ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.30.09.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

РАҲМАТУЛЛАЕВ АНАСБЕК МУХАММАДЖАНОВИЧ

ЧЕКЛИ РАДИУСЛИ ЎЗАРО ТАЪСИРЛАНУВЧИ ПОТЕНЦИАЛЛИ МОДЕЛЛАР УЧУН ГИББС ЎЛЧОВЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2019

УДК: 517.98

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.30.09.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

РАҲМАТУЛЛАЕВ АНАСБЕК МУХАММАДЖАНОВИЧ

ЧЕКЛИ РАДИУСЛИ ЎЗАРО ТАЪСИРЛАНУВЧИ ПОТЕНЦИАЛЛИ МОДЕЛЛАР УЧУН ГИББС ЎЛЧОВЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2019

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.2.PhD/FM53 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академияси В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз(резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «ZiyoNet» таълим ахборот тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар: **Ғанихужаев Носир Набиевич**
физика-математика фанлари доктори, профессор

Расмий оппонентлар: **Закиров Ботир Сабитович**
физика-математика фанлари доктори, профессор

Рахимов Абдуғофир Абдумажидович
физика-математика фанлари доктори, профессор

Етакчи ташкилот: **Наманган давлат университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.30.09.2019.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2019 йил «___»___________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2019 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2019 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А. Садуллаев
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор,
академик

Н.К.Мамадалиев
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.ф.д.

В.И. Чилин
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда Гиббс ўлчовлари назариясига боғлиқ масалаларни тадқиқ қилишга келтирилади. Химия, физика, биоинформатика, медицина ва бошқа кўплаб йўналишларда, хусусан статистик механика моделларининг фаза алмашишларини таснифлашда Гиббс ўлчовлари назарияси самарали ҳисобланади. Панжарали классик системаларда Гиббс ўлчовларини тадқиқ қилиш ва ўлчовларни давом эттириш ҳақидаги натижалар муҳим аҳамиятга эга. Шунинг учун панжарали системаларда аниқланган турли моделлардаги парамагнетик фазалар синфида лимит Гиббс ўлчовларини аниқлаш, уларни тўлиқ таснифлаш долзарб ва муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда панжарали системаларда маълум бир гамильтониан учун мос парамагнетик Гиббс тақсимоти мавжудлик шартларини топиш, барча ҳолларга мос парамагнетик Гиббс тақсимотлари тўпламини таснифлаш, қандай шартларда парамагнетик фаза ўтишлари борлигини аниқлаш асосий масалалардан биридир. Парамагнетик фаза ўтишлари бу қаралаётган моделнинг кўз билан сезиб, кўриб бўлмайдиган хосилавий хоссаларини ўзгаришлари бўлиб, моделнинг фазавий ўтишларни таснифлашда муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада, берилган гамильтониан учун мос лимит Гиббс ўлчовларини қуриш, уларни четки лимит Гиббс ўлчови бўлишлик шартларини аниқлаш, фаза диаграммасини тўла ажратиш, унда ҳосил бўлган фазалар синфини, хусусан, парамагнетик фазалар тўпламини тўла таснифлаш, статистик механикадаги турли моделлар учун барча трансляцион-инвариант, даврий ва кучсиз даврий асосий ҳолатлар, Гиббс тақсимотлари ва лимит Гибсс ўлчовларининг мавжудлик шартларини топиш ва мос аниқ критик температураларни аниқлаш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларниниг илмий ва амалий тадбиқига эга бўлган статистик физика ва квант механиканинг долзарб йўналишларидан бири бўлган парамагнетик жисмлар учун фаза ўтишлари мавжудлигини кўрсатиш ва уларни тўлиқ таснифлаш масалаларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, чекли ва чексиз тартибдаги Кэли дарахтларида спин қийматлари чекли ва чексиз бўлган моделлар учун Гиббс ўлчовларига доир салмоқли натижаларга эришилди. «Функционал анализ, математик физика ва статистик физика» фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда панжарали системаларда аниқланган моделлар учун Гиббс ўлчовлари назариясини ривожлантириш мухим аҳамиятга эга.

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «[1] Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947 «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789 «Фанлар академияси фаолияти, илмий тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора тадбирлари тўғрисида»ги ва 2018 йил 27 апрелдаги ПҚ-3682 «Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387 «Математика таълими ва фанларин янада ривожлантирини давлат томонидан қўллаб қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фааолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарорлари, ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Диссертация республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Z^{ν} панжаранинг чекли қисм тўпламлари учун аниқланган Гиббс ўлчови тушунчаси биринчи бўлиб Дж.У.Гиббснинг ишларида баён этилган. Z^{ν} да Марков тасодифий майдони таърифи биринчи бўлиб Добрушин томонидан киритилган. Кейинчалик Спитцер ва Аверинцевлар Z^{ν} нинг ҳар қандай чекли тўпламостиси учун Марков тасодифий майдони синфи яқин қўшнили Гиббс ҳолатлари билан мос тушишини кўрсатишган. Марков тасодифий майдонлари ва яқин қўшнили Гибсс ҳолатлари эквивалентлиги биринчи бўлиб Хаммерсли ва Клиффорд томонидан исботланган. Бунинг янада мукаммал ва қисқа исботлари Престон, Гриммет ва Шерманлар томонидан берилган.

Н.Н.Боголюбов, Б.И.Хацет, Д.Я.Петрин, Р.А.Минлос, Д.Рюэлларнинг мақолаларида Гиббс ўлчовлари аниқланган. Р.Л.Добрушин, О.Ленфорд ва Д.Рюэллар томонидан Гиббс ўлчовининг умумий таърифи берилган. Лимит Гиббс ўлчовлари эҳтимоллик нуқтаи назаридан К.Престон ишларида келтирилган. Лимит Гиббс ўлчовлари мажудлиги ҳақидаги теорема Р.Л.Добрушин томонидан исботланган. К.М.Ханин томонидан бу теоремани квант майдон назариясидаги панжарали моделлар учун фойдаланилиши кўрсатилган. Р.Л.Добрушин томонидан ҳар бир лимит Гиббс ўлчовига физик системанинг бир фазаси мос қўйилиши исботланган ва берилган модель учун биттадан ортиқ лимит Гиббс ўлчови мавжуд бўлса фаза ўтиши мавжудлиги кўрсатилган.

П.М.Блехер, Н.Н.Ганиходжаев, К.Престон, У.А.Розиков, Ф.М.Мухамедов, Ф.Спицер ва Ю.Суховлар томонидан Кэли дарахтидаги моделларни ўрганиш ҳақида трансляцион-инвариант ва даврий лимит Гиббс ўлчовлари (Изинг, Поттс, SOS, Hard-Core, $\lambda-$модель ва ҳ.к.) Марков тасодифий майдони назарияси ва унинг рекуррент тенгламаси ечимлари ўрганилган, нодаврий баъзи Гиббс ўлчовлари топилган. Кэли дарахтида аниқланган жуда кенг синфдаги гамильтонианлар учун мос моделларнинг асосий ҳолатлари Синай ва Пирогов ишларида контур усули орқали аниқланган. Н.Н.Ганиходжаев, У.А.Розиков, Ф.М.Мухамедов, О.Н.Хакимовлар томонидан Кэли дарахтида аниқланган $p-$адик Изинг, Поттс ва $\lambda-$моделлар ва бу моделларнинг баъзи умумлашмалари учун параметрнинг фаза ўтишлари мавжуд ва мавжуд бўлмайдиган қийматлари келтирилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Математика институтининг Ф4-ФА-Ф013 «Ноассоциатив ва операторлар алгебралари, динамик системалар, ҳамда уларнинг статистик физика ва популяцион биологияга тадбиқлари» (Тошкент, 2012-2016 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади чекли панжарали системаларда чекли таъсирланувчи потенциалли модел учун Гиббс ўлчови ва мос таъсирли Марков занжири орасидаги боғланишни топиш; Кэли дарахтида Изинг ва Поттс моделлари учун парамагнетик фазалар синфида трансляцион-инфариант ва даврий лимит Гиббс ўлчовлари тўпламини таснифлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

I муносабатли потенциалли Гиббс ўлчовлари, I хотирали Марков тасодифий майдонлари ва I муносабатли ўлчов тушунчаларини киритиш (I тўплам $\{1,2,...,k\}$ нинг қисм тўплами). Бу тушуначалар орасидаги муносабатни тадқиқ этиш.

I муносабатли потенциал бўлишлилик критерийсини топиш.

Кели дарахтида аниқланган Изинг типидаги модел ва Поттс моделлари учун трансляцион-инвариант лимит Гиббс ўлчовларини таснифлаш.

Ўрганилаётган моделлар учун даврий (трансляцион-инвариант бўлмаган) лимит Гиббс ўлчовларини аниқлаш.

Тадқиқотнинг объекти чекли циклсиз панжара, ярим чексиз Кели дарахтида аниқланган Изинг, Поттс моделларидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети:

I муносабатли потенциалли Гиббс ўлчовлари, I хотирали Марков тасодифий майдонлари; Изинг ва Поттс моделлари учун парамагнетик фазалар синфида трансляцион-инвариант ва даврий лимит Гиббс ўлчовлари.

