

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ, МАТЕМАТИКА
ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

НУРИЛЛАЕВ МУЗАФФАР ЭШНАЗАРОВИЧ

ЯДРОЛИ ҲАҚИҚИЙ W^* -ФАКТОРЛАРНИ СИНФЛАШ

**01.01.01 – Математик анализ
(физика-математика фанлари)**

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

ТОШКЕНТ–2019

**Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD)
диссертацияси автореферати мундарижаси**

**Оглавление автореферата докторской диссертации
доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам**

**Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on
physical-mathematical sciences**

Нуриллаев Музаффар Эшназарович

Ядроли ҳақиқий W^* -факторларни синфлаш3

Нуриллаев Музаффар Эшназарович

Классификация ядерных вещественных W^* -факторов.17

Nurillaev Muzaffar Eshnazarovich

Classification of nuclear real W^* -factors.31

Эълон қилинган ишлар рўйхати

Список опубликованных работ

List of published works34

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ВА МАТЕМАТИКА
ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

НУРИЛЛАЕВ МУЗАФФАР ЭШНАЗАРОВИЧ

ЯДРОЛИ ҲАҚИҚИЙ W^* -ФАКТОРЛАРНИ СИНФЛАШ

01.01.01 – Математик анализ

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

ТОШКЕНТ–2019

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида В2017.1.PhD/FM6 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз(резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (<http://ik-fizmat.nuu.uz/>) ва «ZiyoNet» таълим ахборот тармоғида (www.ziyounet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:

Рахимов Абдугафур Абдумаджидович
физика-математика фанлари доктори

Расмий оппонентлар:

Ганихужаев Расул Набиевич
физика-математика фанлари доктори, профессор
Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович
физика-математика фанлари доктори, профессор

Етакчи ташкилот:

Тошкент темир йўл муҳандислари институти

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети, Математика институти ҳузуридаги DSc.27.06.2017.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2019 йил «__» _____ соат ____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (__ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2019 йил «__» _____ куни тарқатилди.
(2019 йил «__» _____ даги _____ рақамли реестр баённомаси).

А. Садуллаев

Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор,
академик

Ғ.И. Ботиров

Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

В.И. Чилин

Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда математик физиканинг динамик системаларини ва квант-механикасини, хусусан, операторлар алгебралари назариясини ўрганишга келтирилади. Квант-механиканинг кузатилаётган ҳар бир физик системасига Гильберт фазосида таъсир қилувчи ўз-ўзига қўшма оператор, шунингдек, қаралаётган системанинг ҳар бир ҳолатига эса, бу операторлар алгебрасининг зичлик матрицаси мос келиши маълум. Шундай қилиб, операторлар алгебралари хусусан, C^* ва W^* -алгебралари квант-механикаси ва динамик системаларнинг математик модели бўлиб, бунда олинган ҳар бир натижа квант-механикасида ўз талқинига эга бўлганлиги сабабли, операторлар алгебралари ҳам назарий, ҳам тадбиқий жиҳатдан аҳамиятли ва замонавий математиканинг долзарб йўналишларидан ҳисобланади.

Ҳозирги кунда жаҳонда техника ва табиатдаги жараёнлар динамик системалар орқали моделлаштирилиб, уларнинг кўпчилиги амалий жиҳатдан муҳим хусусиятларга эга. Бундай хусусиятлар ичида операторлар алгебраларининг инъективлик, гиперфинитлик, ядролик хоссаларини ўрганиш динамик системалар учун долзарб масалалардан ҳисобланади. Олиб борилган илмий-тадқиқот натижалари динамик системаларнинг хусусан, операторлар алгебраларининг ушбу хоссалари ўзаро эквивалент эканлигини назарий жиҳатдан тасдиқлайди. Ҳозирги кунгача бу алгебраларнинг инъективлик, гиперфинитлик хоссалари яхши ўрганилган. Динамик системаларнинг ядролик хусусиятини тадқиқ қилиш, жумладан, ядроли ҳақиқий ва комплекс C^* ва W^* -алгебраларни синфлаш, бу алгебралар учун ядролик хоссаси инъективлик ва гиперфинитлик хоссалари билан ўзаро муносабатларини топиш динамик системалар ва квант-механикасининг мақсадли илмий тадқиқодлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиққа эга бўлган долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилмоқда. Шу нуқтаи назардан, математик физика ва квант-механикасидаги масалаларни математик моделлаштиришда асосий объект ҳисобланган, операторлар алгебралари назариясининг ривожланишига эътибор янада кучайтирилди. Ҳозирги кунда C^* -алгебралар учун инъективлик, гиперфинитлик ва ядролик, аменабеллик хоссаларининг ривожланишига доир салмоқли натижаларга эришилди. «Функционал анализ, математик физика ва статистик физика» фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди¹. Қарорнинг ижросини таъминлашда ядроли ва инъектив комплекс, ҳамда ҳақиқий C^* ва W^* -алгебралари назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

¹ Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарорлар ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Диссертация республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Ядроли C^* -алгебралар, хусусан, ядроли W^* -алгебралар етарлича ўрганилган. А. Конн, Э. Штермер, В. Хаагеруп, С. Вассерман, Э. Эфрос, С. Попа, С. Ланс ва М.Чойларнинг ишларида W^* -алгебралар ва факторлар ($B(H)$ дан ташқари) учун ядролик, инъективлик, гиперфинитлик, ярим дискретлик ва аменабеллик тушунчаларининг эквивалент эканлиги исботланган.

Ҳақиқий факторлар учун инъективлик, гиперфинитлик, ярим дискретлик ва аменабеллик тушунчалари Ш.Усмонов, А.Рахимов ва Б.Байкабилов ишларида етарлича тадқиқ қилинган. Бироқ, шу вақтгача ядроли алгебра тушунчаси ҳақиқий ҳолда ўрганилмаган. Бундан ташқари, юқорида кўрсатилган ишларда инъективлик тушунчаси Хакеда-Томияма маъносида қаралган, яъни инъективлик деганда $\|P\|=1$, $P(\mathbf{1})=\mathbf{1}$ шартларни қаноатлантирувчи $P: B(H) \rightarrow R$ проекциянинг мавжудлигини тушунилган. C^* -алгебралар учун инъективликнинг умумийроқ таърифи «морфизмларни давом эттириш» маъносида берилган, лекин бу таъриф шу вақтгача етарлича ўрганилмаган. Ҳақиқий W^* -алгебралар учун инъективлик ва ядролик тушунчалари ўртасидаги муносабатни тадқиқ қилиш қизиқарли масала ҳисобланади.

Инъектив бўлмаган ҳолларда W^* -алгебраларни ўрганиш (изоморфизм маъносида) етарлича қийинчилик туғдиради, хусусан, ўзаро изоморф бўлмаган континуум қувватли инъектив бўлмаган II_1 типли факторлар оиласи мавжуддир. Шунинг учун ҳам W^* -алгебраларнинг максимал инъектив W^* -қисмалгебралари ва қисмфакторларини тадқиқ қилиш қизиқарлидир. Бундан ташқари, максимал инъектив W^* -қисмалгебралар ва қисмфакторларни тадқиқ қилиш бикоммутант ҳақидаги теорема билан боғлиқдир. Комплекс ҳолда ушбу тушунчалар С.Попа, Л.Ге, Р.Кадисон, Ж.Фанг, Ж.Шэн, С.Стратела, Л.Жидо ишларида ўрганилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Математика институти илмий-тадқиқот ишлари режасидаги ФА-Ф1- Ф03 ТФ067 «Квант динамик кўп заррали системалар, операторлар алгебраларида ноассоциатив ва топологик структурлар» (2007-

2011 йиллар.) ва Тошкент автомобил йўллари институти илмий-тадқиқот ишлари режасидаги Ф-4-51 «Функционал фазоларда Йордан учли системалари ва структуравий анализдаги тақсимот эҳтимолликлари», (2012-2016 йиллар) фундаментал лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади ҳақиқий S^* -алгебраларнинг ядроли ва инъективлик хоссаларини шунингдек, ҳақиқий W^* -алгебранинг максимал инъектив W^* -қисмалгебралари ва қисмфакторларини тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

чекли ўлчамли ва Абел ҳақиқий S^* -алгебраларнинг ядроли эканликларини исботлаш;

қамровчи S^* -алгебранинг ядролиги билан ҳақиқий S^* -алгебранинг ядролиги орасидаги боғланишни ва ҳақиқий S^* -алгебралар учун ядролик ва инъективлик тушунчалари ўртасидаги боғлиқликни кўрсатиш;

алгебра инъективлигининг иккита таърифининг ўзаро эквивалент эканлигини исботлаш, яъни инъективликнинг «морфизмларни давом эттириш» маъносидаги ва Хакеда-Томияма маъносидаги таърифлари устма-уст тушишини кўрсатиш;

ҳақиқий W^* -алгебранинг ҳақиқий максимал инъектив W^* -қисмалгебралари ва қисмфакторларини тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг объекти Гильберт фазосида аниқланган чизиқли чегараланган операторлар, ҳақиқий ва комплекс S^* ва W^* -алгебралардан иборат.

Тадқиқотнинг предмети Гильберт фазосида аниқланган чегараланган операторлар алгебрасидаги ядроли ва инъектив S^* ва W^* -алгебралардан иборатдир.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида функционал анализ, математик анализ ва операторлар алгебралари назариясининг «қамровчи алгебрага ўтиш методи» усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилigi қуйидагилардан иборат:

чекли ўлчамли ва Абел ҳақиқий S^* -алгебраларнинг ядроли эканлиги шунингдек, ҳақиқий S^* -алгебра ядроли бўлиши учун унинг қамровчисининг ядроли бўлиши зарур ва етарли эканлиги кўрсатилган;

ҳақиқий W^* -алгебралар учун ядролик ва инъективлик тушунчалари ўзаро эквивалент эканлиги аниқланган;

алгебра инъективлигининг иккита таърифининг ўзаро эквивалент эканлиги кўрсатилган, яъни инъективликнинг «морфизмларни давом эттириш» маъносидаги ва Хакеда-Томияма маъносидаги таърифлари устма-уст тушиши исботланган;

инъектив ҳақиқий қисмфакторнинг қамровчи фактори максимал инъектив бўлса, бу ҳақиқий қисмфакторнинг ўзи ҳам максимал инъектив бўлиши кўрсатилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

ядроли ва инъектив ҳақиқий S^* -алгебраларнинг тузилишидан квант механикаси ва математик физикада вужудга келадиган квант зарралари ҳолати-

ни аниқлашга доир масалаларни ечишда фойдаланилган;

ҳақиқий W^* -алгебраларнинг инъективлигига оид натижалардан Каплан алгебралари учун дифференциаллашларни таснифлашда фойдаланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги функционал анализ ва операторлар алгебралари назарияси усулларида ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ҳақиқий W^* -алгебралар учун ядролик ва инъективлик хоссалари ўртасида эквивалентлик ўрнатилганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти ядроли ва инъектив ҳақиқий C^* -алгебралар бўйича олинган натижалар квант статистик механикаси ва квант динамик системасидаги баъзи муаммоларни ҳал қилишда амалий асос бўлиб хизмат қилиши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Ядроли ва инъектив ҳақиқий C^* -алгебраларга оид олинган натижалар асосида:

ҳақиқий W^* -факторлар учун ядролик натижаларидан PPP/USG-0216/FST/30/15316 рақамли «Чизиқли бўлмаган интеграл тенгламаларни ечишда Нютон-Канторович методи» номли грант лойиҳасида чизиқли бўлмаган интеграл тенгламаларнинг ечимларини таснифлашда фойдаланилган (Малайзия Ислом университети, Малайзия 2018 йил 27 ноябрдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши бу каби тенгламалар ечимларининг кўринишини ядроли операторлар бўлган ҳолда топиш имконини берган.

