга ошириш, жумладан: панжарада қисқа масофада таъсирлашувчи иккита ихтиёрий заррачали системага мос модел операторнинг муҳим спектри ўрнини тавсифлаш; муҳим спектрнинг чап чеккасидаги бўсағавий ҳодисаларни аниқлаш; муҳим спектрдан ташқаридаги хос қийматлар сонининг ўзгаришини қаралаётган операторлар параметрлари ва панжара ўлчамига боғлиқ равишда ўрганиш долзарб вазифалардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг амалий татбиққа эга бўлган долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, мамлакатимиз олимлари томонидан кубик панжарадаги заррачалар системасига мос модел операторларни ўрганишга алоҳида эътибор қаратилди. Панжарадаги икки заррачали системага мос модел операторлар учун муҳим спектрдан ташқарида боғланган ҳолатлар мавжудлиги ва уларнинг сонини аниқлашга оид сезиларли натижаларга эришилди. Математика, физика, амалий математика фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда чизиқли операторларнинг спектрал назариясини ва унинг назарий физика, қаттиқ жисмлар физикасига татбиқларини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2008 йил 15 июлдаги ПҚ-916-сон «Инновацион лойиҳалар ва технологияларни ишлаб чиқаришга татбиқ этишни рағбатлантириш борасидаги қўшимча чора-тадбирлар

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамасининг 2017йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

тўғрисида»ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарори ва 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Атом ва молекуляр ҳамда қаттиқ жисмлар физикаси, квант майдонлар назариясининг асосий масалаларининг математик модели сифатида Шредингер операторлари ўрганилади. Бу соҳада олинган натижалар тўғрисида кўплаб маълумотлар математик физиканинг «энциклопедияси» – М.Рид ва Б.Саймоннинг тўрт томли китобида келтирилган. Панжарадаги заррачалар системасига мос Шредингер операторлари ўтган асрнинг тўқсонинчи йилларида физик олимлар Д.С.Маттис ва А.И.Могильнерлар томонидан ўрганилиб бошланди ва унга оид тадқиқотлар жадал ривожланди. Панжарадаги икки заррачали системага мос операторларни қатъий математик тадқиқ этишда узлуксиз Шредингер операторларидаги каби муаммолар учрайди. Узлуксиз ҳолда икки заррачали системанинг тўла гамильтонианини ўрганиш массалар маркази ҳаракати энергия операторини ажратиш йўли билан ҳосил қилинган бир заррачали Шредингер операторини ўрганишга келтирилади ва боғланган ҳолат ажралган тўла импульсли энергия операторининг хос векторини ифодалайди. Панжарада система гамильтониани система тўла квазиимпульсини киритиш ёрдамида қатлам операторлари тўла квазиимпульсга боғлиқ бўлган икки заррачали операторлар оиласининг тўғри интеграли сифатида ифодаланади.

Узлуксиз ва дискрет Шредингер оператори ҳамда умумлашган Фридрихс модели учун хос қийматларнинг мавжудлиги, ўзаро таъсир доимийсининг бўсағавий қийматдаги ҳодисаларни аниқлаш масалалари М.Клауз, Б.Саймон, С.Албеверио, Р.А.Фариа да Вейга, Р.А.Минлос, С.Н.Лакаев, К.Макаров, З.Э.Мўминов, М.Э.Мўминов, Ж.И.Абдуллаев каби олимлар томонидан ўрганилган. Маълумки, икки заррачали Шредингер операторларида ўзаро таъсир доимийси ўзгариши натижасида боғланган ҳолат энергияси узлуксиз спектр чеккасига яқинлашади ва таъсир доимийсининг чекли қийматида спектр бўсағаси билан устма-уст тушади. Бу бўсаға қийматга боғланган ҳолат ёки виртуал сатҳ мос келишини аниқлаш масаласи билан Дж.Раух, Б.Саймон, М.Клауз, Д.Р.Яфаев ва С.Н.Лакаевлар шуғулланган. Жуфт-жуфти билан ўзаро контакт потенциал ёрдамида таъсирлашувчи, иккита бозондан ташкил топган системага мос Шредингер оператори учун бўсаға эффекти дастлаб С.Н.Лакаев ишида аниқланган. С.Албеверио, С.Н.Лакаев, К.Макаров ва З.Э.Мўминовлар ҳамда С.Н.Лакаев ва Ш.Алладўстовлар ишларида бўсаға эффекти дисперсион функция ва таъсир потенциалининг кенг синфи учун исботланган. Уч заррачали системада иккита ёки учта икки заррачали қисм система виртуал сатҳга эга бўлса, у ҳолда гамильтонианнинг дискрет спектри чексиз бўлиши Д.Р. Яфаев, А.В. Соболев, Ю.Овчинников ва И.М.Сигал, Ҳ.Тамура ишларида ва бу системада бундай қисм система биттадан кўп бўлмаса, у ҳолда гамильтонианнинг дискрет спектри чекли бўлиши Д.Р. Яфаев, Г.М. Жислин, С.А. Вугальтер ишларида исботланган.

$n-$ $(n>3)$ заррачали система виртуал сатҳи мавжудлиги ҳақидаги масала Г.М. Жислин ва С.А. Вугальтернинг ишларида қаралган. Панжарадаги икки заррачали система учун заррачаларга мос дисперсион функциялар чизиқли боғлиқ бўлганда ва ноль нуқтада айнимаган минимумга эга бўлганда виртуал сатҳ мавжудлиги С.Н.Лакаев, Ш.М.Тилавова ва Ж.И.Абдуллаев ишларида ўрганилган. Лакаев С.Н. ва Бозоров И.Н. томонидан бир заррачали гамильтонианнинг узлуксиз спектри туби бир вақтда қаралаётган гамильтонианнинг виртуал сатҳи ҳамда хос қиймати бўлиши исботланган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Самарканд давлат университетининг Ф4-ФА-Ф079 «Панжарадаги сони сақланмайдиган заррачалар системаси гамильтонианларининг спектрал таҳлили» (2012-2016) ва ОТ-Ф4-66 «Панжарадаги чекли сондаги заррачалар системаси моделлари. Энергия операторларининг муҳим ва дискрет спектрлари» (2017) мавзуларидаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади панжарадаги махсус дисперсион (заррачанинг бир тугундан қўшни тугунга ўтишини тавсифловчи) функцияли қисқа масофаларда тортишувчи потенциал ёрдамида ўзаро таъсирлашувчи ихтиёрий икки квант заррачали системага мос баъзи модел операторларининг хос қийматлари сонини аниқлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

- ихтиёрий ўлчамли панжарада махсус дисперсион функцияли тортишувчи потенциал ёрдамида ўзаро таъсирлашувчи ихтиёрий икки квант заррачали системага мос баъзи модел операторлар муҳим спектридан ташқаридаги хос қийматларининг мавжуд бўлишлик шартларини аниқлаш;
- қаралаётган модел операторлар муҳим спектридан ташқаридаги хос қийматлари сонининг ўзгариши оператор параметрлари ва панжара ўлчамига боғлиқлигини ўрганиш;
- панжаранинг ўлчами $d \geq 3$ бўлганда қаралаётган операторлар муҳим спектрларининг бўсаға ҳодисаларини тадқиқ қилиш;
- қаралаётган модел операторларнинг баъзи компакт қўзғалишлардаги спектрал хоссаларини ўрганиш.

Тадқиқотнинг объекти панжарадаги махсус дисперсион функцияли тортишувчи потенциал ёрдамида ўзаро таъсирлашувчи ихтиёрий икки квант заррачали системага мос баъзи модел операторлар.

Тадқиқотнинг предмети панжарадаги махсус дисперсион функцияли қисқа масофаларда тортишувчи потенциал ёрдамида ўзаро таъсирлашувчи ихтиёрий икки квант заррачали системага мос баъзи модел операторларнинг муҳим спектри структураси ва ўрни, оддий ёки каррали хос қиймат ва виртуал сатҳининг мавжудлик ёки мавжуд эмаслик масаласи, компакт қўзғалиш натижасида инвариант қисм фазоларда модел оператор дискрет спектрининг сақланишини тадқиқ этишдан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида чизиқли алгебра ва сонлар назарияси, математик анализ, ўз-ўзига қўшма операторлар спектрал назарияси ҳамда Бирман-Швингер принципи усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

- ихтиёрий ўлчамли панжарада махсус дисперсион функцияли тортишувчи потенциаллар ёрдамида ўзаро таъсирлашувчи ихтиёрий икки квант заррачали системага мос модел операторлар параметрлари (заррачаларнинг ўзаро таъсир энергияси, система тўла квазиимпульси) ва панжаранинг ўлчамига боғлиқ ҳолда қаралаётган операторларнинг муҳим спектридан чапда ётувчи хос қийматлари сони (мавжудлиги ва мавжуд бўлмаслиги шартлари) топилган;
- панжара ўлчами $d = 3{,}4$ бўлганда квазиимпульснинг ноль қийматида қаралаётган операторлар муҳим спектрларининг чап чеккаси (қуйи бўсағаси)да виртуал сатҳ (каррали виртуал сатҳ) ёки оддий хос қиймат (каррали хос қиймат)га эга бўладиган ўзаро таъсир энергияларининг қийматлари топилган;
- ўлчам $d \geq 5$ бўлганда муҳим спектрнинг чап чеккаси (қуйи бўсағаси) қаралаётган операторнинг (каррали) хос қиймати бўлиши ёки бўлмаслиги кўрсатилган;
- қаралаётган модел операторларнинг баъзи компакт қўзғалишлардаги спектрал хоссалари ўрганилган, бунда қаралаётган модел операторларнинг дискрет спектрини сақловчи инвариант қисм фазо қурилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари заррачалар боғланган ҳолатларининг аналитиклиги ҳақидаги хулосалардан қаттиқ жисмлар физикаси ва квант механикасида экспериментал тадқиқотларнинг сифат кўрсаткичини аниқлаш ҳамда сонли ҳисоблашларда қўлланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги чизиқли алгебра ва сонлар назарияси, математик анализ, ўз-ўзига қўшма операторлар спектрал назарияси усулларидан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ўз-ўзига қўшма операторлар спектрал назарияси, квант механикаси, қаттиқ жисмлар физикаси ва квант майдонлар назарияси, хусусан, панжарадаги икки заррачали системага мос гамильтонианларнинг боғланган ҳолатлари сонини топиш билан боғлиқ масалаларни ҳал этишда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти қаттиқ жисмлар физикасида мураккаб объектлар ҳосил бўлишини кўрсатувчи экспериментал тадқиқотларни назарий ва қатъий математик асослашга ҳамда янги экспериментлар ўтказишга асос сифатида хизмат қилиши билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Панжарадаги икки заррачали системага мос баъзи модел операторларнинг спектрал хоссаларига оид олинган натижалар асосида:

панжарадаги ихтиёрий икки заррачали системага мос модел оператор хос қийматларининг мавжудлиги (карралилиги) етакчи хорижий (Theor. Math. Phys. 2014, Vol. 180 No 3, pp.1040–1050, Theor. Math. Phys. 2015, Vol. 182 No 3, pp. 381–396, Russian Math. (Iz. VUZ) 2015, Vol. 59 No 6, pp. 18–22, J.Nanosyst.-Phys. Chem. Math. 2016, Vol. 7 No 5, pp. 880–887) журналларида иккита (учта) ихтиёрий заррачали системага мос модел операторларнинг спектрини аниқлашда фойдаланилган. Илмий натижанинг қўлланилиши ўрганилаётган операторлар хос қийматларининг сони ва жойлашув ўрнини топиш имконини берган;

панжарадаги ихтиёрий иккита квант заррачали системага мос операторнинг компакт қўзғалишлардаги хос қийматлари сонини аниқлашда қурилган инвариант қисм фазо QJ130000.2726.01K82 рақамли хорижий грантда уч заррачали Шредингер оператори учун инвариант қисм фазо қуришда қўлланилган (Малайзия технология университетининг 2018 йил 26 февралдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши уч заррачали Шредингер оператори муҳим спектридан ташқарисидаги хос қийматларининг чеклилигини исботлаш имконини берган.