Тадқиқотнинг усуллари:

Тадқиқот ишида марков тасодифий микдорлар назариясига ҳамда шу назариянинг рекуррент тенгламаларига асосланган усуллардан фойдаланилган. Шунингдек, ўлчовлар назарияси, функционал ва математик анализ, чизиқли алгебра, қисқартириб акслантириш усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

Мос I муносабатли потенциалли гиббс ўлчови тушунчаси, I хотирали Марков тасодифий майдони тушунчаси ва I муносабатли ўлчов тушунчаси киритилган ва бу учта тушунчанинг ўзаро эквивалентлиги исботланган;

берилган потенциалнинг I муносабатли потенциал бўлишлилиги критериясини берувчи теорема исботланган;

Кэли дарахтида аниқланган Изинг ва Поттс типидаги моделлар учун F акслантиришнинг инвариант соҳаси ажратиб олинган ва мос трансляцион-инвариант ва даврий лимит Гиббс ўлчовлар топилган;

қачон ягона ва қачон аниқ учта парамагнетик фазалар мавжуд бўладиган соҳалар аниқланган ҳамда қаралаётган ҳар бир модель учун мос равишда 2-даврий лимит Гиббс ўлчовлари мавжуд бўлмайдиган ва аниқ иккита 2-даврий лимит Гиббс ўлчовлари мавжуд бўладиган соҳалар топилган;

саноқсиз сондаги даврий бўлмаган фазалар мавжудлиги ҳақидаги теорема исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари:

I муносабатли ўлчов киритиш усули ёрдамида I муносабатли потенциалли Гиббс ўлчови ва I хотирали Марков тасодифий майдони эквивалентлиги исботланган;

Кўп ўзгарувчили параметрик функционал тенгламалар системасини таҳлил қилиш ёрдамида парамагнетик ва модулланган фазалар синфида фазавий ўтиш мавжуд бўлишигини таъминлайдиган параметрнинг аниқ қиймати топилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Функционал анализ ва ўлчовлар назарияси, марков тасодифий майдонлар назарияси ва эҳтимоллар назарияси усулларидан ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти.

Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти фазафий ўтишларнинг мавжудлигини ўрганиш динамик системалар назариясини ривожлантиришда қўлланилиши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти физик системаларда кўз билан кўриб бўлмайдиган ҳолатлар ўзгаришини аниқлаш имкониятини берганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши.

Чекли радиусли ўзаро таъсирланувчи потенциалли моделлар учун Гиббс ўлчовларини тадқиқ этиш асосида олинган натижалар асосида:

«парамагнетик» фазалар бўйича олинган натижалар FRGS/1/2017/STG06/UIAM/02/1 рақамли «The chaos implies the phase transition: p-adic dynamical system approaches to the quest for a new class of p-adic Gibbs measure» хорижий лойиҳасида янги типдаги Гиббс ўлчовларини аниқлашда фойдаланилган (Малайзия Халқаро ислом университетининг 2019 йил 27 майдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши чекли радиусли потенциалли Гиббс ўлчовларини таснифлаш имконини берган;

парамагнетик ва модулланган фазалар синфида фазавий ўтиш мавжуд бўлишлигини таъминлайдиган параметрнинг аниқ қийматларидан UAEU, Grant, 31S259 рақамли «Infinite dimensional orthogonal preserving quadratic stochastic operators» хорижий лойиҳасида соф фазалар топишда фойдаланилган (Бирлашган Араб Амирликлари университетининг 2019 йил 17 июндаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши чексиз моделларда фазавий ўтишларни аниқлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари, жумладан 1 та халқаро ва 4 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги.

Тадқиқот мавзуси бўйича жами 11 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Респуб-ликаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 5 та мақола, жумладан, 3 таси хорижий ва 2 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссетациянинг ҳажми 83 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг “Бошланғич маълумотлар ва натижалар” деб номланувчи биринчи бобида чекли тўпламда аниқланган Гиббс тақсимотлари ва Марков тасодифий майдонлари, шунингдек диссертацияда олинган натижаларни ёритишда фойдаланиладиган Гиббс ўлчови таърифи келтирилган.

1.1.параграфда Престон монографиясига асосланган ҳолда чекли тўплам учун Гиббс ҳолатлари ва Марков тасодифий майдонлари тушунчасини келтирилган.

$\Lambda -$ чекли тўплам, $P(\Lambda) -$бу тўпламнинг тўплам остилари тўплами бўлсин. Λ тўплам нуқталари баъзилари заррача билан банд, баъзи бирлари бўш бўлган тугунлар сифатида қараш мумкин. $A \in P(\Lambda)$ тўплам модел ҳолатини аниқлайди деймиз, агар A тўплам нуқталари банд, $\Lambda \backslash A$ тўплам нуқталари эса бўш бўлса. $P(\Lambda)$ тўплам элементлари баъзан *конфигурация* деб аталади. Биз ўрганадиган эҳтимоллик ўлчовлари модел қандайдир диманик мувозанатдаги конфигурация тақсимотига мос келади.

“Лимит Гиббс ўлчовлари” деб аталувчи 1.2. параграфда биз 1.1 параграфдаги ҳолатларни граф саноқли учлари бўлган ҳолда зарур маълум фактлар келтирилган. Синай монографиясига асосланган ҳолда чексиз (саноқли) тўпламларда лимит Гиббс ўлчовлари ҳақида асосий маҳлумотлар келтирилган:

Қуйидаги

$$H(\varphi) = \sum_{V \subset Z^d} \tau(\varphi(V)) = \sum_{x \in Z^d} U(\varphi(x) : \varphi(y), x \neq y),$$

формал қатор гамильтониан деб аталади. Бу ерда йиғинди барча бўш бўлмаган чекли V қисм тўпламлар бўйича.

H гамильтониан берилган ва ҳар бир A учун $\Omega(A)$ конфигурациялар фазосида Φ тўпламдаги χ ўлчовларнинг тўғри кўпайтмаси бўлган ўлчов аниқланган бўлсин. Ҳар бир чекли A тўплам учун қуйидагича $\sigma(V-A)$ конфигурацияни қараймиз: $H(\sigma(A)|\sigma(V-A))$ ихтиёрий $\sigma(A)$ учун чекли, ҳамда қуйидаги интеграл

$$\Xi=\int \exp\{-H(\sigma(A))-H(\sigma(A)|\sigma(V-A))\}\prod_{s\in A} d\chi(\sigma(s)). \qquad (1)$$

ҳам чекли бўлсин. Бу интеграл статистик сумма дейилади.

Таъриф 1. $\sigma(A)$ конфигурациялар $\Omega(A)$ фазосида аниқланган, $\prod_{s\in A} d\chi(\sigma(s))$ ўлчов бўйича зичлик функцияси

$$\begin{aligned} p(\sigma(A)|\sigma(V\setminus A)) &= \Xi^{-1}\exp\{-H_A(\sigma)\}, \\ H_A(\sigma) &= H(\sigma(A))+H(\sigma(A)|\sigma(V\setminus A)). \end{aligned} \qquad (2)$$

бўлган эҳтимолликлар тақсимотига A хажмдаги шартли Гиббс ўлчови дейилади.

Қуйидаги таъриф барча Гиббс ўлчовлари назариясининг марказий таърифи ҳисобланади.

Таъриф 2. Ω фазодаги P эҳтимолликлар тақсимоти H гамильтонианга мос лимит Гиббс ўлчови дейилади, агар ихтиёрий чекли $A\subset V$ учун

1) $H(\sigma(A)|\sigma(V\setminus A))$ ва Ξ лари чекли бўлган барча $\sigma\in\Omega$ конфигурацияларнинг $P-$эҳтимоллиги 1 бўлса;

2) Фиксирланган $\sigma(V-A)$ чегаравий шарти бўлган $\Omega(A)$ даги P тақсимот билан индуцирланган шартли тақсимот $P-$эҳтимоллиги 1 билан абсолют узлуксиз, ҳамда унинг бу ўлчовга нисбатан зичлиги қуйидагича:

$$p(\sigma(A)|\sigma(V\setminus A))=\frac{\exp\{H_A(\sigma)\}}{\Xi}=\frac{\exp\{-H(\sigma(A))-H(\sigma(A)|\sigma(V\setminus A))\}}{\Xi}. \qquad (3)$$

$\Phi-$метрик компакт бўлсин. У ҳолда Тихонов теоремасига кўра $\Omega-$ҳам тўғри кўпайтмалар топологиясида метрик компакт бўлади. Ҳар қандай чекли $A\subset V$ тўплам учун $H_A(\sigma)=H(\sigma(A))+H(\sigma(A)|\sigma(V\setminus A))$ функция Ω да аниқланган, узлуксиз ва χ чекли ўлчов бўлсин.

Теорема 1. Юқорида келтирилган шартларда H учун камида битта лимит Гиббс ўлчови мавжуд.

Энди Кэли дарахти таърифини келтирамиз. $k\geq 1$ тартибли T^k Кэли дарахти (Бете панжараси) бу чексиз дарахт, яъни ҳар бир учидан $k+1$ дона қирра чиқувчи циклсиз графдир. $T^k=(V,L)$, бу ерда V граф T^k нинг учлари тўплами, L - қирралар тўплами. Иккита x,y учлар яқин қўшнилар (NN) дейилади, агар уларни туташтирувчи $l\in L$ қирра мавжуд бўлса, ҳамда

$l=\langle x,y\rangle$ белгиланади. $\langle x,x_1\rangle,...,\langle x_{d-1},y\rangle$ жуфтликлар коллекцияси x дан y гача бўлган йўл дейилади. У ҳолда x дан y гача бўлган йўлларнинг энг қисқаси $d(x,y), x,y\in V$ ни x дан y гача бўлган масофа дейилади.

Ихтиёрий $x^0\in V$ учун

$$W_n=\left\{x\in V \mid d\left(x,x^0\right)=n\right\},\quad V_n=\bigcup_{k=0}^{n}W_k$$

бўлсин.

$$S(x)=\{y\in W_{n+1}:d(x,y)=1\},\ x\in W_n,$$

тўплам x нинг тўғри авлодлари тўплами дейилади.

Берилган гамильтониан учун барча Гиббс ҳолатлари тўплами барча тақсимотларнинг бўш бўлмаган қавариқ компакт қисм тўплами бўлади. Демак, четки Гиббс ўлчовларини ўрганиш табиий масаладир. Бу масала жуда қийин бўлиб, фақатгина баъзи ҳоллардагина жуда кичик β лар учунгина охиригача ечилган.

Шунинг учун аввалига, ҳеч бўлмаганда βH гамильтонинан учун даврий ёки трансляцион-инвариант лимит Гиббс ўлчовларини топиш масаласи туради.

Иккинчи бобда $|A|$ қуввати k дан ошмаган A чекли тўпламостиларида ўзаро таъсир потенциали J_V нолдан фарқли бўлган V потенциаллар ўрганилган ва улар орасидан I муносбатли потенциаллар ажратиб олинган. Бу ерда I тўплам $\{1,2,...,k\}$ нинг қисм тўплами. Сўнгра I хотирали Марков тасодифий майдони ва I муносабатли ўлчов тушунчалари киритилган. Бу тушунчалар орасида баъзи муносабатлар топилган.

