САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАРИНИ БЕРУВЧИ PhD.27.06.2017.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ТУРСУНОВ ФАРҲОД РУЗИКУЛОВИЧ

БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ЭЛЛИПТИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ УЧУН КОШИ МАСАЛАСИ ЕЧИМИНИНГ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯСИ

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд – 2020

УДК: 517.946

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАРИНИ БЕРУВЧИ PhD.27.06.2017.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ТУРСУНОВ ФАРҲОД РУЗИКУЛОВИЧ

БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ЭЛЛИПТИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ УЧУН КОШИ МАСАЛАСИ ЕЧИМИНИНГ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯСИ

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд – 2020

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2018.4. PhD/FM289 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Самарқанд давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз(резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.samdu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Хасанов Ақназар Бекдурдиевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Тахиров Жозил Остонович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Дурдиев Дурдимурод Қаландарович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	**Урганч давлат университети**

Диссертация ҳимояси Самарқанд Давлат университети ҳузуридаги PhD.27.06.2017.FM.02.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2020 йил «___» _______ соат ____ даги мажлисида бўлиб ўтади (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони,15- уй. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (99866)235-19-38, e-mail:patent@samdu.uz).

Диссертация билан Самарқанд давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (№____ рақам билан рўйхатга олинган). Манзил: 140104, Самарканд ш., Университет хиёбони, 15- уй. Тел.:(+99866) 231-06-32, факс: (99866)235-19-38.

Диссертация автореферати 2020 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2020 йил «____» _______________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.С. Солеев
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

А.М. Халхўжаев
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

А.Х. Бегматов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси ўринбосари ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар натижаларининг статистик таҳлили нокоррет масалаларнинг ўрганиш долзарб эканлигини кўрсатади. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нокоррект чегаравий масалалар, физик маънога эга эканлиги учун актуал ҳисобланади. Эллиптик типдаги тенгламаларни шартли корректликка текшириш ва соҳа чегарасининг бир қисмидаги қийматига кўра тақрибий ечимини топиш гидродинамика, геофизика, электродинамика, механика каби соҳалардаги амалий тадқиқотлар масаласидир. Амалий масалаларни ечишда нафақат гармоник функцияни тиклаш, балки унинг ҳосилаларини тиклаш масаласи муҳим ҳисобланади. Соҳа чегарасининг бир қисмидаги қийматига кўра, гармоник функция ва унинг ҳосиласини тиклаш масаласига оид тадқиқотларни ривожлантириш замонавий математик физиканинг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда эллиптик типли тенгламалар ва биринчи тартибли чизиқли ўзгармас коэффициентли эллиптик типдаги тенгламалар системаси учун Коши масаласини ечишда, соҳа чегарасининг Коши шартлари берилмаган қисмида Карлеман функциясини қуриш, қўйилган нокоррект чегаравий масалаларнинг ечими ва ечим ҳосиласининг регуряризацияси ҳамда шартли турғунлик баҳоларини олишга боғлиқ муаммоларни тадқиқ қилиш муҳим аҳамият касб этмоқда. Нокоррект чегаравий масалалар ечими ва тақрибий ечим ҳамда уларнинг ҳосиласининг регуляризациси ва шартли турғунлик баҳоларини тадқиқи гидродинамика, геофизика, электродинамика соҳалари билан биргаликда механика масалаларида кўчиш, деформация, кучланишнинг аниқлашда мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда амалий татбиққа эга бўлган фундаментал фанларга, хусусан математик физиканинг нокоррект масалаларини ўрганишга эътибор кучайди. Бу борада амалий татбиқига эга бўлган дифференциал тенглама ва математик физиканинг долзарб йўналишларига, жумладан, эллиптик типдаги дифференциал тенгламалар учун турли чегаравий масалаларни тадқиқ қилишга алоҳида эътибор қаратилди. Бунинг натижасида хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нокоррект чегаравий масалаларни тадқиқ қилиш ҳамда уларнинг тақрибий ечимларини Карлеман функцияси асосида махсус кўринишдаги соҳаларда қуриш, шартли турғунлик баҳоларини олиш ва ечимнинг мавжудлик критериясини топишга доир салмоқли натижаларга эришилди. Математик физика ва математик физиканинг замонавий усуллари соҳасида ҳалқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифа ва йўналиш этиб белгиланди[1]. Ушбу қарор ижросини таъминлашда хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назарияси,

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сон қарори.

шартли турғун коррект масалалар назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида» ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарори ва 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги фармони, 2019 йил 29 октябрдаги № ЎРҚ-576-сон «Илм-фан ва илмий фаолият тўғрисида» ги Ўзбекистон Республикаси Қонуни, ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Диссертация иши республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилди.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Нокоррект масалаларни амалий жиҳатдан муҳим эканлиги кўрсатилиб, мумкин бўлган ечимлар синфи компактга қадар торайтирилса, бу масала турғун бўлишига доир биринчи натижалар А.Н.Тихонов ишларида келтирилган. Лаплас тенгламаси учун Коши масаласи ва математик физиканинг шу қатори бошқа нокоррект масалаларида тўғри цилиндр ҳамда чегараси силлиқ бўлган ихтиёрий фазовий соҳада М.М.Лаврентьев ва сфера ичида С.Н.Мергеляннинг ишларида ёритилган. Ихтиёрий ўзгарувчи коэффициентли эллиптик тенгламалар учун Коши масаласи Е.М.Ландис, ёпиқ йўлак кўринишидаги чексиз соҳада В.К.Ивановлар томонидан ўрганилган.

Ш. Ярмухамедов Лаплас ва Гельмгольц тенгламалари учун Коши масаласи соҳа чегарасининг қисми конусни сирти бўлганда, фундаментал ечимни соҳа чегарасининг коник қисмида аппроксимация қилиш, А.А.Шлапунов томонидан Лаплас тенгламаси учун Коши масаласи соҳа чегарасининг қисми сфера сирти бўлганда, Карлеман функциясини қуриш асосида фундаментал ечимни соҳа чегарасининг сферик қисмида бир жинсли гармоник кўпҳад билан аппроксимация қилиш орқали ечилган. Иккиланган ортогоналлик базис терминида умумий эллиптик системалар учун Коши масаласи Н.Н.Тарханов, А.А.Шлапунов, ишларида ёритилган. Текисликда Гельмгольц тенгламаси ва электродинамика тенгламалари системаси учун Коши масаласини ечишда Карлеман функцияси А.Л.Бухгейм ва Э.В.Арбузовлар томонидан қурилган.

Кўп ўлчовли фазода эластиклик назарияси тенгламалари системаси учун Коши масаласи Т.Ишанкулов, О.Махмудов ва И.Ниёзов, умумлашган Коши Риман системаси учун З. Маликов, умумлашган Моисил –Теодореско системаси учун Э. Сатторов, Навье-Стокс тенгламалари системаси учун Э.Жабборов томонидан ўрганилган. Н.Н.Тарханов ишларида эса биринчи тартибли эллиптик типли тенгламалар системаси учун Карлеман формуласи ўрганилган. Биринчи тартибли эллиптик типдаги тенгламалар системаси учун Коши масаласига А.В.Бицадзе, А.А.Дезин, И.Н.Векуа, А.Д.Джураев, А.П.Солдатов, В.С.Виноградов, В.А.Полунин ва бошқаларнинг ишлари бағишланган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.

Диссертация тадқиқоти Самарқанд давлат университети илмий – тадқиқот режасидаги ОТ-Ф1-044 «Биринчи ва иккинчи тартибли чизиқли ўзгармас коэффициентли эллиптик системалар учун Коши масаласи» (2007-2011й.) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади Лаплас тенгламаси ва биринчи тартибли эллиптик типдаги тенгламалар системаси учун Коши масаласи ечими ва ечим ҳосиласининг чекли соҳаларда ошкор кўринишдаги регуляризациясини қуриш ва шартли турғунлик баҳосини олишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

Лаплас тенгламаси учун Коши масаласи ечимининг ва ечим ҳосиласининг икки ва уч ўлчовли чегараланган соҳаларда ошкор кўринишдаги регуляризациясини қуриш ва шартли турғунлик баҳосини олиш;

биринчи тартибли эллиптик типдаги тенгламалар системаси учун икки ва уч ўлчовли чегараланган соҳаларда Карлеман функциясини тузиш;

биринчи тартибли эллиптик типдаги тенгламалар системаси учун Коши масаласи ечимининг икки ва уч ўлчовли чегараланган соҳаларда ошкор кўринишдаги регуляризациясини қуриш;

биринчи тартибли эллиптик типдаги тенгламалар системаси учун Коши масаласи ечимининг икки ва уч ўлчовли чегараланган соҳаларда шартли турғунлик баҳосини олиш;

биринчи тартибли эллиптик типдаги тенгламалар системаси учун Коши масаласи ечимининг ҳосиласини икки ва уч ўлчовли чегараланган соҳаларда ошкор кўринишдаги регуляризациясини қуриш ҳамда шартли турғунлик баҳосини олиш.

Тадқиқот объекти Лаплас тенгламаси ва Лаплас оператори билан факторизацияланувчи биринчи тартибли эллиптик типдаги тенгламалар системасидан иборат.

Тадқиқот предмети Карлеман функцияси ёрдамида Лаплас тенгламаси ва Лаплас оператори билан факторизацияланувчи биринчи тартибли эллиптик типдаги тенгламалар системаси учун нокоррект масала ечимини топишдан иборат**.**

Тадқиқот усуллари. Диссертацияда ҳақиқий ва комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси, функционал анализ ва дифференциал тенгламаларни ечиш усуллари, ҳамда математик физика усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

Лаплас тенгламаси учун Коши масаласи ечимининг ва ечим ҳосиласининг икки ва уч ўлчовли чегараланган соҳаларда ошкор кўринишдаги регуляризацияси қурилган ва шартли турғунлик баҳоси олинган;

биринчи тартибли эллиптик типдаги тенгламалар системаси учун икки ва уч ўлчовли чегараланган соҳаларда Карлеман функцияси тузилган;

биринчи тартибли эллиптик типдаги тенгламалар системаси учун Коши масаласи ечимининг икки ва уч ўлчовли чегараланган соҳаларда ошкор кўринишдаги регуляризацияси қурилган;

биринчи тартибли эллиптик типдаги тенгламалар системаси учун Коши масаласи ечимининг икки ва уч ўлчовли чегараланган соҳаларда шартли турғунлик баҳоси олинган;

биринчи тартибли эллиптик типдаги тенгламалар системаси учун Коши масаласи ечими ҳосиласининг икки ва уч ўлчовли чегараланган соҳаларда ошкор кўринишдаги регуляризацияси қурилган ҳамда шартли турғунлик баҳоси олинган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қўйилган нокоррект масала учун корректлик синфини аниқлаб, нокоррект масалаларнинг аниқ ва тақрибий ечимлари геофизика ва геологоразведкага тадбиқ этилган;

ечим ҳосиласининг регуляризацияси ва турғунлик баҳосиниг эластиклик назариясида кўчиш, деформация ва кучланишни аниқлашда қўлланилган;

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назарияси, нокоррект масалалар назарияси, ҳамда математик мулоҳазаларнинг ва исботларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти Лаплас тенгламаси ва биринчи тартибли эллиптик типдаги тенгламалар системаси учун Коши масаласининг регуляризациялашган ечими ва ечим ҳосиласининг шартли турғунлик баҳоларини олинганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти, яъни Лаплас тенгламаси ва биринчи тартибли эллиптик типдаги тенгламалар системаси учун қўйилган нокоррект Коши масаласи билан ифодаланадиган геофизик моделларни кузатишда, электромагнит тўлқинларнинг тарқалиши каби физик жараёнларни, механика масалаларини тадқиқ қилишда хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Биринчи тартибли эллиптик типли тенгламалар системаси учун Коши масаласи ечимининг регуляризациясига оид илмий натижалар асосида:

қўйилган нокоррект масала учун корректлик синфини аниқлаш усули, ҳамда биринчи тартибли эллиптик типдаги тенгламалар системаси учун Коши масаласи ечимининг икки ва уч ўлчовли чегараланган соҳаларда ошкор кўринишдаги регуляризациясидан Самарқанд давлат университети дастури доирасида (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2019 йил 23 декабрь 89-03-5067-сон маълумотномаси) 2012-

2016 йиллар давомида олиб борилган ФА–Ф078 «Гидродинамические задачи фильтрования и фильтрации неоднородных жидкостей в пористых средах» мавзусидаги фундаментал лойиҳада ғовак муҳитларда чўкма ҳосил қилиб суспензиялар сизишининг коэффициентли тескари нокоррект масалаларини ечишда фойдаланилган.

Илмий натижаларнинг қўлланилиши ер ости қатламларида суспензиялар сизиши жараёнида кольматация ва суффозия ҳодисаларини характерловчи параметрларнинг қийматини тескари нокоррект масалани ечиш орқали аниқлаш имконини берган;

биринчи тартибли эллиптик типли тенгламалар системаси учун Коши масаласи ечимининг регуляризациясига оид илмий натижалар «The stress state of the layered medium with the interface cracks» номли хорижий лойиҳада (И.И. Мечников номидаги Одесса Миллий университети, 2019 йил 2 ноябрдаги маълумотномаси) фойдаланилган. Илмий натижаларнинг қўлланилиши эллиптик типли тенгламалар билан боғлиқ нокоррект масалаларни ечиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Диссертациянинг асосий мазмуни 10 та халқаро ва 6 та республика, жами 16 та илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 24 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестацияси комиссиясининг фалсафа доктори диссертацияларини ҳимоя қилишда тавсия этилган илмий нашрларда 8 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 6 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 118 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар берилган.

Диссертациянинг «**Лаплас тенгламаси учун Коши масаласи**» деб номланувчи биринчи бобида Ш. Ярмухамедов усули орқали Лаплас тенгламаси учун Коши масаласи ечими ва ечим ҳосиласининг регуляризацияси ва шартли турғунлик баҳолари келтирилган. Бу бобда Ш. Ярмухамедов ишини такомиллаштириб, соҳа чегарасининг қийматига кўра на фақат гармоник функциянинг ўзи, балки унинг ҳосилалари ҳам тикланилган. Биринчи бобнинг биринчи параграфида дастлабки тушунчалар ва баён этиладиган натижаларни тўлдириш мақсадида Ж. Адамар, Т. Карлеман, Г.М. Голузин ва В.И. Крылов, А.Н. Тихонов, М.М. Лаврентьев, Ш. Ярмухамедов ишларидан, ҳамда эллиптик типдаги тенгламалар ва системалар учун Коши масаласининг регуляризациялашган ечимини топишга бағишланган ишларидан фойдаланилган. Бу параграфда коррект ва нокоррект масалалар тарихи, шартли коррект масалалар, Адамар мисоли, Карлеман функциясининг таърифи ва текисликда Карлеман функциясини тузиш конструкцияси, ҳамда Лаплас тенгламаси учун Коши масаласининг қўйилиши келтирилган.

