**O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI**
**OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI**

**GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI**

**Fizika – matematika fakulteti**

**“Matematika”** kafedrasi

5130100- “Matematika” ta’lim yo’nalishi bo’yicha bakalavr darajasini olish uchun

**Axbo’taev Ilyos Shodmonqulovichning**
**“Matematika fanining mantiqiy va aksiomatik qurilishi haqida”**
**mavzusida tayyorlagan**

# BITIRUV MALAKAVIY IShI

**Rahbar: __________ fiz-mat.f.n., dots. X.Norjigitov**

**BMI “Matematika” kafedrasining 2016 yil __________ №____ sonli yig’ilishida ko’rib chiqildi va himoyaga tavsiya etildi.**

**Kafedra mudiri__________ fiz-mat.f.n., dots. X.Norjigitov**

**Fizika matematika fakulteti dekani tomonidan himoya qilishga ruxsat etiladi.**

**Fakultet dekani__________ p.f.n. dots. Sh. Ashirov**

**Guliston – 2016**

# M U N D A R I J A

# KIRISH

**Bitiruv malakaviy ishning dolzarbligi.** Kelajakni qanday bo’lishi hozirgi yoshlarning dunyo-qarashiga, idrokiga va ilmiy bilimlarni qanday egallashiga bog’liq ekanligini chuqur his qilgan yurtboshimiz kadrlarni tayyorlash masalasiga asosiy e’tiborini qaratmoqda. «Kadrlar tayyorlash milliy dastur»ining hayotga joriy qilinayotganligi, «Ta’lim to’g’risida»gi qonunning qabul qilinganligi, mustaqillik mafkurasini shakllantirish, halqni bir jon bir tan bo’lib, faol ijodiy mehnatga chorlovchi g’oyalar har bir fanni asosli o’rganish– buning yorqin misollaridir.

Ta’lim muassasalarida matematika o’qitishning asosiy vazifasi o’quvchi yoshlarni vatanga sadoqat, yuksak ahloq, ma’naviy boylikka ega bo’lish va mehnatga vijdonan munosabatda bo’lish ruhida tarbiyalashga qaratilgan. Matematika fanini o’rganish ancha murakkab bo’lib, matematikaning boshlang’ich tushunchasi – sonni qanday usulda kiritish muhim hisoblanadi. Shu sababli mavzu dolzarb deb hisoblayman.

Bitiruv malakaviy ishi matematik tilni kiritish, matematik simvolikani o’rganish, to’plam va akslantirishlar tushunchasini o’rganishga bag’ishlanadi.

**Tadqiqot ob’ekti va predmeti:** Tadqiqotning ob’ekti oliy o’quv yurti matematika yo’nalishi talabalari bo’lib, uning predmeti asosan matematikada son tushunchasini kiritishdan iborat.

**Bitiruv malakaviy ishning asosiy maqsadi va vazifalari.** Bitiruv malakviy ishning asosiy maqsadi mazkur ishdan foydalanib, talabada matematikaga qiziqish o’yg’otishdir. Natijada talabada matematik bilim saviyasi oshadi va matematikaning barcha mavzularini chuqurroq o’rganishga kirishadi.

**Tadqiqot usuli va uslubiyoti:** Matematika mutaxassisligiga ega bo’lishi kerak bo’lgan talabalaga mustavil ravishda matematikani chuqurroq egallashga o’rgatish.

**Natijalarning ilmiy yangiligi va amaliy ahamiyati:** Matematika yo'nalishi talabalarida matematikani chuqurroq o'rganib, ularni ilmiy tatqiqot ishlariga yo'naltirish va talabalarda matematikaga qiziqishni yanada orttirishi bilan ahamiyatlidir.

**Ishning hajmi va tuzilishi:** Bitiruv malakaviy ish kirish, ikkita bob**,** to'rtta paragraf, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat.

## 1-BOB.
## BA’ZI UMUMMATEMATIK TUSHUNCHALAR VA BELGILAR.

### 1-§. Mantiqiy simvolika.

**1. Bog`lanishlar va qavslar.**

Mazkur bitiruv malakaviy ish tili aksariyat matematik matnlar kabi odatdagi tildan va bayon etiladigan nazariyaning qator maxsus simvollaridan tashkil topgan. Bu maxsus simvollar bilan bir qatorda ehtiyojga qarab mos ravishda inkorni “emas” hamda bog`lovchilarni <<va>>, <<yoki>> <<kelib chiqadi>>, <<teng kuchli>> belgilash ishlatiladigan matematik mantiqning ommalashtirilgan simvollari $\neg, \cap, \cup, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ lar kiritiladi. Masalan uchta mustaqil axamiyat kasb etgan mulohazalarni olaylik.

L. <<Agar belgilashlar kashfiyotlar uchun qulay bo’lsa u holda fikrlash ishlari hayratda qoldiradigan darajada qisqaradi>>. (I.Leybnis)

P. <<Matematika bu har xil narsalarni bir xil nomlar bilan atash san’atidir>>. (A.Puyankare).

G. <<Tabiatning buyuk kitoblari matematika tilida yozilgandir>>. (G.Galiley).

Unda ko’rsatilgan belgilarga muvofiq:

| Yozuv | Bildiradi |
|---|---|
| $L \Rightarrow P$ | L keltirib chiqaradi P ni |
| $L \Leftrightarrow P$ | L teng kuchli P ga |
| $((L \Rightarrow P)V(\neg P)) \Rightarrow (\neg L)$ | Agar L dan P kelib chiqsa va P yolg`on bo’lsa u holda L yolg`on |
| $\neg((L \Leftrightarrow G)V(P \Leftrightarrow G))$ | G L ga ham , P ga ham teng kuchli |

| | |
|---|---|
| | emas. |

Biz ko'ramizki bunda so'zlashuv tilidan qochib faqat formal belgilashlardan foydalanish hamma vaqt oqilona emas. Bundan tashqari soddaroq molohazalardan tashkil topgan murakkab mulohazalarning yozuvlaridan qavslar shunday sintaksis funksiyani bajaradiki ular algebraic ifodalar yozuvlardan qavslar qanday sintaksis funksiyani bajargan bo'lsa . Algebradagi kabi , qavslarni tejash uchun amallar ta'siri haqida kelishib olamiz. Bu maqsad bilan simvollarning quyidagi prioritet (birinchilik) tartibi kelishib olinadi:

$$\neg, \cap, \cup, \Rightarrow, \Leftrightarrow$$

Mana shunday kelishuvda $\neg A \cap B \cap C \Rightarrow D$ ifodani $(((\neg A) \cap B) \cup C) \Rightarrow D$ deb $A \cup B \Rightarrow C$ munosabat esa $(A \cup B) \Rightarrow C$ deb rasshifrofka qilinadi, ammo $A \cup (B \Rightarrow C)$ deb tushunilmaydi.

A keltirib chiqaradi B ni yoki xuddi shunday A dan B kelib chiqishini anglatuvchi $A \Rightarrow B$ yozuvga bunda B-A ning zaruriy alomati yoki zaruriy sharti va o'z navbatida A-B ning yetrli sharti yoki yetarli alomati deb ko'pincha so'z orqali ifodalangan boshqa interpretasiyani beramiz.

Shunday qilib, $A \Leftrightarrow B$ munosabatni quyidagi usullarning ixtiyoriysi bilan o'qish mumkin.

A zaruriy va yetarli B uchun

B shunda va faqat shunda qachonki B;

A teng B ga

$A \cap$ B (A&B) ifodani va bog`lovchisini ishlatilishi izohga hojat yo'q. Biroq $A \cup B$ ifodaga esa yoki bog`lovchisi ajralmas bo'ladi ya'ni $A \cup B$ mulohaza agarda A,B mulohazalardan aqali bittasi rost bo'lganda rost bo'lishini e'tiborga olish kerak. Masalan x-shunday haqiqiy sonki bunda $x^2-3x+2=0$ bo'lsin. Unda quyidagi munosabatning o'rinli ekanligini yozish mumkin:

$(x^2-3x+2=0) \Leftrightarrow (x=1) \cup (x=2)$

Tupik matematik tasdiqlar $A \Rightarrow B$ ko'rinishga ega, bu yerda A-asos (posilka), B-xulosa.

**2. Isbotlashlar haqida eslatmalar**.

Tupik matematik tasdiqlar $A \Rightarrow B$ ko'rinishga ega, bu yerda A-asos (posilka), B-xulosa.

Shunday tasdiqni isbotlash ushbu zanjirni qurishdan iborat bo'lib $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_n \Rightarrow B$

Natijada har qaysi element yoaksioma deb hisoblanadi yoki allaqachon isbotlangan tasdiq bo'ladi.

$A \Rightarrow B \Rightarrow C$ yozuv $(A \Rightarrow B) \cap (B \Rightarrow C)$ uchun ixchamlashtirish kabi ishlatiladi.

Isbotlashlarda biz klassik keltirib chiqarishga asoslanamiz:

Agar A rost va $A \Rightarrow B$ u holda B ham rost bo'ladi. Aksni faraz qilib isbotlashda shuningdek uchinchisini inkor qilish tamoilidan foydalanamiz, unga muvofiq

$A \cup \neg A$(A yoki A emas) mulohaza A mulohazaning konkret mazmunidan qat'iy nazar rost deb qabul qilinadi. Demak bir vaqtda $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ bo'lishini qabul qilamiz ya'ni takroriy inkor etish dastlabki mulohazaga teng kuchli.

**3. Ayrim maxsus belgilashlar**.

O'quvchiga qulay va matnni qisqartirish uchun isbotlashning boshi va oxirini mos ravishda $\triangleleft$ va $\triangleright$ belgilar bilan belgilashni kelishib olamiz. Shuningdek qachonki bu qulay bo'lsa maxsus simvoli :q (tarifga ko'ra teng) vositasida ta'rifni kiritishni kelishib olamiz bunda ikki nuqta ta'riflanadigan ob'ektning o'ng tomoniga qo'yiladi.

Masalan

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\lambda(P)\to 0} \delta(\mathrm{f};\mathrm{P},\xi)$$

yozuv o'ng tomoni vositasida ma'nosi ma'lum degan farazda chap tomonini ta'riflaydi. Allaqachon ta'riflangan ifodalar uchun ham qisqacha belgilashlarni xuddi shunday kiritiladi. Masalan ushbu yozuv

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i =: \delta(f;P,\xi)$$

yig`indining chap tomonida turuvchi maxsus ko'rinishdagi $\delta(f;P,\xi)$ belgilashni kiritadi.

**4. Yakuniy xulosalar.**

Mantiqiy keltirib chiqarish formalizmni taxlil qilmasdan va matematik mantiq tekshirishlari pridmetini tashkil qiluvchi chinlik, isbotlanuvchi, keltirib keltirib chiqaruvchilarning jiddiy masalalarini e'tibor qilmasdan aslida biz faqat bu yerda belgilashlar haqida gaplashganimizni ta'kidlab o'tamiz. Agar biz mantiqning formallanishiga ega bo'lmay turib matematik taxminini qanday ko'rishimiz mumkin?. Ayrim taskin beradigan so'zlar shundan iborat bo'lishi mumkinki bunda biz hamma vaqt bilamiz yoki berilgan momentda formallashtirishga qaraganda ko'roq bilishgaqodirmiz deb aytish afzaldir. Oxirgi jumla ma'nosining tushuntirilishiga xattoki yurishni unitgan qirqoyoqdan o'zining barcha qo'l oyoqlarini qanday boshqarishni aynan undan so'rash haqidagi mashxur masal xizmat qiladi. Barcha fanlar tajribasi kecha tushunarli yoki soda va bo'linmaydi deb hisoblanadiganlar bugun esa qayta ko'rib chiqishga yoki oydinlashtirishga duchor bo'lishiga bizni ishontiradi. Shunday bo'lgan (va shubxasis, yani bo'ladi xam) hamda matematik analizning ko'p tushunchalari, muhim teoremalari va apparatlari XVII-XVIII asrlardayoq ochilgan, ammo faqat limitlar nazariyasi va uning uchun zarur bo'lgan mantiqiy to'laqonli haqiqiy sonlar nazariyasi yaratilgandan keyin (XIX asr) zamonaviy formallashgan bir qiymatli trakt va ehtimol shuning uchun ham hammabob ko'rinishga ega bo'ladi.

**Mashqlar.**

Rost mulohazalarni 1 simvoli bilan yolg`on mulohazalarni esa 0 simvoli bilan belgilaymiz. Unda

$$\neg A, A\cap B, A\cup B, A\to B$$

Mulohazalardan har qaysisiga chinlik jadvali deb atalivchi A,B mulohazalarni chinlik qiymatlariga bog`liq ravishda uning chinlik qiymatlarini ko'rsatuvchi jadvalni mos qo'yamiz. Bu jadvallar mantiqiy amallar $\neg, \cap, \cup, \Rightarrow$ larning formal ta'riflari bo'ladi. Mana ular

$\boxed{\neg A}$

| A | 0 | 1 |
|---|---|---|
| ¬A | 1 | 0 |

$\boxed{A \wedge B}$

| A \ B | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

$\boxed{A \vee B}$

| A \ B | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

$\boxed{A \rightarrow B}$

| A \ B | 0 | 1 |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |

1. Bu jadvallardagilarning hammasi mos mantiqiy amallar haqidagi sizning tasavvuringiz bilan mos kelishini tekshiring. (Xususan agar A yolg`on bo'lsa u holda $A \Rightarrow B$ implikasiya hamma vaqt rost bo'lishiga e'tibor qiling)

2. Quyidagi sodda , ammo juda muhim va matematik mulohazalarda keng foydalaniladigan munosabatlarning to'g`riligini ko'rsating:

a) $\neg(A \cup B) \Leftrightarrow \neg A \cup \neg B$;

b) $\neg(A \cup B) \Leftrightarrow \neg A \cap \neg B$;

c) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$;

d) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \cup B$;

e) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \cap \neg B$

Echimligi

a)

| $\neg$ | $(A$ | $\wedge$ | $B)$ | $\Leftrightarrow$ | $\neg$ | $A$ | $\vee$ | $\neg$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

b)

| $\neg$ | $(A$ | $\vee$ | $B)$ | $\Leftrightarrow$ | $\neg$ | $A$ | $\wedge$ | $\neg$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

d)

| $(A$ | $\Rightarrow$ | $B)$ | $\Leftrightarrow$ | $(\neg$ | $A$ | $\vee$ | $B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

c)

| $(A$ | $\Rightarrow$ | $B)$ | $\Leftrightarrow$ | $(\neg$ | $B$ | $\Rightarrow$ | $\neg$ | $A$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

e)

| $\neg$ | $(A$ | $\Rightarrow$ | $B)$ | $\Leftrightarrow$ | $A$ | $\wedge$ | $\neg$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |

## 2-§. To'plamlar va to'plamlar ustida elementlar.

### 1. To'plam tushunchasi.

XIX Asr boshi-XX asr oxirida matematikaning hammasidan ko'ra universal tili to'plamlar tili bo'lib qoldi. Bu xattoki to'plamlar ustidagi har hil tuzilmalar (munosabatlarni)ni o'rganuvchi fan sifatidagi matematikaning ta'riflaridan birida namoyon bo'ladi.

