**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

---

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ**

**ХОЛМУРОДОВ АБДУЛХАМИД ЭРКИНОВИЧ**

# ҒОВАК-ЭЛАСТИК МУҲИТДА БИР ЎЛЧОВЛИ НОЧИЗИҚЛИ ТЎҒРИ, ТЕСКАРИ ДИНАМИК МАСАЛАЛАРНИ МОДЕЛЛАШТИРИШ ВА ТАДҚИҚ ҚИЛИШ

**05.01.07 – Математик моделлаштириш. Сонли усуллар ва дастурлар мажмуи (физика-математика фанлари)**

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

**ТОШКЕНТ – 2018**

**УДК 519.957**

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси
Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации
Content of the abstract of doctoral (DSc) dissertation

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ**
**ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ**
**DSc.27.06.2017.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ**

**ХОЛМУРОДОВ АБДУЛХАМИД ЭРКИНОВИЧ**

# ҒОВАК-ЭЛАСТИК МУҲИТДА БИР ЎЛЧОВЛИ НОЧИЗИҚЛИ ТЎҒРИ, ТЕСКАРИ ДИНАМИК МАСАЛАЛАРНИ МОДЕЛЛАШТИРИШ ВА ТАДҚИҚ ҚИЛИШ

**05.01.07 – Математик моделлаштириш. Сонли усуллар ва дастурлар мажмуи (физика-математика фанлари)**

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

**ТОШКЕНТ – 2018**

**Фан доктори (Doctor of Science) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2018.2.DSc/FM117 рақам билан рўйхатга олинган.**

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

| | |
|---|---|
| **Илмий маслаҳатчи:** | **Имомназаров Холматжон Худайназарович**<br>физика-математика фанлари доктори,<br>етакчи илмий ходим (Россия, ҲМ ва МГ ИТИ) |
| **Расмий оппонентлар:** | **Урев Михаил Вадимович**<br>физика-математика фанлари доктори, профессор<br>(Россия, ХХРА ва ДХ) |
| | **Хужаёров Бахтиёр Хужаёрович**<br>физика-математика фанлари доктори, профессор |
| | **Хужаев Исматулла Кушаевич**<br>техника фанлари доктори, етакчи илмий ходим |
| **Етакчи ташкилот:** | **Тошкент Ахборот технологиялари университети ҳузуридаги Ахборот-коммуникация технологиялари илмий-инновацион маркази** |

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги Dsc.27.06.2017.FM.01.02 рақамли Илмий кенгашнинг 2018 йил «___»___________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 246-02-24.

Диссертация автореферати 2018 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2018 йил 9 июндаги 6-рақамли реестр баённомаси).

**А. Р. Марахимов**
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш раиси, т.ф.д., профессор

**З.Р. Рахмонов**
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

**М.М.Арипов**
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., профессор

## Кириш (Докторлик диссертацияси аннотацияси)

**Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати.** Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда суюқликлар билан тўйинтирилган ғовак муҳитда тўлқин ҳодисаларни математик моделлаштириш масалаларига келтирилади. Ғовак-эластик муҳит ҳаракатлари математик физика, туташ муҳитлар механикаси, суюқликлар механикаси, кўп фазали динамика ва математик моделлаштириш каби соҳалардаги тадқиқотларнинг объектидир. Кўп фазали муҳит тенгламалари ғалла ва кўмир кукунлари, газланган нефт, томчи ва аэрозоллар ҳаракати, ёқилғининг ёниши: кокс, қурум ва тутуннинг ҳосил бўлиши жараёнлари, суюқликлардаги суспензия ва пуфакларнинг ҳаракати, ғовак муҳитлардаги суюқлик ва газларнинг ҳаракати, эриш ва чўкма ҳосил бўлиш жараёнларини аниқлашда асос сифатида хизмат қилади. Шунинг учун суюқлик билан тўлдирилган ғовак муҳитларда ночизиқли кўндаланг тўлқинларнинг тарқалишини тавсифловчи математик моделларни тадқиқ этиш сейсмоқидирув ва геофизика соҳаларининг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда турли оқимларни тадқиқ этиш, яъни кўп фазалилик эффектларини ҳисобга олиш ҳамда кузатилаётган жараёнларнинг адекват математик моделларини қуриш суюқликлар механикасининг долзарб масалалардан бири ҳисобланади. Икки фазали муҳитлар ҳаракатларини фазаларнинг дастлабки тузилиши ва физикавий хоссаларини ҳисобга олган ҳолда аниқлаш, янги параметрларни киритиш ҳамда бир фазали оқим тенгламаларига қараганда анча мураккаб бўлган тенгламаларни ечишни талаб этади. Бунда гетероген муҳитлардаги фазалараро ва фазалар ичидаги ўзаро таъсирларни аниқ тавсифи ниҳоятда мураккаб ҳамда аҳамиятли натижаларга эришиш ва уларни ечиш учун кўп ҳолларда рационал идеаллаштириш (абстрактциялаш) зарур бўлади. Математик моделлар учун ночизиқли тўғри ва тескари динамик масалаларнинг классик ечимларининг локал мавжудлигини тадқиқ қилиш, кўндаланг тўлқинлар тенгламасининг сингуляр ечимларини қуриш ҳамда уларнинг сонли ҳисоблаш методлари ва алгоритмларини ишлаб чиқиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган туташ муҳитлар механикаси, кўп фазали динамика ва математик моделлаштиришнинг долзарб йўналишларига алоҳида эътибор кучайтирилди. Бу борада ғовак муҳит скелет(каркас)ига нисбатан тарқалаётган тўлдирувчи суюқликдаги тўлқинлар хоссаларини аниқлашда ҳамда кўп фазали муҳитлар механикаси моделларини қуришда салмоқли натижаларга эришилди. «Функционал анализ, математик физика, амалий математика ва математик модделлаштириш» фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш амалий математика фанининг асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда ғовак-эластик муҳитлардаги жараёнларни математик моделлаштириш ва сонли тадқиқ этишни ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарори ва 2017 йил 8 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

**Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги.** Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожлантиришнинг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

**Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи[2].** Кўп фазали муҳитларни математик моделлаштиришга қаратилган илмий тадқиқотни аналитик ва сонли усуллар ёрдамида ечиш, ҳисоблаш алгоритмлари ва дастурий таъминотини ишлаб чиқиш бўйича илмий изланишлар етакчи хорижий давлатларнинг илмий марказлари ва олий таълим муассасалари, шу жумладан, Massachusetts Institute of Technology, Columbia, ва California Institute of Technology, University of Texas, University of California, Berkeley ва Harvard University университетлари (АҚШ), Schlumberger Company, Baker Huges, Cambridge University (Буюк Британия), University of Zielona Gora (Польша), Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics (Германия), Tsinghua University, Beijing, Zhejiang University, Hagzhou, Shandong University (Хитой), Kyungpook National University (Жанубий Корея), Физика-техника институти (Санкт-Петербург), РФА СБ Гидродинамика институти, Иссиқлик физикаси институти, Математика институти, Москва Давлат университети (Россия), Киев Миллий университети (Украина), Ўзбекистон Миллий университети, Қарши Давлат университети (Ўзбекистон) да олиб борилмоқда.

Кўп фазали муҳитларни математик моделлаштириш методларини такомиллаштиришга оид тадқиқотлар натижасида қатор, шу жумладан, қуйидаги илмий натижалар олинган: ўрта қиймат усулига асосланиб ўзаро киришадиган континуумлар динамикаси моделлари қурилган (Cambridge University, Буюк Британия; МДУ, Россия); энтропиянинг локал аддитивлиги, энергияниниг ички ва кинетик энергияларга бўлиниши, тизимости

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги "Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида"ги 292-сон қарори.

[2] Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи www.eriez.com, docs.lib.purdue.edu, www.cargocaresolutions.com, www.sciencedirect.com, www.link.springer.com, www.iccm-central.org, www.digitimes.com, www.ihs.com, www.webofknowledge.com, www.scholar.google.com ва бошқа манбалар асосида ишлаб чиқилган.

термодинамик мувозанатни локал сақланиши, манбаларнинг тенг муносабатга эга эканлиги исботланган (Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Германия); система ҳақидаги энг умумий маълумотлар − сақланиш қонунлари, Галилей алмаштиришлари группасига нисбатан инвариантлик, суюқликнинг ҳаракат тенгламаларини термодинамик мувозанат шартлари билан мутаносиблиги ёрдамида кўп фазали муҳитларнинг математик моделлари қурилган (Kyungpook National University, Жанубий Корея); бир ўлчамли ночизиқли геперболик типли тенгламалар учун тўғри ва тескари масалалар корректлиги ўрганилган (Logo Alpen Adria Universität, Австрия); ўзгарувчан коэффициентли геперболик типдаги тенгламаларнинг сингуляр ечимларини қуриш методлари ишлаб чиқилган (Стеклов номидаги Математика институти, Россия); математик физика тенгламалари учун тескари масалалар тадқиқ этилган (Ҳисоблаш математикаси ва математик геофизика ИТИ, Россия; University of California, АҚШ).

Дунёда бугунги кунда гиперболик тенгламалар ва гиперболик тенгламалар системаси учун бошланғич-чегаравий масалалар тадқиқ этилмоқда, шу жумладан, гиперболик тенгламаларни нур методи ёрдамида ечиш, тескари динамик масалаларни ечиш методлари ишлаб чиқилмоқда, ғовак-эластик муҳит тенгламалари учун тўғри динамик масалаларни сонли ечиш, ғовак-эластик муҳит тенгламалари учун тўғри ва тескари динамик масалаларининг корректлигини текшириш, ғовак-эластик муҳит тенгламалари учун тескари динамик масаланинг турғунлигини баҳолаш, ғовак-эластик муҳит тенгламалари учун тескари динамик масала ечимининг масалада берилганларга узлуксиз боғлиқлиги, ғовак-эластик муҳит тенгламаларини сонли моделлаштириш ва ечимларини топиш каби устувор йўналишларда илмий-тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

**Муаммонинг ўрганилганлик даражаси.** Ночизиқли тўлқин тенгламаси (энергия диссипацияси бўлмаганда) кўп масалаларда учрайди. Масалан, торнинг эластиклик коэффициенти деформацияга боғлиқ бўлганда торнинг тебранишлари диссипациясиз ночизиқли тўлқин тенгламаси билан ифодаланади. Муҳитларнинг бундай модели учун тўғри ва тескари масалалар B. Kaltenbacher, G.Nakamura, M. Watanabe ва бошқаларнинг ишларида ўрганилган. Маълумки, ғовак-эластик муҳит динамик тенгламаларида ишқаланиш коэффициенти (ўтказувчанлик) энергиянинг диссипация-ланишига олиб келади. Кўп ҳолларда ишқалиниш коэффициенти тезликлар айирмасининг функциясидан иборат бўлади (В.Н. Доровский, А.М.Блохин). Бу ҳолда ночизиқли коэффициентларни аниқлаш учун янги тескари масалалар ҳосил бўлади. Бундай муҳитлар динамикасининг тенгламалари квазичизиқли, кинетик параметрлар, умумий ҳолда ўзгарувчан термодинамик миқдорларнинг ночизиқли функциясидан иборат бўлади (В.Н. Доровский, А.М.Блохин; E.Romenski, D.Drikakis, E.Toro; Х.Х. Имомназаров, Н.М. Жабборов). Хусусий ҳолда бу моделлар эластиклик назариясининг бир тезликли квазичизиқли ёки сиқилувчан суюқлик учун диссипацияли Навье-Стокс тенгламаларига айланади. Бу тенгламалар учун масалаларнинг корректлигини аниқлашга кўплаб олимларнинг, жумладан, C.M. Dafermos, W.J. Hrusa, T. J. R. Hughes, T. Kato, J. E. Marsden, J.A. Olowofela, J.A.Adegoke, С.Н. Антонцев, В.Н. Монахов ишлари бағишланган.

Гиперболик тенгламалар учун тескари динамик масалаларни тадқиқ этиш ва ривожлантириш учун турли ёндошишлар М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, А.С. Благовещенский, А.И. Прилепко, Ю.Е. Аниконов, А.Л. Бухгейм, Ю.Л. Гапоненко, С.И. Кабанихин, А.Г. Меграбов, Б.С. Парийский, Д.Г. Орловский, А.Л. Иванков, А.В. Баев, Б.А. Бубнов, Х.Х. Имомназаров, А. Хайдаров, Д.К. Дурдиевлар ишларида келтирилган.

Келтирилган бу ишлар орасида В.Г. Романов, А.С. Благовещенский ва B. Kaltenbacher ишлари диссертация мавзусига энг яқин. Бу ишларда вертикал йўналиш бўйлаб бир жинсли бўлмаган изотроп-эластик муҳитдаги тўлқин тезлигининг тақсимоти эркин сиртга тегишли қўшимча маълумотга кўра тенгламанинг коэффициентини аниқлаш ҳақидаги бир ўлчамли тескари масала қаралади. Бу масала учун ечимнинг мавжудлиги ва унинг бошланғич маълумотларга узлуксиз боғлиқлиги ҳақидаги теоремалар исботланган. Ғовак-эластик муҳитларда ночизиқли тўлқинларнинг тарқалишини математик моделлаштириш ва бунда ҳосил бўлувчи тўғри ва тескари масалалар тўла тадқиқ этилмаган.

**Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги.** Диссертация тадқиқоти Қарши Давлат университетининг А-13-38 «Икки фазали муҳит ночизиқли тўлқин динамикаси учун тўғри ва тескари масалаларнинг назарий ва сонли тадқиқ қилиш» (2015-2017 йиллар) мавзусидаги илмий амалий лойиҳа доирасида бажарилган.

**Тадқиқотнинг мақсади** ғовак муҳитда энергия диссипациясини ҳисобга олган ҳолда ночизиқли тўлқин жараёнларининг математик моделларини такомиллаштириш ҳамда бир ўлчовли ночизиқли тўғри ва тескари динамик масалаларнинг корректлигини асослашдан иборат.

**Тадқиқотнинг вазифалари.** Суюқлик билан тўлдирилган ғовак муҳитларда:

ночизиқли кўндаланг тўлқинларнинг тарқалишини тавсифловчи математик моделни такомиллаштириш;

математик моделлар учун тўғри ва тескари динамик масалаларнинг классик ечимининг локал мавжудлиги ҳақидаги теоремаларни исботлаш;

бир ўлчамли тескари динамик (шу жумладан ночизиқли) масалаларнинг шартли турғунлиги баҳосини топиш;

тўғри динамик масала операторининг Фреше маъносида дифференциалланувчи эканлигини исботлаш;

кўндаланг тўлқин тенгламаларининг сингуляр ечимларини қуриш;

кўндаланг тўлқин тенгламалари учун тескари динамик масалаларни иккинчи тур ночизиқли Вольтерра интеграл тенгламалар системасига келтириш;

тескари динамик масалалар ечимининг ягоналиги ва «кичик соҳада» мавжудлиги ҳақидаги теоремаларни ҳамда тескари динамик масалалар ечимларининг бошланғич маълумотларга узлуксиз боғлиқлигини исботлаш;

кўндаланг тўлқинлар тарқалиши тенгламалари учун тўғри ва тескари масалаларни сонли ҳисоблаш схемаларини ишлаб чиқиш;

ЭҲМда ҳисоблаш экспериментини ўтказиш учун дастур ишлаб чиқиш.

**Тадқиқотнинг объекти** мураккаб реологияли ғовак муҳитларда ночизиқли тўлқин жараёнларидан иборат.

**Тадқиқотнинг предмети** мураккаб реологияли ғовак муҳитларда ночизиқли тўлқинлар тарқалиши жараёнининг математик моделлари, уларни тадқиқ этиш учун сонли алгоритмлар ва дастурий воситалардан иборат.

**Тадқиқот усуллари.** Ночизиқли динамик жараёнларни текширишда математик моделлаштириш, номувозанат термодинамикаси, функционал анализ, ҳисоблаш математикаси методлари, гиперболик системалар учун характеристикалар методи, интеграл тенгламалар методи ҳамда дастурлаш технологияларидан фойдаланилган.

**Тадқиқотнинг илмий янгилиги** қуйидагилардан иборат:

ночизиқли кўндаланг тўлқинларнинг тарқалишини тавсифловчи термодинамик мутаносиб математик модел энергия диссипациясини ҳисобга олган ҳолда такомиллаштирилган;

математик моделлар учун тўғри ва тескари динамик масалаларнинг классик ечимининг локал мавжудлиги ҳақидаги теоремалар исботланган;

бир ўлчамли тескари динамик (шу жумладан ночизиқли) масалаларнинг шартли турғунлиги баҳоси олинган;

тўғри динамик масала операторининг Фреше маъносида дифференциалланувчи эканлиги исботланган;

кўндаланг тўлқин тенгламаларининг сингуляр ечимлари қурилган;

кўндаланг тўлқин тенгламалари учун тескари динамик масалаларни иккинчи тур ночизиқли Вольтерра интеграл тенгламалар системасига келтирилган;

тескари динамик масалалар ечимининг ягоналиги ва «кичик соҳада» мавжудлиги ҳақидаги теоремалар ҳамда тескари динамик масалалар ечимларининг бошланғич маълумотларга узлуксиз боғлиқлиги исботланган;

кўндаланг тўлқинлар тарқалиши тенгламалари учун тўғри ва тескари масалаларни сонли ҳисоблаш схемалари ишлаб чиқилган.

**Тадқиқотнинг амалий натижалари** фазалараро ишқаланиш коэффициентини фазалар нисбий тезлигига боғлиқлигини ва эластик асос (каркас)нинг силжиш коэффициентини деформация тезлигига боғлиқлигини ҳисобга олган ҳолда мос мавжуд математик моделлар такомиллаштирилган ва кўп фазали муҳитлар динамикасини коррект математик тавсифлаш методлари ёриқ-ғовак коллекторларнинг фильтрацияли-сиғимли хусусиятларини башорат қилиш ва уларнинг иш режимларини оптималлаштириш ҳамда углеводородли конларни ишлатиш технологик жараёнлар моделларини такомиллаштиришда қўлланилган.

**Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги** математик моделнинг корректлиги, унинг термодинамика қонуниятлари билан мутаносиблиги, тўлқин жараёнларини тавсифловчи гиперболик тенгламаларнинг ҳосил бўлганлиги, текширишнинг математик қатъий олиб борилганлиги, ечимни топишда математик асосланган методлардан фойдаланилганлиги, олинган ечимларнинг бир фазали муҳит учун мос аниқ ечим билан мутаносиблиги, сонли моделлаштириш натижаларини қабул қилинган мезонлар асосида экспериментал маълумотлар билан қиёсий таҳлилига асосланган.

**Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти.** Олинган натижаларнинг илмий аҳамияти икки фазали ғовак муҳитлар оқимларини ва бунда ҳосил бўлувчи иссиқлик-масса алмашинуви жараёнларининг математик моделларини такомиллаштириш ва асослашдан тортиб, конкрет амалий нефт ва газ механикаси масалаларини ечиш ҳамда таҳлил қилишгача бўлган тадқиқ ишларини сақланиш қонунлари, методлари ва кўп фазали муҳитлар механикаси тенгламалари билан биргаликда амалга ошириш билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти нефт ва газ саноати масалаларини ечиш, иссиқлик энергетикасида, инновацион тўлқинли методларни ишлаб чиқиш, ёриқ-ғовак коллекторларнинг фильтрацияли-сиғимли хусусиятларини башорат қилиш ва уларнинг иш режимларини оптималлаштириш ҳамда углеводородли конларни ишлатишнинг технологик жараёнлари моделларини такомиллаштириш учун хизмат қилади.

**Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши.** Ғовак-эластик муҳит ҳаракатининг энергия диссипацияси ҳисобга олинган модели ҳамда бир ўлчовли ночизиқли тўғри ва тескари динамик масалаларга оид олинган илмий натижалар асосида:

суюқлик билан тўлдирилган ғовак-эластик муҳит ҳаракатининг ночизиқли математик модели 1.3.1.3 рақамли «Методы создания, исследования и идентификации математических моделей о Земли» грант лойиҳасида тўғри ва тескари масалаларни ечишда фойдаланилган (Россия Фанлар академиясининг Сибир бўлими Ҳисоблаш математикаси ва математик геофизика институтининг 2018 йил 14 февралдаги 15301/12-01-31-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши эластик каркас силжиш модулини, суюқлик ва каркас зичликларини, ишқаланиш коэффициентининг чуқурлик бўйича ўзгариш қонунларини аниқлаш имконини берган;

ғовак-эластик муҳит ҳаракатининг термодинамик мутаносиб ночизиқли математик модели 0115РК00542 рақамли «Математическое моделирование волновой динамики многофазных сред с учетом диссипации энергии (прямые и обратные задачи)» грант лойиҳасида бир ўлчовли ночизиқли тўғри ва тескари масалаларни ечишда фойдаланилган (Абай номидаги Қозоғистон Миллий педагогика университети ҳузуридаги Математика, физика ва информатика ИТИнинг 2018 йил 24 майдаги 01-01-56-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши суюқлик билан тўлдирилган ғовак муҳитларда ночизиқли тўлқин тарқалишининг муҳим хусусиятларини тадқиқ этиш имконини берган;

ғовак-эластик муҳит ҳаракатининг ночизиқли математик модели дала ва сеймоқидирув маълумотларини қайта ишлаш жараёнини такомиллаштиришда фойдаланилган («O‘ZBURG‘UNEFTGAZ» акционерлик жамиятининг 2018 йил 23 февралдаги 04/БО-188-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши нефть ва газ соҳасида сейсмоқидирув маълумотларини қайта ишлаш жараёнининг самарадорлигини ва сифатини ошириш имконини берган;

ғовак-эластик муҳит ҳаракатининг ночизиқли математик модели мураккаб геологик шароитларда чуқур жойлашган литолог-стратиграфик комплекслар ва ноанъанавий «қопқонлар»нинг вақт бўйича кесимларини яхшилашда фойдаланилган («OʻZBEKGEOFIZIKA» акционерлик жамиятининг 2018 йил 7 майдаги 16-925-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши сейсмоқидирув маълумотларини қайта ишлаш дастурларини такомиллаштириш имконини берган.

**Тадқиқот натижаларининг апробацияси.** Мазкур тадқиқот натижалари 5 та халқаро ва 8 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

**Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги.** Тадқиқот мавзуси бўйича 29 та илмий иш чоп этилган, шулардан Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация Комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 13 та мақола, жумладан, 6 таси хорижий ва 7 таси республика журналларида нашр этилган.

**Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми.** Диссертация кириш қисми, тўртта боб, хулоса, фойдаланилган адабиётлар рўйхати ва иловалардан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 160 бетни ташкил этган.

## ДИССЕРТАЦИЯ ИШИНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

**Кириш** қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссератациянинг «**Икки тезликли муҳитнинг термодинамик мутаносиб қайтар ҳаракат тенгламалари»** деб номланувчи биринчи боби сақланиш қонунлари ва термодинамика принциплари ёрдамида ишда тадқиқ этилувчи икки тезликли муҳит ҳаракати моделининг тенгламалар системаси энергия диссипациясини ҳисобга олмаган ҳолда тўлиқ келтириб чиқарилган.

Қаралаётган муҳитлар учун ҳолат тенгламалари олинган. Бундан ташқари, ҳаракат тенгламалари эластик ғовак каркас ва тўлдирувчи суюқлик тезликларига нисбатан чизиқлаштирилган.

Қуйидаги белгилашларни киритайлик:

$\rho = \rho_s + \rho_l -$мухит зичлиги, бу ерда $\rho_s$ ва $\rho_l -$мос равишда асос (каркас) ва суюқлик қисмий зичликлари;

$\mathbf{u}(u_i)$ ва $\mathbf{v}(v_i)-$мос равишда асос (каркас) ва суюқлик тезликлари;

$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v} -$нисбий тезлик;

$p-$ суюқлик босими;

$\delta_{ik}, \delta_j^i -$ Кронекер белгилари;

$\mathbf{e}^i -$асоснинг деформацияси репери;

$\mathbf{e}_j -$ қўшма репер, $(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = \delta_j^i$;

$g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) -$ асоснинг метрик тензор деформацияси;

$S -$солиштирма энтропия;

$\mu -$химик потенциал;

$E_0\,(e_0)-$ муҳит (ғовак асос+ғовакдаги суюқлик) нинг бир ҳажм бирлигидаги (бир масса бирлигидаги) энергияси;

$h_{ij} -$ энергиядан $g_{ij}$ метрик тензор бўйича олинган ҳосила;

$T -$температура.

Масса, энтропия ва импульс сақланиш қонунларининг ўринли бўлишини талаб қиламиз:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{F} = 0, \quad \frac{\partial j_i}{\partial t} + \partial_k \Pi_{ik} = 0. \qquad (1)$$

Бу тенгламаларда: $\mathbf{j} -$ҳажм бирлигидаги импульс, $\mathbf{F} -$энтропиянинг қайтар оқими, $\Pi_{ik} -$импульс оқими зичлигининг тензори – ҳозирча аниқланмаган.

Ғовак муҳит деформацияси ушбу

$$\frac{\partial \mathbf{e}^\alpha}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u}, \mathbf{e}^\alpha) = 0, \quad g^{\alpha\beta} = (\mathbf{e}^\alpha, \mathbf{e}^\beta). \qquad (2)$$

тенгламалар билан тавсифланади.

Фараз қиламизки, ғовак муҳитдаги суюқлик ҳаракати тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлсин:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\rho \mathbf{v}, \nabla\right) \mathbf{v} = \alpha \nabla \mu + \beta \nabla T \ . \qquad (3)$$

Бу ерда $\alpha$ ва $\beta$ лар ушбу $S, \rho, g^{\alpha\beta}$ ўзгарувчиларнинг функциялари бўлиб, улар аниқланиши керак.

(1)-(3) тенгламалардаги $\mathbf{j}, \mathbf{F}, \Pi_{ik}$ қайтар оқимлар тезликлар ва термодинамик миқдорларнинг функцияси бўлиши мумкин холос. Бу $\mathbf{j}, \mathbf{F}, \Pi_{ik}$ қайтар оқимларни аниқлаш учун уларнинг қийматларини суюқлик заррачаси қўзғалмас бўлган координаталар системасидаги мос қийматлари билан боғловчи Галилей алмаштиришларидан фойдаланамиз. Қуйидаги муносабатлар сақланиш қонунларини Галилей алмаштиришига нисбатан инвариантлигини таъминлайди:

$$E = E_0 + \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + \left(\mathbf{v}, \mathbf{j}_0\right), \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \rho \mathbf{v}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + S\mathbf{v},$$
$$\Pi_{ik} = \Pi_{0,ik} + \rho v_i v_k + v_i j_{0,k} + v_k j_{0,i}\,; \tag{4}$$

бу ерда нол-индекс миқдорларнинг суюқлик заррачаси қўзғалмас бўлган координаталар системасидаги қийматларига мос келади.

Ҳисоблашлар $\alpha = -\rho, \ \beta = -S$ эканлигини кўрсатади.

Сақланиш қонунлари (1) ва (2), (3) тенгламалар натижа сифатида ушбу

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{Q} = 0, \tag{5}$$

энергиянинг сақланиш қонунининг бажарилишини таъминлайди. Бу ерда $\mathbf{Q}$ – қайтар энергия оқими бўлиб, (4) формулаларга асосан қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \left(\frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + \left(\mathbf{j}_0, \mathbf{v}\right) + E_0\right)\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}^2}{2}\mathbf{j}_0 + \left(\Pi_0, \mathbf{v}\right)$$

ёки

$$\mathbf{Q} = \left(\mu + \frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)\mathbf{j} + \frac{TS}{\rho}\mathbf{j} + \mathbf{u}\left(\mathbf{u}, \mathbf{j}_0\right) + h_{\alpha\beta}\mathbf{e}^{\alpha}\left(\mathbf{u}, \mathbf{e}^{\beta}\right).$$

Ҳажм бирлигидаги импульс $\mathbf{j}$, энтропиянинг қайтар оқими $\mathbf{F}$ ва импульс оқими зичлигининг тензори $\Pi_{ik}$ лар учун қуйидаги формулаларни оламиз:

$$\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{u} + \rho_l \mathbf{v}, \quad \mathbf{F} = \frac{S}{\rho}\mathbf{j},$$
$$\Pi_{i,k} = \rho_s u_i u_k + \rho_l v_i v_k + p\delta_{ik} + h_{\alpha\beta} e_k^{\alpha} e_i^{\beta}.$$

Шундай қилиб, икки тезликли континиум учун эластик деформацияни ҳисобга олиб, энергия диссипациясини эса ҳисобга олмай тўла тенгламалар системаси (қайтар гидродинамик яқинлашиш) келтириб чиқарилди:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \rho_s \mathbf{u} + \rho_l \mathbf{v},$$
$$\frac{\partial (s\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}\left(s\mathbf{j}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \partial_k\left(\rho_s u_i u_k + \rho_l v_i v_k + p\delta_{ik} + h_{ij} g_{jk}\right) = 0 \quad (i,k = 1,2,3), \tag{6}$$
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \nabla\right)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\rho_s}{2\rho}\nabla \mathbf{w}^2 - \frac{h_{ik}}{2\rho}\nabla g_{ik},$$
$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial t} + g_{kj}\partial_i u_j + g_{ij}\partial_k u_j + u_j \partial_j g_{ik} = 0,$$
$$\rho_s = const\sqrt{\det(g_{ik})},$$

$$e_0 = e_0\left(\rho, s, \mathbf{i}_0, g_{ik}\right),\ \mathbf{j}_0 = \rho_s \mathbf{w},\ \rho \mathbf{i}_0 = \mathbf{j}_0,$$

$$de_0 = \frac{p}{\rho^2} d\rho + Tds + (\mathbf{w}, d\,\mathbf{i}_0) + \frac{h_{ik}}{2\rho} dg_{ik}.$$

Бу ерда $e_0 = e_0\left(\rho, s, \mathbf{i}_0, g_{ik}\right) -$ муҳитнинг ҳолат тенгламаси (у берилган деб ҳисобланади), $s-$энтропия, $e_0, e-$энергиялар ва $\mathbf{i}_0-$импульс масса бирлигига келтирилган: $\rho s = S,\quad \rho e_0 = E_0,\quad \rho e = E_0,\quad \rho \mathbf{i}_0 = \mathbf{j}_0$.

Феноменологик назарияда $e_0\left(\rho, s, \mathbf{i}_0, g_{ik}\right)$ ҳолат тенгламаси келтириб чиқарилмайди, у муҳитнинг тузилишига боғлиқ бўлади ва, маълум даражада, тажрибаларда аниқланади. Лекин, $e_0\left(\rho, s, \mathbf{i}_0, g_{ik}\right)$ функционал муносабатга нисбатан баъзи фаразлар қилиб биринчи яқинлашиш формуласини топиш мумкин. Кўп ҳолларда, масалан, товуш тўлқинлари тарқалиши назариясида, яхши натижалар берувчи Гук яқинлашишидан фойдаланиб, қуйидаги биринчи яқинлашиш формуласи топилган:

$$e_0\left(\rho, s, \mathbf{i}_0, g_{ik}\right) = \mathrm{const} + \frac{\lambda}{\delta\rho_0} I_1^2 + \frac{\mu}{4\rho_0} I_2 - \frac{K}{2\rho_0^2} I_1\left(\rho - \rho_0\right) + T_0\left(s - s_0\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\alpha_3 + \frac{K}{\rho_0^3}\right)\left(\rho - \rho_0\right)^2 + \frac{\alpha_2}{2}\left(s - s_0\right)^2 + \alpha_1\left(\rho - \rho_0\right)\left(s - s_0\right) + \frac{\rho_s}{2\rho}\mathbf{w}^2$$

бу ерда

$$I_1 = \delta_{ik}\left(g_{ik} - \delta_{ik}\right),$$

$$I_2 = \delta_{ik}\delta_{jm}\left(g_{im} - \delta_{im}\right)\left(g_{ik} - \delta_{jk}\right),$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

бошқа коэффициентлар эса тажрибалар орқали топилиши мумкин.

Диссертациянинг иккинчи боби «**Икки тезликли муҳитнинг диссипацияли термодинамик мутаносиб ҳаракат тенгламалари**» деб номланиб, ғовак-эластик муҳитда қовушқоқлик ва компоненталараро ишқаланиш омилларини ҳисобга олган ҳолда муҳит ҳаракатининг тенгламалари қурилган.

Юқорида келтирилган (6) тенгламалар системаси икки тезликли континиумнинг эластик деформацияни ҳисобга олиб, энергия диссипациясини эса ҳисобга олмаган ҳолда қайтар ҳаракати учун тўла тенгламалар системасини ифодалайди.

Термодинамик номувозанатлик натижасида (6) тенгламалар системасидаги оқимларда қўшимча қайтмас ҳадлар пайдо бўлади. Бунда қўшимча ҳадларни Галилей алмаштириши билан мослаштириш керак.

Диссипация ҳисобга олинганда ҳам муҳитнинг зичлиги қисмий зичликлар йиғиндисига тенг

$$\rho = \rho_s + \rho_l. \tag{7}$$

Массанинг сақланиш қонуни ифодаловчи тенглама кўриниши ўзгармайди

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{j}=0,$$
$$\mathbf{j}=\rho_s\mathbf{u}+\rho_l\mathbf{v}. \tag{8}$$

Импульснинг сақланиш қонуни тенгламасида қайтар оқим зичлиги тензори $\Pi_{ik}$ га қайтмас симметрик тензор $\pi_{ik}$ ни қўшиш керак:

$$\frac{\partial j_i}{\partial t}+\partial_k\left(\Pi_{ik}+\pi_{ik}\right)=0,$$
$$\Pi_{ik}=\rho_s u_i u_k+\rho_l v_i v_k+p\delta_{ik}+h_{\alpha\beta}e_k^\alpha e_i^\alpha. \tag{9}$$

Бунда $\pi_{ik}$ қайтмас тензорнинг кўриниши ва у кейинроқ аниқланади.

Энергиянинг сақланиш қонунидаги $\mathbf{Q}$ қайтар оқимга $\mathbf{W}$ қайтмас оқимни қўшиш керак. Энергиянинг сақланиш қонуни тенгламаси энди қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\mathbf{Q}+\mathbf{W}\right)=0, \tag{10}$$

$$\mathbf{Q}=\left(\mu+\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)\mathbf{j}+\frac{TS}{\rho}\mathbf{j}+\left(\mathbf{u},\mathbf{j}_0\right)\mathbf{u}+h_{\alpha\beta}\mathbf{e}^\alpha\left(\mathbf{u},\mathbf{e}^\beta\right).$$

Навье-Стокс тенгламаси билан монандлик нуқтаи-назаридан келиб чиқиб, (3) қайтар ҳаракат тенгламаси

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\left(\mathbf{v},\nabla\right)\mathbf{v}=-\nabla\mu-\frac{S}{\rho}\nabla T$$

га энергия диссипацияси ҳолида $\mathbf{f}$ ишқаланиш кучини қўшиш керак:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\left(\mathbf{v},\nabla\right)\mathbf{v}=-\nabla\left(\mu+h\right)-\frac{S}{\rho}\nabla T+\mathbf{f}. \tag{11}$$

Бундан ташқари, градиент белгиси остига диссипатив табиатли $h$ фукция қўшилган.

Диссипатив жараёнлар каркасда қайтмас деформациялар ҳосил қилмайди деб фараз қилинади:

$$\frac{\partial \mathbf{e}^\alpha}{\partial t}+\nabla\left(\mathbf{u},\mathbf{e}^\alpha\right)=0. \tag{12}$$

Муҳитда диссипатив жараёнларни ҳисобга олиш энтропиянинг ўсишига олиб келади ва энтропиянинг кўчиш тенгламаси қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\operatorname{div}\left(S\frac{\mathbf{j}}{\rho}+\frac{\mathbf{q}}{T}\right)=\frac{R}{T}, \tag{13}$$

бу ерда $R-$диссипатив функция. (7)-(13) тенгламалардаги $\pi_{ik},\mathbf{W},\mathbf{f},h,\mathbf{q},R$ қайтмас миқдорларни аниқлаш лозим.

Термодинамиканинг иккинчи қонунини ҳисобга олган ҳолда қаралаётган муҳит учун (7)-(13) тенгламалардан

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\mathbf{Q}+\mathbf{q}+(\pi,\mathbf{v})+h(\mathbf{j}-\rho\mathbf{v})\right)=\frac{1}{T}(\mathbf{q},\nabla T)+h\operatorname{div}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})+$$
$$+\pi_{ik}\partial_k v_i+(j_i-\rho u_i)\left(f_i+\frac{1}{\rho_l}\partial_k\pi_{ik}\right)+T\left(\frac{\partial S}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\frac{S}{\rho}\mathbf{j}+\frac{\mathbf{q}}{T}\right)\right) \tag{14}$$

муносабат топилади. Бу ерда $(\pi,\mathbf{v})$ векторнинг координаталари $(\pi,\mathbf{v})_i=\pi_{ik}v_k$. Бу тенгликдан оқимларни уларнинг қайтар ҳолидаги қийматлари билан таққослаб, қайтмас энергия оқими вектори $\mathbf{W}$ ва диссипатив функция $R$ аниқланади:

$$W_i=q_i+\pi_{ik}v_k+h(j_i-\rho u_i),$$
$$R=-h\operatorname{div}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})-\frac{1}{T}(\mathbf{q},\nabla T)-\pi_{ik}\partial_k v_i-(j_i-\rho u_i)\left(f_i+\frac{1}{\rho_l}\partial_k\pi_{ik}\right). \tag{15}$$

Ушбу $\operatorname{div}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u}),\nabla T,\partial_k v_i$ ва $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ миқдорлар нолга тенг бўлганда қайтмас оқимлар қатнашмаслиги керак. Чизиқли яқинлаштиришда термодинамик оқимлар мос термодинамик кучларга пропорционал бўлиши зарур. Муҳит фақат суюқликдан иборат бўлганда, яъни $\mathbf{u}\to\mathbf{v}$ ва $g^{\alpha\beta}=0$ бўлса қурилаётган назария Навье-Стокс назариясига айланиши керак. Бундан ва Кюри принципини ҳисобга олиб, диссипатив функция учун қуйидаги ифода топилган:

$$R=\zeta_2(\operatorname{div}\mathbf{v})^2+2\zeta_1\operatorname{div}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})\operatorname{div}\mathbf{v}+\zeta_3\left(\operatorname{div}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})\right)^2+\frac{k}{T}(\nabla T)^2+$$
$$+2\bar{\lambda}(\nabla T,\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})+\bar{k}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})^2+\frac{\eta}{2}\left(\partial_k v_i+\partial_i v_k-\frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}\right)^2. \tag{16}$$

Бу ердаги $\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\bar{k},k,\bar{\lambda},\eta$ еттита кинетик коэффициент учун ушбу

$$\zeta_1^2\le\zeta_2\zeta_3,\ \zeta_3\ge 0;\quad \bar{\lambda}^2\le\frac{k\bar{k}}{T},\quad k\ge 0;\quad \eta\ge 0$$

шартлар бажарилади. Умумий ҳолда бу коэффициентлар $\rho,S,g^{\alpha\beta}$ ва $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ миқдорларнинг функциясидан иборат.

Барча қайтмас оқимларни аниқлаб, икки тезликли, бир компонентаси эластик бўлган қайтмас гидродинамика тенгламаларининг тўла системаси ҳосил қилинди:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{j}=0,$$
$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+(\mathbf{u},\nabla)u_i=-\frac{1}{\rho}\partial_i p-\frac{\rho_l}{2\rho}\partial_i\mathbf{w}^2+\frac{\rho_l}{2\rho\rho_s}h_{\alpha\beta}\partial_i g^{\alpha\beta}+$$
$$+\bar{\lambda}\frac{\rho_l}{\rho_s}\partial_i T+\bar{k}\frac{\rho_l}{\rho_s}(j_i-\rho u_i)-\frac{1}{\rho_s}\partial_k\left(h_{\alpha\beta}e_i^\alpha e_k^\beta\right),$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) v_i = -\frac{1}{\rho}\partial_i p + \frac{\rho_s}{2\rho}\partial_i \mathbf{w}^2 - \frac{h_{\alpha\beta}}{2\rho}\partial_i g^{\alpha\beta} -$$

$$-\bar{\lambda}\partial_i T - \bar{k}\left(j_i - \rho u_i\right) + \frac{1}{\rho_l}\partial_k\left(\eta\left(\partial_k v_i + \partial_i v_k - \frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}\right)\right) + \qquad (17)$$

$$+\frac{1}{\rho_l}\partial_i\left(\zeta_1 \operatorname{div}\left(\mathbf{j} - \rho\mathbf{u}\right) + \zeta_2 \operatorname{div}\mathbf{v}\right),$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}^\alpha}{\partial t} + \nabla\left(\mathbf{e}^\alpha, \mathbf{u}\right) = 0,$$

$$\rho_s = \frac{\text{const}}{\sqrt{\det\left(g_{\alpha\beta}\right)}}, \qquad \rho = \rho_s + \rho_l, \left(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta\right) = g_{\alpha\beta},$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}S - \frac{k}{T}\nabla T - \bar{\lambda}\left(\mathbf{j} - \rho\mathbf{u}\right)\right) = \frac{R}{T},$$

$$e_0 = e_0\left(\rho, s, \mathbf{i}_0, g_{ik}\right).$$

Бу ерда ҳолат тенгламаси $e_0 = e_0\left(\rho, s, \mathbf{i}_0, g_{ik}\right)$ берилган деб ҳисобланади.