Фараз қиламиз $x=(x_1,x_2)$ ва $y=(y_1,y_2)$ нуқталар R^2 фазога тегишли икки ўлчовли Евклид фазосидан олинган бўлсин.

G - соҳа R^2 - га тегишли бир боғломли чегараланган соҳа бўлиб, унинг чегараси $T=\{y_1\in R: a_1\le y_1\le b_1\}$ компакт қисмдан ва $y_2>0$ ярим текисликда жойлашган $S: y_2=h(y_1)$ силлиқ эгри чизиқдан иборат бўлсин. $\overline{G}=G\cup\partial G,\ \partial G=S\cup T$, $\partial/\partial n$ - ∂G га ўтказилган ташқи нормал бўйича дифференциал оператор.

G соҳада қуйидаги Лаплас тенгламасини қараймиз.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y_2^2}=0\,. \qquad (1)$$

1-масала. Қаралаётган соҳа чегараси ∂G-нинг S қисмида берилган қийматларига кўра гармоник бўлган $U(y)=U(y_1,y_2)\in C^2(G)\cap C^1(\overline{G})$ функцияни топиш талаб қилинади, яъни

$$U(y)\big|_S=f(y),\quad \left.\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right|_S=g(y), \qquad (2)$$

бу ерда $f(y)$ ва $g(y)$ - берилган $C^1(S)$ ва $C(S)$ синфларга тегишли функциялар.

Айтайлик $\sigma>0$ бўлсин. $\Phi_\sigma(x,y)$ функцияни[1] $\alpha>0$ бўлганда икки ва уч ўлчовли фазоларда қуйидаги тенгликлар орқали аниқлаймиз.

$$-2\pi e^{\sigma x_2^2}\Phi_\sigma(x,y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{Im}\left[\frac{e^{\sigma w^2}}{w-x_2}\right]\frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}},\quad w=i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_2\ , \qquad (3)$$

бу ерда $\alpha=|y'-x'|,\quad y'=(y_1,0),\quad x'=(x_1,0),\quad u\ge 0.$

$$-2\pi^2 e^{\sigma x_3^2}\Phi_\sigma(x,y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{Im}\left[\frac{e^{\sigma w^2}}{w-x_3}\right]\frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}},\ w=i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_3, \qquad (4)$$

бу ерда $y=(y_1,y_2,y_3),\quad x=(x_1,x_2,x_3),\quad y'=(y_1,y_2),\quad x'=(x_1,x_2),\quad \alpha=|y'-x'|.$

Ш. Ярмухамедов томонидан (3) ва (4) тенгликлар орқали аниқланган $\Phi_\sigma(x,y)$ функция $\sigma>0$ бўлганда қуйидаги

$$\Phi_\sigma(x,y)=F_m(r)+g_\sigma(x,y) \qquad (5)$$

[1] (3) ва (4) тенгликлар орқали аниқланган $\Phi_\sigma(x,y)$ функцияни биринчи бўлиб Ш. Ярмухамедов қурган.

кўринишда тасвирланган, бу ерда $m=2$ да $F_2(r)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$ ва $m=3$ да $F_3(r)=\frac{1}{4\pi r}$, $g_\sigma(x,y)$-функция y бўйича $R^m\left(m=2,3\right)$ да гармоник функция.

Шунинг учун $U(y)=U(y_1,y_2)\in C^2(G)\cap C^1(\overline{G})$ функция ва ихтиёрий $x\in G$ учун қуйидаги Грин интеграл формуласи ўринли бўлади:

$$U(x)=\int_{\partial G}\left[\frac{\partial U}{\partial n}\Phi_\sigma(x,y)-U(y)\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]dS_y\,. \tag{6}$$

Биринчи бобнинг иккинчи параграфида Лаплас тенгламаси учун Коши масаласи ечимини давом эттириш ва М.М. Лаврентьев бўйича регуляризация қуриш масаласи ечилган. Қуйидагича белгилаш киритамиз:

$$U_\sigma(x)=\int_S\left[g(y)\Phi_\sigma(x,y)-f(y)\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]dS_y\ . \tag{7}$$

1-теорема. Айтайлик $U(y)=U(y_1,y_2)\in C^2(G)\cap C^1(\overline{G})$ функция соҳа чегараси ∂G-нинг S қисмида (2) шартни қаноатлантириб, соҳа чегараси ∂G-нинг T қисмида

$$\left|U(y)\right|+\left|\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right|\le M,\quad y\in T \tag{8}$$

тенгсизлик ўринли бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $x\in G$ ва $\sigma>0$ учун

$$\left|U(x)-U_\sigma(x)\right|\le\psi_2(\sigma)Me^{-\sigma x_2^2},\quad \left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}\right|\le\varphi_i(\sigma,x_2)Me^{-\sigma x_2^2},\quad i=1,2 \tag{9}$$

баҳолар ўринли бўлади.

Бу ерда M - мусбат сон ва

$$\begin{gathered}\psi_2(\sigma)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}}\right),\ \varphi_1(\sigma,x_2)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}x_2}+\frac{\sqrt{\sigma}}{2\sqrt{\pi}}+\frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma}x_2^2}\right),\\ \varphi_2(\sigma,x_2)=\left(\frac{\sqrt{\pi\sigma}x_2}{2}+\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}x_2}+\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}}+\frac{3}{2\sqrt{\pi\sigma}x_2^2}\right).\end{gathered} \tag{10}$$

1-натижа. Ҳар бир $x\in G$ учун

$$\lim_{\sigma\to\infty}U_\sigma(x)=U(x),\quad \lim_{\sigma\to\infty}\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}=\frac{\partial U(x)}{\partial x_i},\quad i=1,2$$

тенгликлар ўринли бўлади.

$\overline{G}_\varepsilon$ орқали

$$\overline{G}_\varepsilon=\left\{(x_1,x_2)\in G,\quad a>x_2\ge\varepsilon,\quad a=\max_T h(x_1),0<\varepsilon<a,\ \right\}$$

тўпламни белгилаймиз. Кўриш мумкинки, $\overline{G}_\varepsilon\subset G$ тўплам компакт тўпламдир.

2-натижа. Агар $x\in\overline{G}_\varepsilon$ бўлса, у ҳолда $\{U_\sigma(x)\}$ ва $\left\{\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}\right\}$ функциялар оиласи $\sigma\to\infty$ да текис яқинлашади, яъни

$$U_\sigma(x)\ \rightrightarrows\ U(x),\quad \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}\ \rightrightarrows\ \frac{\partial U(x)}{\partial x_i},\quad i=1,2\,.$$

Шуни таъкидлаб ўтамизки, $\Pi_\varepsilon = G \setminus \overline{G}_\varepsilon$ тўплам берилган масала учун чегаравий қатлам вазифасини бажаради, бу ерда сингуляр қўзғалишлар назарияси каби текис яқинлашиш бўлмайди.

1-изоҳ. (9) баҳоларнинг биринчиси, яъни ечим ва тақрибий ечим орасидаги фарқ Ш. Ярмухамедов томонидан исботланган.

Биринчи бобнинг учинчи параграфида икки ўлчовли фазонинг чегараланган соҳасида Лаплас тенгламаси учун Коши масаласи ечимининг ҳамда бу ечим ҳосиласининг шартли турғунлик баҳоси келтирилган.

Фараз қиламиз, S эгри чизиқ $y_2 = h(y_1),\ \ y_1 \in [a_1, b_1]$ тенглама орқали берилган бўлиб, h бир қийматли, Ляпунов шартини қаноатлантирадиган функция бўлсин. Шу ўринда

$$\max_T h(y_1) = a, \qquad b = \max_T \sqrt{1 + h'^2(y_1)}$$

деб оламиз.

E орқали қуйидаги тўпламни белгилаймиз:
$E = \left\{ U(y) \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G}) : |U(y)| + |gradU(y)| \le M, M > 0, y \in T \right\}$.

2-теорема. Айтайлик $U(y) \in E$ функция (1) Лаплас тенгламасини қаноатлантириб, G соҳа чегарасининг S қисмида

$$|U(y)| + \left| \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right| < \delta, \quad y \in S \tag{11}$$

тенгсизликни қаноатлантирсин. У ҳолда ихтиёрий $x \in G$ ва $\sigma > 0$ учун

$$|U(x)| \le 2\psi(\sigma, x_2) M^{1 - x_2^2/a^2} \delta^{x_2^2/a^2}, \quad \left| \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} \right| \le 2\mu_i(\sigma, x_2) M^{1 - x_2^2/a^2} \delta^{x_2^2/a^2}, \ i = 1, 2 \tag{12}$$

баҳолар ўринли бўлади. Бу ерда $0 < \delta \le Me^{-\sigma a^2}$,

$$\psi(\sigma, x_2) = \max_S (\psi^2(\sigma, x_2), \psi_2(\sigma)), \psi^2(\sigma, x_2) = \left(\frac{b\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}} + ab + \frac{b}{2\sqrt{\pi\sigma}(a - x_2)} + \frac{2\sqrt{\sigma}ab}{\sqrt{\pi}} \right), \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \nu_1(\sigma, x_2) = \Bigg(& \frac{b + 3ab\sqrt{\pi\sigma}}{4} + \frac{2\sigma ab + 4b\sqrt{\sigma} + \sigma a^2 b\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} + \frac{b\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}(a - x_2)} + \\ & + \frac{ab\sqrt{\pi\sigma}}{(a - x_2)^2} + \frac{2ab\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}(a - x_2)} + \frac{5b}{\sqrt{\pi\sigma}(a - x_2)^2} \Bigg), \ \mu_1(\sigma, x_2) = \max_S (\nu_1(\sigma, x_2), \varphi_1(\sigma, x_2)), \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} & \nu_2(\sigma, x_2) = \left(\frac{bx_2\sqrt{\pi\sigma} + 2\sigma abx_2}{2} + \frac{b\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}(a - x_2)} + 3ab\sqrt{\pi\sigma} + \frac{2b\sqrt{\sigma}x_2}{\sqrt{\pi}(a - x_2)} + \frac{4b}{\sqrt{\pi\sigma}(a - x_2)^2} \right), \\ & \mu_2(\sigma, x_2) = \max_S (\nu_2(\sigma, x_2), \varphi_2(\sigma, x_2)). \end{aligned} \tag{15}$$

Қуйидаги белгилашни киритамиз:

$$U_{\sigma\delta}(x) = \int_S \left[g_\delta(y)\Phi_\sigma(x, y) - f_\delta(y) \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial n} \right] dS_y. \tag{16}$$

3-теорема. Айтайлик $U(y) \in E$ функция соҳа чегарасининг S қисмида (2) шартни қаноатлантириб, $f(y)$ ва $g(y)$ функциялар ўрнига уларнинг тақрибий қийматлари $f_\delta(y)$ ва $g_\delta(y)$, $\delta > 0$ хатоликка берилган бўлсин:

$$\max_S |f(y) - f_\delta(y)| < \delta, \quad \max_S |g(y) - g_\delta(y)| < \delta. \tag{17}$$

У ҳолда, ихтиёрий $x \in G$ ва $\sigma > 0$ учун

$$|U(x) - U_{\sigma\delta}(x)| \le 2\psi(\sigma, x_2) M^{1 - x_2^2/a^2} \delta^{x_2^2/a^2}, \quad \left| \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i} \right| \le 2\mu_i(\sigma, x_2) M^{1 - x_2^2/a^2} \delta^{x_2^2/a^2} \tag{18}$$

баҳолар ўринли бўлади.

3-натижа. Ҳар бир $x \in G$ учун

$$\lim_{\delta \to 0} U_{\sigma\delta}(x) = U(x), \quad \lim_{\delta \to 0} \frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2$$

тенгликлар ўринли бўлади.

4-натижа . Агар $x \in \overline{G}_\varepsilon$ бўлса, у ҳолда $\{U_{\sigma\delta}(x)\}$ и $\left\{ \frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i} \right\}$ функциялар оиласи $\delta \to 0$да текис яқинлашади, яъни:

$$U_{\sigma\delta}(x) \rightrightarrows U(x), \ \frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i} \rightrightarrows \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2 .$$

2-изоҳ. (18) баҳоларнинг биринчиси Ш. Ярмухамедов томонидан исботланган.

Биринчи бобнинг тўртинчи параграфида Ш. Ярмухамедов усули орқали уч ўлчовли фазонинг чегараланган соҳасида Лаплас тенгламаси учун Коши масаласининг ечими қаралган бўлиб, Карлеман функциясини тузиш конструкцияси ҳамда Коши масаласининг ечими ва бу ечим ҳосиласининг регуляризацияси ва шартли турғунлик баҳолари олинган.

Айтайлик R^3 ҳақиқий евклид фазоси, $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3$ нуқталар берилган бўлиб, $r = |y - x|$ бўлсин.

G - соҳа R^3 га тегишли, унинг чеграси ∂G, $y_3 = 0$ текисликдан иборат T компакт қисмдан ва $y_3 > 0$ ярим фазода жойлашган S силлиқ Ляпунов сиртидан иборат бирбоғломли чегараланган соҳа бўлсин. $\overline{G} = G \cup \partial G,\ \partial G = S \cup T$, $\partial / \partial n$- ∂G га ўтказилган ташқи нормал бўйича дифференциал оператор.

G соҳада қуйидаги Лаплас тенгламасини қараймиз.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_3^2} = 0 . \tag{19}$$

2-масала. Қаралаётган соҳа чегараси ∂G- нинг S қисмида берилган қийматларига кўра гармоник бўлган $U(y) = U(y_1, y_2, y_3) \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ функцияни топиш талаб қилинади, яъни

$$U(y)\big|_S = f(y), \quad \left. \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right|_S = g(y), \tag{20}$$

бу ерда $f(y)$ ва $g(y)$ -берилган $C^1(S)$ ва $C(S)$ синфларга тегишли функциялар.