панжарадаги иккита ихтиёрий заррачали системага мос модел оператор хос қийматининг узлуксизлик хоссаси QJ130000.2726.01K82 рақамли хорижий грантда панжарадаги уч заррачали Шредингер оператори муҳим спектрини аниқлашда қўлланилган (Малайзия технология университетининг 2018 йил 26 февралдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши қаралаётган оператор параметрларига боғлиқ ҳолда уч заррачали Шредингер оператори муҳим спектрининг жойлашиш ўрнини аниқлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 3 та халқаро ва 5 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 13 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 5 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 98 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети бўйича маълумотлар берилиб, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Бошланғич маълумотлар ва панжарадаги икки заррачали системага мос модел операторлар»** деб номланувчи биринчи бобида диссертациянинг асосий натижаларини баён қилиш учун зарур бўлган асосий тушунча ва тасдиқлар, жумладан чегараланган ўз-ўзига қўшма операторлар спектрал назариясининг муҳим теоремалари баён қилинган ҳамда панжарадаги иккита ихтиёрий заррачали системага мос баъзи модел операторларнинг координата ва импульс тасвирлари келтирилган.

Диссертациянинг **«Уч ўлчамли панжарадаги икки заррачали системага мос баъзи модел операторларнинг спектрал хоссалари»** деб номланувчи иккинчи бобида уч ўлчамли панжарадаги махсус дисперсион функцияли қисқа масофаларда тортишувчи потенциал ёрдамида ўзаро таъсирлашувчи ихтиёрий икки квант заррачали системага мос модел операторнинг муҳим спектридан чапда ётувчи хос қийматлари сони ва муҳим спектр чап четкаси (қуйи бўсағаси) виртуал сатҳ (каррали виртуал сатҳ) ёки оддий хос қиймат (каррали хос қиймат) бўлиши заррачалар квазиимпульси ва ўзаро таъсир энергияларига боғлиқлиги кўрсатилади ҳамда қаралаётган модел операторнинг баъзи компакт қўзғалишлардаги спектрал хоссалари ўрганилади, бунда қаралаётган модел операторнинг дискрет спектрини сақловчи инвариант қисм фазо қурилади.

$\mathbb{T}^3 = (-\pi, \pi]^3$ уч ўлчамли тор, $L_2(\mathbb{T}^3)$ орқали $\mathbb{T}^3$ да аниқланган ва квадрати билан интегралланувчи функциялар Гильберт фазосини белгилаймиз.

Уч ўлчамли панжарадаги махсус дисперсион (заррачанинг бир тугундан қўшни тугунга ўтишини тавсифловчи) функцияли қисқа масофаларда тортишувчи потенциал ёрдамида ўзаро таъсирлашувчи ихтиёрий икки квант заррачали системага мос модел оператор чегараланган ўз- ўзига қўшма оператор сифатида $L_2(\mathbb{T}^3)$ фазода қуйидаги формула билан аниқланади:

$$h(k) = h_0(k) - \mathbf{v}, \qquad k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{T}^3, \tag{1}$$

бунда $h_0(k)-$ ушбу

$$\mathcal{E}_k(p)=\frac{1}{m_1}\varepsilon(p)+\frac{1}{m_2}\varepsilon(p-k),\quad \varepsilon(p)=\sum_{i=1}^{3}(1-\cos 2p_i),$$

функцияга кўпайтириш оператори ва $\mathbf{v}$ эса $v(p)=\sum_{\alpha=1}^{3}\mu_\alpha\cos p_\alpha$ ядроли интеграл оператор.

Таъкидлаш жоизки, муҳим спектр турғунлиги ҳақидаги Вейл теоремасига асосан $h(k)$ операторнинг муҳим спектри $\mathbf{v}$ компакт қўзғалиш натижасида ўзгармайди ва $h_0(k)$ қўзғалмас оператор спектри билан устма-уст тушади; Бунда $\sigma_{ess}(h(k))$ $\mathcal{E}_k(\cdot)$ функциянинг қийматлари тўплами билан устма-уст тушади

$$\sigma_{ess}(h(k))=\sigma(h_0(k))=[m(k),M(k)],\quad m(k)=\min_{p\in\mathbb{T}^3}\mathcal{E}_k(p),\quad M(k)=\max_{p\in\mathbb{T}^3}\mathcal{E}_k(p).$$

1-фараз. *$m=m_1=m_2$ ва $k\in\Pi$ бўлсин, бунда*

$$\Pi=\{k=(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{T}^3: k_\alpha=\pm\frac{\pi}{2}\quad \textit{камида бирор}\ \alpha\in\{1,2,3\}\ \textit{учун}\}.$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз

$$\mu_i^{\pm}(k)=\frac{c_i(k;m(k))+s_i(k;m(k))\pm\sqrt{(c_i(k;m(k))-s_i(k;m(k)))^2+4\xi_i^2(k;m(k))}}{2[c_i(k;m(k))s_i(k;m(k))-\xi_i^2(k;m(k))]},$$

бунда

$$c_i(k;z)=\int_{\mathbb{T}^3}\frac{cos^2 s_i ds}{\mathcal{E}_k(s)-z},\ s_i(k;z)=\int_{\mathbb{T}^3}\frac{sin^2 s_i ds}{\mathcal{E}_k(s)-z},\ \xi_i(k;z)=\int_{\mathbb{T}^3}\frac{sins_i coss_i ds}{\mathcal{E}_k(s)-z},\ z\leqslant m(k).$$

1-фаразда киритилган Π тўпламни шундай учта Π_j, $j=1,2,3$ қисм тўпламларга ажратамизки, бунда Π_j тўпламда $k\in\Pi$ элемент координаталарининг j таси $\pm\pi/2$ қиймат қабул қилади.

$$\mu_i^{(1)}(k)=(m\pi\int_{\mathbb{T}^2}\frac{sin^2 s_i ds_\alpha ds_\beta}{\sum\limits_{l\in\{\alpha,\beta\}}(|\cos k_l|-\cos k_l\cos 2s_l)})^{-1},\ k\in\Pi_1,\ i=\alpha,\beta$$

бўлсин, бунда k_α ва k_β, $\alpha<\beta$ орқали $k\in\Pi_1$, элементнинг $\pm\pi/2$ га тенг бўлмаган координаталари белгиланган, худди шундай

$$\mu_i^{(2)}(k)=\left(2m\pi^2\int_T\frac{sin^2 sds}{|\cos k_i|-\cos k_i\cos 2s}\right)^{-1},\quad k\in\Pi_2,$$

бу ерда эса k_i- орқали $k\in\Pi_2$ элементнинг $\pm\pi/2$ дан фарқли координатаси белгиланган. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$L_{i0}^{(j)}=[0,\mu_i^{(j)}(k)],\quad L_{i1}^{(j)}=(\mu_i^{(j)}(k),\infty),\ i=\alpha,\beta,\quad j=1,2.$$

1-теорема. *1-фараз бажарилсин. У ҳолда қуйидаги тасдиқлар ўринли.*

1. *$k\in\Pi_1$ ва $(\mu_\alpha,\mu_\beta)\in L_{\alpha r}^{(1)}\times L_{\beta t}^{(1)}$ бўлсин, бунда $\alpha,\beta(\alpha<\beta)-$ $k\in\Pi_1$ элементнинг $\pm\pi/2$ дан фарқли k_α,k_β координаталарининг индекслари ва $r,t=0,1$. У ҳолда $h(k)$ оператор муҳим спектридан чапда ётувчи карралилиги билан ҳисоблаганда $4+r+t$ та хос қийматга эга бўлади.*

2. *$k\in\Pi_2$ ва $\mu_\alpha\in L_{\alpha i}^{(2)}$ бўлсин, бунда $\alpha-$ $k\in\Pi_2$ элементнинг $\pm\pi/2$ дан фарқли k_α координатасининг индекси ва $i=0,1.$ У ҳолда $h(k)$ оператор муҳим спектридан чапда ётувчи карралилиги билан ҳисоблаганда $5+i$ та хос қийматга эга бўлади.*

3. *Агар $k\in\Pi_3$ бўлса, у ҳолда ҳар бир $\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\in R_+^3,$ $R_+=(0,\infty)$ учун $h(k)$ оператор муҳим спектридан чапда ётувчи олтита (3 та 2 каррали) хос қийматга эга бўлади.*

1-эслатма. *Таъкидлаб ўтамизки, 1-теоремада $k\in\Pi_1$ ҳолда ҳар бир $\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\in R_+^3$ ва бирор $r,t\in\{0,1\}$ лар учун $(\mu_\alpha,\mu_\beta)\in L_{\alpha r}^{(1)}\times L_{\beta t}^{(1)}$ ҳамда $k\in\Pi_2$ ҳолда ҳар бир $\mu\in R_+^3$ ва бирор $i\in\{0,1\}$ лар учун $\mu_\alpha\in L_{\alpha i}^{(2)}$ ўринли бўлади.*

M_{i0},M_{i1},M_{i2}, $i=1,2,3$ орқали ўзаро кесишмайдиган ушбу $M_{i0}=[0,\mu_i^-(k)],$ $M_{i1}=(\mu_i^-(k),\mu_i^+(k)],$ $M_{i2}=(\mu_i^+(k),\infty)$ тўпламларни белгилаймиз.

2-теорема. *1-фараз бажарилмасин ва $\mu\in M_{1\alpha}\times M_{2\beta}\times M_{3\gamma},$ $\alpha,\beta,\gamma\in\{0,1,2\}$ бўлсин. У ҳолда ҳар бир $k\in\mathbb{T}^3$ учун $h(k)$ оператор муҳим спектридан чапда ётувчи карралилиги билан ҳисоблаганда $\alpha+\beta+\gamma$ та хос қийматга эга бўлади.*

$C(\mathbb{T}^3)$ орқали $\mathbb{T}^3$ даги узлуксиз (даврий) функцияларнинг Банах фазоси ва $G(k;z)$ орқали $G(k,z;p,q)=\dfrac{v(p-q)}{\mathcal{E}_k(q)-z}$ ядроли интеграл операторни ҳамда $G=G(\mathbf{0};0)$ орқали эса ядроси

$$G(p,q)=v(p-q)(\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(q))^{-1},\quad p,q\in\mathbb{T}^3$$

кўринишда аниқланган лимитик интеграл операторни белгилаймиз.

1-таъриф. *Агар 1 сони G операторнинг хос қиймати ва унга мос ψ хос функция қуйидаги*

$$\frac{\psi(p)}{\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(p)}\in L_1(\mathbb{T}^3)\setminus L_2(\mathbb{T}^3)$$

шартни қаноатлантирса, у ҳолда $h(\mathbf{0})$ оператор нолда (муҳим спектрнинг чап четида) виртуал сатҳга эга бўлади деб атаймиз. G операторнинг чизиқли боғланмаган ψ хос векторлари максимал сонини $h(\mathbf{0})$ оператор виртуал сатҳининг карралилиги деб атаймиз.

