АПАКОВ Ю.П.

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры Высшей математики Наманганского инженерно-строительного института.

Родился в 1956 г., в Чартакском районе Наманганской области. Окончил с отличием математический факультет Наманганского Государственного педагогического института (1979 г.). Защитил кандидатскую диссертацию в Институте математики АН РУз (1989 г.). Защитил докторскую диссертацию в Национальном университете Узбекистана (2016 г.).

Область научных интересов в математике: дифференциальные уравнения в частных производных, уравнения высокого порядка с кратными характеристиками, уравнения смешанного параболо-гиперболического типа, интегральные преобразования. Автор более 160 научных публикаций.

ISBN 978-9943-5678-9-4

9 789943 567894

FAN VA TEXNOLOGIYALAR

К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

АПАКОВ Ю.П.

АПАКОВ Ю.П.

К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

$$L[u] \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x,y)$$

ТАШКЕНТ

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

АПАКОВ Ю.П.

К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

ТАШКЕНТ–2019

УДК: 517.654
ББК 22.193
А 76

А 76 **Апаков Ю.П. К теории уравнений третьего порядка с кратными характеристиками. –Т.: «Fan va texnologiya», 2019, 156 стр.**

ISBN 978–9943–5678–9–4

Данная монография посвящена разработке аналитической теории и построению фундаментальных решений для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени, решению краевых задач для уравнений с кратными характеристиками.

Построены аналитические и фундаментальные решения для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени, с помощью специальных функций. Разработан алгоритм решения краевых задач методом Фурье для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, применен этот алгоритм к решению краевых задач для вырождающихся уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, а также к построению функции Грина краевых задач.

Для специалистов в области дифференциальных уравнений, докторантов, студентов старших курсов, магистров специализирующих в данной области.

УДК: 517.654
ББК 22.193

Ответственый редактор:
Тахиров Ж.О. – доктор физико-математических наук, профессор.
Рецензенты:
Уринов А.К. – доктор физико-математических наук, профессор;
Ходжибоев В.Р. – доктор физико-математических наук, профессор.

Монография рекомендована к изданию решением Ученого Совета Наманганского инженерно-строительного института от 22 апреля 2019 года.

ISBN 978–9943–5678–9–4

ВВЕДЕНИЕ

Посвящаю памяти
дорогого учителя - академика
Тохтамурада Джураевича Джураева

Теория уравнений с частными производными третьего порядка возникла сравнительно недавно. В настоящее время эта теория переживает период бурного и интенсивного развития.

Уравнения составного типов, а также уравнения с кратными характеристиками являются основными представителями уравнений третьего порядка. В совокупности, из всех уравнений третьего порядка особое место по специфическому характеру занимают, так называемые, уравнения с кратными характеристиками.

Нелинейное уравнение в частных производных третьего порядка с кратными характеристиками, играющее важную роль в теории нелинейных волн гидродинамического происхождения, впервые было получено Ж. Вускинсом в 1877 году. Однако подробный анализ был приведен Д. Кортевегом и Г. де Фризом в 1895 году.

В настоящее время наблюдается значительно возрастающий интерес к исследованию нелинейных волновых процессов в различных областях физики (напр., в оптике, физике плазмы, гидродинамике и т.д.).

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматривается при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы, а также в задачах моделирования фильтрации жидкости в пористых средах [53] .

Для изучения волн малой, но конечной амплитуды в дисперсионных средах в качестве модельного уравнения часто используют уравнение Кортевего - де Фриза

$$u_y + uu_x + \beta u_{xxx} = 0, \quad \beta = const \neq 0.$$

В линейном случае теория таких уравнений разработана и развита в трудах L.Cattabriga, L.Rodino, Т.Д.Джураева, С.Абдиназарова и их учеников. Это послужило импульсом к началу исследований и для других классов уравнений с кратными характеристиками. Начаты и продолжаются исследования и по уравнениям с кратными характеристиками, содержащим вторые производные по времени.

Однако количество работ, в которых исследованы такие уравнения, невелико [17, 18, 23, 42, 56]. По нашему мнению, это связано со сложностью построения математических моделей [66, 67], а также отсутствием необходимого теоретического аппарата.

Довольно часто резкие изменения параметров потока происходят в узких областях, прилегающих к ударным волнам. Градиенты параметров потока в них могут быть настолько значительными, что наряду с нелинейным характером движения становится необходимым учитывать влияние вязкости и теплопроводности. Такие течения называются короткими волнами. К теории коротких волн относится теория трансзвуковых течений. Следует отметить, что в последнее время в литературе это уравнение все больше называют вязким трансзвуковым уравнением, или просто ВТ-уравнением [23]. Общая теория коротких волн и ее связь с трансзвуковыми течениями дана в [43]. В ряде конкретных физических задач, рассмотрены примеры коротких волн, возникающих в стационарных течениях, где происходят диссипативные процессы. В [65] рассматривается маховское отражение слабых ударных волн от клина. В [63-64] рассмотрено взаимодействие слабых ударных волн в неограниченном слое. В работе [42], учитывая свойства вязкости и теплопроводности газа, из системы Навье-Стокса было получено ВТ-уравнение, т.е. уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторые производные по времени

$$u_{xxx} + u_{yy} - \frac{\nu}{y} u_y = u_x u_{xx}, \quad \nu = const.$$

ВТ-уравнение при $\nu = 1$ описывает осесимметричный поток, а при $\nu = 0$ - плоско - параллельный поток [23].

Важность этих исследований, с точки зрения приложения, была обоснована в работах В.Н.Диесперова [23-24], О.С.Рыжова [42-43] и Ю.В.Засорина [28]. А в работах В.Галактионова [15, 67] изучены автомодельные решения для нелинейных уравнений с кратными характеристиками.

Теперь приведём некоторые результаты по уравнению

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^p} + a\frac{\partial^q u}{\partial y^q} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, ..., \frac{\partial^{p-1} u}{\partial x^{p-1}}, \frac{\partial^{q-1} u}{\partial y^{q-1}}\right), \tag{1}$$

где $p > q, \quad a = const.$

Первые результаты по уравнению (1) были получены в работах H. Block [55] и E. Del Vecchio [58-59]. H. Block [55] разработал способ построения фундаментального решения уравнения (1) с помощью суперпозиции специально подобранных элементарных решений и используя преобразование Фурье, построил решение типа источника. В работе L. Cattabriga [56] эти результаты были обобщены для уравнения (1) в случае $p = 2n+1,\ q = 2.$ Построенные фундаментальные решения при $n = 1$ имеют вид [56]

$$U(x, y; \xi, \eta) = |y-\eta|^{1/3} f(t), \qquad V(x, y; \xi, \eta) = |y-\eta|^{1/3} \varphi(t), \tag{2}$$

здесь

$$f(t) = \begin{cases} t^{1/2}\left(\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_t^{\infty} \tau^{-3/2} f^*(\tau)d\tau + c^+\right), & t > 0; \\ |t|^{1/2}\left(\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_t^{\infty} |\tau|^{-3/2} f^*(\tau)d\tau + c^-\right), & t < 0; \end{cases}$$

$$\varphi(t) = |t|^{1/2}\left(\frac{3}{2}\int_{-\infty}^{t} |\tau|^{-3/2} \varphi^*(\tau)d\tau + c\right), \quad t < 0;$$

$$f^{*}(t)=\int_{0}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda^{3/2}\right)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda^{3/2}+\lambda t\right)d\lambda,\ -\infty<t<+\infty,$$

$$\varphi^{*}(t)=\int_{0}^{\infty}\left[\exp\left(\lambda t-\lambda^{3/2}\right)+\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda^{3/2}\right)\right]\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda^{3/2}+\lambda t\right)d\lambda,\ t<0,$$

$$t=(x-\xi)|y-\eta|^{-2/3},\quad c^{+},c^{-},c-const.$$

Для фундаментальных решений были получены следующие оценки:

$$\left|\frac{\partial^{h+k}U}{\partial x^{h}\partial y^{k}}\right|<c_{1}|y-\eta|^{\frac{1-(-1)^{k}}{2}}|x-\xi|^{-\frac{1}{2}\left[2h+3k-1+\frac{3}{2}\left(1-(-1)^{k}\right)\right]}\text{ при }(x-\xi)|y-\eta|^{-2/3}\to-\infty,$$

$$\left|\frac{\partial^{h+k}U}{\partial x^{h}\partial y^{k}}\right|<c_{2}|y-\eta|^{-\frac{2h+3k-1}{3}}\exp\left(-c_{3}t^{3}\right)\text{ при }(x-\xi)|y-\eta|^{-2/3}\to+\infty,$$

где c_1, c_2 и c_3 – произвольные положительные постоянные.

В последнее время появился ряд работ, в которых исследованы корректные краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени. Обзор этих исследований можно найти в работах L. Cattabriga, L.Rodino [56-57, 60-61, 62], Т.Д.Джураева, С.Абдиназаров [19], А.А.Дезина [17], В.Н.Диесперова [23-24], О.С.Рыжова [42-43], Ю.В. Засорина [28], и С.Абдиназарова [1].

Изучение уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени, в нашей республике, началось в семидесятых годах XX столетия и развивалось в работах Т.Д.Джураева, С.Абдиназарова и их учеников [1-5, 20, 50]. Отметим, что в работах [1-5, 50] краевые задачи исследованы методом потенциалов с использованием фундаментальных решений (2). В работах [1, 20] Т.Д.Джураевым и С.Абдиназаровым для уравнения (1) в случае $p=2n+1,\ q=1$ построены фундаментальные решения, изучены их свойства и решены корректные краевые задачи.

В настоящей монографии систематически изучаются уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащие вторые производные по времени, т.е. в случае $p = 3, \ q = 2$.

В свою очередь, эти результаты дали некоторый импульс новым исследованиям многих зарубежных математиков. Совсем новые результаты в этом направлении получены в работах [9-11, 36-39, 48, 51-52, 53, 54]. Авторы этих работ в своих исследованиях опираются на наши результаты. А также нужно отметить следующие работы [6-7, 25-26, 31-32, 40].

Если обратить внимание на фундаментальные решения (2), то увидим, что они содержат громоздкие двойные несобственные интегралы, и поэтому в исследованиях, связанных с ними, возникают существенные трудности при вычислении кратных интегралов. Кроме того, из-за произвольной константы в представлении фундаментальных решений возникает также масса неудобств.

Естественно, возникает вопрос: можно ли построить новое удобное представление для фундаментальных решений, позволяющее четко и легко провести качественный анализ решения? Чтобы получить новое представление для фундаментального решения, надо использовать другой метод построения.

При решении задач математической физики широкое распространение получил, так называемый, метод подобия. Аналогично тому, как метод Фурье основан на инвариантности задач, относительно группы сдвигов по времени, он применяется в задачах, инвариантных относительно какой-либо группы подобных преобразований входящих в нее всех переменных. Такие задачи называются автомодельными. Использование группы подобия значительно облегчает их исследование, ибо при этом задача нахождения неизвестных функций, зависящих от всех переменных, сводится к отысканию неизвестных функций, зависящих только от «автомодельных» переменных. В случае нестационарных задач с одной пространственной переменной такие функции являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений [14].

В I главе построены фундаментальные решения, рассматривая их как предельный случай определенных линейных задач. Для этой цели используем метод построения автомодельного решения [8, 14]. Этот метод позволяет сравнительно легко построить фундаментальные решения и изучить их свойства, без применения сложных вычислений, а также дает возможность свести их к классическим специальным функциям как вырожденные гипергеометрические функции, свойства которых хорошо изучены.

Для исследования взаимосвязанных процессов газогидродинамики на практике применяется несколько методов. Классическим является аналитический метод, заключающийся в получении явной формулы, выражающей решение через элементарные или некоторые специальные функции. Однако не для всех уравнений в частных производных решение может быть выражено через элементарные или известные специальные функции. Тем не менее, аналитический метод остается достаточно мощным средством для качественного анализа решений и исследования модельных задач.

Наличие нечетных производных по x в уравнении естественно требует исследование вопроса корректной постановки краевых задач. Например, если задачи рассматриваются в плоской прямоугольной области, то в зависимости от знака между членами уравнения (1.1), производная от искомой функции задается на правой или же на левой границе. Задание производной на той или иной границе существенно влияет на изучение краевых задач.

Насколько нам известно, корректные краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками методом Фурье не исследованы.

Во II главе методом Фурье исследованы краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени. Дается полное описание алгоритма метода, строится конструктивная теория метода Фурье. Разработанный способ применяется при решении краевых задач первого, второго, третьего родов, а также задачи

Коши. Здесь также исследуются задачи для вырождающихся уравнений.

В монографии поставлены и изучены корректные краевые задачи в бесконечной области для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, имеющего вырождения первого рода.

Известно, что одним из распространенных методов изучения корректных краевых задач для уравнений математической физики является метод функции Грина. Понятие функции Грина имеет большое значение в теории краевых задач для уравнений в частных производных. Зная функцию Грина, мы можем выразить значение решения краевой задачи во внутренних точках области через данные граничные значения, т.е. нахождение функции Грина позволяет написать решение поставленной краевой задачи в явном виде через квадратуры. Построение функции Грина зависит от вида области.

В III главе монографии построены функции Грина для первой и второй краевых задач в прямоугольной и в бесконечной областях.

ГЛАВА I. ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

§ 1.1. Построение фундаментальных решений

Рассмотрим следующее уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени

$$L[u] \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 . \qquad (1.1)$$

Определение 1.1. Фундаментальным решением уравнения (1.1) называется функция $U(x, y; \xi, \eta)$, которая при $(x, y) \neq (\xi, \eta)$ по x, y удовлетворяет уравнению (1.1), по ξ, η - уравнению, сопряженному (1.1), а также справедливы следующие соотношения:

1) её первая производная по y (по η) в точке $y = \eta$ имеет разрыв 1-го рода;

2) её вторая производная по x (по ξ) в точке $x = \xi$ имеет разрыв 1-го рода.

В обоих случаях “скачок” равен 1.

Для построения нового фундаментального решения, исследуем следующие линейные задачи.

Задача 1. Найти решение уравнения (1.1) в области $\{-\infty < x < +\infty,\ y > 0\}$, удовлетворяющее условию

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & при \quad x \geq 0, \\ 0 & при \quad x < 0. \end{cases} \qquad (1.2)$$

Задача 2. Найти решение уравнения (1.1) в области $\{-\infty < x \leq 0,\ y > 0\}$, удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = 1,\ \ y > 0; \qquad u(x,0) = 0,\ \ x \leq 0. \qquad (1.3)$$

Исследование задач. Введя новую переменную $t = xy^{-2/3}$, решение уравнения (1.1) будем искать в виде $u(x,y) = z(t)$. Вычислим производные по x и y:

$$u_{xxx} = y^{-2} z'''(t), \quad u_{yy} = t_y^2\, z''(t) + t_{yy}\, z'(t), \quad t_{yy} = \frac{10}{9} y^{-2}\, t.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1.1), получим

$$z''' - \frac{4}{9} t^2 z'' - \frac{10}{9} t\, z' = 0.$$

Полагая $z' = c\varphi(t)$, имеем

$$\varphi'' - \frac{4}{9} t^2 \varphi' - \frac{10}{9} t\, \varphi = 0. \tag{1.4}$$

Если будет найдено решение уравнения (1.4), удовлетворяющее условию (1.2), [(1.3)] то задачи 1 [(2)] будут решены.

Из условия (1.2) имеем

$$z(-\infty) = 0, \;\; z(+\infty) = 1. \tag{1.5}$$

В силу обозначения $z' = c\varphi(t)$, получим

$$z(t) = c \int_{-\infty}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau, \quad c = const \neq 0. \tag{1.6}$$

В равенстве (1.6) нижний предел интегрирования выбран так, чтобы выполнялось первое из условий (1.5). Чтобы удовлетворить второму условию следует положить

$$c=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\tau)d\tau\right]^{-1}. \tag{1.7}$$

Тогда для функции $z(t)$ выполняется условие $z(+\infty)=1$.

Далее из краевого условия (1.3) следует, что

$$z(-\infty)=0,\;\; z(0)=1,$$

в силу чего имеем

$$z(t)=c_1\int_{-\infty}^{t}\varphi(\tau)d\tau,\quad c_1=\left[\int_{-\infty}^{0}\varphi(\tau)d\tau\right]^{-1}.$$

Теперь займемся нахождением решения уравнения (1.4).

Заменяя переменные по формуле

$$\varphi(t)=t\,Z(\xi),\quad \xi=\frac{4}{27}t^3, \tag{1.8}$$

из (1.4) получим

$$\xi Z''+\left(\frac{4}{3}-\xi\right)Z'-\frac{7}{6}Z=0. \tag{1.9}$$

Это есть вырожденное гипергеометрическое уравнение. Известно, что уравнение (1.9) имеет линейно независимые решения в виде

$$Z_1(\xi)=\Phi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right),\quad Z_2(\xi)=\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right), \tag{1.10}$$

где $\Psi(a,c;x)$ и $\Phi(a,c;x)$ – вырожденные гипергеометрические функции [8, 45], которые имеют вид [45; стр.321]:

$$\begin{aligned}&\Phi(a,c;x)=1+\frac{a}{c}\cdot\frac{x}{1!}+\frac{a(a+1)}{c(c+1)}\cdot\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{(a)_n}{(c)_n}\cdot\frac{x^n}{n!}+\ldots\\&\Psi(a,c;x)=\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1+a-c)}\Phi(a,c;x)+\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a)}x^{1-c}\Phi(a-c+1,2-c;x)\end{aligned} \tag{1.11}$$

здесь,
$(a)_0 = 1,\ (a)_n = a(a+1)(a+2)...(a+(n-1))$ *− символ Похгаммера*,

$$c \neq 0,-1,-2,...,\quad \operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0.$$

Отсюда, возвращаясь к старым переменным, получим два линейно независимых решения уравнения (1.4):

$$\varphi_1(t) = t Z_1(t) = t\Phi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right),\ \ \varphi_2(t) = t Z_2(t) = t\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right),\ \ \xi = \frac{4}{27}t^3.$$

Эти функции и являются автомодельными решениями уравнения (1.1) с показателем $\alpha = 2/3$.

Как известно [16], $\varphi_1(t) \in L_1(-\infty,0)$, $\varphi_2(t) \in L_1(-\infty,+\infty)$.

Следовательно, в качестве решения задачи 1 можно взять функцию $\varphi_2(t)$, а решения задачи 2 - функцию $\varphi_1(t)$.

Учитывая равенство (1.11), получаем

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= t\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right) = \\ &= t\frac{\Gamma(-1/3)}{\Gamma(5/6)}\Phi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right) + t\frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(7/6)}\left(\frac{4}{27}t^3\right)^{-1/3}\Phi\left(\frac{5}{6},\frac{2}{3};\xi\right) = \\ &= t\frac{\Gamma(-1/3)}{\Gamma(5/6)}\Phi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right) + \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(7/6)}\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\Phi\left(\frac{5}{6},\frac{2}{3};\xi\right). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Отсюда, используя следующие соотношения для гамма – функции [41],

$$\begin{gathered} \Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\sin(\pi z)},\quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \\ \Gamma(1+z) = z\Gamma(z),\ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \end{gathered} \tag{1.13}$$

получим

$$\varphi_2(t) = t\,\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right) =$$
$$= \frac{3}{2^{1/3}\sqrt{\pi}}\left[3\Gamma(2/3)\Phi\left(\frac{5}{6},\frac{2}{3};\xi\right) - \Gamma(1/3)\,t\,\Phi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right)\right]. \tag{1.14}$$

Чтобы получить решение задачи 1, вычислим постоянную c, входящую в состав формулы (1.6). Согласно равенствам (1.7) и (1.12) справедливо равенство

$$c^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(t)\,dt = J_1 + J_2,$$

$$\text{где}\quad J_1 = \int_0^{+\infty} \varphi_2(t)\,dt, \quad J_2 = \int_{-\infty}^{0} \varphi_2(t)\,dt.$$

Сперва рассмотрим интеграл J_1. В силу введенных обозначений, имеем

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \varphi_2(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t\,\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right)dt.$$

Отсюда, заменяя переменное интегрирование, по формуле $(4/27)t^3 = \xi$, используя соотношения [16; стр. 872]

$$\int_0^{+\infty} t^{b-1}\,\Psi(\mathrm{a},\mathrm{c};\mathrm{t})\,dt = \frac{\Gamma(b)\Gamma(a-b)\Gamma(b-c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)},$$

если $0 < \mathrm{Re}\,b < \mathrm{Re}\,\mathrm{a},\ \mathrm{Re}\,\mathrm{c} < \mathrm{Re}\,b + 1$ и (1.13), получим

$$J_1 = \frac{3}{2\sqrt[3]{2}}\int_0^{+\infty} \xi^{-1/3}\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right)d\xi = \frac{3}{2\sqrt[3]{2}}\,\frac{\Gamma(2/3)\Gamma(1/2)\Gamma(1/3)}{\Gamma(7/6)\Gamma(5/6)} = \frac{3\sqrt{3\pi}}{\sqrt[3]{2}}.$$

Теперь вычислим интеграл J_2. Согласно равенству (1.14) имеем

$$J_2 = \int_{-\infty}^{0} \varphi_2(t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} \varphi_2(-t)\,dt =$$

$$= \frac{9\Gamma(2/3)}{2^{1/3}\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \Phi\left(\frac{5}{2},\frac{2}{3};-\frac{4}{27}t^3\right)dt - \frac{3\Gamma(1/3)}{2^{1/3}\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} t\,\Phi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};-\frac{4}{27}t^3\right)dt.$$

Здесь также, произведя замену $(4/27)t^3 = \xi,$ в интегралах и учитывая равенство [16; стр. 872]

$$\int_{0}^{+\infty} t^{b-1}\,\Phi(\mathrm{a},\mathrm{c};-\mathrm{t})\,dt = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}, \text{ если } 0 < \mathrm{Re}\,b < \mathrm{Re}\,\mathrm{a}, \qquad (1.15)$$

получаем

$$J_2 = \frac{2\cdot 9\sqrt{\pi}}{2^{1/3}\sqrt{3}} = 2\frac{3\sqrt{3\pi}}{\sqrt[3]{2}}.$$

Если введем обозначение $\gamma = 3\sqrt{3\pi}\big/\sqrt[3]{2}$, то из найденного выше следует, что

$$J_1 = \int_{0}^{+\infty} \varphi_2(t)\,dt = \gamma, \;\; J_2 = \int_{-\infty}^{0} \varphi_2(t)\,dt = 2\gamma.$$

Тогда

$$c^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(t)\,dt = 3\gamma, \qquad \text{т.е.} \qquad c = \frac{1}{3\gamma}.$$

Если учесть это, решение задачи 1 запишется в виде

$$u(x,y) = \frac{1}{3\gamma}\int_{-\infty}^{t} \varphi_2(\tau)\,d\tau, \qquad (1.16)$$

где

$$\varphi_2(t) = t\,\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right).$$

Действительно, функция (1.16) при $y>0$ удовлетворяет уравнению (1.1). Далее, из (1.16) при $y \to 0$ следует, что

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x>0}} u(x,y) = \frac{1}{3\gamma}\lim_{\substack{y\to 0\\ x>0}} \int_{-\infty}^{x/y^{2/3}} \varphi_2(\tau)\,d\tau = \frac{1}{3\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(\tau)\,d\tau = \frac{1}{3\gamma}\cdot 3\gamma = 1,$$

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x<0}} u(x,y) = \frac{1}{3\gamma}\lim_{\substack{y\to 0\\ x<0}} \int_{-\infty}^{x/y^{2/3}} \varphi_2(\tau)\,d\tau = 0.$$

Введя обозначение

$$F(t) = \frac{1}{3\gamma}\int_{-\infty}^{t} \varphi_2(\tau)\,d\tau,$$

и учитывая обозначение $t = x/y^{2/3}$, получаем решение задачи 1 в виде

$$u(x,y) = F\left(x/y^{2/3}\right).$$

Если в задаче 1 начальное условие имеет вид

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & при \quad x \ge \bar{x}, \\ 0 & при \quad x < \bar{x}, \end{cases}$$

то решение запишется в виде

$$u(x,y) = F\left(\frac{x-\bar{x}}{y^{2/3}}\right).$$

Пусть, в задаче 1 начальное условие задается в виде

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & при \quad x < x_1, \\ 1 & при \quad x_1 \le x \le x_2, \\ 0 & при \quad x > x_2. \end{cases}$$

Тогда легко видеть, что решение задачи 1 имеет вид

$$u(x,y) = F\left(\frac{x - x_1}{y^{2/3}}\right) - F\left(\frac{x - x_1}{y^{2/3}}\right). \tag{1.17}$$

В самом деле, пусть $x \in (x_1, x_2)$. Тогда $x - x_1 > 0,\ x - x_2 < 0$, и поэтому, при $y \to 0$

$F\left(\frac{x - x_1}{y^{2/3}}\right) = 1$ и $F\left(\frac{x - x_2}{y^{2/3}}\right) = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{y \to 0} u(x,y) = 1$

Очевидно, что если $x \overline{\in} (x_1, x_2)$, то $\lim\limits_{y \to 0} u(x,y) = 0$.

Решение (1.17) можно записать в виде

$$u(x,y) = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial \xi} F\left(\frac{x - \xi}{y^{2/3}}\right) d\xi. \tag{1.18}$$

Функцию

$$U^*(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{(y-\eta)^{2/3}} f^*\left(\frac{x - \xi}{(y-\eta)^{2/3}}\right), \tag{1.19}$$

где

$$f^*(t) = \frac{1}{3\gamma} t \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \frac{4}{27} t^3\right),$$

назовём функцией влияния мгновенного точечного источника для задачи 1.

Учитывая это обозначение, имеем

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} F\left(\frac{x - \xi}{y^{2/3}}\right) = \frac{1}{3\gamma} \frac{1}{y^{2/3}} \varphi_2\left(\frac{x - \xi}{y^{2/3}}\right) = U^*(x,y;\xi,0). \tag{1.20}$$

При таком обозначении решение задачи 1 запишется в виде

$$u(x,y)=c_1\int\limits_{-\infty}^{t}\varphi_1(\tau)d\tau, \qquad -\infty<\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{2/3}}<+\infty.$$

Легко видеть, что для функции $f^*(t)$ имеют место следующие равенства

$$\int\limits_0^{+\infty} f^*(\tau)d\tau=\frac{1}{3},\ \int\limits_{-\infty}^{0} f^*(\tau)d\tau=\frac{2}{3},\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^*(\tau)d\tau=1. \qquad (1.21)$$

Теперь займемся решением задачи 2. В формуле (1.6) вместо $\varphi(\tau)$ подставив $\varphi_1(\tau)$, получим

$$u(x,y)=c_1\int\limits_{-\infty}^{t}\varphi_1(\tau)d\tau, \quad -\infty<t<0. \qquad (1.22)$$

Если $c_1=\left[\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi_1(\tau)d\tau\right]^{-1}$, то функция (1.22) при $t\in(-\infty,0)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и условиям

$$u(0,y)=1,\ y>0; \qquad u(x,0)=0,\ -\infty<x\le 0.$$

Вычислим постоянную c_1:

$$c_1^{-1}=\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi_1(\tau)d\tau=\int\limits_{-\infty}^{0} t\,\Phi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right)dt=-\int\limits_0^{+\infty} t\,\Phi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};-\frac{4}{27}t^3\right)dt.$$

Положив $(4/27)t^3=\xi$ в последнем интеграле и учитывая равенство (1.15), получим

$$c_1^{-1}=-\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}\int\limits_0^{+\infty}\xi^{-1/3}\,\Phi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};-\xi\right)d\xi=-\frac{3\Gamma(2/3)\Gamma(4/3)\Gamma(1/2)}{2\sqrt[3]{2}\,\Gamma(7/6)\Gamma(2/3)}=-\frac{\sqrt{3}\pi}{2\Gamma(1/3)}.$$

Следовательно, $c_1 = -2\Gamma(1/3)\big/\sqrt{3}\pi$.

В силу $t = x\big/y^{2/3}$, функция (1.22) запишется в виде

$$u(x,y) = c_1 \int\limits_{-\infty}^{\frac{x}{y^{2/3}}} \varphi_1(\tau)\,d\tau = c_1 \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{y^{2/3}} \varphi_1\left(\frac{\xi}{y^{2/3}}\right) d\xi. \qquad (1.23)$$

Если краевые условия даны не при $x = 0$, а при $x = x_1$, то функция (1.23) запишется в виде

$$u(x,y) = c_1 \int\limits_{-\infty}^{x-x_1} \frac{1}{y^{2/3}} \varphi_1\left(\frac{\xi}{y^{2/3}}\right) d\xi = c_1 \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-x_1}{y^{2/3}}} \varphi_1(\tau)\,d\tau = E\left(\frac{x-x_1}{y^{2/3}}\right).$$

Введем обозначение

$$E(t) = c_1 \int\limits_{-\infty}^{t} \varphi_1(\tau)\,d\tau .$$

Так как $x - x_1 < 0$, то

$$E\left(\frac{-|x-x_1|}{y^{2/3}}\right) = c_1 \int\limits_{-\infty}^{\frac{-|x-x_1|}{y^{2/3}}} \varphi_1(\tau)\,d\tau .$$

Эту функцию можно записать в виде

$$u(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial}{\partial \xi} E\left(\frac{-|x-\xi|}{y^{2/3}}\right) d\xi ,$$

или

$$u(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} c_1 \frac{\operatorname{sgn}(x-\xi)}{y^{2/3}} \varphi_1\left(\frac{-|x-\xi|}{y^{2/3}}\right) d\xi.$$

Если введем обозначение

$$c_1 \frac{\operatorname{sgn}(x-\xi)}{y^{2/3}} \varphi_1 \left(\frac{-|x-\xi|}{y^{2/3}} \right) = \frac{\operatorname{sgn}(x-\xi)}{y^{2/3}} \varphi^*(t) = V^*(x, y; \xi, 0),$$

то решение задачи 2 запишется в виде

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{x_1} V^*(x, y; \xi, 0) \, d\xi.$$

Функцию

$$V^*(x, y; \xi, \eta) = \frac{\operatorname{sgn}(x-\xi)}{(y-\eta)^{2/3}} \varphi^*(t), \quad t < 0, \tag{1.24}$$

где

$$\varphi^*(t) = c_1 \varphi_1(t) = \frac{2\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}\pi} t \, \Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \frac{4}{27} t^3 \right),$$

назовем функцией источника для задачи 1.2.

Теперь рассмотрим следующие функции

$$\begin{aligned} U(x, y; \xi, \eta) &= |y-\eta|^{\frac{1}{3}} f\left(\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{2/3}} \right), \\ V(x, y; \xi, \eta) &= |y-\eta|^{\frac{1}{3}} \varphi\left(\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{2/3}} \right) \end{aligned} \tag{1.25}$$

и подберём функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned} U_y(x, y; \xi, \eta) &= -U_\eta(x, y; \xi, \eta) = U^*(x, y; \xi, \eta) \operatorname{sgn}(y-\eta), \\ V_y(x, y; \xi, \eta) &= -V_\eta(x, y; \xi, \eta) = V^*(x, y; \xi, \eta) \operatorname{sgn}(y-\eta). \end{aligned} \tag{1.26}$$

Вычислив из равенства (1.25) производную по y и учитывая (1.19), получим

$$\frac{1}{3}\left[f(t)-2t\,f'(t)\right]=\frac{1}{3\gamma}t\,\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right),$$
$$\frac{1}{3}\left[\varphi(t)-2t\,\varphi'(t)\right]=\frac{2\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}\pi}t\,\Phi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right).$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} &f(t)-2t\,f'(t)=\frac{1}{\gamma}t\,\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right),\\ &\varphi(t)-2t\,\varphi'(t)=\frac{6\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}\pi}t\,\Phi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right). \end{aligned} \tag{1.27}$$

Из уравнений (1.27) надо определить функции $f(t)$ и $\varphi(t)$.

В работе [56] решение уравнения (1.27) выписано через интеграл правой части, причем оно содержит произвольное слагаемое.

Так как в нашем случае правая часть уравнении (1.27) имеет определенную форму, то будем пользоваться методом подбора.

Покажем, что функции

$$f(t)=c_2\,t\,\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\xi\right),\quad \varphi(t)=c_3\,t\,\Phi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\xi\right)$$

являются решениями уравнений (1.27). Здесь c_2, c_3 – некоторые постоянные, которые определяются так, чтобы выполнялись равенства (1.26).

Подставив $f(t)$ в первое из уравнений (1.27), получим

$$c_2\left\{t\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\xi\right)-2t\left[t\,\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\xi\right)\right]'_t\right\}=c_2\left\{t\,\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\xi\right)-2t\,\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\xi\right)-\right.$$
$$\left.-2t^2\Psi'_\xi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\xi\right)\xi_t\right\}=-c_2t\left\{\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\xi\right)+6\xi\,\Psi'_\xi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\xi\right)\right\}.$$

Отсюда следует, что

$$-c_2 t\left[\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\xi\right)+6\xi\,\Psi'_\xi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\xi\right)\right]=\frac{1}{\gamma}t\,\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right). \qquad (1.28)$$

Из соотношения [12; стр.246]

$$\xi\,\Psi'_\xi\left(a,c;\xi\right)+a\,\Psi\left(a,c;\xi\right)=a\left(a-c+1\right)\Psi\left(a+1,c;\xi\right), \qquad (1.29)$$

при $a=\frac{1}{6},\ c=\frac{4}{3}$ имеем

$$6\xi\,\Psi'_\xi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\xi\right)+\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\xi\right)=-\frac{1}{6}\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right). \qquad (1.30)$$

Сравнивая (1.28) и (1.30), получим

$$-c_2 t\left(-\frac{1}{6}\right)\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right)=\frac{1}{\gamma}t\,\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right),$$

откуда следует, что

$$c_2=\frac{6}{\gamma}=\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\pi}}.$$

Подставив $\varphi(t)$ во второе уравнение (1.27), точно так же находим

$$c_3=\frac{36\Gamma(1/3)}{\sqrt{3\pi}}.$$

Принимая во внимание найденные значения постоянных c_2 и c_3, заключаем, что функции

$$f(t)=\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\pi}}t\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\xi\right),\quad \varphi(t)=\frac{36\Gamma(1/3)}{\sqrt{3\pi}}t\Phi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\xi\right) \qquad (1.31)$$

удовлетворяют соотношениям (1.26).

Покажем, что функции (1.25) удовлетворяет уравнению (1.1). Для этого докажем следующую теорему.