Айтайлик $\sigma > 0$ бўлсин. $\Phi_\sigma(x, y)$ функцияни $\alpha > 0$ бўлганда (4) тенглик орқали аниқлаймиз. (5) тенгликдан $U(y) = U(y_1, y_2, y_3) \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ функция ва ихтиёрий $x \in G$ учун қуйидаги Грин интеграл формуласи ўринли бўлади:

$$U(x)=\int_{\partial G}\left[\frac{\partial U}{\partial n}\Phi_\sigma(x,y)-U(y)\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]dS_y. \qquad (21)$$

Қуйидагича белгилаш киритамиз.

$$U_\sigma(x)=\int_S\left[g(y)\Phi_\sigma(x,y)-f(y)\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]dS_y\ . \qquad (22)$$

4-теорема. Айтайлик $U(y)=U(y_1,y_2,y_3)\in C^2(G)\cap C^1(\overline{G})$ функция соҳа чегараси ∂G- нинг S қисмида (20) шартни қаноатлантириб, соҳа чегараси ∂G -нинг T қисмида

$$|U(y)|+\left|\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right|\le M, \quad y\in T \qquad (23)$$

тенгсизликни қаноатлантирсин. У ҳолда, ихтиёрий $x\in G$ ва $\sigma>0$ учун

$$|U(x)-U_\sigma(x)|\le \psi_3(\sigma)Me^{-\sigma x_3^2} \qquad (24)$$

$$\left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}\right|\le \theta_i(\sigma,x_3)Me^{-\sigma x_3^2}, \quad i=1,2,3 \qquad (25)$$

баҳолар ўринли бўлади. Бу ерда M мусбат сон,

$$\psi_3(\sigma)=\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}}+\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\sigma}}+\frac{1}{2\pi}\right), \qquad (26)$$

$$\begin{aligned}\theta_1(\sigma,x_3)&=\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{16\sigma x_3^2}+\frac{5\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}}+\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}x_3^2}\right), \quad \theta_2(\sigma,x_3)\equiv\theta_1(\sigma,x_3),\\ \theta_3(\sigma,x_3)&=\left(\frac{1+2\sqrt{\sigma}}{2\pi}+\frac{1}{4\sqrt{\sigma\pi}x_3}+\frac{3\sqrt{\sigma}+4\sigma\sqrt{\sigma}x_3^2}{\sqrt{\pi}}+\frac{27x_3+16}{27\sqrt{\sigma\pi}x_3^3}\right).\end{aligned} \qquad (27)$$

5-**натижа .** Ҳар бир $x\in G$ учун

$$\lim_{\sigma\to\infty}U_\sigma(x)=U(x), \quad \lim_{\sigma\to\infty}\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}=\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i=1,2,3$$

тенгликлар ўринли бўлади.

$\overline{G}^1_\varepsilon$ орқали қуйдаги тўпламни белгилаймиз

$$\overline{G}^1_\varepsilon=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in G,\quad a>x_3\ge\varepsilon,\quad a=\max_T h(x_1,x_2), 0<\varepsilon<a,\right\}.$$

$\overline{G}^1_\varepsilon\subset G$ тўплам компакт тўпламдир.

6-натижа . Агар $x\in\overline{G}_\varepsilon$ бўлса, у ҳолда $\{U_\sigma(x)\}$ ва $\left\{\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}\right\}$ функциялар оиласи $\sigma\to\infty$да текис яқинлашади, яъни

$$U_\sigma(x)\ \rightrightarrows\ U(x), \quad \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}\ \rightrightarrows\ \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i=1,2,3\,.$$

3-изоҳ. (24) баҳо Ш. Ярмухамедов томонидан исботланган.

Фараз қиламиз, S сирт $y_3=h(y_1,y_2),\ (y_1,y_2)\in T$ тенглама орқали берилган бўлиб, h шундай бир қийматли функция бўлсинки, S сирт Ляпунов сирти бўлсин. Шу ўринда

$$a=\max_T h(y_1,y_2) \text{ ва } b=\max_T\sqrt{1+h'^2_{y_1}(y_1,y_2)+h'^2_{y_2}(y_1,y_2)} \qquad (28)$$

деб белгилаймиз. E_1 орқали қуйидаги тўпламни белгилаймиз:

$$E_1=\left\{U(y)=U(y_1,y_2,y_3)\in C^2(G)\cap C^1(\overline{G}):\left|U(y)\right|+\left|gradU(y)\right|\le M, M>0, y\in T\right\}.$$

5-теорема. (Коши масаласи ечимининг шартли турғунлиги). Айтайлик $U(y)\in E_1$ функция (19) - Лаплас тенгламасини қаноатлантириб, G соҳа чегарасининг S қисмида

$$\left|U(y)\right|+\left|\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right|<\delta,\quad y\in S \tag{29}$$

тенгсизликни қаноатлантирсин. У ҳолда, ихтиёрий $x\in G$ ва $\sigma>0$ учун

$$\left|U(x)\right|\le 2\Psi(\sigma,x_3)M^{1-x_3^2/a^2}\delta^{x_3^2/a^2},\quad \left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}\right|\le 2\phi_i(\sigma,x_3)M^{1-x_3^2/a^2}\delta^{x_3^2/a^2}, i=1,2,3 \tag{30}$$

баҳолар ўринли бўлади. Бу ерда: $0<\delta\le Me^{-\sigma a^2}$,

$$\Psi(\sigma,x_3)=\max_S(\psi^3(\sigma,x_3),\psi_3(\sigma)),\ \psi^3(\sigma,x_3)=\left(\frac{4ab\sqrt{\sigma}+4a^2b\sqrt{\pi}\sigma+b\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}}+\right.$$
$$\left.+\frac{b\pi+b}{4\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)}+\frac{13ab\pi\sigma+24ab\sigma+2b}{4\sqrt{\pi\sigma}}+\frac{4a^2b\sigma+b+2ab}{2\pi}\right), \tag{31}$$

$$\phi_1(\sigma,x_3)=\max_S(\theta_1(\sigma,x_3),v(\sigma,x_3)),\ \phi_2(\sigma,x_3)=\max_S(\theta_2(\sigma,x_3),v(\sigma,x_3)),$$

$$v(\sigma,x_3)=\left[\sqrt{\sigma}\left(\frac{24b+61ab+32a^2b}{2\sqrt{\pi}}+\frac{21ab(a+x_3)}{\sqrt{\pi}(a-x_3)^2}+\frac{ab}{\sqrt{\pi}}+\frac{13ab\sqrt{\pi}}{8}\right)+\right.$$
$$+\sigma\left(\frac{44ab+8\sigma a^3b+10a^2b+16a^3b}{\pi}+\frac{5ab\pi+36ab+16\sigma+8b}{8\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)}+\frac{12ab(a+x_3)}{\sqrt{\pi\sigma}}+a^2b\right)+ \tag{32}$$
$$\left.+\frac{\sigma\sqrt{\sigma}(24ab+62a^2b)}{\sqrt{\pi}}+\frac{b\pi+4\pi ab}{8\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)}+\frac{13b+55\sigma ab}{\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)^2}+\frac{4\sigma^3a^2b+b}{\sqrt{\pi\sigma}}+\frac{b\pi+64ab}{4\pi}\right],$$

$$\phi_3(\sigma,x_3)=\max_S(\theta_3(\sigma,x_3),\mu(\sigma,x_3)),$$

$$\mu(\sigma,x_3)=\left[\sqrt{\sigma}\left(\frac{32b+16ab+4abx_3}{2\sqrt{\pi}}+\frac{40ab+8\pi ab+2\pi\sqrt{\pi}ab(a+x_3)}{2\sqrt{\pi}(a-x_3)^2}+\frac{6ab+8b}{\sqrt{\pi}(a-x_3)}\right)+\right.$$
$$+\sigma\sqrt{\sigma}\left(\frac{16ab+12a^2b}{\sqrt{\pi}}+\frac{40abx_3}{2\sqrt{\pi}}+\frac{4abx_3}{\sqrt{\pi}(a-x_3)}\right)+\frac{\sigma(20ab+4a^2bx_3+2abx_3)}{\pi}+ \tag{33}$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\left(\frac{13b}{2\sqrt{\pi}(a-x_3)^2}+\frac{ab}{2\sqrt{\pi}(a-x_3)}\right)\right].$$

Бу ерда $\psi_3(\sigma)$ функция (26) тенгликдан, $\theta_1(\sigma,x_3)$, $\theta_2(\sigma,x_3)$ ва $\theta_3(\sigma,x_3)$ функциялар (27) тенгликлардан аниқланади.

Қуйидагича белгилаш киритамиз:

$$U_{\sigma\delta}(x)=\int_S\left[g_\delta(y)\Phi_\sigma(x,y)-f_\delta(y)\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]dS_y. \tag{34}$$

6-теорема. Айтайлик $U(y)\in E_1$ функция соҳа чегарасининг S қисмида (20) шартни қаноатлантириб, $f(y)$ ва $g(y)$ функцияларнинг ўрнида уларнинг тақрибий қийматлари $f_\delta(y)$ ва $g_\delta(y)$, $\delta>0$ хатолик билан берилган бўлсин, яъни $\max_S |f(y)-f_\delta(y)|<\delta, \quad \max_S |g(y)-g_\delta(y)|<\delta.$ У ҳолда ихтиёрий $x\in G$ ва $\sigma>0$ учун

$$|U(x)-U_{\sigma\delta}(x)|\le 2\Psi(\sigma,x_3)M^{1-x_3^2/a^2}\delta^{x_3^2/a^2}, \quad 0<\delta\le Me^{-\sigma a^2}, \tag{35}$$

$$\left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}\right|\le 2\phi_i(\sigma,x_3)M^{1-x_3^2/a^2}\delta^{x_3^2/a^2}, i=1,2,3 \tag{36}$$

баҳолар ўринли бўлади.

7-натижа. Ҳар бир $x\in G$ учун

$$\lim_{\delta\to 0}U_{\sigma\delta}(x)=U(x), \quad \lim_{\delta\to 0}\frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}=\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i=1,2,3$$

тенгликлар ўринли бўлади.

8-натижа. Агар $x\in\overline{G}_\varepsilon$ бўлса, у ҳолда $\{U_{\sigma\delta}(x)\}$ ва $\left\{\frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}\right\}$ функциялар оиласи $\delta\to 0$ да текис яқинлашади, яъни

$$U_{\sigma\delta}(x) \rightrightarrows U(x), \quad \frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i} \rightrightarrows \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i=1,2,3.$$

4-изоҳ. (35) баҳо Ш. Ярмухамедов томонидан исботланган.

Диссертациянинг «**Икки ўлчовли чегараланган соҳада биринчи тартибли чизиқли эллиптик тидаги тенгламалар системаси учун Коши масаласи**» номланувчи иккинчи бобида, текисликнинг чегараланган соҳасида биринчи тартибли чизиқли эллиптик тидаги тенгламалар системаси учун Коши масаласи ечими ва бу ечим ҳосиласининг регуляризацияси ҳамда шартли турғунлик баҳоси олинган.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида ўзгармас коэффициентли биринчи тартибли чизиқли эллиптик типдаги тенгламалар системаси ҳақида тушунчалар келтирилган.

$x=(x_1,x_2)$ ва $y=(y_1,y_2)$ нуқталар R^2- икки ўлчовли Евклид фазосидан олинган бўлиб, $x^T=(x_1,x_2)^T$- x векторнинг транспонирлангани бўлсин.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз.

$$y'=(y_1,0), \quad x'=(x_1,0), r=|y-x|, \quad \alpha=|y'-x'|,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^T, \quad U(x)=(U_1(x),U_2(x),...,U_n(x))^T, u^0=(1,1,...,1)\in R^n, n\ge 2,$$

$E(x)$ - $(n\times l)$ ўлчамли диагонал матрица, $n,l\ge 2$.

$A_{l\times n}(x)$- орқали шундай $D(x^T)$- матрицалар синфини белгилаймизки, унинг элементлари комплекс коэффициентли чизиқли формадан иборат бўлиб,

$$D^*(x^T)D(x^T)=E(|x|^2u^0) \tag{37}$$

шартни қаноатлантирсин. Бу ерда $D^*(x^T)$- матрица $D(x^T)$ - матрицага қўшма бўлган матрица.

Икки ўлчовли чегараланган G- соҳада ($\partial G=S\cup Q, Q=\{y_1\in R, a_1\le y_1\le b_1\}$) қуйидаги биринчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар системасини қараймиз:

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(x)=0, \tag{38}$$

бунда $D(x^T)\in A_{l\times n}(x)$.

Агар $u(x)\in C^1(G)\cap C(\overline{G})$ синфга тегишли бўлиб, (38) системанинг ечимидан иборат бўлса, у ҳолда қуйидаги интеграл формула ўринли бўлади:

$$U(x)=\int_{\partial G} N_\sigma(x,y)U(y)dS_y,\quad x\in G \tag{39}$$

бу ерда

$$N_\sigma(x,y)=\left(E(\Phi_\sigma(x,y)u^0)D^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)D\left(t^T\right), \tag{40}$$

$\Phi_\sigma(x,y)$ функция эса (3) тенглик орқали аниқланади.

3-масала. (38) системани қаноатлантирувчи $U(x)\in C^1(G)\cap C(\overline{G})$ вектор функциянинг G соҳа чегарасининг S қисмида берилган қийматига кўра, яъни:

$$U(x)\big|_S = f(x), \tag{41}$$

бутун G соҳада тиклаш талаб этилади. Бу ерда $f(x)$-функция соҳа чегарасининг S қисмида берилган узлуксиз функция.

$$U_\sigma(x)=\int_S N_\sigma(x,y)U(y)dS_y,\quad x\in G \tag{42}$$

деб белгилаймиз.

7-теорема. Айтайлик $U(x)$ вектор-функция $C^1(G)\cap C(\overline{G})$ синфга тегишли бўлиб, соҳа чегарасининг S қисмида (41) шартни, соҳа чегараси ∂G-нинг Q қисмида эса

$$|U(y)|\le M,\quad y\in Q , \tag{43}$$

тенгсизликни қаноатлантирсин. У ҳолда ихтиёрий $x\in G$ ва $\sigma>0$ учун

$$|U(x)-U_\sigma(x)|\le\psi_2(\sigma,x_2)Me^{-\sigma x_2^2},\quad \left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}\right|\le\beta_i(\sigma,x_2)Me^{-\sigma x_2^2},\quad i=1,2 \tag{44}$$

баҳолар ўринли бўлади. Бу ерда M -мусбат сон, $c=const$ ва

$$\psi_2(\sigma,x_2)=\frac{c}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{\sigma\pi}x_2}+1\right),\ \beta_1(\sigma,x_2)=c\left(\frac{3\sqrt{\sigma}}{2\sqrt{\pi}}+\frac{2}{\sqrt{\pi\sigma}x_2^2}\right),\ \beta_2(\sigma,x_2)=c\left(\frac{2\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}}+\frac{3}{2x_2^2\sqrt{\pi\sigma}}\right).$$

Бу ерда ҳам 1-натижа ва 2-натижа ўринли бўлади.