To'plamlar nazariyasining asoschisi Georg Kantor <<to'plam>> tushunchasini shunday ta'riflagan edi. <<Biz to'plam deb bizning untdisiyada yoki bizning tafakkurimizda butunlay har hil ob'ektlarning bir butun aniq birlashmasini tushunamiz>> Kantor ta'rifini, albatta ta'rif deb atash mumkin emas chunki u to'plam tushunchasiga o'ziga qaraganda (har qanday holda ham avval aniqlanmagan) ancha murakkab bo`lishi mumkin bo`lgan tushunchaga murojat qiladi.

Bu tatifning maksadi- tushungani boshqalar bilan uni bog`lab oyg`inlashtirishdir. Kontor (yoki <<oddiy>> shartli aytishadilar ) to`plamlar nazaryasining asosiy dastlabki shartlarniquyidagilarga keltiriladi:

1. To`plam ixtiyoriy farqlanuvchi ob`ektlardan tashkil topishi mumkin.
2. To`plam uni tashkil etuvchi ob`ektlar nabori bilan bir qiymatli aniqlanadi.
3. Ixtiyoriy xossa bu xossaga ega bo`lgan ob`ektlar to`plamini aniqlaydi.

Agar x-ob`ekt , P-xossa P(x) –bunda x ob`ekt P xossaga ega bo`lishining belgilanishi bo`lsa u holda

P xossaga ega bo`lgan ob`ektlarning butun sinifini yoki to`plamini $\{ x|P(x)\}$ orqali belgilanadi.

$x_1,x_2,\ldots,x_n$ elementlardan tashkil topgan to`plamni odatda$\{x_1,x_2,\ldots x_n\}$ kabi belgilanadi . So`ngra bu anglashilmovchilikni vujudga keltirmasa yozuvni qisqartirish uchun bir elementli to`plam {a} ni a orqali belgilashga imkon beramiz.

<<sinf>> , <<oila>>, <<majmua>>, <<nabor>> so`zlar oddiy to`plamlar nazaryasida <<to`plam>> iborasining sinonimlari kabi foydalaniladi.

Quyidagi misollar terminalogiyaning qo`llanilishini namoyish etadi:

<<Ya>> so’zidagi << a >> harflar to’plami;

O`nta raqamdan tashkil topgan nabor;

Loviyalar oilasi;

Yerdagi qum zarralari to`plami;

To`plamlar oilasi;

Barcha to`plamlar to`plami.

Bo`lishi mumkin bo`lgan to`plamni berishining aniklik darajasining xilma xilligi bizni bunda to`plam-xaqiqatdan ham shunchalik soda va beg`araz tushuncha emasligini fikirlashga majbur qiladi.

Haqiqatdan ham masalan barcha to`plamlar to`plami tushunchasi oddiygina ziddiyatdir.

◁Darhaqiqat , M to`plam P(M) yozuv M to`plam o`zini o`zining elementi sifatida o`z ichiga olmaydigan bo`lishini anglatgan bo`lsin. P xossaga ega bo`lgan to `plamlarning Kq{M|P(M)} sinfini qaraylik . Agar K-to`plam bo`lsa u holda yo P(K) to`g`ri , yoki bunda >P(K) to`g`ri boladi. Biroq bu al`ternativa K uchun bo`lishi mumkin emas. Xaqiqatdan P(K) bo`lishi mumkin emas chunki aks xolda K ning ta`rifidan unda K sinf K ni o`z elementi sifatida o`z ichiga olgan bo`ladi, ya`ni >P(K) to`g`rib o`ladi;

Ikkinchi tomondan >P(K) ham bo`lishi mumkin emas aks holda K sinf K ni o`z elementi sifatida o`z ichiga olgan bo`lar edi, bu esa K ning o`zini o`zining elementi sifatida o`z ichiga olmaydigan to`plamlar sinfi bo`lishga ziddir. Demak K-to`plam emas ▷

Rasselning klassik paradoksi to`plamlar xaqidagi oddiy tasavurlar keltiradigan shunday paradokslardan biridir.

Matematik mantiqga to`plam tushunchasi sinchiklab taxlil qilishga uchradi (albatda asossiz emasligini ko`rdik ) Biroq shunday taxlilni chuqurlashtirmaymiz. Faqat mavjut to`plamlarning aksiomatik nazariyasida aniq xossalar naboriga ega bo`lgan matematik ob`ekt kabi aniqlanishini ta`kitlab o`tamiz. Bu xossalarning tavsifi aksiomatikani tashkil qiladi. Aksiomatik to`plamlar nazariyasining negizi to`plamlardan yangi to`plamlar xosil qilish qoidalarini postulot qilib aytilishlari bo`ladi. Umuman mavjud aksiomatikalardan ixtiyoriysi shundayki, bunda u bir tomondan oddiy nazariyasining ma`lum zuddiyatlardan xalos qiladi, ikkinchi tomondan esa matematikaning turli bo`limlarida va birinchi navbatda aynan matematik analizda (so`zning keng ma`nosida tushiniladigan) vujutga kelgan konkret to`plamlari bilan erkin ish ko`rishini ta’minlaydi. Xozircha yo`plam tushunchasiga nisbatan bu muloxazalar bilan chegaralanib to`plamlarning analizga tez-tez foydalaniladigan ayrim xossalarni bayon qilishga o`tamiz. To`plam tushunchasi bilan to`liqroq tanishishni xoxlovchilar joriy bobning 4-& dagi 2-bandni qarashi mumkin yoki maxsus adabiyotlarga murojat qiladi.

**2.Ichiga olish munosobati** . to`plamni tashkil etuvchi ob`ektlar bu to`plamning elementlari deb atash qabul qilingani allaqachon ta`kitlangan edi.

Biz to`plamlarni lotin alfabitining bosh xariflari bilan toplamning elementlarini esa-mos kichik xarflar bilan belgilashga inyilamiz.

<<x X to`plam elementidir >> muloxazani qisqacha $x \in X$ (yoki $X \subset x$) simvol bilan , uning inkorini esa $x \notin X$ (yoki $X \not\subset x$) simvol bilan bilan belgilanadi. To`plamlar haqidagi muloxazalarning yozuvlarida ko`pincha mos ravishda mavjutlik va umumiylik kvanteri deb ataluvchi mantiqiy aperatorlar $\Im$ (<<mavjud>> yoki <<topiladi>>) xamda $\forall$ (<<xar qanday >> yoki <<ixtiyoriy uchun >>) ishlatiladi. Masalan $\forall x((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B))$ yozuv bunda ixtiyoriy x ob`ekt uchun $x \in A$ va $x \in$ B munosabatlarning teng kuchli bo`lishini anglatadi. To`plam o`zining elementlari bilan to`la aniqlangani uchun ko`rsatilgan muloxazani A va B to`plamlarning ustma-ust tushishini belgilovchi <<A teng` B>> debo o`qiladigan

$$A=B$$

qisqa yozuv bilan belgilash qabul qilingan.

Shunday qilib, ikki to`plam teng bo`ladi, qachonki ular bir hil elementlardan tashkil topgan bo`lsa. Tenglikning inkorini odatda $A \neq B$ ko`rinishda yoziladi.

Agar A to`plamning ixtiyoriy elementi B to`plamning ham elementi bo`lsa u holda $A \subset B$ yoki $B \supset A$ deb yoziladi va A to`plam B to`plamning qismi to`plamideb yoki bunda B to`plam A to`plamni qamrab oladi yoki B toplam A to`plamni o`z ichiga oladi deb aytiladi. Bularga muvofik A va B to`plamlar orasidagi $A \subset B$ munosabatni ichiga olish munosabati deyiladi.(1-rasm) Demak

$$(A \subset B):\text{q}\, \forall x((x \in A) \Rightarrow (x \in B))$$

Agar $A \subset B$ va $A \neq B$ bo`lsa, uholda ichiga olish munosabati $A \subset B$ ni qat`iy yoki bunda A-B ning qat`iy qismi bo`ladi deb aytamiz .

Endi keltirilgan ta`rifidan foydalanib

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B) \bigcap (B \subset A)$$

deb xulosa qilamiz.

Agar M to`plam bo`lsa u holda ixtiyoriy P xossa M to`plamda ushbu qism to`plam ajratadi

$$\{\, x \in M | P(x) \,\}$$

M to`plamnig shunday elementlariki ular bu xossaga ega bo`lganlar. Masalan, ayonki, bunda

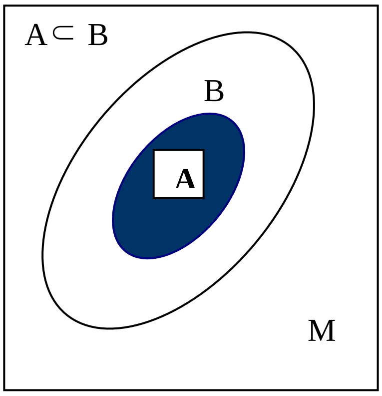
$$M=\{x \in M | x \in M \,\}$$

Ikkinchi tomondan agar P xossa sifatida M to`plamning birortaxam elementi bu xossga ega bo`lmagan xossani olamiz, Masalan $P(x) := (x \neq x)$ olsak u holda biz M to`plamning bo`sh qismi to`plami deb ataluvchi

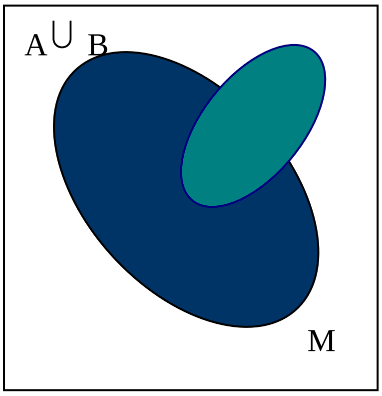
$$; = \{x \in M | x \neq x\}$$

to`plamni xosil qilamiz.

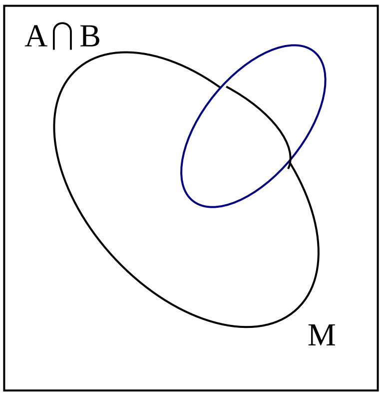
**3. To'plamlar ustida eng sodda amallar**. A va B M-to'plamning qism to'plamlari bo'lsin.



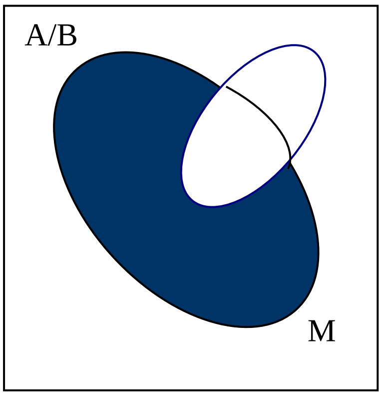

1-RASM



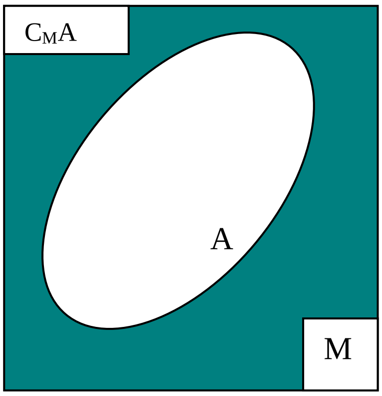

2-RASM




3-RASM




4-RASM




5-RASM

a. A va B to’plamlardan aqali bittasiga tegishli bo’lgan M to’plamning elementlaridan tashkil topgan to’plamni A va B to’plamlarning birlashmasi deb ataladi.

$$A\cup B:=\{x\in M|(x\in A)\vee(x\in B)\} \quad \text{(2-rasm)}$$

b. A va B to’plarning ikkisiga ham bir vaqtda tegishli bo’lgan M to’plamning shunday va faqat shunday elementlaridan hosil bo’lgan to’plamni A va B to’plamlarning kesishmasi deb ataladi.

$$A\cap B:=\{x\in M|(x\in A)\wedge(x\in B)\} \quad \text{(3-rasm)}$$

c. A to’plamning shunday elementlaridan qaysiki B to’plamga tegishli bo’lmagan elementlaridan tashkil topgan to’plamni A va B to’plamlar ayirmasi deb ataladi.

$$A/B:=\{x\in M|(x\in A)\wedge(x\notin B)\} \quad \text{(4-rasm)}$$

M to’plam bilan unda yotuvchi A qism to’plam orasidagi ayirma A to’plamning M gacha to’ldiruvchisi deb ataladi va $C_MA$ orqali yoki A to’plamga to’ldiruvchi to’plam qaysi to’plamga nisbatan qaralishi konteksdan tushunarli bo’lsa CA orqali belgilanadi. (5-rasm)

Misol. Kiritilgan tushunchalarning o’zaro ta’siriga namuna sifatida quyidagi ( de Morgan qoyidasi deb ataluvchi) munosabatni tekshiramiz:

$$C_M(A\cup B)=C_MA\cap C_MB \quad (1)$$

$$C_M(A\cap B)=C_MA\cup C_MB \quad (2)$$

$\triangleleft$ Masalan bu tengliklardan birinchisini isbotlaymiz

$$(x\in C_M(A\cup B))\Rightarrow(x\notin(A\cup B))\Rightarrow((x\notin A)\wedge(x\notin B))\Rightarrow(x\in C_MA)\wedge(x\in C_MB)\Rightarrow(x\in( C_MA\cap C_MB)$$

Shunday qilib ushbu munosabat o’rnatiladi.

$$C_M(A\cup B)\subset(C_MA\cap C_MB) \quad (3)$$

Ikkinchi tomondan ,

$(x\in(C_MA\cap C_MB))\Rightarrow((x\in C_MA)\wedge(x\in C_MB))\Rightarrow((x\notin A)\wedge(x\notin B))\Rightarrow(x\notin(A\cup B))\Rightarrow($ $x\in C_M(A\cup B))$ ya'ni

$$((C_MA\cap C_MB)\subset C_M(A\cup B)) \quad (4)$$

(3) va (4) lardan (1) kelib chiqadi.