Теорема 1.1. Для функций f и f^* справедливо соотношение

$$f''(t)+\frac{2}{3}t\,f^*(t)=0, \qquad (1.32)$$

где

$$f(t)=\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\pi}}t\,\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\xi\right),\ f^*(t)=\frac{\sqrt[3]{2}}{9\sqrt{3\pi}}t\,\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right),\ \xi=\frac{4}{27}t^3.$$

Доказательство. Вычислив $f'(t)$ по формуле дифференцирования вырожденной гипергеометрической функции [45; стр.324]:

$$\begin{aligned}&\frac{d^n}{dx^n}\Phi(a,c;x)=\frac{(a)_n}{(c)_n}\Phi(a+n,c+n;x),\\ &\frac{d^n}{dx^n}\Psi(a,c;x)=(-1)^n\,\Psi(a+n,c+n;x),\end{aligned} \qquad (1.33)$$

Имеем

$$\begin{aligned}f'(t)&=\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\pi}}\left[\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\xi\right)+t\frac{4}{27}3t^2\Psi'\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\xi\right)\right]=\\ &=\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\pi}}\left[\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\xi\right)+3\xi\,\Psi'\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\xi\right)\right].\end{aligned}$$

Из соотношения [12; стр. 246]

$$\xi \Psi'_{\xi}\left(a,c;\xi\right) = \left(a-c+\xi\right)\Psi\left(a,c;\xi\right) - \Psi\left(a-1,c;\xi\right) \qquad (1.34)$$

при, $a = 1/6$, $c = 4/3$, имеем

$$\xi \Psi'\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\xi\right) = -\frac{1}{36}\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right) - \frac{1}{6}\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\xi\right).$$

Отсюда, учитывая это равенство

$$\frac{\sqrt{3\pi}}{2\sqrt[3]{2}} f'(t) = \frac{1}{2}\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\xi\right) - \frac{1}{12}\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right).$$

Дифференцируя это равенство, находим

$$\frac{\sqrt{3\pi}}{2\sqrt[3]{2}} f''(t) = \frac{1}{2}\frac{4}{27}3t^2\Psi'\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\xi\right) - \frac{1}{12}\frac{4}{27}3t^2\Psi'\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right) =$$
$$= \frac{3}{2t}\xi\Psi'\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\xi\right) - \frac{1}{4t}\xi\Psi'\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right).$$

Используя формулы (1.29) и (1.34), получим

$$\frac{\sqrt{3\pi}}{2\sqrt[3]{2}} f''(t) = \frac{3}{2t}\left[-\frac{1}{36}\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right) - \frac{1}{6}\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right)\right] -$$
$$-\frac{1}{4t}\left[\left(-\frac{1}{6}+\xi\right)\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right) - \Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right)\right] =$$
$$-\frac{1}{4t}\xi\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right) = -\frac{t^2}{27}\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right) = -\frac{2t}{3}\left[\frac{t}{18}\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right)\right].$$

Следовательно,

$$f''(t) = -\frac{2t}{3}\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\pi}}\left[\frac{t}{18}\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right)\right] = -\frac{2t}{3}\left[\frac{\sqrt[3]{2}\,t}{9\sqrt{3\pi}}\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\xi\right)\right] = -\frac{2t}{3}f^*(t),$$

т.е. справедливо равенство

$$f''(t)+\frac{2}{3}t\,f^*(t)=0$$

что и требовалось доказать. Теорема 1.1 доказана.

Точно так же доказывается и следующее равенство

$$\varphi''(t)+\frac{2}{3}t\,\varphi^*(t)=0\,.$$

Теперь, покажем, что функция $U(x,y;\xi,\eta)$, определяемая равенством

$$U(x,y;\xi,\eta)=|y-\eta|^{1/3}f(t),\;\; t=\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{2/3}},$$

удовлетворяет уравнению (1.1).

Рассмотрим случай $y>\eta$ (случай $y<\eta$ доказывается аналогично).

Дифференцируя три раза по x, получим

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}=(y-\eta)^{1/3}f'''(t)(t_x)^3=\frac{1}{(y-\eta)^{5/3}}f'''(t).$$

В силу (1.26) и (1.20), имеем

$$U_y(x,y;\xi,\eta)=U^*(x,y;\xi,\eta)\operatorname{sgn}(y-\eta)=U^*(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{(y-\eta)^{2/3}}f^*(t).$$

Дифференцируя это равенство по y, находим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(U^*\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\left(y-\eta\right)^{2/3}}f^*\left(t\right)\right)=-\frac{2}{3}\frac{1}{\left(y-\eta\right)^{5/3}}f^*\left(t\right)+$$

$$+\frac{1}{\left(y-\eta\right)^{2/3}}f^{*\prime}\left(t\right)t_y'=-\frac{2}{3}\frac{1}{\left(y-\eta\right)^{5/3}}f^*\left(t\right)-\frac{2}{3}\frac{1}{\left(y-\eta\right)^{5/3}}t\,f^{*\prime}\left(t\right)=$$

$$=-\frac{2}{3}\frac{1}{\left(y-\eta\right)^{5/3}}\left[f^*\left(t\right)+t\,f^{*\prime}\left(t\right)\right]=-\frac{2}{3}\frac{1}{\left(y-\eta\right)^{5/3}}\left[t\,f^*\left(t\right)\right]'.$$

Принимая во внимание найденные выражения для функций U_{xxx} и U_{yy}, имеем

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{1}{\left(y-\eta\right)^{5/3}}f'''\left(t\right)+\frac{2}{3}\frac{1}{\left(y-\eta\right)^{5/3}}\left[t\,f^*\left(t\right)\right]'=$$

$$=\frac{1}{\left(y-\eta\right)^{5/3}}\left\{f'''\left(t\right)+\frac{2}{3}\left[t\,f^*\left(t\right)\right]'\right\}=\frac{1}{\left(y-\eta\right)^{5/3}}\left[f''\left(t\right)+\frac{2}{3}t\,f^*\left(t\right)\right]'.$$

Отсюда, в силу теоремы 1.1, получим

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Аналогично доказывается, что функция $V\left(x,y;\xi,\eta\right)$, определяемая вторым из равенств (1.25), удовлетворяет уравнению (1.1).

Следовательно, функции, определяемые следующими равенствами

$$\begin{aligned}
&U\left(x,y;\xi,\eta\right)=\left|y-\eta\right|^{\frac{1}{3}}f\left(\frac{x-\xi}{\left|y-\eta\right|^{2/3}}\right), \quad -\infty<\frac{x-\xi}{\left|y-\eta\right|^{2/3}}<+\infty,\\
&V\left(x,y;\xi,\eta\right)=\left|y-\eta\right|^{\frac{1}{3}}\varphi\left(\frac{x-\xi}{\left|y-\eta\right|^{2/3}}\right), \qquad \frac{x-\xi}{\left|y-\eta\right|^{2/3}}<0,
\end{aligned} \tag{1.35}$$

где

$$f(t)=\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}\pi}t\,\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\tau\right),\quad \varphi(t)=\frac{36\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}\pi}t\,\Phi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\tau\right),$$

$$\tau=\frac{4}{27}t^3,\ t=\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{2/3}},$$

можно назвать фундаментальными решениями уравнения (1.1).

Доказано, что функция (1.35) по x, y удовлетворяет уравнения (1.1), и можно легко убедиться, что $\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}=-\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}$ и $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}$. Отсюда следуют что, (1.35) по $\xi,\eta-$ удовлетворяет уравнению, сопряженному (1.1). Остальные два свойства фундаментальных решений докажем в § 1.3.

Предлагаемый способ построения фундаментальных решений с успехом можно применить и для целого класса уравнений вида

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\pm\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=0,$$

где $m,n-$натуральные числа.

§ 1.2. Оценка фундаментальных решений

Известно [12; стр. 266] и [45; стр. 322], что справедливы следующие оценки вырожденной гипергеометрической функции:

если $\operatorname{Re}x \to +\infty$ то $\Phi(a,c;x) = \dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^x x^{a-c} \left[1 + O\left(|x|^{-1}\right)\right]$,

если $\operatorname{Re}x \to -\infty$ то $\Phi(a,c;x) = \dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-x)^{-a} \left[1 + O\left(|x|^{-1}\right)\right]$, (1.36)

если $\operatorname{Re}x \to \pm\infty$ то $\Psi(a,c;x) = -x^{-a} \left[1 + O\left(|x|^{-1}\right)\right]$.

Используя эти оценки и формулы дифференцирования вырожденной гипергеометрической функции (1.33), получим оценки для фундаментальных решений (1.35), которые используются при исследовании краевых задач для уравнения (1.1).

Сперва оценим функцию $f^*(t)$ при $|t| \to \infty$.

Учитывая последнее из равенств, из (1.36) имеем

$$\left|f^*(t)\right| \le \frac{\sqrt[3]{2}}{9\sqrt{3\pi}} \left| t\Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \frac{4}{27}t^3\right)\right| \le \frac{\sqrt[3]{2}}{9\sqrt{3\pi}} |t| \left(\frac{4}{27}|t|^3\right)^{-7/6} \le C_{10} |t|^{-5/2}.$$

Здесь и далее через C_{ij} будем обозначать положительную константу. Дифференцируя $f^*(t)$ по формуле (1.33), находим

$$f^{*\prime}(t) = \frac{\sqrt[3]{2}}{9\sqrt{3\pi}} \left[\Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \frac{4}{27}t^3\right) + t\Psi'\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \frac{4}{27}t^3\right)\right] =$$
$$= \frac{\sqrt[3]{2}}{9\sqrt{3\pi}} \left[\Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \frac{4}{27}t^3\right) - \frac{91}{81}t^3\, \Psi\left(\frac{13}{6}, \frac{7}{3}; \frac{4}{27}t^3\right)\right].$$

Отсюда, с учетом (1.36), получим оценку:

$$\left|f^{*\prime}(t)\right| \le \frac{\sqrt[3]{2}}{9\sqrt{3\pi}} \left[\left(\frac{4}{27}|t|^3\right)^{-7/6} + \frac{91}{81}\left(\frac{4}{27}|t|^3\right)^{-13/6} |t|^3\right] \le$$
$$\le \frac{\sqrt[3]{2}}{9\sqrt{3\pi}} \left[C_1 |t|^{-7/2} + C_2 |t|^{-7/2}\right] \le C_{11} |t|^{-5/2-1}.$$

Аналогично находим, что справедливы оценки

$$\left|f^{*(\nu)}(t)\right| \le C_{1\nu} |t|^{-\frac{5}{2}-\nu}, \ \nu = 0,1,2,\ldots, \text{ при } |t| \to \infty. \tag{1.37}$$

Следует также отметить, что

$$f^{*}(0) = const \ne 0, \ \ f^{*\prime}(0) = 0 \tag{1.38}$$

Теперь оценим функцию $\varphi^{*}(t)$ при $t \to -\infty$:

$$\left|\varphi^{*}(t)\right| \le \frac{2\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}\pi}\left|t\,\Phi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^{3}\right)\right| \le \frac{2\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}\pi}|t|\frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(1/6)}\left(\frac{4}{27}\left|t^{3}\right|\right)^{-7/6} \le$$
$$\le C_{20}|t|^{-5/2}.$$

Дифференцируя $\varphi^{*}(t)$ по формуле (1.33), имеем

$$\varphi^{*\prime}(t) = \frac{2\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}\pi}\left[\Phi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^{3}\right) + \frac{13}{36}t^{3}\Phi\left(\frac{13}{6},\frac{7}{3};\frac{4}{27}t^{3}\right)\right].$$

Отсюда, с помощью (1.36) получаем оценку

$$\left|\varphi^{*\prime}(t)\right| \le \frac{2\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}\pi}\left[\frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(1/6)}\left(\frac{4}{27}|t|^{3}\right)^{-7/6} + \frac{13}{36}\frac{\Gamma(7/3)}{\Gamma(1/6)}|t|^{3}\left(\frac{4}{27}|t|^{3}\right)^{-7/6}\right] \le$$
$$\le \frac{2\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}\pi}\left[C_{3}|t|^{-7/2} + C_{4}|t|^{-7/2}\right] \le C_{21}|t|^{-5/2-1}.$$

Аналогично имеем

$$\left|\varphi^{*(\nu)}(t)\right| \le C_{2\nu}|t|^{-\frac{5}{2}-\nu}, \ \nu = 0,1,2,\ldots, \text{ при } \ t \to -\infty. \tag{1.39}$$

Отметим, что

$$\varphi^*(0)=0,\ \ \varphi^{*\prime}(0)=const\neq 0. \qquad (1.40)$$

Принимая во внимание полученные оценки для функций $f^*(t)$ и $\varphi^*(t)$, получим следующую оценку для функций $f(t)$ и $\varphi(t)$:

$$\begin{aligned}&\left|f^{(\nu)}(t)\right|\le C_{3\nu}|t|^{-1/2-\nu} && \text{при}\quad |t|\to+\infty,\\ &\left|\varphi^{(\nu)}(t)\right|\le C_{4\nu}|t|^{-1/2-\nu} && \text{при}\quad t\to-\infty;\end{aligned} \qquad (1.41)$$

$$\begin{aligned}&f(0),\ f'(0)=const\neq 0,\quad f''(0)=0;\\ &\varphi(0)=\varphi''(0)=0,\quad \varphi'(0)=const\neq 0.\end{aligned} \qquad (1.42)$$

Теперь установим оценки фундаментальных решений.

Учитывая (1.36), при $|t|\to+\infty,$ имеем

$$\left|U(x,y;\xi,\eta)\right|\le|y-\eta|^{1/3}\left|f(t)\right|=|y-\eta|^{1/3}\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\pi}}\left|t\,\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right)\right|\le$$

$$\le\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\pi}}|y-\eta|^{1/3}|t|\left(\frac{4}{27}|t|^3\right)^{-1/6}\le C_{50}|y-\eta|^{1/3}|t|^{1/2}\le C_{50}|x-\xi|^{1/2}.$$

Дифференцируя по x, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}U(x,y;\xi,\eta)=$$

$$=\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\pi}}|y-\eta|^{1/3}\left[t_x{}'\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right)+t\,\Psi'\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right)\frac{4}{9}t^2\frac{1}{|y-\eta|^{2/3}}\right]=$$

$$==\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\pi}}\frac{1}{|y-\eta|^{1/3}}\left[\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right)+\frac{7}{81}t^3\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{7}{3};\frac{4}{27}t^3\right)\right].$$

Отсюда

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}U(x,y;\xi,\eta)\right|\le\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\pi}\left|y-\eta\right|^{1/3}}\left[\left|\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right)\right|+\frac{7\left|t^3\right|}{81}\left|\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{7}{3};\frac{4}{27}t^3\right)\right|\right]\le$$

$$\le\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\pi}\left|y-\eta\right|^{1/3}}\left[\left(\frac{4}{27}t^3\right)^{-1/6}+\frac{7\left|t^3\right|}{81}\left(\frac{4}{27}t^3\right)^{-7/6}\right]\le\frac{C_{51}\left|t\right|^{-1/2}}{\left|y-\eta\right|^{1/3}}\le C_{51}\left|x-\xi\right|^{1/2-1}.$$

Аналогично имеем

$$\left|\frac{\partial^h}{\partial x^h}U(x,y;\xi,\eta)\right|\le C_{5h}\left|x-\xi\right|^{1/2-h},\ \ h=0,1,2,\dots . \tag{1.43}$$

Далее, дифференцируя по y, находим

$$\frac{\partial}{\partial y}U(x,y;\xi,\eta)=$$

$$=\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\pi}}\left[\frac{1}{3}\left|y-\eta\right|^{-2/3}t\,\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right)+\left|y-\eta\right|^{1/3}t'_y\,\Psi\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right)+\right.$$

$$\left.+\left|y-\eta\right|^{1/3}t\,\Psi'\left(\frac{1}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right)\frac{4}{9}t^2t'_y\right]=\frac{\sqrt[3]{2}}{9\sqrt{3\pi}}\left|y-\eta\right|^{-2/3}t\,\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right).$$

Отсюда оценивая при $|t|\to+\infty,$ получаем

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}U(x,y;\xi,\eta)\right|\le\frac{\sqrt[3]{2}}{9\sqrt{3\pi}}\left|\left|y-\eta\right|^{-2/3}t\,\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right)\right|\le$$

$$\le\frac{\sqrt[3]{2}}{9\sqrt{3\pi}}\left|y-\eta\right|^{-2/3}t\left(\frac{4}{27}t^3\right)^{-7/6}\le C_{61}\frac{\left|y-\eta\right|}{\left|x-\xi\right|^{5/2}}.$$

Аналогично имеем

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial y^k}U(x,y;\xi,\eta)\right|\le C_{6k}\left|y-\eta\right|^{\frac{1-(-1)^k}{2}}\left|x-\xi\right|^{-1/2\left\{3k-1+3/2\left[1-(-1)^k\right]\right\}},\ \ k=0,1,2\dots . \tag{1.44}$$

Объединив (1.43) и (1.44), получим окончательные оценки для функции $U(x,y;\xi,\eta)$ при $|t|\to+\infty$:

$$\left|\frac{\partial^{h+k}}{\partial x^h\partial y^k}U(x,y;\xi,\eta)\right|\le C_{hk}|y-\eta|^{\frac{1-(-1)^k}{2}}|x-\xi|^{-1/2\left\{2h+3k-1+3/2\left[1-(-1)^k\right]\right\}},\qquad(1.45)$$

здесь C_{hk} – некоторое положительное число, где $h,k=0,1,2,\dots$. Таким же образом получим аналогичные оценки для функции $V(x,y;\xi,\eta)$ при $(x-\xi)|y-\eta|^{-2/3}\to-\infty.$

§ 1.3. Некоторые свойства фундаментальных решений

Представление фундаментальных решений уравнения (1.1), написанных через вырожденные гипергеометрические функции, позволяют легко установить следующие соотношения.

Теорема 1.2. Имеют место следующие предельные равенства:

$$\lim_{t\to+\infty}t^{5/2}f^*(t)=\frac{3}{4\sqrt{\pi}},\quad \lim_{t\to-\infty}|t|^{5/2}f^*(t)=0,$$
$$\lim_{t\to-\infty}|t|^{5/2}\varphi^*(t)=-\frac{9\Gamma^2(1/3)}{2\pi\sqrt[3]{2}\Gamma(1/6)},\quad \lim_{t\to+\infty}t^{-1/2}f(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}},\qquad(1.46)$$
$$\lim_{t\to-\infty}|t|^{-1/2}f(t)=0,\ \lim_{t\to-\infty}|t|^{-1/2}\varphi(t)=-\frac{192}{5\sqrt[3]{2}\sqrt{3\pi}}.$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Для этого используем выражение функции $f^*(t)$ и оценки при $t\to+\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty}t^{5/2}f^*(t)=\lim_{t\to+\infty}t^{5/2}\frac{1}{3\gamma}t\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right)=\frac{1}{3\gamma}\lim_{t\to+\infty}t^{7/2}\left(\frac{4}{27}t^3\right)^{-7/6}=$$
$$=\frac{1}{3\gamma}\left(\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)^{7/2}=\frac{\sqrt[3]{2}}{3^2\sqrt{3\pi}}\frac{\sqrt{3^7}}{\sqrt[3]{2^7}}=\frac{3}{4\sqrt{\pi}}.$$

Докажем второе из равенств (1.46):

$$\lim_{t\to-\infty}|t|^{5/2} f^*(t)=\lim_{t\to-\infty}(-t)^{5/2}\frac{1}{3\gamma}t\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right)=$$

$$=-\frac{1}{3\gamma}\lim_{t\to-\infty}(-t)^{7/2}\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right).$$

Отсюда, используя оценку для функции $\Psi(a,c;x)$, а также свойства (1.13) $\Gamma(x)$- функции, получим

$$\lim_{t\to-\infty}|t|^{5/2} f^*(t)=-\frac{1}{3\gamma}\lim_{t\to-\infty}(-t)^{7/2}\left[\frac{\Gamma(1-4/3)}{\Gamma(1+7/6-4/3)}\Phi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma(4/3-1)}{\Gamma(7/6)}\left(\frac{4}{27}t^3\right)^{1-4/3}\Phi\left(1+\frac{7}{6}-\frac{4}{3},2-\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{3\gamma}\lim_{t\to-\infty}(-t)^{7/2}\left[\frac{\Gamma(-1/3)}{\Gamma(5/6)}\frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(4/3-7/6)}\left(-\frac{4}{27}t^3\right)^{-7/6}+\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(7/6)}\left(-\frac{4}{27}t^3\right)^{-1/3}\frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(2/3-5/6)}\left(-\frac{4}{27}t^3\right)^{-5/6}\right]=$$

$$-\frac{1}{3\gamma}\lim_{t\to-\infty}(-t)^{7/2}\left[\left(\frac{\Gamma(1-4/3)\Gamma(4/3)}{\Gamma(1-1/6)\Gamma(1/6)}-\frac{\Gamma(1/3)\Gamma(1-1/3)}{\Gamma(7/6)\Gamma(1-7/6)}\right)\left(-\frac{4}{27}t^3\right)^{-7/6}\right]=$$

$$-\frac{1}{3\gamma}\left(\frac{4}{27}\right)^{-7/6}\left[\frac{\sin\pi/6}{\sin 4\pi/3}-\frac{\sin 7\pi/6}{\sin\pi/3}\right]=\frac{1}{3\gamma}\left(\frac{4}{27}\right)^{-7/6}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0.$$

Докажем третье из равенств (1.46)

$$\lim_{t\to-\infty}|t|^{5/2}\varphi^*(t)=\lim_{t\to-\infty}(-t)^{5/2}\frac{2\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}\pi}t\Phi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right)=$$

$$=-\frac{2\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}\pi}\lim_{t\to-\infty}(-t)^{7/2}t\Phi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{23}t^3\right)=-\frac{2\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}\pi}\lim_{t\to-\infty}(-t)^{7/2}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(4/3-7/6)}\left(-\frac{4}{27}t^3\right)^{-7/6}=-\frac{2/3\Gamma^2(1/3)}{\sqrt{3}\pi\Gamma(1/6)}\left(\frac{27}{4}\right)^{7/6}=-\frac{9\Gamma^2(1/3)}{2\pi\sqrt[3]{2}\Gamma(1/6)}.$$

Остальные соотношения теоремы 1.2 доказываются аналогично.

Теорема 1.3. Для $\forall\phi(x)\in C[a;b]$ и $x_0\in[a;b]$, где $-\infty<a<b<+\infty$, имеет место равенство

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ \eta\to y\pm 0}}\int_a^b U_\eta(x,y;\xi,\eta)\phi(\xi)\,d\xi=\pm\phi(x_0). \tag{1.47}$$

Доказательство. Пусть $y>\eta$. В силу непрерывности функции $\phi(x)$, в точке x_0 существует такое $\delta(\varepsilon)$, что $\left|\phi(x)-\phi(x_0)\right|<\varepsilon$, если $|x-x_0|<\delta$.

Используя соотношение

$$U_\eta=-U^*\operatorname{sgn}(y-\eta),$$

где

$$U^*(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{|y-\eta|^{2/3}}f^*\left(\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{2/3}}\right),$$

$$f^*(t)=\frac{1}{3\gamma}t\Psi\left(\frac{7}{6},\frac{4}{3};\frac{4}{27}t^3\right),\qquad \gamma=\frac{3\sqrt{3\pi}}{\sqrt[3]{2}},$$

и разбивая промежуток интегрирования на части, имеем

$$\int_a^b U_\eta(x,y;\xi,\eta)\phi(\xi)\,d\xi=-\int_a^b U^*(x,y;\xi,\eta)\phi(\xi)\,d\xi=$$

$$=-\int_a^b\frac{\phi(\xi)}{|y-\eta|^{2/3}}f^*\left(\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{2/3}}\right)d\xi=-\int_a^{x_1}\frac{\phi(\xi)}{(y-\eta)^{2/3}}f^*\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{2/3}}\right)d\xi-$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\frac{\phi(\xi)}{(y-\eta)^{2/3}}f^*\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{2/3}}\right)d\xi-\int_{x_2}^{b}\frac{\phi(\xi)}{(y-\eta)^{2/3}}f^*\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{2/3}}\right)d\xi=$$

$$=I_1+I_2+I_3,\quad \text{где}\ \ x_1=x_0-\delta,\ \ x_2=x_0+\delta.$$

Здесь I_2 можно представить в виде

$$-\phi(x_0)\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{(y-\eta)^{2/3}}f^*\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{2/3}}\right)d\xi-\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{(y-\eta)^{2/3}}f^*\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{2/3}}\right)\times$$
$$\times\left[\phi(\xi)-\phi(x_0)\right]d\xi=I_{21}+I_{22}.$$

Интеграл I_{21} вычисляется непосредственно. Для этого сделаем замену переменных по формуле

$$t=\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{2/3}},\quad \xi=x-t(y-\eta)^{2/3},\quad d\xi=-(y-\eta)^{2/3}\,dt.$$

Тогда

$$I_{21}=-\phi(x_0)\int_{(x-x_2)/(y-\eta)^{2/3}}^{(x-x_1)/(y-\eta)^{2/3}}f^*(t)\,dt.$$

Как только $|x-x_0|<\delta$, верхний предел становится положительным, а нижний отрицательным и при $\eta\to y-0$, верхний предел стремится к $+\infty$, а нижний к $-\infty$. Отсюда, учитывая (1.20), получим

$$\lim_{\substack{\eta\to y-0\\ x\to x_0}}I_{21}=-\phi(x_0).$$

Покажем, что остальные интегралы I_{22}, I_1, I_3 стремятся к нулю.

Оценим, прежде всего, интеграл I_{22}:

$$|I_{22}|\le\int_{x_1}^{x_2}\left|\frac{1}{(y-\eta)^{2/3}}f^*\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{2/3}}\right)\right|\left|\phi(\xi)-\phi(x_0)\right|d\xi.$$

Так как $x_1<\xi<x_2$ то $|\xi-x_0|<\delta.$ Поэтому

$$|I_{21}|\le\varepsilon\int_{(x-x_2)/(y-\eta)^{2/3}}^{(x-x_1)/(y-\eta)^{2/3}}\left|f^*(t)\right|dt.$$

Покажем, что интеграл

$$\int\limits_{(x-x_2)/(y-\eta)^{2/3}}^{(x-x_1)/(y-\eta)^{2/3}} \left|f^*(t)\right| dt$$

сходится при $x \to x_0$, $\eta \to y-0$. Действительно, при $\left|x-x_0\right| < \delta$ верхний предел становится положительным, а нижний отрицательным и при $\eta \to y-0$ верхний предел стремится к $+\infty$, а нижний к $-\infty$, и мы получаем интеграл в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|f^*(t)\right| dt.$$

Учитывая, что внутри области интегрирования функция $f^*(t)$ не имеет особенностей, перепишем последний интеграл в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|f^*(t)\right| dt = \int\limits_{-\infty}^{-\tau} \left|f^*(t)\right| dt + \int\limits_{-\tau}^{\tau} \left|f^*(t)\right| dt + \int\limits_{\tau}^{+\infty} \left|f^*(t)\right| dt = B_1 + B_2 + B_3,$$

где τ – некоторое фиксированное положительное число.

Рассмотрим каждое слагаемое в отдельности. Учитывая оценки (1.37) для функции $f^*(t)$, получаем

$$B_1 = \int\limits_{-\infty}^{-\tau} \left|f^*(t)\right| dt \le c \int\limits_{-\infty}^{-\tau} |t|^{-5/2} dt = c \int\limits_{-\infty}^{-\tau} (-t)^{-5/2} dt = -c \int\limits_{+\infty}^{\tau} z^{-5/2} dz = c \int\limits_{\tau}^{\infty} z^{-5/2} dz =$$
$$= c \lim_{A\to\infty} \int\limits_{\tau}^{A} z^{-5/2} dz = -\frac{2c}{3} \lim_{A\to\infty} \left(\frac{1}{A^{3/2}} - \frac{1}{\tau^{3/2}} \right) = \frac{2c}{3\tau^{3/2}},$$

т. е. B_1 – ограниченное число. Аналогично доказывается, что B_3 - также ограниченное число. Так как $f^*(0) = const \ne 0$, то из

(1.38) следует, что на отрезке $[-\tau;\tau]$ функция $f^*(t)$ не имеет особенностей, поэтому B_2 также ограниченное число.

Из сказанного выше следует, что $|I_{22}| \le c\varepsilon$, а это означает, что

$$\lim_{\substack{\eta\to y-0\\ x\to x_0}} I_{22} = 0.$$

Теперь оценим функцию I_1. В силу непрерывности функции $\phi(x)$, она ограничена, т.е. $|\phi(x)| \le N$, тогда

$$|I_1| \le \left|\int_a^{x_1} \frac{1}{(y-\eta)^{2/3}} f^*\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{2/3}}\right)\phi(\xi)d\xi\right| \le N \int_{(x-x_1)/(y-\eta)^{2/3}}^{(x-a)/(y-\eta)^{2/3}} |f^*(t)|dt \to 0.$$

Если $x \to x_0$, то $x - x_1 > 0$, и если $\eta \to y-0$, то верхний и нижний пределы интеграла стремятся к $+\infty$. По этому интеграл стремится к нулю.

Аналогично получим

$$|I_3| \le \left|\int_{x_2}^{b} \frac{1}{(y-\eta)^{2/3}} f^*\left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{2/3}}\right)\phi(\xi)d\xi\right| \le N \int_{(x-b)/(y-\eta)^{2/3}}^{(x-x_2)/(y-\eta)^{2/3}} |f^*(t)|dt \to 0,$$

при $x \to x_0,\ \eta \to y-0$.

При $y < \eta$ таким же методом получим

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ \eta\to y}} \int_a^b U_\eta(x,y;\xi,\eta)\phi(\xi)d\xi = \phi(x_0) \quad .$$

Теорема 1.3 доказана. Этим доказано первое соотношение фундаментального решения.

Теорема 1.4. При $\omega(y) \in C[0;l]$, где $l = const < +\infty$, имеют место равенства:

$$\lim_{x\to\xi}\int_0^l U_{xx}(x,y;\xi,\eta)\omega(\eta)\,d\eta=\begin{cases}-(2/3)\omega(y), & x>\xi,\\ (4/3)\omega(y), & x<\xi,\\ 0, & x=\xi,\end{cases} \tag{1.48}$$

$$\lim_{x\to\xi}\int_0^l V_{xx}(x,y;\xi,\eta)\omega(\eta)\,d\eta=\begin{cases}2\omega(y), & x<\xi,\\ 0, & x=\xi.\end{cases} \tag{1.49}$$

Доказательство. Докажем равенство (1.48). С этой целью рассмотрим интеграл в (1.48):

$$J=\int_0^l U_{xx}(x,y;\xi,\eta)\omega(\eta)\,d\eta=\omega(y)\int_0^l U_{xx}(x,y;\xi,\eta)\,d\eta+$$

$$+\int_0^l U_{xx}(x,y;\xi,\eta)\big[\omega(\eta)-\omega(y)\big]d\eta=J_1(x,y)+J_2(x,y).$$

Рассмотрим функцию $J_1(x,y)$. В силу равенства (1.32)

$$J_1(x,y)=\omega(y)\int_0^l U_{xx}(x,y;\xi,\eta)\,d\eta=\omega(y)\int_0^l\frac{1}{|y-\eta|}f''\left(\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{2/3}}\right)d\eta=$$

$$=\omega(y)\int_0^l\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{5/3}}f^*\left(\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{2/3}}\right)d\eta=$$

$$=\omega(y)\left[\int_0^y+\int_y^l\right]\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{5/3}}f^*\left(\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{\frac{2}{3}}}\right)d\eta.$$

Сделав замену переменных интегрирования по формуле

$$t=\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{2/3}},\quad dt=-2/3\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{5/3}}\operatorname{sgn}(y-\eta)\,d\eta,$$

имеем

$$J_1(x,y)=\omega(y)\lim_{\varepsilon_1\to+0}\left[\int\limits_{(x-\xi)/\varepsilon_1}^{(x-\xi)/|y-l|^{2/3}}-\int\limits_{(x-\xi)/y^{2/3}}^{(x-\xi)/\varepsilon_1}\right]f^*(t)\,dt.$$

Отсюда, переходя к пределу и используя равенство (1.21), при $x>\xi$ получаем

$$\lim_{x\to\xi+0}J_1(x,y)=-\omega(y)\int\limits_0^{+\infty}f^*(t)\,dt+\omega(y)\int\limits_{+\infty}^{0}f^*(t)\,dt=$$

$$=-2\omega(y)\int\limits_0^{+\infty}f^*(t)\,dt=-\frac{2}{3}\omega(y).$$

Переходя к пределу при $x<\xi$, имеем

$$\lim_{x\to\xi+0}J_1(x,y)=-\omega(y)\int\limits_0^{-\infty}f^*(t)\,dt+\omega(y)\int\limits_{-\infty}^{0}f^*(t)\,dt=$$

$$=2\omega(y)\int\limits_{-\infty}^{0}f^*(t)\,dt=\frac{4}{3}\omega(y).$$

Теперь рассмотрим функцию $J_2(x,y)$:

$$J_2(x,y)=\int\limits_0^l U_{xx}(x,y;\xi,\eta)\left[\omega(\eta)-\omega(y)\right]d\eta=$$

$$=\int\limits_0^l\frac{1}{|y-\eta|}f''\left(\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{2/3}}\right)\left[\omega(\eta)-\omega(y)\right]d\eta=$$

$$=\int\limits_0^l\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{5/3}}f^*\left(\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{2/3}}\right)\left[\omega(\eta)-\omega(y)\right]d\eta=$$

$$=\left[\int\limits_0^y+\int\limits_y^l\right]\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{5/3}}f^*\left(\frac{x-\xi}{|y-\eta|^{2/3}}\right)\left[\omega(\eta)-\omega(y)\right]d\eta.$$

Выполняя замену переменных интегрирования, получим

$$J_2(x,y) = -\lim_{\varepsilon_1\to+0} \int\limits_{(x-\xi)/y^{2/3}}^{(x-\xi)/\varepsilon_1} f^*\left[\omega\left(y-\left(\frac{x-\xi}{t}\right)^{3/2}\right)-\omega(y)\right]dt +$$

$$+\lim_{\varepsilon_1\to+0} \int\limits_{(x-\xi)/\varepsilon_1}^{(x-\xi)/|y-l|^{2/3}} f^*\left[\omega\left(y-\left(\frac{x-\xi}{t}\right)^{3/2}\right)-\omega(y)\right]dt =$$

$$= -\lim_{\varepsilon_1\to+0}\left[\int\limits_{(x-\xi)/y^{2/3}}^{(x-\xi)/\varepsilon_1} + \int\limits_{(x-\xi)/|y-l|^{2/3}}^{(x-\xi)/\varepsilon_1}\right] f^*(t)\left[\omega\left(y-\left(\frac{x-\xi}{t}\right)^{3/2}\right)-\omega(y)\right]dt.$$

Пусть $\omega(y)\in C[0,l]$. Тогда при $\left(\frac{x-\xi}{t}\right)^{3/2}<\delta$, т.е. при $t>\frac{x-\xi}{\delta^{2/3}}$ имеем

$$\left|\omega\left(y-\left(\frac{x-\xi}{t}\right)^{3/2}\right)-\omega(y)\right|<\varepsilon.$$

Учитывая это, получим

$$J_2(x,y) = -\lim_{\varepsilon_1\to+0}\left[\int\limits_{(x-\xi)/y^{2/3}}^{(x-\xi)/\delta^{2/3}} + \int\limits_{(x-\xi)/\delta^{2/3}}^{(x-\xi)/\varepsilon_1}\right] f^*(t)\left[\omega\left(y-\left(\frac{x-\xi}{t}\right)^{3/2}\right)-\omega(y)\right]dt -$$

$$-\lim_{\varepsilon_1\to+0}\left[\int\limits_{(x-\xi)/|y-l|^{2/3}}^{(x-\xi)/\delta^{2/3}} + \int\limits_{(x-\xi)/\delta^{2/3}}^{(x-\xi)/\varepsilon_1}\right] f^*(t)\left[\omega\left(y-\left(\frac{x-\xi}{t}\right)^{3/2}\right)-\omega(y)\right]dt.$$

Тогда

$$\left|J_2(x,y)\right| \le \left| \int\limits_{(x-\xi)/y^{2/3}}^{(x-\xi)/\delta^{2/3}} f^*(t)\left[\omega\left(y-\left(\frac{x-\xi}{t}\right)^{3/2}\right)-\omega(y)\right]dt\right| +$$

$$+\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int\limits_{(x-\xi)/\delta^{2/3}}^{(x-\xi)/\varepsilon_1}\left|f^*(t)\right|\varepsilon dt + \left|\int\limits_{(x-\xi)/|y-l|^{2/3}}^{(x-\xi)/\delta^{2/3}} f^*(t)\left[\omega\left(y-\left(\frac{x-\xi}{t}\right)^{3/2}\right)-\omega(y)\right]dt\right| +$$

$$+\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int\limits_{(x-\xi)/\delta^{2/3}}^{(x-\xi)/\varepsilon_1}\left|f^*(t)\right|\varepsilon dt.$$

Отсюда, переходя к пределу при $x \to \xi + 0$, имеем

$$\left|J_2(x,y)\right| \le 2\varepsilon\int\limits_0^{+\infty}\left|f^*(t)\right|dt.$$

Учитывая оценку (1.37) для функции $f^*(t)$, из последнего имеем

$$\lim_{x\to\xi+0} J_2(x,y) = 0.$$

Аналогично, при $x \to \xi - 0$ получаем $J_2(x,y) \to 0$ (в обоих интегралах при $x \to \xi$ первое слагаемое обращается в нуль). Равенство (1.48) доказано.