$\mu^0=[c_i(\mathbf{0};0)]^{-1}, i=1,2,3$ ва $R_{\mathbf{0}}=[0;\mu^0)$, $R_1=\{\mu^0\}$ бўлсин.

3-теорема. *$\mu\in R_\alpha\times R_\beta\times R_\gamma,\alpha,\beta,\gamma\in\{0,1\}$ бўлсин. У ҳолда $h(\mathbf{0})$ оператор нолда $\alpha+\beta+\gamma$ каррали виртуал сатҳга эга бўлади.*

2-эслатма. *3-теореманинг шартларидан $\alpha+\beta+\gamma=0$ ҳолда $h(\mathbf{0})$ оператор $z=0$ да виртуал сатҳга эга эмас деб ҳисобланади. Агар $\alpha+\beta+\gamma=i,$ $i=1,2,3,$ яъни $\mu_i=\mu^0,$ $i\in\{\alpha,\beta,\gamma\}$ бўлса, у ҳолда $h(\mathbf{0})$ оператор $z=0$ да i каррали виртуал сатҳга эга бўлади. Бу ҳолда 1 сони G операторнинг i каррали хос қиймати, унга мос хос функциялари эса*

$\varphi_i(p) = cosp_i, \quad i = 1,2,3$ *кўринишга эга бўлади.*

$\mathbf{v}_1 -$ $L_2(\mathbb{T}^3)$ Гильберт фазосида ядроси

$$v_1(p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{\alpha=1}^{3} cos\, 2np_\alpha$$

кўринишда аниқланган интеграл оператор, бунда $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ бўлсин.

Энди (1) формула билан аниқланган $h(k),\ k \in \mathbb{T}^3$ операторнинг баъзи компакт қўзғалишлардаги, яъни $h(k) - \mathbf{v}_1$ операторнинг спектрал хоссаларини келтирамиз.

4-теорема. *Қуйидаги муносабат ўринли*

$$\sigma_{disc}(h(k)) \subset \sigma_{disc}(h(k) - \mathbf{v}_1),$$

бу ерда $\sigma_{disc}(h(k)) -$ $h(k)$ *операторнинг дискрет спектри. Бундан ташқари, агар* $h(\mathbf{0})$ *оператор* $z = 0$ *да (*i *каррали) виртуал сатҳга эга бўлса, у ҳолда* $h(\mathbf{0}) - \mathbf{v}_1$ *оператор* $z = 0$ *да (камида* i *каррали) виртуал сатҳга эга бўлади.*

3-эслатма. *4-теорема тасдиғидан келиб чиқадики,* $h(k)$ *операторнинг хос қийматлари мавжудлик шарти,* $h(k) - \mathbf{v}_1$ *операторнинг ҳам хос қийматларининг мавжудлик шартидан иборат бўлади ва* $z = 0$ *да* $h(\mathbf{0}) - \mathbf{v}_1$ *оператор виртуал сатҳининг карралилиги* $h(\mathbf{0})$ *оператор виртуал сатҳининг карралилигидан кичик бўлмайди.*

Диссертациянинг **«Панжарадаги икки заррачали системага мос баъзи модел операторларнинг спектрал хоссалари»** деб номланувчи учинчи бобида $d \geqslant 1$ ўлчамли панжарадаги махсус дисперсион функцияли танланган тортишувчи потенциаллар ёрдамида ўзаро таъсирлашувчи ихтиёрий икки квант заррачали системага мос модел операторнинг муҳим спектридан чапда ётувчи хос қийматлари сони ва муҳим спектр чап чеккаси (қуйи бўсағаси) виртуал сатҳ (каррали виртуал сатҳ) ёки оддий хос қиймат (каррали хос қиймат) бўлиши заррачалар квазиимпульси, ўзаро таъсир энергиялари ва панжара ўлчамига боғлиқлиги кўрсатилади ҳамда $d = 3$ бўлганда қаралаётган модел операторнинг баъзи компакт қўзғалишлардаги спектрал хоссалари ўрганилади, бунда қаралаётган модел операторнинг дискрет спектрини сақловчи инвариант қисм фазо қурилади.

$d \geqslant 1$ ўлчамли панжарадаги махсус дисперсион функцияли ва тортишувчи потенциаллар ёрдамида ўзаро таъсирлашувчи ихтиёрий икки квант заррачали системага мос модел оператор чегараланган ўз-ўзига қўшма оператор сифатида $L_2(\mathbb{T}^d)$ фазода қуйидаги формула билан аниқланади

$$h(k) = h_0(k) - \mathbf{v},$$

бу ерда $h_0(k) -$ қуйидаги функцияга кўпайтириш оператори

$$\mathcal{E}_k(p) = \frac{1}{m_1}\varepsilon(p) + \frac{1}{m_2}\varepsilon(p-k), \quad \varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{d}(1 - \cos 2np_i)$$

ва $\mathbf{v} -$ интеграл оператор бўлиб, ядроси қуйидаги кўринишга эга

$$v_0(p) = \sum_{l=0}^{N}\sum_{i=1}^{d} \mu_{li} \cos lp_i .$$

Қайд этиш жоизки, муҳим спектр турғунлиги ҳақидаги Вейл тоеремасига асосан $h(k)$ операторнинг муҳим спектри v компакт қўзғалиш натижасида ўзгармайди ва $h_0(k)$ қўзғалувчи оператор спектри билан устма-уст тушади. Шунинг учун $\sigma_{ess}(h(k))$ муҳим спектр $\mathcal{E}_k(\cdot)$ функциянинг қийматлар соҳаси билан устма-уст тушади, яъни

$$\sigma_{ess}(h(k)) = \sigma(h_0(k)) = [m(k), M(k)], \quad m(k) = \min_{p\in\mathbb{T}^d} \mathcal{E}_k(p), \quad M(k) = \max_{p\in\mathbb{T}^d} \mathcal{E}_k(p).$$

Бундан буён биз

$$n = \begin{cases} 2\ \text{ЭКУК}\{1,2,...,N-1\} & \text{агар} \quad N > 1, \\ 1, & \text{агар} \quad N = 1 \end{cases}$$

деб ҳисоблаймиз, бунда ЭКУК – энг кичик умумий каррали. Қайд этиш керакки, агарда N сони бирор туб соннинг даражаси кўринишида тасвирланса, у ҳолда $\frac{n}{2N}$ каср сон бўлади. Акс ҳолда $\frac{n}{2N}$ сони натурал сон бўлади.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз

$$d(k;z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z}, \quad c_N(k;z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{cos^2 Nsds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z}, \quad s_N(k;z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 Nsds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z},$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_k(p) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2}\cos 2nk + \frac{1}{m_2^2}\cos 2np} \right),$$

$$\mu_N{}^0(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{s_N(k;m(k))}, & \text{агар} \quad N = 1,2, \\ 0, & \text{агар} \quad N \neq 1,2 \end{cases}.$$

2-фараз. $m = m_1 = m_2$ *ва* $k \in \Pi$ *бўлсин, бунда* $\Pi = \{k = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{T}^d :$ *камида* $d-2$ *та* $(d \geq 3)$ *координатаси* $k_\alpha = \pm\frac{\pi}{2n}, \alpha \in \{1,2,\ldots,d\}$ *бўлсин*$\}$.

Изоҳ. $d=1$ *ҳолда* Π *тўплам элементлари* $k = \pm\frac{\pi}{2n}$ *дан иборат деб тушунилади.*

5-теорема. *2-фараз бажарилсин. У ҳолда* $\tilde{\mathcal{E}}_k(p) \equiv \frac{2}{m}$ *ва ихтиёрий* $\mu = (\mu_0, ..., \mu_N) \in \mathbb{R}_+^{N+1}$ *учун* $h(k)$ *операторнинг муҳим спектрдан чапда карралилиги билан қўшиб ҳисоблаганда* $2N+1$ *та хос қиймати бўлади, улар қуйидагича:* $z_0 = \frac{2}{m} - 2\mu_0\pi,$ $z_l = \frac{2}{m} - \mu_l\pi,$ $l = \overline{1,N}.$ *Шунга кўра* z_0 *– оддий,* z_l, $l \geqslant 1$*-лар эса икки каррали хос қийматлардир.*

4-эслатма. *Айтиб ўтиш керакки, агарда* $1 - \frac{\mu^*}{2} d(k, z^*) = 0,$ $z^* < m(k),$ $\mu^* > 0$ *тенглик ўринли бўлиб ва* $\mu_l = \mu^*$ *тенглик ихтиёрий* $l \in \{1,2,3,...,N-1\}$ *да бажарилса, у ҳолда* $z = z^*$ *сони* $h(k)$ *операторнинг камида* $2N-2$ *каррали хос қиймати бўлади.*

6-теорема. *2-фараз бажарилмасин. У ҳолда қуйидаги тасдиқлар ўринли бўлади:*

1. Агар $N=1$, 2 *бўлса, у ҳолда исталган* $\mu=(\mu_0,\dots,\mu_{N-1})\in\mathbb{R}_+^N$ *ва* $\mu_N\in M_\alpha$ *учун* $h(k)$ *операторнинг муҳим спектрдан чапда карралилиги билан қўшиб ҳисоблаганда,* $2N+\alpha$ *та хос қиймати бўлади, бу ерда* $M_0=(0;\mu_N{}^0(k)]$, $M_1=(\mu^0{}_N(k);\infty)$, $\alpha\in\{0,1\}$.

2. $N\neq 1$ *,2 бўлса, у ҳолда исталган* $\mu=(\mu_0,\dots,\mu_N)\in\mathbb{R}_+^{N+1}$ *учун* $h(k)$ *операторнинг муҳим спектрдан чапда карралилиги билан қўшиб ҳисоблаганда,* $2N+1$ *та хос қиймати бўлади.*

$d=3$ бўлсин. $\mathcal{V}$ орқали $\mathbb{T}^3$ аниқланган узлуксиз, квадрати билан интегралланувчи ва ҳар бир аргументи бўйича $\dfrac{\pi}{n}$ даврли функциялар тўпламини белгилаймиз. Равшанки, $\mathcal{V}-$ $L_2(\mathbb{T}^3)$ фазонинг қисм фазоси бўлади.

$v_1\in\mathcal{V}-$ узлуксиз функция, $\mathbf{v}_1-$ $L_2(\mathbb{T}^3)$ фазода $v_1(p)$ ядроли интеграл оператор ва $G(k;z)$, $G_\alpha(k;z),\alpha=0,1-$ мос ҳолда ядроси

$$G(k,z;p,q)=\frac{v_0(p-q)+v_1(p-q)}{\widetilde{\mathcal{E}}_k(q)-z},\quad G_\alpha(k,z;p,q)=\frac{v_\alpha(p-q)}{\widetilde{\mathcal{E}}_k(q)-z},\quad p,q\in\mathbb{T}^3,\ z\leq m(k)$$

кўринишда бўлган интеграл оператор (Бирман-Швингер оператори) бўлсин.

Таъкидлаш жоизки, ихтиёрий $f\in\mathcal{V}$ учун $G(k;z)f=G_1(k;z)f$ тенглик ўринли.