$\triangleleft$ Endi bu tenglamalardan ikkinchisini isbotlaymiz.

$(x\in C_M(A\cap B))\Rightarrow \quad (x\notin(A\cap B)) \quad \Rightarrow(x\notin A)\vee \quad (x\notin B) \quad \Rightarrow(x\in C_MA)\vee(x\in C_MB)$ $\Rightarrow x\in C_MA\cup C_MB$

Shunday qilib ushbu munosabat o'rnatildi.

$$C_M(A\cap B)\subset C_MA\cup C_M(B) \quad (*)$$

Ikkinchi tomondan

$(x\in(C_MA\cup C_MB))\Rightarrow((x\in C_MA)\vee(x\in C_MB)) \quad \Rightarrow(x\notin A)\vee(x\notin B)$ $\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\in C_M(A\cap B)$

ya'ni $\quad C_MA\cup C_MB\subset C_M(A\cap B) \quad (**)$

(*) va (**) lardan (2) kelib chiqadi $\triangleright$

d. To'plamlarning to'g'i (dekart) ko'paytmasi.

Ixtiyoriy ikkita A,B to'plamlar uchun yangi to'plamni-elementlari.

A va B to'plamlar bo'lgan va faqat ular bo'lgan {A,B}q{B,A} juftlikni hosil qilamiz. Agar $A\neq B$ bo'lsa u holda bu to'plam ikkita elementdan va agar AqB bo'lsa bitta elementdan tashkil topgan bo'ladi. Ko'rsatilgan to'plam (A,B)dan ya'ni A,B elementlarga {A,B} juftliklarning birinchi va ikkinchi elementlari deb ajratuvchi A,B elementlarga qo'shimcha alomatlar berilgan tartiblangan juftlikdan farqli A,B to'plamlarning tartiblanmagan juftligi deb ataladi. Tartiblangan juftliklarning

$$(A,B)=(C,D)$$

tengligi ta'rifga ko'ra bunday AqC va BqD bo'lishini anglatadi. Xususan, agar $A\neq B$ bo'lsa u holda

$$(A,B)\neq(B,A) \qquad \text{bo'ladi.}$$

Endi X va Y –ixtiyoriy to'plamlar bo'lsin. Birinchi hadi X to'plamdan olingan elementdan iborat, ikkinchi hadi-Y dan olingan elementdan iborat barcha (x,y) tartiblangan juftliklardan hosil qilingan

$$XxY=\{(x,y)|(x\in X)\wedge(y\in Y)\}$$

to'plamni X va Y to'plamlarning to'g'ri yoki dekart ko'paytmasi deb ataladi (shunday tartibdagi). Tog'ri ko'paytma ta'rifidan va yuqorida qilingan mulohazadan bunda umuman olganda $XxY\neq YxX$ bo'lishi kelib chiqadi. Faqat agar X=Y bo'lsa XxY=YxX tenglik o'rinli bo'ladi. Oxirgi holda XxX o'rniga qisqacha $X^2$ deb yoziladi. To'g'ri ko'paytma shuningdek ya'ni Fermadan erkli ravishda geometriyaning analitik yozuviga koordinatalar sistemasi orqali kelgan Dekart sharafiga dekart ko'paytma deb ham ataladi. Tekislikdagi hammaga ma'lum dekart koordinatalar sistemasi bu tekislikni aynan ikkita sonli o'qlarning to'g'ri ko'paytmasiga aylantiradi. Ko'paytuvchilar tartibiga dekart ko'paytmaning bog'liqligi bu tanish obektga yaqqol namoyon bo'ladi.Masalan, (0,1)va(1,0) tartiblangan juftliklarga tekislikning har xil nuqtalari mos keladi. $X_1$va$X_2$ to'lamlarning $Z=X_1xX_2$ to'g'ri ko'paytmasining elementi bo'lgan $z=(x_1,x_2)$ tartiblangan juftligida $x_1$-element z juftlikning birinchi proeksiyasi va $pr_1z$ orqali belgilanadi, $x_2$-element esa z juftlikning ikkinchi proyeksiyasi deb ataladi va $pr_2z$ orqali belgilanadi. Analitik geometriya terminlariga o'xshash tartiblangan juftlikning (birinchi va ikkinchi) koordinatalari deb ataladi. Mashqlar:1.2.3 mashqlarda A,B,C lar orqali birorta M to'plamning qism to'plamlari belgilangan.

1.Munosabatlar tekshirilsin

a) $(A\subset C\wedge(B\subset C)\Leftrightarrow((A\cup B)\subset C)$;

b) $(C\subset A)\wedge(C\subset B)\Leftrightarrow(C\subset(A\cap B))$;

c)$C_M(C_MA)qA$;

d) $(A\subset C_MB)\Leftrightarrow(B\subset C_MA)$;

e) $(A\subset B)\Leftrightarrow((C_MA\supset C_MB)$:

Echilishi a) $(A\subset C)\wedge(B\subset C)$ bo'lsin

Agar

$x\in A\bigcup B\Rightarrow x\in A\vee x\in B\Rightarrow (x\in A)\wedge(A\subset C)\vee(x\in B)\wedge(B\subset C)\Rightarrow x\in C\vee x\in C\Rightarrow X\in$ C ya'ni $A\bigcup B\subset C$

Demak $(A\subset C)\wedge(B\subset C)\Rightarrow((A\bigcup B)\subset C)$ endi $(A\bigcup B)\subset C$

bo'lsin $((A\bigcup B)\subset C)\Rightarrow(A\subset(A\bigcup B))\wedge((A\bigcup B)\subset C)\Rightarrow A\subset C$

$((A\bigcup B)\subset C)\Rightarrow(B\subset(A\bigcup B))\wedge((A\bigcup B)\subset C)\Rightarrow A\subset C$

Demak $((a\bigcup B)\subset C)\Rightarrow(A\subset C)\wedge(B\subset C)$ shunday qilib

$(A\subset C)\wedge(B\subset C\Leftrightarrow((A\bigcup B)\subset C)$ munosabat o'rinli

b) $(C\subset A)\wedge(C\subset B)$ bo'lsin

$\forall x\in C\Rightarrow((x\in C)\wedge(C\subset A))\wedge((x\in C)\wedge(C\subset B))\Rightarrow(x\in A)\wedge(x\in B)\Rightarrow x\in A\bigcap B$ ya'ni $C\subset A\bigcap B$ munosabat o'rinli. Demak $(C\subset A)\wedge(C\subset B)\Rightarrow C\subset(A\bigcap B)$ Endi $C\subset A\bigcap B$ bo'lsin Unda

$C\subset A\bigcap B\Rightarrow((C\subset(A\bigcap B))\wedge((A\bigcap B)\subset A))\wedge((C\subset(A\bigcap B)\wedge((A\bigcap B)\subset B))\Rightarrow(C\subset A)\wedge(C\subset B)$ Demak $C\subset(A\bigcap B)\Rightarrow(C\subset A)\wedge(C\subset B)$ shunday qilib $(C\subset A)\wedge(C\subset B)\Leftrightarrow C\subset(A\bigcap B)$ munosabat o'rinli. $\triangleright$

c) $x\in C_M(C_MA)\Rightarrow x\notin C_MA\Rightarrow x\in A$ ya'ni $C_M(C_MA)\subset A$

$x\in A\Rightarrow x\notin C_M(A)\Rightarrow x\in C_M(C_M(A))$ ya'ni $A\subset C_M(C_M(A))$

$(C_M(C_MA)\subset A)\wedge(A\subset C_M(C_MA))\Rightarrow C_M(C_M(A))qA$ $\triangleright$

d) $(A\subset C_MB)$ bo'lsin $x\in B\Rightarrow x\notin C_MB\Rightarrow(x\notin C_MB)\wedge(A\subset C_MB)\Rightarrow x\notin A\Rightarrow x\in C_MA$ ya'ni $B\subset C_MA$ Demak $(A\subset C_MB)\Rightarrow(B\subset C_MA)$ Endi $B\subset C_MA$ bo'lsin

$x\in A\Rightarrow x\notin C_MA\Rightarrow(x\notin C_MA)\wedge(B\subset C_MA)\Rightarrow x\notin B\Rightarrow x\in C_MB$ ya'ni $A\subset C_MB$

Demak $B\subset C_MA\Rightarrow A\subset C_MB$ shunday qilib $(A\subset C_MB)\Leftrightarrow(B\subset C_MA)$ munosabat o'rinli $\triangleright$

e) $(A\subset B)$ bo'lsin $x\in C_MB\Rightarrow x\notin B\Rightarrow(x\notin B)\wedge(A\subset B)\Rightarrow x\notin A\Rightarrow x\notin C_MA$ ya'ni $C_MA\supset C_MB$ demak $(A\subset B)\Rightarrow(C_MA\supset C_MB)$ Endi $C_MA\supset C_MB$ bo'lsin

$x\in A\Rightarrow x\notin C_MA\Rightarrow(x\notin C_MA)\wedge(A\subset C_MB)\Rightarrow x\notin C_MB\Rightarrow x\in B$ ya'ni $A\subset B$ Demak $(C_MA\supset C_MB)\Rightarrow(A\subset B)$ Shunday qilib $(A\subset B)\Leftrightarrow C_MA\supset C_MB$ munosabatning o'rinli ekanligi isbotlandi $\triangleright$

2. Ushbu tengliklar ko’rsatilsin

a) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=: A\cup B\cup C$

b) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=: A\cap B\cap C$

c) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

d) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

a) Ixtiyoriy A,B,C mulohazalar uchun

| $A$ | $\cup$ | $(B$ | $\cup$ | $C)$ | $\Leftrightarrow$ | $(A$ | $\cup$ | $B)$ | $\cup$ | $C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

bo’lgani uchun

$A\cup(B\cup C)=\{x\in M|x\in A\cup x\in(B\cup C)\}=\{x\in M|x\in A\cup(x\in B\cup x\in C)\}=$

$=\{x\in M|(x\in A\cup x\in B)\cup x\in C\}=\{x\in M|x\in(A\cup B)\cup x\in C\}=(A\cup B)\cup C.$

b) Ixtiyoriy A,B,C mulohazalar uchun

| $A$ | $\cap$ | $(B$ | $\cap$ | $C)$ | $\Leftrightarrow$ | $(A$ | $\cap$ | $B)$ | $\cap$ | $C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

bo’lgani uchun

$$A\cap(B\cup C)=\{x\in M\mid(x\in A)\wedge(x\in B\cup C)\}=\{x\in M\mid(x\in A)\wedge((x\in B)\vee(x\in C))\}=$$

q

$$\{x\in M\mid((x\in A)\wedge(x\in B))\vee((x\in A)\wedge(x\in C))\}=\{x\in M\mid(x\in A\cap B)\cup(x\in A\cap C)\}=$$

$=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

d) Ixtiyoriy A,B,C mulohazalar uchun

| $A$ | $\cup$ | $(B$ | $\cap$ | $C)$ | $\Leftrightarrow$ | $(A$ | $\cup$ | $B)$ | $\wedge$ | $(A$ | $\cup$ | $C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

bo'lgani uchun

3) Birlashma va kesishma amallarning o'zaro bog'lanishini (ikkilikni) tekshiring

a) $C_M(A\cup B)=C_MA\cap C_MB$

b) $C_M(A\cap B)=C_MA\cup C_MB$

4. Dekart ko'paytmaning geometrik illyustrasiyasini (izohini) bering

a) ikkita kesmaning (to'g'ri to'rtburchak);

b) ikkita to'g'ri chiziqning (tekislik);

c) to'g'ri chiziq va aylananing (silindrik sirt);

d) to'g'ri chiziq va doira (silindr);

e) ikkita aylananing (tor);

f) aylana va doiraning (polnotoris)

5. $\Delta$q$\{(x_1,x_2)\in X^2|\ x_1,x_2\}$to'plamni X to'plam dekart kvadrati $X^2$ ning dioganal deb ataladi. 4-masalaning a),b),e) banrlarga hosil qilingan to'plam dioganalining geometrik illyustrasiyasini bering.

6. Ushbularning to'g'riligini ko'rsating

a) $(XxY=\varnothing)\Leftrightarrow(x=\varnothing)\cup(Y=\varnothing$

Agar $XxY\neq\varnothing$ bo'lsa u holda

b) $(AxB\subset XxY)\Leftrightarrow(A\subset X)\wedge(B\subset Y)$,

c) $(XxY)\bigcup(ZxY)=(X\bigcup Z)xY$,

d) $(XxY)\bigcap(X^{1}xY)\,X\bigcap X^{1})\,x(Y\bigcap Y^{1})$.