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида икки ўлчовли фазонинг чегараланган соҳасида биринчи тартибли эллиптик типдаги тенгламалар системаси учун Коши масаласи ечими ва ечим ҳосиласининг шартли турғунлик баҳолари олинган.

8-теорема. Айтайлик $U(x)$ вектор - функция $C^1(G)\cap C(\overline{G})$ синфга тегишли бўлиб, (38) системани қаноатлантириб соҳа чегараси ∂G- нинг Q қисмида (43) тенгсизлик, соҳа чегараси ∂G - нинг S қисмида эса

$$|U(y)|\le\delta,\quad y\in S,\quad 0<\delta\le Me^{-\sigma a^2} \tag{45}$$

тенгсизлик бажарилсин. У ҳолда ихтиёрий $x\in G$ ва $\sigma>0$ учун

$$|U(x)| \le 2\theta(\sigma, x_2) M^{1-x_2^2/a^2} \delta^{x_2^2/a^2}, \quad \left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}\right| \le 2\tau_i(\sigma, x_2) M^{1-x_2^2/a^2} \delta^{x_2^2/a^2}, \quad i = 1,2 \qquad (46)$$

баҳолар ўринли бўлади.

$$U_{\sigma\delta}(x) = \int_S N_\sigma(x, y) U(y) dS_y, \quad x \in G \qquad (47)$$

деб белгилаймиз.

9-теорема. Айтайлик $U(x)$ вектор - функция $C^1(G) \cap C(\overline{G})$ синфга тегишли бўлиб, (38) системани қаноатлантириб, соҳа чегарасида (41) ва (43) шартлар бажарилсин. Агар $f(x)$- функциянинг ўрнига унинг $C(S)$ синфга тегишли бўлган тақрибий қиймати $f_\delta(x)$, $\delta > 0$ хатоликка берилган бўлса, яъни $\max\limits_S |f(x) - f_\delta(x)| < \delta, \quad 0 < \delta \le Me^{-\sigma a^2}$, у ҳолда ихтиёрий $x \in G$ учун

$$|U(x) - U_{\sigma\delta}(x)| \le \theta(\sigma, x_2) M^{1-x_2^2/a^2} \delta^{x_2^2/a^2}, \left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}\right| \le \tau_i(\sigma, x_2) M^{1-x_2^2/a^2} \delta^{x_2^2/a^2} \qquad (48)$$

баҳолар ўринли бўлади. Бу ерда:

$$\psi^2(\sigma, x_2) = \left(\frac{b}{2\sqrt{\pi\sigma}(a - x_2)} + \frac{2\sqrt{\sigma} ab}{\sqrt{\pi}}\right) c, \quad \theta(\sigma, x_2) = \max_S(\psi^2(\sigma, x_2), \psi_2(\sigma, x_2)), c = const$$

$$m_1(\sigma, x_2) = \left(\frac{4b\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2ab\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}(a - x_2)} + \frac{5b}{\sqrt{\pi\sigma}(a - x_2)^2}\right) c, \tau_1(\sigma, x_2) = \max_S(m_1(\sigma, x_2), \beta_1(\sigma, x_2)),$$

$$m_2(\sigma, x_2) = \left(\frac{2b\sqrt{\sigma} x_2}{\sqrt{\pi}(a - x_2)} + \frac{4b\sqrt{\sigma} x_2}{\sqrt{\pi\sigma}(a - x_2)^2}\right) c, \quad \tau_2(\sigma, x_2) = \max_S(m_2(\sigma, x_2), \beta_2(\sigma, x_2)),$$

$\psi_2(\sigma, x_2)$, $\beta_1(\sigma, x_2)$ и $\beta_2(\sigma, x_2)$ 7-теорема орқали аниқланади.

Бу ерда ҳам 3-натижа ва 4- натижа ўринли бўлади.

Диссертациянинг «**Уч ўлчовли чегараланган соҳада биринчи тартибли эллиптик типдаги тенгламалар системаси учун Коши масаласи»** деб номланувчи учинчи бобида уч ўлчовли чегараланган соҳада биринчи тартибли эллиптик типдаги тенгламалар системаси учун Коши масаласи ечимининг ва ечим ҳосиласининг регуляризацияси ва турғунлик баҳоси келтирилган.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида Карлеман функцияси ёрдамида уч ўлчовли чегараланган соҳада биринчи тартибли эллиптик типдаги тенгламалар системаси учун Коши масаласи ечимининг ва ечим ҳосиласининг регуляризацияси ошкор кўринишда қурилган. Иккинчи параграфида эса ечим ва ечим ҳосиласининг шартли турғунлик баҳоси олинган.

Фараз қиламиз $x = (x_1, x_2, x_3)$ ва $y = (y_1, y_2, y_3)$ нуқталар R^3- уч ўлчовли Евклид фазосидан олинган бўлиб, $x^T = (x_1, x_2, x_3)^T$ x-векторнинг транспонирлангани бўлсин. $G \in R^3$ $(\partial G = S \cup Q)$ чегараланган соҳада (38) системани қараймиз.

Агар $u(x) \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$ синфга тегишли бўлиб, (38) системанинг ечимидан иборат бўлса, у ҳолда (39) интеграл формула ўринли бўлади. (40) тенгликдаги $\Phi_\sigma(x, y)$ функция эса (4) тенглик орқали аниқланади.

4-масала. $U(x)\in C^1(G)\cap C(\overline{G})$ вектор функция уч ўлчовли чегараланган G -соҳада (38) тенгламалар системасини қаноатлантириб соҳа чегарасининг S-қисмида қиймати берилган бўлсин, яъни

$$U(x)\big|_S = f(x), \tag{49}$$

бу ерда $f(x)$ - соҳа чегарасининг S қисмида берилган узлуксиз функция.

(42) белгилашни киритамиз. Бу ерда (40) тенгликдаги $\Phi_\sigma(x,y)$ функция (4) тенглик орқали аниқланади.

10-теорема. Айтайлик $C^1(G)\cap C(\overline{G})$ синфга тегишли $U(x)$- вектор-функция (38) системанинг ечимидан иборат бўлиб, соҳа чегарасининг S қисмида (49) шартни, соҳа чегараси ∂G - нинг Q қисмида

$$|U(y)|\le M,\quad M>0,\quad y\in Q \tag{50}$$

тенгсизликни қаноатлантирсин. У ҳолда ихтиёрий $x\in G$ ва $\sigma>0$ учун

$$|U(x)-U_\sigma(x)|\le \psi_3(\sigma,x_3)Me^{-\sigma x_3^2},\ \left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}\right|\le \omega_i(\sigma,x_3)Me^{-\sigma x_3^2},\quad i=1,2,3$$

баҳолар ўринли бўлади. Бу ерда:

$$\psi_3(\sigma,x_3)=c\left(\frac{5}{2\pi}+\frac{1}{8\sigma x_3^2}+\frac{1}{4x_3\sqrt{\sigma\pi}}\right),\ \omega_1(\sigma,x_3)=c\left(\frac{13\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}}+\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}}+\frac{13}{4\sqrt{\sigma\pi}x_3^2}+\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}x_3^2}\right),$$

$$\omega_2(\sigma,x_3)=\omega_1(\sigma,x_3),\ \omega_3(\sigma,x_3)=c\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{\pi}+\frac{\sqrt{\sigma}(11+4\sigma x_3^2)}{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{\sqrt{\sigma\pi}}\left(\frac{27x_3+16}{27x_3^3}\right)\right), c=const.$$

Бу ерда ҳам 5-натижа ва 6- натижа ўринли бўлади.

11-теорема. Фараз қиламиз, $U(x)\in C^1(G)\cap C(\overline{G})$ функция (38) системанинг ечимидан иборат бўлиб соҳа чегараси ∂G-нинг Q қисмида (50), соҳа чегараси ∂G-нинг S қисмида эса

$$|U(y)|\le\delta,\quad y\in S,\quad 0<\delta\le Me^{-\sigma a^2} \tag{51}$$

тенгсизликлар бажарилсин. У ҳолда ихтиёрий $x\in G$ ва $\sigma>0$ учун

$$|U(x)|\le 2\varphi(\sigma,x_3)M^{1-x_3^2/a^2}\delta^{x_3^2/a^2},\left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}\right|\le 2v_i(\sigma,x_3)M^{1-x_3^2/a^2}\delta^{x_3^2/a^2},\quad i=1,2,3$$

баҳолар ўринли бўлади.

(47) белгилашни киритамиз. Бу ерда (40) тенгликдаги $\Phi_\sigma(x,y)$ функция (4) тенглик орқали аниқланади.

12-теорема. Фараз қиламиз $U(x)$ вектор - функция $C^1(G)\cap C(\overline{G})$ синфга тегишли бўлиб, (38) системани қаноатлантириб, соҳа чегарасининг S қисмида (49) шарт ва соҳа чегарасининг Q-қисмида (50) бажарилсин.

Агар $f(x)$- функциянинг ўрнига унинг $C(S)$ синфга тегишли бўлган тақрибий қиймати $f_\delta(x)$, $\delta>0$ хатоликка берилган бўлса, яъни

$\max\limits_S|f(x)-f_\delta(x)|<\delta,\quad 0<\delta\le Me^{-\sigma a^2}$, у ҳолда ихтиёрий $x\in G$ учун

$$|U(x)-U_{\sigma\delta}(x)|\le\varphi(\sigma,x_3)M^{1-x_3^2/a^2}\delta^{x_3^2/a^2},\quad \left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}\right|\le v_i(\sigma,x_3)M^{1-x_3^2/a^2}\delta^{x_3^2/a^2}, i=1,2,3$$

баҳолар ўринли бўлади. Бу ерда

$$\varphi(\sigma,x_3)=\max_S(\psi_3(\sigma,x_3),q(\sigma,x_3)),\; v_1(\sigma,x_3)=\max_S(\omega_1(\sigma,x_3),k(\sigma,x_3)),\; c=const,$$

$$q(\sigma,x_3)=c\left(\frac{4ab\sqrt{\sigma}+4a^2b\sqrt{\pi}\sigma+b\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}}+\frac{b\pi+b}{4\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)}+\frac{13ab\pi\sigma+24ab\sigma}{4\sqrt{\pi\sigma}}+\frac{4a^2b\sigma+b}{2\pi}\right),$$

$$k(\sigma,x_3)=c\left[\sqrt{\sigma}\left(\frac{24b+61ab+32a^2b}{2\sqrt{\pi}}+\frac{21ab(a+x_3)}{\sqrt{\pi}(a-x_3)^2}\right)+\sigma\sqrt{\sigma}\left(\frac{62a^2b+24ab}{\sqrt{\pi}}\right)+\right.$$

$$+\sigma\left(\frac{44ab+8\sigma a^3b+10a^2b+16a^3b}{\pi}+\frac{5ab\pi+36ab+16\sigma+8b}{8\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)}+\frac{12ab(a+x_3)}{\sqrt{\pi\sigma}}\right)+$$

$$\left.+\frac{16ab}{\pi}+\frac{\pi ab}{2\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)}+\frac{13b+55\sigma ab}{\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)^2}+\frac{4\sigma^3a^2b+b}{\sqrt{\pi\sigma}}\right].$$

$$v_2(\sigma,x_3)=\max_S(\omega_2(\sigma,x_3),k(\sigma,x_3)),\; v_3(\sigma,x_3)=\max_S(\omega_3(\sigma,x_3),\,p(\sigma,x_3)).$$

$$p(\sigma,x_3)=c\left[\sigma\sqrt{\sigma}\left(\frac{16ab+12a^2b}{\sqrt{\pi}}+\frac{40abx_3}{2\sqrt{\pi}}+\frac{4abx_3}{\sqrt{\pi}(a-x_3)}\right)+\right.$$

$$+\sqrt{\sigma}\left(\frac{28b+10ab}{2\sqrt{\pi}}+\frac{40ab+8\pi ab+2\pi\sqrt{\pi}ab(a+x_3)}{2\sqrt{\pi}(a-x_3)^2}+\frac{6ab+8b}{\sqrt{\pi}(a-x_3)}+\frac{2abx_3}{\sqrt{\pi}}\right)+$$

$$\left.+\frac{\sigma(20ab+4a^2bx_3)}{\pi}+\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\left(\frac{13b}{2\sqrt{\pi}(a-x_3)^2}+\frac{ab}{2\sqrt{\pi}(a-x_3)}\right)\right].$$

Бу ерда ҳам 7-натижа ва 8- натижа ўринли бўлади.

ХУЛОСА

Диссертация Лаплас тенгламаси ва Лаплас тенгламаси билан факторизацияланувчи биринчи тартибли чизиқли эллиптик типли тенгламалар системаси учун Коши масаласини ўрганишга бағишланган.

Асосий тадқиқот натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Лаплас тенгламаси учун Коши масаласи ечимининг ва ечим ҳосиласининг икки ва уч ўлчовли чегараланган соҳаларда ошкор кўриниш-даги регуляризацияси қурилган ва шартли турғунлик баҳоси олинган;

2. Биринчи тартибли эллиптик типдаги тенгламалар системаси учун икки ва уч ўлчовли чегараланган соҳаларда Карлеман функцияси тузилган;

3. Биринчи тартибли эллиптик типдаги тенгламалар системаси учун Коши масаласи ечимининг икки ва уч ўлчовли чегараланган соҳаларда ошкор кўринишдаги регуляризацияси қурилган;

4. Биринчи тартибли эллиптик типдаги тенгламалар системаси учун Коши масаласи ечимининг икки ва уч ўлчовли чегараланган соҳаларда шартли турғунлик баҳоси олинган;

5. Биринчи тартибли эллиптик типдаги тенгламалар системаси учун Коши масаласи ечими ҳосиласининг икки ва уч ўлчовли чегараланган соҳаларда ошкор кўринишдаги регуляризацияси қурилган ҳамда шартли турғунлик баҳоси олинган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD. 27.06. 2017. FM 02.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ ПРИ САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТУРСУНОВ ФАРХОД РУЗИКУЛОВИЧ

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Самарканд – 2020

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2018.4. PhD/FM289.

Диссертация выполнена в Самаркандском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.samdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный руководитель:	**Хасанов Акназар Бекдурдиевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Тахиров Жозил Остонович** доктор физико-математических наук, профессор
	Дурдиев Дурдимурод Каландарович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Ургенчский государственний университет**

Защита диссертации состоится«____» ________ 2020 года «____» часов на заседании Научного совета PhD.27.06. 2017. FM 02.01при Самаркандском государственном университете. (Адрес:140104, г.Самарканд,Университетский бульвар,15. Тел.:(99866)231-06-32,факс: (99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственного университета (зарегистрирована за №____). (140104, г. Самарканд, Университетский бульвар,15. Тел.:(99866)231-06-32, факс: (99866)235-19-38).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2020 года.
(протокол рассылки №_______ от «____» _______________2020 года).