Ҳаракатнинг олинган диссипатив тенгламалари товуш тўлқинларининг сўниш масаласини, яъни бўйланма ва кўндаланг товуш тўлқинларидаги тебранишларнинг сўниш табиатини аниқлашга имкон беради.

Қаралаётган муҳитда компоненталараро ишқаланишни ҳисобга олиб, суюқликдаги қовушқоқликни эса ҳисобга олмаган ҳолда товуш тўлқинларининг сўниши ўрганилган.

Боб охирида бир ўлчамли кўндаланг тўлқинларни тавсифловчи ночизиқли тенгламалар ҳосил қилинган. Фараз қилинадики, компоненталараро ишқаланиш мавжуд бўлиб, қовушқоқлик, температура эффектлари нолга тенг:

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \eta = \bar{\lambda} = 0.$$

$x$ ўқи бўйлаб ҳаракатда $\mathbf{u} = (0, u(t,x), 0)$ ва $\mathbf{v} = (0, v(t,x), 0)$ бўлсин. Кинетик параметр $\bar{k}$ (ишқаланиш коэффициенти) тезликлар айирмасига $\bar{k} = \chi(u - v)$, силжиш модули $\mu$ эса деформация градиентига боғлиқ $\mu = \mu(u_x)$ деб ҳисоблаб, умумий ҳаракат тенгламалари (17) дан қуйидаги суюқлик билан тўлдирилган ғовак-эластик муҳитда тарқаладиган кўндаланг тўлқин учун ночизиқли тенгламалар системаси топилган:

$$\begin{cases} \rho_s u_t = \sigma_x - \rho_l^2\left(u - v\right)\chi(u - v), \\ \sigma_t = \mu(u_x)u_x, \\ \rho_l v_t = \rho_l^2\left(u - v\right)\chi(u - v). \end{cases} \qquad (18)$$

Учинчи боб «**Кўндаланг тўлқин тенгламаси учун тўғри масалаларнинг математик моделлари ва уларнинг тадқиқи**» деб аталади.

Бобда ғовак-эластик муҳит ночизиқли ва чизиқли тўғри динамик масалалар қўйилган, аналитик ҳамда сонли тадқиқ этилган.

Ғовак-эластик муҳитнинг $u$ ва $v$ тезликларига нисбатан ночизиқли бир ўлчамли тенгламалар системаси (18) учун қуйидаги бошланғич-чегаравий масала қаралган:

$$\rho_s u_{tt} = \left(\mu(u_x)u_x\right)_x - \rho_l^2\left(\left(u-v\right)\chi(u-v)\right)_t, \quad x\in(0,L), \quad t\in(0,T), \tag{19}$$

$$\rho_l v_t = \rho_l^2\left(u-v\right)\chi(u-v), \quad x\in(0,L), \quad t\in(0,T), \tag{20}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x),\ u_t\big|_{t=0} = u_1(x), \ \ v\big|_{t=0} = 0, \quad x\in(0,L), \tag{21}$$

$$u\big|_{x=0} = 0, \ \ \mu(u_x)u_x\big|_{x=L} = f(t), \quad t\in(0,T). \tag{22}$$

Бу ерда $f:[0,T]\to\mathbb{R}$, $u_0:[0,L]\to\mathbb{R}$, $u_1:[0,L]\to\mathbb{R}$. $\mu(s)$ уч марта, $\chi(s)$ икки марта узлуксиз дифференциалланувчи мусбат функциялар деб ҳисобланади. Бошланғич $u_0(x), u_1(x)$ ва чегаравий $f(t)$ функциялардан қуйидаги шартларни қаноатлантириш талаб этилади:

$$u_0\in C^3(0,L), \qquad u_1\in C^2(0,L), \qquad f\in C^2(0,T). \tag{23}$$

Бошланғич-чегаравий масала (19)-(22) нинг классик ечими, яъни $u\in C^{2,2}\left([0,L]\times[0,T]\right)$, $v\in C^{0,1}\left([0,L]\times[0,T]\right)$ функциялар изланади; бунда $C^{k,m}\left([0,L]\times[0,T]\right) - x$ бўйича $k$ марта, $t$ бўйича эса $m$ марта узлуксиз дифференциалланувчи функциялар синфи.

Берилган $\mu$, $\chi$, $\rho_s, \rho_l$ функциялар (коэффициентлар)га кўра (19)–(22) масаладан $u$ ва $v$ силжишларни топиш бир ўлчамли тўғри динамик масала дейилади.

Ушбу $\tilde{\mu}(s)=s\mu(s)$, $\tilde{\chi}(s)=s\chi(s)$ функцияларни киритайлик. Қуйидаги мослашиш шартларининг бажарилишини талаб этамиз:
ўнг чегарада

$$\begin{gathered}\left(\tilde{\mu}^{-1}\circ f\right)(0)=u_0'(L), \quad \left(\tilde{\mu}^{-1}\circ f\right)'(0)=u_1'(L), \\ \rho_s\left(\tilde{\mu}^{-1}\circ f\right)''(0)=\left(\tilde{\mu}(u_0')\right)''(L)-\rho_l^2\left[\left(u_1-\rho_l\tilde{\chi}(u_0)\right)\tilde{\chi}'(u_0)\right]'(L),\end{gathered} \tag{24}$$

ва чап чегарада

$$u_0(0)=u_1(0)=u_0''(0)=u_1''(0)=0. \tag{25}$$

Бирор мусбат $S$ константа учун

$$X=\left\{(\tilde{\mu},\tilde{\chi})\in C^3(0,S)\times C^2(0,S)\,|\,\tilde{\mu}(0)=0, \tilde{\chi}(0)=0\right\}$$

белгилашни киритайлик.

(19)-(22) масаланинг ечимини текшириш мақсадида ушбу

$$D(F)=\left\{\begin{matrix}(\tilde{\mu},\tilde{\chi})\in X\,|\,\tilde{\mu}'(s)\ge\mu_0, \tilde{\mu}''(s)\le C, \tilde{\chi}''(s)\le C, \forall s\in[0,S], \\ (24) \text{ шартлар бажарилган}\end{matrix}\right\}, \tag{26}$$

тўпламда аниқланган $F$ операторни аниқлайлик, бу ерда $\mu_0$ ва $C-$мусбат константалар. Бу $F$ оператор $(\tilde{\mu},\tilde{\chi})\in D(F)$ ни $\tilde{u}:=u(L,\cdot)$га акслантиради, бу ерда

$u(L,\cdot)$функция қуйидаги (27)-(31) масала ечими $u(x,t)$ нинг $x = L$ даги торайиши:

$$\rho_s u_{tt} = \left(\tilde{\mu}(u_x)\right)_x - \rho_l^2 \left(\tilde{\chi}(u-v)\right)_t, \quad x \in (0,L), \quad t \in (0,T), \qquad (27)$$

$$v_t = \rho_l \tilde{\chi}(u-v), \quad x \in (0,L), \quad t \in (0,T), \qquad (28)$$

бошланғич шартлар

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t\big|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in (0,L), \qquad (29)$$

$$v\big|_{t=0} = 0, \quad x \in (0,L), \qquad (30)$$

ва чегаравий шартлар

$$\tilde{\mu}(u_x)\big|_{x=L} = f(t), \quad t \in (0,T), \qquad (31)$$

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad t \in (0,T). \qquad (32)$$

*Теорема 1.* Айтайлик, $T$ етарлича кичик, $S$ эса етарлича катта мусбат сонлар ҳамда (23)-(25) шартлар бажарилган ҳамда $f(0)=0$ ва $f-$қатъий ўсувчи функция бўлсин. У ҳолда ҳар қандай $(\tilde{\mu},\tilde{\chi})\in D(F)$ учун (19)-(22) масала ягона $u \in C^{3,2}([0,L]\times[0,T])$, $v \in C^{1,1}([0,L]\times[0,T])$ ечимга эга. Бунда тўғри масаланинг юқорида киритилган

$$F : D(F) \to C^2(0,T), \quad \tilde{\mu} \mapsto u(L,\cdot),$$

оператори тайинланган $\tilde{\chi}$ учун коррект аниқланган. Бундан ташқари,

$$F : D'(F) \subseteq X' \to C^2(0,T), \; X' = X \cap C^4(0,S), \; D'(F) = D(F) \cap C^4(0,S),$$

оператор Фреше маъносида узлуксиз дифференциалланувчи.

Ғовак-эластик муҳит $z > 0$ ярим фазони эгаллаган ҳамда каркас ва суюқлик силжиш векторлари фақат $t$ ва $z$ га боғлиқ, яъни $U = u_y(z,t)$, $V = v_y(z,t)$ бўлган ҳолда бир ўлчамли «кичик» ҳаракатлар ўрганилган. Бу ҳолда ҳаракатлар чизиқлилаштирилган тенгламалар билан ифодаланади:

$$\rho_s(z)U_{tt} = (\mu(z)U_z)_z - \chi(z)\rho_l^2(z)(U_t - V_t), \qquad (33)$$

$$\rho_l(z)V_{tt} = \chi(z)\rho_l^2(z)(U_t - V_t). \qquad (34)$$

Бу ерда $\chi(z)-$ишқаланиш коэффициенти. Бу (33), (34) тенгламалар ютувчи муҳитда кўндаланг тўлқинларнинг тарқалишини тавсифлайди.

Муҳит $t < 0$ пайтларда тинч ҳолатда

$$U\big|_{t<0}=0, \; U_t\big|_{t<0}=0, \; V\big|_{t<0}=0, \; V_t\big|_{t<0}=0, \qquad (35)$$

$z = 0$ чегарада эса импульсли куч қўйилган

$$\mu U_z\big|_{z=0}=F(t), \qquad (36)$$

бу ерда

$$F(t)=\delta(t)+f(0)\varepsilon(t)+\dots, \qquad (37)$$

$\delta(t)-$Диракнинг дельта функцияси, $\varepsilon(t)-$Хевисайд функцияси бўлсин.

Берилган $\rho_s(z)$ ва $\mu(z)$ функциялар узлуксиз дифференциалланувчи, $\rho_l(z)$ва $\chi(z)$ функциялар эса узлуксиз деб ҳисобланади.

Қўйилган (33)-(37) тўғри масала ечими қуйидаги асимтотик ёйилма кўринишида топилган:

$$U(t,z)=\alpha^s(z)\varepsilon(t-\tau(z))+\beta^s(z)(t-\tau(z))_+ +\frac{1}{2}\gamma^s(z)(t-\tau(z))_+^2+\dots \quad (38)$$

$$V(t,z)=\alpha^l(z)\varepsilon(t-\tau(z))+\beta^l(z)(t-\tau(z))_+ +\frac{1}{2}\gamma^l(z)(t-\tau(z))_+^2+\dots, \quad (39)$$

бу ерда $\alpha^s(z),\beta^s(z),\dots,\ \alpha^l(z),\beta^l(z),\dots$ коэффициентлар ва $\tau(z)$ ушбу

$$\alpha^s(z)=-\frac{1}{\sqrt{\sigma(z)\sigma(0)}}\exp(-\int_0^z\frac{\chi(\xi)\rho_l^2(\xi)}{2\sigma(\xi)}d\xi);$$

$$\beta^s(z)=\frac{1}{\sqrt{\sigma(z)}}\exp(-\int_0^z\frac{\chi(\xi)\rho_l^2(\xi)}{2\sigma(\xi)}d\xi)\left(c_2+\int_0^z\frac{g(\eta)}{2\sqrt{\sigma(\eta)}}\exp(\int_0^\eta\frac{\chi(\xi)\rho_l^2(\xi)}{2\sigma(\xi)}d\xi)d\eta\right),$$

$$c_2=\frac{\sigma'(0)+\chi(0)\rho_l^2(0)}{2\rho_s(0)\mu(0)};$$

$$\alpha^l(z)=0;$$

$$\beta^l(z)=\chi(z)\rho_l(z)\alpha^s(z);$$

$$\tau(z)=\int_0^z\frac{d\xi}{c_t(\xi)},$$

$$c_t(z)=\sqrt{\frac{\mu(z)}{\rho_s(z)}}.$$

формулалар билан аниқланади.

Бундан кейин (33)-(37) тўғри масала гиперболик типли система учун бошланғич-чегаравий масалага келтирилади. Бунинг учун $z$ ўрнига $x$ координата

$$x=\int_0^z\frac{d\xi}{c_t(\xi)} \quad (40)$$

формула орқали киритилади.

Янги номаълум вектор-функция $\Psi$ ва скаляр функция $\Phi$ ушбу

$$\Psi=\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{\sigma}(U_t-U_x)\\ \sqrt{\sigma}(U_t+U_x)\end{pmatrix},\ \Phi=V_t. \quad (41)$$

формулалар билан аниқланади.

Янги номаълум функцияларга нисбатан қуйидаги гиперболик тенгламалар системаси ҳосил қилинган:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\Lambda\frac{\partial\Psi}{\partial x}=\begin{pmatrix}-\frac{\chi}{2}\frac{\rho_l^2}{\rho_s} & -\frac{\chi}{2}\frac{\rho_l^2}{\rho_s}+q\\ -\frac{\chi}{2}\frac{\rho_l^2}{\rho_s}-q & -\frac{\chi}{2}\frac{\rho_l^2}{\rho_s}\end{pmatrix}\Psi+\chi\sqrt{\sigma}\frac{\rho_l^2}{\rho_s}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Phi, \quad (42)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\frac{\chi}{2\sqrt{\sigma}}\rho_l(\Psi_1+\Psi_2)-\chi\,\rho_l\Phi\ , \quad (43)$$

бу ерда

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad q(x) = \frac{\sigma'_x}{2\sigma}. \tag{44}$$

Бошланғич шартлар

$$\Psi \Big|_{t<0} = 0, \; \Phi \Big|_{t<0} = 0 \tag{45}$$

кўринишга эга.

Чегаравий шартлар эса қуйидагича ёзилади:

$$\Psi\Big|_{x=0} = s(t), \tag{46}$$

бунда

$$s(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma(0)}\,\dot{G}(t) - \dfrac{1}{\sqrt{\sigma(0)}} F(t) \\ \sqrt{\sigma(0)}\dot{G}(t) + \dfrac{1}{\sqrt{\sigma(0)}} F(t) \end{pmatrix}, \quad G(t) = U(z,t)\Big|_{z=0}. \tag{47}$$

Топилган (42)-(47) масала (42)-(43) тенгламаларнинг характеристикалари бўйлаб интеграллаш натижасида чизиқли Вольтерра интеграл тенгламалар системасига келтирилади. Бу система «кичик соҳада» (локал) ягона узлуксиз ечимга эга.

Бундан ташқари (42)-(43) гиперболик система ечимининг сингулярлик табиати ҳам ўрганилган.

Ғовак-эластик муҳит учун қўйилган чизиқли бир ўлчамли тўғри масалаларни ечиш учун характеристикалар бўйлаб интеграллаш методидан фойдаланиб сонли алгоритм қурилган ва сонли натижалар олинган.

Бир ўлчамли ночизиқли тўғри (19)-(22) масала сонли ечилган. Бунда вақт бўйича $(\tau)$ ва фазо бўйича $(h)$ дискретлаштириш қадамларига нисбатан иккинчи тартибли аппроксимацияловчи ошкор айирмали схемадан фойдаланилган:

$$\frac{1}{\tau^2}(u_j^{i+1} - 2u_j^i + u_j^{i-1}) = \frac{1}{2\mathrm{h}^2 \rho_s}((\mu_{j+1}^{i-1} + \mu_j^{i-1})(u_{j+1}^i - u_j^i) -$$

$$-(\mu_j^{i-1} + \mu_{j-1}^{i-1})(u_j^i - u_{j-1}^i)) - \frac{1}{\tau\rho_s}\rho_1^2((u_j^i - v_j^i)\chi_j^i - (u_j^{i-1} - v_j^{i-1})\chi_j^{i-1})$$

$$v_j^{i+1} = \rho_1\tau(u_j^{i+1} - v_j^{i+1})\chi_j^i + v_j^i \qquad i = 0,\dots,N, \;\; j = 0,\dots,M$$

бошланғич ва чегаравий шартларнинг дискретлаштирилиши:

$$u_j^0 = 0, \qquad \frac{u_j^1 - u_j^0}{\tau} = \sin(jh), \; v_j^0 = 0, \quad j = 0,\dots,M$$

$$u_0^i = 0, \; u_M^i = 0, \; i = 0,\dots,N$$

Бу айирмали схеманинг турғунлигини таъминлаш мақсадида Курант сонини 0.5 дан кичик танланган.

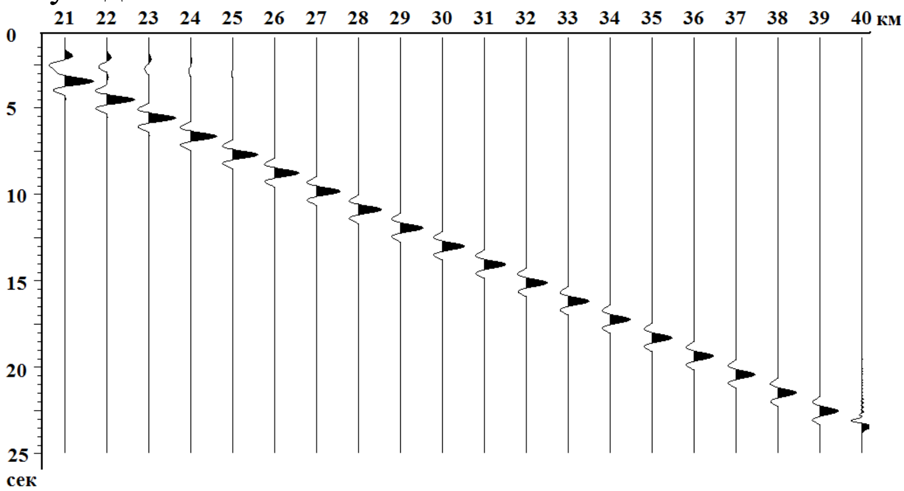
Муҳит модели сифатида биржинсли ютувчи қатлам олинган. Қатламнинг физикавий характеристикалари қуйидагича: $\rho_s^f = 1{,}5\, г / см^3$, $\rho_l^f = 1 г / см^3$, $c_s = 1{,}3 км / сек$, $d = 0{,}1$, $\chi = 1000\, см^3 / г \times сек$, бошланғич шартлар

$u_0(x) = 0$ ва $u_1(x) = \sin x$, манба сигнали $f(t)$ сифатида Пузирёв импульси танланган:

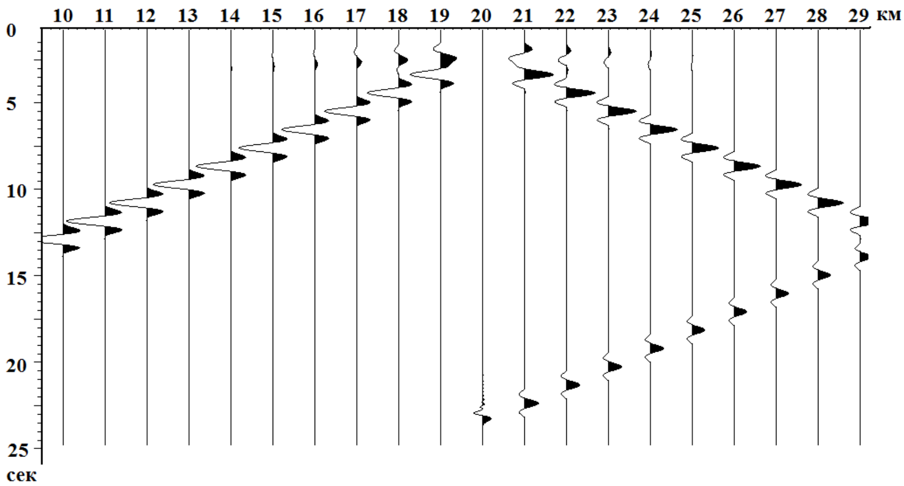
$$f(t) = \exp\left( -\frac{2\pi f_o(t - t_0)^2}{\gamma^2} \right) \sin(2\pi f_0(t - t_0)),$$

бунда $\gamma = 4$, $f_0 = 1$Гц, $t_0 = 1.5$сек.