Bu yerda $\varnothing$-bo'sh to'plam, ya'ni elementlarni o'z ichiga olmagan to'plamning simboli.

Echilishi a) Agar $XxY\neq\varnothing$ bo'lsa u holda shunday (x,y) juftlik mavjud bunda $(x,y)\in XxY$ bo'ladi ya'ni $x\in X$ va $y\in Y$ bo'ladi demak $x\neq\varnothing$ va $Y\neq\varnothing$ bo'ladi. Aksincha $X\neq\varnothing$ va $Y\neq\varnothing$ bo'lsa unda shunday $x\in X$ va $y\in Y$ elementlar mavjud bo'ladi va demak $(x,y)\in XxY$ ya'ni $XxY\neq\varnothing$ bo'ladi. Demak biz $XxY\neq\varnothing\Leftrightarrow X\neq\varnothing\wedge Y\neq\varnothing$ ekvivalensiyani isbot qildik. Bu tengkuchlilikning ikkala tomonidan inkor olinsa

$$\neg(XxY\neq\varnothing)\Leftrightarrow\neg(X\neq\varnothing\wedge Y\neq\varnothing)$$

$$XxY=\varnothing\Leftrightarrow(X=\varnothing)\wedge\left(Y\neq\varnothing\right)$$

hosil qilamiz. $\triangleright$

Echilishi b) $XxY\neq\varnothing$ hamda $AxB\subset XxY$ bo'lsin. Agar $AxB=\varnothing$ u holda $A=\varnothing$ va $B=\varnothing$ Demak $A\subset X\bigcap B\subset Y$ bo'ladi Agar $AxB\neq\varnothing$ bo'lsa u holda $A=\varnothing$ va $B=\varnothing$ bo'ladi. $\forall x\in A$ va $\forall y\in B$ elementlarni olsak u holda $(x,y)\in AxB$ bo'ladi $AxB\subset XxY$ bo'lgani uchun $(x,y)\in XxY$ bo'ladi ya'ni $x\in X$ va $y\in Y$ bo'ladi. Demak $A\subset X\bigcap B\subset Y$ bo'ladi. Shunday qilib

$$AxB\subset XxY\Rightarrow(A\subset X)\bigcap(B\subset Y)$$

implikasiya isbotlandi.

Endi ($A\subset X\bigcap B\subset Y$) bo'lsin unda

$$(x,y)\in AxB\Rightarrow x\in A\bigcap y\in B\Rightarrow((x\in A)\bigcap(A\subset X))\bigcap(y\in B)\bigcap(B\subset Y)\Rightarrow(x\in X)\bigcap(y\in Y)\Rightarrow$$

$\Rightarrow(x,y)\in XxY$ ya'ni $AxB\subset XxY$ Demak ($A\subset X\bigcap B\subset Y$)$\Rightarrow AxB\subset XxY$ implikasiya isbotlandi. Shunday qilib $AxB\subset XxY\Leftrightarrow(A\subset X)\bigcap(B\subset Y)$ ekvivalensiya isbotlandi. $\triangleright$

c)

$$(x,y)\in(XxY)\bigcup(ZxY)\Leftrightarrow((x,y)\in(XxY))\bigcup((x,y)\in(ZxY))$$
$$\Leftrightarrow((x\in X)\bigcap(y\in Y))\bigcup((x\in Z)\bigcap$$

$$\bigcap(y\in Y))\Leftrightarrow((x\in X)\bigcap(y\in Y))\bigcup((x\in Z)\bigcap(y\in Y))\Leftrightarrow(x\in X\bigcup Z)\bigcap(y\in Y)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (x,y) \in (X \bigcup Z) \bigcap Z$ ya’ni $(XxY) \bigcup (ZxY) = (X \bigcup Z) \bigcap Z.$ $\triangleright$

d)

$(x,y) \in (XxY) \bigcap (X^1 \text{x} Y^1) \Leftrightarrow ((x,y) \in XxY)) \bigcap ((x,y) \in (X^1 \text{x} Y^1)) \Leftrightarrow ((x \in X) \bigcap (y \in Y)) \bigcap$

$\bigcap ((x \in X^1)(y \in Y^1)) \Leftrightarrow ((x \in X) \bigcap (x \in X^1)) \bigcap ((y \in Y) \bigcap (y \in Y^1)) \Leftrightarrow (x \in X \bigcap X^1)$

$\bigcap$

$\bigcap (y \in Y \bigcap Y^1) \Leftrightarrow (x,y) \in (X \bigcap X^1) \text{x} (Y \bigcap Y^1)$ ya’ni

$(XxY) \bigcap (X^1 xY^1) = (X \bigcap X^1) x(Y \bigcap Y^1)$ tenglik to’g’ri ekan. $\triangleright$

3-Mashqdagi munosabatlarni 1-&dagi 2-mashqning a),b) munosabatlari bilan taqqoslab muloxazalar ustidagi mantiqiy amallar $\neg, \wedge, \vee$ lar bilan to’plamlar uctidagi $\subset, \cap, \cup$ omillar orasidagi moslikni o’rnating .

Echilishi $\neg$ga C to’ldiruvchini $\wedge$ *ga* $\wedge$ *kesishmani* $\vee$ ga $\cup$ birlashmani mos qo’yamiz.

3-Funksiya

1 Funksiya (akslantirish) tushunchasi.

Endi faqatgina matematika uchun emas balki boshqalar uchun ham muhim bo’lgan funksiya tushunchasining ta’rifini keltiramiz.

X va Y- qandaydir to’plamlar bo’lsin.Agar birorta f qonunga muvofiq har qaysi $x \in X$ elementga $y \in Y$ element mos qo’yilsa u holda X da aniqlangan Y ichidagi qiymatlar bilan funksiya berilgan deb aytiladi. Bu holda X to’plam funksiyaning aniqlanish sohasi deb uning umumiy elementi x simvoli esa

--funksiya argumenti yoki erkli o’zgaruvchi deb ataladi; x argumentning tayin $x_0 \in X$ qiymatiga mos keluvchi $y_o \in Y$ elementi esa $x_o$ elementdagi funksiya qiymati yoki argumetning xq$x_0$ qiymatidagi funksiya qiymati deb ataladi va f($x_0$) orqali belgilanadi, shu sababli yqf(x) miqdorni ko’pincha erksiz o’zgaruvchi deb ataladi.

F(X)= $\{ y \in Y \mid \exists x((x \in X) \wedge (y = f(x))) \}$

Funksiyaning barcha qiymatlar to’plamini yani y X to’plam elementlarida qiymatlar qabul qiladi qiymatlar to’plami yoki funksiyaning qiymatlar sohasi deb ataladi.

X,Y to’plamlarning tabiatiga bog’liq holda <<funksiya>> iborasi matematikaning turli bo’limlarida qator foydali sinonimlarga ega: akslantirish, almashtirish, morfizm, operator, funksional. Akslantirishlar ular orasida eng ko’p tarqalgan bo’lib biz ham undan ko’pincha foydalanamiz.

Funksiya (akslantirish) uchun quyidagi belgilashlar qabul qilingan:

$$F : X \to Y, \quad X \xrightarrow{f} Y$$

Funksiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlar sohasi qanday bo’lishi qachonki kontekstdan tushunarli bo’lsa, shuningdek $x \to f(x)$ yoki $y = f(x)$ belgilashlardan foydalaniladi, ko’pincha esa funksiya umuman olganda faqat bitta f simvol bilan belgilanadi. Agar ikkita $f_1,f_2$ funksiyalar bir hil X aniqlanish sohasiga ega va ixtiyoriy $x \in X$ elementda bu funksiyalarning $f_1(x)$ va $f_2(x)$ qiymatlari ustma ust tushsa u holda bu funksiyalarni ustma ust yoki teng deb ataladi. Bu holda $f_1=f_2$ deb yoziladi. Agar $A \subset X$, $f:X \to Y$ esa birorta finksiya bo’lsa u holda f|A yoki $f|_A$ orqali A to’plamda f funksiya bilan ustma ust tushuvchi $\varphi : A \to X$ funksiyani belgilaymiz. Aniqroq qilib aytsak agar $x \in A$ bo’lsa $f|_A(x):=\varphi(x)$ bo’ladi.

$f|_A$ funksiyani f funksiyaning A to’plamdagi torayishi yoki chegaralanishi deb $f:X \to Y$ funksiya esa $\varphi = f|_A : A \to Y$ funksiyaga nisbatan $\varphi$ funksiyaning X to’plamidagi kengayishi yoki davomi deb ataladi.

Ko’ramizki bunda ba’zan X to’plamning birorta qism to’plami A da aniqlangan $\varphi : A \to Y$ funksiyani qarashga to’g’ri keladi, shu bilan birga $\varphi$ funksiya qiymatlar to’plami $\varphi(A)$ ham Y ning qism to’plami bo’lib Y bilan ustma-ust tushmasligi mumkin. Bunga muvofiq funksiyaning aniqlanish sohasini o’z ichiga oluvchi ixtiyoriy X to’plamni belgilash uchun ba’zan funksiyaning jo’natish sohasi deb ataluvchi ibora ishlatiladi, unda funksiya qiymatlar sohasini o’z ichiga oluvchi Y to’plamga uning kelish sohasi deb ataladi. Demak funksiyani (akslantirishni) berish ushbu $(X, f, Y)$ uchlikni ko’rsatiladi deb faraz qilinadi, bu yerda

X – akslanuvchi to’plam yoki funksiyaning aniqlanish sohasi;

Y – ya'ni akslanish borayotgan to'plam yoki funksiyaning kelish sohasi;

$f$ - har qaysi $x \in X$ elementga aniq $y \in Y$ elementni mos qo'yuvchi qonun.

Bu yerda kuzatilayotgan X va Y orasidagi nosimmetriklik shuni namoyon etadiki bunda akslanish aynan X dan Y ichiga boradi. Funksiyaga ba'zi bir misollar ko'rib chiqamiz

1-misol $\ell = 2\pi r$ va $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ formulalar $\ell$ aylana uzunligi va V shar hajmini r radius orqali bog'lanishlarni o'rnatadi. Bu formulalardan har qaysisi ma'nosiga ko'ra musbat haqiqiy sonlar to'plami RQ da aniqlangan qiymatlari ham mana shu RQda bo'lgan o'zining$f$ :RQ$\rightarrow$RQ funksiyasini beradi.

2-misol X – inersial koordinatalar sistemasi to'plami, C:X$\rightarrow$R esa har qaysi inersial koordinatalar sistemasi $x \in X$ ga yorug'likning vakuumdagi unga nisbatan o'lchangan tezligining c(x) qiymatini mos qo'yuvchi funksiyadan tashkil topgan bo'lsin. C:X$\rightarrow$R funksiya o'zgarmas ya'ni ixtiyoriy $x \in X$ da u faqat bitta c qiymatga ega (bu muhim eksperimental dalil)

3-misol.x'q$x - \upsilon t$

t'qt

formula bilan berilgan G:R2$\rightarrow$R2 akslantirish (R2=RxR=RtxRx Rt vaqt o'qi va Rx fazoviy o'qning o'z-o'ziga to'g'ri ko'paytmasi) Bitta inersial (x,t) sistemadan birinchisiga nisbatan $\upsilon$ tezlik bilan harakatlanuvchi boshqa (x',t') inersial sistemaga o'tish Galileyning klassik almashtirishidir.

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$t' = \frac{t - \left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

munosabat bilan berilgan L:R2$\rightarrow$R2 akslantirish ham shunday maqsad bilan hizmat qiladi.

Bu – maxsus nisbiylik nazariyasida muhim rol o'ynovchi mashxur (bir o'lchovli) Lorens almashtirishi; c – yorug'lik tezligi.

4-misol X1xX2∋(x1,x2)$\xrightarrow{\Pr_1} x_1 \in X_1$ moslik bilan berilgan $\Pr_1 : X_1 \text{x} X_2 \to X_1$ proyeksiyalash ayonki funksiya bo'ladi, ikkinchi proyeksiya $\Pr_2 : X_1 \text{x} X_2 \to X_2$ xuddi shunday aniqlanadi ya'ni

$$\text{X1xX2} \ni (x, x_2) \xrightarrow{\Pr_2} x_2 \in X_2$$

moslik bilan berilgan Pr2:X1xX2→X2 proyeksiyalash ham ayonki funksiyadir.

5-misol Har qaysi A∈P(M) to'plamga CMA∈P(M) to'plamni ya'ni M to'plamdagi A ga to'ldiruvchi to'plamni mos qo'yamiz. Unda P(M) to'plamni o'ziga aks ettiruvchi CM:P(M)→P(M) akslantirishni hosil qilamiz.

6-misol E⊂M bo'lsin. M to'plamda ((agar x∈E bo'lsa XE(x)=1) ^(agar x∈CME bo'lsa XE(x)=0)) shart bilan aniqlangan XE:M→R haqiqiy qiymatli funksiyani E to'plamning xarakteristik funksiyasi deb ataladi.

7-misol M(X,Y) – X to'plamni Y to'plam ichiga aks ettiruvchi aks ettirishlar to'plami, x0 esa X to'plamdan olingan tayinlangan element bo'lsin Ixtiyoriy f∈M(X,Y) funksiyaga x0 elementdagi uning $f$ (x0)∈Y qiymatini mos qo'yamiz. Bu bilan F:M(X,Y)→Y funksiya aniqlanadi. Xususan, agar YqR, ya'ni Y haqiqiy sonlar to'lamidan iborat bo'lsa, u holda har qaysi $f$ : X→R funksiyaga F:M(X;R)⟶R funksiya F($f$ )=$f$ (x0) sonni mos qo'yadi. Shunday qilib F funksiyalarda aniqlangan funksiyadan iboratdir.Qulaylik uchun shunday funksiyalarni funksionallar deb ataladi.