Равенство (1.49) доказывается аналогично.

Итак, все свойства фундаментального решения доказаны.

§ 1.4. Некоторые уточнения по фундаментальным решениям

Уточнение 1. В работе [56] фундаментальные решения уравнения (1.1) выписаны в виде (1.2). Уточним, при каких значениях постоянных c^+, c^-, c эти фундаментальные решения удовлетворяют уравнению (1.1).

Для того чтобы (2) удовлетворяло уравнению (1.1), требуется выполнение тождества (1.32), т.е.

$$f''(t) = -\frac{2}{3} t\, f^*(t).$$

Покажем, что (1.32) выполняется при определенных значениях c^+, c^-, c.

Действительно, интегрируя (1.2) по частям, имеем

$$f(t) = t^{1/2}\left(c^+ + \frac{3}{2}\int_t^{+\infty} \tau^{-3/2} f^*(\tau)\,d\tau \right) =$$

$$= t^{1/2}\left(c^+ + 3t^{-1/2} f^*(t) + 3\int_t^{+\infty} \tau^{-1/2} f^{*\prime}(\tau)\,d\tau \right) =$$

$$= t^{1/2}\left(c^+ + 3t^{-1/2} f^*(t) - 6t^{1/2} f^{*\prime}(t) - 6\int_t^{+\infty} \tau^{1/2} f^{*\prime\prime}(\tau)\,d\tau \right).$$

Из уравнения (1.4) следует, что $f^{*\prime\prime} = \frac{4}{9} t^2 f^{*\prime} + \frac{10}{9} t\, f^*$. Тогда

$$f(t) = t^{1/2}\Bigg[c^+ + 3t^{-1/2} f^*(t) - 6t^{1/2} f^{*\prime}(t) -$$

$$- 6\int_t^{+\infty} \tau^{1/2}\left(\frac{4}{9}\tau^2 f^{*\prime}(\tau) + \frac{10}{9}\tau f^*(\tau) \right) d\tau \Bigg] =$$

$$= t^{1/2}\left(c^+ + 3t^{-1/2} f^*(t) - 6t^{1/2} f^{*\prime}(t) - 6\int_t^{+\infty} \left(\frac{4}{9}\tau^{5/2} f^*(\tau) \right)' d\tau \right) =$$

$$= c^+ t^{\frac{1}{2}} + 3f^*(t) - 6t\, f^{*\prime}(t) - \frac{8}{3} t^{1/2} \lim_{\tau\to+\infty} \tau^{1/2} f^*(\tau) + \frac{8}{3} t^3 f^*(t) = \quad (1.50)$$

$$= t^{1/2}\left(c^+ - \frac{8}{3}\lim_{\tau\to+\infty} \tau^{5/2} f^*(\tau) + 3f^*(t) - 6t\, f^{*\prime}(t) + \frac{8}{3} t^3 f^*(t) \right).$$

С другой стороны, дифференцируя (1.2), имеем

$$f'(t)=\frac{1}{2t}f(t)-\frac{3}{2t}f^*(t),\quad 2t\,f'(t)=f(t)-3f^*(t),$$

$$2f'(t)+2t\,f''(t)=f'(t)-3f^{*\prime}(t),$$

$$2t\,f''(t)=-f'(t)-3f^{*\prime}(t).$$

Умножив последнее равенство, на $-2t$, имеем

$$-4t^2f''(t)=2t\,f'(t)+6t\,f^{*\prime}(t)=f(t)-3f^*(t)+6t\,f^{*\prime}(t). \quad (1.51)$$

Учитывая (1.50), из (1.51) получим

$$-4t^2f''(t)=t^{1/2}\left(c^+-\frac{8}{3}\lim_{\tau\to+\infty}\tau^{5/2}f^*(\tau)\right)+3f^*(t)-6t\,f^{*\prime}(\tau)+$$
$$+\frac{8}{3}t^3f^*(t)-3f^*(t)+6t\,f^{*\prime}(\tau). \quad (1.52)$$

Если $c^+=\frac{8}{3}\lim\limits_{\tau\to+\infty}\tau^{5/2}f^*(\tau)$, то из (1.52) имеем

$$-4t^2\,f''(t)=\frac{8}{3}t^3f^*(t),\text{ т.е. } f''(t)=-\frac{2}{3}t\,f^*(t).$$

Учитывая

$$\lim_{\tau\to+\infty}\tau^{5/2}f^*(\tau)=\Gamma(5/2)=\frac{3}{2}\Gamma(3/2),$$

получим $c^+=4\Gamma(3/2)$.

Аналогичным образом находим

$$c^-=\frac{8}{3}\lim_{\tau\to-\infty}|\tau|^{\frac{5}{2}}f^*(\tau)=0,$$

$$c=-\frac{8}{3}\lim_{\tau\to-\infty}|\tau|^{5/2}\varphi^*(\tau)=\frac{16}{3}\Gamma(5/2)=8\Gamma(3/2).$$

Итак, чтобы фундаментальное решение (2) в работе [56] удовлетворяло уравнению (1.1), оно должно выглядеть так

$$f(t)=t^{1/2}\left(4\Gamma(3/2)+\frac{3}{2}\int_{t}^{+\infty}\tau^{-3/2}f^{*}(\tau)\,d\tau\right),\quad t>0;$$

$$f(t)=\frac{3}{2}|t|^{1/2}\int_{-\infty}^{t}|\tau|^{-3/2}f^{*}(\tau)\,d\tau,\qquad t<0;$$

$$\varphi(t)=|t|^{1/2}\left(8\Gamma(3/2)+\frac{3}{2}\int_{-\infty}^{t}|\tau|^{-3/2}\varphi^{*}(\tau)\,d\tau\right),\quad t<0.$$

Уточнение 2. Полученные нами оценки (1.45) полностью совпадают с ранее полученными оценками в работе [56], за исключением случая $t\to+\infty$ для $U(x,y;\xi,\eta)$.

Это расхождение объясняется следующим образом.

Оценка фундаментального решения сводится к оценке функции $f^{*}(t)$, а эта функция является решением уравнения (1.4)

$$z''-\frac{4}{9}t^{2}z'-\frac{10}{9}t\,z=0.$$

Заменяя переменные по формуле $y(t)=t\,z(\xi),\quad \xi=\frac{4}{27}t^{3}$, получим (1.9)

$$\xi y''+(\frac{4}{3}-\xi)y'-\frac{7}{6}y=0.$$

Это стандартный вид вырожденного гипергеометрического уравнения. Общее решение и точные оценки при $t\to\pm\infty$ известны (1.10), [12, 45].

Оценки решения уравнения (1.9), полученные асимптотическим методом при $t\to+\infty$ в работе [56], отличаются от известной оценки вырожденной гипергеометрической функции [12, 45].

В настоящей главе дан новый способ построения фундаментальных решений уравнения (1.1) и развита теория уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени. Построенные новые фундаментальные решения выражены через вырожденные гипергеометрические функции, которые по x, y удовлетворяют уравнению (1.1) и по ξ, η - уравнению, сопряженному уравнению (1.1). Первая производная по y (соответственно по η) дает скачок при $y \to \eta$, а вторая производная по x (соответственно по ξ) дает скачок при $x \to \xi$. Установлены оценки фундаментальных решений при $t \to \pm\infty$. Изучены некоторые свойства фундаментальных решений, которые необходимы при решении краевых задач.

Предлагаемый способ построения фундаментальных решений с успехом можно применить для целого класса уравнений вида $\frac{\partial^m u}{\partial x^m} \pm \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = 0$, где $m, n -$натуральные числа.

ГЛАВА II. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ В ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Для исследования взаимосвязанных процессов газогидродинамики на практике применяется несколько методов. Классическим является аналитический метод, заключающийся в получении явной формулы, выражающей решение через элементарные или некоторые специальные функции. Однако не для всех уравнений в частных производных решение может быть выражено через элементарные или известные специальные функции. Тем не менее, аналитический метод остается достаточно мощным средством для качественного анализа решений и исследования модельных задач.

Наличие нечетных производных по x в уравнении естественно требует исследование вопроса корректной постановки краевых задач. Например, если задачи рассматриваются в плоской прямоугольной области, то в зависимости от знака между членами уравнения (1.1), производная от искомой функции задается на правой или же на левой границе. Задание производной на той или иной границе существенно влияет на изучение краевых задач.

Насколько нам известно, корректные краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками методом Фурье не исследованы.

В настоящей главе впервые при помощи метода Фурье исследованы краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени, дается полное описание алгоритма метода, строится конструктивная теория метода Фурье.

Разработанный способ применяется при решении краевых задач первого, второго, третьего родов, а также задачи Коши. Здесь также исследуются задачи для вырождающихся уравнений.

В монографии поставлены и изучены корректные краевые задачи в бесконечной области для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, имеющего вырождения первого рода.

При постановке и исследовании краевых задач в монографии под **регулярным решением** задачи понимается функция, которая обладает непрерывными производными, входящими в уравнение, и удовлетворяет его внутри области, а граничные условия выполняются по непрерывности изнутри области. Если область бесконечная, то дополнительно требуется ограниченность второй производной по x в $|x| \to \infty$.

§ 2.1. Краевые задачи в конечной области

В области $D = \{(x;y):\ 0 < x < p,\ 0 < y < l\}$ рассмотрим уравнения

$$L[u] \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ , \qquad (2.1)$$

где $p > 0,\ l > 0$ – постоянные числа, и для него исследуем следующие задачи:

Задача A_1. Найти решение уравнения (2.1) в области D из класса $C^{3,2}_{x,y}(D) \cap C^{2,1}_{x,y}(\overline{D})$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,l) = 0, \quad 0 \le x \le p; \qquad (2.2)$$

$$u(0,\mathrm{y}) = \psi_1(y), \quad u(\mathrm{p},\mathrm{y}) = \psi_2(y), \quad u_x(\mathrm{p},\mathrm{y}) = \psi_3(y), \ \ 0 \le y \le l, \qquad (2.3)$$

где $\psi_1(y), \psi_2(y) \in C^3[0,l]$ и $\psi_3(y) \in C^2[0,l]$ – заданные функции, причем

$$\psi_i(0) = \psi_i(l) = \psi_i''(0) = \psi_i''(l) = 0,\ \ i = 1,2,3. \qquad (2.4)$$

Задача A_2. Найти решение уравнения (2.1) в области D из класса $C^{3,2}_{x,y}(D)\cap C^{2,1}_{x,y}(\overline{D})$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$u_y(x,0)=0,\quad u_y(x,l)=0,\quad 0\le x\le p;$$

$$u(0,y)=\psi_4(y),\quad u(p,y)=\psi_5(y),\quad u_x(p,y)=\psi_6(y),\ \ 0\le y\le l,$$

где $\psi_4(y),\psi_5(y)\in C^3[0,l],\ \psi_6(y)\in C^2[0,l]$ – заданные функции, причем $\psi_i'(0)=\psi_i'(l)=0,\ \ i=4,5,6.$

Исследование задачи A_1.

Справедлива

Теорема 2.1. Если задача A_1 имеет решение, то оно единственно.

Доказательство. Пусть задача A_1 имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет уравнению (2.1) и однородным краевым условиям. Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}$.

В области D справедливо тождество

$$uL[u]\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(uu_y\right)+u_y^2=0 \qquad (2.5)$$

Интегрируя тождество (2.5) по области D, имеем

$$\int_0^p\int_0^l\frac{\partial}{\partial x}\left[u(x,y)u_{xx}(x,y)-\frac{1}{2}u_x^2(x,y)\right]dxdy-$$
$$-\int_0^p\int_0^l\frac{\partial}{\partial y}\left[u(x,y)u_y(x,y)\right]dxdy+\int_0^p\int_0^l u_y^2(x,y)\,dxdy=0,$$

$$\int_0^l \left[u(\mathrm{p},y)u_{xx}(\mathrm{p},y)-u(0,y)u_{xx}(0,y)\right]dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^l \left[u_x^2(\mathrm{p},y)-u_x^2(0,y)\right]dy-\int_0^p \left[u(x,l)u_y(x,l)-\right.$$

$$\left.-u(x,0)u_y(x,0)\right]dx+\int_0^p\int_0^l u_y^2(x,y)\,dxdy=0.$$

Учитывая однородные краевые условия, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^l u_x^2(0,y)\,dy+\iint_D u_y^2(x,y)\,dxdy=0.$$

Отсюда следует, что $u_y(x,y)=0,$ т.е. $u(x,y)=\phi(x),$ $(x,y)\in D.$ Полагая здесь $y=0$ и учитывая $u(x,0)=0,$ имеем $\phi(x)=0.$ Следовательно, $u(x,y)\equiv 0,$ $(x,y)\in \overline{D}.$ Доказана теорема 2.1.

С целью доказательства существования решения задачи A_1, сначала рассмотрим следующую **вспомогательную задачу**: найти нетривиальное решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям (2.2) и представимое в виде

$$u(x,y)=X(x)Y(y). \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в уравнение (2.1) и разделяя переменные, относительно функций $X(x)$ и $Y(y)$ получим обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$X'''(x)+\lambda X(x)=0, \tag{2.7}$$

$$Y''(y)+\lambda Y(y)=0, \tag{2.8}$$

где $\lambda-$параметр разделения.

Краевые условия (2.2), согласно (2.6), дают

$$Y(0) = Y(l) = 0. \tag{2.9}$$

Следовательно, для нахождения функции $Y(y)$ имеем следующую задачу на собственные значения: найти те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (2.8), удовлетворяющие условиям (2.9).

Известно [18, 29, 47], что нетривиальное решение задачи $\{(2.8),(2.9)\}$ существует только при

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{2.10}$$

Эти числа являются собственными значениями задачи $\{(2.8),(2.9)\}$, а соответствующими ими собственными функциями имеет следующие вид

$$Y_n(y) = \sin\frac{\pi n}{l} y, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.11}$$

Так как характеристическое уравнение (2.7)

$$X''' + \lambda_n X = 0,$$

где $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $n = 1, 2, \ldots$, имеет один вещественный корень $\tilde{k}_1 = -\sqrt[3]{\lambda_n}$ и два комплексных $\tilde{k}_{2,3} = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \cdot \sqrt[3]{\lambda_n}$ корня, то общее решение его имеет вид

$$X_n(x) = C_{1n} e^{-k_n x} + e^{\frac{1}{2} k_n x} \left(C_{2n} \cos \nu_n x + C_{3n} \sin \nu_n x\right), \tag{2.12}$$

здесь C_{jn} - произвольные постоянные, $k_n = \sqrt[3]{\lambda_n} = \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^{2/3}$, $n \in N$.

Согласно (2.10) и (2.12), из равенства (2.6) следует, что функции

$$u(x,y) = \left[C_{1n} e^{-k_n x} + e^{\frac{1}{2}k_n x} \left(C_{2n} \cos \nu_n x + C_{3n} \sin \nu_n x \right) \right] \sin \frac{\pi n}{l} y, \quad n \in N,$$

являются частными решениями уравнения (2.1), удовлетворяющими однородным условиям (2.2), где $\nu_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2} k_n$.

В силу линейности и однородности уравнения (2.1), сумма частных решений будет также решением уравнения (2.1). Принимая это во внимание, решение задачи A_1 ищем в виде

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{1n} e^{-k_n x} + e^{\frac{1}{2}k_n x} \left(C_{2n} \cos \nu_n x + C_{3n} \sin \nu_n x \right) \right] \sin \frac{\pi n}{l} y. \qquad (2.13)$$

Функция, определяемая формальным рядом (2.13), удовлетворяет условиям (2.2).

Считая временно, что ряд в (2.13) и его производные сходятся равномерно и требуя от функции $u(x,y)$, определяемой рядом (2.13), выполнения краевых условий (2.3), получим

$$u(0,y) = \psi_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} \sin \frac{\pi n}{l} y,$$

$$\begin{aligned} u(p,y) &= \psi_2(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \sin \frac{\pi n}{l} y, \\ u_x(p,y) &= \psi_3(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{3n} \sin \frac{\pi n}{l} y, \end{aligned} \qquad (2.14)$$

где

$$\begin{cases} A_{1n} = C_{1n} + C_{2n}, \\ A_{2n} = C_{1n}e^{-k_n p} + e^{\frac{1}{2}k_n p}\left(C_{2n}\cos\nu_n p + C_{3n}\sin\nu_n p\right), \\ A_{3n} = -k_n C_{1n}e^{-k_n p} + k_n e^{\frac{1}{2}k_n p}\left[C_{2n}\cos\left(\nu_n p + \frac{\pi}{3}\right) + C_{3n}\sin\left(\nu_n p + \frac{\pi}{3}\right)\right]. \end{cases} \tag{2.15}$$

Из (2.14) видно, что числа A_{1i} являются коэффициентами Фурье функции $\psi_i(y)$ при разложении их в ряд Фурье по синусам на интервале $(0;l)$ т. е.

$$A_{in} = \frac{2}{l}\int_0^l \psi_i(\eta)\sin\frac{n\pi}{l}\eta\, d\eta, \quad i = 1,2,3. \tag{2.16}$$

Итак, для определения коэффициентов C_{in}, $i = 1,2,3,$ мы получили систему уравнений (2.15).

Введем обозначение

$$\alpha = \cos\nu p, \quad \beta = \sin\nu p, \quad \gamma = \cos\left(\nu p + \frac{\pi}{3}\right), \quad \delta = \sin\left(\nu p + \frac{\pi}{3}\right).$$

Тогда определитель системы (2.15) равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ e^{-k_n p} & \alpha e^{\frac{1}{2}k_n p} & \beta e^{\frac{1}{2}k_n p} \\ -e^{-k_n p} & \gamma k_n e^{\frac{1}{2}k_n p} & \delta k_n e^{\frac{1}{2}k_n p} \end{vmatrix} = \sqrt{3}k_n e^{k_n p}\left[\frac{1}{2} - e^{-\frac{3}{2}k_n p}\sin\left(\nu_n p + \frac{\pi}{6}\right)\right].$$

Справедлива

Лемма 2.2. Для произвольных положительных p и l имеет места неравенство $\Delta \neq 0$.

Доказательство. Предположим обратное. Пусть $\Delta = 0$. Тогда получим

$$\frac{1}{2} - e^{-\frac{3}{2}k_n p} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n p + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \qquad \text{или}$$

$$e^{\frac{3}{2}k_n p} = 2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n p + \frac{\pi}{6}\right).$$

Так как $k_n = (\pi n/l)^{2/3} > 0,\ n \in N,$ то последнее равенство выполняется при $p = 0$. Рассмотрим следующие функции

$$y_1(x) = e^{\frac{3}{2}k_n x}, \quad y_2(x) = 2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n x + \frac{\pi}{6}\right), \quad x > 0, \tag{2.17}$$

которые пересекаются при $x = 0$.

Составим уравнение касательных в точке $x = 0$ для обеих кривых.

Так как

$$y_1(0) = 1,\ y_1'(x) = \frac{3}{2}k_n e^{\frac{3}{2}k_n x},\ y_1'(0) = \frac{3}{2}k_n,$$

то уравнение касательной функции $y_1(x)$ в точке $x = 0$ имеет вид

$$y_{11}(x) = \frac{3}{2}k_n x + 1.$$

Точно также, принимая во внимание

$$y_2(0) = 1,\ y_2'(x) = \sqrt{3}k_n \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n x + \frac{\pi}{6}\right),\ y_2'(0) = \frac{3}{2}k_n,$$

находим уравнение касательной для $y_2(x)$ в точке $x=0$:

$$y_{21}(x)=\frac{3}{2}k_n x+1.$$

Следовательно, уравнения касательных обеих кривых в точке $x=0$ совпадают. Кроме того, очевидно, что график функции $y_1(x)$ при $x>0$ расположен выше касательной $y_{11}(x)$, а график функции $y_2(x)$ (синусоидальная линия) – ниже касательной $y_{21}(x)$. Отсюда заключаем, что при $x>0$ обе кривые не пересекаются, то есть касательная является линией раздела кривых и

$$e^{\frac{3}{2}k_n p}\neq 2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n p+\frac{\pi}{6}\right),$$

т.е. $\Delta\neq 0$.

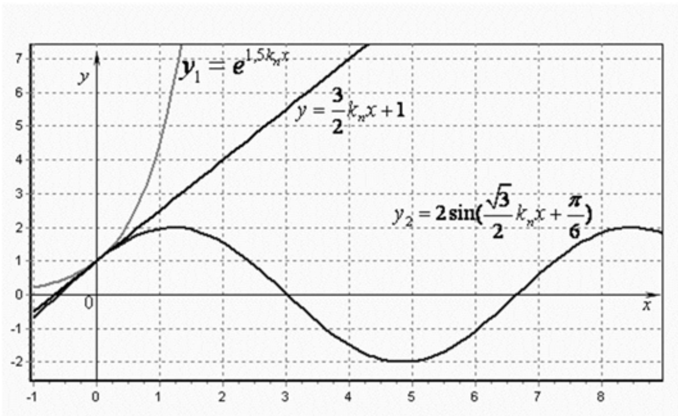

Рис. 2.1

В силу $\Delta\neq 0$, система уравнений (2.15) имеет единственное решение:

$$C_{1n}=\frac{1}{\Delta}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}e^{k_n p}k_n A_{1n}-A_{2n}\delta k_n e^{\frac{1}{2}k_n p}+A_{3n}\beta k_n e^{\frac{1}{2}k_n p}\right],$$

$$C_{2n}=\frac{k_n}{\Delta}\left[-(\beta+\delta)e^{-\frac{1}{2}k_n p}A_{1n}+A_{2n}\delta e^{\frac{1}{2}k_n p}-A_{3n}\frac{\beta}{k_n}e^{\frac{1}{2}k_n p}\right],$$

$$C_{3n}=\frac{1}{\Delta}\left[k_n(\alpha+\gamma)e^{-\frac{1}{2}k_n p}A_{1n}-A_{2n}k_n\left(e^{-k_n p}+\gamma e^{\frac{1}{2}k_n p}\right)+A_{3n}\left(\alpha e^{\frac{1}{2}k_n p}-e^{-k_n p}\right)\right].$$

Подставив C_{in}, $i=1,2,3$, в (2.13), получим

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{1n}B_{1n}(x)+A_{2n}B_{2n}(x)+A_{3n}B_{3n}(x)\right]\sin\frac{\pi n}{l}y. \quad (2.18)$$

где

$$B_{1n}(x)=\frac{\sqrt{3}k_n}{\Delta}\left\{\frac{1}{2}e^{k_n(p-x)}-e^{-\frac{1}{2}k_n(p-x)}\sin\left[\nu_n(p-x)+\frac{\pi}{6}\right]\right\},$$

$$B_{2n}(x)=\frac{k_n}{\Delta}\left\{-e^{k_n\left(\frac{1}{2}p-x\right)}\sin\left(\nu_n p+\frac{\pi}{3}\right)-e^{k_n\left(\frac{1}{2}x-p\right)}\sin\nu_n x+\right.$$
$$\left.+e^{\frac{1}{2}k_n(p+x)}\sin\left[\nu_n(p-x)+\frac{\pi}{3}\right]\right\},$$

$$B_{3n}(x)=\frac{1}{\Delta}\left\{e^{k_n\left(\frac{1}{2}p-x\right)}\sin\nu_n p-e^{-k_n\left(p-\frac{1}{2}x\right)}\sin\nu_n x-\right.$$
$$\left.-e^{\frac{1}{2}k_n(p+x)}\sin\left[\nu_n(p-x)\right]\right\}.$$

Если, теперь докажем, что ряд (2.18) и его производные u_{xxx}, u_{yy} сходятся равномерно в области $\overline{D}$, то функция $u(x,y)$ определяемая этим рядом, даёт решение задачи A_1.

Докажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (2.18). Из (2.18) имеем

$$\left|u(x,y)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|A_{1n}B_{1n}(x)+A_{2n}B_{2n}(x)+A_{2n}B_{2n}(x)\right|\right)\left|\sin\frac{n\pi}{l}y\right|\le$$
$$\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|A_{1n}\right|\left|B_{1n}(x)\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\left|A_{2n}\right|\left|B_{2n}(x)\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\left|A_{3n}\right|\left|B_{3n}(x)\right|. \quad (2.19)$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание условие, $\psi_i(0)=\psi_i(l)=\psi_i''(0)=\psi_i''(l)=0,\ i=1,2,3$, из (2.16) получим

$$\psi_{in}=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\frac{\psi_{in}'''}{n^3},\ i=1,2,\qquad \psi_{3n}=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^2\frac{\psi_{3n}''}{n^2},$$

где

$$\psi_{in}'''=\frac{2}{l}\int_0^l\psi_{in}'''(\eta)\cos\frac{n\pi}{l}\eta d\eta,\ i=1,2,\qquad \psi_{3n}''=\frac{2}{l}\int_0^l\psi_{3n}''(\eta)\sin\frac{n\pi}{l}\eta d\eta,$$

Тогда

$$|A_{in}|\le 2M_i\frac{|\psi_{in}'''|}{n^3},\ i=1,2,\quad |A_{3n}|\le 2M_3\frac{|\psi_{3n}''|}{n^2},\quad M_j=Const>0,\ j=1,2,3.$$

Учитывая эти оценки, из (2.19) находим

$$|u(x,y)|\le 2M_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\psi_{1n}'''|}{n^3}|B_{1n}(x)|+2M_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\psi_{2n}'''|}{n^3}|B_{2n}(x)|+ \\ +2M_3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\psi_{3n}''|}{n^2}|B_{3n}(x)|. \tag{2.20}$$

Оценим функцию $B_{in}(x)$. В силу $0\le x\le p$

$$|B_{1n}(x)|\le\frac{\sqrt{3}}{|\overline{\Delta}|}\left[\frac{1}{2}e^{-k_nx}+e^{-\frac{1}{2}k_n(3p-x)}\right]\le N_1,$$

$$|B_{2n}(x)|\le\frac{1}{\sqrt{3}|\overline{\Delta}|}\left[e^{-k_n\left(\frac{1}{2}p+x\right)}+e^{-k_n\left(2p-\frac{1}{2}x\right)}+e^{-\frac{1}{2}k_n(p-x)}\right]\le N_2,$$

$$|B_{3n}(x)|\le\frac{1}{\sqrt{3}k_n|\overline{\Delta}|}\left[e^{-k_n\left(\frac{1}{2}p+x\right)}+e^{-\frac{1}{2}k_n(p-x)}+e^{-k_n\left(2p-\frac{1}{2}x\right)}\right]\le\frac{1}{k_n}N_3,$$

где

$$\Delta=\sqrt{3}k_ne^{k_np}\overline{\Delta},\qquad \overline{\Delta}=\frac{1}{2}-e^{-\frac{3}{2}k_np}\sin\left(\nu_np+\frac{\pi}{6}\right).$$

Тогда из (2.20) получим

$$|u(x,y)| \le 2M_1N_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\psi'''_{1n}|}{n^3} + 2M_2N_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\psi'''_{2n}|}{n^3} + 2M_3N_3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\psi''_{3n}|}{n^{8/3}} < \infty.$$

Отсюда следует, что ряд (2.18) сходится абсолютно и равномерно.

Теперь докажем, что производные ряда (2.18) по обеим переменным, также сходятся абсолютно и равномерно в области $\overline{D}$. Нетрудно убедиться, что имеет место равенство

$$B_{1n}^{(q)}(x) = \frac{\sqrt{3}k_n^{q+1}}{\Delta}\left\{(-1)^q\frac{1}{2}e^{k_n(p-x)} - e^{-\frac{1}{2}k_n(p-x)}\sin\left(\sigma - q\frac{\pi}{6}\right)\right\},$$

$$B_{2n}^{(q)}(x) = \frac{k_n^{q+1}}{\Delta}\left\{(-1)^{q+1}\sin\left(\nu_n p + \frac{\pi}{3}\right)e^{k_n\left(\frac{1}{2}p - x\right)} - \sin\left(\nu_n x + q\frac{\pi}{3}\right)e^{-k_n\left(\frac{1}{2}p - x\right)} + \right.$$
$$\left. + e^{\frac{1}{2}k_n(p+x)}\sin\left(\chi - q\frac{\pi}{3}\right)\right\},$$

$$B_{3n}^{(q)}(x) = \frac{k_n^{q}}{\Delta}\left\{(-1)^{q}\sin\nu_n p e^{k_n\left(\frac{1}{2}p - x\right)} - \sin\left(\nu_n x + q\frac{\pi}{3}\right)e^{-k_n\left(p - \frac{1}{2}x\right)} - \right.$$
$$\left. - e^{\frac{1}{2}k_n(p+x)}\sin\left[\nu_n(p-x) - q\frac{\pi}{3}\right]\right\},$$

где

$$\sigma = \nu_n(p-x) + \frac{\pi}{6}, \quad \chi = \nu_n(p-x) + \frac{\pi}{3}, \quad q = 0,1,2,3.$$

Для функции $B_{in}^{(q)}(x)$ справедливы оценки

$$\left|B_{1n}^{(q)}\right| \le \frac{k_n^q}{\left|\overline{\Delta}\right|}\left[\frac{1}{2}e^{-k_n x} + e^{-\frac{1}{2}k_n(3p-x)}\right] \le N_4k_n^q,$$

$$\left|B_{2n}^{(q)}\right| \le \frac{k_n^q}{\sqrt{3}\left|\overline{\Delta}\right|}\left[e^{-k_n\left(\frac{1}{2}p+x\right)} + e^{-k_n\left(2p-\frac{1}{2}x\right)} + e^{-\frac{1}{2}k_n(p-x)}\right] \le N_5k_n^q,$$

$$\left|B_{3n}^{(q)}\right| \le \frac{k_n^{q-1}}{\sqrt{3}\left|\overline{\Delta}\right|}\left[e^{-k_n\left(\frac{1}{2}p+x\right)}+e^{-k_n\left(2p-\frac{1}{2}x\right)}+e^{-k_n\left(2p-\frac{1}{2}x\right)}\right] \le N_6 k_n^{q-1},$$

где $0<x<p,\;\; q=0,1,2,3,$ а $N_j = const > 0, \quad j=4,5,6.$

Вычислив производные по x, из (2.18) получаем

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{1n}B_{1n}'''(x)+A_{2n}B_{2n}'''(x)+A_{3n}B_{3n}'''(x)\right]\sin\frac{n\pi}{l}y.$$

Отсюда, имеем

$$\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left[|A_{1n}|\left|B_{1n}'''(x)\right|+|A_{2n}|\left|B_{2n}'''(x)\right|+|A_{3n}|\left|B_{3n}'''(x)\right|\right]\le$$

$$\le 2M_1N_4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\psi_{1n}'''\right|}{n}+2M_2N_5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\psi_{2n}'''\right|}{n}+2M_3N_6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\psi_{3n}''\right|}{n^{2/3}}.$$

Используя неравенство Коши- Буняковского и Бесселя [27], получим

$$\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|\le 2M_4\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\psi_{1n}'''\right|^2}\sqrt{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}+2M_5\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\psi_{2n}'''\right|^2}\sqrt{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}+$$

$$+2M_6\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\psi_{3n}''\right|^2}\sqrt{\frac{1}{n^{4/3}}}\le 2M_4\sqrt{\frac{2}{l}\left\|\psi_1'''\right\|^2}\sqrt{\frac{\pi^2}{6}}+2M_5\sqrt{\frac{2}{l}\left\|\psi_2'''\right\|^2}\sqrt{\frac{\pi^2}{6}}+$$

$$+2M_6\sqrt{\frac{2}{l}\left\|\psi_3''\right\|^2}\sqrt{\frac{1}{n^{4/3}}}\le 2M_4\frac{\pi}{\sqrt{3l}}\left\|\psi_1'''\right\|+2M_5\frac{\pi}{\sqrt{3l}}\left\|\psi_2'''\right\|+$$

$$+2M_6\sqrt{\frac{2}{l}}\sqrt{\frac{1}{n^{4/3}}}\left\|\psi_3''\right\|<\infty,$$

так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\psi_{in}'''\right|^2=\frac{2}{l}\left\|\psi_{in}'''\right\|_{L_2(0,l)}^2,\ i=1,2,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\psi_{3n}''\right|^2=\frac{2}{l}\left\|\psi_3'''\right\|_{L_2(0,l)}^2,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},$$

здесь $M_{i+3}=M_iN_i,\quad i=1,2,3.$

Следовательно, ряд, соответствующий функции $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, сходится абсолютно и равномерно. Абсолютная и равномерная сходимость второй производной по y ряда (2.18) следует из равенства $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и доказанного выше.

Нетрудно убедиться, что для всех функций $B_{in}^{(q)}(x)$ при $q=3$ справедливо равенство:

$$B_{in}^{(3)}(x)+\lambda_n B_{in}(x)=0,\ i=1,2,3,$$

а для функции $B_{in}(x)$ имеет место равенство

$$\begin{Vmatrix} B_{1n}(0) & B_{1n}(p) & B_{1n}'(p) \\ B_{2n}(0) & B_{2n}(p) & B_{2n}'(p) \\ B_{3n}(0) & B_{3n}(p) & B_{3n}'(p) \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{2.21}$$

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема 2.3. Если $\psi_1(y),\psi_2(y)\in C^3[0,l]$, $\psi_3(y)\in C^2[0,l]$ и выполняются условия согласования (2.4), то решение задачи A_1 существует и представляется рядом (2.18).

Подставив значения A_{in} из (2.16) в ряд (2.18), получим решение задачи A_1 в явном виде и

$$u(x,y)=\frac{2}{l}\int_0^l R_1(x,y,\eta)\psi_1(\eta)d\eta+\frac{2}{l}\int_0^l R_2(x,y,\eta)\psi_2(\eta)d\eta+$$
$$+\frac{2}{l}\int_0^l R_3(x,y,\eta)\psi_3(\eta)d\eta, \tag{2.22}$$

где

$$R_i(x,y,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{in}(x)\sin\frac{n\pi}{l}y\sin\frac{n\pi}{l}\eta, \quad i=1,2,3.$$

Удовлетворение граничным условиям (2.3) функции (2.22) проверяется непосредственно.

В самом деле, согласно (2.21), из (2.22) при $x=0$ следует, что

$$u(0,y)=\frac{2}{l}\int_0^l\left[\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}y\sin\frac{\pi n}{l}\eta\right]\psi_1(\eta)d\eta=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int_0^l\psi_1(\eta)\sin\frac{\pi n}{l}\eta d\eta\right]\sin\frac{\pi n}{l}y=\sum_{n=1}^{\infty}A_{1n}\sin\frac{\pi n}{l}y=\psi_1(y).$$

Выполнение остальных граничных условий проверяется точно так же.