$\Lambda-$чекли тўплам ва $P(\Lambda)-$унинг барча қисм тўпламлари тўплами бўлсин.

Қуйидаги хоссаларга эга бўлган $f_i:\underbrace{\Lambda\times\Lambda\times...\times\Lambda}_{i\ раз}\to\{0,1\},\ i=1,...,|\Lambda|$ функциялар оиласини кўрамиз. (бу ерда $|\cdot|-$тўплам элементлари сони):

1. $f_i(x_1,...,x_j,...,x_k,...,x_i)=f_i(x_1,...,x_k,...,x_j,...,x_i)$ ихтиёрий $j,k=1,...,i;$
2. $f_i(x_1,x_2,...,x_i)=0,$ агар $\exists j,k=1,...,i\ :\ x_j=x_k$.

$x\in\Lambda$ учун

$$\partial_i x=\bigcup_{\{y_1,y_2,...,y_{i-1}\}\subset\Lambda\setminus\{x\}:\,f_i(y_1,y_2,...,y_{i-1},x)=1}\{y_1,y_2,...,y_{i-1}\}$$

ва $A\in P(\Lambda)$ учун

$$\partial_i A = \left(\bigcup_{x \in A} \partial_i x \right) \setminus A$$

деб аниқлаймиз.

$I \subset \{1,2,...,|\Lambda|\}$ бўлсин. Қуйидагича белгилаш киритамиз

$$\partial_I A = \bigcup_{i \in I} \partial_i A, \ \ \partial_I x = \bigcup_{i \in I} \partial_i x.$$

$B \in P(\Lambda)$ бўш бўлмаган тўплам $i-$*симплекс* дейилади, агар ихтиёрий $y_1, y_2, ..., y_i \in B$ ($y_j \neq y_k$, агар $j \neq k$) учун $f_i(y_1, y_2, ..., y_i) = 1$ бўлса.

Функция $V: P(\Lambda) \to R$ Λ да аниқланган потенциал дейилади, агар $V(\varnothing) = 0$. $V: P(\Lambda) \to R$ потенциал ва $J_V: P(\Lambda) \to R$ мос ўзаро таъсир потенциали бўлсин.

Ихтиёрий $A \in P(\Lambda)$ учун

$$V(A) = \sum_{B \subset A} J_V(B). \tag{4}$$

Потенциал V i *муносабатли потенциал* деймиз, агар $J_V(A) \neq 0$, фақатгина A тўплам i-симплекс бўлгандагина бажарилса. V_i Λ даги i муносабатли потенциал бўлсин. Агар потенциал V ҳар бир $i \in I \subset \{1, 2, ..., |\Lambda|\}$ учун i муносабатли потенциал бўлса уни I *муносабатли потенциал* деб атаймиз ва V_I каби белгилаймиз.

$P(\Lambda)$ тўплам элементларини *конфигурация* дейилади. $P(\Lambda)-$чекли тўплам бўлганлиги учун Λ да аниқланган эҳтимоллик ўлчовларни қуйидаги шартларни бажарувчи $\mu: P(\Lambda) \to R$ функция сифатида қараса бўлади:

1) $\mu(A) > 0$ барча $A \in P(\Lambda)$ учун;

2) $\sum_{A \subset \Lambda} \mu(A) = 1$.

$M(\Lambda)$ барча $P(\Lambda)$ даги эҳтимоллик ўлчовлари тўплами бўлсин. Қуйидаги эҳтимоллик ўлчовларини кўрамиз:

1) *Гиббс ўлчови.* $P(\Lambda)$ да аниқланган V потенциалли *Гиббс ўлчови* қуйидагича аниқланади:

$$\mu(A) = Z^{-1} \exp V(A) \text{ барча } A \in P(\Lambda) \text{ учун,}$$

$Z-$нормаллаштирувчи константа.

2) I *хотирали Марков тасодифий майдони.* μ ўлчовни I хотирали Макров тасодифий майдони деймиз, агар

а) $\mu(A) > 0$ ихтиёрий $A \in P(\Lambda)$ учун;

б) $x \notin A \subset \Lambda$ бўлсин; у ҳолда $\Lambda \setminus x$ даги конфигурация A тенглиги шартида конфигурация x ни ўз ичига олиш шартли эҳтимоллиги (μ га нисбатан) $A \cap \partial_I x$ даги конфигурация $\partial_I x$ эканлиги шартида конфигурация x ни ўз ичига олиш шартли эҳтимоллиги билан тенг бўлади, яъни

$$\frac{\mu(A\cup x)}{\mu(A\cup x)+\mu(A)}=\frac{\sum\limits_{B\subset\Lambda\setminus(\partial_I x\cup x)}\mu((A\cap\partial_I x)\cup x\cup B)}{\sum\limits_{B\subset\Lambda\setminus(\partial_I x\cup x)}\mu((A\cap\partial_I x)\cup x\cup B)+\mu((A\cap\partial_I x)\cup B)}. \quad (5)$$

3) *I муносабатли ўлчов.* μ I муносабатли ўлчов дейилади, агар

а) $\mu(A)>0$ ихтиёрий $A\in P(\Lambda)$ учун;

б) агар $x\notin A\subset\Lambda$, у ҳолда

$$\frac{\mu(A\cup x)}{\mu(A)}=\frac{\mu((A\cap\partial_I x)\cup x)}{\mu(A\cap\partial_I x)}.$$

2.2 параграфнинг асосий натижаси қуйидаги

Теорема 2. $\mu\in M(\Lambda)$ ўлчов учун қуйидаги ўлчовлар эквивалент:

i) $\mu-$ V_I потенциалли Гиббс ўлчови;

ii) $\mu-$ I хотирали Марков тасодифий майдони;

iii) $\mu-$ I муносабатли ўлчов.

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида потенциал учун критерий исботланган.

2.3 параграфнинг асосий натижаси қуйидаги теоремадир.

Теорема 3. Λ даги V потенциал I муносабатли потенциал бўлади фақат ва фақат, қачонки ихтиёрий $x_2,...,x_{i-1}\in\Lambda, x_j\neq x_k, j\neq k, i\in I$ ларда $f_i(x,x_2,...,x_{i-1},y)=0$ қилувчи ҳар қандай $x,y\in\Lambda$ жуфтлик учун ва ихтиёрий $X\subset\Lambda\setminus(x\cup y)$ тўплам учун қуйидаги тенглик ўринли бўлса

$$V_I(X\cup x\cup y)-V_I(X\cup x)-V_I(X\cup y)+V_I(X)=0.$$

Бундан ташқари теорема 3 ни демонстрация қилувчи мисоллар келтирилган.

“Рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Изинг ва Гиббс моделлари учун парамагнетик Гиббс ўлчовлари” деб аталувчи учинчи бобда лимит Гиббс ҳолатларини ўрганиш зарурияти пайдо қилувчи саноқли граф қаралган. Бу масала Изинга ва Поттс моделлари учун ўрганилган.

3.1 параграфда модел ва статистик йиғинди таърифи келтирилган.

Кели дарахтида J_1 – яқин қўшнилар, J_2 – бўйлама иккинчи қўшнилар ва J_3 – бир этаждаги иккинчи қўшнилар рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Изинг типидаги модел қараймиз. Бу ерда спин қийматлари $\Phi=\{-1,+1\}$ тўпламдан иборат. V даги σ конфигурация $x\in V\to\sigma(x)\in\Phi$ функция сифатида аниқланади. Барча конфигурациялар тўпламини Φ^V билан белгилаймиз. Моделнинг формал гамильтониани қуйидагиформула билан аниқланади:

$$H(\sigma)=-J_1\sum_{\langle x,y\rangle\in L}\sigma(x)\sigma(y)-J_2\sum_{>\tilde{x},y<\in L}\sigma(x)\sigma(y)-J_3\sum_{>\overline{x,y}<\in L}\sigma(x)\sigma(y), \quad (6)$$

бу ерда $J_1, J_2, J_3 \in R$ лар мос равишда яқин ва иккинчи қўшнилар ўзаро таъсирлари. $< x, y >, > \tilde{x}, y <$ ва $> \overline{x, y} <$ эса мос равишда яқин, бўйлама иккинчи ва бир этаждаги иккинчи қўшниларнинг белгиланишидир.

Қуйида (6) моделни 2-тартибли ярим чексиз Кели дарахтида, битта x_0 учидан иккита, қолган учларидан учтадан қирра чиқувчи, циклсиз чексиз графда қараймиз.

Янги белгилашлар киритамиз: $a = \exp(2J_1\beta)$, $b = \exp 2(J_2\beta)$, $c = \exp(-2J_3\beta)$. Қуйидаги лемма исботланган

Лемма 1.

$$ax = \frac{b^2x^2 + 2bcx + 1}{b^2 + 2bcx + x^2}$$

тенглама ($x \geq 0, a > 0, b > 0, c > 0$) ягона илдизга эга, агар ёки $b \leq \sqrt{1+\sqrt{3}}$, ёки $b > \sqrt{1+\sqrt{3}}$ ва $c \geq \frac{\sqrt{4b^6 - 6b^4 + 4b^2 - 4} - 4b}{4b^2 + 2}$. Агар $b > \sqrt{1+\sqrt{3}}$ в $c < \frac{\sqrt{4b^6 - 6b^4 + 4b^2 - 4} - 4b}{4b^2 + 2}$ бўлса, у ҳолда $0 < \eta_1(b,c) < \eta_2(b,c)$ шартни бажарувчи шундай $\eta_1(b,c), \eta_2(b,c)$ лар топиладики, агар $\eta_1(b,c) < a < \eta_2(b,c)$ бўлса тенглама учта илдизга эга; агар ёки $a = \eta_1(b,c)$ ёки $a = \eta_2(b,c)$ бўлса иккита илдизга эга. Бу ерда

$$\eta_i(b,c) = \frac{1}{x_i}\frac{b^2x_i^2 + 2bcx_i + 1}{b^2 + 2bcx_i + x_i^2},$$

x_1, x_2 лар бўлса қуйидаги тенглама илдизлари:

$$b^2x^4 + 4bcx^3 + \left(4b^2c^2 - b^4 + 2\right)x^2 + 4bcx + b^2 = 0.$$

$$T_c = \frac{2J_2}{\ln\sqrt{1+\sqrt{3}}}, \quad J_2 > 0 \text{ бўлсин.}$$

Бу параграфнинг асосий натижаси қуйидаги

Теорема 4. Агар $b \geq 1$ бўлса модель (6) да ягона трансляцион-инваривант лимит Гиббс ўлчови мавжуд. Агар $b < 1$ бўлса ва (J_1, J_2, J_3) лар лемма 1 шартларини қаноатлантирса, у ҳолда аниқ учта трансляцион-инваривант лимит Гиббс ўлчови мавжуд, яъни фаза ўтишлари содир бўлади.