А.С. Солеев
Председатель Научного совета по присуждению ученой степени, д.ф.-м.н., профессор

А.М. Халхужаев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученой степени, д.ф.-м.н.

А.Х. Бегматов
Заместитель председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученой степени, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Статистический анализ результатов многих международных научно-практических исследований, проводимых на мировом уровне, показывает актуальность изучения некорректных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Краевые некорректные задачи дифференциальных уравнений в частных производных всегда взывают большой интерес, так как имеют актуальные физические приложение. Так, исследование задач на условную корректность и построение приближенного решения по заданным значениям на части границы области для уравнений и систем эллиптического типа применимы в решении актуальных задач гидродинамики, геофизики и электродинамики. При решении прикладных задач ставится задача нахождения не только приближённого решения, но и производную приближённого решения. Восстанавление на части границы гармонической функции и её производной в теории современной математической физики остаётся важной задачей.

В настоящее время в мире проведение исследований задачи Коши для линейных эллиптических уравнений и систем эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами на части границы области вне носителя данных Коши для некорректной граничной задачи построение функции Карлемана, получение регуляризации решений и ее производной, а также оценки условной устойчивости решения и ее производной считается важной задачей. Применение приближенных решений, и их производных и получение оценки условной устойчивости производной приближенного значения решения некорректных краевых задач в области гидродинамики, геофизики, электродинамики, а также в области механики при изучении перемещения, деформации и напряжения является одним из приоритетных направлений.

В нашей стране особое внимание уделяется фундаментальным наукам, которые имеют практическое применение. В частности, особое внимание было уделено дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики, которые имеют практическое применение в прикладных науках, а также исследованиям различных краевых задач для уравнений в частных производных эллиптического типа. В результате этих исследований были получены весомые результаты в решении некорректных задач для дифференциальных уравнений с частными производными и построены их приближенные решения с использованием матриц Карлемана в явном виде по приближенным данным в специальных областях, установлены оценка устойчивости. Основными задачами и направлениями деятельности являются научные исследования на уровне международных стандартов в области математики, физики и современных методов математической физики[1]. При

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан №292 “О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений академии наук Республики Узбекистан” от 18 мая 2017 года.

обеспечении исполнения этих решений имеет большое значение развитие теории некорректных задач, построение регуляризованного решения, а также получение оценки условной устойчивости некорректных задач для эллиптических уравнений.

Данная диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан №- ПП-2909 «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования» от 20 апреля 2017 года, №-ПП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года и №-УП-4947 «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 7 февраля 2017 года, № ЗРУ-576 Закон Республики Узбекистан «О науке и научной деятельности» от 29 октября 2019г., а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Первые результаты с точки зрения практической важности некорректных задач и сужению класса возможных решений до компакта, приведению задач к устойчивости получены в работе А.Н.Тихонова. В работах М. М. Лаврентьева, получены оценки характеризующие устойчивость пространственной задачи в классе ограниченных решений задачи Коши для уравнения Лапласа и некоторых некорректных задач математической физики; (в прямом цилиндре, а также для произвольной пространственной области с достаточно гладкой границей). Аналогичные результаты были получены С.Н. Мергляном в случае шара. Е.М.Ландис получил оценки, характеризующие устойчивость пространственной задачи для произвольного эллиптического уравнения. В случае когда двумерная область полоса, регуляризованное решение построено В.К. Ивановым.

Функция Карлемана для уравнений Лапласа и Гельмгольца построена Ш.Ярмухамедовым, когда часть границы области является поверхностью конуса, и А.А.Шлапуновым, когда часть границы есть поверхность сферы. Построение Ш.Я.Ярмухамедовым функции Карлемана основано на применении методов теории функций. При этом фундаментальное решение аппроксимируется на конической части границы области. Построение А.А.Шлапунова функции Карлемана основано на аппроксимации фундаментального решения уравнения Лапласа на сферической части границы области однородными гармоническими полиномами. Функция Карлемана также построени: Н.Н.Тарханов и А.А.Шлапунов - для общих эллиптических систем в терминах базисов с двойной ортогональностью; А.Л.Бухгейм и Э.В.Арбузов - для уравнения Гельмгольца и для системы уравнений электродинамики на плоскости;

Т.Ишанкулова, Э.Джабборова, О.Махмудова и И.Ниёзова - для системы уравнений Навье-Стокса и для системы уравнений теории упругости в многомерном пространстве; З. Маликова для обобшённый системы Коши-Римана, Э. Сатторова для обошённый системы Моиселла -Теодореско. Н.Н.Тарханова - для уравнения Максвеллского типа. Системам эллиптического типа первого порядка посвящен ряд исследований, содержащихся в работах А.В.Бицадзе, А.А.Дезина, И.Н.Векуа, А.Д.Джураева, А.П.Солдатова, В.С.Виноградова, В.А.Полунина и других.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполняется диссертация.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с планом научного исследования ОТ-Ф1-044 «Теория задачи Коши для линейных эллиптических систем первого и второго порядка с постоянными коэффициентами» Самаркандского государственного университета. (2007-2011г).

Цель исследования является построение в явном виде регуляризированного решения, а также получение оценки условной устойчивости решения задача Коши для уравнения Лапласа и систем эллиптического типа первого порядка.

Задачи исследования:

получение в явном виде регуляризированное решение и его производной, а также оценка условной устойчивости решения задачи Коши и его производной для уравнения Лапласа в двумерных и трехмерных ограниченных областях;

построение функции Карлемана для систем эллиптического типа первого порядка в двумерных и трехмерных ограниченных областях;

построения регуляризированного решения задачи Коши для систем эллиптического типа первого порядка в двумерных и трехмерных ограниченных областях;

получение оценки условной устойчивости решения задачи Коши для систем эллиптического типа первого порядка в двумерных и трехмерных ограниченных областях;

построение в явном виде регуляризации производной решения, а также получение оценки условной устойчивости производной решения задачи Коши для систем эллиптического типа первого порядка в двумерных и трехмерных ограниченных областях.

Объект исследования. Уравнение Лапласа и систем эллиптического типа первого порядка факторизаций оператором Лапласа.

Предмет исследования. Нахождение решений некорректных задач при помощи функции Карлемана для уравнения Лапласа и систем эллиптического типа первого порядка факторизаций оператором Лапласа.

Методы исследования. В диссертации использованы методы действительного и комплексного анализа, функционального анализа, теории дифференциальных уравнений и уравнений математической физики.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

получены в явном виде регуляризированное решение и его производной, а также оценка условной устойчивости решения задачи Коши и его производной для уравнения Лапласа в двумерных и трехмерных ограниченных областях;

построена функция Карлемана для систем эллиптического типа первого порядка в двумерных и трехмерных ограниченных областях;

построено регуляризированное решение задачи Коши для систем эллиптического типа первого порядка в двумерных и трехмерных ограниченных областях;

получена оценка условной устойчивости решения задачи Коши для систем эллиптического типа первого порядка в двумерных и трехмерных ограниченных областях;

впервые построена в явном виде регуляризация производной решения, а также получена оценка условной устойчивости производной решения задача Коши для систем эллиптического типа первого порядка в двумерных и трехмерных ограниченных областях.

Практические результаты исследования состоят в определении класса корректности и применении полученных приближенных и точных решений некорректных задач в геофизике, геолога разведке и при исследовании потенциальных, гармонических электромагнитных полей;

Применение производной регуляризованного решения и оценка условной устойчивости производной приближенного значения решения к задачам теории механики, при изучении перемешения, деформации и напряжении.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств, использованием методов теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории некорректных задач.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научное значение результатов исследования заключается в том, что их можно использовать для дальнейшего развития теории линейных эллиптических систем первого порядка, а также теории некорректных задач.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что результаты диссертации можно применить к моделям геофизических исследований, в задачах распространения электромагнитных волн, задачи механики и подобных физических процессов описываемых при помощи некорректных задач для уравнения Лапласа и эллиптических систем уравнений первого порядка.

Внедрение результатов исследования. Результаты полученные для регуляризация решения задачи Коши для эллиптических систем первого порядка были внедрены на практике в следующих направлениях:

метод определения класса корректности поставленной некорректной задачи и получение в явном виде регуляризированного решения задачи Коши для систем эллиптического типа первого порядка в двумерных и трехмерных ограниченных областях были использованы в Самаркандском государственном университете (2012- 2016 г.) в рамках научного проекта ФА–Ф078 «Гидродинамические задачи фильтрования и фильтрации неоднородных жидкостей в пористых средах» (справка № 89.03.5067 от 23.12.2019 года, Министерство высщего и среднего специального образования Республики Узбекистан) для решения обратных некорректных задач при определении утечек суспензии в пористых средах. Полученные научные результати по некорректным задачам позволило определить значение параметров, характеризующих возникновение кольматации и всасывания в процессе подземного осаждения при утечке суспензий;

полученные результаты диссертационной работы относительно о регуляризация решения задачи Коши для эллиптических систем первого порядка были использованы в рамках зарубежных проекта «The stress state of the layered medium with the interface cracks» (справка от 2.11. 2019 года, Национальный университет Одесси имени И.И. Мечникова, Украина). Использование научных результатов позволило создать способы решения некорректные задачи, связанные с уравнениями эллиптического типа.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования обсуждены на 16 научно практических конференциях, в том числе на 10 международных и 6 республиканских научно- практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 24 научных работ, из них 8 статей входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей Аттестационной Комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе 2 опубликовано в зарубежных журналах и 6 в республиканских научных изданиях.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объём диссертации составляет 118 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и восстребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации названной «**Задача Коши для уравнения Лапласа**» построено регуляризованное решение задачи Коши и его производной, и получена оценка условной устойчивости решения задачи

Коши и его производной для уравнения Лапласа в двумерных и трехмерных ограниченных областях.

В первом параграфе первой главы приведены предварительные сведения и для полноты изложения приводятся известные результаты Ж. Адамара, Т. Карлемана, Г.М. Голузина и В.И. Крылова, М.М. Лаврентьева, А.Н. Тихонова, Ш. Ярмухамедова касающиеся построения функции Карлемана и регуляризованного решения задачи Коши для эллиптического уравнения и систем уравнений эллиптического типа. Здесь проведена истории корректных и некорректных задач, условно корректных задач, пример Адамара, конструкции функции Карлемана и постановка задача Коши для уравнения Лапласа.

Пусть $x=(x_1,x_2)$ и $y=(y_1,y_2)$ точки двумерного Евклидового пространства R^2 и G- ограниченная односвязная область в R^2 с границей ∂G, состоящей из компактной части $T=\{y_1\in R: a_1\le y_1\le b_1\}$ и гладкой дуги кривой $S: y_2=h(y_1)$ лежащей в полуплоскости $y_2>0$. $\overline{G}=G\cup\partial G,\quad \partial G=S\cup T$, $\partial/\partial n$ - оператор дифференцирования по внешней нормали к ∂G.

В области G рассмотрим уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y_2^2}=0\,. \tag{1}$$

Задача 1. Требуется найти гармоническую функцию $U(y)=U(y_1,y_2)\in C^2(G)\cap C^1(\overline{G})$, у которого известны значения на части S границы ∂G, т.е

$$U(y)\big|_S=f(y),\quad \left.\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right|_S=g(y), \tag{2}$$

здесь $f(y)$ и $g(y)$-заданные функции класса $C^1(S)$ и $C(S)$ соответственно.

Пусть $\sigma>0$. Определим при $\alpha>0$ в двухмерных и трёхмерных областях функции[1] $\Phi_\sigma(x,y)$ следующими равенствами.

$$-2\pi e^{\sigma x_2^2}\Phi_\sigma(x,y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{Im}\left[\frac{e^{\sigma w^2}}{w-x_2}\right]\frac{u\,du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}},\quad w=i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_2, \tag{3}$$

где $\alpha=|y'-x'|,\quad y'=(y_1,0),\quad x'=(x_1,0),\quad \alpha^2=s,\quad u\ge 0.$

$$-2\pi^2 e^{\sigma x_3^2}\Phi_\sigma(x,y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{Im}\left[\frac{e^{\sigma w^2}}{w-x_3}\right]\frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}},\ w=i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_3, \tag{4}$$

где $y=(y_1,y_2,y_3),\quad x=(x_1,x_2,x_3),\quad y'=(y_1,y_2),\quad x'=(x_1,x_2),\quad \alpha=|y'-x'|.$

Ш. Ярмухамедовым доказано, что функцию $\Phi_\sigma(x,y)$ определенная равенствами (3) и (4) представима при $\sigma>0$ в виде

$$\Phi_\sigma(x,y)=F_m(r)+g_\sigma(x,y), \tag{5}$$

где при $m=2$, $F_2(r)=\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r}$ и при $m=3$, $F_3(r)=\dfrac{1}{4\pi r}$, $g_\sigma(x,y)$ гармоническая функция по y в R^m $(m=2,3)$.

[1] Функция $\Phi_\sigma(x,y)$ которые определено равенствами (3) и (4) впервые построена Ш. Ярмухамедовым.

Поэтому для функции $U(y)=U(y_1,y_2)\in C^2(G)\cap C^1(\overline{G})$ и любого $x\in G$ справедлива следующая интегральная формула Грина:

$$U(x)=\int\limits_{\partial G}\left[\frac{\partial U}{\partial n}\Phi_\sigma(x,y)-U(y)\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]dS_y\,. \qquad (6)$$

Во втором параграфе первой главы рассмотрено формула продолжения и регуляризация по М.М. Лаврентьеву задачи Коши для уравнения Лапласа. Обозначим

$$U_\sigma(x)=\int\limits_{S}\left[g(y)\Phi_\sigma(x,y)-f(y)\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial n}\right]dS_y\,. \qquad (7)$$

Теорема 1. Пусть функция $U(y)=U(y_1,y_2)\in C^2(G)\cap C^1(\overline{G})$ на части S границы ∂G удовлетворяет условие (2) и на части T границы ∂G выполнено неравенство

$$|U(y)|+\left|\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right|\le M,\quad y\in T\,. \qquad (8)$$

Тогда для любых $x\in G$ и $\sigma>0$ справедливы оценки

$$|U(x)-U_\sigma(x)|\le\psi_2(\sigma)Me^{-\sigma x_2^2}\,,\quad \left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}\right|\le\varphi_i(\sigma,x_2)Me^{-\sigma x_2^2},\quad i=1,2, \qquad (9)$$

где M - положительное число, и

$$\psi_2(\sigma)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}}\right),\ \varphi_1(\sigma,x_2)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}x_2}+\frac{\sqrt{\sigma}}{2\sqrt{\pi}}+\frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma}x_2^2}\right),$$
$$\varphi_2(\sigma,x_2)=\left(\frac{\sqrt{\pi\sigma}x_2}{2}+\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}x_2}+\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}}+\frac{3}{2\sqrt{\pi\sigma}x_2^2}\right). \qquad (10)$$

Следствие 1. При каждом $x\in G$ справедливо равенство

$$\lim_{\sigma\to\infty}U_\sigma(x)=U(x)\,,\quad \lim_{\sigma\to\infty}\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}=\frac{\partial U(x)}{\partial x_i},\quad i=1,2.$$

Обозначим через $\overline{G}_\varepsilon$ множество

$$\overline{G}_\varepsilon=\left\{(x_1,x_2)\in G,\quad a>x_2\ge\varepsilon,\quad a=\max_T h(x_1),0<\varepsilon<a,\ \right\}.$$

Легко заметить, что множество $\overline{G}_\varepsilon\subset G$ является компактным.