Берилган муҳит модели учун тўлқин майдонини ҳисоблаш натижасида олинган сонли натижалар 1- расмда келтирилган. Унда тўлқин майдони учун $u$ силжиш сейсмотрассаси тасвирланган. Расмдан кўринадики, масофа бўйлаб тўлқин сўнади.




1-расм. Бир жинсли ғовак қатламдаги $u$ силжиш сейсмотрассаси учун ҳисоблаш сонли натижалари.




2-расм. Қўзғатувчи манбали бир жинсли ғовак қатламдаги $u$ силжиш сейсмотрассаси учун ҳисоблаш сонли натижалари.

2-расмда қўзғатувчи манба ғовак қатламда 20 км чуқурликда жойлашган. Расмдан кўринадики, тўлқин манбадан икки томонга бир хил тезлик билан тарқалади. Бунда тўлқин ўнг чегарадан ундаги чегаравий шарт натижасида қайтади.

Сўнгги тўртинчи боб «**Ғовак муҳитда кўндаланг тўлқинлар учун ночизиқли тескари динамик масалалар тадқиқи**» деб номланиб, боб ғовак-эластик муҳитларда кўндаланг тўлқинлар учун чизиқли ва ночизиқли тескари динамик масалаларни аналитик ва сонли тадқиқ этишга бағишланган.

Тўғри масалада берилган тенгламалар ва бошланғич-чегаравий шартларга кўра номаълум функциялар, яъни масала ечими топилади.

Агар ечимнинг қўшимча бирор хусусияти маълум бўлса, тенгламанинг бирор коэффициенти ва номаълум функцияларни аниқлаш тўғрисидаги тескари қўйиш ва ечиш мумкин. Бундай масалалар катта амалий аҳамиятга эга, масалан, мураккаб сейсмогеологик шароитларда нефт ва газ конларини қидиришда.

Асосий тескари динамик масалаларнинг қўйилишини келтирайлик.

*Масала 1.* Қўшимча

$$U\big|_{z=0} = G(t), \tag{48}$$

маълумотга кўра, (33)-(37) дан $\rho_s(z), \rho_l(z), \chi(z)$ коэффициентларни маълум деб ҳисоблаб, $\mu(z)$ коэффициентни тиклаш.

*Масала 2.* Қўшимча (48) маълумотга кўра, (33)-(37) дан $\rho_s(z), \rho_l(z), \mu(z)$ коэффициентларни маълум деб ҳисоблаб, $\chi(z)$ коэффициентни тиклаш.

*Масала 3.* Қўшимча (48) маълумотга кўра, (33)-(37) дан $\rho_l(z), \mu(z), \chi(z)$ коэффициентларни маълум деб ҳисоблаб, $\rho_s(z)$ коэффициентни тиклаш.

*Масала 4.* Қўшимча (48) маълумотга кўра, (33)-(37) дан $\rho_s(z), \mu(z), \chi(z)$ коэффициентларни маълум деб ҳисоблаб, $\rho_l(z)$ коэффициентни тиклаш.

Тескари масала 1ни қарайлик. $\Psi_1(t,x), \Psi_2(t,x)$ ва $q(x)$ номаълум функцияларга нисбатан (33)-(34) тенгламарни характеристикалар бўйлаб интеграллаш ёрдамида ночизиқли иккинчи тур Вольтерра тенгламаларининг ёпиқ системаси олинган. Олинган системада интеграллаш соҳасининг ўлчовидан иборат бўлган кичик параметр мавжуд. Бу кичик параметрнинг мавжудлиги туфайли, системани ечиш учун Банахнинг сиқиб акслантириш принципи қўлланилган. Тескари масала 1 ечимининг бир қийматли аниқланиши тўғрисидаги локал (кичик $x \in [0, x_0]$ соҳада) теорема исботланган.

Тескари масала 2, 3 ва 4 лар масала 1 га ўхшаш текширилади.

Тескари масалалар ечимларининг кириш маълумотларига узлуксиз боғлиқлиги тўғрисидаги теорема исботланган.

*Теорема 2.* Айтайлик, $s_1(t), s_2(t)$ ва $\tilde{s}_1(t), \tilde{s}_2(t)$ жуфтликларга $q(x)$ва $\tilde{q}(x)$ ечимлар мос келсин. Агар

$$\max_{t\in[0,2x_0]} \left(\left| s_1(t) - \tilde{s}_1(t) \right|, \left| s_2(t) - \tilde{s}_2(t) \right|\right) \le \delta, \tag{49}$$

бўлса, ушбу

$$\left|q(x) - \tilde{q}(x)\right| \le C\delta,$$

баҳолаш ўринли; бу ерда $C > 0-$ ўзгармас сон (у $\delta$ га боғлиқ эмас, $x_0$ ва параметрларга боғлиқ бўлиши мумкин).

Тескари 2, 3 ва 4 масалалар ечимларининг кириш маълумотларига узлуксиз боғлиқлиги тўғрисида шунга ўхшаш теоремалар ўринли.

Сўнгра ночизиқли тескари динамик масалалар текширилган. (19)–(22) масаладан $u, v, \mu$ номаълумларни $\tilde{u} := u(L, \cdot)$ қўшимча маълумот ва $\chi$, $\rho_s, \rho_l$ коэффициентларга кўра аниқлаш ўрганилган.

Ушбу $\tilde{\mu}(s) = s\mu(s)$, $\tilde{\chi}(s) = s\chi(s)$ функцияларни киритайлик. Модел хоссаларини аниқлаш учун учинчи бобда киритилган тенглама қаралади:

$$F(\tilde{\mu}) = \tilde{u}. \tag{50}$$

Оператор $F$ нинг $\delta\tilde{\mu}$ йўналиш бўйича ҳосиласи ушбу

$$F'(\tilde{\mu})[\delta\tilde{\mu}] = \hat{u}(L, \cdot), \tag{51}$$

формула билан ҳисобланади. Бу ердаги $\hat{u}$, $\hat{v}$ функциялар қуйидаги бошланғич-чегаравий масаланинг ечими:

$$\rho_s \hat{u}_{tt} = \left(\tilde{\mu}'(u_x)\hat{u}_x\right)_x - \rho_l^2 \left(\tilde{\chi}'(u-v)(\hat{u}-\hat{v})\right)_t + \left(\delta\tilde{\mu}(u_x)\right)_x,\ x \in (0, L), t \in (0, T), \tag{52}$$

$$\hat{v}_t = \rho_l \tilde{\chi}'(u-v)(\hat{u}-\hat{v}), \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T), \tag{53}$$

бошланғич шартлар

$$\hat{u}\big|_{t=0} = 0, \quad \hat{u}_t\big|_{t=0} = 0, \quad x \in (0, L), \tag{54}$$

$$\hat{v}\big|_{t=0} = 0, \quad x \in (0, L), \tag{55}$$

ва чегаравий шартлар

$$\hat{u}\big|_{x=0} = 0, \quad t \in (0, T), \tag{56}$$

$$\tilde{\mu}'(u_x)\hat{u}_x + \delta\tilde{\mu}(u_x)\big|_{x=L} = 0, \quad t \in (0, T). \tag{57}$$

Бу ердаги (52)-(57) масалада $u, v$ функциялар (27)–(32) бошланғич-чегаравий масаланинг ечими.

Фараз қилайлик, (23), (24), (25) шартлар бажарилган ва $D(F)$ тўплам (26) формула билан аниқланган бўлсин. Қуйидаги функциялар фазосини киритайлик:

$$X = \left\{\tilde{\mu} \in C^3(0, S), \tilde{\chi} \in C^2(0, S) \mid \tilde{\mu}(0) = 0, \tilde{\chi}(0) = 0\right\}, \tag{58}$$

бу ерда $S > 0$ бирор ўзгармас сон. Эътироф этайликки, кўпгина амалий масалаларда муҳит параметрлари қатъий ўсувчи ва силлиқ бўлади. Бу шартларни $F$ операторнинг аниқланиш соҳаси $D(F)$ ва $X$ фазо қаноатлантиради. Муҳит параметрларининг силлиқлиги дастлабки бошланғич-чегаравий масалани эффектив ечиш учун ҳам муҳимдир. Агар $\tilde{\mu}$, $\tilde{\chi}$ функциялар етарлича силлиқ бўлса, муҳит параметрларини аниқлашда Ньютон типидаги методларидан фойдаланиш мумкин.

Ушбу $\breve{u} = u_x$ ва $\breve{v} = v_x$ функцияларни киритайлик. Равшанки, улар

$$\begin{aligned} \rho_s \breve{u}_{tt} &= (\tilde{\mu}'(\breve{u})\breve{u}_x)_x - \rho_l^2 \tilde{\chi}'(u-v)\breve{u}_t - \\ &- \rho_l^2 \left\{\left[\tilde{\chi}'(u-v)\right]_t - \rho_l \left[\tilde{\chi}'(u-v)\right]^2\right\} \ (\breve{u}-\breve{v}), x \in (0, L), t \in (0, T), \end{aligned} \tag{59}$$

$$\breve{v}_t = \rho_l \tilde{\chi}'(u-v)(\breve{u}-\breve{v}), \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T), \tag{60}$$

тенгламаларни,

$$\breve{u}_x\big|_{x=0} = 0, \quad t \in (0,T), \text{ (бир жинсли Нейман шарти)} \tag{61}$$

$$\breve{u}\big|_{x=L} = \tilde{\mu}^{-1}(f(t)), \quad t \in (0,T), \tag{62}$$

чегаравий шартларни,

$$\breve{u}\big|_{t=0} = u_{0x}(x), \quad \breve{u}'_t\big|_{t=0} = u_{1x}(x), \quad \breve{v}\big|_{t=0} = 0, \quad x \in (0,L) \tag{63}$$

бошланғич шартларни қаноатлантиради.

Уларга мос $\tilde{\mu}$ функцияни $\breve{\mu}$ билан белгилаймиз.

Ушбу $F(\breve{\mu}) - F(\tilde{\mu})$ айирма қуйидаги бошланғич-чегаравий масаланинг $\widehat{u}$ , $\widehat{v}$ ечимидаги $\widehat{u}$ функциянинг $x=L$ даги ўнг қиймати каби аниқланади:

$$\rho_s \widehat{u}_{tt} = \left(a\,\widehat{u}_x + \varphi\right)_x - \rho_l^2\left(b\,(\widehat{u} - \widehat{v})\right)_t, \quad x \in (0,L), \quad t \in (0,T), \tag{64}$$

$$\widehat{v}_t = \rho_l b(\widehat{u} - \widehat{v}), \quad x \in (0,L), \quad t \in (0,T), \tag{65}$$

бошланғич қийматлари нолга тенг, чегаравий шартлар эса

$$a\,\widehat{u}_x + \varphi\big|_{x=L} = 0, \quad t \in (0,T), \tag{66}$$

$$\widehat{u}\big|_{x=0} = 0, \quad t \in (0,T), \tag{67}$$

бу ерда

$$\begin{aligned} a(x,t) &= \int_0^1 \tilde{\mu}'(\breve{u}_x(x,t) + (u_x(x,t) - \breve{u}_x(x,t))\theta)d\theta, \\ b(x,t) &= \int_0^1 \tilde{\chi}'(\breve{u}_x(x,t) - \breve{v}_x(x,t) + (u_x(x,t) - v_x(x,t) - (\breve{u}_x(x,t) - \breve{v}_x(x,t))\theta)d\theta, \end{aligned} \tag{68}$$

$$\varphi(x,t) = \delta\tilde{\mu}(u_x(x,t)),$$

$$\delta\tilde{\mu} = \breve{\mu} - \tilde{\mu}.$$

Дастлаб (64)-(67) масалани коэффициентлар ўзгармас, яъни $a(x,t) = \overline{a}$, $b(x,t) = \overline{b}$, $\overline{a}, \overline{b} \in R$ бўлганда қараймиз. Аниқроғи, қуйидаги бошланғич-чегаравий масалани қараймиз:

$$\rho_s \widehat{u}_{tt} = \overline{a}\,\widehat{u}_{xx} - \rho_l^2 \overline{b}\,(\widehat{u}_t - \widehat{v}_t) + \varphi_x, \quad x \in (0,L), \quad t \in (0,T), \tag{69}$$

$$\widehat{v}_t = \rho_l \overline{b}\,(\widehat{u} - \widehat{v}), \quad x \in (0,L), \quad t \in (0,T), \tag{70}$$

бошланғич шартлар нолдан иборат

$$\widehat{u}\big|_{t=0} = 0, \quad \widehat{u}_t\big|_{t=0} = 0, \quad x \in (0,L), \tag{71}$$

$$\widehat{v}\big|_{t=0} = 0, \quad x \in (0,L), \tag{72}$$

ва чегаравий шартлар

$$\overline{a}\,\widehat{u}_x + \varphi\big|_{x=L} = 0, \quad t \in (0,T), \tag{73}$$

$$\widehat{u}\big|_{x=0} = 0, \quad t \in (0,T). \tag{74}$$

Характеристикалар методидан фойдаланиб, (69)-(74) бошланғич-чегаравий масалани муҳит параметрлари айирмаси $\delta\tilde{\mu}$ га нисбатан биринчи тур Вольтерра интеграл тенгламасига келтирилган.

*Теорема 3.* Айтайлик, $\hat{u}$ ва $\hat{v}$ функциялар (69)-(74) бошланғич- чегаравий масаланинг ечими, $\varphi$ функция эса (68) формула билан (29), (30) бошланғич ва (31), (32) чегаравий, (23) силлиқлик, (24),(25) мутаносиблик шартларини қаноатлантирувчи $u \in C^{3,2}([0,L]\times[0,T])$, $v \in C^{1,1}([0,L]\times[0,T])$ функциялар учун аниқланган бўлсин. Бунда $f(0)=0$ ва $f-$қатъий ўсувчи функция ҳамда $u_0' \equiv 0$, $\tilde{\mu} \in D(F)$ ва бирор $S_1 > 0$ учун $\delta\tilde{\mu} \in C^2([0,S_1])$ ва $\{u_x(x,t) | (x,t) \in [0,L]\times[0,T]\} \subseteq [0,S_1]$. Бундан ташқари,

$$\left| \pm\sqrt{\frac{\overline{a}}{\rho_s}} u_{xx}(x,t) + u_{xt}(x,t) \right| \geq c_1 \quad \forall (x,t) \in (0,L)\times(0,\overline{t}) \tag{75}$$

тенгсизлик бирор $c_1 > 0$, $0 < \overline{t} \leq T$ учун ўринли ҳам бўлсин.

У ҳолда

$$\overline{s} = \tilde{\mu}^{-1}(f(\overline{t})) > 0 \tag{76}$$

учун ушбу

$$\|\delta\tilde{\mu}\|_{L_2(0,\overline{s})} \leq C\left\{ \|\hat{u}(L,\cdot)\|_{H^1(0,\overline{t})} + \rho_l^3 \|\hat{u}\|_{H^1((0,\overline{t})\times(0,\overline{t}))} \right\} \tag{77}$$

$L_2-$турғунлик баҳоси ўринли; бу ерда $C > 0$ бирор ўзгармас сон, $H^1$ – Соболев фазоси.

Ғовак-эластик муҳит тескари масалалари учун қуйидаги шартли турғунлик баҳоси тўғрисидаги теорема исботланган.

*Теорема 4.* Айтайлик, теорема 3 шартлари бажарилсин ва бирор $f_0 > 0$ сон учун

$$f(0)=0, \quad f'(t) \geq f_0 > 0 \quad \forall t \in [0,\overline{t}], \tag{78}$$

$$u_0'(x)=0 \quad \forall x \in [0,L], \tag{79}$$

бўлсин. Яна $\tilde{\mu} \in D(F)$ ва $u, v$ функциялар (27)-(32) бошланғич-чегаравий масаланинг ечими ҳамда

$$\left| \left( \pm\sqrt{\frac{\tilde{\mu}'(u_x)}{\rho_s}} u_{xx} + u_{xt} \right)(x(t),t) \right| \geq c_1 \qquad \forall t \in [0,\overline{t}], \tag{80}$$

тенгсизлик бирор $c_1 > 0$ да $[0,\overline{t}] \subseteq [0,T]$ сегментда (27) тенгламанинг барча характеристикалари $t \mapsto x(t)$ учун қаноатлансин; бунда $\overline{t}, L-$етарлича кичик сонлар.

У ҳолда, агар

$$\overline{s} = \tilde{\mu}^{-1}(f(\overline{t})) > 0 \tag{81}$$

деб белгиласак, $u(L,t), t \in [0,\overline{t}]$ функция $\tilde{\mu}$ функцияни $[0,\overline{s}]$ сегментда бир қийматли аниқлайди ҳамда бирор $C>0$ ўзгармас ва ихтиёрий $\tilde{\mu}\in D(F)\cap B_r(\tilde{\mu})$ учун қуйидаги $L_2$ −турғунлик баҳоси ўринли:

$$\|\breve{\mu}-\tilde{\mu}\|_{L_2(0,\bar{s})}\leq C\left\{\|F(\breve{\mu})-F(\tilde{\mu})\|_{H^1(0,\bar{t})}+\rho_l^3\|\hat{u}\|_{H^1((0,\bar{l})\times(0,\bar{t}))}\right\}, \qquad (82)$$

бу ерда $B_r(\tilde{\mu})$ −етарлича кичик $r$ радиусли $\tilde{\mu}$ марказли шар ($C^3$ нормасида).

Ишда тескари масалани сонли ечиш методи ҳам келтирилган. Бу метод тенгламаларни характеристикалар бўйлаб интеграллашга асосланган. Сонли натижалар олинган.

## ХУЛОСА

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат.

1. Суюқлик билан тўлдирилган ғовак-эластик муҳит динамикасининг диссипацияни ҳисобга олган ҳолда ночизиқли умумий математик модели такомиллаштирилган.

2. Термодинамик мутаносиб тенгламалар доирасида гиперболик типли янги тенгламалар системаси ҳосил қилинган ва чизиқли математик моделлар учун тўғри ва тескари динамик масалаларнинг корректлиги асосланган.

3. Математик моделлар учун ночизиқли тўғри ва тескари динамик масалаларнинг классик ечимларининг локал мавжудлиги ҳақидаги теоремалар исботланган.

4. Тўғри динамик масала оператори тадқиқ этилган, Фреше маъносида узлуксизлиги ва узлуксиз дифференциалланувчанлиги исботланган.

5. Кўндаланг тўлқинлар тенгламасининг сингуляр ечимлари қурилган.

6. Кўндаланг тўлқин тенгламалари учун тескари динамик масалалар учун иккинчи тур ночизиқли Вольтерра интеграл тенгламалар системаси олинган.

7. Тескари динамик (шу жумладан ночизиқли) масалаларнинг шартли турғунлиги баҳоси олинган.

8. Тескари динамик масалалар ечимининг ягоналиги ва «кичик соҳада» мавжудлиги ҳақидаги теоремалар ҳамда тескари динамик масалалар ечимларининг бошланғич маълумотларга узлуксиз боғлиқлиги исботланган.