2-таъриф. *Агар 1 сони* $G_0(\mathbf{0};0)$ $(G_1(\mathbf{0};0))$ *операторнинг хос қиймати ва унга мос* ψ *хос функция*

$$\frac{\psi(p)}{\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(p)}\in L_1(\mathbb{T}^3)\setminus L_2(\mathbb{T}^3)$$

шартни қаноатлантирса, у ҳолда $h(\mathbf{0})$ $(h(\mathbf{0})-\mathbf{v}_1)$ *оператор нолда (муҳим спектрнинг чап четида) виртуал сатҳга эга бўлади деб атаймиз.* $G_0(\mathbf{0};0)$ $(G_1(\mathbf{0};0))$ *операторнинг чизиқли боғланмаган* ψ *хос векторларнинг максимал сонини* $h(\mathbf{0})$ $(h(\mathbf{0})-\mathbf{v}_1)$ *оператор виртуал сатҳининг карралилиги деб атаймиз.*

7-теорема. *Ҳар бир* $v_1\in\mathcal{V}$ *учун ушбу*

$$\sigma_{disc}(h(k))\subset\sigma_{disc}(h(k)-\mathbf{v}_1)$$

муносабат ўринли, бунда $\sigma_{disc}(h(k))-$ $h(k)$ *операторнинг дискрет спектри. Бундан ташқари, агар* $h(\mathbf{0})$ *оператор* $z=0$ *да (*r *каррали) виртуал сатҳга эга бўлса, у ҳолда* $h(\mathbf{0})-\mathbf{v}_1$ *оператор* $z=0$ *да (камида* r *каррали) виртуал сатҳга эга бўлади.*

5-эслатма. *7-теорема тасдиғидан келиб чиқадики,* $h(k)$ *операторнинг хос қийматлари мавжудлик шарти,* $h(k)-\mathbf{v}_1$ *операторнинг ҳам хос қийматларининг мавжудлик шартидан иборат бўлади.*

Қуйидаги белгилашларни киритамиз

$$\mu^0(k)=\frac{1}{d(k;m(k))},\quad \mu^c_{Ni}(k)=\frac{1}{c_{Ni}(k;m(k))},\quad \mu^s_{Ni}(k)=\frac{1}{s_{Ni}(k;m(k))},$$

бунда

$$d(k;z)=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{T}^3}\frac{ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z},\quad c_{Ni}(k;z)=\int\limits_{\mathbb{T}^3}\frac{cos^2 Ns_i ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z},\quad s_{Ni}(k;z)=\int\limits_{\mathbb{T}^3}\frac{sin^2 Ns_i ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z},$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_k(p)=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}-\sqrt{\frac{1}{m_1^2}+\frac{2}{m_1m_2}\cos 2nk_i+\frac{1}{m_2^2}}\cos 2np_i\right).$$

1-натижа. $\frac{n}{2N}-$ *натурал (каср) сон бўлсин. У ҳолда ихтиёрий* $\mu=(\mu^{(1)},...,\mu^{(N)})\in R_+^{3N}$, $\mu^{(l)}=(\mu_{l1},\mu_{l2},\mu_{l3})$ *учун* $h(\mathbf{0})-\mathbf{v}_1$ *оператор* $z=0$ *да карралилиги билан камида*

$$\sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{3}\alpha(li)\quad (\sum_{l=1}^{N-1}\sum_{i=1}^{3}\alpha(li)+\sum_{i=1}^{3}\beta(Ni),)$$

виртуал сатҳга эга бўлади, бунда

$$\alpha(li)=\begin{cases}0 & агар \quad \mu_{li}\in[0;\mu^0(\mathbf{0})),\\ 1 & агар \quad \mu_{li}\in\{\mu^0(\mathbf{0})\},\end{cases}\qquad \beta(Ni)=\begin{cases}0 & агар \quad \mu_{Ni}\in[0;\mu^c_{N1}(\mathbf{0})),\\ 1 & агар \quad \mu_{Ni}\in\{\mu^c_{N1}(\mathbf{0})\ \}.\end{cases}$$

$d\geqslant 4$ бўлсин. Қуйидаги белгилашларни киритамиз.

$$b(k;z)=\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z},c_i(k;z)=\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{cos^2 s_i ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z},s_i(k;z)=\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{sin^2 s_i ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z},$$

бунда

$$\tilde{\mathcal{E}}_k(p)=\sum_{i=1}^{d}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}-\sqrt{\frac{1}{m_1^2}+\frac{2}{m_1m_2}\cos 2k_i+\frac{1}{m_2^2}}\cos 2p_i\right),$$

$$\mu^0(k)=\frac{1}{b(k;m(k))},\quad \mu^c_i(k)=\frac{1}{c_i(k;m(k))},\quad \mu^s_i(k)=\frac{1}{s_i(k;m(k))}.$$

Π тўпламни учта $\Pi_\alpha,\ \alpha=0,1,2$ тўпламларга қуйидагича ажратамиз: Π_α тўпламга айнан $d-\alpha$ та координаталари $\pm\frac{\pi}{2}$ қийматни қабул қилувчи $k\in\Pi$ элементларни киритамиз.

8-теорема. *2-фараз бажарилсин. У ҳолда қуйидаги тасдиқлар ўринли:*

1. Агар $k\in\Pi_0$ *бўлса, у ҳолда ихтиёрий* $\mu_i>0,\ i\in\{0,1,2,..,d\}$ *учун* $h(k)$ *оператор карралилиги билан ҳисоблаганда муҳим спектрдан чапда ётувчи айнан* $2d+1$ *та хос қийматга эга.*

2. Агар $k\in\Pi_1(k\in\Pi_2)$ *ва* $k_l\neq\frac{\pi}{2}$ $\left(k_l\neq\frac{\pi}{2},k_r\neq\frac{\pi}{2}\right)$ *бўлса, у ҳолда ихтиёрий* $\mu_i>0,\ \ i\in\{0,1,2,..,d\}$ *учун* $h(k)$ *оператор карралилиги билан ҳисоблаганда муҳим спектрдан чапда ётувчи айнан* $2d+\gamma(l)$ $(2d-1+\gamma(l)+\gamma(r))$ *та хос қийматга эга. Бунда*

$$\gamma(i)=\begin{cases}0, & агар \quad \mu_i\in(0;\mu_i^s(k)],\\ 1 & агар \quad \mu_i\in(\mu_i^s(k);\infty).\end{cases}$$

9-теорема. *2-фараз бажарилмасин. У ҳолда ихтиёрий* $k\in\mathbb{T}^d$ *учун* $h(k)$

оператор карралилиги билан ҳисоблаганда муҳим спектрдан чапда ётувчи айнан $\beta+\sum_{i=0}^{d}\alpha(i)$ *та сондаги хос қийматларга эга, бунда*

$$\beta=\begin{cases}0 \quad агар \quad \mu_0\in(0;\mu^0(k)],\\ 1 \quad агар \quad \mu_0\in(\mu^0(k);\infty),\end{cases} \qquad \alpha(i)=\begin{cases}0 \quad агар \quad \mu_i\in(0;\mu_i^c(k)],\\ 1 \quad агар \quad \mu_i\in(\mu_i^c(k);\mu_i^s(k)],\\ 2 \quad агар \quad \mu_i\in(\mu_i^s(k);\infty).\end{cases}$$

10-теорема. *Фараз қилайлик,* $\mu_0\in(0;\mu^0(\mathbf{0})]$, $\mu_i\in(0;\mu_i^c(\mathbf{0})]$ *ва*

$$\beta=\begin{cases}0 \ агар \ \mu_0\in(0;\mu^0(\mathbf{0})],\\ 1 \ агар \ \mu_0=\mu^0(\mathbf{0}),\end{cases} \qquad \alpha(i)=\begin{cases}0 \ агар \ \mu_i\in(0;\mu_i^c(\mathbf{0})),\\ 1 \ агар \ \mu_i=\mu_i^c(\mathbf{0}),\ i=1,...,d\end{cases}$$

бўлсин. Қуйидаги тасдиқлар ўринли:

1) *агар* $d=4$ *бўлса, у ҳолда* $h(\mathbf{0})$ *оператор* $z=0$ *нуқтада* $\beta+\sum_{i=0}^{4}\alpha(i)$ *каррали виртуал сатҳга эга бўлади;*

2) *агар* $d\geq 5$ *бўлса, у ҳолда* $z=0$ *нуқта* $h(\mathbf{0})$ *оператор учун* $\beta+\sum_{i=0}^{d}\alpha(i)$ *каррали хос қиймат бўлади.*

ХУЛОСА

Диссертация иши панжарадаги махсус дисперсион функцияли ва тортишувчи потенциаллар ёрдамида ўзаро таъсирлашувчи ихтиёрий икки квант заррачали системага мос модел операторларнинг спектрал хоссаларини ўрганишга бағишланган.

Тадқиқотнинг натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Панжарадаги махсус дисперсион функцияли тортишувчи потенциаллар ёрдамида ўзаро таъсирлашувчи ихтиёрий икки квант заррачали системага мос модел операторларнинг муҳим спектрлари ўрни топилган.

2. Бу модел операторлар муҳим спектридан ташқаридаги хос қийматлари сонининг ўзгариши (мавжудлиги ва мавжуд бўлмаслиги) қаралаётган операторлар параметрлари (заррачаларнинг ўзаро таъсир энергияси ва система тўла квазиимпульси) ҳамда панжаранинг ўлчамига боғлиқ эканлиги кўрсатилган.

3. Панжара ўлчами $d = 3,4$ бўлганда квазиимпульснинг ноль қийматида қаралаётган оператор муҳим спектрининг чап четкаси (қуйи бўсағаси)да виртуал сатҳ (каррали виртуал сатҳ) ёки оддий хос қиймат (каррали хос қиймат)га эга бўладиган заррачалар системаси ўзаро таъсир энергияларининг қийматлари топилган.

4. Ўлчам $d \geq 5$ бўлганда муҳим спектрнинг чап четкаси (қуйи бўсағаси) қаралаётган операторнинг (каррали) хос қиймати бўлиши ёки бўлмаслиги кўрсатилган.

5. Тадқиқ этилаётган модел операторларнинг баъзи компакт қўзғалишлардаги спектрал хоссалари ўрганилган, бунда шундай инвариант қисм фазолар қурилганки, компакт қўзғалишли операторларнинг дискрет спектри қаралаётган модел операторларнинг дискрет спектрини сақлайди.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.27.06.2017.FM.02.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ ПРИ САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТЕ

ХУРРАМОВ АБДИМАЖИД МОЛИКОВИЧ

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, АССОЦИРОВАННЫХ СИСТЕМОЙ ДВУХ ЧАСТИЦ НА РЕШЕТКЕ

01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

город Самарканд – 2018 год

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2017.2.PhD/FM55

Диссертация выполнена в Самаркандском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.samdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Лакаев Саидахмат Норжигитович** доктор физико-математических наук, академик
Официальные оппоненты:	**Халмухамедов Алимджан Рахимович** доктор физико-математических наук, профессор
	Имомкулов Севдиёр Акрамович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Каршинский государственный университет**

Защита диссертации состоится «____» _____________2018 года в ____ часов на заседании Научного совета PhD.27.06.2017.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (99866)231-06-32, факс: (99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственном университета (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (99866)231-06-32, факс: (99866) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2018 года.

(протокол рассылки №________ от «____» _______________2018 года).

А.С.Солеев
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

А.М.Халхужаев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.

И.А.Икромов
Заместитель председателя научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и востребованность темы диссертации.