3.3 параграфда қаралаётган модел учун даврий Гиббс ўлчовлари ўрганилан.

$$B = 2a^2b^3c + 4b^2c^2a + b^4a - a + 2b^3c,$$

$$D = B^2 - 4b^2\left(a^2 + 2abc + b^2\right)\left(a^2b^4 + 2ab^3c + b^2\right)$$

$$C = \frac{-b^3\left(a^2+1\right) + \sqrt{b^6\left(a^2+1\right) + 4a^2b^2c^2\left(1-b^4\right)}}{8b^2c^2a}.$$

бўлсин.

Параграфнинг асосий натижаси қуйидагилар:

Теорема 5. 1) Агар $b \geq 1$ бўлса, у ҳолда модель (6) учун даври 2 га тенг даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд эмас;

2) агар $b<1,\ c \in (0,C)$ ва $D>0$ (мос равишда $D=0$) бўлса, у ҳолда аниқ иккита (мос равишда ягона) даври 2 га тенг даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд.

Теорема 6. Модель (6) (M_1 инвариант тўпламда) S континуум тўпламли μ_u даврий бўлмаган лимит Гиббс ўлчовларига эга, бу ерда $u \in M_1 \setminus (Fix(F) \cup Per_2(F))$. Бундан ташқари бу даврий бўлмаган лимит Гиббс ўлчовлар қисм тўпламларга қуйидагича классификацияланади:

$$S_x = \left\{ \mu_u : u \in M_1 \setminus \left(Fix(F) \cup Per_2(F) \right), бу\ \ ерда\ \lim_{n\to\infty} F^n(u) = u^*(x) \right\},$$

x нуқта $f(x)$ нинг тортувчи қўзғалмас нуқтаси,

$$S_y^{per} = \left\{ \mu_u : u \in M_1 \setminus \left(Fix(F) \cup Per_2(F) \right)\ бу\ ерда\ \lim_{n\to\infty} F^{2n}(u) = u^{per}(y) \right\},$$

y нуқта $g(x)=f(f(x))$ нинг тортувчи қўзғалмас нуқтаси.

3.4 параграфда Поттс модели ва статистик йиғинди аниқланган.

Иккинчи тартибли ярим чексиз T^2 Кели дарахти берилган. Спин қийматлари $\Phi = 1,2,3$қабул қилувчи, ҳамда J_1 – яқин қўшни ва J_p – бўйлама иккинчи қўшнилари ўзаро таъсирли Гамильтонианли

Бу ерда формал гамильтониан қуйидаги кўринишда:

$$H(\sigma) = -J_1 \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - J_p \sum_{>\tilde{x},y<} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \qquad (7)$$

$J_1, J_p \in R$ лар мос $\langle x,y\rangle$ яқин қўшнилар ва $>\tilde{x},y<$ бўйлама иккинчи қўшнилар ўзаро таъсирлари.

$a=\exp(J_1\beta)$, $b=\exp(J_p\beta)$ бўлсин.

Қуйидаги $F: u=(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) \in R_+^5 \to F(u)=(u_1',u_2',u_3',u_4',u_5') \in R_+^5$ акслантиришни қараймиз:

$$\begin{aligned} u_1' &= a(bu_1+2u_2)^2 \\ u_2' &= (bu_3+u_4+u_5)^2 \\ u_3' &= (u_1+(b+1)u_2)^2 \\ u_4' &= a(u_3+bu_4+u_5)^2 \\ u_5' &= (u_3+u_4+bu_5)^2, \end{aligned} \qquad (8)$$

3.5 параграфда Поттс модели учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларини, яъни акслантиришнинг қўзғалмас нуқталарини топамиз F.

Парамагнетик фазаларда, $u_1 = u_4$ ва $u_2 = u_3 = u_5$ бўлади.

$$M = \{u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \in R^5_+ : u_1 = u_4, u_2 = u_3 = u_5\}$$

тўплам F акслантиришга нисбатан инвариант бўлади.

Биз F акслантиришнинг M даги қўзғалмас нуқталарини топамиз. . Бу тўпламда $F(u) = u$ тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$x = f(x) = \frac{1}{2a}\left(\frac{(b+1)x+2}{b+x}\right)^2. \qquad (9)$$

Янги белгилашлар киритамиз $\tilde{a} = \frac{2a^2}{b+1}$, $\tilde{b} = \frac{b(b+1)}{2}$, $y = \frac{(b+1)x}{2}$.

$T_c = \frac{1}{\ln 2\sqrt{73}-1}$, $J_2 > 0$ бўлсин.

Параграфнинг асосий натижаси қуйидаги

Теорема 7. Агар $T \geq T_c$ бўлса модель (7) учун ягона парамагнетик трансляцион-инвариант лимит Гиббс ўлчови; агар $T < T_c$ ва $\nu_1(\tilde{b}) < \tilde{a} < \nu_2(\tilde{b})$ (мос равишда агар $\tilde{a} = \nu_1(\tilde{b})$ ёки $\tilde{a} = \nu_2(\tilde{b})$) бўлса аниқ учта (мос равишда иккита) парамагнетик трансляцион-инвариант лимит Гиббс ўлчовлари мавжуд, яъни фаза ўтиши содир бўлади.

3.6 параграфда Поттс модели учун даврий Гиббс ўлчовлари ўрганилган.

$T_c = \frac{J_p}{\ln\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{8\sqrt{5}-15}\right)}$ бўлсин.

Параграфнинг асосий натижаси қуйидаги

Теорема 8. Агар $T \geq T_c$ ёки $T \leq T_c$ ва $a \in (b^+, +\infty)$ бўлса, у ҳолда модель (7) (M тўпламда) даври 2 га тенг лимит Гиббс ўлчовлари мавжуд эмас. Агар $T < T_c$ ва $a \in (0, b^+)$ (мос равишда $a = b^+$) бўлса, у ҳолда аниқ иккита (мос равишда битта) даври 2 га тенг лимит Гиббс ўлчовлари мавжуд, яъни фаза ўтишлари содир бўлади.

3.7 параграфда спин қийматлари $\Phi = \{1,2,3,4\}$ лар бўлган Поттс момдели ўрганилган. Унга мос гамильтониан J_1 – яқин қўшнилар ва J_p – бўйлама иккинчи қўшнилар ўзаро таъсирли ва иккинчи тартибли ярим чексиз T^2 Кели дарахти қаралган. Унинг учун фаза ўтишлари масаласи ўрганилган.

Параграфнинг асосий натижаси қуйидаги

Теорема 9. $J_p > 0$ бўлсин. У ҳолда агар $T \geq T_c$ бўлса ягона парамагнетик трансляцион лимит Гиббс ўлчови мавжуд ва агар $T \leq T_c$ бўлса аниқ учта трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари мавжуд, яъни фазавий ўтиш содир бўлади.

Бу ерда $T_c = \frac{J_p}{\ln 4.3690}$ ва $J_p > 0$.

ХУЛОСА

Диссертация иши чекли радиусли потенциалли Гиббс ўлчови ва мос хотирали Марков тасодифий майдони орасида муносабатни аниқлаш, ҳамда Кэли дарахтида аниқланган Изинг ва Поттс типидаги моделлар учун парамагнетик фазалар синфидаги трансляцион-инвариант ва даврий лимит Гиббс ўлчовлари тўпламини тадқиқ этишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. I муносабатли потенциалли Гиббс ўлчови тушунчаси (бу ерда I тўплам $\{1,2,...,k\}$ нинг қисми), I ҳотирали Марков тасодифий майдони ва I муносабатли ўлчов тушунчалари киритилган. Бу учта тушунчалар эквивалент эканлиги исботланган.
2. Потенциал I муносабатли потенциал бўлишлилик критерийси топилган ва исботланган.
3. Бу критерийни эффектини кўрсатувчи мисоллар келтирилган.
4. Кэли дарахтида мос Гамильтониани J_1 яқин қўшнилар, J_2 – бўйлама иккинчи қўшнилар ва J_3 – бир этажли иккинчи қўшнилар ўзаро таъсирли Изинг типидаги модель ва мос Гамильтониани J_1 –яқин қўшнилар ва J_p.– бўйлама иккинчи қўшнилар ўзаро таъсирли учта ва тўртта спин қийматли Поттс модели ўрганилган.
5. Инвариант соҳа аниқланган ва шу соҳада трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари таснифланган.
6. Қаралаётган моделлар учун даврий лимит Гиббс ўлчовлари таснифланган.
7. Битта ва аниқ учта парамагнетик лимит Гиббс ўлчовлари мавжуд бўладиган соҳалар аниқланган.
8. Аниқ иккита 2-даврий лимит Гиббс ўлчовлари мавжуд бўладиган ва умуман мавжуд бўлмайдиган соҳалар аниқланган.
9. Изинг модели учун даврий бўлмаган континуум тўпламдаги Гиббс ўлчовлари мавжудлиги кўрсатилган, натижада номутаносиб фазалар тўплами саноқсиз эканлиги исботланган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.30.09.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

РАХМАТУЛЛАЕВ АНАСБЕК МУХАММАДЖАНОВИЧ

ГИББСОВСКИЕ МЕРЫ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ С ПОТЕНЦИАЛОМ КОНЕЧНОГО РАДИУСА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ-2019

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2017.2.PhD/FM53

Диссертация выполнена в Институте математики имени В.И.Романовского АН РУз.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http:ik-fizmat@nuu.uz/) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель: **Ганиходжаев Носир Набиевич**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Закиров Ботир Сабитович**
доктор физико-математических наук, профессор

Рахимов Абдугофир Абдумажидович
доктор физико-математических наук, профессор

Ведущая организация: **Наманганский государственный университет**

Защита диссертации состоится «___» _________2019 года в ___ часов на заседании Научного совета DSc.30.09.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2019 года.
(протокол рассылки №________ от «____» _______________2019 года).