9. Кўндаланг тўлқинлар тарқалиши тенгламалари учун тўғри ва тескари масалаларни сонли ҳисоблаш схемалари ишлаб чиқилган, дастурлар ёзилган, ҳисоблаш экспериментлари амалга оширилган ва бунда қурилган математик моделнинг адекватлиги асосланган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSC.27.06.2017.FM.01.02 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

ХОЛМУРОДОВ АБДУЛХАМИД ЭРКИНОВИЧ

# МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОДНОМЕРНЫХ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПОРОУПРУГОСТИ

**05.01.07 – Математическое моделирование. Численные методы и комплексы программ (физико-математические науки)**

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc) ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК**

**ТАШКЕНТ – 2018 год**

**Тема диссертации доктора наук (Doctor of Science) зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2018.2.DSc/FM117.**

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу (http://ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу (www.ziyonet.uz).

| | |
|---|---|
| **Научный консультант:** | **Имомназаров Холматжон Худайназарович**<br>доктор физико-математических наук,<br>ведущий научный сотрудник (Россия, ИВМиМГ) |
| **Официальные оппоненты:** | **Урев Михаил Вадимович**<br>доктор физико-математических наук, профессор<br>(Россия, РАНХиГС) |
| | **Хужаёров Бахтиёр Хужаёрович**<br>доктор физико-математических наук, профессор |
| | **Хужаев Исматулла Кушаевич**<br>доктор технических наук,<br>ведущий научный сотрудник |
| **Ведущая организация:** | **Научно-инновационный центр информационно-коммуникационных технологий при Ташкентском университета информационных технологий** |

Защита диссертации состоится «____» _____________2018 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.27.06.2017.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана, Института математики (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2018 года.
(протокол рассылки №6 от 9 июня 2018 года).

**А. Р. Марахимов**
Председатель Научного совета по
присуждению научных степеней,
д.т.н., профессор

**З.Р. Рахмонов**
Ученый секретарь Научного совета по
присуждению научных степеней, д.ф.-м.н.

**М.М.Арипов**
Председатель научного семинара при Научном
совете по присуждению научных степеней,
д.ф.-м.н., профессор

## ВВЕДЕНИЕ (Аннотация докторской диссертации)

**Актуальность и востребованность темы диссертации.** Многие научно-прикладные исследования, проводимые на мировом уровне, во многих случаях приводятся к задачам создания математических моделей волновых процессов в насыщенных жидкостью пористых средах. Движения упруго-пористых сред являются объектом исследования в таких областях как математическая физика, механика сплошных сред, механика жидкости, многофазная динамика и математическое моделирование. Уравнения многофазных сред являются основой при решении широкого круга задач: поведение зерновой и угольной пыли, газированной нефти, капель и аэрозолей; горение топлива; образование кокса, сажи и дыма; движение суспензий и пузырьков в жидкостях; движение жидкостей и газов в пористых средах; процессы растворения и осаждения. Поэтому исследование нелинейных математических моделей распространения поперечных волн в пористых средах, поры которых заполнены жидкостью, остаётся важной задачей в областях сейсморазведки и геофизики.

В настоящее время в мире исследование различного вида течений с учетом эффектов многофазности, а также построение адекватных математических моделей наблюдаемых при этом процессов считается одной из актуальных задач механики жидкостей. Изучение движения двухфазных сред с учетом исходной структуры среды и физических свойств фаз требует привлечения новых параметров и решения уравнений более сложных, чем те, которые записываются для однофазных течений. При этом детальное описание внутрифазных и межфазных взаимодействий в гетерогенных средах порою чрезвычайно сложно, и для получения обозримых результатов и их понимания зачастую прибегают к рациональным схематизациям, приводящим к обозримым и решаемым уравнениям.

В нашей стране особое внимание уделяется направлениям фундаментальной науки, имеющим практические применения, в частности, отдельно уделено внимание изучению движения насыщенных жидкостью пороупругих сред. В этой связи, в том числе, получены весомые результаты по проведению ряда научных исследований, посвященных свойствам волн движения насыщающей жидкости относительно скелета пористой среды, созданию моделей механики многофазных сред. Проведение научных исследований в приоритетных направлениях «Функционального анализа, математической физики, прикладной математики и математического моделирования» на уровне международных стандартов было обозначено как основные задачи и направления деятельности науки прикладной математики.

В постановлении Кабинета Министров были обозначены «Основные задачи и направления ведения научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям математического анализа, прикладной математики и математического моделирования»[1] . Для обеспечения исполнения постановления имеет важное значение развитие математического моделирования и численного исследования процессов в упруго-пористых средах.

Знание законов и особенностей двухфазного течения играет первостепенную роль в разработке и совершенствовании технологических процессов, технических установок и устройств в ряде отраслей промышленности, что и определяет актуальность проведенных исследований и их значимость для приложений. Проводимые в настоящее время научные исследования по вышеуказанному направлению научных исследований обосновывают актуальность темы данной диссертации.

Эта диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Постановлении Президента Республики Узбекистан № ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и Указе Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», а также других нормативно-правовых актов по данной деятельности.

**Связь исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики.** Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

**Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации[2] .** Научные исследования, направленные разработке математических моделей процессов многофазных сред, аналитических и численных методов решения, вычислительных алгоритмов, программных средств осуществляются в ведущих научных центрах и высших образовательных учреждениях мира, в том числе, ведутся в Massachusetts Institute of Technology, Columbia, California Institute of Technology, University of Texas, University of California, Berkeley и Harvard University, Schlumberger Company, Baker Huges, Cambridge University (Великобритания), University of Zielona Gora (Польша), Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics (Германия), Tsinghua University, Beijing, Zhejiang University, Hagzhou, Shandong University (Китай), Kyungpook National University (Южная Корея), Физико-техническом институте (Санкт-Петербург), Институте гидродинамики СО РАН, Институте физики тепла СО РАН, Институте математики СО РАН, Московском государственном университете (Российская Федерация), Национальном университете

---

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан» от 18 мая 2017 года.

[2] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации осуществляется на основе http://www.eriez.com/, http://docs.lib.purdue.edu/, https://www.ihs.com/, http://www.cargocaresolutions.com/, http://www.sciencedirect.com/, http://link.springer.com/, http://www.iccm-central.org/, http://www.university-directory.eu, http://www.digitimes.com/, www.webofknowledge.com, www.scholar.google.com и других источников.

Узбекистана, Каршинском Государственном университете (Узбекистан) проводят широкие научные исследования.

В результате исследований, проведенных в мире по усовершенствованию методов математического моделирования многофазных сред получены, в том числе, следующие результаты: на основе метода осреднения была построены модели динамики взаимопроникающих континуумов (Cambridge University, Великобритания; МГУ, Россия); доказаны локальная аддитивность энтропии, делимость энергии на внутреннюю и кинетическую, сохранение подсистемой локального термодинамического равновесия, то, что источники имеют одинаковые соотношения (Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Германия); исследованы математическое моделирование многофазных сред и использование самых общих сведений о системе — законов сохранения, групповая инвариантность относительно преобразований Галилея, согласованность уравнений движения жидкости с термодинамическими условиями равновесия (Baker Huges, Россия; Kyungpook National University, Южная Корея); исследованы корректности прямых и обратных задач для одномерных нелинейных уравнений гиперболического типа (Logo Alpen Adria Universität, Австрия); разработаны методы построения сингулярного решения для уравнения гиперболического типа с переменными коэффициентами (ИМ СО РАН, ИМ РАН им. Стеклова, Санкт-Петербург); исследованы и разработаны обратные задачи для уравнений математической физики (ИМ СО РАН; ИВМиМГ СО РАН; University of California, США).

В мире осуществляется ряд исследований по решению начально-краевых задач для гиперболических уравнений и для системы гиперболических уравнений, решению гиперболических уравнений с помощью лучевого метода, в том числе по следующим приоритетным направлениям: разработка метода решения динамической обратной задачи; численное решения прямой динамической задачи пористой среды; исследование корректности классического решения динамических прямых и обратных задач пористых сред; оценки устойчивости динамической обратной задачи пористых сред; непрерывной зависимости решения от входных данных для динамических обратных задач пористых сред; разработка метода численного моделирования и нахождения решения системы дифференциальных уравнений пористых сред.

**Степень изученности проблемы.** Нелинейное волновое уравнение (в отсутствие диссипации энергии) возникает во многих задачах. Например, в случае колебаний струны с упругим коэффициентом, зависящим от деформации. Для такой модели сред рассмотрены прямые и обратные задачи в работах B. Kaltenbacher, G.Nakamura, M. Watanabe и др. Известно, что коэффициент трения (проницаемость) в динамических уравнениях пороупругости приводит к диссипации энергии с одной стороны, а также во многих случаях является функцией разности скоростей с другой стороны (В.Н. Доровский, А.М.Блохин). При этом естественным образом возникают новые обратные задачи для определения этих нелинейных коэффициентов. Уравнения динамики таких сред являются квазилинейными, а кинетические параметры являются, вообще говоря, нелинейными функциями термодинамических переменных (В.Н. Доровский, А.М.Блохин; E.Romenski, D.Drikakis, E.Toro; Х.Х. Имомназаров, Н.М. Жабборов). В частности, эти модели допускают предельный переход к соответствующим односкоростным квазилинейным уравнениям теории упругости и уравнениям Навье-Стокса для сжимаемых сред в присутствии диссипации энергии. Исследованию корректности задач для этих уравнений по отдельности посвящено много работ, в частности, работы C.M. Dafermos, W.J. Hrusa, T. J. R. Hughes, T. Kato, J. E. Marsden, J.A. Olowofela, J.A.Adegoke, С.Н. Антонцева и В.Н. Монахова.

Различные подходы и методы исследования обратных динамических задач для гиперболических уравнений и систем предложены и развиты в работах М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова, А.С. Благовещенского, А.И. Прилепко, Ю.Е. Аниконова, А.Л. Бухгейма, Ю.Л. Гапоненко, С.И. Кабанихина, А.Г. Мегрaбова, Б.С. Парийского, Д.Г. Орловского, А.Л. Иванкова, А.В. Баева, Б.А. Бубнова, Х.Х. Имомназарова, А. Хайдарова, Д.К. Дурдиева и др.

Из перечисленных выше работ отметим работы В.Г. Романова и А.С. Благовещенского, B. Kaltenbacher, которые в своей постановке наиболее близки к диссертационной работе. Там рассматривается одномерная обратная задача для волнового уравнения об определении распределения скорости для вертикально-неоднородной изотропно-упругой модели среды по некоторой дополнительной информации о волновом поле на свободной поверхности. Для решения этой задачи доказана теорема о разрешимости и непрерывной зависимости от входных данных. При этом не полностью разработана математическая модель распространения нелинейных волн в пористой среде, а также не полностью изучены возникающие при этом прямые и обратные динамические задачи.

**Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация.** Диссертационное исследование выполнено в рамках плана научно-исследовательских работ Каршинского государственного университета А-13-38 «Теоретическое и численное исследования прямых и обратных задач для нелинейной волновой динамики двухфазных сред» (2015-2017).

**Целью исследования** является совершенствование математических моделей нелинейных волновых процессов в пористой среде с учетом диссипации энергии и обоснование корректности одномерных нелинейных прямых и обратных задач.

**Задачи исследования**:

совершенствование математической модели, описывающей распространение нелинейных поперечных волн в насыщенных жидкостью пористых средах;

доказательство теоремы локальной разрешимости классического решения одномерной прямой и обратной динамических задач для нелинейной системы уравнений;

получение оценки условной устойчивости решения (в том числе нелинейных) одномерных обратных динамических задач;

доказательство дифференцируемости по Фреше оператора прямой динамической задачи;

построение сингулярных решений уравнения поперечных волн;

получение систем нелинейных вольтерровых интегральных уравнений второго рода для обратных динамических задач;

доказательство теоремы единственности и в «малом» теоремы существования решения рассмотренных обратных динамических задач, а также непрерывной зависимости решений обратных динамических задач от входных данных;

разработка вычислительных схем расчета прямой и обратной задач распространения поперечных волн;

создание программы для проведения вычислительного эксперимента на ЭВМ.

**Объектом исследования** является нелинейные волновые процессы в пористой среде со сложной реологией.

**Предметом исследования** являются нелинейные математические модели, численные алгоритмы и программные средства, используемые для моделирования распространения нелинейных волн в пористой среде со сложной реологией.

**Методы исследования.** В исследовании нелинейных динамических процессов использованы методы математического моделирования, неравновесной термодинамики, функционального анализа, вычислительной математики, метод характеристик для гиперболических систем, метод интегральных уравнений, а также технология программирования.

**Научная новизна исследования** состоит в следующем:

совершенствована термодинамически согласованная математическая модель, описывающая распространение нелинейных поперечных волн в насыщенных жидкостью пористых средах с учетом диссипации;

доказаны теоремы локальной разрешимости классического решения одномерной прямой и обратной динамических задач для нелинейной системы уравнений;

получены оценки условной устойчивости решения (в том числе нелинейных) одномерных обратных динамических задач;

доказана дифференцируемость по Фреше оператора прямой динамической задачи;

построены сингулярные решения уравнения поперечных волн;

получена система нелинейных вольтерровых интегральных уравнений второго рода для обратных динамических задач;

доказаны теоремы единственности и в «малом» теоремы существования решения рассмотренных обратных динамических задач, а также непрерывной зависимости решений обратных динамических задач от входных данных;

разработаны вычислительные схемы расчета прямой и обратной задач распространения поперечных волн;

**Практические результаты исследования** заключаются в следующем:

усовершенствована математическая модель волновой динамики с учетом зависимости коэффициента межкомпонентного трения от относительной скорости фаз, а также зависимости коэффициента сдвига от скорости деформации и результаты исследования математической модели использованы при прогнозировании фильтрационно-ёмкостных свойств кавернозно-трещиновато-пористых коллекторов и оптимизации режима их разработки, а также при моделировании технологических процессов при разработке месторождений углеводородов.

**Достоверность результатов исследования** обосновывается корректностью математической модели, её согласованностью с законами термодинамики, гиперболичностью уравнений, описывающих волновые процессы, строгостью математических выкладок, использованием математически обоснованных методов решения, совпадением полученных решений с точными решениями в аналогичных постановках для однофазных сред, а также сравнительным анализом результатов численного моделирования на основе общепринятых критериев с экспериментальными данными.

**Научная и практическая значимость результатов исследования.** Научная значимость полученных результатов диссертационной работы в целом заключается в едином рассмотрении на основе методов закона сохранения и уравнений механики многофазных сред течений двухфазных пористых сред возникающих при этом тепломассообменных процессов на всех этапах от разработки и обоснования математических моделей до решения и анализа конкретных прикладных задач нефтегазовой механики.

Практическая значимость полученных в исследовании результатов обосновывается возможностью широкого применения их при решении задач нефтегазовой промышленности, также тепловой энергетики, при разработке инновационных волновых методов, прогнозировании фильтрационно-ёмкостных свойств кавернозно-трещиновато-пористых коллекторов и оптимизации режима их разработки, а также моделировании технологических процессов при разработке месторождений углеводородов.

**Внедрение результатов исследования.** Модель движения пороупругой среды с учетом диссипации энергии, а также результаты относительно нелинейных одномерных динамических прямых и обратных задач внедрены в практику в следующих направлениях:

нелинейная модель движения заполненной жидкостью пороупругой среды использована при решении прямых и обратных задач в исследованиях по проекту гранта 1.3.1.3. «Методы создания, исследования и идентификации математических моделей о Земли» (справка 15301/12-01-31 от 14 февраля 2018 года Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук). Использование научных результатов диссертации дало возможность определения неизвестных законов изменения по глубине модуля сдвига упругого остова, плотностей жидкости и каркаса, коэффициента трения;

термодинамически согласованная нелинейная математическая модель движения пороупругой среды использована при решении нелинейных одномерных прямых и обратных задач в исследованиях по проекту гранта 0115Р00542 «Математическое моделирование волновой динамики многофазных сред с учетом диссипации энергии (прямые и обратные задачи)» (справка 01-01-56 от 24 мая 2018 года Институт математики, физики и информатики при Национальном педагогическом университете им. Абая). Использование научных результатов диссертации дало возможность исследовать особенности распространения нелинейных волн в насыщенной жидкостью пористых средах;

нелинейная математическая модель движения пороупругой среды использована при усовершенствовании обработки сейсморазведочных данных (справка № 04/БО-188 от 23 февраля 2018 года АО «O’ZBURG’UNEFTGAZ»). Использование научных результатов дало возможность увеличения эффективности и качества обработки сейсморазведочных данных по добыче нефти и газа;

нелинейная математическая модель движения пороупругой среды использована для улучшения качества получаемых временных разрезов с последующим повышением достоверности изучения глубинного геологического строения глубокозалегающих литолого-стратиграфических комплексов и нетрадиционных ловушек в осложненных геологических условиях (справка №16-925 от 07 мая 2018 года АО «O’ZBEKGEOFIZIKA»). Использование научных результатов дало возможность усовершенствования программ обработки сейсморазведочных данных.

**Апробация результатов исследования.** Результаты данного исследования обсуждались на 13 научно-практических конференциях, в том числе, на 5 международных и 8 республиканских научно-практических конференциях.

**Опубликованность результатов исследования.** По теме диссертации опубликовано 29 научных работ, из них 1 монография, 13 научных статей, в том числе 6 в зарубежных и 7 в республиканских журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов докторских диссертаций.

**Объем и структура диссертации.** Структура диссертации состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы, приложений. Объем диссертации составляет 160 страницы.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

**Во введении** обосновывается актуальность и востребованность проведенного исследования, цель и задачи исследования, характеризуются объект и предмет, показано соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии республики, излагаются научная новизна и практические результаты исследования, раскрываются научная и практическая значимость полученных результатов, внедрение в практику результатов исследования, сведения по опубликованным работам и структуре диссертации.

Первая глава диссертации, под называнием **«Термодинамически согласованные уравнения обратимых движений двухскоростных сред»** посвящена подробному выводу с использованием метода законов сохранения и принципов термодинамики системы уравнений динамики исследуемых в работе моделей двухскоростных сред без учета диссипации энергии. Получены уравнения состояния рассматриваемых сред. Также получены системы линеаризованных уравнений движения насыщенных жидкостью пористых сред в терминах скоростей упругого пористого тела и поровой жидкости.

Введем обозначения:

$\rho = \rho_s + \rho_l -$ плотность среды, где $\rho_s$ и $\rho_l -$парциальные плотности остова (каркаса) и жидкости соответственно;

$\mathbf{u}(u_i)$ и $\mathbf{v}(v_i) -$скорости остова и жидкости соответственно;

$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v} -$относительная скорость;

$p -$ давление жидкости;

$\delta_{ik}, \delta_j^i -$символы Кронекера;

$\mathbf{e}^i -$репер деформаций остова;

$\mathbf{e}_j -$ взаимный репер, $(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = \delta_j^i$;

$\mathrm{g}_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) -$ метрический тензор деформации остова;

$S -$удельная энтропия;

$\mu -$химический потенциал;

$h_{ij} -$ производная энергии по метрическому тензору $g_{ij}$;

$E_0\ (e_0) -$ энергия единицы объема (единицы массы) среды (пористый остов+поровая жидкость);

$T -$температура.

Предположим, что выполнены законы сохранения массы, энтропии и импульса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{F} = 0, \quad \frac{\partial j_i}{\partial t} + \partial_k \Pi_{ik} = 0. \tag{1}$$

В этих уравнениях пока неопределены: $\mathbf{j} -$импульс единицы объема, $\mathbf{F} -$обратимый поток энтропии, $\Pi_{ik} -$тензор плотности потока импульса.

Деформация пористого пространства описывается уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{e}^\alpha}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u}, \mathbf{e}^\alpha) = 0, \quad g^{\alpha\beta} = (\mathbf{e}^\alpha, \mathbf{e}^\beta). \tag{2}$$

Сделаем следующее основное предположение о характере уравнения движения жидкости, находящейся в поровом пространстве:

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\left(\rho\mathbf{v},\nabla\right)\mathbf{v}=\alpha\nabla\mu+\beta\nabla T\ . \tag{3}$$

Здесь $\alpha$ и $\beta$ являются функциями термодинамических переменных $S,\rho,g^{\alpha\beta}$ и должны быть определены.

В системе уравнений (1)-(3) обратимые потоки $\mathbf{j},\ \mathbf{F},\Pi_{ik}$ могут быть лишь функциями скоростей и термодинамических переменных. Для их определения используем преобразования Галилея, которые связывают значения потоков $\mathbf{j},\ \mathbf{F},\Pi_{ik}$ с соответствующими величинами в системе покоя жидкой частицы. Следующие соотношения гарантируют инвариантность законов сохранения относительно преобразования Галилея

$$\begin{aligned}&E=E_0+\frac{\rho\mathbf{v}^2}{2}+\left(\mathbf{v},\mathbf{j}_0\right),\quad \mathbf{j}=\mathbf{j}_0+\rho\mathbf{v},\quad \mathbf{F}=\mathbf{F}_0+S\mathbf{v},\\&\Pi_{ik}=\Pi_{0,ik}+\rho v_i v_k+v_i j_{0,k}+v_k j_{0,i}\,,\end{aligned} \tag{4}$$

где индекс ноль соответствует величинам в системе покоя жидкой частицы.