ҳақиқий W^* -алгебралар учун инъективлик натижаларидан OT-4-27 рақамли «Йордан учликлари олдқўшма фазолари, сиғимлари фазолари тавсифлари ва функцияларни голоморф давом эттириш» номли грант лойиҳасида матрицавий алгебралар ва Каплан алгебралари учун 2-локал дифференциаллашларининг оддий дифференциаллашлар билан устма-уст тушушини кўрсатишда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2019 йил 16 январдаги №89-03-231 сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши бу алгебралар учун локал дифференциаллашлар ва автоморфизмлари орасидаги муносабатни ўрнатиш имконини берган;

ҳақиқий W^* -алгебраларнинг тензор кўпайтмасининг қамровчиси улар қамровчиларининг тензор кўпайтмасига тенглигидан Ф–4–09 рақамли «Ноассоциатив алгебралар ва Банах модулларининг структуравий (тузилиш) назарияси ва дискрет динамик системалар» номли грант лойиҳасида Банах модуллари, ассоциатив ва ноассоциатив Йордан алгебраларини таснифлашда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2019 йил 16 январдаги №89-03-231 сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши баъзи ассоциатив ва ноассоциатив йордан алгебраларини, хусусан JW -алгебраларини инъектив ҳолда синфлантириш имконини берган;

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари, жумладан 2 та халқаро ва 5 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 20 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 8 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 2 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 85 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмда диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиқ берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг «**Ядроли ҳақиқий C^* -алгебралар**» деб номланувчи биринчи боби учта параграфдан иборат. Биринчи параграфда асосий тушунчалар, таърифлар ва диссертация тадқиқоти жараёнида комплекс, ҳақиқий C^* ва W^* -алгебраларга доир натижаларни олишда қўлланилган маълум натижалар келтирилган.

Фараз қилайлик, A – комплекс сонлар майдони устидаги банах $*$ -алгебраси бўлсин. Агар A алгебранинг ихтиёрий $a \in A$ учун, $\|aa^*\| = \|a\|^2$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда A ни C^* -алгебра дейилади. Агар A алгебранинг барча $a, b \in A$ учун $ab = ba$ бўлса, у ҳолда бундай алгебрага *абел* алгебраси дейилади.

Агар C^* -алгебра M учун шундай Банах фазоси M_* мавжуд бўлиб, $(M_*)^* = M$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда M ни W^* -алгебра ва M_* фазони эса M учун *олдқўшма фазо* дейилади. $M \subset B(H)$ – $*$ -қисмалгебра бўлсин. $M' = \{a \in B(H) : ba = ab, \forall b \in M\}$ қисм тўпламга M алгебранинг *коммутанти* дейилади. Равшанки, $M \subset M'' = M^{(iv)} = M^{(vi)} = \dots$ ва $M' = M''' = M^{(v)} = \dots$, муносабатлар ўринлидир, бунда $M'' = (M')'$. Агар M алгебра учун $M = M''$, тенглик ўринли бўлса, у ҳолда бундай алгебрага *фон Нейман алгебраси* дейилади. $M \subset B(H)$ – W^* -алгебра бўлсин. M нинг элементларидан олинган ва қолган барча элементлари билан коммутативлик хоссаси ўринли

бўладиган қисмига, M нинг *маркази* дейилади ва у $Z(M)$ каби белгиланади. Равшанки, $Z(M) = M \cap M'$. $Z(M)$ нинг элементларига *марказий элементлар* дейилади. Агар M алгебранинг марказий элементлари фақатгина $\lambda \cdot \mathbf{1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ кўринишида бўлса, у ҳолда M га *фактор* дейилади. Фон Нейман томонидан қурилган ёйиш назарияси кўп ҳолларда ихтиёрий Фон Нейман алгебралари ҳақидаги масалаларни уларга мос келувчи факторлардаги масалаларга келтиришга имкон беради. R ҳақиқий Банах $*$ -алгебрасидаги нормани унинг комплексификацияси бўлган $A = R + iR$ гача шундай давом эттириш мумкин бўлсаки, натижада A (комплекс) C^* -алгебра бўлса, у ҳолда R ни ҳақиқий C^* -алгебра дейилади. Маълумки, R ҳақиқий Банах $*$ -алгебраси ҳақиқий C^* -алгебра бўлиши учун, R нинг эрмит алгебра ва ихтиёрий $a \in R$ учун $\|aa^*\| = \|a\|^2$ бўлиши зарур ва етарли. R нинг эрмитлиги шуни англатадики, ихтиёрий $a = a^*$ элемент учун унинг спектри $\sigma(a)$ – ҳақиқий, яъни $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$. Бундан ташқари, R нинг эрмитлиги ихтиёрий $a \in R$ учун $1 + aa^*$ элементнинг тескариланувчанлигига эквивалент. Фараз қилайлик, $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – комплекс гильберт фазо ва $R \subset B(H)$ ҳақиқий $*$ -қисм-алгебра бўлсин. Айтайлик, $\langle \xi, \eta \rangle_r = \operatorname{Re}(\langle \xi, \eta \rangle)$, $\xi, \eta \in H$. У ҳолда, кўрсатиш мумкинки, $H_r = (H, \langle \cdot, \cdot \rangle_r)$ – ҳақиқий Гильберт фазо ва $H_r + iH_r = H$, $R \subset B(H_r) \subset B(H_r) + iB(H_r) = B(H)$. R ҳақиқий $*$ -алгебранинг коммутанти комплекс ҳолдагига ўхшаш тарзда аниқланади, яъни $R' = \{a \in B(H_r) : ba = ab, \forall b \in R\}$. Тўғридан-тўғри текшириш мумкинки, $*$ -қисмалгебра $R + iR \subset B(H)$ нинг коммутанти учун $(R + iR)' = R' + iR'$ тенглик ўринли. Комплекс ҳолдагидек, ҳақиқий $*$ -қисмалгебра $R \subset B(H_r)$ нинг коммутанти учун қуйидагилар ўринли:

$$R \subset R'' = R^{(iv)} = R^{(vi)} = \dots \text{ ва } R' = R''' = R^{(v)} = \dots$$

Агар R алгебра учун $R = R''$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда бундай алгебрага *ҳақиқий фон Нейман алгебра* дейилади. R – ҳақиқий C^* -алгебра бўлсин. У ҳолда, юқорида айтилганидек, $R + iR$ (комплекс) C^* -алгебра бўлади. Равшанки, $R + iR$ алгебра R ни ўз ичига олувчи энг кичик C^* -алгебралар. Агар R ҳақиқий C^* -алгебра берилганда $R + iR$ алгебра (комплекс) W^* -алгебра бўлса, у ҳолда R ни *ҳақиқий W^* -алгебра* деб аталади. R ни ўз ичига олувчи энг кичик W^* -алгебрага, R алгебранинг *қамровчиси* дейилади ва у $U(R)$ кўринишида белгиланади. Равшанки, $U(R) = R + iR$.

1.2 параграфда ҳақиқий C^* -алгебраларнинг тензор кўпайтмаларининг хоссалари ўрганилган бўлиб, хусусан, ҳақиқий W^* -алгебраларнинг тензор кўпайтмалари ва уларнинг қамровчиларининг тензор кўпайтмалари орасидаги боғлиқлик ўрнатилган.

Теорема 1. Фараз қилайлик, R ва Q – ҳақиқий W^* -алгебралар, $U(R)$ ва $U(Q)$ – мос равишда, уларнинг қамровчилари бўлсин. У ҳолда, $U(R \overline{\otimes} Q) = U(R) \overline{\otimes} U(Q)$, яъни $(R + iR) \overline{\otimes} (Q + iQ) = R \overline{\otimes} Q + i(R \overline{\otimes} Q)$ бўлади.

1.3 параграфда ядроли ҳақиқий C^* -алгебраларнинг хоссалари ўрганилган.

Таъриф 1. Агар R ҳақиқий C^* -алгебра учун, ихтиёрий ҳақиқий C^* -алгебра Q ни олмайлик, $R \otimes Q$ алгебраик тензор кўпайтмада ягона C^* -норма мавжуд бўлса, R ни ядроли дейилади.

Теорема 2. Агар F – ҳақиқий сонлар майдони ёки кватернион сонлар жисми бўлса (яъни, $F = \mathbb{R}$ ёки $F = \mathbf{H}$), у ҳолда $M_n(F)$ ҳақиқий C^* -алгебра, F устидаги $n \times n$ ўлчамли ядроли ҳақиқий алгебра бўлади, яъни ихтиёрий ҳақиқий C^* -алгебра R учун $M_n(F) \otimes R$ алгебраик тензор кўпайтмада ягона C^* -норма мавжуд. Бунда, $M_n(F) \otimes R \cong M_m(R)$, ($m \leq n$).

Теорема 3. Барча чекли ўлчамли ҳақиқий C^* -алгебралар ядролидир.

Теорема 4. Барча Абел ҳақиқий C^* -алгебралар ядролидир.

Шуни таъкидлаймизки, R ҳақиқий W^* -алгебра учун, ихтиёрий ҳақиқий C^* -алгебра Q олинганда ҳам $R \otimes Q$ – алгебраик тензор кўпайтмада ягона C^* -норма мавжуд бўлса, R алгебра ядроли дейилади.