А.Садуллаев
Председатель Научного совета по
присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор, академик

Н.К.Мамадалиев
Ученый секретарь Научного совета по
присуждению ученых степеней, д.ф.ф.-м.н.

В.И.Чилин
Председатель научного семинара при Научном
совете по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Решение проблем, возникающих в результате научно-прикладных исследований на мировом уровне, очень часто сводится к задачам теории гиббсовских мер. Теория гиббсовских мер является эффективым объектом исследования в таких сферах, как химия, физика, биоинформатика, медицина, и в других направлениях науки, в частности, в теории фазовых переходов для описания различных моделей равновесной статистической механики. Результаты исследований о продолжении мер служат основой для изучения теории гиббсовских мер. День за днем растет интерес к классическим решетчатым системам статистической механики. Поэтому и для решения наших задач определение существования и полное описание предельных гиббсовских мер в классе парамагнитных фаз для различных моделей остаются одной из актуальных и важных задач.

В настоящее время в мире актуальными проблемами для данного гамильтониана на решетчатых системах являются изучение существования «парамагнитного» гиббсовского распределения, описание множества парамагнитных гиббсовских распределений, определение условий существования парамагнитных фазовых переходов. Парамагнитные фазовые переходы - это изменения производных свойств вещества, которые невозможно увидеть невооруженным глазом, однако они играют важную роль в описании фазовых переходов в изучаемой модели. В связи с этим описание множества «парамагнитных» гиббсовских мер для данного гамильтониана, нахождение парамагнитных трансляционно-инвариантных и периодических гиббсовских распределений являются актуальным направлением научных исследований. Приведенные выше научные исследования являются целевыми.

В нашей стране уделяется особое внимание актуальным аспектам равновесной статистической физики и квантовой механики, которые имеют научное и практическое применение в фундаментальных науках. В том числе особое внимание уделяется развитию теории предельных гиббсовских мер, являющейся основным объектом изучения задач статистической физики. Значительные результаты были достигнуты по построению «парамагнитных» гиббсовских мер для решетчатых систем. Проведение научных исследований на международном уровне по таким важным направлениям, как функциональный анализ, математическая физика и статистическая физика, рассматривается как основная задача фундаментальных исследований[1]. Развитие теории предельных мер Гиббса для моделей определенных на решетчатых системах играет важную роль при реализации указанного постановления.

---

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

Тема и объект исследования настоящей диссертации находятся в русле задач, обозначенных в Указах Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», а также в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки, а также в Постановлении Президента Республики Узбекистан ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан».

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы: Определение гиббсовского состояния на конечном подмножестве решетки Z^{ν} восходит к классической работе Гиббса. Марковские случайные поля на Z^{ν} были впервые введены Добрушиным. Позже Спитцер и Аверинцев показали, что для конечных подмножеств решетки Z^{ν} класс Марковских случайных полей совпадает с классом гиббсовских состояний с потенциалами ближайшего соседа. Эквивалентность Марковских случайных полей и гиббсовских состояний с потенциалом ближайшего соседа впервые была получена Хаммерсли и Клиффордом. Их доказательство было весьма длинным и запутанным, значительно более простое доказательство дано Престоном; еще проще доказательство у Гримметта. Имеется также доказательство Шермана.

Общее определение предельной гиббсовской меры было введено в работах Р.Л.Добрушина и О.Ленфорда, и Д.Рюэля. Частный случай этого понятия появился гораздо раньше - в работе Н.Н.Боголюбова и Б.И.Хацета. Расширенный и модернизованный вариант этой работы можно увидеть в статье Н.Н.Боголюбова, Д.Я.Петрины и Б.И.Хацета. Упомянем также работы Р.А.Минлоса и Д.Рюэля. Теоретико-вероятностные аспекты теории предельных мер Гиббса можно найти в книге К.Престона. Гауссовские меры с точки зрения теории предельных мер Гиббса обсуждались в работах Ю.А.Розанова, Ф.Спитцера. Теорема существования предельных гиббсовских мер принадлежит Р.Л.Добрушину. Пример использования этой теоремы, относящийся к решетчатым моделям квантовой теории поля, был рассмотрен К.М.Ханиным. В его работе изучен несколько более общий случай. Р.Л.Добрушином доказано, что каждой мере Гиббса сопоставляется некоторая фаза физической системы. Если существует более чем одна мера Гиббса, то имеет место фазовый переход.

Во работах П.М.Блехера, Н.Н.Ганиходжаева, К.Престона, У.А.Розикова, Ф.М.Мухамедова, Ф.Спицера, Ю.Сухова, М.Рахматуллаева, Р.Хакимова используя метод, основанный на теории Марковских случайных полей и рекуррентных уравнений этой теории, определены предельные меры Гиббса некоторых (Изинг, Поттс, SOS, Hard-Core, $\lambda-$моделей и т.п.) моделей на дереве Кэли, которые совпадают с трансляционно-инвариантными или периодическими мерами. Также исследованы некоторые классы непериодических гиббсовских мер. В работах Синая и Пирогова контурным методом (теория Пирогова-Синая) на дереве Кэли доказано существование различных мер Гиббса для достаточно широкого класса гамильтонианов на дереве Кэли. Также определено множество основных состояний этих моделей. Теория $p-$адических мер Гиббса на дереве Кэли развита в работах Н.Н.Ганиходжаева, У.А.Розикова, Ф.М.Мухамедова и О.Н.Хакимова. В основном, доказано, что для $p-$адических моделей Изинга, Поттса, $\lambda-$моделей и некоторых обобщений этих моделей не существуют фазовые переходы ($p-$адических мер Гиббса единственно). Также выделены те значения параметров, где существуют фазовые переходы.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами и учреждением высшего образования, где выполнялась диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследования Ф4-ФА-Ф013 «Неассоциативные и операторные алгебры, динамические системы и их приложения в статистической физике и популяционной биологии», Институт математики (2012-2016 гг.).

Целью исследования является нахождение для конечных решетчатых систем связи между моделью Гиббса с потенциалом конечного радиуса и марковским случайным полем с соответствующей памятью; описание множества трансляционно-инвариантных и периодических предельных мер Гиббса для модели типа Изинга и Поттса на дереве Кэли в классе парамагнитных фаз.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие**:**

Ввести понятия гиббсовской меры с соответствующим потенциалом с отношением I (где I - подмножество множества $\{1,2,...,k\}$), Марковского случайного поля с памятью I и меры с отношением I. Исследовать связь между этими понятиями.

Получить критерий для потенциала, дающий ответ, когда он является потенциалом с отношением I.

Для моделей типов Изинга и Поттса на дереве Кэли описать трансляционно-инвариантные предельные меры Гиббса.

Определить периодические (не трансляционно-инвариантные) предельные меры Гиббса рассматриваемых моделей.

Объект исследования$-$ конечная решетка без циклов, модели типов Изинга и Поттса на полубесконечном дереве Кели.

Предмет исследования – Гиббсовская мера с потенциалом с отношением I и Марковское поле с памятью I; парамагнитные трансляционно-инвариантные и периодические гиббсовские меры для модели Изинга и для модели Поттса с тремя и четырьмя значениями спина.

Методы исследования. В работе используются методы, основанные на теории марковских случайных полей и рекуррентных уравнений этой теории. Также используются методы теории мер, функционального и математического анализа, линейной алгебры и сжимающих отображений.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

Вводятся понятия гиббсовской меры с соответствующим потенциалом с отношением I, Марковского случайного поля с памятью I и меры с отношением I. Доказано, что эти понятия эквивалентны.

Доказана теорема, дающая критерий того, когда потенциал является потенциалом с отношением I. Приведены примеры, демонстрирующие эффективность установленного критерия.

Для моделей типов Изинга и Поттса на дереве Кэли выделена область инвариантности отображения F и, соответственно, описываются трансляционно-инвариантные и периодические предельные меры Гиббса.

Найдены область, в которой существует одна, и область, в которой существуют точно три трансляционно-инвариантные предельные меры Гиббса. Определены область, в которой не существуют, и область, в которой существуют точно две 2-периодические предельные меры Гиббса.

Доказана теорема существования континуум непериодических предельных мер Гиббса.

Практические результаты исследования:

С помощью введения вспомогательной меры с отношением I доказана эквивалентность гиббсовской меры с потенциалом с отношением I и марковского поля с памятью I;

С помощью анализа многопеременной параметрической системы функциональных уравнений определено точное значение параметра, обеспечивающего существование фазового перехода в классе парамагнитных и модулированных фаз.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов функционального анализа и теории меры, теории марковских случайных полей и теории вероятностных мер, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что определено существование фазовых переходов для различных моделей равновесной статистической механики.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что существование парамагнитных предельных гиббсовских мер позволяет получить информацию об изменении состояния физической системы, которое обнаружить невооруженным глазом практически невозможно.

Внедрение результатов исследования.

Результаты полученные для моделей с соответсвующим потенциалом конечного радиуса по «парамагнитным» фазам были использованы в зарубежном научном проекте "The chaos implies the phase transition: p-adic dynamical system approaches to the quest for a new class of p-adic Gibbs measure" по программе № FRGS/1/2017/STG06/UIAM/02/1 для определения новых типов Гиббсовских мер (справка от 27 мая 2019 года Международного Исламского Университета Малайзии, Малайзия). Применение полученных научных результатов позволило описать меры Гиббса с потенциалами с конечным радиусом действия.