Задача A_2 исследуется, как и задача A_1.

§ 2.2. Задача типа Жевре для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками

В области $D=\{(x,y):-p<x<p,\,0<y<q\}$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-a_i^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \ i=1 \text{ в } D_1, \quad i=2 \text{ в } D_2. \qquad (2.23)$$

Обозначим $D_1=D\cap(x<0)$, $D_2=D\cap(x>0)$, $I=D\cap(x=0)$, тогда $D=D_1\cup D_2\cup I$.

Для уравнения (1) в области D исследуем следующую задачу типа Жевре:

Задача G. Найти регулярное решение уравнения (1) в областях D_i, $i=1,2$ из класса $C^{3,2}_{x,y}(D_1)\cap C^{3,2}_{x,y}(D_2)\cap C^{2,1}_{x,y}(\overline{D_1})\cap C^{2,1}_{x,y}(\overline{D_2})$ и удовлетворяющее следующим граничным условиям

$$u(x,0)=u(x,l)=0,\ -p<x<p, \qquad (2.24)$$

$$u(-p,y)=\psi_1(y),\ u(p,y)=\psi_2(y),\ u_x(p,y)=\psi_3(y) \qquad (2.25)$$

и выполняются следующие условия склеивания

$$u(-0,y)=u(+0,y),\ u_x(-0,y)=u_x(+0,y),\ u_{xx}(-0,y)=u_{xx}(+0,y) \qquad (2.26)$$

где $\psi_i(y)\in C^3[0,l],\ i=1,2,\ \psi_3(y)\in C^2[0,l]$, а также

$$\psi_i(0)=\psi_i(l)= \ =\psi_i''(0)=\psi_i''(l)=0.$$

Отметим, что задача Жевре изучено для уравнения $u_{xx}-\operatorname{sgn}x\,u_y=f(x,y)$ в работе [30], а для уравнения $u_{xxx}-\operatorname{sgn}x\,u_y=F(x,y)$ в работе [22].

Теорема 2.4. Если задача G имеет решение, то оно единственно.

Доказательство. Пусть задача G имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет уравнению (2.23) и однородным краевым условиям. Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}$.

Рассмотрим тождество

$$u\left(u_{xxx}-a_i^2u_{yy}\right)=0 \text{ или } \frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2\right)-a_i^2\frac{\partial}{\partial y}\left(uu_y\right)+a_i^2u_y^2=0.$$

Интегрируя это тождество сначала по области D_1, затем по области D_2 и используя соответствующие краевые условия, получим

$$\int_0^l\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2\right)\Big|_{x=-0}dy=-\frac{1}{2}\int_0^l u_x^2(-p,y)dy-a_1^2\iint_{D_1}u_y^2(x,y)dxdy=0, \qquad (2.27)$$

$$\int_0^l \left(uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 \right)\Big|_{x=+0} dy = a_2^2 \iint_{D_2} u_y^2(x,y)\,dxdy\,. \tag{2.28}$$

Согласно условиям задачи G, интегралы стоящие в левых частях равенство (5) и (6) равны между собой. Учитывая это, имеем

$$\frac{1}{2}\int_0^l u_x^2(-p,y)\,dy + a_1^2 \iint_{D_1} u_y^2(x,y)\,dxdy + a_2^2 \iint_{D_2} u_y^2(x,y)\,dxdy = 0$$

Это равенство возможно только, при $u_y(x,y)=0$ как в D_1, так и в D_2. Следовательно $u(x,y)=f(x)$ в D_1 и D_2. Так как $u(x,0)=f(x)=0$. Отсюда, в силу непрерывности $u(x,y)$ в D, $u(x,y)=0$ в D.

Существование решения

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу: Найти решение уравнения (2.23) не равное тождественно нулю, удовлетворяющее условиям (2.24) и представимое в виде (2.6).

Подставляя (2.6) в уравнение (2.23) и разделяя переменные, имеем

$$X''' + \lambda a_i^2 X = 0, \tag{2.29}$$

и (2.8). Решение $\{(2.8),(2.9)\}$ имеет вид (2.11).

Общее решение уравнения (2.29)

$$X_n(x) = C_{1n}e^{-k_n x} + e^{\frac{1}{2}k_n x}\left(C_{2n}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}k_n x + C_{3n}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}k_n x\right)$$

здесь C_{in} – произвольные постоянные,

$$k_n = \sqrt[3]{\lambda_n a_i^2} = \left(\frac{\pi n}{l} a_i\right)^{2/3}, \quad i = 1,2, \quad n = 1,2,3,...$$

Согласно формуле (2.6), и в силу линейности и однородности уравнения (2.23) сумма частных решений будет также решением уравнения (2.23), то же справедливо и для ряда

$$u_i(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_{1in} e^{-k_n x} + e^{\frac{1}{2}k_n x}(C_{2in}\cos\nu_n x + C_{3in}\sin\nu_n x)] \sin\frac{\pi n}{l} y, \quad (2.29)$$

где $\nu_n = \left(\sqrt{3}/2\right) k_n$, $i = 1$ в D_1, $i = 2$ в D_2.

Функция, определяемая формальным рядом (2.29), удовлетворяет условиям (2.24).

Требуя от функции $u(x,y)$, определяемой рядом (2.29) выполнения краевых условий (2.25) и условий склеивания (2.26) получим систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов C_{ijn}, i=1,2,3, j=1,2:

$$\begin{cases} C_{11} - C_{12} + C_{21} - C_{22} = 0 \\ C_{11} - C_{12} - \frac{1}{2}C_{21} + \frac{1}{2}C_{22} - \frac{\sqrt{3}}{2}C_{31} + \frac{\sqrt{3}}{2}C_{32} = 0 \\ C_{11} - C_{12} - \frac{1}{2}C_{21} + \frac{1}{2}C_{22} + \frac{\sqrt{3}}{2}C_{31} - \frac{\sqrt{3}}{2}C_{32} = 0 \\ e^{k_n p}C_{11} + e^{-\frac{1}{2}k_n p}\cos\nu_n p\, C_{21} - e^{-\frac{1}{2}k_n p}\sin\nu_n p\, C_{31} = A_{1n} \\ e^{-k_n p}C_{12} + e^{\frac{1}{2}k_n p}\cos\nu_n p\, C_{22} + e^{\frac{1}{2}k_n p}\sin\nu_n p\, C_{32} = A_{2n} \\ -e^{-k_n p}C_{12} + e^{\frac{1}{2}k_n p}\cos(\nu_n p + \frac{\pi}{3})C_{22} + e^{\frac{1}{2}k_n p}\sin(\nu_n p + \frac{\pi}{3})C_{32} = \frac{1}{k_n}A_{2n}. \end{cases} \quad (2.30)$$

где числа A_{in} имеет вид (2.16).

Вычисления показывает, что определитель система (2.30):

$$\Delta = \frac{9}{2}e^{-k_n p}\left[\frac{1}{2}e^{3k_n p} - \sin\left(\sqrt{3}k_n p + \frac{\pi}{6}\right)\right] \neq 0.$$

Тогда решение системы (2.30) запишется в виде $C_{ijn} = \dfrac{\Delta_{ij}}{\Delta}$, где

$$\Delta_{11} = \Delta_{12} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}e^{k_n p}A_{1n} - \sin\left(\sqrt{3}k_n p + \frac{\pi}{3}\right)A_{2n} + \frac{1}{k_n}\sin\sqrt{3}k_n p A_{3n}\right]$$

$$\Delta_{21} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left[-\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}k_n p}\sin\left(\nu_n p + \frac{\pi}{6}\right)A_{1n} + \left(e^{\frac{3}{2}k_n p}\sin\left(\nu_n p + \frac{\pi}{3}\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - e^{-\frac{3}{2}k_n p}\sin\nu_n p\right)A_{2n} - \frac{2}{k_n}\sin\nu_n p\, ch\nu_n p\, A_{3n}\right]$$

$$\Delta_{22} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(-2e^{-\frac{1}{2}k_n p}\sin\nu_n p\, A_{1n} + 2\sin\nu_n p\, ch\nu_n p\, A_{2n} -\right.$$

$$\left. - \frac{2}{k_n}\cos\nu_n p\, sh\nu_n p\, A_{3n}\right)$$

$$\Delta_{31} = \Delta_{32} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left[\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}k_n p}\cos\left(\nu_n p + \frac{\pi}{6}\right)A_{1n} + \left(e^{\frac{3}{2}k_n p}\cos\left(\nu_n p + \frac{\pi}{3}\right) +\right.\right.$$

$$\left.\left. + e^{-\frac{3}{2}k_n p}\cos\nu_n p\right)A_{2n} + \frac{2}{k_n}\cos\nu_n p\, sh\nu_n p\, A_{3n}\right]$$

Подставив C_{ijn} в (2.29) в области D_1 получим

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[D_{11}(x)A_{1n} + D_{21}(x)A_{2n} + D_{31}(x)A_{31}\right]\sin\frac{\pi n}{l}y, \qquad (2.31)$$

здесь

$$D_{11}(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2\Delta}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}e^{k_n(p-x)}-\sqrt{3}e^{\frac{1}{2}k_n(x-p)}\cos\nu_n x+\right.$$

$$\left.+\sqrt{3}e^{\frac{1}{2}k_n(x-p)}\cos\left(\nu_n p+\frac{\pi}{6}\right)\sin\nu_n x\right]$$

$$D_{21}(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2\Delta}\left[-e^{-k_n x}\sin\left(\sqrt{3}k_n p+\frac{\pi}{3}\right)+e^{\frac{1}{2}k_n(3p+x)}\sin\left(\nu_n(p-x)+\frac{\pi}{3}\right)-\right.$$

$$\left.-e^{\frac{1}{2}k_n(x-3p)}\sin\nu_n(p+x)\right]$$

$$D_{31}(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2k_n\Delta}\left[e^{-k_n x}\sin\sqrt{3}k_n p-2e^{\frac{1}{2}k_n x}\left(\sin\nu_n p\cos\nu_n x ch\nu_n p-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sin\nu_n x\cos\nu_n p\, sh\nu_n p\right)\right]$$

Подставив C_{ijn} в (2.29) в области D_2 получим

$$u_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[D_{12}(x)A_{1n}+D_{22}(x)A_{2n}+D_{32}(x)A_{3n}\right]\sin\frac{\pi n}{l}y, \qquad (2.32)$$

здесь

$$D_{12}(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2\Delta}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}e^{k_n(p-x)}-e^{\frac{1}{2}k_n(x-p)}\sin\nu_n p\cos\nu_n x+\right.$$

$$\left.+\sqrt{3}e^{\frac{1}{2}k_n(x-p)}\cos\left(\nu_n p+\frac{\pi}{6}\right)\sin\nu_n x\right]$$

$$D_{22}(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2\Delta}\left[-e^{-k_n x}\sin\left(\sqrt{3}k_n p+\frac{\pi}{3}\right)+2e^{\frac{1}{2}k_n x}\sin\nu_n p\cos\nu_n x\, ch\nu_n p-\right.$$

$$\left.-e^{\frac{1}{2}k_n(x-3p)}\sin\nu_n x\cos\nu p-e^{\frac{1}{2}k_n(x+3p)}\sin\nu_n x\cos\left(\nu_n p+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$D_{32}(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2k_n\Delta}\left[e^{-k_n x}\sin\sqrt{3}k_n p-2e^{\frac{1}{2}k_n x}\left(\sin\nu_n p\cos\nu_n x\, ch\nu_n p-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sin\nu_n x\cos\nu_n p\, sh\nu_n p\right)\right]$$

Если ряды (2.31) , (2.32) и его производные входящие в уравнения (2.23), сходятся равномерно, то функции $u_i(x,y)$ определяемые рядами в области D_i даёт решение задачи G.
Из (12) имеем

$$\left|u_1(x,y)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left|D_{11}(x)\right|\left|A_{1n}\right| + \left|D_{21}(x)\right|\left|A_{2n}\right| + \left|D_{31}(x)\right|\left|A_{3n}\right|\right]. \qquad (2.33)$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание условие, $\psi_i(0)=\psi_i(l)=\psi_i''(0)=\psi_i''(l)=0,\ i=1,2,3$, из (2.16) получим

$$\psi_{in} = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{\psi_{in}'''}{n^3},\ i=1,2, \qquad \psi_{3n} = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \frac{\psi_{3n}''}{n^2},$$

где

$$\psi_{in}''' = \frac{2}{l}\int_0^l \psi_{in}'''(\eta)\cos\frac{n\pi}{l}\eta d\eta,\ i=1,2, \qquad \psi_{3n}'' = \frac{2}{l}\int_0^l \psi_{3n}''(\eta)\sin\frac{n\pi}{l}\eta d\eta.$$

Тогда

$$\left|A_{in}\right| \le 2M_i\frac{\left|\psi_{in}'''\right|}{n^3},\ i=1,2,\quad \left|A_{3n}\right| \le 2M_3\frac{\left|\psi_{3n}''\right|}{n^2},\quad M_j = Const > 0,\ j=1,2,3.$$

Отсюда

$$A_{in} = \frac{2}{n^3}N,\ i=1,2,\ A_{3n} = \frac{2}{n^2}N,\ N = \max M_i,\ i=1,2,3.$$

Теперь оценим функции $D_{i1}(x_0)$.Вычисления показывает что:

$$\left|D_{11}(x_0)\right| \le \frac{1}{\left|\overline{\Delta}\right|}\left[\frac{1}{2}e^{-k_n(p-x_0)} + e^{-\frac{1}{2}k_n(5p-x_0)}\right],$$

$$\left|D_{21}(x_0)\right| \le \frac{\sqrt{3}}{3\left|\overline{\Delta}\right|}\left[e^{-k_n(2p+x_0)} + e^{-\frac{1}{2}k_n(p-x_0)} + e^{-\frac{1}{2}k_n(7p-x_0)}\right],$$

$$\left|D_{31}(x_0)\right| \le \frac{\sqrt{3}}{3k_n\left|\overline{\Delta}\right|}\left[e^{-k_n(2p+x_0)} + e^{-k_n\left(p-\frac{1}{2}x_0\right)} + e^{-k_n\left(3p-\frac{1}{2}x_0\right)}\right].$$

где

$$\overline{\Delta} = \frac{1}{2} - e^{-3k_n a}\sin\left(\sqrt{3}k_n a + \frac{\pi}{6}\right)$$

Тогда из (2.33), для первое слагаемого получим оценку

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|D_{11}(x)\right|\left|A_{1n}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^3}N\frac{1}{\left|\overline{\Delta}\right|}\left[\frac{1}{2}e^{-k_n(p-x)} + e^{-\frac{1}{2}k_n(5p-x)}\right] \le$$

$$\le CN\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-k_n(p-x)} + 2e^{-\frac{1}{2}k_n(5p-x)}}{n^3}.$$

Оценив, остальное слагаемой ряда (14), приходим к оценке

$$\left|u_1(x,y)\right| \le M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}.$$

Отсюда следует, что ряд (2.31) равномерно сходится в области $\overline{D_1}$.

Аналогично доказывается, равномерная сходимость ряда (2.32) в области $\overline{D_2}$.

Точно также доказывается сходимость рядов составлен-
ных

почленным дифференцированием рядов (2.31) и (2.32), входящих в уравнение (2.23).

Итак, доказана следующую теорема.

Теорема 2.5. Если функции $\psi_i(y) \in C^3[0,l]$, $i = 1,2$, $\psi_3(y) \in C^2[0,l]$, а также $\psi_i(0) = \psi_i(l) = \; = \psi_i''(0) = \psi_i''(l) = 0$, то решение задачи G, существует и представляется рядом (2.31) и (2.32) соответственно в областях D_1 и D_2.

§ 2.3. Краевые задачи в полуограниченных областях

Рассмотрим уравнение (2.1) в областях
$D^{+}=\{(x,y):0<x<\infty,\ 0<y<l\}$
и $D^{-}=\{(x,y):-\infty<x<0,\ 0<y<l\}$.

Задача B_1**.** Найти решение уравнения (2.1) в области D^{+} из класса $C_{x,y}^{3,2}(D^{+})\cap C_{x,y}^{2,1}(D^{+}\cup\Gamma_1)$, имеющего ограниченную вторую производную по x, при $x\to+\infty$ и удовлетворяющего следующим краевым условиям

$$u(x,0)=u(x,l)=0,\ \ 0<x<\infty; \tag{2.34}$$

$$\begin{gathered}u(0,y)=\psi_1(y),\ \ 0\le y\le l,\\ \lim_{x\to+\infty}u(x,\mathrm{y})=\lim_{x\to+\infty}u_x(x,\mathrm{y})=0,\quad 0\le y\le l,\end{gathered} \tag{2.35}$$

где $\Gamma_1=\partial D^{+}-$граница области D^{+}, $\psi_1(y)\in C^3[0,l]$- заданные функции, причем

$$\psi_1(0)=\psi_1(l)=\psi_1''(0)=\psi_1''(l)=0 \tag{2.36}$$

Задача B_2**.** Найти решение уравнения (2.1) в области D^{-}, из класса $C_{x,y}^{3,2}(D^{-})\cap C_{x,y}^{2,1}(D^{-}\cup\Gamma_2)$, имеющее ограниченную первую и вторую производные по x, при $x\to-\infty$ и удовлетворяющее краевым условиям при $-\infty<x<0$ (2.34) и

$$\begin{gathered}u(0,y)=\psi_2(y),\quad u_x(0,y)=\psi_3(y),\quad 0\le y\le l,\\ \lim_{x\to-\infty}u(x,y)=0,\quad 0\le y\le l,\end{gathered} \tag{2.37}$$

где $\Gamma_2=\partial D^{-}-$граница области D^{-}, $\psi_2(y)\in C^3[0,l]$, $\psi_3(y)\in C^2[0,l]$ – заданные функции, причем

$$\psi_i(0)=\psi_i(l)=\psi_i''(0)=\psi_i''(l)=0,\quad i=2,3. \qquad (2.38)$$

Теорема 2.6. Если задачи B_1 и B_2 имеет решение, то оно единственно.

Доказательство. Пусть задача B_1 (B_2) имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет уравнению (2.1) и однородным краевым условиям, т.е. $\psi_i(x)=0,\ i=1,\ (i=2,3)$. Докажем, что $u(x,y)=0$ в $D^+\left(D^-\right)$.

В области $D^+\left(D^-\right)$ справедливо тождество (2.5). Интегрируя это тождество по области $D_{cd}=\left\{(x,y):c<x<d,\ 0<y<l\right\}$, имеем

$$\int_0^l\left[u(d,y)u_{xx}(d,y)-u(c,y)u_{xx}(c,y)\right]dy-\frac{1}{2}\int_0^l\left[u_x^2(d,y)-u_x^2(c,y)\right]dy-$$
$$-\int_c^d\left[u(x,l)u_y(x,l)-u(x,0)u_y(x,0)\right]dx+\iint\limits_{D_{cd}}u_y^2(x,y)dxdy=0. \qquad (2.39)$$

Если $c\to 0,\quad d\to+\infty$, то $D_{cd}\to D^+$. При этом, учитывая однородное краевое условие задачи B_1, т.е. $\psi_1(x)=0$, и свойства функции $u(x,y)$ при $x\to\infty$, из (2.39) получаем

$$\frac{1}{2}\int_0^l u_x^2(0,y)dy+\iint\limits_{D^+}u_y^2(x,y)dxdy=0.$$

Отсюда следует, что $u_y(x,y)=0$, т.е. $u(x,y)=\phi(x)$ в D^+. Полагая здесь $y=0$ и учитывая $u(x,0)=0$, имеем $\phi(x)=0$. Тогда $u(x,\text{y})=0$ в $D^+\cup\Gamma_1$.

Если $c\to-\infty,\quad d\to 0$, то $D_{cd}\to D^-$. При этом, учитывая однородные краевые условия задачи B_2, т.е. $\psi_i(x)=0,\ i=2,3$ и свойства функции $u(x,y)$ при $x\to-\infty$, из (2.39) получаем

$$\frac{1}{2}\lim_{c\to-\infty}\int_0^l u_x^2(\text{c},y)\,dy+\iint_{D^+}u_y^2(x,y)\,dxdy=0.$$

Отсюда также легко следует, что $u(x,y)\equiv 0$ в $D^-\cup\Gamma_2$.

Законность предельных переходов в интегралах обеспечивается условиями на граничные функции.

Теорема 2.6 доказана.

С целью доказательства существования решения задачи B_1, как и в задаче A_1 рассмотрим вспомогательную задачу $\{(2.1),(2.34)\}$. Тогда, поступая как и в задаче $\{(2.1),(2.2)\}$, находим функции (2.11) и (2.12).

Далее, по постановке задачи B_1 следует, что

$$\lim_{x\to+\infty}X(x)=\lim_{x\to+\infty}X'(x)=0.$$

Следовательно, в (2.12) необходимо считать, что $C_{2n}=C_{3n}=0$. Тогда функция (2.12) примет вид

$$X_n(x)=C_{1n}e^{-k_nx}. \tag{2.40}$$

Теперь, в силу (2.10) и (2.40), решение задачи B_1 ищем в виде

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{1n}e^{-k_nx}\sin\frac{\pi n}{l}y. \tag{2.41}$$

Требуя выполнения условия (2.35) от ряда (2.41), получим

$$u(0,y)=\psi_1(y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{1n}e^{-k_nx}\sin\frac{\pi n}{l}y,$$

где C_{1n} – коэффициенты Фурье функции $\psi_1(y)$, т.е.

$$C_{1n}=\psi_{1n}=\frac{2}{l}\int_0^l\psi_1(\eta)\sin\frac{\pi n}{l}\eta d\eta. \qquad (2.42)$$

Если ряд (2.41) и его производные u_{xxx} и u_{yy} сходятся абсолютно и равномерно в области $\overline{D^+}$, то функция (2.41) даёт решение задачи B_1. Равномерная сходимость ряда (2.41) и его производных доказывается аналогично задаче A_1.

Учитывая условия на заданные функции, из (2.41) имеем

$$\left|u(x,y)\right|\le M_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\psi_{1n}'''\right|}{n^3}e^{-k_nx}<\infty, \qquad \left|\frac{\partial^3u}{\partial x^3}\right|=\left|\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right|\le M_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\psi_{1n}'''\right|}{n}e^{-k_nx}<\infty.$$

Отсюда следует, что ряд (2.41) и ряд из частных производных сходится равномерно в $\overline{D^+}$.

Подставляя (2.42) в (2.41), получим

$$u(x,y)=\int_0^l\left[\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-k_nx}\sin\frac{\pi n}{l}y\sin\frac{\pi n}{l}\eta\right]\psi_1(\eta)d\eta. \qquad (2.43)$$

Следовательно, функция (2.43) дает решение задачи B_1.

Если рассматривается область D^-, т.е. задача B_2, то $\lim\limits_{x\to-\infty}X(x)=0.$

Поэтому в (2.12) должно быть $C_{1n}=0.$ Тогда функция (2.12) имеет вид

$$X_n(x)=e^{\frac{1}{2}k_nx}\left(C_{2n}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}k_nx+C_{3n}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}k_nx\right). \qquad (2.44)$$

В силу (2.10) и (2.11), (2.44), решение задачи B_2 ищем в виде

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{2n}e^{\frac{1}{2}k_nx}\cos\nu_nx+C_{3n}e^{\frac{1}{2}k_nx}\sin\nu_nx\right]\sin\frac{\pi n}{l}y. \qquad (2.45)$$

Требуя от ряда (2.45) выполнения краевых условий (2.37), получим

$$u(0,y)=\psi_2(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{C}_{2n}\sin\frac{\pi n}{l}y,\quad u_x(0,y)=\psi_3(y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{4n}\sin\frac{n\pi}{l}y,$$

где

$$C_{4n}=\frac{1}{2}k_nC_{2n}+\frac{\sqrt{3}}{2}C_{3n},$$

C_{2n} и C_{4n} – коэффициенты Фурье функций $\psi_2(y)$ и $\psi_3(y)$, т.е.

$$C_{2n}=\frac{2}{l}\int_0^l\psi_2(\eta)\sin\frac{n\pi}{l}\eta d\eta,\quad C_{4n}=\frac{2}{l}\int_0^l\psi_3(\eta)\sin\frac{n\pi}{l}\eta d\eta,$$

$$C_{3n}=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{k_n}C_{4n}-\frac{1}{\sqrt{3}}C_{2n}.$$

Подставляя значения C_{2n} и C_{3n} в ряд (2.45), получим

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{2}k_nx}\left[C_{2n}\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\nu_nx+\frac{\pi}{6}\right)+C_n\frac{2}{\sqrt{3}k_n}\sin\nu_nx\right]\sin\frac{\pi n}{l}y. \tag{2.46}$$

Учитывая условия на заданные функции, как и в задаче A_1 из (2.46) получим

$$\left|u(x,y)\right|\le M_3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\psi_{2n}'''\right|}{n^3}e^{\frac{1}{2}k_nx}+M_4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\psi_{3n}''\right|}{n^{8/3}}e^{\frac{1}{2}k_nx}<\infty,$$

$$\left|\frac{\partial^3u}{\partial x^3}\right|=\left|\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right|\le M_5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\psi_{in}'''\right|}{n}e^{\frac{1}{2}k_nx}+M_6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\psi_{3n}'''\right|}{n^{2/3}}e^{\frac{1}{2}k_nx}<\infty.$$

Отсюда следует, что ряд (2.46) и его частные производные сходятся абсолютно и равномерно в $\overline{D^-}$.

Подставив выражение C_{2n} и C_{4n} в (2.46), получаем явное выражение решения задачи B_2:

$$u(x,y)=\frac{2}{l}\int_0^l R_1(x,y,\eta)\psi_2(\eta)d\eta+\frac{2}{l}\int_0^l R_2(x,y,\eta)\psi_3(\eta)d\eta, \quad (2.47)$$

где

$$R_1(x,y,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}k_n x}\cos\left(\nu_n x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi n}{l}y\sin\frac{\pi n}{l}\eta,$$

$$R_2(x,y,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{3}k_n}e^{\frac{1}{2}k_n x}\sin\nu_n x\sin\frac{\pi n}{l}y\sin\frac{\pi n}{l}\eta.$$

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема 2.7. Если $\psi_i(y)\in C^3[0,l]$, $i=1,2,$ $\psi_3(y)\in C^2[0,l]$, и выполняются условия (2.36) и (2.38), то решение задачи B_1 и B_2 существует и представляется в виде (2.43) и (2.47) соответственно.

§ 2.4. Третья краевая задача в конечной и бесконечной областях

В области $D=\{(x,y):0<x<p,\ 0<y<l\}$ для уравнения (2.1) рассмотрим следующие краевые задачи.

Задача E_1. Найти решение уравнения (2.1) в области D из класса, $C^{3,2}_{x,y}(D)\cap C^{2,1}_{x,y}(\overline{D})$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\begin{cases}\alpha u(x,0)+\beta u_y(x,0)=0,\\ \gamma u(x,l)+\delta u_y(x,l)=0,\end{cases}\quad 0\le x\le p, \quad (2.48)$$

$$u(0,y)=\psi_1(y),\ u(p,y)=\psi_2(y),\ u_x(p,y)=\psi_3(y),\quad 0\le y\le l. \quad (2.49)$$

Здесь, $\alpha,\ \beta$ и $\gamma,\ \delta$ - заданные постоянные, причем $\alpha^2+\beta^2\neq 0\ \ \gamma^2+\delta^2\neq 0$, а $\psi_i(y)\in C^3[0,l],\ i=1,2;\ \psi_3(y)\in C^2[0,l]-$ заданные функции, причем

$$\begin{aligned}&\alpha\psi_i(0)+\beta\psi_i'(0)=0, \quad \gamma\psi_i(0)+\delta\psi_i'(0)=0,\\ &\psi_i''(0)=\psi_i''(l)=0, \qquad i=\overline{1,3}.\end{aligned} \tag{2.50}$$

Задача E_2**.** Найти решение уравнения (2.1) в области D^+, из класса $C_{x,y}^{3,2}(D^+)\cap C_{x,y}^{2,1}(D^+\cup\Gamma_1)$, имеющее ограниченную вторую производную по x при $x\to+\infty$, удовлетворяющее краевым условиям (2.48) и

$$u(0,y)=\psi_4(y), \quad \lim_{x\to+\infty}u(x,y)=\lim_{x\to+\infty}u_x(x,y)=0, \quad 0\le y\le l.$$

где $\psi_4(y)\in C^3[0,l]$, кроме того $\alpha\psi_4(0)+\beta\psi_4'(0)=0$, $\gamma\psi_4(l)+\delta\psi_4'(l)=0, \quad \psi_4''(0)=\psi_4''(l)$.

Задача E_3**.** Найти решение уравнения (2.1) в области D^-, из класса $C_{x,y}^{3,2}(D^-)\cap C_{x,y}^{2,1}(D^-\cup\Gamma_2)$, имеющее ограниченную первую и вторую производные по x при $x\to-\infty$, удовлетворяющее краевым условиям (2.48) и

$$u(0,y)=\psi_5(y),\ u_x(0,y)=\psi_6(y),\ \lim_{x\to-\infty}u(x,y)=0, \quad 0\le y\le l,$$

где $\psi_5(y)\in C^3[0,l],\ \psi_6(y)\in C^2[0,l]$, кроме того,

$$\alpha\psi_i(0)+\beta\psi_i'(0)=0,\ \gamma\psi_i(l)+\delta\psi_i'(l)=0,\ \psi_i''(0)+\psi_i''(l)=0, \quad i=5,6.$$

Докажем единственность решения задачи E_1.

Теорема 2.8. Если задача E_1 имеет решение и $\alpha\beta\le 0,\ \ \gamma\delta\ge 0$, то оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное, т.е. пусть $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ являются решениями задачи E_1. Тогда $u(x,y)=u_1(x,y)-\ \ -u_2(x,y)$ является решением однородной задачи и в области D справедливо тождество (2.5).

Интегрируя тождество (2.5) в области D и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^l u_x^2(0,y)dy-\int_0^p\left[u(x,l)u_y(x,l)-u(x,0)u_y(x,0)\right]dx+\iint_D u_y^2(x,y)dxdy=0.$$

Требуя $\alpha\neq 0,\ \ \gamma\neq 0,$ из условия (2.48) имеем

$$\frac{1}{2}\int_0^l u_x^2(0,y)dy+\frac{\delta}{\gamma}\int_0^p u_y^2(x,l)dx-\frac{\beta}{\alpha}\int_0^p u_y^2(x,0)dx+\iint_D u_y^2(x,y)dxdy=0.$$

Учитывая условия теоремы 2.8, получим $u_y(x,y)=0,$ т. е. $u(x,y)=f(x).$ Так как $u(x,0)=0,$ то $f(x)=0$ или $u(x,y)\equiv 0,\ (x,y)\in\overline{D}.$

В случаях $\beta\neq 0, \delta\neq 0;\ \alpha\neq 0, \delta\neq 0;\ \ \beta\neq 0,\gamma\neq 0$ аналогично получаем равенство $u(x,y)\equiv 0,\ (x,y)\in\overline{D}.$

Теорема 2.8 доказана.

Рассмотрим следующую **вспомогательную задачу**: найти нетривиальное решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям (2.48) и представимое в виде (2.6).

Подставляя (2.6) в уравнение (2.1), получим обыкновенные дифференциальные уравнения (2.7).

Для нахождения функции $Y(y)$ приходим к задаче типа Штурма- Лиувилля [49]: найти те значения параметра λ при которых существует нетривиальное решение задачи:

$$\begin{cases} Y''(y)+\lambda Y(y)=0,\ \ y\in[0,l], \\ \alpha Y(0)+\beta Y'(0)=0, \\ \gamma Y(l)+\delta Y'(l)=0. \end{cases} \tag{2.51}$$

Известно [18, 29, 47], что для задачи (2.51) собственное значение λ существует только при $\lambda>0$ и соответствующее общее решение имеет вид

$$Y(y)=C_1\cos\sqrt{\lambda}y+C_2\sin\sqrt{\lambda}y,$$

где $C_1,\ \ C_2$ _ произвольные постоянные.

Удовлетворив эту функцию краевым условиям задачи (2.51), получим:

$$\alpha C_1 + \beta\lambda C_2 = 0,\ C_1 = -\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\lambda}C_2,$$
$$\cos\sqrt{\lambda}l\left(\gamma C_1 + \delta\sqrt{\lambda}C_2\right) + \sin\sqrt{\lambda}l\left(\gamma C_2 - \delta\sqrt{\lambda}C_1\right) = 0.$$

Отсюда, исключив постоянные C_1 и C_2, приходим к трансцендентному уравнению для определения λ:

$$ctg\sqrt{\lambda}l = \frac{\alpha\gamma + \lambda\delta}{\sqrt{\lambda}\left(\gamma\beta - \alpha\delta\right)}. \qquad (2.52)$$

Положив $\xi = \sqrt{\lambda}l > 0$, получим $ctg\xi = \dfrac{a + b\xi^2}{c\xi}$,

где $a = \alpha\gamma l^2$, $b = \delta\beta$, $c = l\left(\gamma\beta - \alpha\delta\right)$.

С целью нахождения решения последнего уравнения, рассмотрим следующую систему кривых:

$$\begin{cases} \eta = ctg\xi, \\ \eta = \dfrac{a + b\xi^2}{c\xi} = \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{a}{\xi} + b\xi\right). \end{cases} \qquad (2.53)$$

Точки пересечения двух кривых, участвующих в (2.53), являются решением уравнения (2.52), т.е. собственным значением $\lambda_k = \left(\xi_k / l\right)^2$ нашей задачи.

Первая кривая есть $\eta = ctg\xi$ при $\xi > 0$, а вторая кривая – гипербола $\eta = \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{a}{\xi} + b\xi\right)$.

Расположение гиперболы определяется знаками $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$. При этом всегда должны выполняться условия $\alpha\beta \le 0,\ \gamma\delta \ge 0$, необходимые для единственности решения. Так как в случае $\alpha = \gamma = 0$ или $\beta = \delta = 0$ собственные значения и собственные функции находятся в явном виде, достаточно рассмотреть случай $\alpha\beta \le 0,\ \gamma\delta \ge 0$.

Здесь могут быть четыре случая. Каждый случай рассмотрим отдельно.

1. Пусть $\alpha > 0,\ \beta < 0$ и $\gamma < 0,\ \delta < 0$, тогда $a > 0,\ b > 0$ и $c > 0$. При этом гипербола $\eta = \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{a}{\xi} + b\xi\right)$ пересекается с положительной частью оси 0ξ в точке $\xi_0 = \sqrt{-a/b}$ и, в силу $\eta' = \dfrac{b\xi^2 - a}{c\xi^2} > 0$, она возрастает всегда, причем при $\xi \to +0$ имеем $\eta \to -\infty$, а при $\xi \to +\infty$ имеем $\eta \to +\infty$. Следовательно, функция $\eta = \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{a}{\xi} + b\xi\right)$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.

2. Пусть $\alpha > 0,\ \beta < 0$ и $\gamma > 0,\ \delta > 0$. Тогда $a > 0,\ b < 0$ и $c < 0$. Так как $\eta' > 0$, то функция возрастает, как и в первом случае.