Многочисленные научно-прикладные исследования, проводимые на мировом уровне, приводятся к изучению спектральных свойств модельных операторов, ассоцированных с системой двух квантовых частиц на решетке. Например, модель Бозе-Хаббарда, используемый для описания появления устойчивых квантовых объектов, является теоретическим обоснованием экспериментальь- ного наблюдения и теоретической базой для применения модельных операторов, ассоцированных с системой двух частиц на решетке. Поэтому развитие исследования модельных операторов, ассоцированных с системой двух частиц на решетке, которые встречаются в спектральной теории линейно-ограниченных, самосопряженных операторов, а также в моделях физики твердого тела и решетчатой теории поля, является одним из приоритетных направлений.

Поскольку, спектр модельных операторов, соответствующих системе двух частиц на решетке является довольно чувствительным к изменению квазиимпульса системы, в мире важную роль играет решение проблем, относящихся к исследованию спектров этих модельных операторов, доказательство существования связанных состояний и определение числа связанных состояний. В связи с этим реализация целевых научных исследований в следующих направлениях является одной из важных задач: описать местоположение существенного спектра модельного оператора, ассоцированного системой двух частиц, взаимодействующих спомощью парных короткодействующих потенциалов на решетке, установить пороговые явления спектра, изучить изменение числа собственных значений рассматриваемого модельного оператора, лежащих вне существенного спектра в зависимости от параметров данного оператора и от размерности решетки.

В нашей стране большое внимание уделяется фундаментальным направлениям, имеющим прикладное значение. В частности, ученые нашей страны обратили большое внимание изучению модельных операторов, ассоцированных с системой двух частиц на кубической решетке. Значительные результаты были достигнуты по определению условий существования связанных состояний и их числа вне существенного спектра для модельных операторов, ассоцированных с системой двух частиц на решетке.

В Постановлении Кабинета Министров Республики Узбекистан отмечены основные задачи и направления деятельности при ведении научных исследований в международным стандарте по приоритетным направлениям математики, физики и прикладной математики [1]. При исполнении этого постановления важную роль играет развитие спектральной

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

теории самосопряженных операторов и ее приложения в теоретической физике, физике твердого тела.

Результаты, полученные в данной диссертации, в определенной степени, служат осуществлению задач, поставленных в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и № УП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Основные задачи атомной и молекулярной физики, физики твердого тела, квантовой теории поля приводятся к изучению операторов Шредингера. Наиболее полный обзор результатов по этой области содержится в «энциклопедии современной математической физики» - четырехтомнике М.Рида и Б.Саймона. Операторы Шредингера, соответствующие системам частиц на решетке, впервые рассматривались в 90-х годах прошлого века Д.С.Маттисом, А.И.Могильнером и после чего исследования бурно развивались. В случае оператора Шредингера на решетке в математическом смысле возникают те же проблемы и тот же порядок их изучения, что и в случае непрерывного оператора Шредингера. В непрерывном случае изучение полного двухчастичного гамильтониана с выделением оператора энергию движения центра масс приводится к изучению одночастичного оператора Шредингера и связанные состояния суть собственные векторы оператора энергии с отделенным полным импульсом. На решетке «выделению центра масс» системы отвечает реализация гамильтониана как «расслоенного оператора», т.е. прямого интеграла семейства двухчастичных операторов, зависящих от значений полного квазиимпульса системы.

Задачи о существовании дискретного спектра и определения порогового значения константы связи для непрерывных и дискретных операторов Шредингера, а также для обобщенной модели Фридрихса изучались в работах М.Клауза, Б.Саймона, С.Албеверио, Р.А.Фариа да Вейга, Р.А.Минлоса, С.Н.Лакаева, К.Макарова, З.Э.Муминова, М.Э.Муминова, Ж.И.Абдуллаева. Известно, что с уменьшением константы связи значение энергии связанного состояния двухчастичного оператора Шредингера приближается к краю непрерывного спектра, и при некотором конечном значении константы связи попадает на край. Изучению вопроса о соответствии этому пороговому значению связанного состояния или виртуального уровня посвящены работы Д.Р. Яфаева, Дж. Рауха, Б.Саймона, М. Клауза и С.Н. Лакаева.

Впервые С.Н. Лакаевым доказано существование порогового эффекта для двухчастичного дискретного оператора Шредингера, соответствующего системе двух одинаковых бозонов, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов. В работах С. Албеверио, С. Лакаева, К. Макарова и З. Муминова, а также С.Н. Лакаева и Ш. Алладустова доказаны пороговые эффекты для широкого класса дисперсионных функций и потенциалов взаимодействия частиц.

В работах Д.Р. Яфаева, А.В. Соболева, Ю.Овчинников и И.М.Сигала, Х.Тамура доказано, что если в системе трех частиц две или три двухчастичные подсистемы имеют виртуальный уровень, то у этой трехчастичной системы существует бесконечное число трехчастичных связанных состояний с отрицательной энергией, накапливающихся к нулю. Если такая подсистема не более чем одна, то в работах Д.Р. Яфаева, а также Г.М. Жислина, С.А. Вугальтера доказаны, что дискретный спектр рассматриваемого гамильтониана является конечным.

Существования виртуального уровня для системы $n-$ $(n>3)$ частиц рассмотрено в работах Г.М. Жислина и С.А. Вугальтера.

В работах С.Н.Лакаева, Ш.М.Тилавовой и Ж.И.Абдуллаева изучено существование виртуального уровня для системы двух частиц на решетке, если соответствующие дисперсионные функции линейно зависимы. В работе С.Н.Лакаева и И.Н.Бозорова доказано, что левая граница (дно) непрерывного спектра гамильтониана одной частицы может быть одновременно виртуальным уровнем и собственным значением для рассматриваемого гамильтониана.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполнена диссертация.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ Ф4-ФА-Ф079 «Спектральный анализ гамильтонианов систем с несохраняющимся ограниченным числом частиц на решетке» (2012-2016 гг.) и ОТ-Ф4-66 «Модели систем с ограниченным числом частиц на решетке. Существенный и дискретный спектры операторов энергии» (2017 г.) Самаркандского государственного университета.

Целью исследования является определить число собственных значений модельного оператора, соответствующего системе двух произвольных частиц, взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов притяжения со специальной дисперсионной функцией (описывающей перенос частицы с узла на другой узел решетки).

Задачи исследования:

- Определить условия существования собственных значений, лежащих вне существенного спектра модельного оператора, со специальной дисперсионной функцией, соответствующий системе двух произвольных частиц, взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов притяжения на d-мерной решетке;
- Изучить изменение числа собственных значений, лежащих вне существенного спектра в зависимости от параметров рассматриваемого оператора и от размерности решетки;

- Обнаружить пороговые эффекты для существенного спектра рассматриваемого оператора при размерности решетки $d \geq 3$;

- Изучить спектральные свойства рассматриваемого оператора при некоторых компактных возмущениях.

Объект исследования – модельный оператор, соответствующий системе двух произвольных частиц взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов притяжения специальной дисперсионной функцией.

Предмет исследования – структура и местоположение существенного спектра модельного оператора со специальной дисперсионной функцией, соответствующей системе двух произвольных частиц, взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов притяжения на решетке, проблема существования или отсутствия простого или кратного собственного значения или виртуального уровня, устойчивость дискретного спектра модельного оператора на инвариантных подпространствах при компактным возмущении.

Методы исследования. В диссертации использованы методы линейной алгебры и теории чисел, математического анализа, спектральной теории самосопряженных операторов, функционального анализа и принцип Бирмана-Швингера.

Научная новизна исследования.

- Найдены условия для числа собственных значений, лежащих вне существенного спектра модельного оператора со специальной дисперсионной функцией, соответствующий системе двух произвольных частиц, взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов притяжения на d-мерной решетке, в зависимости от параметров этого оператора (энергия взаимодействия частиц и полного квазиимпульса системы);

- При нулевом значении квазиимпульса системы найдены такие значения энергии взаимодействия частиц, что левые края существенного спектра рассматриваемых операторов являются виртуальным уровнем (кратным виртуальным уровнем) или простым собственным значением (кратным собственным значением) при размерности решетки $d = 3{,}4$.

- Описаны случаи, когда левый край существенного спектра рассматриваемого оператора является или не является (кратным) собственным значением при размерности решетки $d \geq 5$;

- Изучены спектральные свойства рассматриваемого оператора при некоторых компактных вомущениях. Построено инвариантное подпространство, содержащее дискретный спектр рассматриваемого оператора.

Практические результаты исследования состоят в применении выводов об аналитичности связанных состояний при исследовании качественных свойств экспериментальных наблюдений и численных вычислений в физике твердого тела и квантовой механике.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов линейной алгебры и теории чисел, спектрального анализа самосопряженных операторов, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научное значение результатов исследования заключается в том, что они могут быть использованы в спектральной теории самосопряженных операторов, которые возникают в квантовой механике, физике твердого тела, квантовой теории поля, в частности, при решениях задач, связанных со спектром гамильтонианов систем двух частиц на решетке.

Практическое значение диссертационного исследования определяется тем, что полученные в работе научные результаты могут служить теоретической основой экспериментальных наблюдений, проводимых в физике твердого тела и квантовой механике.

Внедрение результатов исследования. На основе полученных результатов относящихся спектральных свойств некоторых модельных операторов:

Существование (кратность) собственных значений модельного оператора, соответствующего системе двух произвольных частиц на решетке использованы в зарубежных статьях (Theor. Math. Phys. 2014, Vol. 180 No 3, pp.1040–1050, Theor. Math. Phys. 2015, Vol. 182 No 3, pp. 381–396, Russian Math. (Iz. VUZ) 2015, Vol. 59 No 6, pp. 18–22, J.Nanosyst.-Phys. Chem. Math. 2016, Vol. 7 No 5, pp. 880–887) для определения спектра модельного оператора, соответствующего системе двух произвольных частиц на решетке. Применение этих научных результатов дало возможность найти число и местоположение собственных значений рассматриваемых операторов;

Инвариантное подпространство, построенное для нахождения числа собственных значений модельного оператора с компактным возмушением, соответствуюшего системе двух произвольных квантовых частиц на решетке использовано для построения инвариантного подпространства для трехчастичного дискретного оператора Шредингера (Технологический университет Малайзии, справка от 26 февраля 2018 года). Применение этих научных результатов дало возможность доказать конечность числа собственных значений, лежащих вне существенного спектра для трехчастичного дискретного оператора Шредингера;

Непрерывность собственного значения модельного оператора, соответствующего системе двух произвольных частиц на решетке использована в исследованиях зарубежного гранта QJ130000.2726.01K82 для описания существенного спектра трехчастичного дискретного оператора Шредингера (Технологический университет Малайзии, справка от 26 февраля 2018 года). Применение этих научных результатов дало возможность описать местоположение существенного спектра в зависимости от параметров трехчастичного оператора Шредингера;

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 3 международных и 5 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов иследования.

По теме диссертации опубликовано 13 научных работ, из них 5 в научных изданиях, входящих в перечень, предложенный Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для зашиты докторских диссертаций, в том числе 2 опубликованы в зарубежных журналах и 3 – в республиканских научных изданиях.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 98 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Предварительные понятия и модельные операторы, соответствуюшие системе двух частиц на решетке»**, приведены необходимые предварительные сведения и утверждения, в частности, теоремы спектральной теории и теории возмущений самосопряженных операторов. Приведены координатное и импульсное представления некоторого модельного оператора, соответствующего системе двух произвольных частиц на решетке.