Следствие 2. Если $x\in\overline{G}_\varepsilon$, то семейство функций $\{U_\sigma(x)\}$ и $\left\{\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}\right\}$ сходится равномерно при $\sigma\to\infty$,т.е:

$$U_\sigma(x)\ \rightrightarrows\ U(x)\,,\quad \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}\ \rightrightarrows\ \frac{\partial U(x)}{\partial x_i},\quad i=1,2\ .$$

Отметим, что множество $\Pi_\varepsilon=G\setminus\overline{G}_\varepsilon$ служить пограничным слоем данной задачи, как в теории сингулярных возмущений, где нет равномерной сходимости.

Замечание 1. Первая оценка в (9) доказано Ш. Ярмухамедовым.

В третьем параграфе первой главы предлагается оценка условной устойчивости решения задача Коши, а также оценка условной устойчивости производной решения задача Коши для уравнения Лапласа в двумерных ограниченных областях.

Предположим, что кривая S задано уравнением $y_2 = h(y_1), \quad y_1 \in [a_1, b_1]$ где h однозначная функция, удовлетворяющая условиям Ляпунова. Положим

$$\max_T h(y_1) = a, \quad b = \max_T \sqrt{1 + h'^2(y_1)} .$$

Обозначим через E множество

$$E = \left\{ U(y) \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G}) : |U(y)| + |gradU(y)| \le M, M > 0, y \in T \right\}.$$

Теорема 2. (Оценка условной устойчивости задачи Коши). Пусть функция $U(y) \in E$ удовлетворяет уравнение Лапласа (1), и на части S границы области G выполняется неравенство

$$|U(y)| + \left| \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right| < \delta, \quad y \in S . \tag{11}$$

Тогда для любого $x \in G$ и $\sigma > 0$ справедливы оценки

$$|U(x)| \le 2\psi(\sigma, x_2) M^{1 - x_2^2/a^2} \delta^{x_2^2/a^2}, \quad \left| \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} \right| \le 2\mu_i(\sigma, x_2) M^{1 - x_2^2/a^2} \delta^{x_2^2/a^2}, i = 1, 2, \tag{12}$$

где $0 < \delta \le M e^{-\sigma a^2}$,

$$\psi(\sigma, x_2) = \max_S (\psi^2(\sigma, x_2), \psi_2(\sigma)), \psi^2(\sigma, x_2) = \left(\frac{b\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}} + ab + \frac{b}{2\sqrt{\pi\sigma}(a - x_2)} + \frac{2\sqrt{\sigma}ab}{\sqrt{\pi}} \right), \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \nu_1(\sigma, x_2) = & \left(\frac{b + 3ab\sqrt{\pi\sigma}}{4} + \frac{2\sigma ab + 4b\sqrt{\sigma} + \sigma a^2 b\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} + \frac{b\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}(a - x_2)} + \right. \\ & \left. + \frac{ab\sqrt{\pi\sigma}}{(a - x_2)^2} + \frac{2ab\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}(a - x_2)} + \frac{5b}{\sqrt{\pi\sigma}(a - x_2)^2} \right), \ \mu_1(\sigma, x_2) = \max_S (\nu_1(\sigma, x_2), \varphi_1(\sigma, x_2)), \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \nu_2(\sigma, x_2) = & \left(\frac{bx_2\sqrt{\pi\sigma} + 2\sigma abx_2}{2} + \frac{b\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}(a - x_2)} + 3ab\sqrt{\pi\sigma} + \frac{2b\sqrt{\sigma}x_2}{\sqrt{\pi}(a - x_2)} + \frac{4b}{\sqrt{\pi\sigma}(a - x_2)^2} \right), \\ & \mu_2(\sigma, x_2) = \max_S (\nu_2(\sigma, x_2), \varphi_2(\sigma, x_2)). \end{aligned} \tag{15}$$

Обозначим

$$U_{\sigma\delta}(x) = \int_S \left[g_\delta(y) \Phi_\sigma(x, y) - f_\delta(y) \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial n} \right] dS_y. \tag{16}$$

Теорема 3. Пусть функция $U(y) \in E$ на части S границы ∂G удовлетворяет условие (2) и функции $f(y)$, $g(y)$ заменены их приближениями $f_\delta(y)$, $g_\delta(y)$ с заданным уклонением $\delta > 0$,

$$\max_S |f(y) - f_\delta(y)| < \delta, \quad \max_S |g(y) - g_\delta(y)| < \delta .$$

Тогда для любого $x \in G$ и $\sigma > 0$ справедливы оценки

$$|U(x) - U_{\sigma\delta}(x)| \le 2\psi(\sigma, x_2) M^{1 - x_2^2/a^2} \delta^{x_2^2/a^2}, \quad \left| \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i} \right| \le 2\mu_i(\sigma, x_2) M^{1 - x_2^2/a^2} \delta^{x_2^2/a^2}. \tag{18}$$

Следствие 3. При каждом $x \in G$ справедливо равенство

$$\lim_{\delta \to 0} U_{\sigma\delta}(x) = U(x), \quad \lim_{\delta \to 0} \frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2.$$

Следствие 4. Если $x \in \overline{G}_\varepsilon$, то семейство функций $\{U_{\sigma\delta}(x)\}$ и $\left\{\dfrac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}\right\}$ сходится равномерно при $\delta \to 0$, т.е.

$$U_{\sigma\delta}(x) \rightrightarrows U(x), \quad \frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i} \rightrightarrows \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1,2 .$$

Замечание 2. Первая оценка в (18) доказано Ш. Ярмухамедовым.

В четвёртом параграфе первой главы используя метод Ш. Ярмухамедова, рассматривается конструкция функции Карлемана, регуляризированные решение и оценка условной устойчивости решении задача Коши и его производной для уравнения Лапласа в трехмерной ограниченной области.

Пусть R^3 вещественное евклидово пространство и $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3$, $r = |y - x|$.

G-ограниченная односвязная область в R^3 с границей ∂G, состоящей из компактной связной части T плоскости $y_3 = 0$ и гладкого куска поверхности S Ляпунова, лежащей в полупространстве $y_3 > 0$. $\overline{G} = G \cup \partial G$, $\partial G = S \cup T$, $\partial / \partial n$- оператор дифференцирования по внешней нормали к ∂G.

В области G рассмотрим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_3^2} = 0 . \tag{19}$$

Задача 2. Требуется найти гармоническую функцию $U(y) = U(y_1, y_2, y_3) \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ у которого известны значения на части S границы ∂G, т.е

$$U(y)\big|_S = f(y), \quad \left.\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right|_S = g(y), \tag{20}$$

здесь $f(y)$ и $g(y)$ - заданные функции класса $C^1(S)$ и $C(S)$ соответственно. Пусть $\sigma > 0$. Определим при $\alpha > 0$ функцию $\Phi_\sigma(x, y)$ равенством (4). С учетом (5) для функция $U(y) = U(y_1, y_2, y_3) \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ и любого $x \in G$ справедлива интегральная формула Грина

$$U(x) = \int_{\partial G} \left[\frac{\partial U}{\partial n} \Phi_\sigma(x, y) - U(y) \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial n} \right] dS_y \; . \tag{21}$$

Положим

$$U_\sigma(x) = \int_S \left[g(y)\Phi_\sigma(x, y) - f(y) \frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial n} \right] dS_y . \tag{22}$$

Теорема 4. Пусть функция $U(y) = U(y_1, y_2, y_3) \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ на части S границы ∂G удовлетворяет условие (20) и на части T границы ∂G выполнено неравенство

$$|U(y)| + \left| \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right| \le M, \quad y \in T . \tag{23}$$

Тогда для любых $x \in G$ и $\sigma > 0$ справедливы оценки

$$\left|U(x)-U_\sigma(x)\right| \le \psi_3(\sigma) M e^{-\sigma x_3^2}, \tag{24}$$

$$\left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}\right| \le \theta_i(\sigma, x_3) M e^{-\sigma x_3^2}, \quad i=1,2,3, \tag{25}$$

где M - заданное положительное число и

$$\psi_3(\sigma)=\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}}+\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\sigma}}+\frac{1}{2\pi}\right), \tag{26}$$

$$\begin{gathered}\theta_1(\sigma, x_3)=\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{16\sigma x_3^2}+\frac{5\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}}+\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi} x_3^2}\right), \quad \theta_2(\sigma, x_3) \equiv \theta_1(\sigma, x_3), \\ \theta_3(\sigma, x_3)=\left(\frac{1+2\sqrt{\sigma}}{2\pi}+\frac{1}{4\sqrt{\sigma\pi} x_3}+\frac{3\sqrt{\sigma}+4\sigma\sqrt{\sigma} x_3^2}{\sqrt{\pi}}+\frac{27 x_3+16}{27\sqrt{\sigma\pi} x_3^3}\right).\end{gathered} \tag{27}$$

Следствие 5. При каждом $x \in G$ справедливо равенство

$$\lim_{\sigma\to\infty} U_\sigma(x)=U(x), \quad \lim_{\sigma\to\infty}\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}=\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i=1,2,3.$$

Обозначим через $\overline{G}^1_\varepsilon$ множество

$$\overline{G}^1_\varepsilon=\left\{(x_1, x_2, x_3)\in G, \quad a > x_3 \ge \varepsilon, \quad a=\max_T h(x_1, x_2), 0<\varepsilon<a, \right\}.$$

Легко заметить, что множество $\overline{G}^1_\varepsilon \subset G$ является компактным.

Следствие 6. Если $x \in \overline{G}^1_\varepsilon$, то семейство функций $\{U_\sigma(x)\}$ и $\left\{\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}\right\}$

$$U_\sigma(x) \rightrightarrows U(x), \quad \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} \rightrightarrows \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i=1,2,3,$$

сходится равномерно при $\sigma \to \infty$.

Здесь множества $\Pi^1_\varepsilon = G \setminus \overline{G}^1_\varepsilon$ служить пограничным слоем данной задачи.

Замечание 3. Оценка (24) доказано Ш. Ярмухамедовым.

Предположим теперь, что поверхность S задана уравнением $y_3=h(y_1, y_2),\ (y_1, y_2)\in T$, где h однозначная функция такая, что поверхность S является поверхностью Ляпунова. Положим

$$a=\max_T h(y_1, y_2), \ b=\max_T\sqrt{1+h'^2_{y_1}(y_1, y_2)+h'^2_{y_2}(y_1, y_2)}. \tag{28}$$

Обозначим через E_1 множество

$$E_1=\left\{U(y)=U(y_1, y_2, y_3)\in C^2(G)\cap C^1(\overline{G}): |U(y)|+|gradU(y)| \le M, M>0, y\in T\right\}.$$

Теорема 5. (Оценка условной устойчивости задачи Коши). Пусть функция $U(y)\in E_1$ удовлетворяет уравнение Лапласа (19), и на части S границы области G выполняется неравенство

$$|U(y)|+\left|\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right| < \delta, \quad y \in S. \tag{29}$$

Тогда для любого $x \in G$ и $\sigma > 0$ справедливы оценки

$$|U(x)| \le 2\Psi(\sigma, x_3) M^{1-x_3^2/a^2}\delta^{x_3^2/a^2}, \quad \left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}\right| \le 2\phi_i(\sigma, x_3) M^{1-x_3^2/a^2}\delta^{x_3^2/a^2}, \quad i=1,2,3, \tag{30}$$

где

$$0 < \delta \le Me^{-\sigma a^2},\ \Psi(\sigma, x_3) = \max_S(\psi^3(\sigma, x_3), \psi_3(\sigma)),$$

$$\phi_1(\sigma, x_3) = \max_S(\theta_1(\sigma, x_3), v(\sigma, x_3)),\ \phi_2(\sigma, x_3) = \max_S(\theta_2(\sigma, x_3), v(\sigma, x_3)),$$

$$\phi_3(\sigma, x_3) = \max_S(\theta_3(\sigma, x_3), \mu(\sigma, x_3)),$$

$$\psi^3(\sigma, x_3) = \left(\frac{4ab\sqrt{\sigma} + 4a^2 b\sqrt{\pi}\sigma + b\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}} + \frac{b\pi + b}{4\sqrt{\pi\sigma}(a - x_3)} + \right.$$
$$\left. + \frac{13ab\pi\sigma + 24ab\sigma + 2b}{4\sqrt{\pi\sigma}} + \frac{4a^2 b\sigma + b + 2ab}{2\pi} \right), \tag{31}$$

$$v(\sigma, x_3) = \left[\sqrt{\sigma}\left(\frac{24b + 61ab + 32a^2 b}{2\sqrt{\pi}} + \frac{21ab(a + x_3)}{\sqrt{\pi}(a - x_3)^2} + \frac{ab}{\sqrt{\pi}} + \frac{13ab\sqrt{\pi}}{8} \right) + \right.$$
$$+ \sigma\left(\frac{44ab + 8\sigma a^3 b + 10a^2 b + 16a^3 b}{\pi} + \frac{5ab\pi + 36ab + 16\sigma + 8b}{8\sqrt{\pi\sigma}(a - x_3)} + \frac{12ab(a + x_3)}{\sqrt{\pi\sigma}} + a^2 b \right) + \tag{32}$$
$$\left. + \frac{\sigma\sqrt{\sigma}(24ab + 62a^2 b)}{\sqrt{\pi}} + \frac{b\pi + 4\pi ab}{8\sqrt{\pi\sigma}(a - x_3)} + \frac{13b + 55\sigma ab}{\sqrt{\pi\sigma}(a - x_3)^2} + \frac{4\sigma^3 a^2 b + b}{\sqrt{\pi\sigma}} + \frac{b\pi + 64ab}{4\pi} \right],$$

$$\mu(\sigma, x_3) =$$
$$= \left[\sqrt{\sigma}\left(\frac{32b + 16ab + 4abx_3}{2\sqrt{\pi}} + \frac{40ab + 8\pi ab + 2\pi\sqrt{\pi}ab(a + x_3)}{2\sqrt{\pi}(a - x_3)^2} + \frac{6ab + 8b}{\sqrt{\pi}(a - x_3)} \right) + \right.$$
$$+ \sigma\sqrt{\sigma}\left(\frac{16ab + 12a^2 b}{\sqrt{\pi}} + \frac{40abx_3}{2\sqrt{\pi}} + \frac{4abx_3}{\sqrt{\pi}(a - x_3)} \right) + \frac{\sigma(20ab + 4a^2 bx_3 + 2abx_3)}{\pi} + \tag{33}$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\left(\frac{13b}{2\sqrt{\pi}(a - x_3)^2} + \frac{ab}{2\sqrt{\pi}(a - x_3)} \right) \right].$$

Здесь $\psi_3(\sigma)$ определяется по формуле (26), $\theta_1(\sigma, x_3)$, $\theta_2(\sigma, x_3)$ и $\theta_3(\sigma, x_3)$ определяется по формуле (27).