3. Пусть $\alpha < 0,\ \beta > 0$ и $\gamma > 0,\ \delta > 0$. Тогда $a < 0,\ b > 0$ и $c > 0$.
Так как $\eta' > 0$, функция возрастает, как и в первом случае.

4. Пусть $\alpha < 0,\ \beta > 0$ и $\gamma < 0,\ \delta < 0$, тогда $a > 0,\ b < 0$ и $c < 0$.
Так как $\eta' > 0$, функция возрастает, как и в первом случае.

Примерный график функций системы (2.3.6) для всех случаев показан на рисунке 2.2.

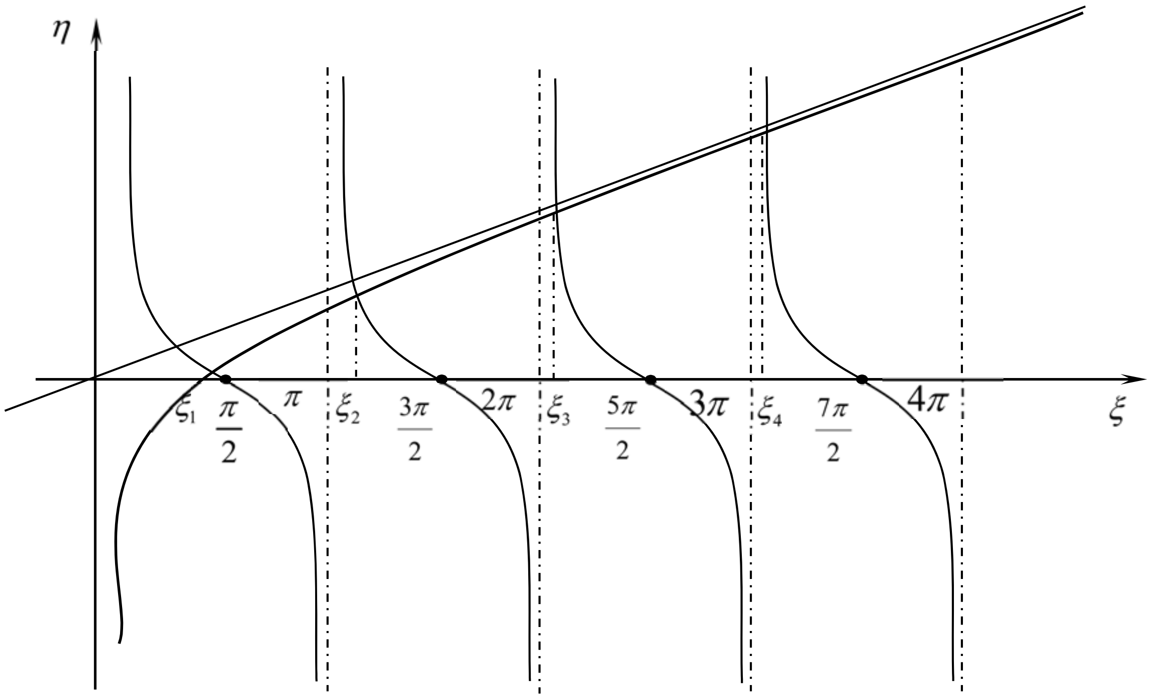

Рис. 2.2

Из вышеизложенного заключаем, что система (2.53) имеет бесконечное множество корней λ_k, $k \in N$, причем эти корни действительны и различны, т. е. $\lambda_n - \lambda_m \neq 0$, если $m \neq n$ и $\lambda_m > \lambda_n$ при $m > n$. Таким образом, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ образуют возрастающую последовательность, а соответствующие им собственные функции имеют вид

$$Y_k(y) = \left(\alpha \sin\sqrt{\lambda_k}\, y - \beta\sqrt{\lambda_k} \cos\sqrt{\lambda_k}\, y\right) A_k\ , \tag{2.54}$$

где A_k – постоянные числа.

Как известно [27], если система функций $\psi_m(t)$ удовлетворяет условиям

$$\int_0^l \psi_m(t)\psi_n(t)\,dt = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad m \neq n, \\ \|\psi_n\|^2, & \text{если} \quad m = n, \end{cases}$$

то последовательность $\{\psi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ называется ортогональной в сегменте $[0,l]$, а число $\|\psi_n\|$ - нормой этой системы.

Докажем, что система собственных функций (2.54) задачи E_1 обладает этим свойством, т.е. ортогональна в сегменте $[0,l]$.

Возьмём две произвольные собственные функции $Y_n(y)$ и $Y_m(y)$.

Тогда

$$Y_n'' + \lambda_n Y_n = 0, \quad Y_m'' + \lambda_m Y_m = 0.$$

Умножив первое тождество на Y_m, а второе - на Y_n затем вычитая полученные равенства почленно, получим

$$Y_m Y_n'' + \lambda_n Y_n Y_m - Y_n Y_m'' - \lambda_m Y_n Y_m =$$
$$= Y_n Y_m (\lambda_n - \lambda_m) + Y_m Y_n'' - Y_n Y_m'' = 0,$$

или

$$(\lambda_m - \lambda_n) Y_n Y_m = \frac{d}{dy}\left(Y_m Y_n' - Y_n Y_m'\right) = 0 .$$

Интегрируя это тождество в промежутке $[0;l]$, имеем

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_0^l Y_n Y_m dy = \left(Y_m Y_n' - Y_n Y_m'\right)\Big|_0^l =$$
$$= \left[Y_m(l)Y_n'(l) - Y_n(l)Y_m'(l)\right] - \left[Y_m(0)Y_n'(0) - Y_n(0)Y_m'(0)\right].$$

Учитывая условия задачи (2.51), получим при $\alpha \neq 0$ и $\gamma \neq 0$

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_0^l Y_n Y_m dy =$$
$$= \left(-\frac{\delta}{\gamma} Y_m Y_n' + \frac{\delta}{\gamma} Y_n Y_m'\right)\Bigg|_{y=l} - \left(-\frac{\beta}{\alpha} Y_m Y_n' + \frac{\beta}{\alpha} Y_n Y_m'\right)\Bigg|_{y=0} = 0.$$

Так как при $m \neq n, \quad \lambda_m - \lambda_n \neq 0$ следовательно

$$\int_0^l Y_n(y)Y_m(y)dy = 0. \qquad (2.55)$$

Если $m = n$ то не ограничивая общности и предполагая, что $A_n \equiv 1$, получим

$$\|Y_n(y)\|^2 = \int_0^l Y_n^2(y)\,dy = \int_0^l \left(\alpha \sin\sqrt{\lambda_n}\,y - \beta\sqrt{\lambda_k}\cos\sqrt{\lambda_n}\,y\right)^2 dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\alpha^2 l + \beta^2\lambda_n l - \alpha\beta\right) + \left(\frac{\beta^2\sqrt{\lambda_n}}{4} - \frac{\alpha^2}{4\sqrt{\lambda_n}}\right)\sin 2\sqrt{\lambda_n}\,l + \frac{\alpha\beta}{2}\cos 2\sqrt{\lambda_n}\,l. \qquad (2.56)$$

Общее решение уравнения $X''' + \lambda_n X = 0$, соответствующее собственному значению λ_n, имеет вид (2.12). Тогда функция

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y)$$

удовлетворяют уравнению (2.1) и условиям (2.48).
В силу линейности и однородности уравнения (2.1), сумма частных решений будет также решением уравнения (2.1). Это утверждение верно и для ряда

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y)X_n(y). \qquad (2.57)$$

Функция $u(x,y)$, представимая рядом (2.57), удовлетворяет условиям (2.48), так как их удовлетворяют все члены ряда.

Удовлетворив граничным условиям (2.49), получим

$$u(0,y)=\psi_1(y)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(0)Y_n(y),$$
$$u(p,y)=\psi_2(y)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(p)Y_n(y), \tag{2.58}$$
$$u_x(p,y)=\psi_3(y)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n'(p)Y_n(y).$$

Ряды (2.58) представляют собой разложения функций $\psi_i(y)$, $i=1,2,3$ по собственным функциям задачи Штурма - Лиувилля (2.54). Числа $X_n(0)$, $X_n(p)$, $X_n'(p)$ являются коэффициентами этого разложения.

Имеет место следующая теорема из [55]

Теорема (теорема о разложении). Если $f(y)$ имеет непрерывную вторую производную и удовлетворяет краевым условиям $y(0)\cos\alpha+y'(0)\sin\alpha=0$, $y(\pi)\cos\alpha+y'(\pi)\sin\alpha=0$, то $f(y)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям задачи (2.51).

Так как в задаче (2.51), умножая первое краевое условие на $1\big/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, второе краевое условие на $1\big/\sqrt{\gamma^2+\delta^2}$ и заменяя $l=\pi$, сразу получим краевые условия теоремы о разложении.
Кроме того, если функции $\psi_i(y)$, $i=1,2,3$ интегрируемы в отрезке $[0,l]$, то разложения (2.58) ведут себя (в отношении сходимости) так же, как обычный тригонометрический ряд Фурье [46].

Для определения коэффициентов рядов (2.58) умножим каждый из этих рядов на $Y_m(y)$ и проинтегрируем в пределах $[0,l]$. Далее, учитывая ортогональность системы функций $\{Y_m(y)\}_{m=1}^{\infty}$, получим

$$X_m(0)=\frac{1}{\|Y_m\|^2}\int_0^l\psi_1(\eta)Y_m(\eta)d\eta, \qquad X_m(p)=\frac{1}{\|Y_m\|^2}\int_0^l\psi_2(\eta)Y_m(\eta)d\eta,$$
$$X_m'(p)=\frac{1}{\|Y_m\|^2}\int_0^l\psi_3(\eta)Y_m(\eta)d\eta.$$

Для удобства введём обозначения

$$A_{in}=\frac{1}{\|Y_n\|^2}\int_0^l \psi_i(\eta)Y_n(\eta)d\eta,\ 1,2,3. \tag{2.59}$$

Тогда получим систему (2.15) алгебраических уравнений для определения коэффициентов $C_{in}(i=1,2,3)$. Решая эту систему и подставляя значения C_{in} в (2.57), получим решение задачи E_1 в виде

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{1n}B_{1n}(x)+A_{2n}B_{2n}(x)+A_{3n}B_{3n}(x)\right]Y_n(y), \tag{2.60}$$

где $B_{in}(x),\ i=1,2,3$ определяются в виде (2.19).

Если ряд (2.60) и его производные $u_{xxx},\ u_{yy}$ сходятся равномерно по обеим переменным в области $\overline{D}$, то он даёт решение задачи E_1. Докажем это.

Сперва докажем равномерную сходимость ряда (2.60) по обеим переменным:

$$\begin{gathered}|u(x,y)|=\sum_{n=1}^{\infty}|A_{1n}Y_n(y)||B_{1n}(x)|+\sum_{n=1}^{\infty}|A_{2n}Y_n(y)||B_{2n}(x)|+\\ +\sum_{n=1}^{\infty}|A_{3n}Y_n(y)||B_{3n}(x)|.\end{gathered} \tag{2.61}$$

Оценим выражение $|A_{in}\cdot Y_n(y)|$:

$$\begin{gathered}|A_{in}Y_n(y)|\le|Y_n(y)||A_{in}|=|Y_n(y)|\frac{1}{\|Y_n\|^2}\int_0^l|\psi_i(\eta)||Y_n(\eta)|d\eta,\\ |Y_n(y)|=\left|\alpha\sin\sqrt{\lambda_n}\,y-\beta\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}\,y\right|\le|\alpha|+|\beta|\sqrt{\lambda_n}.\end{gathered} \tag{2.62}$$

Тогда имеем

$$\left|A_{in}Y_n(y)\right| \le \frac{\left(|\alpha|+|\beta|\sqrt{\lambda_n}\right)^2}{\|Y_n\|^2}\int_0^l \left|\psi_i(\eta)\right|d\eta.$$

Докажем, что выражение $\dfrac{\left(|\alpha|+|\beta|\sqrt{\lambda_n}\right)^2}{\|Y_n\|^2}$ при $n \to \infty$ т. е. при $\lambda_n \to \infty$ ограничено:

$$\frac{\left(|\alpha|+|\beta|\sqrt{\lambda_n}\right)^2}{\|Y_n\|^2} = \frac{\alpha^2 + 2|\alpha\beta|\sqrt{\lambda_n} + \beta^2\lambda_n}{\|Y_n\|^2} =$$

$$= \frac{\alpha^2 + 2|\alpha\beta|\sqrt{\lambda_n} + \beta^2\lambda_n}{\frac{1}{2}\left(\alpha^2 l + \beta^2 l\lambda_n - \alpha\beta\right) + \left(\frac{\beta^2}{4}\sqrt{\lambda_n} - \frac{\alpha^2}{4\sqrt{\lambda_n}}\right)\sin 2\sqrt{\lambda_n}l + \frac{\alpha\beta}{2}\cos\sqrt{\lambda_n}l} =$$

$$= \frac{\frac{\alpha^2}{\lambda_n} + \frac{2|\alpha\beta|}{\sqrt{\lambda_n}} + \beta^2}{\frac{1}{2\lambda_n}\left(\alpha^2 l + \beta^2 l\lambda_n - \alpha\beta\right) + \left(\frac{\beta^2}{4\sqrt{\lambda_n}} - \frac{\alpha^2}{4\lambda_n\sqrt{\lambda_n}}\right)\sin 2\sqrt{\lambda_n}l + \frac{\alpha\beta}{2\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}l}.$$

При $n \to \infty$ т. е. при $\lambda_n \to \infty$, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\alpha + \beta\sqrt{\lambda_n}\right)^2}{\|Y_n\|^2} = \frac{\beta^2}{(1/2)\beta^2 l} = \frac{2}{l}.$$

Отсюда заключаем, что при любом λ_n справедливо неравенство

$$\left|A_{in}Y_n(y)\right| < \frac{2}{l}\int_0^l \left|\psi_i(\eta)\right|d\eta.$$

Интегрируя по частям в (2.59) и принимая во внимание условие (2.50), получим

$$\psi_{in} = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{\psi'''_{in}}{n^3},\ i=1,2, \qquad \psi_{3n} = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \frac{\psi''_{3n}}{n^2},$$

где

$$\psi'''_{in} = \frac{2}{l}\int_0^l \psi'''_{in}(\eta)\cos\frac{n\pi}{l}\eta d\eta,\ i=1,2, \qquad \psi''_{3n} = \frac{2}{l}\int_0^l \psi''_{3n}(\eta)\sin\frac{n\pi}{l}\eta d\eta.$$

Тогда

$$\left|A_{in}Y_n(y)\right| < 2M_i\frac{\left|\psi'''_{in}\right|}{n^3}, \quad i=1,2, \quad \left|A_{3n}Y_n(y)\right|\left|\psi_3\right| \le 2M_3\frac{\left|\psi''_{3n}\right|}{n^2}$$

Учитывая эти оценки, из (2.61) имеем

$$\left|u(x,y)\right| \le 2M_1N_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\psi'''_{1n}\right|}{n^3} + 2M_2N_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\psi'''_{2n}\right|}{n^3} + 2M_3N_3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\psi''_{3n}\right|}{n^{8/3}} < \infty. \quad (2.63)$$

Отсюда следует, что ряд (2.61) сходится абсолютно и равномерно в области $\overline{D}$.

Равномерная сходимость рядов, полученных дифференцированием по каждой переменой, доказывается аналогично задаче A_1.

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема 2.9. Если $\psi_i(y) \in C^3[0,l],\ i=1,2,\ \psi_3(y) \in C^2[0,l]$ и выполняются условия (2.50), то решение задачи E_1 существует и представляется рядом (2.63).

Подставив значения A_{1n} из (2.59) в (2.60), получим решение задачи E_1 в явном виде

$$u(x,y)=\int_0^l K_1(x,y,\eta)\psi_1(\eta)d\eta+\int_0^l K_2(x,y,\eta)\psi_2(\eta)d\eta+ \\ +\int_0^l K_3(x,y,\eta)\psi_3(\eta)d\eta \tag{2.64}$$

где

$$K_i(x,y,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{1n}\left(x\right)\frac{1}{\left\|Y_n\right\|^2}Y_n(y)Y_n(\eta),\quad i=1,2,3.$$

Этим завершено исследование задачи E_1.

Единственность решения задач E_i, $i=2,3$ доказывается методом, примененным к задачам B_i, $i=1,2$ и E_1.

Методом, примененным при исследовании задач B_i, $i=1,2$ и E_1, аналогично получим решение задачи E_2 в виде

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{1n}e^{-k_n x}Y_n(y), \tag{2.65}$$

а решение задачи E_3 - в виде

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{2}k_n x}\left[C_{2n}\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\nu_n x+\frac{\pi}{6}\right)+C_n\frac{2}{\sqrt{3}k_n}\sin\nu_n x\right]Y_n(y), \tag{2.66}$$

где $Y_n(y)$ имеет вид (2.54).

Здесь справедлива.

Теорема 2.10. Если $\psi_i\left(y\right)\in C^3\left[0,l\right]$, $i=4,5$, $\psi_6\left(y\right)\in C^2\left[0,l\right]$ и выполняются условия (2.50), то решение задач E_2 и E_3 существует и представляется в виде (2.65) и (2.66) соответственно.

Доказательство теоремы 2.10 аналогично доказательству теоремы 2.9.

§ 2.5. Спектральная задача

В области $D=\{(x,y):\ 0<x<p,\ 0<y<l\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu-\lambda u\equiv\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\lambda u=0 \qquad (2.67)$$

с краевыми условиями

$$u(\mathrm{x},0)=u(\mathrm{x},\mathrm{l})=0, \qquad (2.68)$$

$$u(0,y)=u(p,y)=u_x(p,y)=0. \qquad (2.69)$$

Задача A_λ**.** Найти те значения λ, при которых задача (2.67)-(2.69) имеет нетривиальное решение.

Определим условие существования нетривиального решения задачи A_λ в зависимости от λ.

Предположим, что существует нетривиальное решение $u(\mathrm{x},\mathrm{y})$.

Рассмотрим тождество

$$uLu-\lambda u^2\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(uu_y\right)+u_y^2-\lambda u^2=0.$$

Интегрируя это тождество по области D и учитывая краевые условия (2.68), (2.69), имеем

$$\frac{1}{2}\int_0^l u_x^2(0,y)dy+\iint_D\left(u_y^2-\lambda u^2\right)=0,$$

при $\lambda\le 0$ последнее равенство возможно только при $u(\mathrm{x},\mathrm{y})\equiv 0$, отсюда заключаем, что спектр задачи A_λ существует только при $\lambda>0$.

Задача A_λ решается методом Фурье, т.е

$$u(\mathrm{x},\mathrm{y}) = X(x)\cdot Y(y). \tag{2.70}$$

Тогда для нахождения $X(x)$ и $Y(y)$ приходим к следующим задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$X''' - \mu X = 0,\ \ X(0) = X(p) = X'(p) = 0, \tag{2.71}$$

$$Y'' + \nu Y = 0,\ \ Y(0) = Y(l) = 0, \tag{2.72}$$

где $\mu + \nu = \lambda$.

Как известно нетривиальное решение задачи (2.72) существует только при $\nu > 0$ и значениях $\nu = \nu_n = \left(\pi n/l\right)^2$, а соответствующими собственными функциями будут

$$Y_n(y) = A_n \sin\frac{n\pi}{l}y, \tag{2.73}$$

где A_n – произвольная постоянная.

Общее решение уравнения (2.71) имеет вид

$$X_m(x) = C_1 e^{k_m x} + e^{-\frac{1}{2}k_m x}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}k_m x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}k_m x\right), \tag{2.74}$$

где $k_m = \sqrt[3]{\mu_m}$, C_i – произвольные постоянные.

Подставляя (2.74) в граничные условия (2.71), будем иметь

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ e^{k_m p}C_1 + e^{-\frac{1}{2}k_m p}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}k_m p C_2 + e^{-\frac{1}{2}k_m p}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}k_m p C_3 = 0, \\ e^{k_m p}C_1 + e^{-\frac{1}{2}k_m p}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_m p + \frac{\pi}{6}\right)C_2 + e^{-\frac{1}{2}k_m p}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_m p + \frac{\pi}{6}\right)C_3 = 0. \end{cases}$$

Приравниваем детерминант $\Delta(k)$ этой системы к нулю, получаем условия существования нетривиальных решений $X(x)$:

$$\Delta = \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}k_m p} + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_m p - \frac{\pi}{6}\right). \tag{2.75}$$

Уравнение (2.75) сведем к виду

$$\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}k_m p} = -\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_m p - \frac{\pi}{6}\right).$$

Собственными значениями задачи (2.71) будут корни этого уравнения. Они определяются как абсциссы точек пересечения кривых при $x > 0$.

$$y = \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}px}, \quad y = -\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}px - \frac{\pi}{6}\right).$$

При $x = 0$ обе кривые имеют общую точку $y = \frac{1}{2}$.

Далее, точками обращения в нуль функции $\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_m p - \frac{\pi}{6}\right)$ будут

$$\overline{k}_m = \frac{\pi}{\sqrt{3}p}\left(\frac{1}{3} + 2m\right), \; m = 1, 2, \dots .$$

Тогда для собственных значений k_m задачи (2.71) имеем

$$k_m = \overline{k}_m + (-1)^m \varepsilon_m, \; m = 1, 2, \dots, \tag{2.76}$$

причем $\lim\limits_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0$.

Собственными функциями задачи (2.71) будут функции

$$X_m(x) = e^{k_m x} - e^{-\frac{1}{2}k_m x}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}k_m x - M\sin\frac{\sqrt{3}}{2}k_m x\right), \tag{2.77}$$

где

$$M = \left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}k_m p - e^{\frac{3}{2}k_m p}\right)\Bigg/\sin\frac{\sqrt{3}}{2}k_m p.$$

Легко проверить, что функция (2.77) удовлетворяет всем условиям задачи (2.71).

Так как $\lambda = \mu + \nu$, то

$$\lambda_{mn} = k_m^3 + \nu_n. \tag{2.78}$$

Таким образом, собственные функции задачи A_λ, соответствующие ее собственным значениям (2.78), согласно (2.70), имеют вид

$$\begin{gathered} u_{mn}(x,y) = X_m(x)Y_n(y) = \\ = \left[e^{k_m x} - e^{-\frac{1}{2}k_m x}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}k_m x - M\sin\frac{\sqrt{3}}{2}k_m x\right)\right]\sin\frac{n\pi}{l}y \end{gathered} \tag{2.79}$$

В области D рассмотрим уравнение

$$L^*\vartheta + \lambda\vartheta \equiv \frac{\partial^3\vartheta}{\partial x^3} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} + \lambda\vartheta = 0 \tag{2.80}$$

с граничными условиями

$$\vartheta(\mathrm{x},0) = \vartheta(\mathrm{x},1) = 0, \tag{2.81}$$

$$\vartheta(0,y) = \vartheta_x(0,y) = \vartheta(p,y) = 0. \tag{2.82}$$

Сопряженной задачей для задачи A_λ будет:

Задача A_λ^*. Найти те значение λ, при которых задача (2.80)-(2.82) имеет нетривиальное решение.

Интегрируем тождество

$$\vartheta L^{*}\vartheta + \lambda\vartheta^{2} = 0$$

по области D и, учитывая однородные краевые условия (2.81) и (2.82), находим

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{l}\vartheta_{x}^{2}(p,y)dy + \iint_{D}(\vartheta_{y}^{2} - \lambda\vartheta^{2})dxdy = 0.$$

При $\lambda \le 0$ это равенство возможно только при $\vartheta(x,y) \equiv 0$. Отсюда заключаем, что спектр задачи A_{λ}^{*} существует только при $\lambda > 0$.

Задача A_{λ}^{*} решается совершенно аналогично задаче A_{λ}^{*}:

$$Y'' + \nu Y = 0,\ Y(0) = Y(l) = 0, \tag{2.83}$$

$$X_{m}^{*\,'''} + \mu_{m}X_{m}^{*} = 0,\ X_{m}^{*}(0) = X_{m}^{*\,'}(0) = X_{m}^{*}(p) = 0. \tag{2.84}$$

Собственные значения и соответствующие собственные функции задачи (2.83) имеют вид (2.73).

Общее решение уравнения (2.84) имеет вид (2.12).

Подставляя (2.12) в граничные условия (2.84), имеем

$$\begin{cases} C_{1} + C_{2} = 0, \\ C_{1} + e^{\frac{3}{2}k_{m}p}\left(C_{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}k_{m}p + C_{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}k_{m}p\right) = 0, \\ C_{1} - \frac{1}{2}C_{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}C_{3} = 0. \end{cases}$$

Приравнивая детерминант $\Delta^{*}(k)$ этой системы к нулю, получим условия существования нетривиальных решений задачи A_{λ}^{*}, которая в точности совпадает с равенством (2.75). Это означает, что собственные значения прямой задачи A_λ и сопряженной задачи A_λ^* совпадают и имеют вид (2.76), собственными функциями задачи (2.84) являются функции

$$X_m^*(x) = e^{-k_m x} + 2e^{\frac{1}{2}k_m x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_m x - \frac{\pi}{6}\right). \qquad (2.85)$$

Итак, собственными функциями сопряженной задачи A_λ^* являются

$$\vartheta_{mn}(x,y) = \left[e^{-k_m x} + 2e^{\frac{1}{2}k_m x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_m x - \frac{\pi}{6}\right)\right]\sin\frac{\pi n}{l}y. \qquad (2.86)$$

Легко можно убедиться, что

$$\int_0^l Y_n(y)Y_m(y)dy = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ l/2, & m = n. \end{cases}$$

В множестве $\{X_n(y)X_m^*(y)\}$ введем скалярное произведение по формуле

$$\left(X_n, X_m^*\right) = \int_0^p X_n(x)X_m^*(x)d\,x.$$

Покажем, что система $X_n(x)$ ортогональна системе $X_m^*(x)$. Действительно, пусть $\mu_m \neq \mu_n$ -два собственных значения задачи:

$$X_n''' - \mu_n X_n = 0,\ X_n(0) = X_n(p) = X_n'(p) = 0, \qquad (2.87)$$

$$X_m^{*\prime\prime\prime} + \mu_m X_m^* = 0,\ X_m^*(0) = X_m^*(p) = X_m^{*\prime}(0) = 0. \qquad (2.88)$$

Отсюда

$$X_m^* X_n''' - \mu_n X_m^* X_n = 0, \quad X_n X_m^{*'''} + \mu_m X_n X_m^* = 0.$$

Складывая и интегрируя по x в $[0;p]$, имеем

$$(\mu_n - \mu_m)\int_0^p X_n X_m^* dx = \int_0^p \left(X_n X_m^{*''} + X_m^* X_n'' - X_m^{*'} X_n' \right)' dx .$$

Учитывая однородные краевые условия и что $\mu_m \neq \mu_n$, получим

$$\left(X_n, X_m^* \right) = \int_0^p X_n(x) X_m^*(x) d\,x = 0 .$$

При $n = m$ имеем

$$\int_0^p X_n(x) X_m^*(x) dx = \frac{3}{2}p + \frac{M}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}k_n} + \sqrt{3}p \right) + \frac{1}{2k_n}\left(1 + e^{\frac{3}{2}k_n p}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}k_n p \right) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{3}k_n}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}k_n p\, ch\frac{\sqrt{3}}{2}k_n p - \frac{1}{k_n}\left(\cos\sqrt{3}k_n p - \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}k_n p \right) \neq 0.$$

Отсюда заключаем, что

$$\int_0^p\int_0^l u_{mn}(x,y)\vartheta_{mn}(x,y)dxdy = \int_0^p X_n(x)X_m^*(x)dx\int_0^l Y_n(y)Y_m(y)dy \neq 0 .$$

Это означает, что присоединенные функции задач A_λ и A_λ^* отсутствуют.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2.11. Собственные значения задач A_λ и A_λ^* совпадают, а их собственные функции биортогональны.

§ 2.6. Задачи для вырождающегося уравнения

Рассмотрим в области $D_1^+ = \left\{ (x,y):\ 0 < x < \infty,\ 0 < y < 1 \right\}$ следующее уравнение

$$L[u] \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - x^n \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \;\; n = const > 0. \qquad (2.89)$$

Задача B_1^n. Найти решение уравнения (2.89) в области D_1^+ из класса $C_{x,y}^{3,2}\left(D_1^+\right) \cap C_{x,y}^{2,1}\left(D_1^+ \cup \Gamma_1\right)$, имеющее ограниченную вторую производную по x, при $x \to +\infty$ и удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$u(x,0) = u(x,1) = 0, \quad 0 < x < \infty, \qquad (2.90)$$

$$u(0,y) = \psi(y), \qquad 0 < y < l, \qquad (2.91)$$

$$\lim_{x \to +\infty} u(\mathrm{x}, y) = \lim_{x \to +\infty} u_x(\mathrm{x}, y) = 0, \qquad (2.92)$$

где $\psi(y) \in C^3[0,1]$ - заданная функция, причем, $\psi(0) = \psi(1) =$
$= \psi''(0) = \psi''(1) = 0$.

Задача B_2^n. Найти решение уравнения (2.89) в области D_1^+ из класса $C_{x,y}^{3,2}\left(D_1^+\right) \cap C_{x,y}^{2,1}\left(D_1^+ \cup \Gamma_1\right)$, имеющее ограниченную вторую производную по x, при $x \to +\infty$ и удовлетворяющее краевым условиям (2.91), (2.92) и

$$u_y(x,0) = u_y(x,1) = 0, \quad 0 < x < \infty, \qquad (2.93)$$

где, $\psi(y) \in C^3[0,1]$- заданная функция, причем $\psi'(0) = \psi'(1) = 0$.

Единственность решения

Теорема 2.12. Если задача B_1^n иметь решение, то оно единственно.

Доказательство. Рассмотрим однородную задачу. Предположим, что $u(x,y)$- не нулевое решение задачи B_1^n.

Рассматривая тождество

$$u\,L[u]=0,$$

имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(x^n uu_y\right)+x^n u_y^2=0\ .$$

Проинтегрируем тождество по области

$$D_{1a}^{+}=\left\{(x,y):\ 0<x<a,\ 0<y<1\right\}$$

$$\int_0^1\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2\right)\Bigg|_{x=0}^{x=a}dy-\int_0^a x^n\left(uu_y\right)\Big|_{y=0}^{y=1}dx+\iint_{D_{1a}}x^n u_y^2dxdy=0.$$

Устремляя a в бесконечность и учитывая однородные граничные условия, и свойства функции $u(x,y)$ при $x\to\infty$, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^l u_x^2(0,y)\,dy+\iint_{D_1}x^n u_y^2(x,y)\,dxdy=0.$$

Отсюда $u(x,y)\equiv 0,\ (x,y)\in\overline{D_1^+}$. Из этого равенства следует утверждение теоремы 2.12.

Переходим к существованию решения задачи B_1^n.

Её решение будем искать в виде

$$u(x,y)=Z(x)Y(y).$$

Тогда из уравнения (2.89) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$Z'''(x)+\lambda x^n Z(x)=0, \qquad (2.94)$$

$$Y''(y)+\lambda Y(y)=0, \qquad (2.95)$$

где $\lambda-$константа разделения, а из условия (2.90) имеем краевые условия $Y(0)=Y(1)=0$.

Одним из (с точностью до постоянного множителя) решений уравнения (2.95), обращающегося в нуль на концах отрезка $[0,1]$, является функция

$$Y_k(y)=\sin\pi ky, \quad \lambda_k=(\pi k)^2.$$

Зафиксируем λ_k и рассмотрим уравнение (2.94):

$$Z'''(x)+\lambda_k x^n Z(x)=0.$$

Отсюда, сделав замену переменных $t=\frac{3}{n+3}\sqrt[3]{\lambda_k}\,x^{\frac{n+3}{3}}$, получим следующее уравнение

$$z'''+\frac{a}{t}z''+\frac{b}{t^2}z'+z=0, \qquad (2.96)$$

где

$$a=3\left(1-\frac{3}{n+3}\right), \quad b=\frac{a}{3}\left(\frac{2}{3}a-1\right).$$

Будем искать решение уравнения (2.96) в виде

$$z(t)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j\,t^{j+\beta},$$

где $\beta-$ пока неизвестное число. Вычисляя производные, получаем

$$z'(t)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j\left(j+\beta\right)t^{j+\beta-1},\quad z''(t)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j\left(j+\beta\right)\left(j+\beta-1\right)t^{j+\beta-2},$$

$$z'''(t)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j\left(j+\beta\right)\left(j+\beta-1\right)\left(j+\beta-2\right)t^{j+\beta-3},$$

Подставляя это в (2.96) и приравнивая к нулю коэффициент при $t^{\beta-3}$, получим

$$c_0\beta\left[(\beta-1)(\beta-2)+(\beta-1)a+b\right]=0.$$

Отсюда следует равенство

$$\left[\begin{array}{l}\beta=0,\\ (\beta-1)(\beta-2)+(\beta-1)a+\dfrac{a}{3}\left(\dfrac{2}{3}a-1\right)=0.\end{array}\right.$$

Второе из этих уравнений является квадратным относительно β и имеет два корня:

$$\beta_2=1-\frac{a}{3},\ \ \beta_3=2\left(1-\frac{a}{3}\right).$$

Итак, для β получим 3 значения. В соответствии с этим рассмотрим следующие случаи:

1 случай. Пусть $\beta=0$. Тогда решение уравнения (2.96) ищем в виде

$$z(t)=\sum_{j=0}^{\infty}c_jt^j.$$

Подставляя это в (2.96), получим уравнение

$$\sum_{j=0}^{\infty}c_j\left[j(j-1)(j-2)+a\,j(j-1)+b\,j\right]t^{j-3}=-\sum_{j=0}^{\infty}c_jt^j.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3 + 3\cdot 2a + 3b}, \ c_4 = 0, \ c_5 = 0.$$

Отсюда получаем формулу для коэффициентов:

$$c_{3j}^{j} = \frac{(-1)^j}{\prod\limits_{l=1}^{j} 3l\left[b + (3l-1)a + (3l-1)(3l-2)\right]}, \quad c_{3n+1} = c_{3n+2} = 0, \quad j \in N.$$

Следовательно, при $\beta = 0$ уравнение (2.96) имеет решение в виде

$$z_1(t) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_{3j}^{1}\, t^{3j} .$$

2 случай. Пусть $\beta = 1 - \dfrac{a}{3}$. Решение уравнения (2.96) будем искать в виде

$$z(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\, t^{j+1-\frac{a}{3}} .$$

Подставляя это в уравнение, имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j \left(j + 1 - \frac{a}{3}\right)\left[\left(j - \frac{a}{3}\right)\left(j - 1 - \frac{a}{3}\right) + a\left(j - \frac{a}{3}\right) + b\right] t^{j-2-\frac{a}{3}} = -\sum_{j=0}^{\infty} c_j t^{j+1-\frac{a}{3}}$$

.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим:

$$c_0=1,\;\; c_1=c_2=0,\;\; c_3=\frac{-1}{\left(4-\frac{a}{3}\right)\left[\left(3-\frac{a}{3}\right)\left(2-\frac{a}{3}\right)+a\left(3-\frac{a}{3}\right)+b\right]},$$

$$c_4=c_5=0,$$

$$c_{3j}^2=\frac{(-1)^j}{\prod\limits_{l=1}^{j}\left(3l+1-\frac{a}{3}\right)\left[\left(3l-\frac{a}{3}\right)\left(3l-1-\frac{a}{3}\right)+a\left(3l-\frac{a}{3}\right)+b\right]},$$

$$c_{3j+1}=c_{3j+2}=0,\quad \mathrm{j}\in \mathrm{N}.$$

Следовательно, уравнение (2.96) имеет решение в виде

$$z_2(t)=t^{1-\frac{a}{3}}\left[1+\sum_{j=1}^{\infty}c_{3j}^2\,t^{3j}\right].$$

3 случай. Пусть $\beta=2\left(1-\frac{a}{3}\right)$. Решение уравнения (2.92) ищем в виде

$$z(t)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j\,t^{j+2-\frac{a}{3}}.$$

Подставив это в уравнение, имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty}c_j\left(j+2-\frac{2a}{3}\right)\left[\left(j+1-\frac{2a}{3}\right)\left(j-\frac{2a}{3}\right)+a\left(j+1-\frac{2a}{3}\right)+b\right]t^{j-1-\frac{2a}{3}}=$$

$$=-\sum_{j=0}^{\infty}c_j\,t^{j+2-\frac{2a}{3}}.$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим

$$c_0 = 1,\ \ c_1 = c_2 = 0,\ \ c_3 = \frac{-1}{\left(5-\frac{2a}{3}\right)\left[\left(4-\frac{2a}{3}\right)\left(3-\frac{2a}{3}\right)+a\left(4-\frac{2a}{3}\right)+b\right]},$$

$$c_{3j}^3 = \frac{(-1)^j}{\prod_{l=1}^{j}\left(3l+2-\frac{2a}{3}\right)\left[\left(3l+1-\frac{2a}{3}\right)\left(3l-\frac{2a}{3}\right)+a\left(3l+1-\frac{2a}{3}\right)+b\right]},$$

$$c_{3j+1} = c_{3j+2} = 0.\quad \mathrm{j}\in \mathrm{N}.$$

Следовательно, решение уравнения (2.96) будет иметь следующий вид:

$$z_3(t) = t^{2\left(1-\frac{a}{3}\right)}\left[1+\sum_{j=1}^{\infty} c_{3j}^3\, t^{3j}\right]$$

Очевидно, что функции $z_1(t),\ z_2(t),\ z_3(t)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (2.96).