8-misol Γ – sirtda (masalan yer sirtida) yotuvchi va uning ikkita tayinlangan nuqtalarini tutashtiruvchi egri chiziqlar to'plami bo'lsin. Har qaysi γ∈Γ egri chiziqga uning uzunligini mos qo'yish mumkin. Unda F:Γ⟶R funksiyani ya'ni sirtning berilgan nuqtalari orasidagi qisqa yoki geodezik chiziq deb aytiladigan chiziqni izlash maqsadida hosil qilamiz.

9-misol R hamma haqiqiy sonlar o'qida aniqlangan barcha haqiqiy qiymatli funksiyalar to'plami M(R,R) ni qaraylik. Barcha haqiqiysonlar to'plami R da aniqlangan a∈R tayinlab har qaysi $f$ ∈M(R,R) funksiyaga u bilan

$f_a(x)=(x+a)$ munosbat bilan bog'langan $f_a \in M(R,R)$ funksiyani mos qo'yamiz. Odatda $f_a(x)$ funksiyani $f(x)$ funksiyaning a ga siljishi deb ataladi. Shu bilan birga vujudga keladigan $A:M(R,R)\longrightarrow M(R,R)$ aks ettirishni siljitish operatori deb ataladi. Demak A operator funksiyalarda aniqlangan va ularning shuningdek qiymatlari ham funksiyalar bo'ladi: $f_a=A(f)$. Agar biz har qaysi qadamda real operatorlarni ko'rmasak, ko'rilgan misol sun'iy bo'lib ko'rinishi mumkin. Har qanday radiopriyomnik o'z-o'zidan $f$ elektromagnit signallarini $f$ tovushli signallarga o'zgartiruvchi $f \mapsto f$ operatordan iborat; bizning sezgi organlarimizdan ixtiyoriysi o'zining aniqlanish sohasi va qiymatlar sohasi bilan operator (o'zgartiruvchi) bo'ladi.

10-misol Fazoda zarrachaning vaziyati fazoda uning koordinatalari deb ataluvchi tartiblangan uchta sonlar (x,y,z) orqali aniqlanadi. Barcha shunday tartiblangan uchliklar to'plamini uchta R sonli o'qlarningto'g'ri ko'paytmasi RxRxR=R3 kabi tasavvur qilish mumkin. Agar sistema n ta zarradan tashkil topgan bo'lsa u holda uning joylanishi (konfiguratsiyasi) har qaysi zarraning vaziyati bilan ya'ni3n ta sonlarning

$$(x1,y1,z1;x2,y2,z2;\ldots;xn,yn,zn)$$

tartiblangan nabori bilan beriladi. Barcha shunday naborlar to'plamini n ta zarradan tashkil topgan sistemaning konfiguratsion fazosi deb ataladi. Demak n ta zarradan tashkil topgan sistemaning konfiguratsion fazosini n ta ekzemplyar R3 fazoning to'g'ri ko'paytmasi

$$R3xR3x\ldots xR3=R3n$$

Kabi talqin qilish mumkin.n ta zarradan tashkil topgan sistemaning xarakatiga vaqt o'qi R ning n ta zarradan tashkil topgan sistemaning konfiguratsion fazosi R3n ga aks ettiruvchi $\gamma:R\longrightarrow R3n$ aks ettirish javob beradi.

11-misol Mexanik sistemaning U potensial energiyasi sistema zarralarining o'zaro joylashuviga ya'ni sistema ega bo'lgan konfiguratsiya bilan aniqlanadi.

Q – sistemaning real bo'lishi mumkin bo'lgan konfiguratsiyalar to'plami bo'lsin. Bu sistema konfiguratsiya fazosining birorta qism to'plamidir. Har qaysi q∈Q vaziyatga sistema potensial energiyasi birorta U(q) qiymati javob beradi. Shunday qilib potensial energiya konfiguratsiya fazosining Q qism to'plamida aniqlangan qiymatlari R haqiqiy sonlar sohasidagi U:Q⟶R funksiyadan iboratdir.

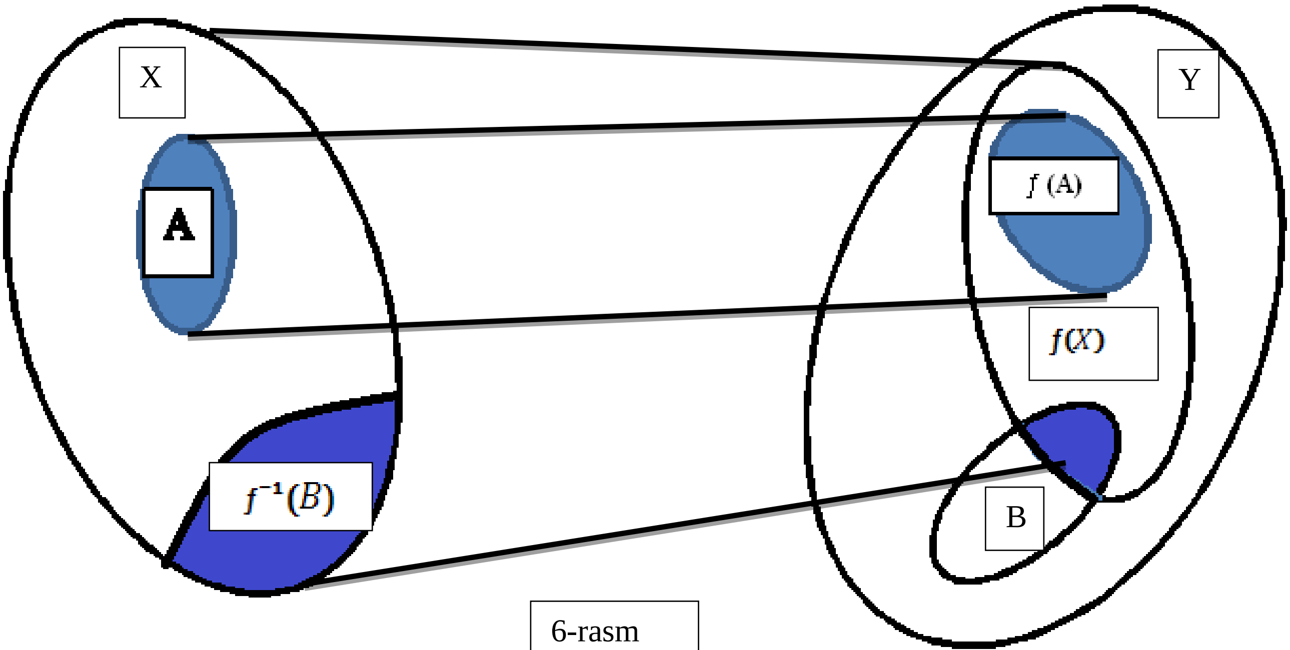
12-misol n ta moddiy zarradan iborat sistemaning kinetic energiyasi K ularning tezliklariga bog'liq. Sistemaning to'la mexanik energiyasi E=K+U ya'ni kinetik va potensial energiyalari yig'indisi, shunday qilib sistemaning q konfiguratsiyasiga va uning tezliklari nabori ϑ bog'liq. Fazoda zarralarning konfiguratsiyasi q kabi n ta uch o'lchovli vektorlarning ϑ tezliklar nabori ham 3n ta sonlardan iborat tartiblangan nabori bilan berilishi mumkin. Bizning sistemaning holatiga javob beruvchi (q,ϑ) tartiblangan juftliklar n ta zarra sistemasining fazaviy fazosi deb ataluvchi R3nxR3nqR6n to'g'ri ko'paytmaning F qism to'plamini hosil qiladi.

Sistemaning to'la energiyasi shunday qilib fazaviy fazo R6n ning qism to'plamiF da aniqlangan, R haqiqiy sonlar sohasida qiymatlar qabul qiluvchi E:F⟶R funksiya bo'ladi. Xususan agar sistema yopiq bo'lsa ya'ni unga tashqi kuchlar ta'sir qilmasa u holda energiyaning saqlanish qonuniga ko'ra F to'plamning ixtiyoriy nuqtasida sistema holat funksiyasi E bir xil E0∈R qiymatga ega bo'ladi.

2. Aks ettirishlarning soda klassifikatsiyalari.

Agar *f* :X⟶Y funksiya aks ettirish deb atalib ya'ni x∈X elementda u *f* (x)∈Y qiymatni qabul qilsa odatda uni x elementning aksi deb ataladi. *f* :X⟶Y aks ettirishda *f* (A):={y∈Y|∃x((x∈A)⋀(y=*f* (x))} to'plamni ya'ni Y to'plamning shunday elementlarini a to'plam elementlari akslari bo'lganlarini A⊂X to'plamning aksi deb ataladi. *f* -

1(B):q{x∈X|ƒ (x)∈B} to’plamni ya’ni X to’plamning shunday elementlari akslari B da yotganlarini B⊂Y to’plamning asl obrazi (yoki to’la asl obrazi) deb ataladi. Agar ƒ (X)=Y bo’lsa ƒ :X⟶Y aks ettirish haqida bunda u syuryektiv (yoki X to’plamni Y to’plam




6-rasm

ustiga) aks ettirish deb;

Agar X to’plamning ixtiyoriy x1,x2 elementlari uchun

(ƒ (x1)=ƒ (x2))⇒(x1=x2)

ya’ni turli elementlar turli akslarga ega bo’lsa inyektiv (yoki vlojenie, inyeksiya) deb;

agar u bir vaqtda syuryektiv va inyektiv bo’lsa biyektiv (yoki o’zaro bir qiymatli) deb ataladi.

Agar ƒ :X⟶Y akslantirish biyektiv ya’ni X va Y to’plamlarning elementlari orasida o’zaro bir qiymatli moslik bo’lsa u holda quyidagicha aniqlanuvchi ƒ -1:Y⟶X akslantirishning paydo bo’lishi tabiiy: agar ƒ (x)qy bo’lsa u holda ƒ -1(y)qx bo’ladi ya’ni y∈Y elementga shunday x∈X element mos qo’yiladiki ƒ aks ettirishda uning aksi y element bo’ladi. ƒ aks ettirishning syuryektivligi tufayli shunday x∈X element topiladi, ƒ ning inyektivligi tufayli u yagonadir. Shunday qilib ƒ -1 akslantirish korrekt aniqlangandir.Bu aks ettirish dastlabkiƒ aks ettirishga nisbatan teskari aks ettirish deb ataladi.

Teskari akslantirishning qurilishidan ko'rinadiki bunda $f^{-1}$:Y⟶X aks ettirishning o'zi ham biyektiv va unga teskari $(f^{-1})^{-1}$:X⟶Y aks ettirish$f$ :X⟶Y aks ettirish bilan ustma ust tushadi. Shunday qilib ikkita akslantirishlarning teskari bo'lish xossasi o'zaro bo'ladi:

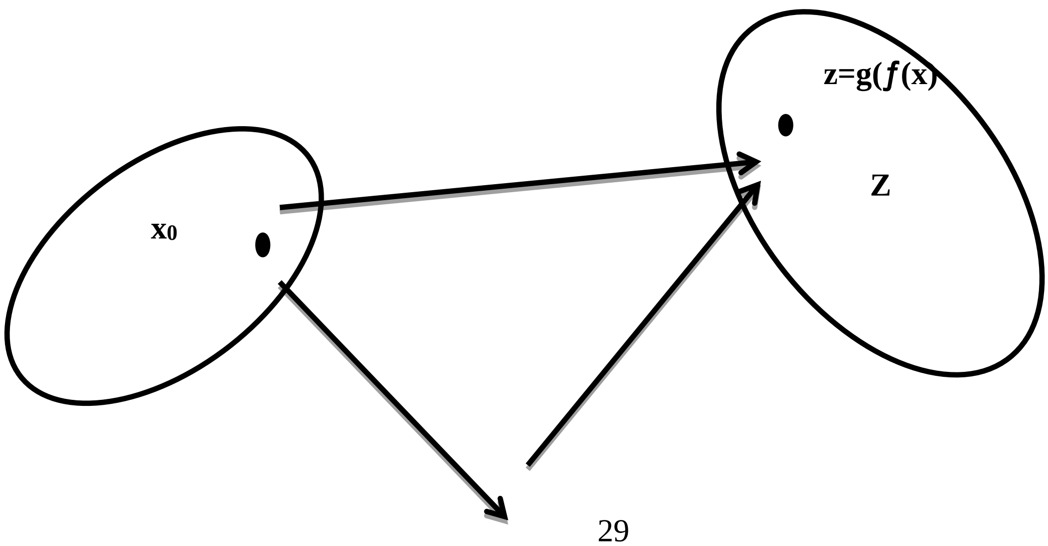
agar$f^{-1}$ – $f$ uchun teskari bo'lsa, u holda o'z navbatida $f$ – $f^{-1}$ uchun teskari bo'ladi. Ko'ramizki B⊂Y to'plamning asl obrazi bo'lgan $f^{-1}$(B) simvoli teskari funksiyaning $f^{-1}$ simvoli bilan assotsirlanadi, biroq to'plamning asl obrazi ixtiyoriy $f$ :X⟶Y akslantirish uchun hattoki u biyektiv bo'lmasa va demak teskari aks ettirishga ega bo'lmasa ham aniqlangandir.

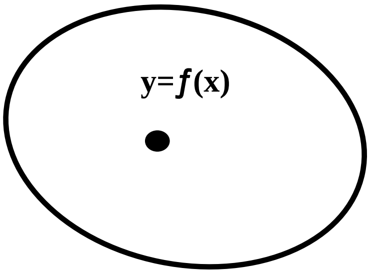
3. Funksiyalar kompozitsiyasi va o'zaro teskari akslantirishlar.