Данные, обеспечивающие существование фазовых переходов в классе парамагнитных и модулированных фаз, были использованы в исследовательском проекте №31S259 “Infinite dimensional orthogonal preserving quadratic stochastic operators” для выявления чистых фаз (справка от 17 июня 2019 года Университета Объединенных Арабских Эмиратов, ОАЭ). Применение результатов позволило исследовать фазовые переходы в бесконечномерных моделях.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 1 международной и 4 республиканских научно-практических конференциях. Результаты работы докладывались на семинаре «Операторные алгебры и их приложения» под руководством академика АН РУз Ш.А.Аюпова в Институте математики АН РУз (1997, 1999, 2011, 2019 г.), на городском семинаре по функциональному анализу и его приложениям при НУУз под руководством профессора В.И.Чилина (1998, 2011, 2019г.), на Добрушинском семинаре ИППИ (2013г., Москва), на конференции «Новые теоремы молодых математиков-2006» (Наманган, 2006, 15-16 ноября), на международной конференции «Операторные алгебры и смежные проблемы», (Ташкент, 2012), на конференции «Новые теоремы молодых математиков-2018» (Наманган, 2018), на конференции «Актуальные проблемы и применения анализа» (Карши, 2019), на Узбекско-Российской научной конференции «Неклассические уравнения Математической физики и их приложения» (Ташкент, 24-26 октября, 2019 год).

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 11 научных работ, из них 5 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе 3 из них опубликованы в зарубежных журналах и 2 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 83 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной «Предварительные сведения и результаты», приведены необходимые сведения о гиббсовских состояниях, марковских случайных полях на конечных множествах, также определение Гиббсовской меры, которые будут использованы при изложении результатов диссертации.

В параграфе 1.1, следуя монографии Престона, приведены основные сведения о гиббсовских состояниях, марковских случайных полях на конечных множествах.

Пусть $\Lambda -$конечное множество, $P(\Lambda)-$множество всех подмножеств в Λ. Точки Λ могут интерпретироваться как узлы, каждый из которых может быть свободным, либо занятым частицей. Будем считать, что подмножество $A \in P(\Lambda)$ описывает состояние модели, когда точки множества A заняты, а точки множества $\Lambda \setminus A$ свободны. Элементы множества $P(\Lambda)$ иногда будут называться *конфигурациями.* Вероятностные меры, которые мы будем рассматривать, соответствуют распределениям конфигураций, когда модель находится в состоянии некоторого динамического равновесия.

В параграфе 1.2, названном «Предельные меры Гиббса», мы обобщили состояния, рассмотренные в параграфе 1.1, на случай, когда граф имеет счетное число вершин, и приведены необходимые известные факты. Следуя монографии Синая, приведены основные сведения о предельных гиббсовских состояниях на бесконечных (счетных) множествах.

Рассмотрим формальный ряд

$$H(\varphi) = \sum_{V \subset Z^d} \tau(\varphi(V)) = \sum_{x \in Z^d} U(\varphi(x) : \varphi(y), x \neq y),$$

где суммирование происходит по всем непустым конечным подмножествам V. Этот ряд называется гамильтонианом.

Пусть дан Гамильтониан H, и для каждого A на пространстве конфигураций $\Omega(A)$ определена мера, являющаяся прямым произведением мер χ на пространстве Φ. Для любого конечного множества A рассмотрим такую конфигурацию $\sigma(V-A)$, что $H(\sigma(A) | \sigma(V-A))$ конечно для любой конфигурации $\sigma(A)$ и конечен интеграл

$$\Xi = \int \exp\{-H(\sigma(A)) - H(\sigma(A) \mid \sigma(V - A))\} \prod_{s \in A} d\chi(\sigma(s)). \qquad (1)$$

Этот интеграл называется статистической суммой.

Определение 1. Условной мерой Гиббса в объёме A при граничном условии $\sigma(V \setminus A)$ называется распределение вероятностей на пространстве $\Omega(A)$ конфигураций $\sigma(A)$, плотность которого по мере $\prod_{s \in A} d\chi(\sigma(s))$ имеет вид

$$\begin{aligned} &p(\sigma(A) \mid \sigma(V \setminus A)) = \Xi^{-1} \exp\{-H_A(\sigma)\}, \\ &H_A(\sigma) = H(\sigma(A)) + H(\sigma(A) \mid \sigma(V \setminus A)). \end{aligned} \qquad (2)$$

Следующее определение является центральным определением всей теории гиббсовских мер.

Определение 2. Распределение вероятностей P на пространстве Ω называется предельной мерой Гиббса, отвечающей гамильтониану H, если для любого конечного $A \subset V$

1) множество тех конфигураций $\sigma \in \Omega$, для которых конечны $H(\sigma(A) \mid \sigma(V \setminus A))$, Ξ, имеет $P-$вероятность 1;

2) с $P-$вероятностью 1 индуцированное распределением P условное распределение на $\Omega(A)$ при фиксированном граничном условии $\sigma(V - A)$ абсолютно непрерывно относительно меры $\prod_{s \in A} d\chi(\sigma(s))$, и его плотность относительно этой меры равна

$$p(\sigma(A) \mid \sigma(V \setminus A)) = \frac{\exp\{H_A(\sigma)\}}{\Xi} = \frac{\exp\{-H(\sigma(A)) - H(\sigma(A) \mid \sigma(V \setminus A))\}}{\Xi}, \qquad (3)$$

Пусть $\Phi-$метрический компакт. Тогда по теореме Тихонова $\Omega-$также метрический компакт в топологии прямого произведения. Предположим, что для любого конечного множества $A \subset V$ функция

$H_A(\sigma) = H(\sigma(A)) + H(\sigma(A) \mid \sigma(V \setminus A))$ представляет собой непрерывную функцию на Ω, а мера χ конечна.

Теорема 1. При описанных условиях для гамильтониана H существует, по крайней мере, одна предельная мера Гиббса.

Теперь приведем определение дерева Кэли. Дерево Кэли (решётка Бете) T^k порядка $k \geq 1$ это бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ рёбер. Пусть $T^k = (V, L)$, где V множество вершин графа T^k, L множество рёбер T^k. Две вершины x, y называются ближайшими соседями, если существует ребро $l \in L$, соединяющее эти вершины, и обозначается $l = \langle x, y \rangle$. Коллекция пар $\langle x, x_1 \rangle, \ldots, \langle x_{d-1}, y \rangle$ называется путём от x до y. Тогда число $d(x, y), x, y \in V$ - количество рёбер в кратчайшем пути от x до y называется расстоянием от x до y.

Для $x^0 \in V$ положим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{k=0}^{n} W_k.$$

Множество

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}, \ x \in W_n,$$

назовем множеством *прямых потомков вершины* x.

Множество всех гиббсовских состояний с данным гамильтонианом является непустым компактным выпуклым подмножеством множества всех распределений, так что естественна задача изучения крайних гиббсовских мер. Эта задача весьма трудна, и более или менее окончательные результаты получаются лишь при малых β.

Поэтому естественно, по крайней мере, в начале, искать для гамильтониана βH периодические или трансляционно-инвариантные предельные меры Гиббса.

В параграфе 1.3 приведен краткий обзор основных результатов настоящей диссертации, полученных во второй и третьей главах.

Во второй главе изучены потенциалы V, для которых потенциалы взаимодействия J_V отличны от нуля на конечных подмножествах A мощности $|A|$, не превышающей числа k, и выделен класс потенциалов с отношением I, где $I-$подмножество множества $\{1,2,...,k\}$. Далее, введены понятия марковского случайного поля с памятью I и меры с отношением I и установлены некоторые соотношения между этими тремя понятиями.

Пусть $\Lambda-$конечное множество и $P(\Lambda)-$множество всех подмножеств этого множества.

Рассмотрено семейство функций $f_i : \underbrace{\Lambda \times \Lambda \times ... \times \Lambda}_{i \ раз} \to \{0,1\}, \ i = 1,...,|\Lambda|$ (где $|\cdot|-$число элементов множества), со следующими свойствами:

1. $f_i(x_1,...,x_j,...,x_k,...,x_i) = f_i(x_1,...,x_k,...,x_j,...,x_i)$ для любых $j,k = 1,...,i;$
2. $f_i(x_1, x_2,...,x_i) = 0,$ если $\exists j,k = 1,...,i$ такие, что $x_j = x_k$.

Для $x \in \Lambda$ определим

$$\partial_i x = \bigcup_{\{y_1,y_2,...,y_{i-1}\}\subset\Lambda\setminus\{x\}: f_i(y_1,y_2,...,y_{i-1},x)=1} \{y_1, y_2,..., y_{i-1}\}.$$

и для $A \in P(\Lambda)$ положим:

$$\partial_i A = \left(\bigcup_{x\in A} \partial_i x \right) \setminus A.$$

Пусть $I \subset \{1,2,...,|\Lambda|\}$. Обозначим

$$\partial_I A = \bigcup_{i \in I} \partial_i A, \ \ \partial_I x = \bigcup_{i \in I} \partial_i x.$$

Непустое множество $B \in P(\Lambda)$ назовём $i-$*симплексом*, если для любого набора $y_1, y_2, ..., y_i \in B$ ($y_j \neq y_k$, если $j \neq k$) $f_i(y_1, y_2, ..., y_i) = 1$.

Функция $V : P(\Lambda) \to R$ называется потенциалом на Λ, если $V(\varnothing) = 0$. Пусть потенциал $V : P(\Lambda) \to R$ и потенциал взаимодействия $J_V : P(\Lambda) \to R$.

Заметим, что для любого $A \in P(\Lambda)$

$$V(A) = \sum_{B \subset A} J_V(B) \tag{4}$$

Потенциал V назовём *потенциалом с отношением* i, если $J_V(A) \neq 0$, лишь когда A есть i-симплекс. Если потенциал V является потенциалом с отношением i для каждого $i \in I \subset \{1, 2, ..., |\Lambda|\}$, то этот потенциал назовем *потенциалом с отношением* I и обозначим через V_I.