Вторая глава диссертации, названная **«Спектральные свойства некоторого модельного оператора, соответствующего системе двух частиц на трехмерной решетке»** посвящена исследованию спектральных свойств модельного оператора со специальными дисперсионными функциями, соответствующего системе двух произвольных квантовых частиц, взаимодействующих с помощью потенциала притяжения только в ближайших соседних узлах. Изучена зависимость числа собственных значений рассматриваемого оператора, лежащих слева от непрерывного спектра, в зависимости от полного квазиимпульса системы и от энергия взаимодействия частиц. Кроме того, в зависимости от энергии взаимодействия частиц найдены условия, при которых левый край существенного спектра рассматриваемого оператора является простым (кратным) виртуальным уровнем или собственным значением. Построено инвариантное подпространство, содержащее дискретный спектр рассматриваемого оператора.

Пусть $\mathbb{T}^3 = (-\pi, \pi]^3$ - трехмерный тор, $L_2(\mathbb{T}^3)$ - гильбертово пространство квадратично- интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}^3$. Модельный оператор, соответствующий системе двух произвольных квантовых частиц на трехмерной решетке со специальной дисперсионной функцией, взаимодействующих с помощью потенциала притяжения только в ближайших соседних узлах, действует как ограниченный самосопряженный оператор в пространстве $L_2(\mathbb{T}^3)$ по формуле:

$$h(k) = h_0(k) - \mathbf{v}, \qquad k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{T}^3, \tag{1}$$

где $h_0(k)$ – оператор умножения на функцию

$$\mathcal{E}_k(p) = \frac{1}{m_1}\varepsilon(p) + \frac{1}{m_2}\varepsilon(p-k), \quad \varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{3}(1-\cos 2p_i),$$

и $\mathbf{v}$ -интегральный оператор, порожденный ядром $v(p-s) = \sum_{\alpha=1}^{3}\mu_\alpha \cos(p_\alpha - s_\alpha)$.

Отметим, что из теоремы Вейля о существенном спектре следует, что существенный спектр $\sigma_{ess}(h(k))$ оператора $h(k)$ не меняется при компактном возмущении $\mathbf{v}$ и совпадает со спектром невозмущенного оператора $h_0(k)$. При этом $\sigma_{ess}(h(k))$ совпадает с областью значений функции $\mathcal{E}_k(\cdot)$, т.е:

$$\sigma_{ess}(h(k)) = \sigma(h_0(k)) = [m(k), M(k)], \quad m(k) = \min_{p\in\mathbb{T}^3}\mathcal{E}_k(p), \quad M(k) = \max_{p\in\mathbb{T}^3}\mathcal{E}_k(p).$$

Предположение 1. *Пусть* $m = m_1 = m_2$ *и* $k \in \Pi$*, где*

$$\Pi = \{k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{T}^3 : k_\alpha = \pm\frac{\pi}{2} \quad \text{хотя бы для одного } \alpha \in \{1,2,3\}\}.$$

Введем следуюшие обозначения

$$\mu_i^{\pm}(k) = \frac{c_i(k;m(k)) + s_i(k;m(k)) \pm \sqrt{(c_i(k;m(k)) - s_i(k;m(k)))^2 + 4\xi_i^2(k;m(k))}}{2[c_i(k;m(k))s_i(k;m(k)) - \xi_i^2(k;m(k))]},$$

где

$$c_i(k;z) = \int_{\mathbb{T}^3}\frac{cos^2 s_i ds}{\mathcal{E}_k(s)-z}, \; s_i(k;z) = \int_{\mathbb{T}^3}\frac{sin^2 s_i ds}{\mathcal{E}_k(s)-z}, \; \xi_i(k;z) = \int_{\mathbb{T}^3}\frac{sins_i coss_i ds}{\mathcal{E}_k(s)-z}, \; z \leqslant m(k).$$

Множество Π, введенное в предположении 1 разобьём на три подмножества Π_n, $n = 1,2,3$, заданных следующим образом: в множество Π_n мы включаем те элементы $k \in \Pi$, у которых ровно n координат принимают значения $\pm\pi/2$.

Положим

$$\mu_i^{(1)}(k) = (m\pi\int_{\mathbb{T}^2}\frac{sin^2 s_i ds_\alpha ds_\beta}{\sum\limits_{l\in\{\alpha,\beta\}}(|\cos k_l| - \cos k_l \cos 2s_l)})^{-1}, \; k \in \Pi_1, \; i = \alpha, \beta,$$

где через k_α и k_β, $\alpha < \beta$ обозначены координаты элемента $k \in \Pi_1$, не равные $\pm\pi/2$, пусть также

$$\mu_i^{(2)}(k) = \left(2m\pi^2\int_T \frac{sin^2 s ds}{|\cos k_i| - \cos k_i \cos 2s}\right)^{-1}, \quad k \in \Pi_2,$$

где k_i – координата элемента $k \in \Pi_2$, отличная от $\pm\pi/2$. Введем следующие обозначения:

$$L_{i0}^{(j)} = [0, \mu_i^{(j)}(k)], \quad L_{i1}^{(j)} = (\mu_i^{(j)}(k), \infty), \; i = \alpha, \beta, \quad j = 1{,}2.$$

Теорема 1. *Пусть выполняется предположение 1. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. Пусть $k \in \Pi_1$ *и* $(\mu_\alpha, \mu_\beta) \in L_{\alpha r}^{(1)} \times L_{\beta t}^{(1)}$, *где* $\alpha, \beta \; (\alpha < \beta)$ *– индексы координат* k_α, k_β *элемента* $k \in \Pi_1$, *отличных от* $\pm\pi/2$ *и* $r, t = 0{,}1$. *Тогда оператор* $h(k)$ *имеет с учетом кратности ровно* $4 + r + t$ *собственных значений, лежащих левее существенного спектра.*

2. Пусть $k \in \Pi_2$ *и* $\mu_\alpha \in L_{\alpha i}^{(2)}$, *где* α *– индекс координаты* k_α *элемента* $k \in \Pi_2$, *отличной от* $\pm\pi/2$ *и* $i = 0{,}1$. *Тогда оператор* $h(k)$ *имеет с учетом кратности ровно* $5 + i$ *собственных значений, лежащих левее существенного спектра.*

3. Если $k \in \Pi_3$, *то для каждого* $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in R_+^3$, $R_+ = (0, \infty)$, *оператор* $h(k)$ *имеет ровно 6 (три двухкратных) собственных значений, лежащих левее существенного спектра.*

Замечание 1. *В условиях теоремы 1 в случае* $k \in \Pi_1$ *имеет место включение* $(\mu_\alpha, \mu_\beta) \in L_{\alpha r}^{(1)} \times L_{\beta t}^{(1)}$ *для каждого* $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in R_+^3$ *и для некоторых* $r, t \in \{0,1\}$. *В случае* $k \in \Pi_2$ *имеет место включение* $\mu_\alpha \in L_{\alpha i}^{(2)}$ *для каждого* $\mu \in R_+^3$ *и для некоторого* $i \in \{0,1\}$.

Обозначим через M_{i0}, M_{i1}, M_{i2}, $i = 1{,}2{,}3$ следующие попарно непересекающиеся множества: $M_{i0} = [0, \mu_i^-(k)]$, $M_{i1} = (\mu_i^-(k), \mu_i^+(k)]$, $M_{i2} = (\mu_i^+(k), \infty)$

Теорема 2. *Пусть не выполняется предположение 1 и* $\mu \in M_{1\alpha} \times M_{2\beta} \times M_{3\gamma}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \{0,1,2\}$. *Тогда для каждого* $k \in \mathbb{T}^3$ *оператор* $h(k)$ *имеет с учетом кратности ровно* $\alpha + \beta + \gamma$ *собственных значений, лежащих левее существенного спектра.*

Пусть $C(\mathbb{T}^3)$ – банахово пространство непрерывных (периодических) функций на торе $\mathbb{T}^3$. Обозначим через $G(k; z)$ – интегральный оператор (Бирмана–Швингера) в $C(\mathbb{T}^3)$ с ядром $G(k, z; p, q) = \dfrac{v(p-q)}{\mathcal{E}_k(q) - z}$ и через $G = G(\mathbf{0}; 0)$ предельный интегральный оператор с ядром

$$G(p, q) = v(p-q)(\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(q))^{-1}, \quad p, q \in \mathbb{T}^3.$$

Определение 1. Если число 1 является собственным значением оператора G и соответствующая собственная функция ψ удовлетворяет условию

$$\frac{\psi(p)}{\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(p)} \in L_1(\mathbb{T}^3) \setminus L_2(\mathbb{T}^3),$$

то говорят, что оператор $h(\mathbf{0})$ имеет виртуальный уровень в нуле (на левом краю существенного спектра). Число таких линейно независимых собственных векторов ψ оператора G назовем кратностью виртуального уровня оператора $h(\mathbf{0})$.

Положим $\mu^0=[c(\mathbf{0};0)]^{-1}$ и $R_{\mathbf{0}}=[0;\mu^0)$, $R_1=\{\mu^0\}$.

Теорема 3. *Пусть* $\mu\in R_\alpha\times R_\beta\times R_\gamma$, *где* $\alpha,\beta,\gamma\in\{0,1\}$. *Тогда оператор* $h(\mathbf{0})$ *имеет виртуальный уровень в нуле с кратностью* $\alpha+\beta+\gamma$.

Замечание 2. В условиях теоремы 3 в случае $\alpha+\beta+\gamma=0$ считается, что $z=0$ не является виртуальным уровнем оператора $h(\mathbf{0})$. Если $\alpha+\beta+\gamma=i$, $i=1,2,3$, т. е. $\mu_i=\mu^0$, $i\in\{\alpha,\beta,\gamma\}$, то $z=0$ является i кратным виртуальным уровнем оператора $h(\mathbf{0})$. В этом случае число 1 является собственным значением кратности i оператора G, а соответствующие собственные функции имеют вид $\varphi_i(p)=cosp_i$, $i=1,2,3$.

Пусть $\mathbf{v}_1$ – интегральный оператор в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^3)$, порожденный ядром

$$v_1(p-s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sum_{\alpha=1}^{3}cos2n(p_\alpha-s_\alpha),$$

здесь $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<\infty$.

Теперь приведем спектральные свойствы оператора $h(k)$, $k\in\mathbb{T}^3$, определенного по формуле (1) с некоторым компактным возмущением, т.е. оператора вида $h(k)-\mathbf{v}_1$.

Теорема 4. *Имеет место включение*

$\sigma_{disc}(h(k))\subset\sigma_{disc}(h(k)-\mathbf{v}_1)$,

где $\sigma_{disc}(h(k))$ – *дискретный спектр оператора* $h(k)$. *Кроме того, если оператор* $h(\mathbf{0})$ *имеет (n кратный) виртуальный уровень в нуле, то* $z=0$ *является (не менее n кратным) виртуальным уровнем для оператора* $h(\mathbf{0})-\mathbf{v}_1$.

Замечание 3. *Из теоремы 4 следует, что условие существования собственных значений оператора* $h(k)$, *также является условием существования собственных значений оператора* $h(k)-\mathbf{v}_1$ *и кратность виртуального уровня в нуле оператора* $h(\mathbf{0})-\mathbf{v}_1$ *не меньше чем кратность виртуального уровня в нуле оператора* $h(\mathbf{0})$.