Теперь нас интересует поведение решения уравнения (2.96), при $t \to +\infty$.

В уравнении (2.96) сделаем замену: $z(t) = t^{-\frac{a}{3}} w(t)$. Тогда, относительно функции $w(t)$, получим следующее уравнение

$$w''' + \frac{a(6-a)}{9t^2} w' + \left[1 - \frac{a}{3t^3}\left(\frac{a^2}{3}+\frac{a}{3}+1\right)\right] w = 0. \tag{2.97}$$

Теперь применим следующую теорему из [13].

Теорема 2.13. Если уравнение

$$\frac{dz}{dt} = \left[A + B(t)\right] z(t), \tag{2.98}$$

где $z(t)$ $n-$мерная вектор-функция, $A-$постоянная матрица размерности $n\times n$, $F_k(t) = c_1F_{1k}(t) + c_2F_{2k}(t) + c_3F_{3k}(t)$ переменная матрица, удовлетворяет условиям:

1) $A-$постоянная матрица с простыми характеристическими числами;

2) $\left\|B(t)\right\| \to 0$ при $t \to \infty$, где $\left\|B(t)\right\| = \sum_{i,j=1}^{n} \left|b_{ij}\right|$,

то каждому характеристическому числу μ_k соответствует решение $z^{(k)}$, удовлетворяющее неравенствам

$$c_2 \exp\left[\operatorname{Re}(\mu_k)t - d_2\int_{t_0}^{t}\left\|B(t)\right\|dt\right] \le \left\|z^{(k)}(t)\right\| \le c_1 \exp\left[\operatorname{Re}(\mu_k)t + d_2\int_{t_0}^{t}\left\|B(t)\right\|dt\right]$$

где $\left\|z^{(k)}(t)\right\| = \sum_{j=1}^{\infty}\left|z_j^{(k)}\right|$, $z_j^{(k)}$ – компоненты вектора $z_j^{(k)}(t)$ для $\exists t \ge t_0$, а $c_1,\ c_2,\ d_1,\ d_2$ – положительные постоянные, при этом система решений $\left\{z^{(k)}\right\}$ линейно независима.

Уравнение (2.96) можно привести к следующей системе уравнений 1-го порядка;

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{a}{3t^3}\left(\frac{a^2}{3}+\frac{a}{3}+1\right) & \frac{a(a-6)}{9t^2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w' \\ w'' \\ w''' \end{pmatrix}.$$

В нашем случае действительные части характеристических чисел постоянной матрицы имеют вид

$$\operatorname{Re}(\mu_1) = -1, \quad \operatorname{Re}(\mu_2) = \operatorname{Re}(\mu_3) = \frac{1}{2}, \quad \int_{t_0}^{\infty}\left\|B(t)\right\|dt < \infty.$$

Тогда, согласно теореме, существуют линейно независимые решения $F_{1k}(t)$, $F_{2k}(t)$, $F_{3k}(t)$ уравнения (2.93), для которых справедливы следующие оценки при $t \to \infty$

$$M_1^1 t^{-\frac{a}{3}} e^{-t} \le \left| F_{1k}(t) \right| \le M_2^1 t^{-\frac{a}{3}} e^{-t},$$
$$M_1^2 t^{-\frac{a}{3}} e^{\frac{t}{2}} \le \left| F_{2k}(t) \right| \le M_2^2 t^{-\frac{a}{3}} e^{\frac{t}{2}}, \qquad (2.99)$$
$$M_1^3 t^{-\frac{a}{3}} e^{\frac{t}{2}} \le \left| F_{3k}(t) \right| \le M_2^3 t^{-\frac{a}{3}} e^{\frac{t}{2}},$$

где M_j^s – некоторые положительные постоянные. Для производных функций $F_{ij}(t)$ до 2-го порядка включительно получим те же самые оценки, только с другими постоянными.

Так как $F_{ik}(t)$ линейно независимы, то они также образуют фундаментальную систему решений уравнения (2.97). Поэтому общее решение уравнения (2.94) может быть записано в виде

$$F_k(t) = c_1 F_{1k}(t) + c_2 F_{2k}(t) + c_3 F_{3k}(t),$$

Но, вместе с тем $F_{ik}(t)$ могут быть выражены через найденные нами функции $Z_{1k}(t)$

$$F_{1k}(t) = A_{1k} Z_{1k}(t) + B_{1k} Z_{2k}(t) + N_{1k} Z_{3k}(t),$$
$$F_{2k}(t) = A_{2k} Z_{1k}(t) + B_{2k} Z_{2k}(t) + N_{2k} Z_{3k}(t),$$
$$F_{3k}(t) = A_{3k} Z_{1k}(t) + B_{3k} Z_{2k}(t) + N_{3k} Z_{3k}(t),$$

где A_{ik}, B_{ik}, N_{ik} – некоторые постоянные.

Возвращаясь к старым переменным, получим

$$z_{1k}(x) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_{3j} \left(\frac{27 \lambda_k x^{n+3}}{(n+3)^3} \right)^j, \qquad (2.100)$$

$$z_{2k}(x) = \sqrt[n+3]{\frac{27\lambda_k}{(n+3)^3}} \cdot x \cdot \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_{3j} \left(\frac{27\lambda_k x^{n+3}}{(n+3)^3} \right)^j \right], \qquad (2.101)$$

$$z_{3k}(x) = \sqrt[n+3]{\frac{729\lambda_k^2}{(n+3)^6}} \cdot x^2 \cdot \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_{3j} \left(\frac{27\lambda_k x^{n+3}}{(n+3)^3} \right)^j \right], \qquad (2.102)$$

Используя признак Даламбера, легко проверить, что при фиксированном k, ряды (2.100) - (2.102) вместе с производными любого порядка по переменной x сходятся равномерно и абсолютно.

Решение уравнения (2.89), удовлетворяющее условию (2.90), имеет вид

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(x) \sin \pi k y, \qquad (2.103)$$

где

$$Z_k(t) = c_{1k}F_{1k}(t) + c_{2k}F_{2k}(t) + c_{3k}F_{3k}(t).$$

Из (2.103), в силу условия (2.92) задачи B_1^n, следует что $c_{2k} = c_{3k} = 0,\ k \in N.$

Далее, удовлетворив условие (2.91), получим

$$u(0,y) = \psi(y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{1k} A_{1k} \sin \pi k y,$$

Отсюда следует, что

$$A_{1k}c_{1k} = 2\int_0^1 \psi(\xi) \sin \pi k \xi \, d\xi.$$

Теперь, покажем равномерную сходимость ряда (2.103). Имеем

$$\left|u(\mathrm{x},y)\right| \le \sum_{k=0}^{\infty}\left|c_{1k}\right|\left|F_{1k}(x)\right| = \sum_{k=0}^{\infty}\left|c_{1k}A_{1k}\right|\left|\frac{F_{1k}(x)}{A_{1k}}\right|.$$

Учитывая оценку (2.99), $\left|\psi^{(4)}(y)\right| \le M - const$ и

$$\left|A_{1k}c_{1k}\right| \le \frac{2M}{(\pi k)^4},$$

получим

$$\left|u(\mathrm{x},y)\right| \le N\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^4} < \infty,$$

где N – некоторая постоянная.

Равномерная сходимость рядов, полученных из (2.103) почленным дифференцированием по переменным x и y, доказывается аналогично.

Таким образом, доказан следующая.

Теорема 2.14. Если $\psi(y) \in C^3[0,1]$ и $\psi(0) = \psi(1) = = \psi''(0) = \psi''(1) = 0$, то решение задачи B_1^n существует и представляется рядом (2.103).

Задача B_2^n исследуется аналогично.

ГЛАВА III. ПОСТРОЕНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА В ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Известно, что одним из распространенных методов изучения корректных краевых задач для уравнений математической физики является метод функции Грина. Понятие функции Грина имеет большое значение в теории краевых задач для уравнений в частных производных. Зная функцию Грина, мы можем выразить значение решения краевой задачи во внутренних точках области через данные граничные значения, т.е. нахождение функции Грина позволяет написать решение поставленной краевой задачи в явном виде через квадратуры. Построение функции Грина зависит от вида области.

В монографии построены функции Грина для первой и второй краевых задач в прямоугольной и в бесконечной областях.

§ 3.1. Метод отражения для решения первой краевой задачи

В области $D=\{(x,y): 0\le x\le p,\ \ 0\le y\le l\}$ для уравнения

$$L[u]\equiv\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{3.1}$$

где $p>0,\ l>0-$заданные постоянные числа, используем метод отражения.

Для уравнения (3.1) в области D изучим следующую краевую задачу.

Задача K_1. Найти решение уравнения (3.1) в области D из класса $C^{3,2}_{x,y}(D)\cap C^{2,1}_{x,y}(\overline{D})$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\quad u(x,l)=\varphi_2(x),\quad 0\le x\le l, \tag{3.2}$$

$$u(0,y)=\psi_1(y),\ u(p,y)=\psi_2(y),\ u_x(p,y)=\psi_3(y),\ 0\le y\le l, \quad (3.3)$$

где $\varphi_i(x)\in C[0,p],\ i=1,2;$ $\psi_j(y)\in C^3[0,l],\ j=1,2,$ $\psi_j(y)\in C^2[0,l]$ – заданные функции, причём $\psi_i(0)=\psi_i(l)=\psi_i''(0)=\psi_i''(0)=0,$ $i=1,2,3$ и выполняются следующие условия

$$\begin{aligned}&\varphi_1(0)=\psi_1(0)=\varphi_1(p)=\psi_2(0)=\varphi_1'(p)=\psi_3(0)=0,\\&\varphi_2(0)=\psi_1(l)=\varphi_2(p)=\psi_2(l)=\varphi_2'(p)=\psi_3(l)=0.\end{aligned} \quad (3.4)$$

Теорема 3.1. Если задача K_1 имеет решение, то оно единственно.

Доказательство теоремы 3.1 аналогично доказательству теоремы 2.1.

Рассмотрим следующую **вспомогательную задачу.**

Задача K_{11}. Построить функцию $v(x,y)$, удовлетворяющую в области D уравнению (3.1) и условиям (3.2).

Для этой задачи построим функцию источника на отрезке $(0,l)$.Такая функция для одномерных параболических уравнений построена методом отражения в [47]. Следуя [47], помещая положительные источники в точки $2ml+y$ и отрицательные источники в точки $2ml-y$, представим функцию источника с помощью рядов

$$\begin{aligned}&Z(x,y;\xi,\eta)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[U(x,2ml+y;\xi,\eta)-U(x,2ml-y;\xi,\eta)\right],\\&T(x,y;\xi,\eta)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[V(x,2ml+y;\xi,\eta)-V(x,2ml-y;\xi,\eta)\right],\ x-\xi<0,\end{aligned} \quad (3.5)$$

где $U(x,y;\xi,\eta),\ V(x,y;\xi,\eta)$ – фундаментальные решения уравнения (3.1).

Все члены этих рядов удовлетворяют уравнению (3.1). Если эти ряды сходятся равномерно, то функции $Z(x,y;\xi,\eta)$ и $T(x,y;\xi,\eta)$ также удовлетворяют уравнению (3.1).

Для доказательства сходимости ряда $Z(x,y;\xi,\eta)$ напишем его в виде

$$Z(x,y;\xi,\eta)=U(x,y;\xi,\eta)-U(x,-y;\xi,\eta)+\sum_{m=1}^{\infty}\Big[U(x,2ml+y;\xi,\eta)-$$
$$-U(x,2ml-y;\xi,\eta)+U(x,-2ml+y;\xi,\eta)-U(x,-2ml-y;\xi,\eta)\Big] \quad (3.6)$$

Выделим регулярную часть функции (3.6):

$$Z(x,y;\xi,\eta)=U(x,y;\xi,\eta)-U(x,-y;\xi,\eta)+Z_1(x,y;\xi,\eta),$$

где

$$Z_1(x,y;\xi,\eta)=\sum_{m=1}^{\infty}\Big[U(x,2ml+y;\xi,\eta)-U(x,2ml-y;\xi,\eta)+$$
$$+U(x,-2ml+y;\xi,\eta)-U(x,-2ml-y;\xi,\eta)\Big] \quad (3.7)$$

Из вида фундаментального решения (1.34) видно, что аргументы x и ξ связаны соотношением $x-\xi$, а y и η связаны соотношением $y-\eta$, поэтому (3.7) перепишем в виде

$$Z_1(x-\xi;y-\eta)=\sum_{m=1}^{\infty}\Big[U(x-\xi,2ml+y-\eta)-U(x-\xi,2ml-y-\eta)+$$
$$+U(x-\xi,-2ml+y-\eta)-U(x-\xi,-2ml-y-\eta)\Big].$$
$$(3.8)$$

Так как функции, состоящие под знаком суммы в (3.8), непрерывно дифференцируемы, то разложим первое и третье слагаемые в ряд Тейлора в точке $y=\eta$, а второе и четвёртое слагаемые в точке $y=-\eta$, считая $x-\xi$ за параметр. Тогда первое слагаемое примет вид:

$$U\left(x-\xi, 2ml+y-\eta\right)=$$

$$=U\left(x-\xi, 2ml\right)+\frac{y-\eta}{1!}U_y\left(x-\xi, 2ml\right)+\frac{\left(y-\eta\right)^2}{2!}U_{yy}\left[x-\xi, \theta_2\left(y-\eta\right)\right],$$

а второе слагаемое примет вид:

$$U\left(x-\xi, 2ml-y-\eta\right)=$$

$$=U\left(x-\xi, 2ml\right)+\frac{y+\eta}{1!}U_y\left(x-\xi, 2ml\right)+\frac{\left(y+\eta\right)^2}{2!}U_{yy}\left[x-\xi, \theta_2\left(y+\eta\right)\right].$$

Аналогично, для третьего и четвёртого слагаемых получим

$$U\left(x-\xi, -2ml+y-\eta\right)=$$

$$=U\left(x-\xi, 2ml\right)+\frac{y-\eta}{1!}U_y\left(x-\xi, 2ml\right)+\frac{\left(y-\eta\right)^2}{2!}U_{yy}\left[x-\xi, \theta_3\left(y-\eta\right)\right],$$

$$U\left(x-\xi, -2ml-y-\eta\right)=$$

$$=U\left(x-\xi, 2ml\right)+\frac{y+\eta}{1!}U_y\left(x-\xi, 2ml\right)+\frac{\left(y+\eta\right)^2}{2!}U_{yy}\left[x-\xi, \theta_3\left(y+\eta\right)\right],$$

где, $0<\theta_i<1,\ i=\overline{1,4}.$

Подставив эти разложения в (3.8), имеем

$$Z_1\left(x-\xi, y-\eta\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\left(y-\eta\right)^2}{2!}U_{yy}\left(x-\xi, 2ml+\theta_1\left(y-\eta\right)\right)-\frac{\left(y+\eta\right)^2}{2!}U_{yy}\left(x-\xi, 2ml+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\theta_2\left(y+\eta\right)\right)+\frac{\left(y-\eta\right)^2}{2!}U_{yy}\left(x-\xi, 2ml+\theta_3\left(y-\eta\right)\right)-\frac{\left(y+\eta\right)^2}{2!}U_{yy}\left(x-\xi, 2ml+\theta_4\left(y+\eta\right)\right)\right],$$

или

$$Z_1\left(x-\xi, y-\eta\right)=\frac{\left(y-\eta\right)^2}{2!}\sum_{m=1}^{\infty}\left[U_{yy}\left(x-\xi, 2ml+\theta_1\left(y-\eta\right)\right)+U_{yy}\left(x-\xi, 2ml+\theta_3\left(y-\eta\right)\right)\right]-$$

$$-\frac{\left(y+\eta\right)^2}{2!}\sum_{m=1}^{\infty}\left[U_{yy}\left(x-\xi, 2ml+\theta_2\left(y+\eta\right)\right)+U_{yy}\left(x-\xi, 2ml+\theta_4\left(y+\eta\right)\right)\right].$$

Вычислим вторую производную функции

$$U\left[x-\xi,2ml+\theta_1\left(y-\eta\right)\right]=\left|2ml+\theta_1\left(y-\eta\right)\right|^{1/3}f\left[\frac{x-\xi}{\left|2ml+\theta_1\left(y-\eta\right)\right|^{2/3}}\right],$$

при этом используем соотношение (1.25):

$$U_{yy}\left(x-\xi,2ml+\theta_1\left(y-\eta\right)\right)=\frac{2}{3}\frac{\theta_1^2}{\left|2ml+\theta_1\left(y-\eta\right)\right|^{1+\frac{2}{3}}}f^*\left(\frac{x-\xi}{\left|2ml+\theta_1\left(y-\eta\right)\right|^{\frac{2}{3}}}\right)+$$

$$+\frac{2}{3}\frac{\theta_1^2}{\left|2ml+\theta_1\left(y-\eta\right)\right|^{2+\frac{1}{3}}}f^{*\prime}\left(\frac{x-\xi}{\left|2ml+\theta_1\left(y-\eta\right)\right|^{\frac{2}{3}}}\right).$$

Так как $f^*\left(0\right)=const\neq 0,\ \ f^{*\prime}\left(0\right)=0,$ то имеем

$$\left|U_{yy}\left[x-\xi,2ml+\theta_1\left(y-\eta\right)\right]\right|\leq Cm^{-1-2/3}.$$

Аналогичные оценки получим и для остальных слагаемых ряда (3.7).

Следовательно, ряд (3.7) сходится абсолютно и равномерно.

Аналогично доказывается равномерная сходимость функции Z_y, Z_{yy}, Z_x, Z_{xx} и Z_{xxx}.

Равномерная сходимость ряда $T\left(x,y;\xi,\eta\right)$ доказывается таким же методом.

Для функций $Z\left(x,y;\xi,\eta\right)$ и $T\left(x,y;\xi,\eta\right)$ имеют место оценки, что и для $U\left(x,y;\xi,\eta\right)$ и $V\left(x,y;\xi,\eta\right)$ соответственно.

Теорема 3.2. $Z\left(x,y;\xi,\eta\right)$ и $T\left(x,y;\xi,\eta\right)$ являются периодическими функциями относительно аргумента y с периодом $2l$, т.е.

$$Z\left(x,y+2l;\xi,\eta\right)=Z\left(x,y;\xi,\eta\right),\quad T\left(x,y+2l;\xi,\eta\right)=T\left(x,y;\xi,\eta\right).$$

Доказательство. Докажем периодичность функции $Z\left(x,y;\xi,\eta\right)$:

$$Z\left(x,y+2l;\xi,\eta\right)=U\left(x,y+2l;\xi,\eta\right)-U\left(x,-y+2l;\xi,\eta\right)+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\Big[U\left(x,2ml+2l+y;\xi,\eta\right)-U\left(x,2ml+2l-y;\xi,\eta\right)+$$
$$+U\left(x,-2ml+y+2l;\xi,\eta\right)-U\left(x,-2ml-y+2l;\xi,\eta\right)\Big]=$$
$$=U\left(x,y;\xi,\eta\right)-U\left(x,-y;\xi,\eta\right)+\sum_{m=2}^{\infty}\Big\{U\left[x,-2l\left(m-1\right)+y;\xi,\eta\right]-$$
$$-U\left[x,-2l\left(m-1\right)-y;\xi,\eta\right]\Big\}+\sum_{m=0}^{\infty}\Big\{U\left[x,2l\left(m+1\right)+y;\xi,\eta\right]-$$
$$-U\left[x,2l\left(m+1\right)-y;\xi,\eta\right]\Big\}=U\left(x,y;\xi,\eta\right)-U\left(x,-y;\xi,\eta\right)+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\Big[U\left(x,-2ml+y;\xi,\eta\right)-U\left(x,-2ml-y;\xi,\eta\right)\Big]+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\Big[U\left(x,2ml+y;\xi,\eta\right)-U\left(x,2ml-y;\xi,\eta\right)\Big]=Z\left(x,y;\xi,\eta\right)$$

что и требовалось доказать.

Периодичность функции $T\left(x,y;\xi,\eta\right)$ доказывается аналогично.

Теперь изучим свойства функций $Z\left(x,y;\xi,\eta\right)$ и $T\left(x,y;\xi,\eta\right)$, а также их производных на границах отрезка $\left[0,l\right]$.

Сразу заметим, что при $y=0$, $Z\left(x,0;\xi,\eta\right)=0$, а при $y=l$ имеем

$$Z\left(x,l;\xi,\eta\right)=U\left(x,l;\xi,\eta\right)-U\left(x,-l;\xi,\eta\right)+\sum_{m=1}^{\infty}\Big\{U\left[x,\left(2m+1\right)l;\xi,\eta\right]-$$
$$-U\left[x,\left(2m-1\right)l;\xi,\eta\right]+U\left[x,-\left(2m-1\right)l;\xi,\eta\right]-U\left[x,-\left(2m+1\right)l;\xi,\eta\right]\Big\}.$$

Отсюда следует, что $Z\left(x,l;\xi,\eta\right)=0$.

Дифференцируя функцию $Z(x,y;\xi,\eta)$ по η и учитывая соотношение (1.26), получаем

$$Z_\eta(x,y;\xi,\eta) = -U^*(x,y;\xi,\eta)\operatorname{sgn}(y-\eta) - U^*(x,-y;\xi,\eta) +$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\Big[-U^*(x,2ml+y;\xi,\eta) + U^*(x,2ml-y;\xi,\eta) + U^*(x,-2ml+y;\xi,\eta) -$$
$$-U^*(x,-2ml-y;\xi,\eta)\Big],$$

где $U^*(x,y;\xi,\eta)$ определяется по формуле (1.19).

Непосредственные вычисления показывают, что

$$Z_\eta(x,0;\xi,\eta) = 0 \quad \text{и} \quad Z_\eta(x,l;\xi,\eta) = 0. \tag{3.9}$$

При $\eta = 0$ имеем

$$\begin{aligned} Z_\eta(x,y;\xi,0) &= -2U^*(x,y;\xi,0) - 2\sum_{m=1}^{\infty}\Big[U^*(x,2ml+y;\xi,0) - \\ &-U^*(x,2ml-y;\xi,0)\Big] = -2U^*(x,y;\xi,0) - M(x,y;\xi,0), \end{aligned} \tag{3.10}$$

где

$$M(x,y;\xi,0) = 2\sum_{m=1}^{\infty}\Big[U^*(x,2ml+y;\xi,0) - U^*(x,2ml-y;\xi,0)\Big].$$

Тогда

$$\lim_{y\to 0} Z_\eta(x,y;\xi,0) = -2\lim_{y\to 0} U^*(x,y;\xi,0), \tag{3.11}$$

т. е. $\lim\limits_{y\to 0} M(x,y;\xi,0) = 0.$

При $\eta = l$ получаем

$$Z_\eta(x,y;\xi,l) = 2U^*(x,y;\xi,l) - 2U^*(x,-y;\xi,l) + \sum_{m=1}^{\infty}\Big[U^*(x,-2ml-y;\xi,l) -$$
$$-U^*(x,-2ml+y;\xi,l)\Big] + \sum_{m=2}^{\infty}\Big[U^*(x,2ml+y;\xi,l) - U^*(x,2ml-y;\xi,l)\Big] =$$
$$= 2U^*(x,y;\xi,l) - N(x,y;\xi,l).$$

Здесь

$$N\left(x,y;\xi,l\right)=2U^{*}\left(x,-y;\xi,l\right)-\sum_{m=1}^{\infty}\left[U^{*}\left(x,-2ml-y;\xi,l\right)-\right.$$

$$\left.-U^{*}\left(x,-2ml+y;\xi,l\right)\right]-\sum_{m=2}^{\infty}\left[U^{*}\left(x,2ml+y;\xi,l\right)-U^{*}\left(x,2ml-y;\xi,l\right)\right].$$

Тогда

$$\lim_{y\to l}Z_{\eta}\left(x,y;\xi,l\right)=2\lim_{y\to l}U^{*}\left(x,y;\xi,l\right),$$

т. е. $\lim\limits_{y\to l}N\left(x,y;\xi,l\right)=0.$

Теперь докажем, что функция

$$\upsilon\left(x,y\right)=-\frac{1}{2}\int_{0}^{p}Z_{\eta}\left(x,y;\xi,0\right)\varphi_{1}\left(\xi\right)d\xi+\frac{1}{2}\int_{0}^{p}Z_{\eta}\left(x,y;\xi,1\right)\varphi_{2}\left(\xi\right)d\xi \quad (3.12)$$

является решением вспомогательной задачи K_{11} при произвольных $\varphi_{i}\left(\xi\right)\in C\left[0,p\right]$, $i=1,2.$ Сперва проверим выполнение граничных условий (3.2).

$$\upsilon\left(x,y\right)=-\frac{1}{2}\int_{0}^{p}\left[-2U^{*}\left(x,y;\xi,0\right)-M\left(x,y;\xi,0\right)\right]\varphi_{1}\left(\xi\right)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{0}^{p}\left[2U^{*}\left(x,y;\xi,l\right)-N\left(x,y;\xi,l\right)\right]\varphi_{2}\left(\xi\right)d\xi=$$

$$=\int_{0}^{p}U^{*}\left(x,y;\xi,0\right)\varphi_{1}\left(\xi\right)d\xi+\frac{1}{2}\int_{0}^{p}M\left(x,y;\xi,0\right)\varphi_{1}\left(\xi\right)d\xi+$$

$$+\int_{0}^{p}U^{*}\left(x,y;\xi,l\right)\varphi_{2}\left(\xi\right)d\xi-\frac{1}{2}\int_{0}^{p}N\left(x,y;\xi,l\right)\varphi_{2}\left(\xi\right)d\xi=$$

$$=J_{1}\left(x,y\right)+J_{2}\left(x,y\right)+J_{3}\left(x,y\right)-J_{4}\left(x,y\right).$$

Каждое выражение рассмотрим отдельно:

$$J_1(x,y)=\int_0^p U^*(x,y;\xi,0)\varphi_1(\xi)d\xi=\int_0^p \frac{1}{y^{2/3}} f^*\left(\frac{x-\xi}{y^{2/3}}\right)\varphi_1(\xi)d\xi=$$

$$=\int_{x/y^{2/3}}^{(x-p)/y^{2/3}} f^*(t)\varphi_1\left(x-ty^{2/3}\right)dt.$$

$$\lim_{y\to 0} J_1(x,y)=-\lim_{x\to\infty}\int_{x/y^{2/3}}^{(x-p)/y^{2/3}} f^*(t)\varphi_1\left(x-t\,y^{2/3}\right)dt=-$$

$$-\int_{\infty}^{-\infty} f^*(t)\varphi_1(x)dt=\varphi_1(x).$$

здесь мы использовали соотношение (1.20).

Учитывая (3.9), имеем

$$\lim_{y\to 0} J_2(x,y)=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\int^p M(x,y;\xi,0)d\xi=0.$$

$$\lim_{y\to 0} J_3(x,y)=\lim_{y\to 0} J_4(x,y)=0 \quad \text{, т.к.} \quad Z_\eta(x,0;\xi,\eta)=0.$$

Из доказанного выше следует, что $\lim\limits_{y\to 0} \nu(x,y)=\varphi_1(x)$.

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{y\to l} \nu(x,y)=\varphi_2(x)$.

Итак, доказано, что функция (3.12) является решением вспомогательной задачи K_{11} кроме того, она имеет период $2l$ по переменной y.

Функцию $Z(x,y;\xi,\eta)$ можно рассматривать как функцию Грина этой вспомогательной задачи K_{11}.

С помощью функции $\upsilon(x,y)$ заданные неоднородные краевые условия на прямых $y=0$ и $y=l$ можно свести к однородным.

В самом деле, решение задачи K_1 ищем в виде $\vartheta(x,y)=u(x,y)-$ $-\upsilon(x,y)$, где $u(x,y)-$решение задачи K_1, а $\upsilon(x,y)$ имеет вид (3.1.12) . Тогда для $\vartheta(x,y)$ получим следующую задачу:

$$\begin{aligned}&\vartheta_{xxx}-\vartheta_{yy}=0,\ \ \vartheta(x,0)=\vartheta(x,l)=0,\\&\vartheta(0,y)=\overline{\psi}_1(y),\ \ \vartheta(p,y)=\overline{\psi}_2(y),\ \ \vartheta_x(p,y)=\overline{\psi}_3(y).\end{aligned}\tag{3.13}$$

Задачу (3.13) можно решить, как и задачу A_1 в параграфе 2.1. Определив функцию $\vartheta(x,y)$, находим функцию $u(x,y)$ в виде

$$u(x,y)=\vartheta(x,y)+\nu(x,y),\tag{3.14}$$

где $\nu(x,y)$ и $\vartheta(x,y)$ соответственно имеют вид (3.12) и (2.21). Этим доказана следующая.

Теорема 3.3. Если $\varphi_j(x)\in[0,p],\ j=1,2;\ \ \psi_i(y)\in C^3[0,l],\ \ i=1,2;\ \ \psi_3(y)\in C^2[0,l];\ \ \psi_i(0)=\psi_i(l)=\psi_i''(0)=\psi_i''(l)=0,\ i=1,2,3$ и выполняются условия (3.1.4), то решение задачи K_1 существует и представимо в виде (3.14).

§ 3.2. Первая краевая задача в бесконечной области

В области $D_\infty=\{(x,y):-\infty<x<+\infty,\ 0<y<l\}$ рассмотрим уравнение

$$L[u]\equiv\frac{\partial^3u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=g(x,y).\tag{3.15}$$

Задача B_1^*. Найти решение уравнения (3.15) в области D_∞, из класса $C^{3,2}_{x,y}(D_\infty)\cap C^{2,1}_{x,y}(D_\infty\cup\Gamma_3)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\quad u(x,l)=\varphi_2(x),\quad x\in(-\infty,+\infty);\tag{3.16}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}u(x,y)=\lim_{x\to+\infty}u_x(x,y)=0,\quad y\in[0,l],\tag{3.17}$$

где $\varphi_i(x)\in C^1(-\infty,+\infty),\ i=1,2,\ g(x,y)\in C(D_\infty\cup\Gamma_3),\ \Gamma_3=\partial D_\infty$ - граница области D_∞, а также выполняются условия согласования,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\varphi_i(x)=\lim_{x\to+\infty}\varphi_i'(x)=0,\ i=1,2.$$

В дальнейшем на функции $\varphi_i(x),\ g(x,y)$ будем налагать дополнительные условия.

Теорема 3.4. Если задача B_1^* имеет решение, то оно единственно.

Доказательство. Пусть задача B_1^* имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$, тогда $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет уравнению $u_{xxx}-u_{yy}=0$ и однородным краевым условиям. Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в $D_\infty\cup\Gamma_3$.

В области D_∞ справедливо тождество

$$uL[u]\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}(uu_y)+u_y^2=0.$$

Интегрируя это тождество по области $D_{ab}=\{(x,y):\ a<x<b,\ 0<y<l\}$, где $a,b-$конечное число, причем $a<b$, имеем

$$\int_0^l\left[u(b,y)u_{xx}(b,y)-u(a,y)u_{xx}(a,y)\right]dy-\frac{1}{2}\int_0^l\left[u_x^2(b,y)-u_x^2(a,y)\right]dy-$$
$$-\int_a^b u(x,l)u_y(x,l)\,dx+\int_a^b u(x,0)u_y(x,0)\,dx+\iint_{D_{ab}}u_y^2(x,y)\,dxdy=0.$$

Если $a\to-\infty,\ b\to+\infty$ то $D_{ab}\to D_\infty$. При этом, учитывая однородное краевое условие, и свойства функции $u(x,y)$ при $x\to\pm\infty$, получаем

$$\lim_{a\to-\infty}\int_0^l u_x^2\left(a,y\right)dy+2\iint_{D_\infty}u_y^2\left(x,y\right)dxdy=0.$$

Следовательно $u_y\left(x,y\right)=0$, т.е. $u\left(x,y\right)=\phi\left(x\right)$, $\left(x,y\right)\in D_\infty$. Из $u\left(x,0\right)=0$ имеем $\phi\left(x\right)=0$. Тогда $u\left(x,\text{y}\right)\equiv 0$, $\left(x,y\right)\in D_\infty\cup\Gamma_3$. Теорема 3.4 доказана.

Перейдем к доказательству существования решения задачи B_1^*.

Рассмотрим следующие сопряженные дифференциальные операторы

$$L\equiv\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2},\qquad L^*\equiv-\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}.$$

В области D_∞ имеет место тождество

$$\varphi L\left[\psi\right]-\psi L^*\left[\varphi\right]\equiv\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\varphi\psi_{\xi\xi}-\varphi_\xi\psi_\xi+\varphi_{\xi\xi}\psi\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\varphi\psi_\eta-\varphi_\eta\psi\right),$$

где φ, ψ – достаточно гладкие функции.

Интегрируя это тождество по области D_{ab}, получаем

$$\begin{gathered}\iint_{D_{ab}}\left(\varphi L\left[\psi\right]-\psi L^*\left[\varphi\right]\right)d\xi d\eta=\\=\iint_{D_{ab}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\varphi\psi_{\xi\xi}-\varphi_\xi\psi_\xi+\varphi_{\xi\xi}\psi\right)d\xi d\eta-\iint_{D_{ab}}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\varphi\psi_\eta-\varphi_\eta\psi\right)d\xi d\eta.\end{gathered}\tag{3.18}$$

Возьмем теперь в качестве функции φ фундаментальное решение $U\left(x,y;\xi,\eta\right)$ уравнения (3.15), которое как функция $\left(\xi,\eta\right)$ при $\left(x,y\right)\neq\left(\xi,\eta\right)$ удовлетворяет уравнению

$$L^*\left[U\right]\equiv-U_{\xi\xi\xi}-U_{\eta\eta}=0,$$

а в качестве ψ возьмем любое регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (3.15). При этом, учитывая, что $U_\eta(x,y;\xi,\eta)$ имеет особенность при $y=\eta$, область D_{ab} делим на две области так, что $D_{ab}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(D_1^\varepsilon\cup D_2^\varepsilon\right)$, где
$D_1^\varepsilon=\left\{(\xi,\eta): a<\xi<b,\, 0<\eta<y-\varepsilon\right\}$, $D_2^\varepsilon=\left\{(\xi,\eta): a<\xi<b,\, y+\varepsilon<\eta<l\right\}$.