Bir tomondan yangi funksiyalarning boy manbalari va ikkinchi tomondan esa murakkab funksiyalarning soddaroq funksiyalarga yoyilish usullariga sabab aks ettirishlar kompozitsiyasi amali bo'ladi $f$ :X⟶Y va g:Y⟶Z akslantirishlar shundayki, bunda ulardan biri (bizning holda g) boshqasining ($f$ ning ) qiymatlar to'plamida aniqlangan bo'lsa, u holda qiymatlari X to'plam elementlarida $(g \circ f)(x):=g(f(x))$ formula bilan aniqlanuvchi yangi

$g \circ f$ :X⟶Z

aks ettirishni qurish mumkin. qurilgan tarkibli $g \circ f$ aks ettirishni $f$ aks ettirish va g aks ettirishning ( shunday tartibdagi) kompozitsiyasi deb ataladi. 7-rasm $f$ va g aks ettirishlar kompozitsiyasining tuzulishini tasvirlaydi.






7-rasm.

Aks ettirishlar kompozitsiyasi bilan siz allaqachon geometriyada tekis yoki fazoning harakat almashtirishlar kompozitsiyasi kabi va shunday algebrada soddaroq elementar funksiyalar kompozitsiyasi bilan hosil bo'lgan <<murakkab>> funksiyani tekshirishda bir necha bor uchratgansiz. Kompozitsiya amali ba'zan ketma ket bir necha marta o'tkazishga to'g'ri keladi va bunga muvofiq u assotsiativ ya'ni

h°(g°ƒ )=(h°g)°ƒ

bo'lishini ta'kidlash foydalidir.

◄Haqiqatan ham,

(h°(g°ƒ ))(x)=h((g°ƒ )(x))=h(g(ƒ (x)))=(h°g)(ƒ (x))=((h°g)°ƒ )(x) ►

Bu hol bir necha sonlarni qo'shish yoki ko'paytirish holidagi kabi juftlashtirish tartibini ko'rsatuvchi qavsarni tashlab yuborishga imkon beradi. Agar ƒ n°…°ƒ 1 kompozitsiyaga hamma hadlari bir hil va ƒ ga teng bo'lsa u holda uni qisqacha ƒ n bilan belgilanadi. Masalan yaxshi ma'lumki musbat a sonidan n kvadrat ildiz chiqarishni ixtiyoriy boshlang'ich yaqinlashishi x0>0 dan boshlab xn+1q (xn+$a/x_{\downarrow}n$) formula bo'yicha ketma ket yaqinlashish bilan hisoblash mumkin. Bu ketma ket hisoblashdan boshqa emas, xuddi ƒ n(x0), ketma ket hisoblashning o'zi bu yerda ƒ (x)q. Shunday jarayon oldingi qadamda hisoblangan funksiya qiymati keyingi qadamda uning argumenti bo'lib shakllansa itaratsion jarayon deb ataladi. Itaratsion jarayonlar matematikada keng ko'lamda foydalaniladi. Shuningdek xattoki shunday holda ham qachonki ikkala kompozitsiyalar g°ƒ va ƒ °g aniqlangan bo'lsada umuman olganda

$g\circ f \neq f\circ g$

Haqiqatan ham, masalan, ikki elementli to'plam $\{a,b\}$ ni va $f:\{a,b\}\to a, g:\{a,b\}\to b$ akslantirishlarni olaylik. Unga ayonki $g\circ f:\{a,b\}\to b$ bo'ladi. Shu vaqtning o'zida

$f\circ g:\{a,b\}\to a$ bo'ladi chunki

$f(a)=a,\quad f(b)=a$

$g(a)=b,\quad g(b)=b$

bo'lib

$(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(b)=a$

$(f\circ g)(b)=f(g(b))=f(b)=a$

ya'ni $f\circ g:\{a,b\}\to a$

$(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(a)=b$

$(g\circ f)(b)=g(f(b))=g(a)=b$

ya'ni $g\circ f:\{a,b\}\to b$

shunday qilib $f\circ g\neq g\circ f$ X to'plamning har qaysi elementini o'ziga mos qo'yuvchi $f:X\to X$ ya'ni $x\xrightarrow{f}x$ aks ettirishni ex orqali belgilaymiz va X Φ

◄ Haqiqatan ham agar $f:X\to Y$, $g:Y\to X$ va $g\circ f = e_X:X\to X$

bo'lsa u holda

$X=e_X(X)=(g\circ f)(X)=\{(g\circ f)(x)|x\in X\}=\{g(f(x))|x\in X\}=g(f(X))\subset g(Y)$

$X\subset g(Y)$ va $g(Y)\subset X\Rightarrow g(Y)=X$

va demak, g syuryektik. So'ngra agar $x1\in X$ va $x2\in X2$ bo'lsa, u holda

$(x1\neq x2)\Rightarrow(e_X(x1)\neq e_X(x2))\Rightarrow((g\circ f)(x1)\neq(g\circ f)(x2)\Rightarrow g(f(x1))\neq g(f(x2))\Rightarrow f(x1)\neq f(x2$ demak, $f$ inyektivdir►

Tasdiq $f:X\to Y$, $g:Y\to X$ akslantirishlar biyektiv va o'zaro teskari bo'ladi shunday holda va faqat shunday holda qachonki $g\circ f=e_X$ va $f\circ g=e_Y$ bo'lsa.

◄Lemmaga muvofiq $g\circ f=e_X$ va $f\circ g=e_Y$ shartlarning bir vaqtda bajarilishi $f$,g akslantirishlardan har qaysisining syuryektiv va inyektiv ya'ni biyektiv bo'lishiga garantiya beradi. Bu shartlar ko'rsatadiki bunda $y=f(x)$ bo'ladi shunday holda va faqat shunday holda qachonki $x=g(y)$ abo'lsa►

# 2-BOB. Akslantirishlar

## 2.1-§. Aks ettirishlarning soda klassifikatsiyalari.

Ko'ramizki bunda ba'zan X to'plamning birorta qism to'plami A da aniqlangan $\varphi$:A$\rightarrow$Y funksiyani qarashga to'g'ri keladi, shu bilan birga $\varphi$ funksiya qiymatlar to'plami $\varphi$(A) ham Y ning qism to'plami bo'lib Y bilan ustma-ust tushmasligi mumkin. Bunga muvofiq funksiyaning aniqlanish sohasini o'z ichiga oluvchi ixtiyoriy X to'plamni belgilash uchun ba'zan funksiyaning jo'natish sohasi deb ataluvchi ibora ishlatiladi, unda funksiya qiymatlar sohasini o'z ichiga oluvchi Y to'plamga uning kelish sohasi deb ataladi. Demak funksiyani (akslantirishni) berish ushbu (X,$f$ ,Y) uchlikni ko'rsatiladi deb faraz qilinadi, bu yerda

X – akslanuvchi to'plam yoki funksiyaning aniqlanish sohasi;

Y – ya'ni akslanish borayotgan to'plam yoki funksiyaning kelish sohasi;

$f$ - har qaysi x$\in$X elementga aniq y$\in$Y elementni mos qo'yuvchi qonun.

Bu yerda kuzatilayotgan X va Y orasidagi nosimmetriklik shuni namoyon etadiki bunda akslanish aynan X dan Y ichiga boradi. Funksiyaga ba'zi bir misollar ko'rib chiqamiz

**1-misol** $\ell = 2\pi r$ va $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ formulalar $\ell$ aylana uzunligi va V shar hajmini r radius orqali bog'lanishlarni o'rnatadi. Bu formulalardan har qaysisi ma'nosiga ko'ra musbat haqiqiy sonlar to'plami RQ da aniqlangan qiymatlari ham mana shu RQda bo'lgan o'zining$f$ :RQ$\rightarrow$RQ funksiyasini beradi.

**2-misol** X – inersial koordinatalar sistemasi to'plami, C:X$\rightarrow$R esa har qaysi inersial koordinatalar sistemasi x$\in$X ga yorug'likning vakuumdagi unga nisbatan o'lchangan tezligining c(x) qiymatini mos qo'yuvchi funksiyadan tashkil topgan bo'lsin. C:X$\rightarrow$R funksiya o'zgarmas ya'ni ixtiyoriy x$\in$X da u faqat bitta c qiymatga ega (bu muhim eksperimental dalil)

**3-misol**.x’q $x-\upsilon t$

t’qt

formula bilan berilgan G:R2→R2 akslantirish (R2=RxR=RtxRx Rt vaqt o’qi va Rx fazoviy o’qning o’z-o’ziga to’g’ri ko’paytmasi) Bitta inersial (x,t) sistemadan birinchisiga nisbatan $\upsilon$ tezlik bilan harakatlanuvchi boshqa (x’,t’) inersial sistemaga o’tish Galileyning klassik almashtirishidir.

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$t'=\frac{t-\left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

munosabat bilan berilgan L:R2→R2 akslantirish ham shunday maqsad bilan hizmat qiladi.

Bu – maxsus nisbiylik nazariyasida muhim rol o’ynovchi mashxur (bir o’lchovli) Lorens almashtirishi; c – yorug’lik tezligi.

**4-misol** X1xX2∋(x1,x2)$\xrightarrow{\Pr_1} x_1 \in X_1$ moslik bilan berilgan $\Pr_1 : X_1 x X_2 \to X_1$ proyeksiyalash ayonki funksiya bo’ladi, ikkinchi proyeksiya $\Pr_2 : X_1 x X_2 \to X_2$ xuddi shunday aniqlanadi ya’ni

X1xX2∋$(x, x_2) \xrightarrow{\Pr_2} x_2 \in X_2$

moslik bilan berilgan Pr2:X1xX2→X2 proyeksiyalash ham ayonki funksiyadir.

**5-misol** Har qaysi A∈P(M) to’plamga CMA∈P(M) to’plamni ya’ni M to’plamdagi A ga to’ldiruvchi to’plamni mos qo’yamiz. Unda P(M) to’plamni o’ziga aks ettiruvchi CM:P(M)→P(M) akslantirishni hosil qilamiz.

**6-misol** E⊂M bo’lsin. M to’plamda ((agar x∈E bo’lsa XE(x)=1) ^(agar x∈CME bo’lsa XE(x)=0)) shart bilan aniqlangan XE:M→R haqiqiy qiymatli funksiyani E to’plamning xarakteristik funksiyasi deb ataladi.

**7-misol** M(X,Y) – X to'plamni Y to'plam ichiga aks ettiruvchi aks ettirishlar to'plami, x0 esa X to'plamdan olingan tayinlangan element bo'lsin Ixtiyoriy f∈M(X,Y) funksiyaga x0 elementdagi uning $f$ (x0)∈Y qiymatini mos qo'yamiz. Bu bilan F:M(X,Y)→Y funksiya aniqlanadi. Xususan, agar YqR, ya'ni Y haqiqiy sonlar to'lamidan iborat bo'lsa, u holda har qaysi$f$ : X→R funksiyaga F:M(X;R)⟶R funksiya F($f$ )q$f$ (x0) sonni mos qo'yadi. Shunday qilib F funksiyalarda aniqlangan funksiyadan iboratdir.Qulaylik uchun shunday funksiyalarni funksionallar deb ataladi.

**8-misol** Γ – sirtda (masalan yer sirtida) yotuvchi va uning ikkita tayinlangan nuqtalarini tutashtiruvchi egri chiziqlar to'plami bo'lsin. Har qaysi γ∈Γ egri chiziqga uning uzunligini mos qo'yish mumkin. Unda F:Γ⟶R funksiyani ya'ni sirtning berilgan nuqtalari orasidagi qisqa yoki geodezik chiziq deb aytiladigan chiziqni izlash maqsadida hosil qilamiz.

**9-misol** R hamma haqiqiy sonlar o'qida aniqlangan barcha haqiqiy qiymatli funksiyalar to'plami M(R,R) ni qaraylik. Barcha haqiqiysonlar to'plami R da aniqlangan a∈R tayinlab har qaysi $f$ ∈M(R,R) funksiyaga u bilan $f$ a(x)=(x+a) munosbat bilan bog'langan $f$ a∈M(R,R) funksiyani mos qo'yamiz. Odatda $f$ a(x) funksiyani $f$ (x) funksiyaning a ga siljishi deb ataladi. Shu bilan birga vujudga keladigan A:M(R,R)⟶M(R,R) aks ettirishni siljitish operatori deb ataladi. Demak A operator funksiyalarda aniqlangan va ularning shuningdek qiymatlari ham funksiyalar bo'ladi: $f$ aqA($f$ ). Agar biz har qaysi qadamda real operatorlarni ko'rmasak, ko'rilgan misol sun'iy bo'lib ko'rinishi mumkin. Har qanday radiopriyomnik o'z-o'zidan $f$ elektromagnit signallarini $f$ tovushli signallarga o'zgartiruvchi $f \mapsto f$ operatordan iborat; bizning sezgi organlarimizdan ixtiyoriysi o'zining aniqlanish sohasi va qiymatlar sohasi bilan operator (o'zgartiruvchi) bo'ladi.

**10-misol** Fazoda zarrachaning vaziyati fazoda uning koordinatalari deb ataluvchi tartiblangan uchta sonlar (x,y,z) orqali aniqlanadi. Barcha shunday tartiblangan uchliklar to'plamini uchta R sonli o'qlarningto'g'ri ko'paytmasi RxRxR=R3 kabi tasavvur qilish mumkin. Agar sistema n ta zarradan tashkil topgan bo'lsa u holda uning joylanishi (konfiguratsiyasi) har qaysi zarraning vaziyati bilan ya'ni3n ta sonlarning

$$(x1,y1,z1;x2,y2,z2;\ldots;xn,yn,zn)$$

tartiblangan nabori bilan beriladi. Barcha shunday naborlar to'plamini n ta zarradan tashkil topgan sistemaning konfiguratsion fazosi deb ataladi. Demak n ta zarradan tashkil topgan sistemaning konfiguratsion fazosini n ta ekzemplyar R3 fazoning to'g'ri ko'paytmasi

$$R3xR3x\ldots xR3=R3n$$

Kabi talqin qilish mumkin.n ta zarradan tashkil topgan sistemaning xarakatiga vaqt o'qi R ning n ta zarradan tashkil topgan sistemaning konfiguratsion fazosi R3n ga aks ettiruvchi $\gamma:R\longrightarrow R3n$ aks ettirish javob beradi.