Теорема 5. Агар R ҳақиқий W^* -алгебранинг қамровчиси ядроли бўлса, у ҳолда R нинг ўзи ҳам ядролир.

Диссертациянинг «**Иньектив ҳақиқий C^* -алгебралар**» деб номланувчи иккинчи боби учта параграфдан иборат.

2.1 параграфда H_r – ҳақиқий гильберт фазосида таъсир этувчи барча чизиқли чегараланган операторлар алгебраси $B(H_r)$ нинг инъективлик хоссаси ўрганилган.

Фараз қилайлик, A – C^* -алгебра бўлсин. A нинг устидаги $n \times n$ ўлчамли матрицавий алгебрани $M_n(A)$ орқали белгилайлик, бу эса матрицалар устидаги одатий алгебраик амалларга нисбатан C^* -алгебра бўлади. Элемент $a \in A$, учун шундай ўзига-ўзи кўшма $b \in A$ элемент мавжуд бўлиб, $a = b^2$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда a ни *мусбат элемент* дейилади ва у $a \geq 0$ каби белгиланади. A нинг барча мусбат элементлар тўпламини A^+ орқали белгилайлик. Агар A ва B – C^* -алгебралар ўртасидаги $\varphi: A \rightarrow B$ акслантириш берилганда, барча $a \in A^+$ учун $\varphi(a) \in B^+$ бўлса, у ҳолда бундай φ акслантиришга *мусбат акслантириш* дейилади. Мусбат чизиқли акслантириш $\varphi: A \rightarrow B$ берилганда, $\varphi_n((a_{i,j})_{i,j=1}^n) = (\varphi(a_{i,j}))_{i,j=1}^n$ тенглик билан аниқланувчи $\varphi_n: M_n(A) \rightarrow M_n(B)$ акслантириш барча n лар учун мусбат бўлса, у ҳолда бундай φ акслантиришни *тўла мусбат акслантириш* дейилади. A алгебра берилганда, агар ихтиёрий B – бирлик элементли (комплекс) C^* -алгебрани ва унинг бирлик элементни сақловчи ҳар бир ўзига кўшма қисм фазо $S \subset B$ олинганда ҳам, барча тўла мусбат чизиқли $\varphi: S \rightarrow A$ акслантиришни, тўла мусбат чизиқли $\overline{\varphi}: B \rightarrow A$ акслантиришгача давом эттириш мумкин бўлса, бундай A алгебрани *инъектив алгебра* дейилади.

Юқорида келтирилган барча тушунчалар ҳақиқий ҳолда, комплекс ҳол-

дагидек таърифланади.

Теорема 6. H_r – ҳақиқий Гильберт фазоси бўлсин. U ҳолда, $B(H_r)$ ҳақиқий W^* -алгебра инъектив бўлади.

2.2 параграфда ҳақиқий W^* -алгебралар учун инъективлик хоссаси ва E -хоссаси (давом эттириш хоссаси) орасидаги муносабат ўрганилган.

$M \subset B(H)$ – инъектив W^* -алгебра бўлсин. Маълумки, инъектив W^* -алгебра E -хоссага эга, яъни $\|P\|=1$ ва $P(\mathbf{1})=\mathbf{1}$ шартларни қаноатлантирувчи $P: B(H) \rightarrow M$ проекция мавжуд ва P тўла мусбат бўлади.

Тасдиқ 1. $R \subset B(H)$ – ҳақиқий W^* -алгебра бўлсин. $\|P\|=1$ ва $P(\mathbf{1})=\mathbf{1}$ шартларни қаноатлантирувчи $P: B(H) \rightarrow R$ проекция тўла мусбатдир.

Теорема 7. $R \subset B(H)$ – ҳақиқий W^* -алгебра бўлсин. R алгебра инъектив бўлиши учун $\|P\|=1$ ва $P(\mathbf{1})=\mathbf{1}$ шартларни қаноатлантирувчи $P: B(H) \rightarrow R$ проекциянинг мавжуд бўлиши зарур ва етарли.

Теорема 8. $R \subset B(H_r) \subset B(H)$ ҳақиқий W^* -алгебра $B(H_r)$ га нисбатан E -хоссага эга бўлиши учун R алгебра $B(H)$ га нисбатан E -хоссага эга бўлиши зарур ва етарли.

Куйдаги теорема ҳақиқий W^* -алгебранинг инъективлик хоссаси билан унинг қамровчисининг инъективлик хоссаси орасидаги муносабатни кўрсатади.

Теорема 9. Ҳақиқий W^* -алгебранинг инъектив бўлиши учун, унинг қамровчисининг инъектив бўлиши зарур ва етарли.

Натижа 1. Ҳақиқий W^* -алгебранинг E -хоссага эга бўлиши учун унинг қамровчиси E -хоссага эга бўлиши зарур ва етарли.

Йордан алгебралари учун инъективлик тушунчасини қарайлик. $J\mathcal{C}$ -алгебра – бу H даги барча чизикли чегараланган ўз-ўзига қўшма операторлар Йордан алгебраси $B(H)_{s.a.}$ нинг текис ёпиқ Йордан қисм-алгебрасидир. Агар $M \subset B(H)_{s.a.}$ $J\mathcal{C}$ -алгебра ёпиқ бўлса, у ҳолда бундай алгебрага JW -алгебра дейилади. R – ҳақиқий W^* -алгебра бўлсин, у ҳолда $R_s = \{x \in R : x^* = x\}$ қисм фазо, Йордан кўпайтмаси $a \circ b = (ab + ba) / 2$ га нисбатан JW -алгебра бўлади.

JW -алгебра (ёки $J\mathcal{C}$ -алгебра) R_s алгебра учун, ихтиёрий $B \subset C$ – C^* -алгебралар ва ихтиёрий $\varphi: B_s \rightarrow R_s$ морфизм олинганда ҳам, шундай $\bar{\varphi}: C_s \rightarrow R_s$ морфизм мавжуд бўлиб, $\bar{\varphi}|_{B_s} = \varphi$ тенглик бажарилса, R_s алгебра инъектив алгебра дейилади. C^* -алгебралар ўртасидаги морфизм деганда, бирлик элементларни сақловчи тўла мусбат чизикли акслантиришни тушунамиз.

Теорема 10. Агар R_s JW -алгебра E -хоссага эга бўлса, яъни $\|P\|=1$ ва $P(\mathbf{1})=\mathbf{1}$ шартларни қаноатлантирувчи $P: B(H) \rightarrow R_s$ проекция мавжуд бўлса, у ҳолда R_s алгебра инъектив бўлади.

Теорема 11. Ҳақиқий W^* -алгебра R нинг E -хоссага эга бўлиши учун, R_s

JW -алгебранинг E -хоссага эга бўлиши зарур ва етарли.

Натижа 2. R – ҳақиқий W^* -алгебра бўлсин. U ҳолда қуйидагилар ўринли:

1) R , JW -алгебра E -хоссага эга бўлиши учун, R ҳақиқий W^* -алгебранинг қамровчиси $R + iR$ нинг E -хоссага эга бўлиши зарур ва етарли;

2) R , JW -алгебра инъектив бўлиши учун, R ҳақиқий W^* -алгебранинг қопламаси $R + iR$ нинг инъектив бўлиши зарур ва етарли.

2.3 параграфда ҳақиқий C^* -алгебралар учун инъективлик ва ядролик хоссалари орасидаги муносабат ўрганилган.

Тасдиқ 2. H_r – ҳақиқий Гильберт фазоси ва $R \subset B(H_r)$ – ядроли ҳақиқий C^* -алгебра бўлсин. U ҳолда, $\|P\| = 1$ ва $P(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ шартларни қаноатлантирувчи $P: B(H_r) \rightarrow R'$ проекция мавжуд, яъни R' алгебра E -хоссага эга.

Теорема 12. Агар R – ҳақиқий C^* -алгебра ядроли бўлса, U ҳолда ҳақиқий W^* -алгебра R^* инъектив бўлади, бу ерда R^* фазо R нинг иккинчи қўшма фазоси.

Теорема 13. R – ҳақиқий C^* -алгебра бўлсин. Агар R^* – ҳақиқий W^* -алгебра E -хоссага эга бўлса, U ҳолда R ядролidir.

Натижа 3. R – ҳақиқий C^* -алгебра ядроли бўлиши учун ҳақиқий W^* -алгебра R^* нинг инъектив бўлиши зарур ва етарли.

Теорема 14. R – ҳақиқий C^* -алгебра ядроли бўлиши учун C^* -алгебра $R + iR$ нинг ядроли бўлиши зарур ва етарли.

Натижа 4. Ҳақиқий W^* -алгебралар учун инъективлик ва ядролик хоссалари устма-уст тушади.

Диссертациянинг «**Максимал инъектив ҳақиқий W^* -қисмалгебралар**» деб номланувчи учинчи боби ҳақиқий W^* -алгебраларнинг максимал инъектив ҳақиқий W^* -қисмалгебраларини ва қисмфакторларини ўрганишга бағишланган. Инъектив бўлмаган W^* -алгебраларни ўрганиш (изоморфизм аниқлигида) етарлича қийин чунки, инъектив бўлмаган континуумта ўзаро изоморф бўлмаган Π_1 типли факторлар мавжуд. Шу сабабли, максимал инъектив W^* -қисмалгебраларни ва қисмфакторларни ўрганиш долзарб. Фараз қилайлик, $*$ -қисмалгебра $M \subset B(H)$ ва W^* -алгебра N берилган бўлиб, $M \subset N \subset B(H)$, ($N \neq B(H)$) шартни қаноатлантирсин. U ҳолда, $M'_N \subset M'_{B(H)}$ ўринли. Таъкидлаш жоизки, умумий ҳолда $M''_N \not\subset M''_{B(H)}$ ва $M''_{B(H)} \not\subset M''_N$ бўлиши мумкин. Яъни, M – $*$ -қисмалгебра учун, N W^* -алгебрага нисбатан олинган бикоммутант ҳақидаги теорема ўринли эмас. Шунинг учун ҳам, M – келтирилмайдиган W^* -қисмалгебраларни, яъни $M' \cap N = \mathbb{C}\mathbf{1}$ ўрганиш қизиқарли, бунда M алгебранинг W^* -алгебра N га нисбатан олинган бикоммутанти максимал тарзда кенгроқ бўлади. Бошқа томондан, келтирилмайдиган W^* -қисмалгебраларни ўрганишда аниқландики, агар $M \subset N$ – факторлар ва M нинг N да максимал Абел W^* -қисмалгебра бўладиган W^* -қисмалгебраси мавжуд бўлса, U ҳолда M – келтирилмайдиган алгебра бўлади.