Тогда тождество (3.18) принимает вид

$$\iint\limits_D U(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)\,d\xi d\eta=\lim_{\varepsilon\to 0-}\int\limits_a^b\int\limits_0^{y-\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u\right)d\xi d\eta+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_a^b\int\limits_{y+\varepsilon}^{l}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u\right)d\xi d\eta-$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0-}\int\limits_a^b\int\limits_0^{y-\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(Uu_\eta-U_\eta u\right)d\xi d\eta-\lim_{\varepsilon\to 0-}\int\limits_a^b\int\limits_{y+\varepsilon}^{l}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(Uu_\eta-U_\eta u\right)d\xi d\eta=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0-}\int\limits_0^{y-\varepsilon}\left(Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u\right)\Big|_{\xi=a}^{\xi=b}d\eta+\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{y+\varepsilon}^{l}\left(Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u\right)\Big|_{\xi=a}^{\xi=b}d\eta-$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0-}\int\limits_a^b\left(Uu_\eta-U_\eta u\right)\Big|_{\eta=0}^{\eta=y-\varepsilon}d\xi-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_a^b\left(Uu_\eta-U_\eta u\right)\Big|_{\eta=y+\varepsilon}^{\eta=l}d\xi=$$

$$=\int\limits_0^{y}\left(Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u\right)\Big|_{\xi=a}^{\xi=b}d\eta+\int\limits_y^{l}\left(Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u\right)\Big|_{\xi=a}^{\xi=b}d\eta-$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0-}\int\limits_a^b\left[U(x,y;\xi,y-\varepsilon)u_\eta(\xi,y-\varepsilon)-U(x,y;\xi,0)u_\eta(\xi,0)\right]d\xi+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0-}\int\limits_a^b\left[U_\eta(x,y;\xi,y-\varepsilon)u(\xi,y-\varepsilon)-U_\eta(x,y;\xi,0)u(\xi,0)\right]d\xi-$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_0^p\left[U(x,y;\xi,l)u_\eta(\xi,l)-U(x,y;\xi,y+\varepsilon)u_\eta(\xi,y+\varepsilon)\right]d\xi+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_a^b\left[U_\eta(x,y;\xi,l)u(\xi,l)-U_\eta(x,y;\xi,y+\varepsilon)u(\xi,y+\varepsilon)\right]d\xi=$$

$$=\int_0^l \left(Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u\right)\Big|_{\xi=a}^{\xi=b}d\eta-$$

$$-\int_a^b\left[U(x,y;\xi,l)u_\eta(\xi,l)-U(x,y;\xi,0)u_\eta(\xi,0)\right]d\xi+$$

$$+\int_a^b\left[U_\eta(x,y;\xi,l)u(\xi,l)-U_\eta(x,y;\xi,0)u(\xi,0)\right]d\xi+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0-}\int_a^b U_\eta(x,y;\xi,y-\varepsilon)u(\xi,y-\varepsilon)d\xi-$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^b U_\eta(x,y;\xi,y+\varepsilon)u(\xi,y+\varepsilon)d\xi.$$

Упростив это выражение, имеем

$$\iint_{D_{ab}}U(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta=\int_0^l\left[Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u\right]\Big|_{\xi=a}^{\xi=b}d\eta-$$

$$-\int_a^b U(x,y;\xi,\eta)u_\eta(\xi,\eta)\Big|_{\eta=0}^{\eta=l}d\xi+\int_a^b U_\eta(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)\Big|_{\eta=0}^{\eta=l}d\xi+ \tag{3.19}$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0-}\int_a^b U_\eta(x,y;\xi,y-\varepsilon)u(\xi,y-\varepsilon)d\xi-$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^b U_\eta(x,y;\xi,y+\varepsilon)u(\xi,y+\varepsilon)d\xi.$$

Учитывая теорему 1.3, из (3.19) получаем

$$\iint_{D_{ab}}U(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta=\int_0^l\left(Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u\right)\Big|_{\xi=a}^{\xi=b}d\eta-$$

$$-\int_a^b U(x,y;\xi,\eta)u_\eta(\xi,\eta)\Big|_{\eta=0}^{\eta=l}d\xi+\int_a^b U_\eta(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)\Big|_{\eta=0}^{\eta=l}d\xi-2u(x,y).$$

Отсюда, окончательно имеем

$$2u(x,y)=\int_0^l\left(Uu_{\xi\xi}-U_\xi u_\xi+U_{\xi\xi}u\right)\Big|_{\xi=a}^{\xi=b}d\eta-\int_a^b\left(Uu_\eta-U_\eta u\right)\Big|_{\eta=0}^{\eta=l}d\xi-$$
$$-\iint_{D_{ab}}U(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta. \tag{3.20}$$

Пусть теперь $U(x,y;\xi,\eta)$- любое регулярное решение сопряженного уравнения $L^*[u]=0$, а $u(x,y)$- любое регулярное решение уравнения $u_{xxx}-u_{yy}=0$. Тогда полагая, в (3.18) $\varphi=W(x,y;\xi,\eta)$, $\psi=u(\xi,\eta)$, имеем

$$0=\int_0^l\left(Wu_{\xi\xi}-W_\xi u_\xi+W_{\xi\xi}u\right)\Big|_{\xi=a}^{\xi=b}d\eta-\int_a^b\left(Wu_\eta-W_\eta u\right)\Big|_{\eta=0}^{\eta=l}d\xi-$$
$$-\iint_{D_{ab}}W(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta. \tag{3.21}$$

Из (3.20) и (3.21) получаем

$$2u(x,y)=\int_0^l\left(Gu_{\xi\xi}-G_\xi u_\xi+G_{\xi\xi}u\right)\Big|_{\xi=a}^{\xi=b}d\eta-\int_a^b\left(Gu_\eta-G_\eta u\right)\Big|_{\eta=0}^{\eta=l}d\xi-$$
$$-\iint_{D_{ab}}G(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta. \tag{3.22}$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta)=U(x,y;\xi,\eta)-W(x,y;\xi,\eta).$$

Пусть теперь $a\to+\infty,\ b\to-\infty$ тогда $D_{ab}\to D_\infty$. Отсюда, учитывая условие (3.16)-(3.17), из формулы (3.22) получаем

$$2u(x,y)=-\int_{-\infty}^{+\infty}\left[G(x,y;\xi,l)u_\eta(\xi,l)-G(x,y;\xi,0)u_\eta(\xi,0)\right]d\xi+$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty}G_\eta(x,y;\xi,l)\varphi_2(\xi)d\xi-\int_{-\infty}^{+\infty}G_\eta(x,y;\xi,0)\varphi_1(\xi)d\xi- \tag{3.23}$$
$$-\iint_{D_\infty}G(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Построим теперь функцию G, которая должна обладать следующими свойствами:

$$L[G]=0 \text{ по переменным } (x,y), \tag{3.24}$$

$$L^*[G]=0 \text{ по переменным } (\xi,\eta), \tag{3.25}$$

$$G(x,y;\xi,0)=G(x,y;\xi,1)=0, \quad \forall (x,y)\in D_\infty, \ \forall \xi \in (-\infty,\infty). \tag{3.26}$$

Функцию $G(x,y;\xi,\eta)$ - назовем функцией Грина для задачи B_1^* в бесконечной области.

Лемма 3.5. Функция Грина задачи B_1^* для бесконечной области имеет вид

$$G(x,y;\xi,\eta)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[U(x,2ml+y;\xi,\eta)-U(x,2ml-y;\xi,\eta)\right]. \tag{3.27}$$

Доказательство. То, что функция $G(x,y;\xi,\eta)$ удовлетворяет условиям (3.24) и (3.25), очевидно. Равномерная сходимость ряда вместе с частными производными до нужного порядка доказана в § 3.1.

Покажем, что функция $G(x,y;\xi,\eta)$ удовлетворяет условию (3.2.12). Для этого перепишем его в виде

$$G(x,y;\xi,\eta)=U(x,y;\xi,\eta)-U(x,-y;\xi,\eta)+\sum_{m=1}^{\infty}\Big[U(x,2ml+y;\xi,\eta)-$$
$$-U(x,2ml-y;\xi,\eta)+U(x,-2ml+y;\xi,\eta)-U(x,-2ml-y;\xi,\eta)\Big] \tag{3.28}$$

Отсюда при $\eta=0$ имеем

$$G(x,y;\xi,0)=U(x,y;\xi,0)-U(x,-y;\xi,0)+\sum_{m=1}^{\infty}\Big[U(x,2ml+y;\xi,0)-$$
$$-U(x,2ml-y;\xi,0)+U(x,-2ml+y;\xi,0)-U(x,-2ml-y;\xi,0)\Big]$$

Теперь, учитывая соотношение

$$U\left(x,2ml+y;\xi,0\right)=U\left(x,-2ml-y;\xi,0\right),$$
$$U\left(x,2ml-y;\xi,0\right)=U\left(x,-2ml+y;\xi,0\right),$$

легко убедиться, что $G\left(x,y;\xi,0\right)=0$.

Далее, при $\eta=l$, имеем

$$G\left(x,y;\xi,l\right)=U\left(x,y;\xi,l\right)-U\left(x,-y;\xi,l\right)+\sum_{m=1}^{\infty}\Big[U\left(x,2ml+y;\xi,l\right)-$$
$$-U\left(x,2ml-y;\xi,l\right)+U\left(x,-2ml+y;\xi,l\right)-U\left(x,-2ml-y;\xi,l\right)\Big]$$

Отсюда, учитывая равенства,

$$\left|y-l\right|=\left|2l-y-l\right|,\qquad \left|-y-l\right|=\left|2l+y-l\right|,\quad \left|-2l+y-l\right|=\left|4l-y-l\right|,$$
$$\left|-2l-y-l\right|=\left|4l+y-l\right|$$

убедимся, что $G\left(x,y;\xi,l\right)=0.$

Теперь, используя лемму 3.5, из (3.23) получим решение задачи B_1^* в виде

$$u\left(x,y\right)=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}G_\eta\left(x,y;\xi,0\right)\varphi_1\left(\xi\right)d\xi+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}G_\eta\left(x,y;\xi,l\right)\varphi_2\left(\xi\right)d\xi-$$
$$-\frac{1}{2}\iint_{D_\infty}G\left(x,y;\xi,\eta\right)g\left(\xi,\eta\right)d\xi d\eta. \tag{3.29}$$

Для сходимости несобственных интегралов, участвующих в (3.29) на заданные функции $\varphi_1\left(x\right)$, $\varphi_2\left(x\right)$, $g\left(x,y\right)$ наложим некоторые ограничения. Введем обозначения

$$J_1(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_\eta(x,y;\xi,0)\varphi_1(\xi)d\xi, \quad J_2(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_\eta(x,y;\xi,l)\varphi_2(\xi)d\xi,$$

$$J_3(x,y)=\iint\limits_{D_\infty} G(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Тогда равенство (3.29) можно написать в виде

$$u(x,y)=-\frac{1}{2}\left[J_1(x,y)-J_2(x,y)\right]-\frac{1}{2}J_3(x,y).$$

Лемма 3.6. Пусть функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и $g(x,y)$ при $|x|\to\infty$ имеют представления:

$$\varphi_i(x)=\mathrm{O}\left(|x|^{-\alpha}\right),\ i=1,2, \quad \text{причем} \quad \alpha>\frac{1}{3}, \tag{3.30}$$

$$g(x,y)=\mathrm{O}\left(|x|^{-\beta}\right), \quad \text{причем} \ \beta>\frac{3}{2}. \tag{3.31}$$

Тогда для любого фиксированного $x_0\in(-\infty,\infty)$ имеют место равенства

$$\lim_{y\to 0}u(x_0,y)=\varphi_1(x_0), \quad \lim_{y\to l}u(x_0,y)=\varphi_2(x_0). \tag{3.32}$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл $J_1(x_0,y)$. На основании (3.10) его можно записать в виде

$$J_1(x_0,y)=-2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U^*(x_0,y;\xi,0)\varphi_1(\xi)d\xi-\int\limits_{-\infty}^{+\infty} M(x_0,y;\xi,0)\varphi_1(\xi)d\xi=$$
$$=-2J_{11}(x_0,y)-J_{12}(x_0,y).$$

Пусть $a<b$. Первый интеграл перепишем в виде

$$J_{11}\left(x_0,y\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}U^*\left(x_0,y;\xi,0\right)\varphi_1\left(\xi\right)d\xi=\int\limits_{-\infty}^{a}U^*\left(x_0,y;\xi,0\right)\varphi_1\left(\xi\right)d\xi+$$

$$+\int\limits_{a}^{b}U^*\left(x_0,y;\xi,0\right)\varphi_1\left(\xi\right)d\xi+\int\limits_{b}^{+\infty}U^*\left(x_0,y;\xi,0\right)\varphi_1\left(\xi\right)d\xi+$$

$$+\int\limits_{a}^{b}U^*\left(x_0,y;\xi,0\right)\left[\varphi_1\left(\xi\right)-\varphi_1\left(x_0\right)\right]d\xi=J_{11}^{(1)}+J_{11}^{(2)}+J_{11}^{(3)}+J_{11}^{(4)}.$$

Далее, производя замену $t=\left(x_0-\xi\right)y^{-2/3}$ в $U^*\left(x,y;\xi,\eta\right)$, имеем

$$J_{11}^{(1)}\left(x_0,y\right)+J_{11}^{(3)}\left(x_0,y\right)=\int\limits_{-\infty}^{a}U^*\left(x_0,y;\xi,0\right)\varphi_1\left(\xi\right)d\xi+$$

$$+\int\limits_{b}^{+\infty}U^*\left(x_0,y;\xi,0\right)\varphi_1\left(\xi\right)d\xi=\left(\int\limits_{-\infty}^{a}+\int\limits_{b}^{+\infty}\right)y^{-2/3}f^*\left(\frac{x_0-\xi}{y^{2/3}}\right)\varphi_1\left(\xi\right)d\xi=$$

$$=\left(\int\limits_{-\infty}^{\frac{x_0-b}{y^{2/3}}}+\int\limits_{\frac{x_0-a}{y^{2/3}}}^{+\infty}\right)y^{-2/3}f^*\left(\frac{x_0-\xi}{y^{2/3}}\right)\varphi_1\left(x_0-t\,y^{2/3}\right)dt,$$

$$J_{11}^{(2)}\left(x_0,y\right)=\int\limits_{a}^{b}U^*\left(x_0,y;\xi,0\right)\varphi_1\left(\xi\right)d\xi=\varphi_1\left(x_0\right)\int\limits_{a}^{b}y^{-2/3}f^*\left(\frac{x_0-\xi}{y^{2/3}}\right)d\xi=$$

$$=\varphi_1\left(x_0\right)\int\limits_{\frac{x_0-b}{y^{2/3}}}^{\frac{x_0-a}{y^{2/3}}}f^*\left(t\right)dt,$$

$$J_{11}^{(4)}\left(x_0,y\right)=\int\limits_{a}^{b}U^*\left(x_0,y;\xi,0\right)\left[\varphi_1\left(\xi\right)-\varphi_1\left(x_0\right)\right]d\xi=$$

$$=\int\limits_{a}^{b}y^{-2/3}f^*\left(\frac{x_0-\xi}{y^{2/3}}\right)\left[\varphi_1\left(\xi\right)-\varphi_1\left(x_0\right)\right]d\xi=$$

$$=\int\limits_{\frac{x_0-b}{y^{2/3}}}^{\frac{x_0-a}{y^{2/3}}}f^*\left(t\right)\left[\varphi_1\left(x_0-t\,y^{2/3}\right)-\varphi_1\left(x_0\right)\right]dt,$$

Учитывая оценки (1.37) и представление (3.30), получаем

$$\left|J_{11}^{(1)}\left(x_0,y\right)+J_{11}^{(3)}\left(x_0,y\right)\right|\le C_1\left(\int\limits_{-\infty}^{\frac{x_0-b}{y^{2/3}}}+\int\limits_{\frac{x_0-a}{y^{2/3}}}^{+\infty}\right)|t|^{-5/2}\left|x_0-ty^{2/3}\right|^{-\alpha}dt<\infty, \quad (3.33)$$

$$\left|J_{11}^{(4)}\left(x_0,y\right)\right|\le C_2 y^{\frac{2\alpha}{3}}\int\limits_{\frac{x_0-b}{y^{2/3}}}^{\frac{x_0-a}{y^{2/3}}}|t|^{-\alpha-\frac{5}{2}}dt\le C_3 y^{\frac{4\alpha}{3}+1}, \quad (3.34)$$

здесь $\forall\, y\in[0,l],\ C_i=const>0,\ i=1,2,3.$

Так как

$$\lim_{y\to 0}\left(x_0-b\right)y^{-2/3}=-\infty,\quad \lim_{y\to 0}\left(x_0-a\right)y^{-2/3}=+\infty,$$

то имеем $\lim\limits_{y\to 0}J_{11}^{(i)}\left(x_0,y\right)=0,\quad i=1,2,3.$

Из (3.34) также следует, что $\lim\limits_{y\to 0}J_{11}^{(4)}\left(x_0,y\right)=0$

Учитывая (1.21), получаем $\lim\limits_{y\to 0}J_{11}^{(2)}\left(x_0,y\right)=\varphi_1\left(x_0\right).$

$$\lim_{y\to 0}J_{12}\left(x_0,y\right)=\lim_{y\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}M\left(x_0,y;\xi,0\right)\varphi_1\left(\xi\right)d\xi=0,$$

т.к. из (3.11) $M\left(x_0,0;\xi,0\right)=0,\ \forall\xi\in\left(-\infty,+\infty\right).$
Тогда

$$\lim_{y\to 0}J_1\left(x_0,y\right)=-\lim_{y\to 0}\left[2J_{11}\left(x_0,y\right)+J_{12}\left(x_0,y\right)\right]=-2\varphi_1\left(x_0\right).$$

Аналогично можно установить следующее равенство

$$\lim_{y\to 0}J_2\left(x_0,y\right)=0$$

Учитывая $G(x_0,0;\xi,\eta)=0$, можно легко установить, что

$$\lim_{y\to 0} J_3(x_0,y)=0$$

Следовательно,

$$\lim_{y\to 0} u(x_0,y)=-\frac{1}{2}\left[-2\varphi_1(x_0)\right]=\varphi_1(x_0).$$

Точно так же можно показать, что $\lim\limits_{y\to l} u(x_0,y)=\varphi_2(x_0)$.

Можно убедиться, что интеграл $J_3(x_0,y)$ при выполнении условий (3.31) сходится. В самом деле,

$$\left|J_3(x,y)\right|\le\iint\limits_{D_\infty}\left|G(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)\right|d\xi d\eta=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{l}\left|G(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)\right|d\xi d\eta=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{-\mu}\int\limits_{0}^{l}\left|G(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)\right|d\xi d\eta+\int\limits_{-\mu}^{+\mu}\int\limits_{0}^{l}\left|G(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)\right|d\xi d\eta+$$

$$+\int\limits_{+\mu}^{+\infty}\int\limits_{0}^{l}\left|G(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)\right|d\xi d\eta=J_{31}+J_{32}+J_{33},$$

где $\mu-$некоторое фиксированное положительнее число.

Рассмотрим каждое слагаемое в отдельности. Учитывая оценки из (1.45) для функции $G(x,y;\xi,\eta)$ и (3.31) для $g(\xi,\eta)$, получим

$$\left|J_{31}(x,y)\right|\le\int\limits_{-\infty}^{-\mu}\left|G(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)\right|d\xi d\eta\le C_3\int\limits_{-\infty}^{-\mu}\left|x-\xi\right|^{1/2}\left|\xi\right|^{-\beta}d\xi<\infty,$$

в силу $\beta>3/2$.

Отсюда следует, что $J_{31}(x,y)-$есть ограниченная функция. Аналогично доказывается, что $J_{33}(x,y)-$также ограниченная функция. Так как $f(0)=const\neq 0$, из (1.42) следует, что на отрезке $[-\mu;+\mu]$ функция $G(x,y;\xi,\eta)$ не имеет особенностей, поэтому, $J_{32}(x,y)$ – ограниченная функция. Из изложенного выше следует, что интеграл $J_3(x_0,y)$ сходится.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3.7. Пусть $\varphi_i(x)\in C^1(-\infty,+\infty)$, $i=1,2$; $g(x,y)\in C(D_\infty\cup\Gamma)$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varphi_i(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi_i'(x)=0$, $i=1,2$, а также выполняются условия (3.30) и (3.31). Тогда существует единственное решение задачи B_1^* и оно имеет вид (3.29), здесь функция Грина $G(x,y;\xi,\eta)$ определяется формулой (3.27).

Аналогично исследуется

Задача B_2^***.** Найти решение уравнения (3.15) в области D_∞ из класса $C_{x,y}^{3,2}(D_\infty)\cap C_{x,y}^{2,1}(D_\infty\cup\Gamma_3)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$u_y(x,0)=\varphi_3(x),\ u_y(x,l)=\varphi_4(x),\quad x\in(-\infty,+\infty),$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}u(x,y)=\lim_{x\to+\infty}u_x(x,y)=0,\ x\in(-\infty,+\infty),\ y\in[0,l],$$

где $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$ – заданные функции.

§ 3.3. Первая и вторая краевые задачи в конечной области

В этом параграфе построены функции Грина в прямоугольной области, через которые выписанны явные решения поставленных задач.

В области $D=\{(x,y):0<x<p,\ \ 0<y<l\}$ рассмотрим уравнение

$$L[u]\equiv\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=g(x,y). \tag{3.35}$$

Задача A_{31}. Найти решение уравнения (3.35) в области D из класса $C_{x,y}^{3,2}(D)\cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\quad u(x,1)=\varphi_2(x),\quad 0<x<p, \tag{3.36}$$

$$u(0,\text{y})=\psi_1(y),\ u(\text{p},\text{y})=\psi_2(y),\ u_x(\text{p},\text{y})=\psi_3(y),\ 0<y<l, \tag{3.37}$$

Где

$$\varphi_i(x)\in C[0,p],\ i=1,2;\quad \psi_j(y)\in C[0,l],\ j=\overline{1,3};\quad g(x,y)\in C_{x,y}^{0,2}(\overline{D}),$$

причем выполняются следующие условия согласования:

$$\begin{gathered}\varphi_1(0)=\psi_1(0),\ \varphi_1(p)=\psi_2(0),\ \varphi_1'(p)=\psi_3(0),\ \varphi_2(0)=\psi_1(l),\\ \varphi_2(p)=\psi_2(l),\ \varphi_2'(p)=\psi_3(l),\ g(x,0)=g(x,l).\end{gathered} \tag{3.38}$$

Задача A_{32}. Найти решение уравнения (3.35) в области D из класса $C_{x,y}^{3,2}(D)\cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$, удовлетворяющее краевым условиям (3.37) и

$$u_y(x,0)=\varphi_3(x),\ u_y(x,l)=\varphi_4(x),\ 0<x<p, \tag{3.39}$$

где

$$\varphi_i(x)\in C[0,p],\ i=\overline{3,4};\quad \psi_j(y)\in C[0,l],\quad j=\overline{1,3};\quad g(x,y)\in C_{x,y}^{0,2}(\overline{D}),$$

причем выполняются следующие условия согласования:

$$\begin{gathered}\varphi_3(0)=\psi_1'(0),\ \varphi_3(0)=\psi_2'(0),\ \varphi_3'(p)=\psi_3(0),\ \varphi_4(0)=\psi_1'(l),\\ \varphi_4(0)=\psi_2'(l),\ \varphi'_4(p)=\psi_3(l),\ g_y'(x,0)=g_y'(x,l).\end{gathered} \tag{3.40}$$

Теорема 3.8. Если задача A_{32} имеет решение, то оно единственно.

Доказательство теоремы 3.8 аналогично доказательству теоремы 3.1.

Переходим к доказательству существования решения задачи A_{32}.

В параграфе 3.2 доказано, что решение первой краевой задачи в прямоугольной области находится по формуле (3.22.), которая для области D принимает вид

$$\begin{aligned} 2u(x,y) = &\int_0^l \left(Gu_{\xi\xi} - G_\xi u_\xi + G_{\xi\xi}u\right)\Big|_{\xi=0}^{\xi=p} d\eta - \\ &-\int_0^p \left(Gu_\eta - G_\eta u\right)\Big|_{\eta=0}^{\eta=l} d\xi - \iint_D G(x,y;\xi,\eta)\,g(\xi,\eta)\,d\xi d\eta, \end{aligned} \tag{3.41}$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta) = U(x,y;\xi,\eta) - W(x,y;\xi,\eta).$$

Построим теперь функцию $G(x,y;\xi,\eta)$, которая при $(x,y) \neq (\xi,\eta)$ должна обладать следующими свойствами:

1) по переменным (x,y):

$$\begin{cases} L[G] = 0, \\ G(x,0;\xi,\eta) = G(x,\mathrm{l};\xi,\eta) = 0, \\ G(0,y;\xi,\eta) = G(\mathrm{p},y;\xi,\eta) = G_x(\mathrm{p},y;\xi,\eta) = 0, \end{cases} \tag{3.42}$$

2) по переменным (ξ,η):

$$\begin{cases} L^*[G] = 0, \\ G(x,\mathrm{y};\xi,0) = G(x,\mathrm{y};\xi,\mathrm{l}) = 0, \\ G(\mathrm{x},y;0,\eta) = G(\mathrm{x},y;\mathrm{p},\eta) = G_\xi(\mathrm{x},y;0,\eta) = 0, \end{cases} \tag{3.43}$$

С этой целью решим следующую вспомогательную задачу:

Задача A_{33}**.** Найти решение уравнения (3.35) в области D, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(x,0)=0,\quad u(x,l)=0,\ 0<x<p, \tag{3.44}$$

$$u(0,y)=u(p,y)=u'_x(p,y)=0,\quad 0<y<l. \tag{3.45}$$

Решение поставленной задачи будем искать в виде (см. [77; стр. 211])

$$u(\mathrm{x},y)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)\sin\frac{k\pi}{l}y. \tag{3.46}$$

Функцию $g(x,y)$ разложим по системе собственных функций $\left\{\sin\frac{k\pi}{l}y\right\}_{k=1}^{\infty}$

$$g(\mathrm{x},y)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k(x)\sin\frac{k\pi}{l}y, \tag{3.47}$$

где

$$g_k(\mathrm{x})=\frac{2}{l}\int_0^l g(x,y)\sin\frac{k\pi}{l}ydy.$$

Подставляя (3.46), (3.47) в (3.35), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(X'''_k(x)+\lambda_k^3X_k(x)-g_k(x)\right)\sin\frac{k\pi}{l}y=0.$$

Отсюда и из (3.44) относительно функции $X_k(x)$ получим следующую задачу:

$$\begin{cases} L[X_k]\equiv X'''_k(x)+\lambda_k^3X_k(x)=g_k(x), \\ X_k(0)=X_k(p)=X'_k(p)=0, \end{cases} \tag{3.48}$$

где $\lambda_k^3 = \left(k\pi/l\right)^2$.

Решение задачи (3.48) будем строить с помощью функции Грина [52] $G_k\left(x,\xi\right)$, которая обладает следующими свойствами:

1. $G_k\left(x,\xi\right)$ непрерывна и имеет непрерывную производную по x при $0 \le x \le p$.

2. Её вторая производная по x в точке $x = \xi$ имеет разрыв 1-го рода, причем скачок равен 1, т.е.

$$\left.\frac{\partial^2 G_k\left(x,\xi\right)}{\partial x^2}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{\partial^2 G_k\left(x,\xi\right)}{\partial x^2}\right|_{x=\xi-0} = 1.$$

3. В каждом из интервалов $0 \le x < \xi$ и $\xi < x \le p$ функция $G_k\left(x,\xi\right)$, рассматриваемая как функция от x, является решением уравнения

$$L\left[G_k\right] = G_{kxxx} + \lambda_k^3 G_k = 0.$$

4. $G_k\left(0,\xi\right) = G_k\left(\text{p},\xi\right) = G_{k\,x}\left(\text{p},\xi\right) = 0$.

Построим функцию Грина. Так как линейно независимые решения уравнения $X_k''' + \lambda_k^3 X_k = 0$ имеют вид

$$X_1\left(x\right) = e^{-\lambda_k x}, \quad X_2\left(x\right) = e^{\frac{1}{2}\lambda_k x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k x, \quad X_2\left(x\right) = e^{\frac{1}{2}\lambda_k x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k x,$$

то искомую функцию Грина ищем в виде

$$G_k\left(x,\xi\right) = \begin{cases} a_1 e^{-\lambda_k} + a_2 e^{\frac{\lambda_k}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k x + a_3 e^{\frac{\lambda_k}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k x, \ \ \text{при} \ \ 0 \le x \le \xi; \\ b_1 e^{-\lambda_k} + b_2 e^{\frac{\lambda_k}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k x + b_3 e^{\frac{\lambda_k}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k x, \ \ \text{при} \ \ \xi \le x \le p, \end{cases} \tag{3.49}$$

где a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 – пока неизвестные функции от ξ.

Исходя из свойств 1, 2 функции Грина и положив $c_k(\xi)=b_k(\xi)-a_k(\xi)$, $k=1,2,3$, получим систему линейных уравнений для нахождения функций $c_k(\xi)$

$$\begin{cases} c_1 e^{-\lambda_k\xi}+c_2 e^{\frac{\lambda_k}{2}\xi}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\xi+c_3 e^{\frac{\lambda_k}{2}\xi}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\xi=0, \\ -c_1 e^{-\lambda_k\xi}+c_2 e^{\frac{\lambda_k}{2}\xi}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\xi+\frac{\pi}{3}\right)+c_3 e^{\frac{\lambda_k}{2}\xi}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\xi+\frac{\pi}{3}\right)=0, \\ c_1 e^{-\lambda_k\xi}+c_2 e^{\frac{\lambda_k}{2}\xi}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\xi+\frac{2\pi}{3}\right)+c_3 e^{\frac{\lambda_k}{2}\xi}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\xi+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{\lambda_k^2}. \end{cases}$$

Определитель этой системы равен значению вронскиана $W(X_1,X_2,X_3)$ в точке $x=\xi$. Поэтому он отличен от нуля и равен $W(X_1,X_2,X_3)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Вычислив Δ_{c_i}, $i=1,2,3$, находим:

$$c_1(\xi)=\frac{e^{\lambda_k\xi}}{3\lambda_k^2},\qquad c_2(\xi)=\frac{2e^{-\frac{\lambda_k}{2}\xi}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)}{-3\lambda_k^2},$$

$$c_2(\xi)=\frac{2e^{-\frac{\lambda_k}{2}\xi}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)}{3\lambda_k^2}.$$

Далее, воспользуемся свойством 4 функции Грина. В нашем случае эти соотношения принимают вид

$$\begin{cases} b_1+b_2=\frac{1}{3\lambda_k}\left(e^{\lambda_k\xi}-2e^{-\frac{\lambda_k}{2}\xi}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)\right), \\ b_1 e^{-\lambda_k p}+b_2 e^{\frac{\lambda_k}{2}p}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k p+b_3 e^{\frac{\lambda_k}{2}p}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k p=0, \\ -b_1 e^{-\lambda_k p}+b_2 e^{\frac{\lambda_k}{2}p}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k p+\frac{\pi}{3}\right)+b_3 e^{\frac{\lambda_k}{2}p}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k p+\frac{\pi}{3}\right)=0. \end{cases}$$

В силу линейной независимости $X_1(0),\ X_2(l),\ X_3'(l)$, определитель этой системы по лемме 2.2, отличен от нуля и равен:

$$\Delta=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(e^{\lambda_k p}-2e^{-\frac{\lambda_k}{2}p}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k p+\frac{\pi}{6}\right)\right)\neq 0.$$

Вычислив $\Delta_{b_i},\ i=1,2,3$, находим:

$$b_1=\frac{e^{\lambda_k\xi}-2e^{-\frac{\lambda_k}{2}\xi}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)}{3\lambda_k^2\left(1-2e^{-\frac{3}{2}\lambda_k p}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k p+\frac{\pi}{6}\right)\right)},$$

$$b_2=-\frac{2e^{-\frac{3}{2}\lambda_k p}\left(e^{\lambda_k\xi}-2e^{-\frac{\lambda_k}{2}\xi}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k p+\frac{\pi}{6}\right)}{3\lambda_k^2\left(1-2e^{-\frac{3}{2}\lambda_k p}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k p+\frac{\pi}{6}\right)\right)},$$

$$b_3=\frac{2e^{-\frac{3}{2}\lambda_k p}\left(e^{\lambda_k\xi}-2e^{-\frac{\lambda_k}{2}\xi}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k p+\frac{\pi}{6}\right)}{3\lambda_k^2\left(1-2e^{-\frac{3}{2}\lambda_k p}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k p+\frac{\pi}{6}\right)\right)}.$$

Учитывая $a_k(\xi)=b_k(\xi)-c_k(\xi),\ \mathrm{k}=1,2,3$ находим $a_k,\ \mathrm{k}=1,2,3$:

$$a_1=\frac{2e^{-\lambda_k\left(\frac{3}{2}p-\xi\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k p+\frac{\pi}{6}\right)-2e^{-\frac{\lambda_k}{2}\xi}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)}{3\lambda_k^2\left(1-2e^{-\frac{3}{2}\lambda_k p}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k p+\frac{\pi}{6}\right)\right)},$$

$$a_2=-a_1=-\frac{2e^{-\lambda_k\left(\frac{3}{2}p-\xi\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k p+\frac{\pi}{6}\right)-2e^{-\frac{\lambda_k}{2}\xi}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)}{3\lambda_k^2\left(1-2e^{-\frac{3}{2}\lambda_k p}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k p+\frac{\pi}{6}\right)\right)},$$

$$a_3=\frac{2e^{-\lambda_k\left(\frac{3}{2}p-\xi\right)}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k p+\frac{\pi}{6}\right)-2e^{-\frac{\lambda_k}{2}\xi}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)}{3\lambda_k^2\left(1-2e^{-\frac{3}{2}\lambda_k p}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k p+\frac{\pi}{6}\right)\right)}+$$

$$+\frac{4e^{-\frac{\lambda_k}{2}(3p+\xi)}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\left(p-\xi\right)}{3\lambda_k^2\left(1-2e^{-\frac{3}{2}\lambda_k p}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k p+\frac{\pi}{6}\right)\right)}.$$

Подставляя найденные значения a_i и b_i $i=\overline{1,3}$ в (3.49), получим функцию $G_k\left(x,\xi\right)$ в виде:

$$G_k(x,\xi)=\frac{1}{\Delta}\left\{2e^{-\lambda_k\left(\frac{3}{2}p+x-\xi\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k p+\frac{\pi}{6}\right)-2e^{-\frac{\lambda_k}{2}(2x+\xi)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)\right.$$

$$-2e^{-\lambda_k\left(\frac{3}{2}p-\xi-\frac{x}{2}\right)}\sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\left(p-x\right)+\frac{\pi}{6}\right]+2e^{-\frac{\lambda_k}{2}(\xi-x)}\sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\left(\xi-x\right)+\frac{\pi}{6}\right]$$

$$\left.+4e^{-\frac{\lambda_k}{2}(3p+\xi-x)}\sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\left(p-\xi\right)\right]\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k x\right\},\ 0\le x\le\xi, \qquad (3.50)$$

$$G_k(x,\xi)=\frac{1}{\Delta}\left\{-2e^{-\frac{\lambda_k}{2}(2x+\xi)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)+e^{-\lambda_k(x-\xi)}-\right.$$

$$-2e^{-\lambda_k\left(\frac{3}{2}p-\xi-\frac{x}{2}\right)}\sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\left(p-x\right)+\frac{\pi}{6}\right]+$$

$$\left.+4e^{-\frac{\lambda_k}{2}(3p+\xi-x)}\sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\left(p-x\right)+\frac{\pi}{6}\right]\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\xi+\frac{\pi}{6}\right)\right\},\quad \xi\le x\le p,$$

где

$$\overline{\Delta} = 3\lambda_k^2\left(1 - 2e^{-\frac{3\lambda_k}{2}p}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k p + \frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Легко можно убедиться, что функции, определённые формулой (3.50), обладают всеми свойствами, сформулированными при определении функции Грина.