Элементы множества $P(\Lambda)$ называются *конфигурациями.* Поскольку $P(\Lambda)-$конечное множество, вероятностную меру на Λ можно рассматривать как функцию $\mu : P(\Lambda) \to R$, где $R-$вещественная прямая, обладающую свойствами:

1) $\mu(A) > 0$ для всех $A \in P(\Lambda)$;

2) $\sum_{A \subset \Lambda} \mu(A) = 1$.

Пусть $M(\Lambda)$ обозначает множество всех вероятностных мер на $P(\Lambda)$. Рассмотрим на $P(\Lambda)$ следующие вероятностные меры:

1) *мера Гиббса.* Мера Гиббса на $P(\Lambda)$ с потенциалом V определяется по формуле

$$\mu(A) = Z^{-1} \exp V(A) \text{ для всех } A \in P(\Lambda),$$

где $Z-$нормирующая константа.

2) *Марковское случайное поле с памятью I.* Меру μ назовём Марковским случайным полем с памятью I, если

а) $\mu(A) > 0$ для любого $A \in P(\Lambda)$;

б) пусть $x \notin A \subset \Lambda$; тогда условная вероятность (по отношению к μ) того, что конфигурация содержит x, при условии, что конфигурация на $\Lambda \setminus x$ равна A, совпадает с условной вероятностью того, что конфигурация содержит x, при условии, что конфигурация на $\partial_I x$ есть $A \cap \partial_I x$, т.е.

$$\frac{\mu(A \cup x)}{\mu(A \cup x) + \mu(A)} = \frac{\sum_{B \subset \Lambda \setminus (\partial_I x \cup x)} \mu((A \cap \partial_I x) \cup x \cup B)}{\sum_{B \subset \Lambda \setminus (\partial_I x \cup x)} \mu((A \cap \partial_I x) \cup x \cup B) + \mu((A \cap \partial_I x) \cup B)}. \tag{5}$$

3) *Мера с отношением I.* Меру μ назовём с отношением I, если

а) $\mu(A) > 0$ для любого $A \in P(\Lambda)$;

б) если $x \notin A \subset \Lambda$, то

$$\frac{\mu(A \cup x)}{\mu(A)} = \frac{\mu((A \cap \partial_I x) \cup x)}{\mu(A \cap \partial_I x)}.$$

Основным результатом параграфа 2.2 является

Теорема 2. Для меры $\mu \in M(\Lambda)$ следующие утверждения эквивалентны:

i) $\mu -$гиббсовская мера с потенциалом V_I;

ii) $\mu -$марковское случайное поле с памятью I;

iii) $\mu -$мера с отношением I.

В третьем параграфе второй главы доказан критерий для потенциала**.**

Основным результатом параграфа 2.3 является

Теорема 3. Потенциал V на Λ является потенциалом с отношением I тогда и только тогда, когда для любой пары $x, y \in \Lambda$, для которых $f_i(x, x_2, ..., x_{i-1}, y) = 0$ для любого набора $x_2, ..., x_{i-1} \in \Lambda, x_j \neq x_k, j \neq k, i \in I$, и для любого множества $X \subset \Lambda \setminus (x \cup y)$ имеет место равенство

$$V_I(X \cup x \cup y) - V_I(X \cup x) - V_I(X \cup y) + V_I(X) = 0.$$

Также приводятся примеры, которые наглядно демонстрируют теорему 3.

В третьей главе, названной «Парамагнитные меры Гиббса для моделей Изинга и Поттса с конкурирующими взаимодействиями», рассмотрен счетный граф, где возникает вопрос об описании предельных состояний Гиббса. Эта проблема изучена для двух моделей Изинга и Поттса.

В параграфе 3.1 дается определение модели и статистической суммы.

Рассмотрим модель типа Изинга на дереве Кэли с конкурирующими взаимодействиями J_1 – ближайших соседей, J_2 – продольных вторых соседей, и J_3– одноэтажных вторых соседей, где спиновые переменные принимают значения из множества $\Phi = \{-1, +1\}$. Конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$. Множество всех конфигураций обозначим через Φ^V. Формальный гамильтониан модели определяется по формуле

$$H(\sigma) = -J_1 \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y) - J_2 \sum_{>\tilde{x},y<\in L} \sigma(x)\sigma(y) - J_3 \sum_{>\overline{x,y}<\in L} \sigma(x)\sigma(y), \qquad (6)$$

где $J_1, J_2, J_3 \in R$ определяют взаимодействия соответственно ближайших и вторых соседей, а $< x, y >, > \tilde{x}, y <$ и $> \overline{x, y} <$ обозначения ближайших соседей, продольных вторых соседей и одноэтажных вторых соседей соответственно.

Ниже мы рассмотрим модель (6) на полубесконечном дереве Кэли порядка 2, т.е. бесконечный граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно 3 ребра, кроме вершины x_0, из которой выходят только 2 ребра.

Вводим новые обозначения $a=\exp(2J_1\beta)$, $b=\exp 2(J_2\beta)$, $c=\exp(-2J_3\beta)$. Получена следующая

Лемма 1. Уравнение

$$ax=\frac{b^2x^2+2bcx+1}{b^2+2bcx+x^2}$$

(где $x\geq 0, a>0, b>0, c>0$) имеет единственный корень, если либо $b\leq\sqrt{1+\sqrt{3}}$, либо $b>\sqrt{1+\sqrt{3}}$ и $c\geq\frac{\sqrt{4b^6-6b^4+4b^2-4}-4b}{4b^2+2}$. Если $b>\sqrt{1+\sqrt{3}}$ и $c<\frac{\sqrt{4b^6-6b^4+4b^2-4}-4b}{4b^2+2}$, то существуют $\eta_1(b,c), \eta_2(b,c)$, удовлетворяющие условия $0<\eta_1(b,c)<\eta_2(b,c)$ такие, что данное уравнение имеет три корня, если $\eta_1(b,c)<a<\eta_2(b,c)$, и имеет два корня, если либо $a=\eta_1(b,c)$, либо $a=\eta_2(b,c)$. Здесь

$$\eta_i(b,c)=\frac{1}{x_i}\frac{b^2x_i^2+2bcx_i+1}{b^2+2bcx_i+x_i^2},$$

где x_1, x_2 корни уравнения

$$b^2x^4+4bcx^3+\left(4b^2c^2-b^4+2\right)x^2+4bcx+b^2=0.$$

Пусть

$$T_c=\frac{2J_2}{\ln\sqrt{1+\sqrt{3}}},\quad J_2>0.$$

Главным результатом этого параграфа является:

Теорема 4. Если $b\geq 1$, то модель (6) имеет единственную трансляционно-инвариантную предельную меру Гиббса. Если $b<1$, то существуют точно три трансляционно-инвариантные предельные меры Гиббса, т.е. имеет место фазовый переход, при условии, что (J_1, J_2, J_3) удовлетворяют условиям леммы 1.

В параграфе 3.3 изучаются периодические предельные меры Гиббса рассматриваемой модели.

Пусть

$$B=2a^2b^3c+4b^2c^2a+b^4a-a+2b^3c,$$

$$D=B^2-4b^2\left(a^2+2abc+b^2\right)\left(a^2b^4+2ab^3c+b^2\right)$$

$$C=\frac{-b^3\left(a^2+1\right)+\sqrt{b^6\left(a^2+1\right)+4a^2b^2c^2\left(1-b^4\right)}}{8b^2c^2a}.$$

Главным результатом параграфа являются:

Теорема 5. 1) Если $b \geq 1$, то для модели (6) не существуют 2-периодические предельные меры Гиббса;

2) если $b < 1,\ c \in (0, C)$, то существуют точно две (соответственно одна) 2-периодические предельные меры Гиббса, т.е. имеет место фазовый переход, если $D > 0$ (соответственно если $D = 0$).

Теорема 6. Модель (6) (на инвариантном множестве M_1) имеет континуум S непериодических предельных мер Гиббса μ_u, где $u \in M_1 \setminus (Fix(F) \cup Per_2(F))$. Кроме того, множество непериодических предельных мер Гиббса классифицируется к (континуум) подмножествам

$$S_x = \left\{\mu_u : u \in M_1 \setminus (Fix(F) \cup Per_2(F))\ с\ условием \lim_{n\to\infty} F^n(u) = u^*(x)\right\},$$

где x - притягивающая неподвижная точка функции $f(x)$ и

$$S_y^{per} = \left\{\mu_u : u \in M_1 \setminus (Fix(F) \cup Per_2(F))\ с\ условием \lim_{n\to\infty} F^{2n}(u) = u^{per}(y)\right\},$$

где y - притягивающая неподвижная точка функции $g(x) = f(f(x))$.

В параграфе 3.4 дается определение модели Поттса и статистической суммы.

Рассматривается полубесконечное дерево Кэли (решетка Бете) T^2 порядка 2. Рассмотрим модель Поттса с тремя значениями спина $\Phi = 1,2,3$, и соответствующим Гамильтонианом с взаимодействием ближайшего соседа J_1 и взаимодействием продольных вторых соседей J_p.

Здесь (формальный) Гамильтониан имеет вид

$$H(\sigma) = -J_1 \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - J_p \sum_{>\tilde{x},y<} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \tag{7}$$

где $J_1, J_p \in R$ - соответственно взаимодействие ближайшего соседа $\langle x, y\rangle$ и взаимодействие продольных вторых соседей $>\tilde{x}, y<$.

Пусть $a = \exp(J_1\beta)$, $b = \exp(J_p\beta)$.

Рассматривается отображение

$$F : u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \in R_+^5 \to F(u) = (u_1', u_2', u_3', u_4', u_5') \in R_+^5,$$

определенное по формуле

$$\begin{aligned}
u_1' &= a(bu_1 + 2u_2)^2 \\
u_2' &= (bu_3 + u_4 + u_5)^2 \\
u_3' &= (u_1 + (b+1)u_2)^2 \\
u_4' &= a(u_3 + bu_4 + u_5)^2 \\
u_5' &= (u_3 + u_4 + bu_5)^2,
\end{aligned} \tag{8}$$

В параграфе 3.5 находятся трансляционно-инвариантные меры Гиббса модели Поттса, т.е. находим неподвижные точки отображения F.