Р.Кадисон томонидан куйидаги масала қўйилган: агар $M - N$ факторнинг келтирилмайдиган қисмфактори бўлса, у ҳолда M нинг N да максимал Абел W^* -қисмалгебра бўладиган W^* -қисмалгебраси B мавжудми? Бу муаммо 1981 йилда С.Попа томонидан хусусий ҳолда ечилган. Р.Кадисонда куйидаги фараз бўлган: факторнинг барча сепарабел Абел W^* -қисмалгебралари гиперфинитли қисмфакторнинг ичида жойлашади. Лекин, С.Попа 1983 йилда Кадисоннинг бу фаразининг нотўғри эканлигини исботлади. Дастлаб, Мюррей ва фон Нейманлар ихтиёрий сепарабел Π_1 типли фактор максимал инъектив W^* -қисмалгебра бўладиган гиперфинитли қисмфакторни ўз ичига олади деган фаразни илгари суришган. Бу фаразнинг тўғрилиги 1983 йилда Сорин Попа томонидан исботланган, лекин бу муаммо сепарабеллик шартисиз Ж.Фанг томонидан ечилган. Шунингдек, инъектив W^* -қисмалгебранинг максималлиги ва гиперфинитли қисмфакторнинг максималлиги бир-бирига боғлиқ эмас, яъни бири бошқасидан келиб чиқмайди.

Бошқа томондан, инъектив W^* -қисмалгебранинг максималлиги унинг келтирилмайдиган қисмалгебралиги билан боғлиқ.

Айнан, Ж.Фанг кўрсатганки, $M - N$ факторнинг максимал гиперфинитли қисмфактори бўлса, у ҳолда $M -$ максимал инъектив W^* -қисмалгебра бўлиши учун, $M -$ келтирилмайдиган, яъни $M' \cap N = \mathbb{C}1$ бўлиши зарур ва етарли. Шундай қилиб, инъектив W^* -қисмалгебранинг максималлиги унинг келтирилмайдиган қисмалгебралиги билан боғлиқ, бу эса ўз навбатида бикоммутант ҳақидаги теорема билан боғлиқ.

3.1 параграфда кўрсатилганки, агар қамровчи W^* -қисмалгебра максимал инъектив бўлса, у ҳолда бу ҳақиқий W^* -қисмалгебранинг ўзи ҳам максимал инъектив бўлади.

Теорема 15. $Q -$ ҳақиқий W^* -алгебра R нинг W^* -қисмалгебраси бўлсин. Агар $Q + iQ$ алгебра $R + iR$ алгебрада максимал инъектив W^* -қисмалгебра бўлса, у ҳолда Q алгебра R алгебрада максимал инъектив қисмалгебра бўлади.

Куйидаги теорема ҳақиқий факторлар учун Мюррей ва фон Нейман муаммосининг ечимини ифодаловчи Ж.Фанг теоремасининг муқобилидир.

Теорема 16. $R -$ ҳақиқий фактор ва $Q - R$ нинг максимал инъектив ҳақиқий қисмфактори бўлсин. $Q - R$ нинг максимал инъектив ҳақиқий W^* -қисмалгебраси бўлиши учун, $Q - R$ да келтирилмайдиган, яъни $Q' \cap R = \mathbb{R}1$ бўлиши зарур ва етарли.

3.2 параграфда ҳақиқий W^* -қисмалгебраларнинг тензор кўпайтмаларидаги максимал инъектив ҳақиқий W^* -қисмалгебраларнинг хоссалари ўрганилган.

Куйидаги теорема «ажратиш ҳақидаги теорема» деб номланувчи Ге-Кадисон теоремасининг муқобилидир.

Теорема 17. Агар $R_1 -$ чекли ҳақиқий фактор, $R_2 -$ чекли ҳақиқий W^* -алгебра ва $R - R_1 \overline{\otimes} \mathbb{R}1$ ни сақловчи $R_1 \overline{\otimes} R_2$ нинг ҳақиқий W^* -қисмалгебраси

бўлса, у ҳолда шундай ҳақиқий W^* -қисмалгебра $Q_2 \subset R_2$ мавжудки,
 $R = R_1 \overline{\otimes} Q_2$.

Лемма 3. R – Абел ҳақиқий W^* -алгебра, Q – ҳақиқий W^* -алгебра ва F_2 – Q ни сақловчи минимал инъектив сепарабел ҳақиқий W^* -алгебра бўлсин. Агар $F = R \overline{\otimes} Q \subset F \subset R \overline{\otimes} F_2$ ни қаноатлантирувчи инъектив ҳақиқий W^* -алгебра бўлса, у ҳолда $F = R \overline{\otimes} F_2$ бўлади.

3.2 параграфнинг асосий теоремасини келтириб ўтайлик.

Теорема 18. R_1 – инъектив ҳақиқий W^* -алгебра ва R_2 – сепарабел ҳақиқий W^* -алгебра бўлсин. Агар $Q_2 \subset R_2$ да максимал инъектив ҳақиқий W^* -қисмалгебра бўлса, у ҳолда $R_1 \overline{\otimes} Q_2 \subset R_1 \overline{\otimes} R_2$ да максимал инъектив ҳақиқий W^* -қисмалгебра бўлади.

3.3 параграфда қуйдаги масала қаралган: агар R_1, R_2 – ҳақиқий W^* -алгебрлар, Q_1, Q_2 – уларнинг мос равишдаги максимал инъектив ҳақиқий W^* -қисмалгебралари бўлса, у ҳолда $Q_1 \overline{\otimes} Q_2$ тензор кўпайтма $R_1 \overline{\otimes} R_2$ тензор кўпайтмада максимал инъектив қисмалгебра бўладими?

Бу масала баъзи хусусий ҳоллар учун ечилган.

1-Ҳол. Q_1 – ҳақиқий фактор, R_1 – сепарабел бўлсин.

Теорема 19. $R_i (\subset B(H_i))$ – ҳақиқий W^* -алгебра, $Q_i \subset R_i$ нинг максимал инъектив ҳақиқий W^* -қисмалгебраси бўлсин. Агар R_1 – сепарабел ва Q_1 – ҳақиқий фактор бўлса, у ҳолда $Q_1 \overline{\otimes} Q_2 \subset R_1 \overline{\otimes} R_2$ нинг максимал инъектив ҳақиқий W^* -қисмалгебраси бўлади.

2-Ҳол. R_1 – сепарабел, Q_1 алгебранинг маркази атомли бўлсин. Эслатиш жоизки, ҳар бир нолдан фарқли проектри нолдан фарқли минимал проектор (атом) ни сақлаган, яъни ҳар бир нолдан фарқли проектор остида атоми мавжуд бўлган фон Нейман алгебрасига атомли алгебра дейилади.

Теорема 20. R_i – ҳақиқий W^* -алгебра ва $Q_i \subset R_i$ нинг максимал инъектив ҳақиқий W^* -қисмалгебраси бўлсин. Агар R_1 – сепарабел, Q_1 алгебранинг маркази атомли бўлса, у ҳолда $Q_1 \overline{\otimes} Q_2 \subset R_1 \overline{\otimes} R_2$ нинг максимал инъектив ҳақиқий W^* -қисмалгебраси бўлади.

3-Ҳол. $Q_i, R_i (i = 1, 2)$ – факторлар бўлсин.

Теорема 21. $R_i (\subset B(H_i))$ – ҳақиқий фактор ва $Q_i \subset R_i$ нинг максимал инъектив ҳақиқий қисмфактори бўлсин. Агар $Q'_i \cap R_1 \cong \mathbb{R}^N (1 \leq N \leq \infty)$ ва $Q'_2 \cap R_2 = \mathbb{R}1$, у ҳолда $Q_1 \overline{\otimes} Q_2 \subset R_1 \overline{\otimes} R_2$ нинг максимал инъектив ҳақиқий қисмфактори бўлади.

Натижа 5. R_i – ҳақиқий фактор ва $Q_i \subset R_i$ да келтирилмайдиган максимал инъектив ҳақиқий қисмфактор бўлсин. У ҳолда, $Q_1 \overline{\otimes} Q_2 \subset R_1 \overline{\otimes} R_2$ да келтирилмайдиган максимал инъектив ҳақиқий қисмфактор бўлади. Бундан

ташқари, 16-теоремага асосан, $Q_1 \overline{\otimes} Q_2 - R_1 \overline{\otimes} R_2$ да максимал инъектив ҳақиқий W^* -қисмалгебра бўлади.

ХУЛОСА

Диссертация иши ядроли ва инъектив ҳақиқий C^* -алгебраларни тадқиқ қилишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Чекли ўлчамли ва Абел ҳақиқий C^* -алгебраларнинг ядролиги исботланган.

2. Ҳақиқий C^* -алгебра ядроли бўлиши учун унинг қамровчисининг ядроли бўлиши зарур ва етарли эканлиги исботланган.

3. Инъективликнинг Хакеда-Томияма ва «морфизмларни давом эттириш» маъноларидаги таърифлари ҳақиқий W^* -алгебралар учун эквивалентлиги кўрсатилган.

4. Ҳақиқий W^* -алгебранинг максимал инъектив ҳақиқий W^* -қисмалгебралари ва қисмфакторлари ўрганилган. Шунингдек, агар ҳақиқий W^* -қисмалгебранинг қамровчиси максимал инъектив бўлса, бу ҳақиқий W^* -қисмалгебранинг ўзи ҳам максимал инъектив қисмалгебра бўлиши исботланган.

5. Ге-Кадисоннинг «ажратиш ҳақидаги теорема» деб номланувчи теоремасининг ҳақиқий W^* -алгебралар учун муқобили олинган.

6. R_1 – инъектив ҳақиқий W^* -алгебра ва R_2 – сепарабел ҳақиқий W^* -алгебра, $Q_2 - R_2$ нинг максимал инъектив ҳақиқий W^* -қисмалгебраси бўлса, $R_1 \overline{\otimes} Q_2$ тензор кўпайтма $R_1 \overline{\otimes} R_2$ нинг максимал инъектив ҳақиқий W^* -қисмалгебраси бўлиши исботланган.