Итак, функция Грина построена. Тогда решение задачи (3.48) имеет вид

$$X_k(x) = \int_0^p G_k(x,\xi)\, g_k(\xi)\, d\xi\,. \tag{3.51}$$

Поставляя (3.51) в равенство (3.46), решение задачи A_{33} находим в виде

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^p G_k(x,\xi)\, g_k(\xi)\sin\frac{k\pi}{l} y d\xi = \\ &= \int_0^p \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x,\xi)\, g_k(\xi)\sin\frac{k\pi}{l} y d\xi. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Если ряды в (3.52) и их производные третьего порядка по x и второго порядка по y сходятся равномерно в области D, то функция $u(x,y)$, определяемая равенством (3.52), даёт решение задачи A_{33}.

Найдём оценки функции (3.52):

$$\begin{aligned} \left|u(x,y)\right| &\le \left|\int_0^p \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x,\xi)\, g_k(\xi)\sin\frac{k\pi}{l} y d\xi\right| \le \\ \le \int_0^p \sum_{k=1}^{\infty}\left|G_k(x,\xi)\right|\left|\sin\frac{k\pi}{l} y\right|\left|g_k(\xi)\right| d\xi &\le \int_0^p \sum_{k=1}^{\infty}\left|G_k(x,\xi)\right|\left|g_k(\xi)\right| d\xi. \end{aligned} \tag{3.53}$$

При сделанных предположениях относительно $g(x,y)$ имеет место неравенство [34]

$$\left|g(x,y)\right| \le \frac{M_1}{k^2},$$

так как $g_k(\xi)$ являются коэффициентами Фурье в разложении функции $g(x,y)$ на отрезке $(0,l)$.

Учитывая это, неравенство (3.53) можно записать в виде

$$\left|u(x,y)\right| \le \int\limits_0^p \sum_{k=1}^{\infty} \left|G_k(x,\xi)\right| \left|g_k(\xi)\right| d\xi \le M_1 \int\limits_0^p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left|G_k(x,\xi)\right| d\xi . \quad (3.54)$$

Из (3.50), вычисляя оценки функции $G_k(x,\xi)$, находим:

$$\left|G_k(x,\xi)\right| \le \begin{cases} \dfrac{10}{3}\dfrac{e^{-\frac{3}{2}\lambda_k p}}{\lambda_k^2} + \dfrac{2}{3}\dfrac{e^{-\frac{1}{2}\lambda_k \delta_1}}{\lambda_k^2}, & 0 \le x \le \xi, \quad 0 < \delta_1 < \xi - x, \\ \dfrac{8}{3}\dfrac{e^{-\frac{3}{2}\lambda_k p}}{\lambda_k^2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{e^{-\frac{1}{2}\lambda_k \delta_2}}{\lambda_k^2}, & \xi \le x \le l, \quad 0 < \delta_2 < x - \xi, \end{cases}$$

или

$$\left|G_k(x,\xi)\right| \le \frac{10}{3}\frac{e^{-\frac{3}{2}\lambda_k p}}{\lambda_k^2} + \frac{2}{3}\frac{e^{-\frac{1}{2}\lambda_k \delta}}{\lambda_k^2} = M_2 k^{-\frac{4}{3}} . \quad (3.54)$$

Тогда из (3.53) получим,

$$\left|u(x,y)\right| \le M_3 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{10}{3}} .$$

Отсюда следует, что ряд (3.52) сходится равномерно.

Теперь, покажем также, что ряд соответствующего u_{xxx} сходится равномерно.

$$\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3} = \int_0^p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^3}{\partial x^3} G_k(x,y) g_k(\xi) d\xi = \int_0^p \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 G_k(x,y) g_k(\xi) d\xi, \tag{3.55}$$

$$\left|\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3}\right| \le \int_0^p \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\partial^3 G_k(x,y)}{\partial x^3}\right| |g_k(\xi)| d\xi \le M_4 \int_0^p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left|\lambda_k^3 G_k(x,y)\right| d\xi. \tag{3.56}$$

Так как

$$\left|\lambda_k^3 G_k(x,\xi)\right| \le \frac{10}{3} \lambda_k e^{-\frac{3}{2}\lambda_k p} + \frac{2}{3} \lambda_k e^{-\frac{1}{2}\lambda_k \delta} \le M_5 k^{\frac{2}{3}},$$

то из (3.56) имеем

$$\left|\frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3}\right| \le M_6 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{4}{3}}, \qquad M_i = const > 0, \quad i = \overline{1,6}.$$

Следовательно, ряд (3.55) сходится равномерно.
Так как

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u(x,y)}{\partial x^3}$$

то ряд, соответствующий $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, также сходится равномерно.

Отсюда вытекает возможность почленного дифференцирования ряда (3.52), необходимого для удовлетворения уравнения (3.35). Изменение порядка суммирования и интегрирования законно, в силу того, что ряд под интегралом (3.52) равномерно сходится по ξ.

В решении (3.52), заменяя $g_k(\xi)$ их значениями, получим окончательный вид решения вспомогательной задачи A_{33}:

$$u(x,y)=\int_0^p \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x,\xi)\sin\frac{k\pi y}{l} g_k(\xi)d\xi =$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^p \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x,\xi)\int_0^l g(\xi,\eta)\sin\frac{k\pi\eta}{l}\sin\frac{k\pi y}{l}d\eta d\xi =$$

$$=\int_0^p\int_0^l g(\xi,\eta)\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty} G_k(x,\xi)\sin\frac{k\pi\eta}{l}\sin\frac{k\pi y}{l}d\eta d\xi =$$

$$=\int_0^p\int_0^l G(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty} G_k(x,\xi)\sin\frac{\pi k\eta}{l}\sin\frac{\pi ky}{l}. \tag{3.57}$$

Легко можно убедиться, что для функции $G(x,y;\xi,\eta)$ выполняются все условия задачи (3.42) и (3.43). Функция (3.57) является функцией Грина первой краевой задачи в области D. Сходимость ряда (3.57) следует из оценки (3.54) для функций $G_k(x,\xi)$, кроме точки $x=\xi$.

Учитывая выполнение для функции $G(x,y,\xi,\eta)$ краевых условий (3.42), (3.43) и для функции $u(x,y)$ краевых условий (3.36), (3.37), из (3.41) получим решение задачи A_{31} в явном виде:

$$\begin{aligned}2u(x,y)=&\int_0^l G_{\xi\xi}(x,y;\mathrm{p},\eta)\psi_2(\eta)d\eta-\int_0^l G_{\xi\xi}(x,y;0,\eta)\psi_1(\eta)d\eta-\\&-\int_0^l G_{\xi}(x,y;\mathrm{p},\eta)\psi_3(\eta)d\eta+\int_0^p G_{\eta}(x,y;\xi,1)\varphi_2(\xi)d\xi-\\&-\int_0^l G_{\eta}(x,y;\xi,0)\varphi_1(\xi)d\xi-\iint_D G(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\eta.\end{aligned} \tag{3.58}$$

Итак, мы получили решение задачи A_{31} в явном виде, в отличие от других задач, в которых решение задачи A_{31} сводилось к интегральным уравнениям.
Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3.9. Пусть $\varphi_i(x) \in C[0,p]$, $i=1,2$, $\psi_j(y) \in C[0,l]$, $j=\overline{1,3}$, $g(x,y) \in C_{x,y}^{0,2}(\overline{D})$ и выполняются условия согласования (3.38). Тогда решение задачи A_{31} имеет вид (3.58), где функция Грина $G(x,y,\xi,\eta)$ определяется формулой (3.57).

Перейдем к исследованию задачи A_{32}.

Теорема 3.10. Если задача A_{32} имеет решение, то оно единственно.

Доказательство теоремы 3.10 аналогично доказательству теоремы 3.9.

Поступая как в задаче A_{31}, получим решение задачи A_{32} в явном виде:

$$2u(x,y) = \int_0^l G_{1\xi\xi}(x,y;p,\eta)\psi_2(\eta)d\eta - \int_0^l G_{1\xi\xi}(x,y;0,\eta)\psi_1(\eta)d\eta -$$
$$-\int_0^l G_{1\xi}(x,y;p,\eta)\psi_3(\eta)d\eta + \int_0^p G_1(x,y;\xi,0)\varphi_1(\xi)d\xi -$$
$$-\int_0^l G_1(x,y;\xi,l)\varphi_2(\xi)d\xi - \iint_D G_1(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Здесь $G_1(x,y,\xi,\eta)$- функция Грина задачи A_{32} и она имеет вид

$$G_1(x,y,\xi,\eta) = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty} G_k(x,\xi)\cos\frac{\pi k}{l}\eta\cos\frac{\pi k}{l}y,$$

причем функция $G_k(x,\xi)$ определяется формулой (3.50).

§ 3.4. Первая краевая задача для вязко - трансзвукового уравнения

В области $D=\{(x,y):0<x<p,\ 0<y<l\}$ рассмотрим вязко-трансзвуковое уравнение [18]

$$L[u]\equiv\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=g_1(x,y). \tag{3.59}$$

Для уравнения (3.59) рассмотрим следующую задачу:

Задача A_{33}**.** Найти регулярное решение уравнения (3.59) в области D, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\quad u(x,0)=\varphi_1(x),\quad 0<x<p, \tag{3.60}$$

$$u(0,y)=\psi_1(y),\ u(\mathrm{p},y)=\psi_2(y),\ u_x(0,y)=\psi_3(y),\ 0<y<l, \tag{3.61}$$

где

$$\varphi_i(x)\in C[0,p],\ i=1,2,\quad \psi_j(y)\in C[0,l],\ j=1,2,3,\quad g_1(x,y)\in C^{0,2}_{x,y}\left(\overline{D}\right)$$

.

Кроме того, выполняются следующие условия согласования:

$$\begin{gathered}\varphi_1(0)=\psi_1(0),\ \varphi_1(p)=\psi_2(0),\ \varphi_1'(p)=\psi_3(0),\ \varphi_2(0)=\psi_1(l),\\ \varphi_2(p)=\psi_2(l),\ \varphi_2'(p)=\psi_3(l),\ g_1(x,0)=g_1(x,l).\end{gathered} \tag{3.62}$$

Теорема 3.11. Если задача A_{33} имеет решение, то оно единственно.

Доказательство теоремы 3.11, **а**налогично доказательству теоремы 2.1.1.

Поступая так, как в параграфе 4.2, построим решение задачи A_{33} в области D, оно имеет вид

$$
\begin{aligned}
2u(x,y) = &\int_0^l \widetilde{G}_{\xi\xi}(x,y;0,\eta)\psi_1(\eta)d\eta - \int_0^l \widetilde{G}_{\xi\xi}(x,y;\mathrm{p},\eta)\psi_2(\eta)d\eta - \\
&-\int_0^l \widetilde{G}_{\xi}(x,y;0,\eta)\psi_3(\eta)d\eta + \int_0^p \widetilde{G}_{\eta}(x,y;\xi,1)\varphi_2(\xi)d\xi - \\
&-\int_0^p \widetilde{G}_{\eta}(x,y;\xi,0)\varphi_1(\xi)d\xi + \iint_D \widetilde{G}(x,y;\xi,\eta)g_1(\xi,\eta)d\xi d\eta.
\end{aligned} \tag{3.63}
$$

Здесь

$$
\widetilde{G}_{\eta}(x,y;\xi,\eta) = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{G}_k(x,\xi)\sin\frac{\pi k}{l}\eta\sin\frac{\pi k}{l}y, \tag{3.64}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{G}_k(x,\xi) = \frac{1}{\overline{\Delta}}\Bigg\{&2e^{-\frac{\lambda_k}{2}(x+2\xi)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k x+\frac{\pi}{6}\right) - e^{-\lambda_k(\xi-x)} - \\
&+2e^{-\frac{\lambda_k}{2}(3p-2x-\xi)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k(p-\xi)+\frac{\pi}{6}\right) - \\
&-4e^{-\frac{\lambda_k}{2}(3p+\xi-x)}\sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k(p-\xi)+\frac{\pi}{6}\right]\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k x+\frac{\pi}{6}\right)\Bigg\},\ 0\le x\le\xi,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{G}_k(x,\xi) = \frac{1}{\overline{\Delta}}\Bigg\{&-2e^{-\frac{\lambda_k}{2}(3p-2x+2\xi)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k p+\frac{\pi}{6}\right) + 2e^{-\frac{\lambda_k}{2}(x+2\xi)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k x+\frac{\pi}{6}\right) \\
&+2e^{-\frac{\lambda_k}{2}(3p-2x-\xi)}\sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k(p-\xi)+\frac{\pi}{6}\right] - 2e^{-\frac{\lambda_k}{2}(x-\xi)}\sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k(x-\xi)+\frac{\pi}{6}\right] - \\
&-4e^{-\frac{\lambda_k}{2}(3p++x-\xi)}\sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k(p-x)+\frac{\pi}{6}\right]\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k\xi\right)\Bigg\},\quad \xi\le x\le p,
\end{aligned}
$$

где

$$
\overline{\Delta} = 3\lambda_k^2\left[1-2e^{-\frac{3}{2}\lambda_k p}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_k p+\frac{\pi}{6}\right)\right].
$$

Теорема 3.12. Пусть $\varphi_i(x) \in C[0, p]$, $i = 1,2$, $\psi_j(y) \in C[0, l]$, $j = 1,2,3$, $g_1(x, y) \in C_{x,y}^{0,2}(\overline{D})$, а также выполняются условия согласования (3.62), тогда решение задачи A_{33} имеет вид (2.63), где функция Грина $\widetilde{G}_\eta(x, y; \xi, \eta)$ определяется формулой (4.64).

Доказательство теоремы 3.12 аналогично доказательству теоремы 3.9.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдиназаров С. Краевые задачи для уравнений с кратными характеристиками. Дисс. … докт. физ.- мат. наук. - Ташкент: Ин-т математики, 1992. - 239 с.

2. Абдиназаров С. Об одном уравнении третьего порядка // Известия АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. - Ташкент, 1986.- № 3. - С.21-27.

3. Абдиназаров С., Артиков М. Об одной задаче для смешанного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики: Труды межд. науч. конф. 16-19 ноября 2004. В 2-х т. Т. I. - Ташкент, 2004. - С.14-17.

4. Абдиназаров С., Курбанов О.Т. Об одной задаче для уравнения смешанного третьего порядка с кратными характеристиками // Узбекский математический журнал. - Ташкент, 1999. - № 3.-С.3-11.

5. Абдиназаров С., Собиров З.А. Об одной задаче для смешанного уравнения высокого нечетного порядка с кратными характеристиками // Узбекский математический журнал. - Ташкент, 2003. - № 2.- С.3-8.

6. Абдрахманов А.М. О разрешимости краевой задачи с интегральным граничным условием второго рода для уравнений нечетного порядка // Математические заметки. - Москва, 2010.- Т.88. Вып. 2.- С.163–172.

7. Антипин В.И., Попов С.В. Краевые задачы для уравнения третьего порядка с меняющимся направление времени // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Матем. модел. и програм. - Челябинск, 2012. - Вып. 14.- № 40 (299), - С. 19-28.

8. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. -М.: «Наука», 1974. - 432 с.

9. Балкизов Ж.А. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в неогранниченной области // Математическое моделирование и краевые задачи. Самара, СамГУ, 2008, часть - 3.- С.23-28.

10. Балкизов Ж.А., Кадзаков А.Х. О представлении решения краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Известия Кабардино - Балкарского научного центра РАН. - Нальчик, 2010 . - № 4. - С. 64-69.

11. Балкизов Ж.А. Краевая задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. - Нальчик, 2015,- Т.17.- № 3,- С.13-21.

12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: В 2-х т. -М.: Наука, 1973.- Т. 1.- 296 с.

13. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. -М.: Иностр. лит., 1954. - 215 с.

14. Брушлинский К.В., Каждан Я.М. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики // Успехи матем. наук, -Москва. 1963. - Т.18. Вып. 2(110). - С. 3-23.

15. Галактионов В.А. Нелинейные уравнения дисперсии: гладкие деформации, компактные и обобщенные случаи высокого порядка // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Москва, 2008. - Т. 48, - № 10. - С. 1859-1863.

16. Градштейн Н.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумма рядов и произведений. -М.: Изд. физмат. лит., 1963. - 1100 с.

17. Дезин А.А. Теоремы существования и единственности решений граничных задач для уравнений с частными

производными в функциональных пространствах // Успехи матем. наук. - Москва, 1959. - Т.14. - № 3(87). - С. 21-73.

18. Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. О граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности // Сиб. мат. журн. 2006. -Т.47. -№ 3. –С.527-547.

19. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного типа и смешанно-составного типов. –Т.: «ФАН», 1979, -240 с.

20. Джураев Т.Д., Абдиназаров С. К теории уравнений нечетного порядка с кратными характеристиками // Узбекский математический журнал. - Ташкент, 1991.- № 1,- С.21-31.

21. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо - гиперболического типа. – Т.: «ФАН», 1986. - 220 с.

22. Джураев Т.Д., Иргашев Ю. Задача Жевре для смешанных уравнений третьего порядка с кратными характеристиками // Известия АН УзССР. Серия физ.-мат. наук. -Ташкент, 1977. -№ 5. –С.16-21.

23. Диесперов В.Н. О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Москва, 1972. - Т. 12. - № 5. - С. 1265-1279.

24. Диесперов В.Н., Ломакин Л.А. Об одной краевой задаче для линеаризованного осесимметрического ВТ-уравнения // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Москва, 1974. - Т. 14. - № 5. - С. 1244-1260.

25. Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математичес-кой физики высокого порядка. - Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995. - 133 с.

26. Егоров И.Е., Львов А.П. Разрешимость нелокальной краевой задачи для неклассических уравнений с меняющимся направлением // Международный семинар. Неклассические

уравнения математи-ческой физики посвященный 60-летию со дня рождения профессора В.Н.Врагова. 3 - 5 октября 2005. Новосибирск, - С. 109-119.

27. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2-х.-Т.2. - М.: Наука, 1973. - 447 с.

28. Засорин Ю.В. Точное решения сингулярных уравнений вязких трансзвуковых течений // Доклады АН СССР. - Москва, 1984. - Т. 287. - № 6. - С. 1347-1351.

29. Калменов Т.Ш. Научные труды, воспоминания и размышления в начале века. - Алматы: ТОО, «Принт Экспрес», 2006. -212 с.

30. Керефов А.А. Задача Жевре для одного смешанно-параболического уравнения // Дифференциальные уравнения. - Минск, 1977. - Т.13. - № 1. - С. 76-83.

31. Кожанов А.И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. Учеб. пособие.- Новосибирск, НГУ, 1990. - 132 с.

32. Кожанов А. И. Задача сопряжения для о дного класса уравнений составного типа переменного направления // Неклассические уравнения математической физики. - Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2002. - С. 96–109.

33. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. - М.: Наука, 2-е изд. 1976. - 216 с.

34. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3-х т. - Т. 3. - 2-е изд. - М.: Высш. шк., 1989. - 352 с.

35. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. - М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. литер., 1988.- 432 с.

36. Лукина Г.А. О разрешимости пространственно нелокальных краевых задач для уравнения третьего порядка //

Математические заметки ЯГУ. - Якутск, 2010. - Т. 17. Вып.1. - С. 35-46.

37. Лукина Г.А. Краевые задачи с интегральными граничными условиями по времени для уравнений третьего порядка // Математические заметки ЯГУ.- Якутск, 2010. - Т.17. Вып.2.- С.75-97.

38. Лукина Г.А. Краевые задачи с интегральными граничными условиями для линеаризованного уравнения Кортевега - де Фриза // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Матем. модел. и програм. - Челябинск, 2011. - № 17 (234), - С. 52-61.

39. Лукина Г. А. Краевые задачи с интегральными граничными условиями для ультрапараболических уравнений // Математические заметки ЯГУ. -Якутск, 2011. - Т.18, Вып. 2. - С. 113-127.

40. Папов Н.С. О разрешимости краевых задач для многомерных псевдогиперболических уравнений с нело-кальными граничными условием интегрального вида // Математическое заметки СВФУ. -Якутск. 2014. - С. 69 - 80.

41. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интег-ралы и ряды. Специальные функции. -М.: «Наука», 1983.-752 с.

42. Рыжов О.С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения со звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа // Прикл. Матем. и механ., - Москва, 1965. - Т. 29. Вып. 6. - С. 1004-1014.

43. Рыжов О.С., Шефтер Г.М. О влиянии вязкости и теплопроводности на структуру сжимаемых течений // Прикл. Матем. и механ., - Москва, 1964. - Т. 28. Вып. 6. - С. 996-1007.

44. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром // - Т. «ФАН», 1997. – 168 с.

45. Справочник по специальным функциям. -М.: «Наука», 1979. -830 с.

46. Титчмарш Э.Ч. Разложение по собственным функциям, связанным с дифференциальными уравнениями второго порядка. В 2-х т. - Т. 1. -М.: Иностр. лит. , 1960. - 276 с.

47. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: «Наука», 1966. - 724 с.

48. Федоров Ф.М. К теории гауссовых бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. // Математические заметки ЯГУ. -Якутск, 2011. - Т.18, Вып. 2. - С. 209-217.

49. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Вычисление регуляризован-ного следа оператора Штурма-Лиувилля с особенностью в потенциале // ДАН. –Москва, 2015. -Т.382. - № 2. - С.170 –172.

50. Хашимов А.Р. Об одной задаче для уравнения смешанного типа с кратными характеристиками // Узбекский математический журнал. - Ташкент, 1995. - №2. - С. 93-97.

51. Шубин В.В. Весовые оценки решения некоторых задач для уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентом // Математические заметки ЯГУ,2011.–Т.18,Вып. 2. -С. 218–228.

52. Шубин В.В. Краевые задачи для уравнений третьего порядка с разрывным коэффициентом // Вестник НГУ. Сер. Матем., мех., информ., - Новосибирск, 2012. -Т. 12. -№ 1. - С. 126-138.

53. Юлдашев Т.К. Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2014. - №1(34). - С. 56–65 .

54. Ashyraliev A., Aggez N., Hezenci F. Boundary value problem for a third order partal differential equation // First international conference on analysis and applied mathematics.

ICAAM 2012. Gumushane, Turkey. 18-21 October. 2012. - pp.130-133.

55. Block H. Sur les equations lineaires aux derives parielles a carateristiques multiples // Ark. Mat. Astron. Fus. Note 1, - 1912, 7(13), - pp. 1-34; Note 2, 1912, ibid. 7(21),- pp. 1-30; Note 3, 1912 - 1913, ibid. 8(23). - pp. 1-51.

56. Cattabriga L. Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple // Rendiconti del seminario matimatico della univ.di Padava.-1961, 31.- pp. 1-45.

57. Cattabriga L., Rodino L., Zanghirati L. Analytic-Gevrey hupoellipticity for a class of pseudo-differential operators with multiple characteristics // Communes Partial Differential Equations, 1990, - Vol. 15, - pp. 81-96.

58. Del Vicchio E. Sulle equazioni $z_{xxx} - z_y + \varphi_1(x, y) = 0$, $z_{xxx} - z_{yy} + \varphi_2(x, y) = 0$ // Memorie R. Accad. Sci. Ser.2. - Torino, 1915, 66. - pp. 1-41.

59. Del Vicchio E. Sur deux problemes d'integration pour les equazios paraboliques $z_{\xi\xi\xi} - z_\eta = 0$, $z_{\xi\xi\xi} - z_{\eta\eta} = 0$ // Ark. For Mat. Astr. and Fys. 1916. - Vol.11. - pp. 32-43.

60. Mascarello M., Rodino L. Partial differential equations with multiple characteristics. Berlin: Wiley, 1997.

61. Mascarello M., Rodino L., Tri M. Partial differential operators with multiple symplectic characteristics // Partial differential equations and spectral theory.Basel:Birkhauser,2001.-pp. 293–297.

62. Rodino L., Oliaro A. Solvability for semilinear PDE with multiple characteristics // Warsaw: Banach Center Publ., 2003, - Vol. 60. - pp. 295-303.

63. Sichel M. Leading edge pf a shock-induced boundary layer // Phys. Fluids, 1962, -Vol. 5, - № 10. - pp. 1168-1180.

64. Sichel M. Structure on weak non-Hugoniot shocks // Phys. Fluids, 1963. - Vol. 6,- № 5. - pp. 653-662.

65. Sternberg J. Triple-shock wave intersections // Phys. Fluids, 1956, -Vol. 2, - № 2. - pp. 179-206.

66. Usman Muhammad, Zhang Bingyu. Forced oscillations of a class of nonlinear dispersive wave equations and their stability // J.Syst. sei and complex. 2007. - Vol. 20. № 2.- pp. 284-292.

67. Victor A. Galaktionov. The formation of shocks and fundamental solution of a fourth-order quasilinear Baussinesq-type equation // Iop Publishing. Nonlinearity, 2009. - Vol. 22. - pp. 239-257.

68. Иргашев Ю. Апаков Ю.П. Первая краевая задача для уравнения третьего порядка псевдоэллиптического типа // Узбекский математический журнал. - Ташкент, 2006. - № 2, - С.44-51.

69. Апаков Ю.П. К решению краевых задач для уравнения $U_{xxx} - U_{yy} = 0$ в неограниченных областях // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. -Ташкент,2006. - № 3. - С. 17-20.

70. Апаков Ю.П. Метод подобия для построения основных решений уравнения третьего порядка с кратными характеристиками// «Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических технологий»: Тезисы докладов Межд. науч. конф. 20-22 сентября 2006.- Алматы, 2006.- С. 26-27.

71. Джураев Т.Д. Апаков Ю.П. Построение фундаментальных решений уравнения $U_{xxx} - U_{yy} = 0$ методом подобия // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: Материалы III межд. конф. 5-8 декабря 2006. - Нальчик: НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 2006. - С. 107-109.

72. Апаков Ю.П. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: Материалы III межд. конф. 5-8 декабря 2006. - Нальчик: НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 2006. - С. 37-39.

73. Апаков Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками методом разделения переменных // Узбекский математический журнал. - Ташкент, 2007. - № 1.- С.14-23.

74. Apakov Yu.P. About solvability of the boundary value problems for third-order equations with multiple characteristics in infinite domains // Mathematical Modeling and Analysis: Abstracts of the 12 the International Conference. May 30-June 2, 2007.- Trakai, Litvania, 2007.- p. 6.

75. Апаков Ю.П. О решении одной краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка // Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения: Тез. докл. межд. конф. 28 мая - 2 июня 2007.-Новосибирск, 2007. - С. 65-66.

76. Apakov Yu.P. On solvng method of boundary value problem's for the equations $U_{xxx} - U_{yy} = 0$ // II Turkish World mathematics symposium: Abctrats of the symposium.4-7 july 2007.- Universities Sakarya. -pp.68-69.

77. Джураев Т.Д., Апаков Ю.П. Метод подобия для построения фундаментальных решений уравнения $U_{xxx} - U_{yy} = 0$ // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. - Нальчик, 2007. - Т.9. - № 1, - С. 38-44.

78. Джураев Т.Д, Апаков Ю.П. Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными

характеристиками // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2007. - № 2(15). - С.18-26.

79. Джураев Т.Д., Апаков Ю.П. Об одном методе построения фундаментальных решений уравнения $U_{xxx} - U_{yy} = 0$ // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. -Ташкент, 2007.- № 4.- С. 3-6.

80. Апаков Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками методом Фурье в областях с некомпактными границами // Узбекский математический журнал. - Ташкент, 2008. - № 1.- С. 14-22.

81. Апаков Ю.П. Об одном свойстве фундаментальных решений уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики: Материалы межд. Российско - Азербайджанского симпозиума. 12-17 мая 2008. - Нальчик, Эльбрус: 2008. НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН. - С. 31-34.

82. Апаков Ю.П. Об однозначной разрешимости одной задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками //Дифференциальные уравнения, функциональные пространства и теория приближений: Тезисы докл. межд. конф. 5-12 октября 2008. - Новосибирск, 2008. -С. 98.

83. Апаков Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в неограниченных областях // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. - Нальчик, 2008. - № 2 (22). - С. 147-151.

84. Апаков Ю.П. Спектральные задачи для одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. // Вестник Кабардино - Балкарского государственного университета, сер. Математические науки, Выпуск 5, - Нальчик, 2008. -С. 6-12.

85. Апаков Ю.П. Задача типа Жевре задачи для одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Известия Ошского технологического университета. г. Ош. 2008. №1. 194-199.

86. Апаков Ю.П., Иргашев Б.Ю. Краевая задача в бесконечной области для уравнения третьего порядка, имеющего вырождение первого рода // Электронный журнал. «Дифференциальные уравнения и процессы управления». - Санкт-Петербург, 2008. -№4. С.41-50. http://www.neva.ru/jornal, http://www.math.spbu.ru/diffjournal/J/apakov /

87. Apakov Yu.P. On a method of solving the problem for a third order equation with multiple characteristics // Mathematica Macedonica. -Vol. 6, - Skopje, 2008. - pp. 21-28.

88. Апаков Ю.П. Об одном методе решения краевой задачи для квазиэллиптического уравнения // Современные проблемы вычислительной математики и математической физики. Памяти академика А.А. Самарского к 90-летию со дня рождения: Тезисы докл. межд. конф. 16-18 июня 2009. - Москва, 2009. - С. 129-130.

89. Dzhuraev T.D., Apakov Yu.P. On a boundary value problem for the viscous transonic equation // Abstracts of third congress of the World mathematical society of Turkic countries: Vol. 1. June 30-july 4, 2009. - Almaty, 2009. - p. 195.

90. Dzhuraev T.D., Apakov Yu.P. On a boundary value problem for the viscous transonic equation // World Mathematical Society of Turkic Countries. Reports of the Third Congress. Vol.1. June 30 - July 4, 2009. Al-Farabi Kazakh National University. - Almaty, 2009. - pp. 282 - 287.

91. Джураев Т.Д., Апаков Ю.П. О решении одной краевой задачи для квазиэллиптического уравнения // Украинский математи-ческий конгресс-2009. Институт математики АН

Украины. 27-29 августа 2009. - Киев, 2009. http://www.imath.riev.ua /~congress2009/

92. Apakov Yu.P., Rutkauskas S. On the Green Function for One Boundary Value Problem in the Infinite Domain // Differential equations and their applications (data'2009). Dedicated to Professor M. Sapagovas 70th Anniversary: Proceedings of the international conference. September 10-12, 2009. Kaunas University of Tehnology. - Paneveħys, Lithuania. - pp.106-116.

93. Апаков Ю.П. Краевая задача для вязкого трансзвукового уравнения в прямоугольной области // Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий - Аль- Хорезми - 2009: Труды межд. конф. 18-21 сентября 2009. - Ташкент, 2009.- С.53-57.

94. Джураев Т.Д., Апаков Ю.П. К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени. // Украинский математический журнал.-Киев, 2010, -Том 62. № 1.- С. 40-51. (Имеется перевод: Dzhuraev T.D. and Apakov Yu.P. On the theory of the third- order equation with multiple characteristics containing the second time derivative. // Ukrainian Mathematical Journal. Springer,-New York, 2010. -Vol. 62, № 1. -P. 43-55.)

95. Apakov Yusufjon P. Construction of Green's Function for One Problem of Rectangular Region // Malaysian Journal of Mathematical Sciences, - Kuala - Lumpur, 2010. - Vol. 4(1). - № 1. - pp. 1-16.

96. Apakov Yu.P. Three dimensional analpgy of Tricomi problem. // Mathematical Modeling and Analysis. Abstracts 15 the International Conferenceon. May 26-29, 2010, Druskininkai, Lithania, www.vgtu.lt/mma/mma2010

97. Apakov Yusupjon P. On a Method for Solving Boundary Problems for Third-order Equation with Multiple Characteristics //

Modern Aspects of the Theory of Partial Differential Equations. Operator Theory: Advances and Applications, Springer. -Basel, 2011. - Vol. 216, - pp. 65-78.

98. Апаков Ю.П. О решени одной краевой задачи для вязкого трансзвукового уравнения // Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики: Материалы второго межд. Российско - Казахского симпозиума. 23-27 мая 2011. - Нальчик, НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН. - С. 26-29.

99. Apakov Yu.P. Solution of a boundary value problem for the viscous transonic equation // IV Congress of the Turkic World Mathematical society. Book of Abstracts, 1-3 jule 2011. - Baku, Azerbaijan, - p. 166.

100. Apakov Yu.P. On a problem for a third order equation with multiple characteristics in the infinite domain // Romai Journal. - Buharest, 2011. -Vol. 7. - № 1. - pp. 1-12.

101. Apakov Yu.P., Rutkauskas S. On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics // Nonlinear Analysis: Modeling and Control.-Vilnius, 2011.-Vol. 16. -№ 3. - pp. 255-269.

102. Apakov Yu.P. The mixed boundary value problem for a third order equation with multiple characteristics // Sakarya Dergisi, Űniversitesi. Fen Edebiyat. – Sakarya. 2011. - № 1. - pp. 33-45.

103. Апаков Ю.П. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками Украинский математический журнал. –Киев, 2012. - Т. 64. № 1. - С. 1-11. (Имеется перевод:Apakov Yu.P. On the solution of a boundary-value problem for a third- order equation with multiple characteristics // Ukrainian Mathematical Journal. Springer, New York, June, 2012. - Vol. 64,- № 1. - pp. 1-11.)

ОГЛАВЛЕНИЕ

АПАКОВ Ю.П.

К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Ташкент – «Fan va texnologiya» – 2019

Редактор: Ш.Кушербаева
Тех. редактор: А.Мойдинов
Художник: Ф.Тишабаев
Корректор: Ш.Миркасимова
Компьютерная вёрстка: Н.Рахматуллаева

E-mail: tipografiyacnt@mail.ru Тел: 71-245-57-63, 71-245-61-61.
Изд.лиц. AI№149, 14.08.09. Разрешено в печать 04.06.2019.
Формат 60х84 $^1/_{16}$. Гарнитура «Times New Roman».
Офсетная печать. Усл. печ.л. 9,25. Изд. печ.л. 9,75.
Тираж 500. Заказ № 99.

Отпечатано в типографии
«Fan va texnologiyalar Markazining bosmaxonasi».
100066, г. Ташкент, ул. Алмазар, 171.