Третья глава диссертации называется **«Спектральные свойства некоторого модельного оператора, соответствующего системе двух частиц на решетке».** Рассматривается модельный оператор, соответствующий системе двух произвольных квантовых частиц на $d\geqslant 1$ -мерной решетке со специальной дисперсионной функцией, взаимодействующих с помощью выбранного потенцала притяжения. Изучено число собственных значений этого оператора, лежащих левее существенного спектра и явление левого края существенного спектра или (кратным) виртуальным уровнем или (кратным) собственным значением в зависимости от квазиимпульса частиц, энергии взаимодействия частиц и от размерности решетки. А также при размерности решетки $d=3$ изучаются спектральные свойства рассматриваемого модельного оператора с некоторым компактным возмущением. Построено инвариантное подпространство, содержащее дискретный спектр рассматриваемого модельного оператора.

Модельный оператор, соответствующий системе двух произвольных квантовых частиц на d -мерной ($d\geqslant 1$) решетке со специальной дисперсионной функцией и взаимодействующих с помощью потенциалов притяжения действует в пространстве $L_2(\mathbb{T}^d)$ как самосопряженный ограниченный оператор по формуле

$$h(k) = h_0(k) - \mathbf{v},$$

здесь $h_0(k)$ – оператор умножения на функцию

$$\mathcal{E}_k(p) = \frac{1}{m_1}\varepsilon(p) + \frac{1}{m_2}\varepsilon(p-k), \quad \varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{d}(1-\cos 2np_i)$$

и $\mathbf{v}$ – интегральный оператор с ядром

$$v_0(p-q) = \sum_{l=0}^{N}\sum_{i=1}^{d}\mu_{li}\cos l(p_i - q_i).$$

Отметим, что из теоремы Вейля о существенном спектре следует, что существенный спектр $\sigma_{ess}(h(k))$ оператора $h(k)$ не меняется при компактном возмущении v и совпадает со спектром невозмущенного оператора $h_0(k)$. При этом существенный спектр $\sigma_{ess}(h(k))$ совпадает с областью значений функции $\mathcal{E}_k(\cdot)$, т.е.:

$$\sigma_{ess}(h(k)) = \sigma(h_0(k)) = [m(k), M(k)], \quad m(k) = \min_{p\in\mathbb{T}^d}\mathcal{E}_k(p), \quad M(k) = \max_{p\in\mathbb{T}^d}\mathcal{E}_k(p).$$

В дальнейшем будем считать, что

$$n = \begin{cases} \text{НОК}\{2,4,...,2(N-1)\} & \text{если} \quad N > 1, \\ 1, & \text{если} \quad N = 1, \end{cases}$$

где НОК – наименьшее общее кратное. Следует отметить, что если N представляется в виде степени некоторого простого числа, то число $\frac{n}{2N}$ является дробным. В противном случае число $\frac{n}{2N}$ является натуральным.

Введем следующие обозначения

$$d(k;z) = \int_{\mathbb{T}}\frac{ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z}, \quad c_N(k;z) = \int_{\mathbb{T}}\frac{\cos^2 Nsds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z}, \quad s_N(k;z) = \int_{\mathbb{T}}\frac{\sin^2 Nsds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z},$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_k(p) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2}\cos 2nk + \frac{1}{m_2^2}}\cos 2np\right),$$

$$\mu_N{}^0(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{s_N(k;m(k))}, & \text{при} \quad N = 1, 2, \\ 0, & \text{при} \quad N \neq 1, 2. \end{cases}$$

Предположение 2. *Пусть* $m = m_1 = m_2$ *и* $k \in \Pi$*, где*

$\Pi = \{k = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{T}^d$: *хотя бы* $d-2$ $(d \geq 3)$ *координаты равны*

$$k_\alpha = \pm\frac{\pi}{2n}, \alpha \in \{1,2,\ldots,d\}\}.$$

Замечание. *Считаем, что при* $d=1$ *элементы множества* Π *состоят из* $k=\pm\dfrac{\pi}{2n}$.

Теорема 5. *Пусть выполняется предположение 2. Тогда* $\tilde{\mathcal{E}}_k(p)\equiv\dfrac{2}{m}$ *и для любого* $\mu=(\mu_0,...,\mu_N)\in\mathbb{R}_+^{N+1}$ *оператор* $h(k)$ *имеет ровно* $2N+1$ *собственных значений с учетом кратности, которые имеют вид:* $z_0=\dfrac{2}{m}-2\mu_0\pi,\ \ z_l=\dfrac{2}{m}-\mu_l\pi,\ l=\overline{1,N}.$ *При этом* z_0- *простое, а* z_l, $l\geqslant 1$*-двухкратное собственное значение.*

Замечание 4. *Следует отметить, что если* $1-\dfrac{\mu^*}{2}d(k,z^*)=0,\quad z^*<m(k),$ $\mu^*>0$ *и* $\mu_l=\mu^*$ *для всех* $l\in\{1,2,3,...,N-1\}$, *то число* $z=z^*$ *является не менее* $2N-2$ *кратным собственным значением оператора* $h(k)$.

Теорема 6. *Пусть не выполняется предположение 2. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) Если $N=1,2$, *то для любого* $\mu=(\mu_0,...,\mu_{N-1})\in\mathbb{R}_+^N$ *и* $\mu_N\in M_\alpha$ *оператор* $h(k)$ *имеет ровно* $2N+\alpha$ *собственных значений, с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра, где* $M_0=(0;\mu_N{}^0(k)],\quad M_1=(\mu^0{}_N(k);\infty),$ $\alpha\in\{0,1\}$.

2) Если $N\neq 1,2$, *то для любого* $\mu=(\mu_0,...,\mu_N)\in\mathbb{R}_+^{N+1}$ *оператор* $h(k)$ *имеет ровно* $2N+1$ *собственных значений, с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра.*

Пусть $d=3$. Обозначим через $\mathcal{V}$ множество непрерывных функций, квадратично-интегрируемых на $\mathbb{T}^3$ и периодичных по каждому аргументу, с периодом $\dfrac{\pi}{n}$. Ясно, что $\mathcal{V}$ является подпространством пространства $L_2(\mathbb{T}^3)$.

Пусть $v_1\in\mathcal{V}-$ непрерывная функция, $\mathbf{v}_1$ – интегральный оператор в $L_2(\mathbb{T}^3)$, с ядром $v_1(p-s)$ и $G(k;z)$, $G_\alpha(k;z),\alpha=0,1-$ интегральные операторы (Бирмана-Швингера) с ядрами соответственно

$$G(k,z;p,q)=\frac{v_0(p-q)+v_1(p-q)}{\tilde{\mathcal{E}}_k(q)-z},\qquad G_\alpha(k,z;p,q)=\frac{v_\alpha(p-q)}{\tilde{\mathcal{E}}_k(q)-z},\quad p,q\in\mathbb{T}^3,\ z\le m(k)$$

Следует отметить, что для любого $f\in\mathcal{V}$ имеет место равенство $G(k;z)f=G_1(k;z)f$.

Определение 2. *Если число 1 является собственным значением оператора* $G_0(\mathbf{0};0)$ $(G_1(\mathbf{0};0))$ *и соответсвующая собственная функция* ψ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\psi(p)}{\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(p)}\in L_1(\mathbb{T}^3)\setminus L_2(\mathbb{T}^3),$$

то говорят, что оператор $h(\mathbf{0})$ $(h(\mathbf{0})-\mathbf{v}_1)$ *имеет виртуальный уровень в нуле (на левом крае существенного спектра). Максимальное число таких* *линейно независимых собственных векторов* ψ *оператора* $G_0(\mathbf{0};0)$ $(G_1(\mathbf{0};0))$ *назовем кратностью виртуального уровня оператора* $h(\mathbf{0})$ $(h(\mathbf{0})-\mathbf{v}_1)$.

Теорема 7. *Для каждого* $v_1 \in \mathcal{V}$ *имеет место включение*

$$\sigma_{disc}(h(k)) \subset \sigma_{disc}(h(k)-\mathbf{v}_1),$$

где $\sigma_{disc}(h(k))$ – *дискретный спектр оператора* $h(k)$. *Кроме того, если оператор* $h(\mathbf{0})$ *имеет (*r*-кратный) виртуальный уровень в нуле, то нуль является (не менее* r *- кратным) виртуальным уровнем оператора* $h(\mathbf{0})-\mathbf{v}_1$.

Замечание 5. *Из теоремы 7 следует, что условие существования собственных значений оператора* $h(k)$, *также является условием существования собственных значений оператора* $h(k)-\mathbf{v}_1$.

Введем следующие обозначения

$$\mu^0(k)=\frac{1}{d(k;m(k))},\quad \mu_{Ni}^c(k)=\frac{1}{c_{Ni}(k;m(k))},\quad \mu_{Ni}^s(k)=\frac{1}{s_{Ni}(k;m(k))},$$

где

$$d(k;z)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^3}\frac{ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z},\quad c_{Ni}(k;z)=\int_{\mathbb{T}^3}\frac{cos^2 Ns_i ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z},\quad s_{Ni}(k;z)=\int_{\mathbb{T}^3}\frac{sin^2 Ns_i ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z},$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_k(p)=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}-\sqrt{\frac{1}{m_1^2}+\frac{2}{m_1m_2}\cos 2nk_i+\frac{1}{m_2^2}}\cos 2np_i\right).$$

Следствие 1. *Пусть* $\frac{n}{2N}$ – *натуральное (дробное) число Тогда для любого* $\mu=(\mu^{(1)},...,\mu^{(N)})\in R_+^{3N}$, $\mu^{(l)}=(\mu_{l1},\mu_{l2},\mu_{l3})$ *оператор* $h(\mathbf{0})-\mathbf{v}_1$ *имеет виртульный уровень в нуле с учетом кратности не менее*

$$\sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{3}\alpha(li)\quad \left(\sum_{l=1}^{N-1}\sum_{i=1}^{3}\alpha(li)+\sum_{i=1}^{3}\beta(Ni),\right)$$

где

$$\alpha(li)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad \mu_{li}\in[0;\mu^0(\mathbf{0})),\\ 1, & \text{если}\quad \mu_{li}\in\{\mu^0(\mathbf{0})\},\end{cases}\qquad \beta(Ni)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad \mu_{Ni}\in[0;\mu_{N1}^c(\mathbf{0})),\\ 1, & \text{если}\quad \mu_{Ni}\in\{\mu_{N1}^c(\mathbf{0})\}.\end{cases}$$

Пусть $d \geqslant 4$. Положим

$$b(k;z)=\int_{\mathbb{T}^d}\frac{ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z},c_i(k;z)=\int_{\mathbb{T}^d}\frac{cos^2 s_i ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z},s_i(k;z)=\int_{\mathbb{T}^d}\frac{sin^2 s_i ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z},$$

здесь

$$\tilde{\mathcal{E}}_k(p)=\sum_{i=1}^{d}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}-\sqrt{\frac{1}{m_1^2}+\frac{2}{m_1m_2}\cos 2k_i+\frac{1}{m_2^2}}\cos 2p_i\right),$$

$$\mu^0(k)=\frac{1}{b(k;m(k))},\quad \mu_i^c(k)=\frac{1}{c_i(k;m(k))},\quad \mu_i^s(k)=\frac{1}{s_i(k;m(k))}.$$

Множество Π разобьём на три подмножества Π_α, $\alpha=0,1,2$ следующим образом: в множество Π_α мы включаем те элементы $k\in\Pi$, у которых ровно $d-\alpha$ координат принимают значения $\pm\pi/2$.