7. R_1, R_2 – ҳақиқий W^* -алгебралар ва Q_1, Q_2 – уларнинг мос равишдаги максимал инъектив ҳақиқий W^* -қисмалгебралари учун $Q_1 \overline{\otimes} Q_2$ тензор кўпайтма $R_1 \overline{\otimes} R_2$ тензор кўпайтмада максимал инъектив қисмалгебра бўлиши R_1 – сепарабел ва Q_1 – ҳақиқий фактор, R_1 – сепарабел ва Q_1 алгебранинг маркази атомли, Q_i, R_i ($i=1,2$) – ҳақиқий факторлар бўлган ҳоллар учун исботланган.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.27.06.2017.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ
УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
УЗБЕКИСТАНА, ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

НУРИЛЛАЕВ МУЗАФФАР ЭШНАЗАРОВИЧ

КЛАССИФИКАЦИЯ ЯДЕРНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ W^* -ФАКТОРОВ

01.01.01 – Математический анализ

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

ТАШКЕНТ-2019

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2017.1.PhD/FM6

Диссертация выполнена в институте Математики.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (<http://ik-fizmat@nuu.uz/>) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» (www.ziyo.net).

Научный руководитель: **Рахимов Абдугафур Абдумаджидович**
доктор физико-математических наук

Официальные оппоненты: **Ганихужаев Расул Набиевич**
доктор физико-математических наук, профессор
Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович
доктор физико-математических наук, профессор

Ведущая организация: **Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта**

Защита диссертации состоится «__» _____ 2019 года в __ часов на заседании Научного совета DSc.27.06.2017.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана, института Математики. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «__» _____ 2019 года.
(протокол рассылки №_____ от «__» _____ 2019 года).

А.Садуллаев

Председатель Научного совета по
присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор, академик

Г.И. Ботиров

Ученый секретарь Научного совета по присуждению
ученых степеней, к.ф.-м.н.

В.И.Чилин

Председатель научного семинара при Научном совете
по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Решения проблем, возникающих в результате научно-прикладных исследований на мировом уровне, очень часто сводятся к изучению динамических систем математической физики и квантовой механики, в частности теории операторных алгебр. Наблюдаемой данной физической системе в квантовой-механике соответствует линейный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве, а всякому состоянию рассматриваемой системы соответствует матрица плотности. Так как операторные алгебры, в частности комплексные и вещественные C^* и W^* -алгебры, являются математическими моделями квантовой механики и динамических систем, где каждый полученный результат имеет свое применение в квантовой механике, то операторные алгебры очень важны как в теоретическом, так и в практическом смысле и являются одним из актуальных направлений современной математики.

В настоящее время в мире процессы в технике и природе моделируются с помощью динамических систем, многие из которых имеют важные практические свойства. Среди них особое значение имеет изучение свойств инъективности, гиперфинитности и ядерности операторных алгебр, которые являются актуальной проблемой для динамических систем. Результаты исследования имеют теоретическое доказательство того, что эти свойства являются эквивалентными для динамических систем, в частности операторных алгебр. К настоящему времени свойства инъективности, гиперфинитности этих алгебр хорошо изучены. Исследование свойств ядерности динамических систем, классифицирование ядерных комплексных и вещественных C^* и W^* -алгебры и нахождение отношения между свойствами ядерности, инъективности и гиперфинитности являются одним из целевых исследований динамических систем в квантовой механике.

В нашей стране уделяется особое внимание актуальным направлениям в фундаментальных науках, которые имеют научное и практическое применение. В том числе особое внимание уделяется развитию теории операторных алгебр, являющейся основным объектом математического моделирования задач квантовой механики и математической физики. Значительные результаты были достигнуты в изучение свойств инъективности, гиперфинитности, ядерности, полудискретности и аменабельности для C^* -алгебр. Проведение научных исследований на международном уровне по таким важным направлениям, как функциональный анализ, математическая и статистическая физика, рассматривается в качестве основной задачи фундаментальных исследований¹. Развитие исследований ядерных и инъективных комплексных и вещественных C^* -алгебр играет важную роль в реализации указанного постановления.

¹ Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года № 292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

Исследование данной диссертации в определенной степени служит решению задач, поставленных в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и № УП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Ядерные C^* -алгебры, в частности ядерные W^* -алгебры, достаточно хорошо изучены. Благодаря работам А.Конна, Э.Штермера, У.Хаагерупа, С.Вассермана, Э.Эфросса, С.Попа, С.Ланса и М.Чоя для W^* -алгебр, для факторов, за исключением $B(H)$, доказана эквивалентность таких понятий как ядерность, инъективность, гиперфинитность, полудискретность и аменабельность.

Для вещественных факторов понятия инъективности, полудискретности и гиперфинитности достаточно хорошо изучены в работах Ш.Усманова, А.Рахимова, и Б.Байкабилова. Однако в вещественном случае понятие ядерности алгебры не было изучено. Кроме того, в вышеуказанных работах инъективность рассмотрена в смысле определения Хакеда-Томиама. Именно под инъективностью подразумевается существование проекции $P: B(H) \rightarrow R$ с $\|P\|=1$, $P(\mathbf{1})=\mathbf{1}$. Общее определение инъективности C^* -алгебр, которая определяется с «продолжением морфизмов», к настоящему времени не изучена. Исследование связи между инъективностью и ядерностью вещественных W^* -алгебр является интересным вопросом.

В неинъективном случае исследовать (с точностью до изоморфизма) W^* -алгебры довольно сложно, в частности, известно, что существует континуум попарно не изоморфных не инъективных факторов типа II_1 . Поэтому представляется интересным исследовать так называемые максимальные инъективные W^* -подалгебры и подфакторы W^* -алгебр. Кроме того, исследование максимальных инъективных W^* -подалгебр и подфакторов также связано с аналогом теоремы о бикоммутанте. В комплексном случае эти подалгебры рассмотрены в работах С.Попа, Л.Ге, Р.Кадисона, Ж.Фанга, Ж.Шена, С.Стратила, Л.Жидо.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами, учреждением высшего образования, где выполнялась диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ ФА-Ф1- Ф03 ТФ067 «Квантовая динамика многочастичных систем, неассоциативные и топологические структуры в операторных алгебрах» (2007- 2011 гг.), Ф-4-51 «Структурный анализ йордановых тройных систем и вероятностных распределений в

функциональных пространствах», Ташкентский автомобильно-дорожный институт (2012-2016 гг.).

Целью исследования является изучение ядерных и инъективных вещественных C^* -алгебр и максимальных инъективных W^* -подалгебр и подфакторов вещественной W^* -алгебры.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие:

доказать ядерность конечномерных и абелевых вещественных C^* -алгебр;

показать связь ядерности вещественной C^* -алгебры с ядерностью её обертывающей C^* -алгебры и связь между понятиями ядерности и инъективности для вещественных C^* -алгебр;

доказать эквивалентность между собой двух определений инъективности алгебры, т.е. показать, что определения инъективности в смысле «продолжения морфизмов» и Хакеда-Томияма совпадают;

исследовать максимальные инъективные вещественные W^* -подалгебры и подфакторы вещественной W^* -алгебры.

Объект исследования – ограниченные линейные операторы на гильбертовом пространстве, вещественные и комплексные C^* и W^* -алгебры.

Предмет исследования – ядерные и инъективные вещественные C^* и W^* -алгебры в алгебре всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве.

Методы исследования. В работе используются методы функционального анализа, математического анализа и «метод перехода к обертывающей алгебре» теории операторных алгебр.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

показана ядерность конечномерных и абелевых вещественных C^* -алгебр и, кроме того, что вещественная C^* -алгебра ядерна тогда и только тогда, когда её обертывающая C^* -алгебра ядерна;

определена эквивалентность понятий ядерности и инъективности для вещественных W^* -алгебр;

доказана эквивалентность между собой двух определений инъективности алгебры, т.е. показано, что определения инъективности в смысле «продолжения морфизмов» и Хакеда-Томияма совпадают;

показано, что если обертывающий фактор вещественного инъективного подфактора является максимальным инъективным, то сам вещественный подфактор также является максимально инъективным.

Практические результаты исследования состоят в следующем:

структуры ядерных и инъективных вещественных C^* -алгебр использованы при решении задач по определению состояния квантовых частиц, возникающих в квантовой механике и математической физике;

результаты исследования инъективности вещественных W^* -алгебр использованы при описании дифференцирований для алгебр Капланского.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов функционального анализа и теории операторных алгебр, а также строгостью математических суждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научное значение результатов исследования заключается в том, что установлена эквивалентность свойств ядерности и инъективности для вещественных W^* -алгебр.

Практическое значение результатов исследования заключается в том, что полученные результаты могут служить практической основой при исследовании ряда проблем квантовой статистической механики и теории квантовых динамических систем.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты по исследованию ядерных и инъективных вещественных C^* -алгебр внедрены в практику по следующим направлениям:

результаты по ядерности для вещественных W^* -факторов были использованы в рамках гранта PPP/USG-0216/FST/30/15316 «Методы Ньютона-Канторовича при решении нелинейных интегральных уравнений» для описания решений нелинейных интегральных уравнений (Исламский университет Малайзии, Малайзия справка от 27 ноября 2018 г.). Применение научного результата дало возможность для нахождения вида решений для таких уравнений в случае, когда решения являются ядерным оператором.

результаты по инъективным вещественным W^* -алгебрам были использованы в рамках гранта OT-4-27 «Описание предуальных пространств йордановых троек, пространства емкостей и голоморфное продолжение функции» для показания совпадения 2-локальных дифференцирований и обычных дифференцирований для матричных алгебр и алгебры Капланского (справка МВССО РУз от 16.01.2019, №89-03-231). Применение этих научных результатов дало возможность для установления отношения между локальным дифференцированием и автоморфизмами для таких алгебр;

результат о равенстве обертывающей W^* -алгебры тензорных произведений вещественных W^* -алгебр с тензорными произведениями обертывающих их W^* -алгебр был использован в рамках гранта Ф-4-09 «Структурная теория неассоциативных алгебр, банаховых модулей и дискретные динамические системы» для описания банаховых модулей, ассоциативных и неассоциативных йордановых алгебр (справка МВССО РУз от 16.01.2019, №89-03-231). Применение научного результата дало возможность классифицирования некоторых ассоциативных и неассоциативных йордановых алгебр, в частности JW -алгебры в инъективном случае;

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 2 международных и 5 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 20 научных работ, из них 7 в научных изданиях, рекомендуемых Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе 2 статьи опубликованы в зарубежных журналах, 6 в республиканских научных

изданиях, 5 тезисов докладов в материалах международных конференций и 7 тезисов докладов в материалах республиканских конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 85 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации «**Ядерные вещественные C^* -алгебры**» состоит из трех параграфов. В первом параграфе главы приведены необходимые понятия и известные результаты из теории комплексных и вещественных C^* и W^* -алгебр, используемые при исследовании.