Вычисления показали, что

$$\alpha=-\rho,\ \ \beta=-S.$$

Законы сохранения (1) и уравнения (2), (3) в качестве следствия должны приводить к тождественному выполнению закона сохранения энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{Q}=0, \tag{5}$$

в котором $\mathbf{Q}$ − обратимый поток энергии, преобразующийся в соответствии с формулами (4). Для $\mathbf{Q}$ получается выражения

$$\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_0+\left(\frac{\rho\mathbf{v}^2}{2}+\left(\mathbf{j}_0,\mathbf{v}\right)+E_0\right)\mathbf{v}+\frac{\mathbf{v}^2}{2}\mathbf{j}_0+\left(\Pi_0,\mathbf{v}\right)$$

или

$$\mathbf{Q}=\left(\mu+\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)\mathbf{j}+\frac{TS}{\rho}\mathbf{j}+\mathbf{u}\left(\mathbf{u},\mathbf{j}_0\right)+h_{\alpha\beta}\mathbf{e}^{\alpha}\left(\mathbf{u},\mathbf{e}^{\beta}\right).$$

Для импульса единицы объема $\mathbf{j}$, обратимого потока энтропии $\mathbf{F}$ и тензора плотности потока импульса $\Pi_{ik}$ имеем формулы

$$\mathbf{j}=\rho_s\mathbf{u}+\rho_l\mathbf{v},\quad \mathbf{F}=\frac{S}{\rho}\mathbf{j},$$

$$\Pi_{i,k}=\rho_s u_i u_k+\rho_l v_i v_k+p\delta_{ik}+h_{\alpha\beta}e_k^{\alpha}e_i^{\beta}\,.$$

Получаем полную систему уравнений двухскоростного континуума с учетом упругой деформации в отсутствии диссипации энергии (обратимое гидродинамическое приближение):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{j}=0,\quad \mathbf{j}=\rho_s\mathbf{u}+\rho_l\mathbf{v},\\
&\frac{\partial(s\rho)}{\partial t}+\operatorname{div}\left(s\mathbf{j}\right)=0,\\
&\frac{\partial j_i}{\partial t}+\partial_k\left(\rho_s u_i u_k+\rho_l v_i v_k+p\delta_{ik}+h_{ij}g_{jk}\right)=0\quad (i,k=1,2,3),\\
&\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\left(\mathbf{v},\nabla\right)\mathbf{v}=-\frac{\nabla p}{\rho}+\frac{\rho_s}{2\rho}\nabla\mathbf{w}^2-\frac{h_{ik}}{2\rho}\nabla g_{ik},\\
&\frac{\partial g_{ik}}{\partial t}+g_{kj}\partial_i u_j+g_{ij}\partial_k u_j+u_j\partial_j g_{ik}=0,\\
&\rho_s=const/\sqrt{\det(g_{ik})},\\
&e_0=e_0\left(\rho,s,\mathbf{i}_0,g_{ik}\right),\ \mathbf{j}_0=\rho_s\mathbf{w},\ \rho\mathbf{i}_0=\mathbf{j}_0,\\
&de_0=\frac{p}{\rho^2}d\rho+Tds+(\mathbf{w},d\,\mathbf{i}_0)+\frac{h_{ik}}{2\rho}dg_{ik}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Здесь $e_0=e_0\left(\rho,s,\mathbf{i}_0,g_{ik}\right)$ – уравнение состояния среды (оно считается заданным), энтропия $s$, энергии $e_0, e$ и импульс $\mathbf{i}_0$ отнесены к единице массы

$$\rho s=S,\quad \rho e_0=E_0,\quad \rho e=E_0,\quad \rho\mathbf{i}_0=\mathbf{j}_0.$$

Уравнение состояния $e_0\left(\rho,s,\mathbf{i}_0,g_{ik}\right)$ в феноменологической теории не вычисляется, оно зависит от конфигурации системы и должно, в известной степени, определяться из эксперимента. Однако в одном гидродинамическом приближении функциональная зависимость $e_0\left(\rho,s,\mathbf{i}_0,g_{ik}\right)$ (или $E_0=e_0\rho$) может быть установлена из общих соображений. Речь идет о гуковском приближении, которого часто достаточно для проверки общих положений теории, а в ряде случаев и для широкого спектра задач прикладного характера, например, при рассмотрении вопросов, связанных с теорией распространения звуковых колебаний. В этом приближении получено уравнение состояния следующего вида:

$$
\begin{aligned}
e_0\left(\rho,s,\mathbf{i}_0,g_{ik}\right)=\mathrm{const}+\frac{\lambda}{\delta\rho_0}I_1^2+\frac{\mu}{4\rho_0}I_2-\frac{K}{2\rho_0^2}I_1\left(\rho-\rho_0\right)+T_0\left(s-s_0\right)+\\
+\frac{1}{2}\left(\alpha_3+\frac{K}{\rho_0^3}\right)\left(\rho-\rho_0\right)^2+\frac{\alpha_2}{2}\left(s-s_0\right)^2+\alpha_1\left(\rho-\rho_0\right)\left(s-s_0\right)+\frac{\rho_s}{2\rho}\mathbf{w}^2,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&I_1=\delta_{ik}\left(g_{ik}-\delta_{ik}\right),\\
&I_2=\delta_{ik}\delta_{jm}\left(g_{im}-\delta_{im}\right)\left(g_{ik}-\delta_{jk}\right),\\
&K=\lambda+\frac{2}{3}\mu,
\end{aligned}
$$

а другие коэффициенты могут быть найдены из эксперимента.

Во второй главе диссертации, называемой «**Термодинамически согласованные уравнения движения двухскоростных сред в диссипативном приближении**» рассмотрены явления вязкости и трения в пороупругой среде.

Система уравнений (6) континуальной двухскоростной теории описывает самосогласованное обратимое движение жидкости сквозь упругодеформируемый пористый каркас. Термодинамическая неравновесность приводит к появлению во всех потоках дополнительных необратимых слагаемых. При этом появление дополнительных членов в уравнениях переноса необходимо согласовать с преобразованиями Галилея.

С учетом диссипации в системе по-прежнему плотность равна сумме парциальных плотностей

$$\rho = \rho_s + \rho_l, \tag{7}$$

Закон сохранения массы не изменяет вида

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \rho_s \mathbf{u} + \rho_l \mathbf{v}. \tag{8}$$

В закон сохранения импульса следует добавить к тензору плотности обратимого потока импульса $\Pi_{ik}$ необратимый симметричный тензор $\pi_{ik}$, вид которого в дальнейшем будет определен как:

$$\begin{gathered} \frac{\partial j_i}{\partial t} + \partial_k \left( \Pi_{ik} + \pi_{ik} \right) = 0, \\ \Pi_{ik} = \rho_s u_i u_k + \rho_l v_i v_k + p\delta_{ik} + h_{\alpha\beta} e_k^{\alpha} e_i^{\alpha}. \end{gathered} \tag{9}$$

Потоку $\mathbf{Q}$ в законе сохранения энергии будет соответствовать необратимый поток $\mathbf{W}$

$$\begin{gathered} \frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\mathbf{Q} + \mathbf{W}\right) = 0, \\ \mathbf{Q} = \left( \mu + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) \mathbf{j} + \frac{TS}{\rho} \mathbf{j} + \left(\mathbf{u}, \mathbf{j}_0\right)\mathbf{u} + h_{\alpha\beta} \mathbf{e}^{\alpha} \left(\mathbf{u}, \mathbf{e}^{\beta}\right). \end{gathered} \tag{10}$$

В полном соответствии с уравнением Навье-Стокса следует считать, что в правой части обратимого уравнения движения (3)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \nabla\right)\mathbf{v} = -\nabla \mu - \frac{S}{\rho} \nabla T$$

в условиях диссипации энергии появляется сила трения $\mathbf{f}$:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \nabla\right)\mathbf{v} = -\nabla\left(\mu + h\right) - \frac{S}{\rho} \nabla T + \mathbf{f}. \tag{11}$$

Кроме того, под знак градиента включена функция $h$ диссипативной природы.

Будем считать, что диссипативные процессы не приводят к появлению необратимых деформаций в системе:

$$\frac{\partial \mathbf{e}^{\alpha}}{\partial t} + \nabla\left(\mathbf{u}, \mathbf{e}^{\alpha}\right) = 0. \tag{12}$$

Включение диссипативных процессов в системе сопровождается возрастанием энтропии, в силу чего возникает ее производство $R/T$ и уравнение переноса энтропии должно иметь вид

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\operatorname{div}\left(S\frac{\mathbf{j}}{\rho}+\frac{\mathbf{q}}{T}\right)=\frac{R}{T}, \tag{13}$$

где $R$ – диссипативная функция. Величины $\pi_{ik},\mathbf{W},\mathbf{f},h,\mathbf{q},R$ в уравнениях (7)-(13) неизвестны и подлежат определению.

Из уравнений (7)-(13) с учетом второго закона термодинамики для рассматриваемой среды получаем

$$\begin{gathered}\frac{\partial E}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\mathbf{Q}+\mathbf{q}+(\pi,\mathbf{v})+h(\mathbf{j}-\rho\mathbf{v})\right)=\frac{1}{T}(\mathbf{q},\nabla T)+h\operatorname{div}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})+\\+\pi_{ik}\partial_k v_i+(j_i-\rho u_i)\left(f_i+\frac{1}{\rho_l}\partial_k\pi_{ik}\right)+T\left(\frac{\partial S}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\frac{S}{\rho}\mathbf{j}+\frac{\mathbf{q}}{T}\right)\right),\end{gathered} \tag{14}$$

где вектор $(\pi,\mathbf{v})_i=\pi_{ik}v_k$. Из этого равенства, сравнивая потоки с их значениями в обратимом случае, определяем $\mathbf{W}$ – вектор необратимого потока энергии

$$W_i=q_i+\pi_{ik}v_k+h(j_i-\rho u_i) \tag{15}$$

и диссипативную функцию

$$R=-h\operatorname{div}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})-\frac{1}{T}(\mathbf{q},\nabla T)-\pi_{ik}\partial_k v_i-(j_i-\rho u_i)\left(f_i+\frac{1}{\rho_l}\partial_k\pi_{ik}\right).$$

В отсутствие производных $\operatorname{div}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u}),\nabla T,\partial_k v_i$ и разности $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ необратимые потоки должны отсутствовать. В линейном приближении термодинамические потоки пропорциональны существующим в системе термодинамическим силам. В односкоростном приближении $\mathbf{u}\to\mathbf{v}$ при условии $g^{\alpha\beta}=0$ теория должна переходить в теорию Навье-Стокса. Из этих положений, учитывая принцип Кюри, находим выражения для диссипативной функции

$$\begin{gathered}R=\zeta_2(\operatorname{div}\mathbf{v})^2+2\zeta_1\operatorname{div}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})\operatorname{div}\mathbf{v}+\zeta_3\left(\operatorname{div}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})\right)^2+\frac{k}{T}(\nabla T)^2+\\+2\bar{\lambda}(\nabla T,\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})+\bar{k}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})^2+\frac{\eta}{2}\left(\partial_k v_i+\partial_i v_k-\frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}\right)^2.\end{gathered} \tag{16}$$

Здесь значения семи кинетических коэффициентов $\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\bar{k},k,\bar{\lambda},\eta$ ограничиваются условиями:

$$\zeta_1^2\le\zeta_2\zeta_3,\ \zeta_3\ge 0;$$
$$\bar{\lambda}^2\le\frac{k\bar{k}}{T},\qquad k\ge 0;\qquad \eta\ge 0.$$

В общем случае эти коэффициенты являются функциями термодинамических переменных, характеризующих локальное термодинамическое состояние системы, т.е. функциями $\rho,S,g^{\alpha\beta}$ и $\mathbf{u}-\mathbf{v}$.

Определив все необратимые потоки, получаем полную систему уравнений континуальной двухскоростной необратимой гидродинамики с упругим взаимодействием в одной из подсистем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) u_i = -\frac{1}{\rho}\partial_i p - \frac{\rho_l}{2\rho}\partial_i \mathbf{w}^2 + \frac{\rho_l}{2\rho\rho_s} h_{\alpha\beta}\partial_i g^{\alpha\beta} + \\
&\quad + \bar{\lambda}\frac{\rho_l}{\rho_s}\partial_i T + \bar{k}\frac{\rho_l}{\rho_s}(j_i - \rho u_i) - \frac{1}{\rho_s}\partial_k\left(h_{\alpha\beta} e_i^\alpha e_k^\beta\right), \\
&\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) v_i = -\frac{1}{\rho}\partial_i p + \frac{\rho_s}{2\rho}\partial_i \mathbf{w}^2 - \frac{h_{\alpha\beta}}{2\rho}\partial_i g^{\alpha\beta} - \\
&-\bar{\lambda}\partial_i T - \bar{k}(j_i - \rho u_i) + \frac{1}{\rho_l}\partial_k\left(\eta\left(\partial_k v_i + \partial_i v_k - \frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}\right)\right) + \qquad (17) \\
&+\frac{1}{\rho_l}\partial_i\left(\zeta_1 \operatorname{div}(\mathbf{j} - \rho\mathbf{u}) + \zeta_2 \operatorname{div}\mathbf{v}\right), \\
&\frac{\partial \mathbf{e}^\alpha}{\partial t} + \nabla\left(\mathbf{e}^\alpha, \mathbf{u}\right) = 0, \\
&\rho_s = \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{\det\left(g_{\alpha\beta}\right)}}, \qquad \rho = \rho_s + \rho_l, \left(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta\right) = g_{\alpha\beta}, \\
&\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}S - \frac{k}{T}\nabla T - \bar{\lambda}(\mathbf{j} - \rho\mathbf{u})\right) = \frac{R}{T}, \\
&e_0 = e_0(\rho, s, \mathbf{i}_0, g_{ik}).
\end{aligned}$$

Здесь уравнение состояния $e_0 = e_0(\rho, s, \mathbf{i}_0, g_{ik})$ считается заданным.

Далее выводятся уравнения одномерных поперечных волн. Предполагается, что существует межкомпонентное трение, а вязкость, температурные эффекты не учитываются:

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \eta = \bar{\lambda} = 0.$$

Пусть движение происходит вдоль оси $x$, при котором $\mathbf{u} = (0, u(t,x), 0)$ и $\mathbf{v} = (0, v(t,x), 0)$. Предполагая, что кинетический параметр $\bar{k}$ (коэффициент трения) зависит от разности скоростей, а модуль сдвига $\mu$ зависит от градиента деформации, т.е.

$$\bar{k} = \chi(u - v), \ \mu = \mu(u_x),$$

из общих уравнений движения (17) получена следующая нелинейная система уравнений движения, описывающая распространение нелинейной поперечной волны в насыщенной жидкостью пористой среде с учетом диссипации энергии за счет трения:

$$\begin{cases} \rho_s u_t = \sigma_x - \rho_l^2 \left(u - v\right) \chi(u - v), \\ \sigma_t = \mu(u_x) u_x, \\ \rho_l v_t = \rho_l^2 \left(u - v\right) \chi(u - v). \end{cases} \tag{18}$$

Третья глава диссертации, именуемая «**Математические модели и исследование прямых задач для поперечных волн**» посвящена постановке и исследованию (аналитически и численно) нелинейных и линейных прямых динамических задач пористых сред.

Рассматривается следующая одномерная начально-краевая задача для нелинейной системы уравнений пористых сред относительно скоростей $u$ и $v$ (18):

$$\rho_s u_{tt} = \left(\mu(u_x) u_x\right)_x - \rho_l^2 \left(\left(u - v\right) \chi(u - v)\right)_t, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T), \tag{19}$$

$$\rho_l v_t = \rho_l^2 \left(u - v\right) \chi(u - v), \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, T), \tag{20}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \; u_t\big|_{t=0} = u_1(x), \;\; v\big|_{t=0} = 0, \quad x \in (0, L), \tag{21}$$

$$u\big|_{x=0} = 0, \;\; \mu(u_x) u_x\big|_{x=L} = f(t), \quad t \in (0, T). \tag{22}$$

Здесь $f:[0,T] \to \mathbb{R}$, $u_0:[0,L] \to \mathbb{R}$, $u_1:[0,L] \to \mathbb{R}$. Предполагается, что $\mu(s)$ – три раза, а $\chi(s)$ – два раза непрерывно дифференцируемые положительные функции. Относительно начальных $u_0(x), u_1(x)$ и граничной $f(t)$ функций требуется, чтобы

$$u_0 \in C^3(0, L), \qquad u_1 \in C^2(0, L), \qquad f \in C^2(0, T). \tag{23}$$

Ищется классическое решение начально-краевой задачи (19)-(22), т.е. $u \in C^{2,2}\left([0,L] \times [0,T]\right)$, $v \in C^{0,1}\left([0,L] \times [0,T]\right)$, где $C^{k,m}\left([0,L] \times [0,T]\right)$ – пространство непрерывно дифференцируемых функций $k$ раз по $x$ и $m$ раз по $t$ функций.

Задача определения скоростей смещений $u$ и $v$ из (19)–(22) с заданными функциями $\mu$, $\chi$, $\rho_s, \rho_l$ называется одномерной прямой динамической задачей для пористой среды.

Введем функции $\tilde{\mu}(s) = s\,\mu(s)$, $\tilde{\chi}(s) = s\chi(s)$. Потребуем выполнения условий совместимости

$$\begin{gathered} \left(\tilde{\mu}^{-1} \circ f\right)(0) = u_0'(L), \quad \left(\tilde{\mu}^{-1} \circ f\right)'(0) = u_1'(L), \\ \rho_s \left(\tilde{\mu}^{-1} \circ f\right)''(0) = \left(\tilde{\mu}(u_0')\right)''(L) - \rho_l^2 \left[\left(u_1 - \rho_l \tilde{\chi}(u_0)\right) \tilde{\chi}'(u_0)\right]'(L), \end{gathered} \tag{24}$$

на правой границе и

$$u_0(0) = u_1(0) = u_0''(0) = u_1''(0) = 0 \tag{25}$$

на левой границе. Для некоторой положительной константы $C$ обозначим

$$X = \left\{(\tilde{\mu}, \tilde{\chi}) \in C^3(0, S) \times C^2(0, S) \,|\, \tilde{\mu}(0) = 0, \tilde{\chi}(0) = 0\right\},$$

где $S > 0$.

Для исследования решения задачи (19)-(22) введем оператор $F$, определенный на

$$D(F)=\begin{cases}(\tilde{\mu},\tilde{\chi})\in X \mid \tilde{\mu}'(s)\geq \mu_0, \tilde{\mu}''(s)\leq C, \tilde{\chi}''(s)\leq C, \forall\, s\in[0,S],\\ \text{условие } (24) \text{ выполнено}\end{cases}, \quad (26)$$

где $\mu_0$ и $C-$ некоторые положительные константы, и отображающий функцию $(\tilde{\mu},\tilde{\chi})\in D(F)$ в $\tilde{u}:=u(L,\cdot)$, где $u(L,\cdot)-$ сужение решения $u(x,t)$на $x=L$ следующей начально-краевой задачи

$$\rho_s u_{tt}=\left(\tilde{\mu}(u_x)\right)_x-\rho_l^2\left(\tilde{\chi}(u-v)\right)_t, \quad x\in(0,L), \quad t\in(0,T), \quad (27)$$

$$v_t=\rho_l\tilde{\chi}(u-v), \quad x\in(0,L), \quad t\in(0,T), \quad (28)$$

с начальными

$$u\big|_{t=0}=u_0(x), \quad u_t\big|_{t=0}=u_1(x), \quad x\in(0,L), \quad (29)$$

$$v\big|_{t=0}=0, \quad x\in(0,L), \quad (30)$$

и граничными

$$\tilde{\mu}(u_x)\big|_{x=L}=f(t), \quad t\in(0,T), \quad (31)$$

$$u\big|_{x=0}=0, \quad t\in(0,T). \quad (32)$$

условиями.

*Теорема 1.* Пусть $T$ достаточно мало, а $S$ достаточно большое и выполнены условия (23)-(25), а также $f(0)=0$ и $f-$строго монотонно возрастающая функция. Тогда для любого $(\tilde{\mu},\tilde{\chi})\in D(F)$ начально-краевая задача (19)-(22) имеет единственное решение $u\in C^{3,2}([0,L]\times[0,T])$, $v\in C^{0,1}([0,L]\times[0,T])$. При этом оператор $F$ прямой задачи при фиксированной функции $\tilde{\chi}$

$$F: D(F)\to C^2(0,T), \quad \tilde{\mu}\mapsto u(L,\cdot),$$

где $u,v$ есть решение задачи (19)–(22), корректно определен. Более того, для

$$X'=X\cap C^4(0,S), \;\; D'(F)=D(F)\cap C^4(0,S)$$

оператор

$$F: D'(F)\subseteq X'\to C^2(0,T)$$

является непрерывно дифференцируемым по Фреше.