В парамагнитных фазах (высоко симметричные фазы) $u_1 = u_4$ и $u_2 = u_3 = u_5$. Легко проверить, что множество

$$M = \{u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \in R_+^5 : u_1 = u_4, u_2 = u_3 = u_5\}$$

является инвариантным множеством относительно преобразовании F.

Мы изучим неподвижные точки F, принадлежащие множеству M. Уравнение $F(u) = u$ приводится к следующему уравнению

$$x = f(x) = \frac{1}{2a}\left(\frac{(b+1)x+2}{b+x}\right)^2. \tag{9}$$

Введем новые обозначения $\tilde{a} = \frac{2a^2}{b+1}$, $\tilde{b} = \frac{b(b+1)}{2}$, $y = \frac{(b+1)x}{2}$.

Обозначим

$$T_c = \frac{1}{\ln 2\sqrt{73} - 1}, \; J_2 > 0.$$

Главным результатом параграфа является

Теорема 7. Если $T \geq T_c$, то для модели (7) существует единственная трансляционно-инвариантная мера Гиббса. Если $T < T_c$, то существуют точно три (соотв. две) трансляционно-инвариантные предельные меры Гиббса, если (J_1, J_p) удовлетворяют условиям леммы, т.е. имеет место фазовый переход.

В параграфе 3.6 находятся периодические меры Гиббса модели Поттса.

Пусть $T_c = \frac{J_p}{\ln\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{8\sqrt{5} - 15}\right)}$.

Главным результатом параграфа является

Теорема 8. Если $T \geq T_c$ или $T \leq T_c$ и $a \in (b^+, +\infty)$, то модель (7) не имеет (на M) 2-периодических предельных мер Гиббса. Если $T < T_c$, то существуют точно две (соотв. одна) 2-периодические предельные меры Гиббса, если $a \in (0, b^+)$ (соотв. $a = b^+$).

В параграфе 3.7 рассмотрена модель Поттса с четырьмя значениями спина $\Phi = \{1,2,3,4\}$ и соответствующим Гамильтонианом с взаимодействием ближайших соседей J_1 и взаимодействием продольных вторых соседей J_p на полубесконечном дереве Кэли второго порядка Γ_+^2 и исследована проблема фазового перехода для парамагнитной фазы этой модели и доказана следующая

Теорема 9. Пусть $J_p > 0$. Тогда при $T \geq T_c$ существует единственная парамагнитная трансляционно-инвариантная предельная мера Гиббса и при

$T < T_c$ существуют ровно три парамагнитные трансляционно-инвариантные меры Гиббса, т.е. имеет место фазовый переход.

Здесь $T_c = \frac{J_p}{\ln 4.3690}$ и $J_p > 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена изучению для конечных решетчатых систем связи между моделью Гиббса с потенциалом конечного радиуса и марковским случайным полем с соответствующей памятью; описанию множества трансляционно-инвариантных предельных мер Гиббса для моделей типов Изинга и Поттса на дереве Кэли в классе парамагнитных фаз. Основные результаты исследования состоят в следующем:

- Вводятся понятия гиббсовской меры с соответствующим потенциалом с отношением I (где I - подмножество множества $\{1,2,...,k\}$), Марковского случайного поля с памятью I и меры с отношением I. Доказано, что эти три понятия эквивалентны.
- Доказана теорема, дающая критерий того, когда потенциал является потенциалом с отношением I.
- Приведены примеры, демонстрирующие эффективность установленного критерия.
- Рассмотрены модель типа Изинга на дереве Кэли с конкурирующими взаимодействиями J_1 ближайших соседей, J_2-продольных вторых соседей, и J_3 - одноэтажных вторых соседей и модель Поттса с тремя и четырьмя значениями спина с соответствующим Гамильтонианом с взаимодействием ближайших соседей J_1 и взаимодействием продольных вторых соседей J_p.
- Выделена область инвариантности и, соответственно, описываются трансляционно-инвариантные предельные меры Гиббса.
- Изучены периодические предельные меры Гиббса рассматриваемых моделей.
- Найдены область, в которой существует одна, и область, в которой существуют точно три парамагнитные предельные меры Гиббса.
- Найдены область, в которой не существует, и область, в которой существуют точно две 2-периодические предельные меры Гиббса.
- Доказана теорема существования континуум непериодических предельных мер Гиббса для модели Изинга.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.30.09.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN,

INSTITUTE OF MATHEMATICS

RAHMATULLAEV ANASBEK MUKHAMMADJANOVICH

GIBBS MEASURES FOR MODELS WITH POTENTIALS OF FINITE RADIUS INTERACTION

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2019

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2017.2.PhD/FM53

Dissertation has been prepared at Uzbekistan Academy of Sciences V.I. Romanovsky Institute of Mathematics

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, Russian, English (resume)) on the website (http:ik-fizmat@nuu.uz/) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Ganikhodjaev Nasir Nabievich** Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Zakirov Botir Sabitovich** Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor
	Rahimov Abdugofir Abdumajidovich Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor
Leading organization:	**Namangan State University**

Defense will take place «____» _____________2019 at ____ at the meeting of Scientific Council number DSc.30.09.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)246-53-21, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №_____). (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2019 year.
(Mailing report №___________ on «____» _______________2019 year).

A.Sadullaev
Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
D.F-M.S., Academician

N.K.Mamadaliyev
Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees, C.F-M.S.

V.I.Chilin
Chairman of scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F-M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of research work is the study for finite lattice systems the relationship between the Gibbs model with a potential of finite radius and a Markov random field with the corresponding memory; a description of the set of translation-invariant and periodic limit Gibbs measures for the Ising and Potts type models on a Cayley tree in the class of paramagnetic phases.

The object of the research work is finite lattice without cycles, models of the Ising and Potts type on the semi-infinite Cayley tree.

Scientific novelty of the research work is as follows:

Gibbs measure with corresponding potential with relation I, Markov random field with memory I and measure with relation I are defined. Equivalence of these measures is proved.

The theorem that gives a criterion for a potential with the relation I is proved.

There are given some examples that demonstrate the effectiveness of the established criterion.

For the Ising and Potts type models on the Cayley tree a domain of invariance of the map F is found and distinguished and, accordingly, translation-invariant limit Gibbs measures are described.

The Gibbs periodic limit measures of the models are studied.

The localization when there is one or exactly three translation-invariant limit Gibbs measures are found.

The domain, when there is not 2-periodic Gibbs measure and when there are exactly two 2-periodic Gibbs measures are found.

The existence theorem of an continuum set of nonperiodic limit Gibbs measures is proved.

Implementation of the research results. The results obtained during the dissertation research are practiced in the following areas:

The obtained results on the “paramagnetic” phases have been used to define new type Gibbs measures in the research project "The chaos implies the phase transition: p-adic dynamical system approaches to the quest for a new class of p-adic Gibbs measure" with number FRGS /1/2017/STG06/UIAM/ 02/1 (International Islamic University of Malaysia, certificate dated May 27, 2019). The application of the scientific results allowed to describe of Gibbs measures with the corresponding potential of a finite radius;

The data providing the existence of phase transitions in paramagnetic and modulated phases were used in research project No. 31S259 “Infinite dimensional orthogonal preserving quadratic stochastic operators” to identify pure phases (UAE, certificate dated June 17, 2019). Application of the results made it possible to study phase transitions in infinite-dimensional models.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 83 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Рахматуллаев А.М. *Об одном классе потенциалов, отличных от потенциалов ближайших соседей и соответствующие им гиббсовские состояния.* // УзМЖ, 2000. №5-6. с.65-71.

2. Рахматуллаев А.М., Розиков У.А. *Гиббсовские меры и марковские случайные поля с отношением I*.// **Мат.Заметки, том 72, вып.1, июль 2002г. с.94-101.** (Scopus. IF=0.26)

3. Rahmatullaev A.M. *On paramagnetic phases of the Vannimenus model.* // УзМЖ, 2012. №1. с.141-149.

4. Ganikhodjaev N.N., Rahmatullaev A.M. *On Paramagnetic Phases of the Potts Model on a Bethe Lattice in the Presence of Competing Interactions.//* **Journal of Physics: Conference Series, 435, 2013, p.135-140** (Scopus. IF=0.51)

5. Ganikhodjaev N.N., Rahmatullaev A.M. *Paramagnetic Phases of Four State Potts Model on a Cayley Tree in the Presence of Competing Interactions*.// **Phase Transitions,** 2019, V.92, N.8, 730–736 (Scopus. IF=1.00)

II бўлим (2 часть; part 2)

6. Рахматуллаев А.М. *Один класс n-арных потенциалов и соответствующие им гиббсовские состояния* // Депонирование, Ташкент, 1997 г.

7. Rahmatullaev A.M. *Incommensurate phases of the Ising type model* // Материалы международной конференции «Операторные алгебры и смежные проблемы». 2012, Ташкент, стр.54-56.

8. Rahmatullaev A.M. *Один класс потенциалов отличных от потенциалов ближайших соседей и соответствующие им гиббсовские состояния. //* Материалы республиканской конференции «Новые теоремы молодых математиков-2006». 2006, Наманган, стр.25-28

9. Rahmatullaev A.M. Парамагнитные фазы модели Поттса на дереве Кели. // Материалы республиканской конференции «Новые теоремы молодых математиков-2018». 2018, Наманган, стр.86-87.

10. Rahmatullaev A.M. Exact solution of the Potts model on a Cayley tree in the presence of competing interactions // Материалы республиканской конференции «Актуальные проблемы и применения анализа». 2019, Карши, стр.67-68.

11. Rahmatullaev A.M. Potts model on a Cayley tree in the presence of three competing interactions // Узбекско-Российская научная конференция «Неклассические уравнения Математической физики и их приложения». Ташкент, 24-26 октября, 2019 год, стр.201-205.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди (_______________.2019 йил).

Босишга рухсат этилди: ___________2019.
Ҳажми 2,2 шартли босма табоқ.
Бичими 60х84 1/16, «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Адади: 100. Буюртма: №__.

Ўзбекистон Республикаси Фанлар академияси
«Фан» нашриёти давлат корхонаси босмахонасида чоп этилди.
100047, Тошкент ш., Яҳё Ғуломов кўчаси, 70-уй