Пусть A – банахова $*$ -алгебра над полем \mathbb{C} . Алгебра A называется C^* -алгеброй, если $\|aa^*\| = \|a\|^2$ для любого $a \in A$. C^* -алгебра M называется W^* -алгеброй, если существует банахово пространство M_* такое, что $(M_*)^* = M$. При этом пространство M_* называется сопряженным пространством для M . Пусть $M \subset B(H)$ – $*$ -подалгебра.

Подмножество $M' = \{a \in B(H) : ba = ab, \forall b \in M\}$ называется коммутантом алгебры M . Нетрудно видеть, что $M \subset M'' = M^{(iv)} = M^{(vi)} = \dots$ и $M' = M''' = M^{(v)} = \dots$, где $M'' = (M')'$. При этом, если $M = M''$, то M называется алгеброй фон Неймана. Пусть, $M \subset B(H)$ – W^* -алгебра. Совокупность всех элементов M , коммутирующих со всеми элементами из M , называется центром алгебры M и обозначается $Z(M)$. Легко видеть, что $Z(M) = M \cap M'$. Элементы $Z(M)$ называются центральными. Алгебру, у которой центральными элементами являются только элементы вида $\lambda \cdot \mathbf{1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, называют фактором. Построенная фон Нейманом теория разложения позволяет во многих случаях сводить задачи о произвольных алгебрах фон Неймана к соответствующим задачам для факторов. Вещественная банахова $*$ -алгебра R называется вещественной C^* -алгеброй, если норму на R можно продолжить на комплексификацию $A = R + iR$ алгебры R так, чтобы алгебра A являлась (комплексной) C^* -алгеброй. Известно, что вещественная банахова $*$ -алгебра R является вещественной C^* -алгеброй тогда и только тогда, когда R – эрмитова алгебра и $\|aa^*\| = \|a\|^2$ для любого $a \in R$.

Эрмитовость R означает, что $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$ для любого $a = a^*$, где $\sigma(a)$ – спектр элемента a . С другой стороны, эрмитовость алгебры R эквивалентна обратимости элемента $1 + aa^*$ для любого $a \in R$.

Пусть $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – комплексное гильбертово пространство и пусть $R \subset B(H)$ – вещественная $*$ -подалгебра. Положим

$$\langle \xi, \eta \rangle_r = \operatorname{Re}(\langle \xi, \eta \rangle), \quad \xi, \eta \in H.$$

Нетрудно показать, что $H_r = (H, \langle \cdot, \cdot \rangle_r)$ есть вещественное гильбертово пространство такое, что $H_r + iH_r = H$ и $R \subset B(H_r) \subset B(H_r) + iB(H_r) = B(H)$.

Коммутант $*$ -алгебры R определяется аналогично комплексному случаю:

$$R' = \{a \in B(H_r) : ba = ab, \forall b \in R\}.$$

Непосредственно проверяется, что для коммутанта $*$ -подалгебры $R + iR \subset B(H)$ имеет место равенство $(R + iR)' = R' + iR'$.

Аналогично комплексному случаю для вещественной $*$ -подалгебры $R \subset B(H_r)$ верны следующие: $R \subset R'' = R^{(iv)} = R^{(vi)} = \dots$ и $R' = R''' = R^{(v)} = \dots$.

При этом, если $R = R''$, то R называется *вещественной алгеброй фон Неймана*. Пусть R – вещественная C^* -алгебра. Тогда, как уже сказано выше, $R + iR$ является (комплексной) C^* -алгеброй. Легко видеть, что эта алгебра есть наименьшая C^* -алгебра, содержащая R . Вещественная C^* -алгебра R называется *вещественной W^* -алгеброй*, если C^* -алгебра $R + iR$ является (комплексной) W^* -алгеброй. Пусть R – вещественная W^* -алгебра. Наименьшая W^* -алгебра $U(R)$, содержащая R , называется *обертывающей W^* -алгеброй* для R . Ясно, что $U(R) = R + iR$.

В параграфе 1.2 изучаются свойства тензорных произведений вещественных C^* -алгебр, в частности устанавливается связь тензорных произведений вещественных W^* -алгебр с тензорными произведениями обертывающих их W^* -алгебр.

Теорема 1. Пусть R и Q – вещественные W^* -алгебры, $U(R) = R + iR$ и $U(Q) = Q + iQ$ – их обертывающие W^* -алгебры, соответственно. Тогда

$$U(R \bar{\otimes} Q) = U(R) \bar{\otimes} U(Q), \text{ т.е. } (R + iR) \bar{\otimes} (Q + iQ) = R \bar{\otimes} Q + i(R \bar{\otimes} Q).$$

В параграфе 1.3 изучаются свойства ядерных вещественных C^* -алгебр.

Определение 1. Вещественная C^* -алгебра R называется *ядерной*, если для любой вещественной C^* -алгебры Q на тензорном произведении $R \bar{\otimes} Q$ существует единственная C^* -норма.

Теорема 2. Если F – поле вещественных чисел или тело кватернионов (т.е. $F = \mathbb{R}$ или $F = \mathbf{H}$), то вещественная C^* -алгебра $M_n(F)$, алгебра $n \times n$ -матриц над F , является ядерной, т.е. для любой вещественной C^* -алгебры R на тензорном произведении $M_n(F) \bar{\otimes} R$ существует единственная C^* -норма. В этом случае $M_n(F) \bar{\otimes} R \cong M_n(R)$, ($m \leq n$).

Теорема 3. Всякая конечномерная вещественная C^* -алгебра является ядерной.

Теорема 4. Всякая абелева вещественная C^* -алгебра является ядерной.

Теорема 5. Вещественная W^* -алгебра R – ядерна, если ее обертывающая W^* -алгебра ядерна.

Здесь ядерность вещественной W^* -алгебры R означает, что для любой вещественной C^* -алгебры Q на тензорном произведении $R \otimes Q$ существует единственная C^* -норма.

Вторая глава диссертации «**Инъективные вещественные C^* -алгебры**» состоит из трех параграфов.

В параграфе 2.1 исследуется свойство инъективности вещественной W^* -алгебры $B(H_r)$ всех ограниченных линейных операторов, действующих в вещественном гильбертовом пространстве H_r .

Пусть A – C^* -алгебра. Обозначим через $M_n(A)$ алгебру $n \times n$ матриц над A , которая также является C^* -алгеброй относительно обычных операций над матрицами. Элемент $a \in A$ называется *положительным* и пишется как $a \geq 0$, если существует самосопряженный элемент $b \in A$, такой, что $a = b^2$. Обозначим через A^+ множество всех положительных элементов в A . Положительное отображение φ между C^* -алгебрами A и B – это отображение $\varphi: A \rightarrow B$ с $\varphi(a) \in B^+$ для всех $a \in A^+$. Положительное линейное отображение φ называется *вполне положительным*, если отображение $\varphi_n: M_n(A) \rightarrow M_n(B)$, определяемое как $\varphi_n((a_{i,j})_{i,j=1}^n) = (\varphi(a_{i,j}))_{i,j=1}^n$, является положительным для всех n . Алгебра A называется *инъективной*, если для любой (комплексной) C^* -алгебры B с единицей $\mathbf{1}$, и для каждого самосопряженного подпространства $S \subset B$, содержащего $\mathbf{1}$, всякое вполне положительное линейное отображение $\varphi: S \rightarrow A$ можно продолжить до вполне положительного линейного отображения $\bar{\varphi}: B \rightarrow A$.

Все выше приведенные понятия аналогично определяются и для вещественных C^* -алгебр.

Теорема 6. Пусть H_r – вещественное гильбертово пространство. Тогда вещественная W^* -алгебра $B(H_r)$ – инъективна.

В параграфе 2.2 исследуется взаимосвязь свойства инъективности и E -свойства (свойство продолжимости) для вещественных W^* -алгебр. Пусть $M \subset B(H)$ – инъективная W^* -алгебра. Известно, что в этом случае алгебра M обладает так называемым свойством E , т.е. существует проекция $P: B(H) \rightarrow M$ такая, что $\|P\|=1$ и $P(\mathbf{1})=\mathbf{1}$. При этом отображение P является вполне положительным.

Предложение 1. Пусть $R \subset B(H)$ – вещественная W^* -алгебра. Если

$P: B(H) \rightarrow R$ – проекция, причем такая, что $\|P\|=1$ и $P(\mathbf{1})=\mathbf{1}$, то P является вполне положительной.

Теорема 7. Пусть $R \subset B(H)$ – вещественная W^* -алгебра. Алгебра R является инъективной тогда и только тогда, когда существует проекция $P: B(H) \rightarrow R$ такая, что $\|P\|=1$ и $P(\mathbf{1})=\mathbf{1}$.

Теорема 8. Вещественная W^* -алгебра $R \subset B(H_r) \subset B(H)$ имеет свойство E относительно $B(H_r)$ тогда и только тогда, когда R имеет свойство E относительно $B(H)$.

Следующая теорема показывает связь инъективности вещественной W^* -алгебры с инъективностью обертывающей W^* -алгебры.

Теорема 9. Вещественная W^* -алгебра R является инъективной тогда и только тогда, когда обертывающая W^* -алгебра $R + iR$ инъективна.

Следствие 1. Вещественная W^* -алгебра R обладает свойством E тогда и только тогда, когда обертывающая W^* -алгебра $R + iR$ обладает свойством E .

Теперь рассмотрим понятие инъективности на эрмитовой части вещественной W^* -алгебры. Напомним, что JC -алгебра – это равномерная замкнутая йорданова подалгебра йордановой алгебры $B(H)_{s.a.}$ – всех ограниченных линейных самосопряжённых операторов на H . JC -алгебра $M \subset B(H)_{s.a.}$ называется JW -алгеброй, если она слабо замкнута. Пусть R – вещественная W^* -алгебра, тогда подпространство $R_s = \{x \in R : x^* = x\}$ является JW -алгеброй относительно йорданова произведения $a \circ b = (ab + ba) / 2$. JW -алгебра (или JC -алгебра) R_s называется *инъективной*, если для любой пары $B \subset C$ – C^* -алгебр и для любого морфизма $\varphi : B_s \rightarrow R_s$ существует морфизм $\bar{\varphi} : C_s \rightarrow R_s$ такой, что $\bar{\varphi}|_{B_s} = \varphi$. Морфизмом между двумя C^* -алгебрами называется вполне положительное линейное отображение, сохраняющее единицу.