Теорема 8. *Пусть выполняется предположение 2. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *Если* $k \in \Pi_0$, *то для любого* $\mu_i > 0,\ i \in \{0,1,2,...,d\}$ *оператор* $h(k)$ *имеет ровно* $2d+1$ *собственных значений с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра.*

2) *Если* $k \in \Pi_1 (k \in \Pi_2)$ *и* $k_l \neq \frac{\pi}{2}$ $\left(k_l \neq \frac{\pi}{2}, k_r \neq \frac{\pi}{2}\right)$, *то для любого* $\mu_i > 0,\ i \in \{0,1,2,...,d\}$ *оператор* $h(k)$ *имеет ровно* $2d+\gamma(l)$ $(2d-1+\gamma(l)+\gamma(r))$ *собственных значений с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра. Здесь*

$$\gamma(i) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \mu_i \in (0; \mu_i^s(k)], \\ 1 & \text{если} \quad \mu_i \in (\mu_i^s(k); \infty). \end{cases}$$

Теорема 9. *Пусть не выполняется предположение 2. Тогда для любого* $k \in \mathbb{T}^d$ *оператор* $h(k)$ *имеет ровно* $\beta + \sum_{i=0}^{d} \alpha(i)$ *собственных значений с учетом кратности, лежащих левее существенног спектра, где*

$$\beta = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \mu_0 \in (0; \mu^0(k)], \\ 1, & \text{если} \quad \mu_0 \in (\mu^0(k); \infty), \end{cases} \qquad \alpha(i) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \mu_i \in (0; \mu_i^c(k)], \\ 1, & \text{если} \quad \mu_i \in (\mu_i^c(k); \mu_i^s(k)], \\ 2, & \text{если} \quad \mu_i \in (\mu_i^s(k); \infty). \end{cases}$$

Теорема 10. *Предположим, что* $\mu_0 \in (0; \mu^0(\mathbf{0})],\ \mu_i \in (0; \mu_i^c(\mathbf{0})]$ *и*

$$\beta = \begin{cases} 0, \text{ если } \mu_0 \in (0; \mu^0(\mathbf{0})], \\ 1, \text{ если } \mu_0 = \mu^0(\mathbf{0}), \end{cases} \qquad \alpha(i) = \begin{cases} 0, \text{ если } \mu_i \in (0; \mu_i^c(\mathbf{0})), \\ 1, \text{ если } \mu_i = \mu_i^c(\mathbf{0}), i = 1\ ,\ .\ d. \end{cases}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) Если $d=4,$ *то оператор* $h(\mathbf{0})$ *имеет* $\beta + \sum_{i=0}^{4} \alpha(i)$ - *кратный виртуальный уровень в нуле;*

2) Если $d \geq 5$, *то число* $z = 0$ *является* $\beta + \sum_{i=0}^{d} \alpha(i)$ -*кратным собственным значением опертаора* $h(\mathbf{0})$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная диссертация посвящена исследованию спектральных свойств модельного оператора, соответствующего системе двух произвольных квантовых частиц на решетке со специальной дисперсионной функцией и взаимодействующих с помощью потенциалов притяжения.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Найдены структура и местоположение существенного спектра рассматриваемого модельного оператора, соответствующего системе двух произвольных квантовых частиц на решетке со специальной дисперсионной функцией.

2. Показано, что изменение числа (существование или отсутсвие) собственных значений, лежащих левее существенного спектра рассматриваемого оператора зависит от параметров оператора (энергии взаимодействия частиц и полного квазиимпульса системы) и от размерности решетки.

3. Найдены такие значения энергии взаимодействия частиц системы, что левый край существенного спектра рассматриваемого оператора является (кратным) виртуальным уровнем или (кратным) собственным значением модельного оператора при размерности решетки $d = 3,4$.

4. Описаны случаи, когда левый край существенного спектра рассматриваемого оператора размерности решетки $d \geq 5$ является или не является (кратным) собственным значением.

5. Изучены спектральные свойства исследуемого модельного оператора с некоторым компактным возмущением. Построено такое инвариантное подпространство, что дискретный спектр оператора с компактным возмущением содержит дискретный спектр рассматриваемого модельного оператора.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) PhD.27.06.2017.FM.02.01

SAMARKAND STATE UNIVERSITY

KHURRAMOV ABDIMAJID MOLIKOVICH

SPECTRAL PROPERTIES OF SOME MODEL OPERATORS ASSOCIATED TO A SYSTEM OF TWO PARTICLES ON A LATTICE

01.01.01 – Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Samarkand – 2018

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2017.2.PhD/FM55.

Dissertation has been prepared at Samarkand State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.samdu.uz) and the «Ziyonet» Information and educational portal (www.ziyonet.uz)

Scientific supervisor:	**Lakaev Saidahmat Norjigitovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Academician
Official opponents:	**Khalmuhammedov Alimdjan Rakhimovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Imomkulov Sevdiyor Akramovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Leading organization:	**Karshi State University**

Defense will take place «____» _____________2018 at _____ at the meeting of Scientific Council number PhD.27.06.2017.FM.02.01at Samarkand State University. (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32, fax: (99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Samarkand State University (is registered №____) (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (99866) 231-06-32).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2018 year

(Mailing report № ___________on «____» _______________2018 year)

A.S.Soleev
Chairman of scientific council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor

A.M.Khalxujaev
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degrees, D.F.-M.S.

I.A.Ikromov
Acting Scientific secretary of scientific council on award of scientific degrees, D.F.-M.S. professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to study the spectral properties of a model operator associated to a system of two arbitrary particles interacting via pairwise short-range attractive potentials with the special dispersion function (describing the transfer of the particles from a site to another site of a lattice).

The object of the research work-model operators, associated to a system of two arbitrary quantum particles with the special dispersion function (describing the transfer of the particles from a site to another site) interacting via pairwise short-range attractive potentials

Scientific novelty of the research work is as follows:

- It is found the conditions for (existance or absence) number of eigenvalues lying bellow the essential spectrum of a model operator with the special dispersion function, associated to a system of two arbitrary particles interacting via pairwise short-range attractive potentials on *d*-dimensional lattice, depending on the parameters of this operator (on interaction energy of particles and on the interaction of particles and on quasi-momentum of the system);
- At zero value of the quasi-momentum of the system it is found the value of the interaction energy such that the bottoms of the essential spectrum of model operators are the virtual lavel (multiple virtual lavel) or simple eigenvalue (multiple eigenvalue) when the dimension of lattice $d = 3,4$.
- The conditions for being the bottom of the essential spectrum of the operator under consideration an eigenvalue (multiple eigenvalue) in $d \geq 5$ dimensional case are shown;

The spectral properties of the operator under consideration are studied for some compact perturbations. An invariant subspace containing the discrete spectrum of the operator under consideration is constructed.

Implementation of the research results. Based on the results of the spectral properties of some model operators associated to a system of two identical particles on a lattice:

The continuity of the eigenvalue of the model operator associated to the system of two arbitrary particles on the lattice are used in foreign scientific research QJ130000.2726.01K82 to describe the essential spectrum of three-particle discrete Shrödinger operator (certificate of Malaysian University of Technology, February 26, 2018). Using scientific result enabled to describe location the essential spectrum depending on the parameters of the three-particle Shrödinger operator;

An invariant subspace constructed to find the number of eigenvalues of a model operator under compact perturbation associated to a system of two arbitrary quantum particles on a lattice is used to construct an invariant subspace for the three-particle discrete Schrödinger operator (certificate of Malaysian University of Technology, February 26, 2018). Using scientific result enabled to prove the finiteness of the number of eigenvalues lying outside the essential spectrum for the three-particle discrete Schrödinger operator.

Existence (multiplicity) of eigenvalues of model operators associated to a system of two arbitrary particles on a lattice used in foreign articles (Theor. Math. Phys. 2014, Vol. 180 No 3, pp.1040–1050, Theor. Math. Phys. 2015, Vol. 182 No 3, pp. 381–396, Russian Math. (Iz. VUZ) 2015, Vol. 59 No 6, pp. 18–22, J.Nanosyst.-Phys. Chem. Math. 2016, Vol. 7 No 5, pp. 880–887) to define the spectrum of the model operator associated to a system of two arbitrary particles on a lattice. Using scientific result enabled to find the number and location of the eigenvalues of the operators under consideration.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 97 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. М.Э. Муминов, А.М. Хуррамов. Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на решетке // Теоретическая и математическая физика. – Москва, 2013. – т. 177. – №3. – С. 482–496. (№ 11. Springer. IF= 0.7).
2. М.Э. Муминов, А.М. Хуррамов. Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на одномерный решетке // Уфимский математический журнал. - Уфа, 2014. - т. 6. - №2. - С. 102-110. (№ 3. Scopus. IF=0.24).
3. Хуррамов А.М. О компактном возмущении двухчастичного дискретного оператора Шредингера // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2015. – № 4. – С. 160-170. (01.00.00; №6).
4. Хуррамов А.М. Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на *d*- мерной решетке // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2015. – № 1. –С. 136-148. (01.00.00; №6).
5. М.Э. Муминов, А.М. Хуррамов.О спектральных свойствах одного двухчастичного оператора Шредингера на решетке // Самарқанд давлат университети илмий тадқиқотлар ахборотномаси – Самарқанд, 2013. – №5. – 3-8 б. (01.00.00; №2).

II бўлим (II часть; II part)

6. Муминов М.Э., Хуррамов А.М. Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на *d*-мерной решетке // «Математиканинг долзарб муаммолари» илмий-амалий анжумани материаллари. – Наманган, 2016. – С. 356-358.
7. Хуррамов А.М. Икки заррачали дискрет Шрёдингер операторининг компакт қўзғалиши ҳақида // Математик физика ва замонавий анализнинг турдош муаммолари. – Бухоро, 2015. – 60-62 б.
8. Мўминов М.Э., Хуррамов А.М. Бир ўлчамли панжарада икки заррачали гамилътонианнинг спектри ҳақида // Математика ва уни замонавий педагогик технологиялар ёрдамида ўқитиш муаммолари. – Навоий, 2015. – 27-28 б.
9. Муминов М.Э., Хуррамов А.М. Существование собственных значений двухчастичного дискретного оператора Шредингера // Материалы республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения» – Ташкент, 2015. – С.76-77.
10. Муминов М.Э., Хуррамов А.М. О кратности виртуального уровня нижнего края непрерывного спектра одного двухчастичного оператора Шредингера // Третий Международный Российско – Казахский симпозиум

«Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики» – Нальчик, 2014. – С.143-146.

11. Bozorov I.N., Khurramov A.M. On the number of eigenvalues of two particle Hamiltonian on one dimensional lattice // Международная конференция «Прикладной и геометрический анализ» – Самарканд, 2014. – P. 10.

12. Хуррамов А.М., Ачилова М.Р. Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на *d*–мерной решетке // Республика илмий конференцияси материаллари – Навоий, 2014. – С. 287-290.

13. Muminov M.I., Khurramov A.M. On virtual level of two particle Schrodinger operator on lattice // International training-seminars on mathematics in conjunction with the joint mathematics meeting, 2013 between Samarkand State University and Malaysian Mathematical Sciences Society, Malaysia, 2013.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари «СамДУ илмий-ахборотнома» журнали таҳририятида таҳрирдан ўтказилди (7.06.2018 йил).

Босишга рухсат этилди: 13.06.2018 йил.
Бичими 60x84 $^{1}/_{16}$, «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 2,6. Адади: 100. Буюртма: № 227.

Ўзбекистон Республикаси ИИВ Академияси,
100197, Тошкент, Интизор кўчаси, 68.

«АКАДЕМИЯ НОШИРЛИК МАРКАЗИ»
Давлат унитар корхонасида чоп этилди.