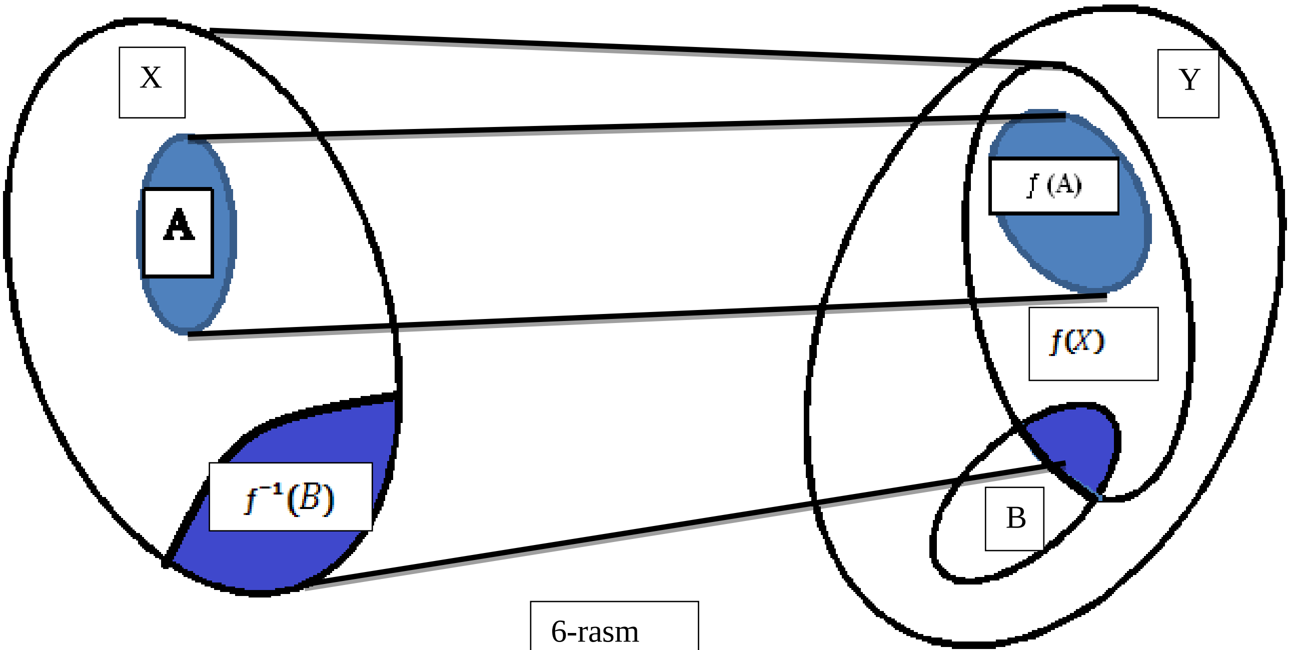
**11-misol** Mexanik sistemaning U potensial energiyasi sistema zarralarining o'zaro joylashuviga ya'ni sistema ega bo'lgan konfiguratsiya bilan aniqlanadi.

Q – sistemaning real bo'lishi mumkin bo'lgan konfiguratsiyalar to'plami bo'lsin. Bu sistema konfiguratsiya fazosining birorta qism to'plamidir. Har qaysi q∈Q vaziyatga sistema potensial energiyasi birorta U(q) qiymati javob beradi. Shunday qilib potensial energiya konfiguratsiya fazosining Q qism to'plamida aniqlangan qiymatlari R haqiqiy sonlar sohasidagi $U:Q\longrightarrow R$ funksiyadan iboratdir.

**12-misol** n ta moddiy zarradan iborat sistemaning kinetic energiyasi K ularning tezliklariga bog'liq. Sistemaning to'la mexanik energiyasi EqKQU ya'ni kinetic va potensial energiyalari yig'indisi, shunday qilib sistemaning q konfiguratsiyasiga va uning tezliklari nabori ϑ bog'liq. Fazoda zarralarning konfiguratsiyasi q kabi n ta uch o'lchovli vektorlarning ϑ tezliklar nabori ham 3n ta sonlardan iborat tartiblangan nabori bilan berilishi mumkin. Bizning sistemaning holatiga javob beruvchi (q,ϑ) tartiblangan juftliklar n ta zarra sistemasining fazaviy fazosi deb ataluvchi R3nxR3nqR6n to'g'ri ko'paytmaning F qism to'plamini hosil qiladi.

Sistemaning to'la energiyasi shunday qilib fazaviy fazo R6n ning qism to'plamiF da aniqlangan, R haqiqiy sonlar sohasida qiymatlar qabul qiluvchi E:F⟶R funksiya bo'ladi. Xususan agar sistema yopiq bo'lsa ya'ni unga tashqi kuchlar ta'sir qilmasa u holda energiyaning saqlanish qonuniga ko'ra F to'plamning ixtiyoriy nuqtasida sistema holat funksiyasi E bir xil E0∈R qiymatga ega bo'ladi.

Agar ƒ :X⟶Y funksiya aks ettirish deb atalib ya'ni x∈X elementda u ƒ (x)∈Y qiymatni qabul qilsa odatda uni x elementning aksi deb ataladi. ƒ :X⟶Y aks ettirishda ƒ (A):={y∈Y|∃x((x∈A)⋀(y=ƒ (x))} to'plamni ya'ni Y to'plamning shunday elementlarini a to'plam elementlari akslari bo'lganlarini A⊂X to'plamning aksi deb ataladi. ƒ -1(B):={x∈X|ƒ (x)∈B} to'plamni ya'ni X to'plamning shunday elementlari akslari B da yotganlarini B⊂Y to'plamning asl obrazi (yoki to'la asl obrazi) deb ataladi. Agar ƒ (X)=Y bo'lsa ƒ :X⟶Y aks ettirish haqida bunda u syuryektiv (yoki X to'plamni Y to'plam




6-rasm

ustiga) aks ettirish deb;

Agar X to'plamning ixtiyoriy x1,x2 elementlari uchun

$$(f(x1)=f(x2))\Rightarrow(x1=x2)$$

ya'ni turli elementlar turli akslarga ega bo'lsa inyektiv (yoki vlojenie, inyeksiya) deb;

agar u bir vaqtda syuryektiv va inyektiv bo'lsa biyektiv (yoki o'zaro bir qiymatli) deb ataladi.

Agar $f:X\longrightarrow Y$ akslantirish biyektiv ya'ni X va Y to'plamlarning elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik bo'lsa u holda quyidagicha aniqlanuvchi $f^{-1}:Y\longrightarrow X$ akslantirishning paydo bo'lishi tabiiy: agar $f(x)=y$ bo'lsa u holda $f^{-1}(y)=x$ bo'ladi ya'ni $y\in Y$ elementga shunday $x\in X$ element mos qo'yiladiki $f$ aks ettirishda uning aksi y element bo'ladi. $f$ aks ettirishning syuryektivligi tufayli shunday $x\in X$ element topiladi, $f$ ning inyektivligi tufayli u yagonadir. Shunday qilib $f^{-1}$ akslantirish korrekt aniqlangandir.Bu aks ettirish dastlabki $f$ aks ettirishga nisbatan teskari aks ettirish deb ataladi. Teskari akslantirishning qurilishidan ko'rinadiki bunda $f^{-1}:Y\longrightarrow X$ aks ettirishning o'zi ham biyektiv va unga teskari $(f^{-1})^{-1}:X\longrightarrow Y$ aks ettirish $f:X\longrightarrow Y$ aks ettirish bilan ustma ust tushadi. Shunday qilib ikkita akslantirishlarning teskari bo'lish xossasi o'zaro bo'ladi:

agar $f^{-1}$ – $f$ uchun teskari bo'lsa, u holda o'z navbatida $f$ – $f^{-1}$ uchun teskari bo'ladi. Ko'ramizki $B\subset Y$ to'plamning asl obrazi bo'lgan $f^{-1}(B)$ simvoli teskari funksiyaning $f^{-1}$ simvoli bilan assotsirlanadi, biroq to'plamning asl obrazi ixtiyoriy $f:X\longrightarrow Y$ akslantirish uchun hattoki u biyektiv bo'lmasa va demak teskari aks ettirishga ega bo'lmasa ham aniqlangandir.

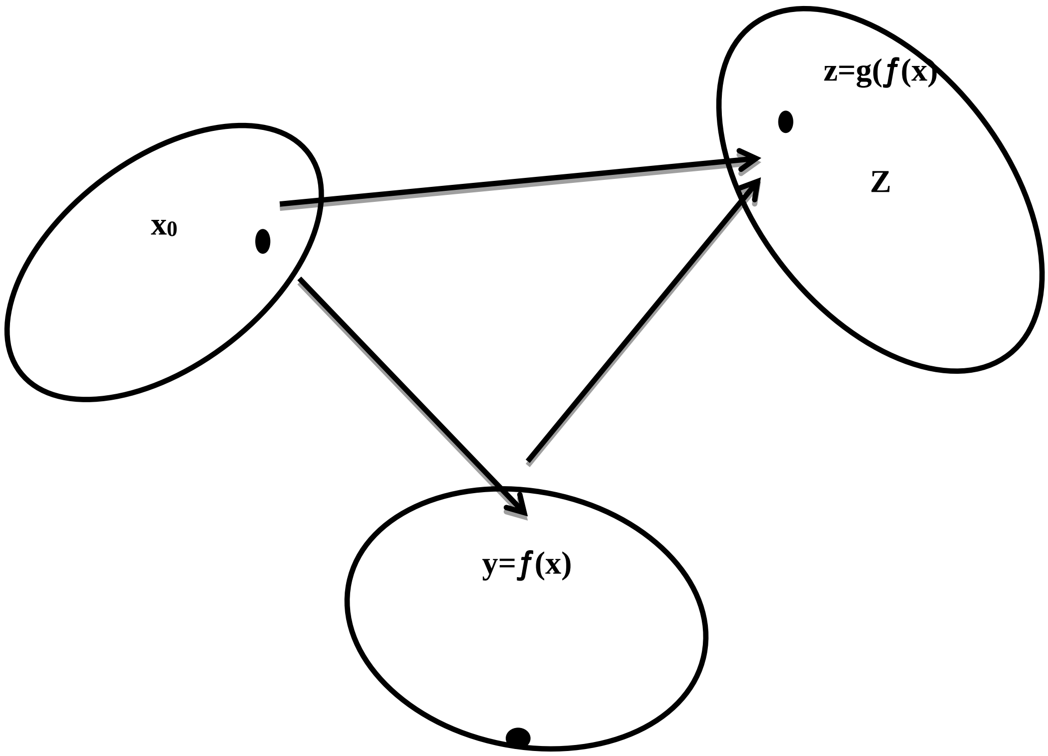
3. Funksiyalar kompozitsiyasi va o'zaro teskari akslantirishlar.

Bir tomondan yangi funksiyalarning boy manbalari va ikkinchi tomondan esa murakkab funksiyalarning soddaroq funksiyalarga yoyilish usullariga sabab aks ettirishlar kompozitsiyasi amali bo'ladi $f:X\longrightarrow Y$ va $g:Y\longrightarrow Z$ akslantirishlar shundayki, bunda ulardan biri (bizning holda g) boshqasining

($f$ ning ) qiymatlar to'plamida aniqlangan bo'lsa, u holda qiymatlari X to'plam elementlarida ($g\circ f$)(x):qg($f$ (x)) formula bilan aniqlanuvchi yangi

$g^{\circ} f: X \longrightarrow Z$

aks ettirishni qurish mumkin. qurilgan tarkibli $g\circ f$ aks ettirishni $f$ aks ettirish va g aks ettirishning ( shunday tartibdagi) kompozitsiyasi deb ataladi. 7-rasm $f$ va g aks ettirishlar kompozitsiyasining tuzulishini tasvirlaydi.




7-rasm.

Aks ettirishlar kompozitsiyasi bilan siz allaqachon geometriyada tekis yoki fazoning harakat almashtirishlar kompozitsiyasi kabi va shunday algebrada soddaroq elementar funksiyalar kompozitsiyasi bilan hosil bo'lgan <<murakkab>> funksiyani tekshirishda bir necha bor uchratgansiz. Kompozitsiya amali ba'zan ketma ket bir necha marta o'tkazishga to'g'ri keladi va bunga muvofiq u assotsiativ ya'ni

$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$

bo'lishini ta'kidlash foydalidir.

◀Haqiqatan ham,

$(h\circ(g\circ f))(x)=h((g\circ f)(x))=h(g(f(x)))=(h\circ g)(f(x))=((h\circ g)\circ f)(x)$ ►

Bu hol bir necha sonlarni qo'shish yoki ko'paytirish holidagi kabi juftlashtirish tartibini ko'rsatuvchi qavsarni tashlab yuborishga imkon beradi. Agar $f_n\circ\ldots\circ f_1$ kompozitsiyaga hamma hadlari bir hil va $f$ ga teng bo'lsa u holda uni qisqacha $f^n$ bilan belgilanadi. Masalan yaxshi ma'lumki musbat a sonidan n kvadrat ildiz chiqarishni ixtiyoriy boshlang'ich yaqinlashishi x0>0 dan boshlab

$X_{n+1}q \qquad (x_n+a/x_{\downarrow}n)$

formula bo'yicha ketma ket yaqinlashish bilan hisoblash mumkin. Bu ketma ket hisoblashdan boshqa emas, xuddi $f^n(x_0)$, ketma ket hisoblashning o'zi bu yerda $f(x)q$. Shunday jarayon oldingi qadamda hisoblangan funksiya qiymati keyingi qadamda uning argumenti bo'lib shakllansa itaratsion jarayon deb ataladi. Itaratsion jarayonlar matematikada keng ko'lamda foydalaniladi. Shuningdek xattoki shunday holda ham qachonki ikkala kompozitsiyalar $g\circ f$ va $f\circ g$ aniqlangan bo'lsada umuman olganda

$g\circ f\neq f\circ g$

Haqiqatan ham, masalan, ikki elementli to'plam {a,b} ni va $f:\{a,b\}\to a, g:\{a,b\}\to b$ akslantirishlarni olaylik. Unga ayonki $g\circ f:\{a,b\}\to b$ bo'ladi. Shu vaqtning o'zida

$f\circ g:\{a,b\}\to a$bo'ladi chunki

$f(a)=a, \qquad f(b)=a$

$g(a)=b, \qquad g(b)=b$

bo'lib

$(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(b)qa$

$(f\circ g)(b)=f(g(b))=f(b)qa$

ya'ni$f\circ g:\{a,b\}\to a$

$(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(a)=b$

$(g\circ f)(b)=g(f(b))=g(a)=b$

ya'ni $g \circ f:\{a,b\} \to b$

shunday qilib $f \circ g \neq g \circ f$ X to'plamning har qaysi elementini o'ziga mos qo'yuvchi $f:X \to X$ ya'ni $x \xrightarrow{f} x$ aks ettirishni ex orqali belgilaymiz va X to'plamning ayniy akslantirish deb ataladi.