Теорема 10. Если JW -алгебра R_s обладает свойством E , т.е. существует проекция $P : B(H) \rightarrow R_s$ такая, что $\|P\| = 1$ и $P(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, то алгебра R_s – инъективна.

Теорема 11. Вещественная W^* -алгебра R обладает свойством E тогда и только тогда, когда JW -алгебра R_s обладает свойством E .

Таким образом, суммируя все полученные результаты, получим следующее следствие.

Следствие 2. Пусть R – вещественная W^* -алгебра. Тогда верны следующие:

- 1) JW -алгебра R_s обладает свойством E тогда и только тогда, когда обертывающая W^* -алгебра $R + iR$ алгебры R обладает свойством E ;
- 2) JW -алгебра R_s является инъективной тогда и только тогда, когда обертывающая W^* -алгебра $R + iR$ алгебры R является инъективной.

В параграфе 2.3 рассматривается взаимосвязь свойств инъективности и ядерности для вещественных C^* -алгебр.

Предложение 2. Пусть H_r – вещественное гильбертово пространство и пусть $R \subset B(H_r)$ – ядерная вещественная C^* -алгебра. Тогда существует проекция $P : B(H_r) \rightarrow R'$ такая, что $\|P\| = 1$ и $P(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, т.е. алгебра R' обладает E свойством.

Из предложения 2 следует, что ядерность вещественной C^* -алгебры влечет инъективность коммутанта алгебры.

Теорема 12. Если вещественная C^* -алгебра R – ядерна, то вещественная W^* -алгебра R^{**} – инъективна, где R^{**} – второе сопряженное пространство.

Верно и обратное утверждение:

Теорема 13. Пусть R – вещественная C^* -алгебра. Если вещественная W^* -алгебра R^{**} обладает свойством E , то R – ядерна.

Следствие 3. Вещественная C^* -алгебра R – ядерна тогда и только тогда, когда вещественная W^* -алгебра R^{**} – инъективна.

Теорема 14. Вещественная C^* -алгебра R – ядерна тогда и только тогда, когда C^* -алгебра $R + iR$ – ядерна.

Следствие 4. Для вещественной W^* -алгебры понятия ядерность и инъективность совпадают.

Третья глава диссертации «**Максимальные инъективные вещественные W^* -подалгебры**» посвящена изучению максимальных инъективных W^* -подалгебр и подфакторов вещественных W^* -алгебр.

Как известно, исследовать (с точностью до изоморфизма) неинъективные W^* -алгебры довольно трудно, так как существует континуум попарно неизоморфных неинъективных факторов типа II_1 . Поэтому представляется интересным изучить так называемые максимальные инъективные W^* -подалгебры и подфакторы. Пусть $M \subset B(H)$ – $*$ -подалгебра, N – W^* -алгебра с $M \subset N \subset B(H)$, ($N \neq B(H)$). Тогда $M'_N \subset M'_{B(H)}$ и в общем случае имеем: $M''_N \not\subset M''_{B(H)}$ и $M''_{B(H)} \not\subset M''_N$. То есть для $*$ -подалгебры M теорема о бикоммутанте, относительно W^* -алгебры N , не верна. Поэтому интересно рассмотреть неприводимые W^* -подалгебры M , т.е. $M' \cap N = \mathbb{C}1$, так как в этом случае относительный бикоммутант будет максимально шире. С другой стороны, при исследовании неприводимости W^* -подалгебры выясняется, что если $M \subset N$ – факторы и существует абелева W^* -подалгебра $B \subset M$, являющаяся максимальной абелевой W^* -подалгеброй N , то M – неприводима. В связи с этим Р.Кадисон сформулировал следующий вопрос: если M – неприводимый подфактор фактора N , то существует ли абелева W^* -подалгебра $B \subset M$, которая является максимальной абелевой W^* -подалгеброй фактора N ? Эта проблема решена пока в частном случае (С.Попа, 1981). У Р.Кадисона была также гипотеза о том, что всякая сепарабельная абелева W^* -подалгебра фактора содержится в некотором гиперфинитном подфакторе. Однако предположение Кадисона оказалось неверным (С.Попа, 1983). С самого начала Мюррей и фон Нейман предполагали, что всякий сепарабельный фактор типа II_1 содержит гиперфинитный подфактор как максимальную инъективную W^* -подалгебру. Этот результат доказан в 1983 году Сорином Попой, а без условия сепарабельности проблема положительно решена в работе Ж.Фанга. Заметим также, что максимальность инъективной W^* -подалгебры и максимальность гиперфинитного подфактора не связаны друг с

другом, т.е. одно не влечёт другое. С другой стороны, оказывается, что максимальность инъективной W^* -подалгебры связана с неприводимостью подалгебры. Именно Ж.Фанг показал, что если M – максимальный гиперфинитный подфактор фактора N , то M – максимальная инъективная W^* -подалгебра тогда и только тогда, когда M – неприводима, т.е. $M' \cap N = \mathbb{C}\mathbf{1}$. Таким образом, максимальность инъективной W^* -подалгебры связана с неприводимостью подалгебры, а через неё с бикоммутантом подалгебры.

Третья глава диссертации состоит из трех параграфов. В параграфе 3.1 показывается, что если обёртывающая W^* -подалгебра является максимальной инъективной, то и сама вещественная W^* -подалгебра также является максимальной инъективной.

Теорема 15. Пусть Q – вещественная W^* -подалгебра вещественной W^* -алгебры R . Если $Q + iQ$ является максимальной инъективной W^* -подалгеброй в $R + iR$, то Q также является максимальной инъективной подалгеброй в R .

Следующая теорема есть вещественный аналог теоремы Ж.Фанга, который является решением проблемы Мюррея и фон Неймана для вещественных факторов.

Теорема 16. Пусть R – вещественный фактор и пусть Q – максимальный инъективный вещественный подфактор R . Алгебра Q является максимальной инъективной вещественной W^* -подалгеброй в R тогда и только тогда, когда алгебра Q – неприводима в R , т.е. $Q' \cap R = \mathbb{R}\mathbf{1}$.

А следующая теорема есть вещественный аналог теоремы Ге-Кадисона, называемый «теоремой о расщеплении».

Теорема 17. Если R_1 – конечный вещественный фактор, R_2 – конечная вещественная W^* -алгебра и R – вещественная W^* -подалгебра $R_1 \bar{\otimes} R_2$, содержащая $R_1 \bar{\otimes} \mathbb{R}\mathbf{1}$, то существует некоторая вещественная W^* -подалгебра $Q_2 \subset R_2$ такая, что $R = R_1 \bar{\otimes} Q_2$.

В параграфе 3.2 исследуются свойства максимальных инъективных вещественных W^* -подалгебр в тензорных произведениях вещественных W^* -алгебр.

Следующая техническая лемма сама по себе представляет особый интерес.

Лемма 3. Пусть R – абелева вещественная W^* -алгебра, Q – вещественная W^* -алгебра и пусть F_2 – минимальная инъективная сепарабельная вещественная W^* -алгебра, содержащая Q . Если F – инъективная вещественная W^* -алгебра F , такая, что $R \bar{\otimes} Q \subset F \subset R \bar{\otimes} F_2$, то $F = R \bar{\otimes} F_2$.

Основным результатом параграфа является следующая теорема.

Теорема 18. Пусть R_1 – инъективная вещественная W^* -алгебра и R_2 – сепарабельная вещественная W^* -алгебра. Если Q_2 – максимальная инъективная вещественная W^* -подалгебра R_2 , то $R_1 \overline{\otimes} Q_2$ – максимальная инъективная вещественная W^* -подалгебра $R_1 \overline{\otimes} R_2$.

В параграфе 3.3 рассмотрена следующая задача: *если R_1, R_2 – вещественные W^* -алгебры, Q_1, Q_2 – их максимальные инъективные W^* -подалгебры, то будет ли тензорное произведение $Q_1 \overline{\otimes} Q_2$ максимальной инъективной подалгеброй в тензорном произведении $R_1 \overline{\otimes} R_2$?*

В работе получены положительные решения задачи для следующих частных случаев.

Случай 1, R_1 – сепарабельна и Q_1 – фактор.

Теорема 19. Пусть $R_i (\subset B(H_i))$ – вещественная W^* -алгебра, Q_i – максимальная инъективная вещественная W^* -подалгебра R_i ($i=1,2$). Если R_1 – сепарабельна и Q_1 – вещественный фактор, то $Q_1 \overline{\otimes} Q_2$ является максимальной инъективной вещественной W^* -подалгеброй $R_1 \overline{\otimes} R_2$.

Случай 2. R_1 – сепарабельна и центр алгебры Q_1 – атомический. Напомним, что алгебра фон Неймана называется *атомической*, если каждый ненулевой проектор алгебры мажорирует ненулевой минимальный проектор (атом), т.е. под каждым ненулевым проектором имеется атом.

Теорема 20. Пусть $R_i (\subset B(H_i))$ – вещественная W^* -алгебра и Q_i – максимальная инъективная вещественная W^* -подалгебра R_i ($i=1,2$). Если R_1 сепарабельна и центр Q_1 – атомический, то $Q_1 \overline{\otimes} Q_2$ является максимальным инъективным в $R_1 \overline{\otimes} R_2$.

Случай 3, Q_i, R_i ($i=1,2$) – вещественные факторы.

Теорема 21. Пусть $R_i (\subset B(H_i))$ – вещественный фактор, и Q_i – максимальный инъективный вещественный подфактор R_i ($i=1,2$). Если $Q_1 \cap R_1 \cong \mathbb{R}^N$ ($1 \leq N \leq \infty$) и $Q_2 \cap R_2 = \mathbb{R} \mathbf{1}$, то $Q_1 \overline{\otimes} Q_2$ – максимальный инъективный вещественный подфактор $R_1 \overline{\otimes} R_2$.

Следствие 5. Пусть R_i – вещественный фактор, Q_i – неприводимый максимальный инъективный вещественный подфактор R_i ($i=1,2$). Тогда $Q_1 \overline{\otimes} Q_2$ – неприводимый максимальный инъективный вещественный подфактор $R_1 \overline{\otimes} R_2$. Причем, по теореме 16 вещественный подфактор $Q_1 \overline{\otimes} Q_2$ одновременно является максимальной инъективной вещественной W^* -подалгеброй фактора $R_1 \overline{\otimes} R_2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию ядерных и инъективных вещественных C^* -алгебр.