Рассмотрен случай, одномерных линеаризованных уравнений упруго-пористой среды, занимающей полупространство $z>0$, когда векторы скоростей частиц упругого-пористого тела и жидкости зависят только от $t$ и $z: U=u_y(z,t)$, $V=v_y(z,t)$. Уравнения движения имеют вид

$$\rho_s(z)U_{tt}=(\mu(z)U_z)_z-\chi(z)\rho_l^2(z)(U_t-V_t), \quad (33)$$

$$\rho_l(z)V_{tt}=\chi(z)\rho_l^2(z)(U_t-V_t). \quad (34)$$

Здесь $\chi(z)-$коэффициент трения. Эти уравнения (33), (34) описывают распространение поперечных волн в среде с поглощением.

Предполагается, что среда покоится при $t<0$:

$$U|_{t<0}=0, U_t|_{t<0}=0, V|_{t<0}=0, V_t|_{t<0}=0, \tag{35}$$

а на границе $z=0$ приложена сила с импульсом:

$$\mu U_z|_{z=0}=F(t), \tag{36}$$

где

$$F(t)=\delta(t)+f(0)\varepsilon(t)+\dots, \tag{37}$$

$\delta(t)-$дельта функции Дирака, $\varepsilon(t)-$функция Хевисайда.

Заданные функции $\rho_s(z)$ и $\mu(z)$ считаются непрерывно дифференцируемыми, а $\rho_l(z), \chi(z)$ – непрерывными.

Решение поставленной (33)-(37) прямой задачи найдено в виде асимптотических разложений:

$$U(t,z)=\alpha^s(z)\varepsilon(t-\tau(z))+\beta^s(z)(t-\tau(z))_+ +\frac{1}{2}\gamma^s(z)(t-\tau(z))_+^2+\dots, \tag{38}$$

$$V(t,z)=\alpha^l(z)\varepsilon(t-\tau(z))+\beta^l(z)(t-\tau(z))_+ +\frac{1}{2}\gamma^l(z)(t-\tau(z))_+^2+\dots, \tag{39}$$

где коэффициенты $\alpha^s(z),\beta^s(z),\dots,$ $\alpha^l(z),\beta^l(z),\dots$ и $\tau(z)$ определяются по формулам:

$$\alpha^s(z)=-\frac{1}{\sqrt{\sigma(z)\sigma(0)}}\exp\Big(-\int_0^z\frac{\chi(\xi)\rho_l^2(\xi)}{2\sigma(\xi)}d\xi\Big);$$

$$\beta^s(z)=\frac{1}{\sqrt{\sigma(z)}}\exp\Big(-\int_0^z\frac{\chi(\xi)\rho_l^2(\xi)}{2\sigma(\xi)}d\xi\Big)\left(c_2+\int_0^z\frac{g(\eta)}{2\sqrt{\sigma(\eta)}}\exp\Big(\int_0^\eta\frac{\chi(\xi)\rho_l^2(\xi)}{2\sigma(\xi)}d\xi\Big)d\eta\right),$$

$$c_2=\frac{\sigma'(0)+\chi(0)\rho_l^2(0)}{2\rho_s(0)\mu(0)};$$

$$\alpha^l(z)=0;$$

$$\beta^l(z)=\chi(z)\rho_l(z)\alpha^s(z);$$

$$\tau(z)=\int_0^z\frac{d\xi}{c_t(\xi)},\ c_t(z)=\sqrt{\frac{\mu(z)}{\rho_s(z)}}.$$

Далее, прямая задача (33)-(37) сводится к задачи для гиперболической системы. Вводится вместо $z$ координата $x$:

$$x=\int_0^z\frac{d\xi}{c_t(\xi)} \tag{40}$$

Определяются новые неизвестные вектор-функция $\Psi$ и скалярная функция $\Phi$

$$\Psi=\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{\sigma}(U_t-U_x)\\ \sqrt{\sigma}(U_t+U_x)\end{pmatrix},\ \Phi=V_t. \tag{41}$$

Относительно новых неизвестных функций получена гиперболическая система уравнений

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\Lambda\frac{\partial\Psi}{\partial x}=\begin{pmatrix}-\frac{\chi}{2}\frac{\rho_l^2}{\rho_s} & -\frac{\chi}{2}\frac{\rho_l^2}{\rho_s}+q \\ -\frac{\chi}{2}\frac{\rho_l^2}{\rho_s}-q & -\frac{\chi}{2}\frac{\rho_l^2}{\rho_s}\end{pmatrix}\Psi+\chi\sqrt{\sigma}\frac{\rho_l^2}{\rho_s}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Phi, \qquad (42)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\frac{\chi}{2\sqrt{\sigma}}\rho_l\left(\Psi_1+\Psi_2\right)-\chi\,\rho_l\Phi \quad , \qquad (43)$$

где

$$\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\ ,\ q\,(x)=\frac{\sigma'_x}{2\sigma}. \qquad (44)$$

Начальные условия имеют вид

$$\Psi\Big|_{t<0}=0,\ \Phi\Big|_{t<0}=0\ . \qquad (45)$$

Граничные условия переписываются в виде

$$\Psi\big|_{x=0}=s(t), \qquad (46)$$

где

$$s(t)=\begin{pmatrix}s_1(t)\\ s_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{\sigma(0)}\,\dot G(t)-\frac{1}{\sqrt{\sigma(0)}}F(t)\\ \sqrt{\sigma(0)}\dot G(t)+\frac{1}{\sqrt{\sigma(0)}}F(t)\end{pmatrix},\ \ G(t)=U(z,t)\big|_{z=0}\,. \qquad (47)$$

Полученная задача (42)-(47) путем интегрирования вдоль характеристик уравнений (42)-(43) сводится к системе линейных вольтерровых интегральных уравнений, из которой следует, что она имеет единственное непрерывное решение в малом.

Исследуются также сингулярности решения гиперболическое системы (42)-(43).

Используя метод интегрирования вдоль характеристик для прямой одномерной линейной задачи упруго-пористых сред построен численный алгоритм решения. Получены численные результаты.

Прямая нелинейная одномерная задача (19)-(22) решена численно, используя явную разностную схему со вторым порядком аппроксимации с соответствующими шагами дискретизации по времени $(\tau)$ и по пространству $(h)$:

$$\frac{1}{\tau^2}(u_j^{i+1}-2u_j^i+u_j^{i-1})=\frac{1}{2\mathrm{h}^2\rho_s}((\mu_{j+1}^{i-1}+\mu_j^{i-1})(u_{j+1}^i-u_j^i)-$$

$$-(\mu_j^{i-1}+\mu_{j-1}^{i-1})(u_j^i-u_{j-1}^i))-\frac{1}{\tau\rho_s}\rho_1^2((u_j^i-v_j^i)\chi_j^i-(u_j^{i-1}-v_j^{i-1})\chi_j^{i-1})$$

$$v_j^{i+1}=\rho_1\tau\,(u_j^{i+1}-v_j^{i+1})\chi_j^i+v_j^i \qquad i=0,...,N,\ \ j=0,...,M$$

с аппроксимацией начальных и краевых условий

$$u_j^0 = 0, \qquad \frac{u_j^1 - u_j^0}{\tau} = \sin(jh), \; v_j^0 = 0, \quad j = 0,...,M$$

$$u_0^i = 0, \; u_M^i = 0, \; i = 0,...,N$$

Далее полагается, что число Куранта меньше 0.5, что обеспечивает устойчивость используемой разностной схемы.

В качестве модели задается среда, состоящая из однородного пористого слоя с поглощением. Физические характеристики слоя принимаются следующими: $\rho_s^f = 1{,}5\,г/см^3$, $\rho_l^f = 1г/см^3$, $c_s = 1{,}3км/сек$, $d = 0{,}1$, $\chi = 1000\,см^3/г \times сек$, заданными функциями $u_0(x) = 0, u_1(x) = \sin x$, временной сигнал в источнике задается в виде импульса Пузырёва:

$$f(t) = \exp\left(-\frac{2\pi f_o (t-t_0)^2}{\gamma^2}\right)\sin(2\pi f_0(t-t_0)),$$

где $\gamma = 4$, $f_0 = 1$Гц, $t_0 = 1.5$сек.

Результаты численных расчетов волнового поля для заданной модели среды представлены на рисунке 1. На ней дана сейсмотрасса волнового поля для скорости смещений $u$. Из рисунка видно, что с расстоянием волна затухает.

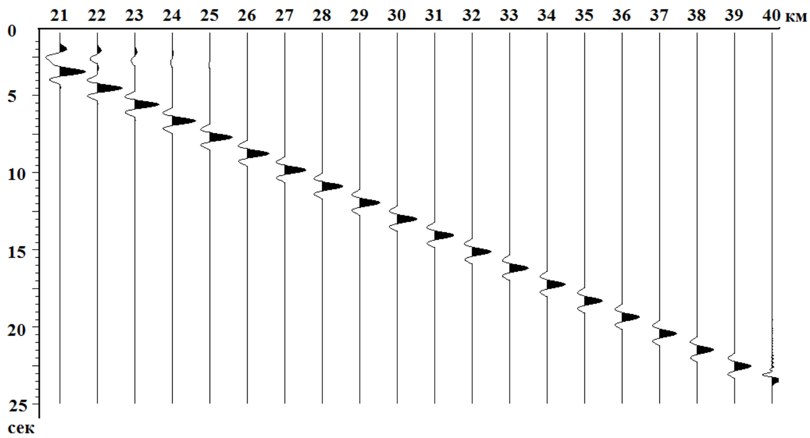



Рис.1. Расчётные сейсмотрассы для скорости смещения $u$ для однородного пористого слоя.

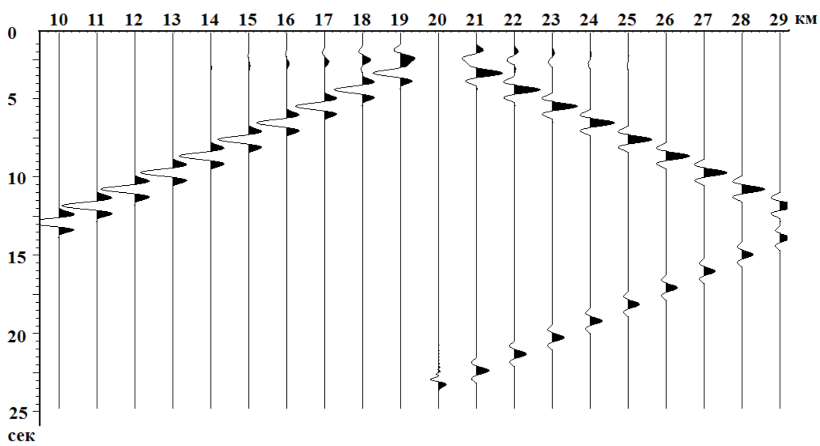



Рис.2. Расчётные сейсмотрассы для скорости смещения $u$ для однородного пористого слоя с источником возбуждения.

На рисунке 2 источник возбуждения находится внутри пористого слоя (20км). Из рисунка видно, что волна распространяется в обе стороны от источника с одинаковой скоростью. При этом от правой границы отражается в силу специфичности граничного условия.

Четвертая глава диссертации, называемая «**Исследование нелинейных обратных динамических задач для поперечных волн в пористой среде**» посвящена постановке и исследованию (аналитически и численно) нелинейных и линейных обратных динамических задач для уравнения поперечных волн в упруго-пористой среде.

В прямой задаче по заданным уравнению и начально-краевых условий находятся неизвестные функции, т.е. решение задачи. Если дополнительно известно некоторое свойство решения, то можно будет решать обратную задачу по определению некоторого коэффициента уравнения и неизвестных функций. Такие задачи имеют большое значения, например, при поиске нефтяных и газовых месторождений в районах с весьма сложными сейсмогеологическими условиями.

Приведем постановки основных обратных динамических задач.

**Задача 1.** Требуется по дополнительной информации

$$U\big|_{z=0} = G(t), \tag{48}$$

восстановить $\mu(z)$ из (33)-(37) (при этом считаются известными остальные функции $\rho_s(z), \rho_l(z), \chi(z)$).

**Задача 2.** Требуется по информации (48) восстановить $\chi(z)$ из (33)-(37) (при этом считаются известными остальные функции $\rho_s(z), \rho_l(z), \mu(z)$).

**Задача 3.** Требуется по информации (48) восстановить $\rho_s(z)$ из (33)-(37) (при этом считаются известными остальные функции $\rho_l(z), \mu(z), \chi(z)$).

**Задача 4.** Требуется по информации (48) восстановить $\rho_l(z)$ из (33)-(37) (при этом считаются известными остальные функции $\rho_s(z), \mu(z), \chi(z)$).

Рассмотрим решение обратной задачи 1. Путем интегрирования уравнений (33)-(34) вдоль характеристик получена замкнутая система нелинейных вольтерровых интегральных уравнений второго рода относительно неизвестных функций $\Psi_1(t,x), \Psi_2(t,x)$ и $q(x)$. Полученная система уравнений обладает малым параметром, роль которого играет мера области интегрирования в этих уравнениях. Благодаря наличию этого малого параметра, к полученной системе уравнений, оказывается, применим принцип сжатых отображений Банаха. Доказана теорема об однозначной разрешимости в малом (т.е. при малых $x \in [0, x_0]$) решения обратной задачи 1. Аналогично исследуются обратные задачи 2,3 и 4 в малом.

Доказана также теорема о непрерывной зависимости решений обратных задач от входных данных.

*Теорема 2.* Пусть для пары функций $s_1(t), s_2(t)$ и $\tilde{s}_1(t), \tilde{s}_2(t)$ отвечают решения $q(x)$ и $\tilde{q}(x)$. Если

$$\max_{t\in[0,2x_0]} \left(\left| s_1(t)-\tilde{s}_1(t)\right|, \left| s_2(t)-\tilde{s}_2(t)\right|\right) \le \delta, \tag{49}$$

то имеет место оценка

$$\left|q(x)-\tilde{q}(x)\right| \le C\delta,$$

где $C>0-$ постоянная, независящая от $\delta$ (может зависеть от $x_0$ и других параметров).

Аналогичные теоремы непрерывной зависимости решения от входных данных имеют место и для обратных задач 2, 3 и 4.

Далее исследуются нелинейные обратные динамические задачи. Рассматривается обратная задача об определении $u, v, \mu$ из (19)–(22) при заданных $\chi$, $\rho_s, \rho_l$ по дополнительной информации $\tilde{u} := u(L,\cdot)$.

Введем функции $\tilde{\mu}(s) = s\mu(s)$, $\tilde{\chi}(s) = s\chi(s)$. Для исследования свойств модели рассматривается оператор, введенный в главе III:

$$F(\tilde{\mu}) = \tilde{u}. \tag{50}$$

Производная оператора $F$ по некоторому направлению $\delta\tilde{\mu}$ вычисляется следующим образом

$$F'(\tilde{\mu})[\delta\tilde{\mu}] = \widehat{u}(L,\cdot), \tag{51}$$

где функции $\widehat{u}$, $\widehat{v}$ являются решением начально-краевой задачи

$$\rho_s \widehat{u}_{tt} = \left(\tilde{\mu}'(u_x)\widehat{u}_x\right)_x - \rho_l^2\left(\tilde{\chi}'(u-v)(\widehat{u}-\widehat{v})\right)_t + \left(\delta\tilde{\mu}(u_x)\right)_x,\ x\in(0,L), t\in(0,T), \tag{52}$$

$$\widehat{v}_t = \rho_l\tilde{\chi}'(u-v)(\widehat{u}-\widehat{v}), \quad x\in(0,L), \quad t\in(0,T), \tag{53}$$

с начальными условиями

$$\widehat{u}\big|_{t=0} = 0, \quad \widehat{u}_t\big|_{t=0} = 0, \quad x\in(0,L), \tag{54}$$

$$\widehat{v}\big|_{t=0} = 0, \quad x\in(0,L), \tag{55}$$

и граничными условиями

$$\widehat{u}\big|_{x=0} = 0, \quad t\in(0,T), \tag{56}$$

$$\tilde{\mu}'(u_x)\widehat{u}_x + \delta\tilde{\mu}(u_x)\big|_{x=L} = 0, \quad t\in(0,T). \tag{57}$$

В формулах (52)-(57) функции $u, v$ являются решением начально-краевой задачи (27)–(32).

Предполагается, что выполнены условия (23), (24), (25) и определено множество $D(F)$ по формуле (26). Далее вводится пространство функций

$$X = \left\{\tilde{\mu}\in C^3(0,S), \tilde{\chi}\in C^2(0,S) \mid \tilde{\mu}(0)=0, \tilde{\chi}(0)=0\right\}, \tag{58}$$

где $S>0$. Заметим, что в приложениях параметры среды часто являются строго монотонно возрастающими и гладкими функциями. Этим условиям удовлетворяют область определения $D(F)$ оператора $F$ и пространство $X$, определенные выше формулами (26), (58). Предположение гладкости параметров среды также важно для эффективного решения исходной начально-краевой задачи. Если $\tilde{\mu}$, $\tilde{\chi}$ достаточно гладкие, то для определения параметров среды можно применить методы Ньютоновского типа.

Введем функции $\breve{u}=u_x$ и $\breve{v}=v_x$. Они удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned}\rho_s\breve{u}_{tt} &= (\tilde{\mu}'(\breve{u})\breve{u}_x)_x - \rho_l^2\tilde{\chi}'(u-v)\breve{u}_t - \\ &- \rho_l^2\left\{\left[\tilde{\chi}'(u-v)\right]_t - \rho_l\left[\tilde{\chi}'(u-v)\right]^2\right\}\ (\breve{u}-\breve{v}), x\in(0,L), t\in(0,T),\end{aligned} \tag{59}$$

$$\breve{v}_t = \rho_l\,\tilde{\chi}'(u-v)(\breve{u}-\breve{v}),\quad x\in(0,L),\quad t\in(0,T), \tag{60}$$

граничным условиям

$$\breve{u}_x\big|_{x=0}=0,\quad t\in(0,T),\ \text{(однородное условие Неймана)} \tag{61}$$

$$\breve{u}\big|_{x=L}=\tilde{\mu}^{-1}(f(t)),\quad t\in(0,T), \tag{62}$$

и начальным условиям вида

$$\breve{u}\big|_{t=0}=u_{0x}(x),\quad \breve{u}'_t\big|_{t=0}=u_{1x}(x),\quad \breve{v}\big|_{t=0}=0,\quad x\in(0,L). \tag{63}$$

Соответсвующие им функцию $\tilde{\mu}$ обозначим через $\breve{\mu}$ .