Положим

$$U_{\sigma\delta}(x) = \int_S \left[g_\delta(y)\Phi_\sigma(x, y) - f_\delta(y)\frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial n} \right] dS_y. \tag{34}$$

Теорема 6. Пусть функция $U(y) \in E_1$ на части S границы области G удовлетворяет условие (20) и функции $f(y)$, $g(y)$ заменены их приближениями $f_\delta(y)$, $g_\delta(y)$ с заданным уклонением $\delta > 0$:

$$\max_S |f(y) - f_\delta(y)| < \delta, \quad \max_S |g(y) - g_\delta(y)| < \delta.$$

Тогда для любого $x \in G$ и $\sigma > 0$ справедливы оценки

$$|U(x) - U_{\sigma\delta}(x)| \le 2\Psi(\sigma, x_3) M^{1 - x_3^2/a^2} \delta^{x_3^2/a^2}, \quad 0 < \delta \le Me^{-\sigma a^2}, \tag{35}$$

$$\left| \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i} \right| \le 2\phi_i(\sigma, x_3) M^{1 - x_3^2/a^2} \delta^{x_3^2/a^2}, i = 1, 2, 3. \tag{36}$$

Следствие 7. При каждом $x \in G$ справедливо равенство

$$\lim_{\delta \to 0} U_{\sigma\delta}(x) = U(x), \quad \lim_{\delta \to 0} \frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Следствие 8. Если $x \in \overline{G}^1_\varepsilon$, то семейство функций $\{U_{\sigma\delta}(x)\}$ и $\left\{\dfrac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}\right\}$

$$U_{\sigma\delta}(x) \rightrightarrows U(x), \quad \frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i} \rightrightarrows \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1,2,3$$

сходится равномерно при $\delta \to 0$.

Замечание 4. Оценка (35) доказано Ш. Ярмухамедовым.

Во второй главы диссертации названной «**Задача Коши для линейных эллиптических систем первого порядка в ограниченной двумерной области**» найдены регуляризированные решения и оценки условной устойчивости решения задачи Коши и его производной для систем уравнений эллиптического типа первого порядка в двумерной ограниченной области.

В первом параграфе второй главы рассматривается линейные эллиптические системы первого порядка с постоянными коэффициентами.

Пусть $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ точки двумерного Евклидового пространства R^2, и $x^T = (x_1, x_2)^T$ - транспонированный вектор x.

Введем следующие обозначения.

$$y' = (y_1, 0), \quad x' = (x_1, 0), r = |y - x|, \quad \alpha = |y' - x'|,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^T, \quad U(x) = (U_1(x), U_2(x), ..., U_n(x))^T, u^0 = (1,1,...,1) \in R^n, n \geq 2,$$

$E(x)$ - диагональная матрица размерности $(n \times l)$, $n,l \geq 2$.

Через $A_{l\times n}(x)$ обозначим класс матриц $D(x^T)$, с элементами состоящими из линейных форм с постоянными коэффициентами из C которые удовлетворяющее условие:

$$D^*(x^T)D(x^T) = E(|x|^2 u^0), \tag{37}$$

где $D^*(x^T)$ - сопряженная матрица к $D(x^T)$.

В двумерной ограниченной области G, ($\partial G = S \cup Q, Q = \{y_1 \in R, a_1 \leq y_1 \leq b_1\}$) рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида:

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(x) = 0, \tag{38}$$

где $D(x^T) \in A_{l\times n}(x)$.

Если функция $U(x) \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$ является решением системы (38), тогда для любого $x \in G$ справедливо следующее интегральное представление:

$$U(x) = \int_{\partial G} N_\sigma(x,y)U(y)dS_y, \tag{39}$$

где

$$N_\sigma(x,y) = \left(E(\Phi_\sigma(x,y)u^0)D^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)D\left(t^T\right), \tag{40}$$

$\Phi_\sigma(x,y)$ определяется из (3).

Задача 3. Пусть $U(x)\in C^1(G)\cap C(\overline{G})$ удовлетворяет систему (38) в области G и на части кривой S границы области задано значение вектор – функции $U(x)$, т.е.

$$U(x)\big|_S = f(x), \qquad (41)$$

где $f(x)$ - непрерывная функция, заданная на части S границы области G.

Требуется продолжить $U(x)$ в G, используя условие (41).

Обозначим

$$U_\sigma(x)=\int_S N_\sigma(x,y)U(y)dS_y, \quad x\in G\,. \qquad (42)$$

Теорема 7. Пусть вектор - функция $U(x)$ класса $C^1(G)\cap C(\overline{G})$ является решением системы (38) и на части S границы ∂G удовлетворяет условие (41) а на части Q границы ∂G выполнено неравенство

$$|U(y)|\le M, \quad y\in Q\ . \qquad (43)$$

Тогда для любого $x\in G$ и $\sigma>0$ справедливы оценки

$$|U(x)-U_\sigma(x)|\le \psi_2(\sigma,x_2)Me^{-\sigma x_2^2}, \left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}\right|\le \beta_i(\sigma,x_2)Me^{-\sigma x_2^2}, \quad i=1,2, \qquad (44)$$

где M - заданное положительное число, $c=const$ и

$$\psi_2(\sigma,x_2)=\frac{c}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{\sigma\pi}x_2}+1\right)\beta_1(\sigma,x_2)=c\left(\frac{3\sqrt{\sigma}}{2\sqrt{\pi}}+\frac{2}{\sqrt{\pi\sigma}x_2^2}\right),\ \ \beta_2(\sigma,x_2)=c\left(\frac{2\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}}+\frac{3}{2x_2^2\sqrt{\pi\sigma}}\right).$$

Здесь также имеет место следствие 1 и следствие 2.

В третьем параграфе второй главы получена оценка условной устойчивости решения, а также оценки условной устойчивости производной решения задача Коши для систем эллиптического типа первого порядка в двумерных ограниченных областях.

Теорема 8. Пусть вектор - функция $U(x)\in C^1(G)\cap C(\overline{G})$ удовлетворяет системы (38) и на части Q границы ∂G выполнено неравенство (43), а на части S

$$|U(y)|\le\delta, \quad y\in S, \quad 0<\delta\le Me^{-\sigma a^2}\,. \qquad (45)$$

Тогда для любого $x\in G$ и $\sigma>0$ справедливы оценки

$$|U(x)|\le 2\theta(\sigma,x_2)M^{1-x_2^2/a^2}\delta^{x_2^2/a^2}, \left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}\right|\le 2\tau_i(\sigma,x_2)M^{1-x_2^2/a^2}\delta^{x_2^2/a^2}, \ \ i=1,2\,. \qquad (46)$$

Положим

$$U_{\sigma\delta}(x)=\int_S N_\sigma(x,y)U(y)dS_y, \quad x\in G\,. \qquad (47)$$

Теорема 9. Пусть вектор - функция $U(x)$ являющееся решением системы (38) из класса $C'(G)\cap C(\overline{G})$ удовлетворяет условие (41) и выполняется неравенство (43), а функции $f(x)$ заменено ее приближением $f_\delta(x)$ из класса $C(S)$ с заданным уклонением $\delta>0$ т.е.

$$\max_S |f(x)-f_\delta(x)|<\delta, \quad 0<\delta\le Me^{-\sigma a^2}\,.$$

Тогда для любого $x\in G$ справедливы оценки

$$\left|U(x)-U_{\sigma\delta}(x)\right| \le \theta(\sigma,x_2)M^{1-x_2^2/a^2}\delta^{x_2^2/a^2}, \left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}\right| \le \tau_i(\sigma,x_2)M^{1-x_2^2/a^2}\delta^{x_2^2/a^2}, \quad (48)$$

где $\psi^2(\sigma,x_2)=\left(\frac{b}{2\sqrt{\pi\sigma}(a-x_2)}+\frac{2\sqrt{\sigma}ab}{\sqrt{\pi}}\right)c, \quad \theta(\sigma,x_2)=\max_S(\psi^2(\sigma,x_2),\psi_2(\sigma,x_2)), c=const$

$$m_1(\sigma,x_2)=\left(\frac{4b\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}}+\frac{2ab\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}(a-x_2)}+\frac{5b}{\sqrt{\pi\sigma}(a-x_2)^2}\right)c, \tau_1(\sigma,x_2)=\max_S(m_1(\sigma,x_2),\beta_1(\sigma,x_2)),$$

$$m_2(\sigma,x_2)=\left(\frac{2b\sqrt{\sigma}x_2}{\sqrt{\pi}(a-x_2)}+\frac{4b\sqrt{\sigma}x_2}{\sqrt{\pi\sigma}(a-x_2)^2}\right)c, \quad \tau_2(\sigma,x_2)=\max_S(m_2(\sigma,x_2),\beta_2(\sigma,x_2)),$$

$\psi_2(\sigma,x_2)$, $\beta_1(\sigma,x_2)$ и $\beta_2(\sigma,x_2)$ определяется из теоремы 7.
Здесь также имеет место следствие 3 и следствие 4.

В третьей главы диссертации названной « **Задача Коши для линейных эллиптических систем первого порядка в трехмерной ограниченной области»** построены с использованием функции Карлемана регуляризированное решение задачи Коши для систем уравнений эллиптического типа первого порядка и получена оценка условной устойчивости решения задача Коши в трёхмерной ограниченной области.

Пусть $x=(x_1,x_2,x_3)$ и $y=(y_1,y_2,y_3)$ точки трёхмерного Евклидового пространства R^3, и $x^T=(x_1,x_2,x_3)^T$ - транспонированный вектора x.

В ограниченной области $G\in R^3$ ($\partial G=S\cup Q$), рассмотрим систему (38).

Если $u(x)\in C^1(G)\cap C(\bar{G})$ является решением системы (38), тогда верно интегральное представление (39), где в равенстве (40) функция $\Phi_\sigma(x,y)$ определяется из (4).

Задача 4. Требуется найти функцию $U(x)\in C^1(G)\cap C(\bar{G})$ являющиеся решением системы (38), у которого известно значение на части S границы области G т.е.

$$U(x)\big|_S = f(x), \quad (49)$$

относительно неизвестной функции $U(x)=\left(U_1(x),U_2(x),...,U_n(x)\right)^T$; $n\ge 3$, здесь, $f(x)$ - непрерывная функция, заданная на части S границы области G.
Вводим обозначение (42), где $\Phi_\sigma(x,y)$ определяется из (4).

Теорема 10. Пусть $U(x)$ вектор- функция из класса $C^1(G)\cap C(\bar{G})$, является решением системы (38) на части S границы ∂G удовлетворяющее начальному условие (49) и на части Q границы ∂G выполнено неравенство

$$|U(y)|\le M, \quad M>0, \quad y\in Q. \quad (50)$$

Тогда для любого $x\in G$ и $\sigma>0$ справедливы оценки

$$\left|U(x)-U_\sigma(x)\right|\le\psi_3(\sigma,x_3)Me^{-\sigma x_3^2}, \quad \left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}\right|\le\omega_i(\sigma,x_3)Me^{-\sigma x_3^2}, \quad i=1,2,3,$$

где

$$\psi_3(\sigma,x_3)=c\left(\frac{5}{2\pi}+\frac{1}{8\sigma x_3^2}+\frac{1}{4x_3\sqrt{\sigma\pi}}\right),\ \omega_1(\sigma,x_3)=c\left(\frac{13\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}}+\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}}+\frac{13}{4\sqrt{\sigma\pi}x_3^2}+\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}x_3^2}\right),$$

$$\omega_2(\sigma,x_3)=\omega_1(\sigma,x_3),\ \omega_3(\sigma,x_3)=c\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{\pi}+\frac{\sqrt{\sigma}(11+4\sigma x_3^2)}{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{\sqrt{\sigma\pi}}\left(\frac{27x_3+16}{27x_3^3}\right)\right), c=const.$$

Здесь имеет место следствие 5 и следствие 6.

В втором параграфе третей главы получена оценка условной устойчивости решения, а также оценка условной устойчивости производной решения задача Коши для систем эллиптического типа первого порядка в трёхмерных ограниченных областях.

Теорема 11. Пусть $U(x)$ вектор - функция из класса $C^1(G)\cap C(\overline{G})$, является решением системы (38) и на части Q границы ∂G выполняется условие (50) , а на части S границы ∂G неравенство

$$|U(y)|\le\delta,\quad y\in S,\quad 0<\delta\le Me^{-\sigma a^2}. \tag{51}$$

Тогда для любого $x\in G$ и $\sigma>0$ справедливы оценки

$$|U(x)|\le 2\varphi(\sigma,x_3)M^{1-x_3^2/a^2}\delta^{x_3^2/a^2},\left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}\right|\le 2v_i(\sigma,x_3)M^{1-x_3^2/a^2}\delta^{x_3^2/a^2},\quad i=1,2,3.$$

Вводим обозначение (47), где $\Phi_\sigma(x,y)$ определяется из (4).

Теорема 12. Пусть вектор - функция $U(x)$ являющееся решением системы (38) из класса $C^1(G)\cap C(\overline{G})$, на части S границы ∂G удовлетворяет условие (49) и выполняется неравенство (50). Также заданы приближения $f_\delta(x)$ класса $C(S)$ с заданным уклонением $\delta>0$ функции $f(x)$ т.е. $\max\limits_S|f(x)-f_\delta(x)|<\delta,\ 0<\delta\le Me^{-\sigma a^2}$.