Основными результатами исследования являются следующие:

1. Доказана ядерность конечномерных и абелевых вещественных C^* -алгебр.

2. Доказано, что вещественная C^* -алгебра является ядерной тогда и только тогда, когда ее обертывающая C^* -алгебра ядерна.

3. Показана эквивалентность определения инъективности в смысле Хакеда-Томияма и в смысле «продолжение морфизмов».

4. Изучены максимальные инъективные W^* -подалгебры и подфакторы вещественной W^* -алгебры. Также доказано, что если обертывающая W^* -алгебра вещественной W^* -алгебры максимально инъективна, то сама алгебра является максимальной инъективной подалгеброй.

5. Получен вещественный аналог теоремы Ге-Кадисона, так называемая «теорема о расщеплении».

6. Для инъективной вещественной W^* -алгебры R_1 , сепарабельной вещественной W^* -алгебры R_2 и максимальной инъективной вещественной W^* -подалгебры Q_2 алгебры R_2 показано, что $R_1 \overline{\otimes} Q_2$ является максимальной инъективной вещественной W^* -подалгеброй в $R_1 \overline{\otimes} R_2$.

7. Для случаев, когда R_1 – сепарабельна и Q_1 – вещественный фактор, R_1 – сепарабельна и центр алгебры Q_1 атомический, Q_i, R_i ($i=1,2$) – вещественные факторы, показано, что $Q_1 \overline{\otimes} Q_2$ является максимальной инъективной вещественной W^* -подалгеброй в $R_1 \overline{\otimes} R_2$, где R_1, R_2 – вещественные W^* -алгебры, Q_1, Q_2 – их максимальные инъективные W^* -подалгебры, соответственно.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.27.06.2017.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN,
INSTITUTE OF MATHEMATICS**

INSTITUTE OF MATHEMATICS

NURILLAEV MUZAFFAR ESHNAZAROVICH

CLASSIFICATION OF NUCLEAR REAL W^* -FACTORS

01.01.01-Mathematical analysis

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF
PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

TASHKENT-2019

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2017.1.PhD/FM6

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, Russian, English (resume)) on the website (<http://ik-fizmat@nuu.uz/>) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (www.ziynet.uz).

Scientific supervisor: **Rakhimov Abdugafur Abdumadjidovich**
Doctor of Physical and mathematical Sciences

Official opponents: **Ganikhudjaev Rasul Nabiyeovich**
Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor
Kudaybergenov Karimbergen Kadirbergenovich
Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor

Leading organization: **Tashkent institute of railway transport engineers**

Defense will take place « ____ » _____ 2019 at ____ at the meeting of Scientific Council number DSc.27.06.2017.FM.01.01 at National University of Uzbekistan, Institute of Mathematics. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)246-53-21, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered № ____). (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on « ____ » _____ 2019 year.
(Mailing report № _____ on « ____ » _____ 2019 year).

A.Sadullaev

Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
D.F-M.S., Academician

G.I.Botirov

Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees, C.F-M.S.

V.I.Chilin

Chairman of scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F-M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of research work is to study nuclear and injective real C^* -algebras.

The object of the research work is bounded linear operators on a Hilbert space; real and complex C^* and W^* -algebras.

Scientific novelty of the research work is as follows:

It is shown that the nuclearities of all the finite-dimensional and abelian real C^* -algebras and it is proved that a real C^* -algebra is nuclear if and only if its enveloping C^* -algebra is nuclear;

it is established that the notions of nuclearity and injectivity for real W^* -algebras are equivalent;

the equivalence of the two definitions of injectivity of algebras is proved, i.e. the definitions of injectivity in the sense of "extending morphisms" and in the sense of Hakeda-Tomiyama coincide;

it is shown that a real C^* -algebra is nuclear if and only if its second dual space is an injective W^* -algebra;

it is proved that, if the enveloping factor of a real injective subfactor is maximal injective, then the real subfactor is also maximal injective.

Implementation of the research results. The results on nuclear and injective real C^* -algebras, obtained during the dissertation research are practiced in the following areas:

The results on nuclearity for real W^* -factors were used within the research project PPP/USG-0216/FST/30/15316 "Newton-Kantorovich method for solving a glass of nonlinear integral equations" for solving a glass of nonlinear integral equations (Islamic Science University of Malaysia, Malaysia, Reference 27.11.2018). The application of this scientific results gives the opportunity of finding the view of the solutions for such kind of equations, when the solutions are nuclear operators.

The results on injective real W^* -algebras were used within the research project OT-4-27 "Description of pre-dual spaces of Jordan triples, capacity spaces and holomorphic extension of the functions" in order to show coinciding of 2-local differentiations and usual differentiations (Reference Ministry of the higher and secondary special education of the republic of Uzbekistan from 16.01.2019, № 89-03-231). The application of this scientific results gives the opportunity of setting the relation between local differentiations and automorphisms, for such kind of algebras;

The result about that the enveloping W^* -algebra of the tensor product of real W^* -algebras is equal to the tensor product of their envelopings, was used in research project F-4-09 "Structural theory of non-associative algebras, Banach modules and discrete dynamical systems" in order to describe banach modules, associative and non-associative Jordan algebras (Reference Ministry of the higher and secondary special education of the republic of Uzbekistan from 16.01.2019, № 89-03-231). The application of this scientific results gives the opportunity of classification of some associative and non-associative Jordan algebras, in particular JW-algebras in injective case;

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Рахимов А.А., Нуриллаев М.Э. Конечномерные ядерные вещественные C^* -алгебры // Узбекский математический Журнал. 2012, № 4, С. 75-77. (01.00.00. № 6)
2. Рахимов А.А., Нуриллаев М.Э. Ядерность абелевых вещественных W^* -алгебр // Доклады академии наук Республики Узбекистан. 2014, № 1, С.7-9. (01.00.00. № 7)
3. Нуриллаев М.Э. Тензорное произведение вещественных W^* -алгебр. // Доклады академии наук Республики Узбекистан. 2014, № 6, С. 6-8. (01.00.00. № 7)
4. Рахимов А.А., Нуриллаев М.Э. Инъективные вещественные W^* -алгебры // Узбекский математический Журнал. 2014, № 2, С. 121-124. (01.00.00. № 6)
5. Нуриллаев М.Э. Инъективные вещественные алгебры фон Неймана // Доклады академии наук Республики Узбекистан. 2016, № 2, С.3-5. (01.00.00. № 7)
6. Рахимов А.А., Нуриллаев М.Э. Инъективность вещественной W^* -алгебры $B(H)$ // Узбекский математический Журнал. 2016, № 4, С.101-105. (01.00.00. № 6)
7. Rakhimov A.A., Nurillaev M.E. On property of injectivity for real W^* -algebras and JW-algebras // Positivity. 2018, 22, pp. 1345-1354. (№ 11. Springer. IF=0.920)

II бўлим (2 часть; part 2)

8. Nurillaev M.E. On maximal Injective subalgebras of tensor products of real W^* -algebras // Journal of scientific and engineering research (international journal) ISSN:2394-2630, CODEN (USA), JSERBR 2018, 5(1), pp. 222-224.
9. Нуриллаев М.Э. Конечномерные ядерные вещественные C^* -алгебры // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Операторные алгебры и смежные проблемы», Ташкент, 12-14 сентября 2012 г., С.191.
10. Рахимов А.А., Нуриллаев М.Э. Вещественные абелевы и конечномерные ядерные C^* -алгебры // Тезисы докладов международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» Владикавказ, Россия, 14-20 июля 2013 г., С. 80-81.
11. Рахимов А.А., Нуриллаев М.Э. Ядерные C^* -алгебры // Материалы Республиканской научной конференции «Новые теоремы молодых математиков-2013» Том № 1, Наманган -2013, 15-16 апреля, С. 159.

12. Рахимов А.А., Нуриллаев М.Э. Вещественные ядерные абелевы C^* -алгебры // Тезисы докладов международной научной конференции «Проблемы современной топологии и её приложения», Ташкент, 20-24 мая 2013 г., С. 221-222.
13. Rakhimov A.A., Nurillaev M.E. Injective real W^* -algebras // The V Congress of Turkic World Mathematicians, Bulan-Sogottu, Kyrgyzstan, Bishkek - 2014, June 5-7, P. 215.
14. Нуриллаев М.Э., Сувонов Н.Р. Вещественный аналог теорема В.Ф.Стайнспринга // «Математик физика ва анализнинг турдош масалалари» Республика илмий-амалий анжумани материаллари, Бухоро - 2015, 26-27 ноябрь 2015, С. 117.
15. Nurillaev M.E. On maximal injective real subalgebra of real factors. // Тезисы докладов научной конференции с участием зарубежных ученых «Проблемы современной топологии и её приложения», Ташкент, 5-6 мая, 2016 г., С. 78.
16. Nurillaev M.E., Rakhimov A.A. Real analogue of Ge-Kadisons' splitting theorem. // Abstracts of the uzbek-israel international scientific conference, "Contemporary problems in mathematics and physics", Tashkent, October 6-10, 2017, pp. 86-87.
17. Rakhimov A.A., Nurillaev M.E. Maximal injective real von Neumann subalgebras // Abstracts of the republican scientific conference with participation of foreign scientists, "Modern problems of dynamical systems and their application", Tashkent, May 1-3, 2017, pp. 234-235.
18. Nurillaev M.E. On a maximal injective subfactor of tensor products of real von Neumann algebras // Тезисы докладов научной конференции с участием зарубежных ученых «Проблемы современной топологии и её приложения», Ташкент, 11-12 мая 2017 г., С. 81-82.
19. Nurillaev M.E. On maximal injective real subfactors. // Abstracts of the conference "problems of modern topology and its applications", Tashkent, September 11-12, 2018, P. 137.
20. Nurillaev M.E. Maximal injective real subalgebras of tensor products real group factors. // International conference "Mathematical analysis and its application to mathematical physics, Samarkand, Uzbekistan, September 11-12, 2018, Part I, P. 103.

Автореферат «Ўзбекистон математика журналы» тахририятида тахрирдан
ўтказилди. (28.02.2019 йил)

Босишга рухсат этилди: 28.02.2019 йил. Ҳажми 2,2 босма табоқ.
Бичими 60x45 1/16 «Times New Roman»
гарнитурда рақамли босма усулида босилди.
Адади: 100. Буюртма: №.32

Ўзбекистон Республикаси Фанлар академияси
«Фан» нашриёти давлат корхонаси босмахонасида чоп этилди.
100047, Тошкент ш., Яхё Ғуломов кўчаси, 70-уй