Разность $F(\breve{\mu})-F(\tilde{\mu})$ можно записать как правостороннее значение для $\widehat{u}$, $\widehat{v}$ следующей начально-краевой задачи

$$\rho_s\widehat{u}_{tt}=\left(a\,\widehat{u}_x+\varphi\right)_x-\rho_l^2\left(b\,(\widehat{u}-\widehat{v})\right)_t,\quad x\in(0,L),\quad t\in(0,T), \tag{64}$$

$$\widehat{v}_t=\rho_l\,b(\widehat{u}-\widehat{v}),\quad x\in(0,L),\quad t\in(0,T), \tag{65}$$

с нулевыми начальными условиями и граничными условиями

$$a\,\widehat{u}_x+\varphi\big|_{x=L}=0,\quad t\in(0,T), \tag{66}$$

$$\widehat{u}\big|_{x=0}=0,\quad t\in(0,T), \tag{67}$$

где

$$\begin{aligned}&a(x,t)=\int_0^1\tilde{\mu}'(\breve{u}_x(x,t)+(u_x(x,t)-\breve{u}_x(x,t))\theta)d\theta,\\ &b(x,t)=\int_0^1\tilde{\chi}'(\breve{u}_x(x,t)-\breve{v}_x(x,t)+(u_x(x,t)-v_x(x,t)-(\breve{u}_x(x,t)-\breve{v}_x(x,t))\theta)d\theta,\\ &\varphi(x,t)=\delta\tilde{\mu}(u_x(x,t)),\\ &\delta\tilde{\mu}=\breve{\mu}-\tilde{\mu}.\end{aligned} \tag{68}$$

Сначала рассмотрим начально-краевую задачу (64)-(67) в случае постоянных коэффициентов, т.е. $a(x,t)=\overline{a},\ b(x,t)=\overline{b},\ \overline{a},\overline{b}\in\mathbb{R}$. А именно, рассмотрим следующую начально-краевую задачу

$$\rho_s\widehat{u}_{tt}=\overline{a}\,\widehat{u}_{xx}-\rho_l^2\overline{b}\,(\widehat{u}_t-\widehat{v}_t)+\varphi_x,\quad x\in(0,L),\quad t\in(0,T), \tag{69}$$

$$\widehat{v}_t=\rho_l\,\overline{b}\,(\widehat{u}-\widehat{v}),\quad x\in(0,L),\quad t\in(0,T), \tag{70}$$

с нулевыми начальными условиями

$$\widehat{u}\big|_{t=0}=0,\quad \widehat{u}_t\big|_{t=0}=0,\quad x\in(0,L), \tag{71}$$

$$\widehat{v}\big|_{t=0}=0,\quad x\in(0,L), \tag{72}$$

и граничными условиями

$$\bar{a}\,\hat{u}_x + \varphi\big|_{x=L} = 0, \quad t \in (0,T), \tag{73}$$

$$\hat{u}\big|_{x=0} = 0, \quad t \in (0,T). \tag{74}$$

Используя метод характеристик, начально-краевую задачу (69)-(74) сведем к уравнению Вольтерра первого рода для разности $\delta\tilde{\mu}$ между параметрами среды.

*Теорема 3.* Пусть функции $\hat{u}$ , $\hat{v}-$ решение начально-краевой задачи (69)-(74). Функция $\varphi$ определена формулой (68) для $u \in C^{3,2}([0,L]\times[0,T])$, $v \in C^{1,1}([0,L]\times[0,T])$, удовлетворяющей граничным условиям (31), (32) и начальным условиям (29), (30), а также условиям гладкости (23) и согласования (24),(25), $f(0)=0$ и $f-$строго монотонно возрастающая функция, $u_0' \equiv 0$, $\tilde{\mu} \in D(F)$, и $\delta\tilde{\mu} \in C^2([0,S_1])$, для некоторой константы $S_1 > 0$ такое, что $\{\, u_x(x,t) | (x,t) \in [0,L]\times[0,T]\} \subseteq [0, S_1]$. Кроме того, предположим, что неравенство

$$\left| \pm\sqrt{\frac{\bar{a}}{\rho_s}}\, u_{xx}(x,t) + u_{xt}(x,t) \right| \geq c_1 \quad \forall\,(x,t) \in (0,L)\times(0,\bar{t}\,) \tag{75}$$

выполнено для некоторой $c_1 > 0,\ 0 < \bar{t} \leq T$ .

Тогда для

$$\bar{s} = \tilde{\mu}^{-1}(f(\bar{t}\,)) > 0 \tag{76}$$

справедлива оценка $L_2-$ устойчивости

$$\|\delta\tilde{\mu}\|_{L_2(0,\bar{s})} \leq C\left\{ \|\,\hat{u}(L,\cdot)\|_{H^1(0,\bar{t}\,)} + \rho_l^3 \|\hat{u}\|_{H^1((0,\bar{t}\,)\times(0,\bar{t}\,))} \right\} \tag{77}$$

с некоторой постоянной $C > 0$ . Здесь $H^1-$ пространство Соболева.

Для оценки условной устойчивости для обратных задач пороупругости получена теорема.

*Теорема 4.* Пусть выполнены условия теоремы 3 и

$$f(0)=0, \quad f'(t) \geq f_0 > 0 \quad \forall t \in [0,\bar{t}\,], \tag{78}$$

$$u_0'(x)=0 \quad \forall x \in [0,L], \tag{79}$$

для некоторого $f_0$ . Пусть $\tilde{\mu} \in D(F)$, и $u$ , $v-$решения начально-краевой задачи (27)-(32).

Дополнительно предположим, что

$$\left| \left( \pm\sqrt{\frac{\tilde{\mu}'(u_x)}{\rho_s}}\, u_{xx} + u_{xt} \right)(x(t),t) \right| \geq c_1 \qquad \forall t \in [0,\bar{t}\,], \tag{80}$$

выполнено на некотором сегменте $[0,\bar{t}\,] \subseteq [0,T]$, с некоторой $c_1 > 0$, для всех характеристических кривых $t \mapsto x(t)$ уравнения (27) и $\bar{t}, L-$достаточно малы.

Тогда функция $u(L,t), t \in [0,\bar{t}\,]$ единственным образом определяет $\tilde{\mu}$ на интервале $[0,\bar{s}]$, где

$$\bar{s} = \tilde{\mu}^{-1}(f(\bar{t})) > 0 \tag{81}$$

и справедлива оценка $L_2 -$ устойчивости

$$\|\breve{\mu} - \tilde{\mu}\|_{L_2(0,\bar{s})} \le C\left\{\|F(\breve{\mu}) - F(\tilde{\mu})\|_{H^1(0,\bar{t})} + \rho_l^3 \|\hat{u}\|_{H^1((0,\bar{t})\times(0,\bar{t}))}\right\} \tag{82}$$

с некоторой постоянной $C > 0$ для всех $\tilde{\mu} \in D(F) \cap B_r(\tilde{\mu})$, где $B_r(\tilde{\mu}) -$ шар достаточно малого радиуса $r$ (в $C^3$ норме) с центром $\tilde{\mu}$ .

Далее приводится численный метод решения обратной задачи. Он основан на методе интегрерования уравнений вдоль характеристик. Получены численные результаты.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе полученных в диссертации научных результатов приведены следующие выводы:

1. Усовершенствована общая математическая модель динамики насыщенной жидкостью упруго-пористой среды с учетом диссипации энергии.
2. Получена новая термодинамически согласованная система уравнений гиперболического типа и обоснована корректность линейных математических моделей для прямых и обратных динамических задач.
3. Доказаны теоремы локального существования классического решения нелинейных одномерных прямых и обратных динамических задач.
4. Исследован оператор прямой динамической задачи, доказаны непрерывность и непрерывная дифференцируемость по Фреше этого оператора.
5. Построены сингулярные решения уравнения поперечных волн.
6. Получена система нелинейных вольтерровых интегральных уравнений второго рода для обратных динамических задач для уравнения поперечных волн.
7. Получена оценка условной устойчивости решения (в том числе нелинейных) обратных динамических задач.
8. Доказаны теоремы единственности и в «малом» теоремы существования, а также теорема непрерывной зависимости решений рассмотренных обратных динамических задач от входных данных.
9. Разработаны вычислительные схемы расчета прямой и обратной задач распространения поперечных волн, написаны компьютерные программы, проведены вычислительные эксперименты и обоснована адекватность построенной математической модели.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.27.06.2017.FM.01.02 AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN**

---

**NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN**

**KHOLMURODOV ABDULKHAMID ERKINOVICH**

# MODELING AND INVESTIGATION OF NONLINEAR ONE-DIMENSIONAL DIRECT AND INVERSE DYNAMIC PROBLEMS OF POROUS-ELASTIC MEDIUM

**05.01.07 – Mathematical modelling. Numerical methods and complexes of applications (Physical and mathematical sciences)**

**DISSERTATION ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

**TASHKENT – 2018**

**The theme of doctoral dissertation (DSc) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number № B2018.2.DSc/FM117.**

Dissertation has been prepared at Karshi State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://fti-kengash.uz/ and an the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

| | |
|---|---|
| **Scientific consultant:** | **Imomnazarov Kholmatzon Khudaynazarovich**<br>doctor of physical and mathematical sciences,<br>professor (Russia, ICMMG) |
| **Official opponents:** | **Urev Mikhail Vadimovich**<br>doctor of physical and mathematical sciences, professor<br>(Russia, RANEPA) |
| | **Khuzhayorov Bakhtiyor Khuzhayorovich**<br>doctor of physical and mathematical sciences, professor |
| | **Khuzhaev Ismatulla Kushaevich**<br>doctor of Technical Sciences |
| **Leading organization:** | **Scientific and Innovation Center of Information and Communication Technologies at the Tashkent University of Information Technologies** |

Defense will take place on "____" __________ 2018 at ____ at the meeting of Scientific council number DSc.27.06.2017.FM.01.02 at National University of Uzbekistan (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str. 4, Ph.: (99871) 227-12-24, fax: (99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (registered № _____) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str., 4. Ph.: (99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on "____" __________ 2018.
(mailing report №6 on 9 June 2018).

**A.R.Marakhimov**
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.T.S., professor

**Z.R. Rakhmonov**
Scientific Secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, D.F.M.S.

**M.M.Aripov**
Chairman of Scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F.M.S., professor

## INTRODUCTION (Abstract of DSc thesis)

**The urgency and relevance of the dissertation topic**. At the present, the state of various types of flows researches in the world is characterized by taking into account multiphase effects, as well as the construction of adequate mathematical models of the observed processes. Knowledge of laws and features of multiphase flow plays a primary role in the development and improvement of technological processes, technical installations and devices in a number of industries, which determines the relevance of the studies and their significance for applications. Current scientific researches in aforecited field of investigations confirm the relevance of the topic of the thesis.

**The aim of the work** is to refine mathematical models of nonlinear wave processes in a porous medium taking into account energy dissipation and their investigation.

**The tasks of research work are**

to refine a mathematical model describing the propagation of nonlinear shear waves in liquid-saturated porous media;

to proof the theorem of local existence of the classical solution to a one-dimensional direct and inverse dynamic problems for the non-linear system of equations;

to obtain an estimate of the conditional stability of a solution to one-dimensional dynamical inverse problems;

to prove Frechet differentiability of the direct dynamic problem operator;

to construct singular solutions to the equation of shear waves;

to obtain systems of nonlinear Volterra integral equations of the second kind for dynamic inverse problems;

to prove the uniqueness and local existence theorems for the solution to the inverse dynamic problems, as well as the continuous dependence of them on the input data;

to develop computational methods for calculating the direct and inverse problems of shear waves propagation;

to create the program for carrying out computer experiments on a computer.

**The object of research work** is nonlinear wave processes in a porous medium with complex rheology.

**Scientific novelty of the research work is as follows:**

thermodynamically matched mathematical model describing the propagation of nonlinear shear waves in liquid-saturated porous media is constructed;

theorems of local existence of the classical solution to the one-dimensional direct and inverse dynamic problems for a nonlinear system of equations are proved;

estimates of the conditional stability of the solution to one-dimensional dynamical inverse problems are obtained;

Frechet differentiability of the direct dynamical problem operator is proved;

singular solutions to the equation of shear waves are constructed;

a system of nonlinear Volterra integral equations of the second kind for the dynamic inverse problems is obtained;

uniqueness and local existence of the solutions to the inverse dynamic problems, as well as continuous dependence of them are proved;

computational methods for calculating the direct and inverse problems for the propagation of shear waves are developed;

the program for implementation computer experiments on a computer is created.

**The outline of the thesis.** On the basis of the obtained results the following conclusions are given:

1. A general mathematical model of the dynamics of a fluid-saturated porous elastic medium taking into account the energy dissipation is improved.

2. A new thermodynamically consistent system of equations of hyperbolic type is obtained and the well-posedness of the direct and inverse dynamic problems for the constructed mathematical model is investigated.

3. The theorems of local existence of the classical solution to the one-dimensional direct and inverse dynamic problems are proved.

4. The Frechet differentiability of the direct dynamical problem operator is proved.

5. Singular solutions to the shear waves equation are constructed.

6. A system of nonlinear Volterra integral equations of the second kind for the dynamic inverse problems for the equation of shear waves is obtained.

7. An estimate for the conditional stability of the solution to the inverse dynamic problems is obtained.

8. A uniqueness and local existence of the solition to the inverse dynamic problems, as well as the continuous dependence of the solutions on the input data are proved.

9. Numerical methods for calculating the direct and inverse problems for the propagation of shear waves are developed, based on the created program, computer experiments on a computer were carried out, which showed the adequacy of the constructed mathematical model to the real flows.

**ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ**
**СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ**
**LIST OF PUBLISHED WORKS**

**I-бўлим (I часть; part I)**

1. Холмуродов А.Э., Имомназаров Х.Х. Прямые и обратные динамические задачи для уравнения SH волн в пористой среде// Вестник НУУз, серия механика– математика, 2006, № 2, С. 86–91.(01.00.00, №8)
2. Kholmuradov A.E., Imomnazarov Kh.Kh. Direct and inverse dynamic problems for SH-waves in porous media// Mathematical and Computer Modelling, V.45, Issues 3-4, 2007, pp. 270-280. (№1.Web of Science. IF=1.602)
3. Kholmuradov A.E., Imomnazarov Kh.Kh., Imomnazarov Sh.Kh., Korobov P.V. Direct and Inverse Problems for Nonlinear One-Dimensional Poroelasticity Equations// Doklady RAS, 2014, Vol.89, No.2, pp. 250–252. (№1.Web of Science. IF=0.472)
4. Имомназаров Х.Х., Холмуродов А.Э., Имомназаров Х.Х., Имомназаров Ш.Х., Коробов П.В. Об одной обратной начально-краевой задаче для нелинейных одномерных уравнений пороупругости// Вестник НУУз, Точные науки, 2014, № 2/1, С. 21–26. (01.00.00, №8)
5. Kholmuradov A.E., Imomnazarov Kh.Kh., Imomnazarov Sh.Kh., Korobov P.V. About one direct initial-boundary value problem for nonlinear one-dimensional poroelasticity equations// Bulletin of the Novosibirsk Computing Center, Series: Mathematical modeling in geophysics, issue:18(2015),pp. 1–8. (01.00.00, №1)
6. Imomnazarov Kh.Kh., Imomnazarov Sh.Kh., Korobov P.V. Kholmuradov A.E. About one inverse initial-boundary value problem for nonlinear one-dimensional poroelasticity equations // Bulletin of the Novosibirsk Computing Center, Series: Mathematical modeling in geophysics, issue:18(2015),pp. 9–16. (01.00.00, №1)
7. Холмуродов А.Э., Байшемиров Ж.Д., Жиан-Ган Тан. О законах сохранения для уравнений двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению// Узбекский Математический журнал(УзМЖ), 2016, №3, С.143-153. (01.00.00, №6)
8. Холмуродов А.Э. Об особых решениях одномерного уравнения SH волн в пористых средах// Сибирские электронные математические известия, 2016, том 13, Новосибирск, Россия, С. 300–304. (№1.Web of Science. IF=0.302)
9. Kholmurodov A, Dilmuradov.N. Additional Conservation Laws for Two-Velocity Hydrodynamics Equations with the Same Pressure in Components// Research Inventy: International Journal of Engineering And Science Vol.7, Issue 1 (January 2017), PP -39-45, Issn (e): 2278-4721, Issn (p):2319-6483. (№5. Global Impact Factor. IF=0.876)
10. Холмуродов А.Э., Дилмуродов Н. Математическое моделирование одной нелинейной динамической системы, возникающей в насыщенной жидкостью пористой среде// Научный журнал “Проблемы вычислительной и прикладной математики” , ТУИТ, № 2(8) 2017,

С. 56–61. (05.00.00, №23)

11. Холмуродов А.Э. Об одной динамической обратной задаче для уравнения пороупругости в диссипативном приближении// Вестник СамГУ, Точные науки, 2017, № 5(105), С. 30–33. (01.00.00, №2)
12. Холмуродов А.Э. Асимптотическое разложение решения динамического уравнения пороупругости в диссипативном приближении// Вестник НУУз, Точные науки, 2017, №2/2, С. 263–269. (01.00.00, №8)
13. Холмуродов А.Э. Численное решение одномерных прямых задач распространения поперечных волн в пористых средах// Научный журнал "Проблемы вычислительной и прикладной математики" , ТУИТ, № 1(13) 2018, С. 42–48. (05.00.00, №23)

## II бўлим (Часть II; Part II)

14. Холмуродов А.Э., Имомназаров Х.Х. Моделирование и исследование прямых и обратных динамических задач пороупругости. Монография. – Т.: «Университет», 2017. – 120с.
15. № DGU 04822 UZ. Численное решение некоторых одномерных прямых и обратных динамических задач пороупругости/ А.Э. Холмуродов. –№ DGU 20170670; Заяв. 20.10.17.
16. Холмуродов А.Э., Имомназаров Х.Х., Имомназаров Ш.Х., Коробов П.В. О разрешимости одной начально-краевой задачи для квазилинейной системы одномерных уравнений пористых сред// Тезисы научной конференции с участием ученых из стран СНГ «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения», 21-23 ноября 2013 г., Ташкент, С. 148-149.
17. Холмуродов А.Э., Дилмурадов Н. Об одной краевой задаче для нелинейных одномерных уравнений пороупругости//Труды международной научной конференции «Вопросы оптимизации вычислений (ПОО-XL)"., Киев, 2013 г., С. 118-121.
18. Имомназаров Х.Х., Холмуродов А.Э. Прямая и обратная начально-краевая задача нелинейных одномерных уравнений пороупругости//Материалы международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий- Аль-Хорезми 2014»., 15-17 сентября 2014г., Самарканд, С. 47-48.
19. Имомназаров Х.Х., Холмуродов А.Э. О разрешимости одной прямой и обратной задачи для нелинейной системы уравнений пороупругости// Тезисы научной конференции с участием зарубежных ученых «Неклассические уравнения математической физики и их приложения»., 21-23 октября 2014 г., Ташкент, С. 275-276.
20. Kholmurodov A.E., Imomnazarov Kh.Kh. About one initial-boundary value problem for nonlinear 1D poroelasticity equations// Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения» 15-17 апреля 2015 г., Ташкент, С. 257-259.

21. Холмуродов А.Э., Дилмурадов Н. О задаче граничной управляемости для уравнения неоднородной струны// Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения» 15-17 апреля 2015 г., Ташкент, С. 234-235.
22. Холмуродов А.Э., Имомназаров Х.Х., Бердышев А. Оптимизационный метод решения одной одномерной обратной задачи пороупругости Международная конференция «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики",19-23 октября 2015 г., Новосибирск, Россия, С. 91.
23. Холмуродов А.Э. Интеграл Бернулли для уравнений двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению Международная конференция «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики",19-23 октября 2015 г., Новосибирск, Россия, С. 165.
24. Холмуродов А.Э., Коробов П.В., Имомназаров Х.Х., Няго В.А. Моделирование волнового поля в пористой среде (случай поперечной волне)// Актуальные вопросы анализа, Материалы научной конференции 22-23 апреля 2016 г., Карши, С.132-133.
25. Холмуродов А.Э., Имомназаров Х.Х. Прямая и обратная задача для нелинейных динамических одномерных уравнений пороупругости Прямая и обратная задача для нелинейных динамических одномерных уравнений пороупругости.// Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль-Хорезми 2016», 9-10 ноября 2016 г., г. Бухара, С.126.
26. Холмуродов А.Э., Дилмурадов Н. Некоторые прямые и обратные задачи для уравнений движения двухскоростного континиуума// Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль-Хорезми 2016», 9-10 ноября 2016 г., г. Бухара, С.147
27. Холмуродов А.Э., Имомназаров Х.Х. Об одном эффективном методе численного решения динамической задачи пороупругости//Toshkent shahridagi Turin politexnika Universiteti "Dinamik sistemalarning dolzarb muammolari va ularning tadbiqlari" Respublika ilmiy konferensiyasi (xorijiy olimlar ishtirokida) materiallari, 1 – 3 May, 2017 yil, 323-325 b.
28. Холмуродов А.Э., Дилмурадов Н. О задачах определения структуры слоистой пористой среды и формы импульса источника// Международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы оптимизации и автоматизации технологических процессов и производств», 17–18 ноября 2017 г., г. Карши, С.71-74.
29. Холмуродов А.Э., Дилмурадов Н. О задаче граничной управляемости для уравнения струны// Международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы оптимизации и автоматизации технологических процессов и производств»,17–18 ноября 2017 г., г. Карши, С.62-63.

Автореферат Ўзбекистон Миллий университетининг «ЎзМУ хабарлари» журнали таҳририятида 2018 йил 20 июнда ўтказилди.

Босишга рухсат этилди 21.06.2018. Ҳажми 4,0 босма табоқ.
Бичими 60x84 1/16. Адади 100 нусха. Буюртма 115.

М.Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университети
босмахонасида чоп этилди