Тогда для любого $x\in G$ и $\sigma>0$ справедливы оценки

$$|U(x)-U_{\sigma\delta}(x)|\le\varphi(\sigma,x_3)M^{1-x_3^2/a^2}\delta^{x_3^2/a^2},\quad \left|\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}\right|\le v_i(\sigma,x_3)M^{1-x_3^2/a^2}\delta^{x_3^2/a^2}, i=1,2,3.$$

где

$$\varphi(\sigma,x_3)=\max_S(\psi_3(\sigma,x_3),q(\sigma,x_3)),\ v_1(\sigma,x_3)=\max_S(\omega_1(\sigma,x_3),k(\sigma,x_3)),\ c=const,$$

$$q(\sigma,x_3)=c\left(\frac{4ab\sqrt{\sigma}+4a^2b\sqrt{\pi}\sigma+b\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}}+\frac{b\pi+b}{4\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)}+\frac{13ab\pi\sigma+24ab\sigma}{4\sqrt{\pi\sigma}}+\frac{4a^2b\sigma+b}{2\pi}\right),$$

$$k(\sigma,x_3)=c\left[\sqrt{\sigma}\left(\frac{24b+61ab+32a^2b}{2\sqrt{\pi}}+\frac{21ab(a+x_3)}{\sqrt{\pi}(a-x_3)^2}\right)+\sigma\sqrt{\sigma}\left(\frac{62a^2b+24ab}{\sqrt{\pi}}\right)+\right.$$

$$+\sigma\left(\frac{44ab+8\sigma a^3b+10a^2b+16a^3b}{\pi}+\frac{5ab\pi+36ab+16\sigma+8b}{8\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)}+\frac{12ab(a+x_3)}{\sqrt{\pi\sigma}}\right)+$$

$$\left.+\frac{16ab}{\pi}+\frac{\pi ab}{2\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)}+\frac{13b+55\sigma ab}{\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)^2}+\frac{4\sigma^3a^2b+b}{\sqrt{\pi\sigma}}\right].$$

$$v_2(\sigma,x_3)=\max_S(\omega_2(\sigma,x_3),k(\sigma,x_3)),\ v_3(\sigma,x_3)=\max_S(\omega_3(\sigma,x_3),p(\sigma,x_3)).$$

$$p(\sigma, x_3) = c\left[\sigma\sqrt{\sigma}\left(\frac{16ab+12a^2b}{\sqrt{\pi}} + \frac{40abx_3}{2\sqrt{\pi}} + \frac{4abx_3}{\sqrt{\pi}(a-x_3)}\right) +\right.$$

$$+\sqrt{\sigma}\left(\frac{28b+10ab}{2\sqrt{\pi}} + \frac{40ab+8\pi ab+2\pi\sqrt{\pi}ab(a+x_3)}{2\sqrt{\pi}(a-x_3)^2} + \frac{6ab+8b}{\sqrt{\pi}(a-x_3)} + \frac{2abx_3}{\sqrt{\pi}}\right) +$$

$$\left. + \frac{\sigma(20ab+4a^2bx_3)}{\pi} + \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\left(\frac{13b}{2\sqrt{\pi}(a-x_3)^2} + \frac{ab}{2\sqrt{\pi}(a-x_3)}\right)\right].$$

Здесь имеет место следствие 7 и следствие 8.

Пользуясь случаем выражаю искренную благодарность моим дорогим учителям профессору Хасанову Акназару Бекдурдиевичу и доценту Зиядулло Маликову.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена изучению решения задачи Коши для уравнения Лапласа и систем эллиптического типа первого порядка факторизаций оператором Лапласа.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Получены в явном виде регуляризированное решение и его производной, а также оценка условной устойчивости решения задачи Коши и его производной для уравнения Лапласа в двумерных и трехмерных ограниченных областях;

2. Построена функция Карлемана для систем эллиптического типа первого порядка в двумерных и трехмерных ограниченных областях;

3. Построено регуляризированное решение задачи Коши для систем эллиптического типа первого порядка в двумерных и трехмерных ограниченных областях;

4. Получена оценка условной устойчивости решения задачи Коши для систем эллиптического типа первого порядка в двумерных и трехмерных ограниченных областях;

5. Впервые построена в явном виде регуляризация производной решения, а также получена оценка условной устойчивости производной решения задача Коши для систем эллиптического типа первого порядка в двумерных и трехмерных ограниченных областях.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) PhD 27.06.2017.FM.02.01
SAMARKAND STATE UNIVERSITY

SAMARKAND STATE UNIVERSITY

TURSUNOV FARKHOD RUZIKULOVICH

REGULARIZATION OF THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR FIRST ORDER ELLIPTIC SYSTEMS

01.01.02 – Differential Equations and Mathematical Physics

ABSTRACT OF DISSERTATION
of the Doctor of philosofhy (PhD) on physical and matematical sciences

Samarkand – 2020

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2018.4.PhD/FM289.

Dissertation has been prepared at Samarkand State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website (www.samdu.uz) and the «Ziyonet» information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Khasanov Aknazar Bekdurdievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Takhirov Jozil Ostonovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Durdiyev Durdimurod Qalandarovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Leading organization:	**Urganch State University**

Defense will take place «_____» _________ 2020 at ___ at the meeting of Scientific Council number PhD.27.06.2017.FM.02.01 at Samarkand State University.(Address:University Boulevard 15, Samarkand city, 140104, Uzbekistan, Ph.: (99866)231-06-32, fax: (99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Samarkand state University (is registered № _____) (Address:University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (99866) 231-06-32).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2020 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2020 year)

A.S. Soleev
Chairman of scientific council on award of scientific degree, D.F.M.S., professor

A.M. Khalkhuzhaev
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degree, D.F.M.S.

A.X. Begmatov
Vice- Chairman of scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degree, D.F.M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of the PhD thesis)

The aim of the research work is construct in an explicit form a regularized solution, as well as to obtain an estimate of the conditional stability of the solution of the Cauchy problem for the Laplace equation and first-order elliptic systems.

The objects of the research work are Laplace equation and first-order factorization elliptic systems of the Laplace operator.

Scientific novelty of the research work is as follows:

a regularized solution is explicitly obtained, as well as the conditional stability estimate for the solution of the Cauchy problem and their derivative for the Laplace equation in two-dimensional and three-dimensional bounded domains;

the Carleman function is constructed for first-order elliptic systems in two-dimensional and three-dimensional bounded domains;

a regularized solution to the Cauchy problem for first-order elliptic systems in two-dimensional and three-dimensional bounded domains is constructed;

an estimate of the conditional stability of the solution of the Cauchy problem for first-order elliptic systems in the two-dimensional and three-dimensional bounded domains is obtained;

the regularization of the derivative solution was first constructed explicitly, and the conditional stability of the derivative solution was estimated for the Cauchy problem for the first-order elliptic systems in the two-dimensional and three-dimensional bounded domains;

Implementation of the research results. The results obtained for the regularization of the solution of the Cauchy problem for the elliptic systems of the first order were put into practice in the following directions:

a method for determining the correctness class of a posed ill-posed problem and obtaining an explicitly regularized solution of the Cauchy problem for first-order elliptic systems in two-dimensional and three-dimensional restricted domains were used at Samarkand State University (2012-2016) as part of the research project FA – Ф078 «Hydrodynamic tasks of filtering and filtering inhomogeneous liquids in porous media» (Ministry of Higher and Secondary Special Education of the Republic of and Uzbekistan, a certificate 23.12. 2019 № 89.03.5067) for solving inverse incorrect problems in determining suspension leaks in porous media. The obtained scientific results on incorrect tasks allowed us to determine the value of the parameters characterizing the occurrence of colmatization and absorption in the process of underground deposition during leakage of suspensions;

obtaining the results of the thesis on the regularization of the solution of the Cauchy problem for first-order elliptic systems were used in the frame work of the foreign project “The stress state of the layered medium with the interface cracks” (National University of Odessa named I.I. Mechnikov, in Ukraine, a certificate 2 November 2019). The use of scientific results allowed us to create methods for solving incorrect problems associated with equations of elliptic type.

The structure and volume of the thesis. The dissertation work consists: introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the dissertation is 118 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. Турсунов Ф. Р. Задачи Коши для линейных эллиптических систем первого порядка с постоянными коэффициентами в ограниченной области // Узбекский математический журнал. - Ташкент 2002. -№3-4, С. 71-76 (01.00.00; № 6)

2. Турсунов Ф. Р., З. Маликов. О задача Коши для линейных систем эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами в неограниченной области // Узбекский математический журнал. - Ташкент 2005. -№1, С. 53-63 (01.00.00; № 6).

3. Турсунов Ф. Р. Регуляризация задачи Коши для линейных систем уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами в неограниченной области // Узбекский математический журнал. - Ташкент 2017. -№1, С. 129-140 (01.00.00; № 6).

4. Ф. Р. Турсунов. Интегральная формула для систем эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами в неограниченной области // Научный вестник. – Самарканд 2018г. №1(107). С.8-13, (01.00.00; № 2).

5. А.Б. Хасанов, З. Маликов, Ф. Р. Турсунов. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Научный вестник. – Самарканд 2019 г. №1(113). С.31-35. (01.00.00; № 2).

6. F. R. Tursunov. Regularization of the Cauchy problem forthe first-order linear elliptic systems with constant coefficients in a bounded domain // International Scientifically Journal Theoretical &Applied Science. http://T-Science.org, DOI: 10.15863/ TAS, Issue:09, Volume: 77, 2019. Pp.101-106 (Journal Impact Factor, JIFACTOR=1.5).

7. Хасанов А. Б., Турсунов Ф. Р. Задача Коши для трехмерного уравнения Лапласа // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. С.7-10, №2-2019. (01.00.00;№ 7).

8. Хасанов А. Б., Турсунов Ф. Р. О Задаче Коши для уравнения Лапласа // Уфимский математический журнал. С.92-106, Т. 11, №4-2019. (№3. Scopus IF= 0, 35).

II бўлим (II часть; II part)

1. Ф.Р.Турсунов. Регуляризация задачи Коши для линейных эллиптических систем первого порядка с постоянными коэффициентами в неограниченной области // Тезисы докладов международная конференция «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения» посвященная 100 летию со дня рождения академика Ильи Несторовича Векуа, 28 мая – 2 июня 2007 г., Новосибирск, С.320-321.

2. Ф.Р. Турсунов. О регуляризации задачи Коши для систем эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами в неограниченной области // Материалы международной конференции «Новые направления в теории динамических систем и некорректных задач». Самарканд, 19-20 октября 2007 г., С. 163-166.

3. Турсунов Ф.Р. О регуляризации задачи Коши для систем эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами в неограниченной области // Тезисы докладов международной конференции «Управление и оптимизация динамических систем- CODS-2009» Ташкент, 28-30 сентября 2009г., ст 102-103.

4. Ф.Р. Турсунов. О задаче Коши для систем эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами // Молодежная международная научная школа- конференция «Теория и численные методы решения обратных задач» Тезисы докладов. Новосибирск, 2009 г., 10-20 августа 2009г., С.107-108.

5. Маликов З., Турсунов Ф.Р. Задача Коши для системы эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами в неограниченной области на плоскости // Тезисы докладов международная конференция посвященная 80-летию М.М. Лаврентьева, 5-12 августа 2012 г. Новосибирск, Россия, С.154-155.

6. Турсунов Ф.Р., Маликов З. О регуляризация задача Коши для систем эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами в неограниченной области // Тезисы научно практического семинара «Некорректные и неклассические задачи математической физики и анализа» 5-6 июля 2012 года, Самарканд. С. 90-92

7. Турсунов Ф. Р. Уразбаева Н. К. Задача Коши для линейных эллиптических систем первого порядка с постоянными коэффициентами в неограниченной области на плоскости // Материалы республиканской научной конференции «Актуальные проблемы математического анализа» 9-10 ноября 2012 года, Ургенч. С. 85-86.

8. Турсунов Ф. Р. Маликов З. М. Регуляризация задача Коши для эллиптических систем первого порядка // Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием ученых из стран СНГ «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их применения», 21-23 ноября 2013г. Ташкент-2013, С.188-190.

9. З. Маликов, Ф. Р. Турсунов. Задача Коши для систем эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами в неограниченной области // Математик физика ва анализнинг турдош масалалари республика илмий амалий анжумани материаллари. 26-27 ноябрь 2015 йил, Бухоро, 231-233 с.

10. Турсунов Ф. Р. О задаче Коши для линейных эллиптических систем первого порядка с постоянными коэффициентами // Динамик системаларнинг долзарб муаммолари ва уларнинг тадбиқлари. Республика илмий конференцияси (хорижий олимлар иштирокида) материаллари 1-3 май 2017. Тошкент, 161-162 с.

11. Турсунов Ф.Р. Задача Коши для линейных эллиптических систем первого порядка // Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых « Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложений», 15-17 декабрь. 2017 г.,Ташкент, С.182-183.

12. Турсунов Ф.Р. Регуляризация задачи Коши для линейных эллиптическых систем первого порядка с постоянными коэффициентами в ограниченной области // International conference “Mathematical analysis and its application to mathematical physics” Septembr 17-20, 2018, Samarkand, p. 54-55.

13. Турсунов Ф. Р. Уразбаева Н. К. Регуляризация задачи Коши для линейных эллиптических систем первого порядка с постоянными коэффициентами в неограниченной области // International conference “Mathematical analysis and its application to mathematical physics” Septembr 17-20, 2018, Samarkand, p. 53.

14. Турсунов Ф. Р. Регуляризация задачи Коши для линейных эллиптических систем первого порядка с постоянными коэффициентами в ограниченной области // VIII международной молодежной научно-практической конференции «Математическое моделирование процессов и систем» 4-7 октябрь 2018, Россия, Уфа.

15. Ф.Р. Турсунов. Задачи Коши для линейных эллиптических систем первого порядка с постоянными коэффициентами в трехмерной ограниченной области // Международная конференция «Обратные и некорректные задачи », Самарканд, Узбекистан, 2- 4 октября 2019 г., С.120-124.

16. Ф.Р. Турсунов. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Сборник тезисов международная конференция «Уфимская осенная математическая школа», 16-19 октября 2019 г.,Уфа, Россия, С. 236-239.

Автореферaтнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари
«СамДУ илмий тадқиқотлар журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди
(24.12.2019).

Босишга рухсат этилди: _______2020 йил.
Офсет қоғози. Қоғоз бичими 60х84 $^{1}/_{16}$.
«Times New Roman» гарнитурада рақамли
босма усулида босилди. Адади 100. Буюртма № ___.
Шартли босма табоғи 2.