Lemma

$(g \circ f q ex) \Rightarrow (g \text{ syuryektiv}) \wedge (f \text{ inyektiv})$

◄ Haqiqatan ham agar $f:X \to Y$, $g:Y \to X$ va $g \circ f qex:X \to X$

bo'lsa u holda

$X=ex(X)=(g \circ f)(X)=\{(g \circ f)(x)|x \in X\}=\{g(f(x))|x \in X\}=g(f(X)) \subset g(Y)$

$X \subset g(Y)$ va $g(Y) \subset X \Rightarrow g(Y)=X$

va demak, g syuryektik. So'ngra agar $x1 \in X$ va $x2 \in X2$ bo'lsa, u holda

$(x1 \neq x2) \Rightarrow (ex(x1) \neq ex(x2)) \Rightarrow ((g \circ f)(x1) \neq (g \circ f)(x2) \Rightarrow g(f(x1)) \neq g(f(x2)) \Rightarrow f(x1) \neq f(x2)$

demak, $f$ inyektivdir►

Tasdiq $f:X \to Y$, $g:Y \to X$ akslantirishlar biyektiv va o'zaro teskari bo'ladi shunday holda va faqat shunday holda qachonki $g \circ f=ex$ va $f \circ g=ey$ bo'lsa.

◄Lemmaga muvofiq $g \circ f=ex$ va $f \circ g=ey$ shartlarning bir vaqtda bajarilishi $f$,g akslantirishlardan har qaysisining syuryektiv va inyektiv ya'ni biyektiv bo'lishiga garantiya beradi. Bu shartlar ko'rsatadiki bunda $y= f(x)$ bo'ladi shunday holda va faqat shunday holda qachonki xqg(y) abo'lsa►

## 2.2-§. Funktsiya

Yuqorida biz teskari aks ettirishni ko'rishning oshkor ko'rinishidan kelib chiqdik. Isbotlangan tasdiqdan oshkorligi kamroq bo'lsa ham ammo ushbu ikki shartni qanoatlantiruvchi teskari aks ettirishnig ancha simmetrik tarifini berish mumkun: $g \cdot fqex$ va $f \cdot g=ey$ (Bunga muvofiq paragraph oxiridagi 6 masalaga qaralsin).

4 Funksiya munosabat kabi .

Funksiyaning grafigi.

Xulosada funksiya tushunchasining o’ziga yana qaytamlik. Uning murakkab evalyuitsyani rivojlanishi jarayonini uzoq va davomliboshidan kechirganini takitlab o’tamiz.  Funksiya iborasi birinchi bo’lib G Leybenets 1673-1692 yillar davrida (haqiqatda birmuncha tor manoda) paydo bo’lgan.Bu iboraning xozirgi zamonga yaqin manodagisini Iogan Bernulining Lrybenets bilan xat yozishlarida 1698 yilda o’rnatilgan. Paragraf boshida keltirilgani bilan deyarli ustma ust tushuvchi  funksiyaning tarifi XVIII asr o’rtalaridan oldin kam uchragan. XIX asr boshlarida rus tiliga o’girilgan C.Lakruaning matematika darsliklarida u allaqachon paydo bo’lgan edi. Funksiyani shunday tushunishning faol tarafdorlaridan biri N.I Labachevski bo’lgan edi. Bundan tashqari N.I Labachevski  <<nazaryasining keng qarashlari sonlar biri ikkinchisi bilan bog’lanishda bo’lishi uchun birgalikda berilishi tushunildi shu manoda bo’g’lanish mavjudligiga yo’l qo’yadi>> . Bu funksiya tushunchasi tarifi g’oyasidan iborat bo’lib endi biz uni bayon qilish niyatidamiz. Paragraf boshida keltirilgan funksiya tushunchasining tarifi judayam dinamik va ish g’oyasini aks ettiruvchi deb tasavvur qilinadi. Biroq hozirgi zamon qonunchilar nuqtai nazaridan uni tariff deb atash mumkun emas chunki funksiyaga ekvivalent bo’lgan moslik tushunchasidan foydalaniladi. Biz bu yerda kitob honga malumot uchun to’plamlar nazaryasi tilida funksiya tarifi qanday tarzda berilishini ko’rsatamiz (Qizig’I shuki bunda munosabat tushunchasi yani biz hozir murojat qilamiz va Leybenetsda funksiya tushunchasidan oldin keladi).

a.Munosabat. Ixtiyoriy tartiblangan (x,y) juftliklarto’plamini R munosabat deyiladi. R munosabatni tashkil etuvchi tartiblangan juftliklarning birinchi elementlar to’plami X, R munosabatning aniqlanish sohasi deb bu juftliklarning ikkinchi ekementlar to’plami Y ni esa R munosabatninng qiymatlari to’plami deb ataladi. Shunday qilib R munosabatni to’g’ri ko’paytma X·Y ning Rqism to’plami kabi talqin qilish mumkun. Agar XcX’ va YcY’ bo’lsa u holda albatta RcX·YcX’·Y bo’ladi. Shuning uchun bitta munosabatni turli to’plamlar to’g’ri ko’paytmalarning qism to’plamlari kabi berish mumkun. Munosabatning aniqligini o’z ichiga oluvchi ixtiyoriy to’plamni bu munosabatning jo’nalish sohasi deb ataladi munosabatning qiymatlar sohasini o’z ichiga oluvchi to’plamnimunosabatning kesishish sohasi deb ataladi.

(x,y)$\in$ R deb yozish o’rniga ko’pincha xRy deb yoziladi va x,y bilan R munosabat bog’langan deb aytiladi. Agar RcX2 bo’lsa u holda R munosabat X to’plamda berilgan deb ataladi

**13-Misol** Diaganali $\Delta$ ={(a,b)$\in$ $X$ 2|a=b} X to’plam elementlari orasida tenglik munosabatini beruvchi X2 ning qism to’plamidan iborat, ya’ni

$\Delta$= {(a, b) $\in$ X 2|a=b2cX2} Xaqiqatdan ham , a$\Delta$b bunda (a,b)$\in$ $\Delta$ anglatadi yani a=b.

**14-Misol** X- tekislikdagi to’g’ri chiziqlar to’plami bo’lsin. Agar b to’g’ri chiziq a to’g’ri chiziqqa parallel bo’lsa ikkita a$\in$ X va b$\in$ X to’g’ri chiziqlarni R munosabatda bo’ladi deb hisoblaymiz va aRb deb yozamiz. Geometriya kursidan malumki bunda to’g’ri chiziqlar orasidagi paralellik munosabati quyidagi hossaga ega:

aRb (reorleksivlik);

aRb⇒bRa(simmitriklik);

(aRb)Λ(bRc)⇒aRc (tranzitivlik).

Uchta sanab o’tilgan xossaga ega bo’lgan, ya’ni refliksiv, simmetrik va tranzitiv bo’lgan har qanday R munosabatni ekvevalntlik munosabati deb atash qabul qilingan.

Ekevalintlik munosabati maxsus simvol bilan bilgilanadi, ya’ni munosabatni belgilovchi R harfi o’rniga, u holda ~ simvoli quyiladi. Demak ekvivalentlik munosabati holda Rb o’rniga a~b deb yozamiz va bunda a ekvivalent b deb aytamiz.

**15-Misol.** M – birorta to’plam X=P(M) esa uning barcha qism to’plamlar majmuasi bo’lsin. X=P(M) to’plamning ikkita ixtiyoriy a va b elementlari uchun , ya’ni M to’plamning ikkita ixtiyoriy a va b qism to’plamlari uchun quyidagi uchta imkoniyatdan hamma vaqt bittasi bajariladi: a yotadi b da; b yotadi a da; a qism to'plam bo'lmaydi b ga va b qism to'plam bo'lmaydi a ga. X2 ga R munosabat sifatida X ning qism to'plamlari uchun ichiga olish munosabatini qaraymiz, ya'ni ta'rifga muvofiq faraz qilamiz $aRb:=(a\subset b)$

Bu munosabat, ayonki quyidagi xossalarga ega: aRa(refliksiv);

$(aRb)\wedge(bRc)\Rightarrow aRc$( tranzitiv);

$(aRb)\wedge(bRa)\Rightarrow a\Delta b$, ya'ni $a=b$ (antisimmetrik).

Birorta X to'plam elementlarining juftliklari orasidagi ko'rsatilgan ikkita xossaga ega bo'lgan munosabatni, X to'plamdagi qisman tariflangan munosabat deb atash qabul qilingan . Chunki $aRb\wedge bRa\Rightarrow aRa$ refliksivlik hamma vaqt bajariladi. Qisman ta'riflanadiga to'plam uchun aRb o'rniga ko'pincha $a \leq b$ deb yoziladi va bunga b keyin keladi a dan deb aytiladi. Agar qisman ta'riflangan munosabatni aniqlovchi ta'kidlangan ikkita xossadan boshqa ushbu shart bajarilsa $\forall a\forall b((aRb)\vee(bRa))$, ya'ni X to'plamning ixtiyoriy ikkita elementi taqqoslansa, u holda R munosabatni tartib munosabati deb, X to'plamni esa unda aniqlangan tartib munosabati bilan birga chiziqli tartiblangan deb ataladi

Bu iboraning paydo bo'lishiga R son o'qi yaqqol ravishda bog'langan , ya'ni ixtiyoriy haqiqiy sonlar juftliklari orasida $a\leq b$ munosabat ta'sir qiladi. b. Funksiya va funksiya grafigi. Agar $(xRy1)\wedge(xRy2)\Rightarrow y1qy2$ Shart bajarilsa, u holda R munosabatni funksional munosabat deyiladi. Funksional munosabatni funksiya deb ataladi. Xususan agar X va Y ikkita turli bo'lishi shart emas bo'lgan to'plamlar bo'lsa, u holda X to'plamlarga aniqlangan, X dan olingan x va Y dan olingan y element orasidagi $R\subset XxY$ munosabat funksional munosabat bo'ladi, agarda ixtiyoriy $x\in X$ element uchun x bilan qaralayotgan munosabatda bo'lgan ya'ni shundayki uning uchun xRy bo'lgan $y\in Y$ element mavjud va shu bilan birga yagona bo'lsa. Shunday $R\subset XxY$ funksional munosabat X dan Y ichiga aks etiruvchi akslantirishdan yoki C dan Y ichiga mos qo'yuvchi funksiyadan iborat.Funksiyani biz ko'pincha $f$ simvoli bilan bilgilaymiz. Agar $f$ – funksiya bo'lsa, u holda y=$f$(x)ni $f$ funksiyaning x elementdagi qiymati deb atab yoki $f$ akslantirishdagi x element obrozi deb x$f$y o'rniga biz avvalgidek y=$f$(x) yoki $x \xrightarrow{f} y$ deb yozamiz. Funksiya tushunchasining dastlabki ta'rifida aytilgan $f$≪qonun≫ bo'yicha x∈X elementga ≪moskeluvchi≫ y∈Y elementni mos qo'yish bu shundan iborat har qaysi x ∈X uchun shunday yagona y∈Y element ko'rsatiladiki bunda x$f$y , ya'ni (x,y)∈$f$⊂XxY bo'lishini ko'ramiz. Dastlabki ta'rrif ma'nosida tushunilgan $f$:X⟶Y funksiya grafigi deb elementlari (x,$f$(x)) ko'rinishga ega bo'lgan XxY to'g'ri ko'paytmaning G qism to'plamini ataymiz. Demak

$$G:\{(x,y)\in XxY|y=f(x)\}$$

Funksiya tushunchasining yangi ta'rifida qachonki biz uni $f$⊂XxY qism to'plam kabi bersak albatta endi funksiya bilan funksiya grafigi orasidagi farq yo'q.farmal nazariy – to'plamli funksiya ta'rifining moxiyati funksiya va uning grafigini aynan bir narsa deb qarashga keltiruvchiprisipial (muxum) imkoniyatni ko'rsatdik. Biroq bundan buyon funksiyani faqat shunday formada berilishi bilan chegaralanish neyatida emasmiz.Funksional munosabatni ba'zan analitik formada (usulda), ba'za qiymatlar jadvalida, ba'zan berilgan x∈X bo'yicha mos y∈Y elementni topishga imkon beruvchi jarayonni (algaritimni) so'z bilan tavsiflab berish qulaydir. Har qaysi shunday usulda funksiyani berishda uni grafik yordamida berish haqidagi masala ma'noga ega bo'lib shunday ifodalanadi: funksiya grafigini yasang. Yaxshi grafik tasverlar bilan sonli funksiyalarni berish shu bilan foydaliki bunda funksional bog'lanishningasosiy sifatli xususiyatlarini yaqqolqiladi.shunday xollarda qachonki hisoblash yuqori aniqlik talab qilmasa grafiklardan (nomograshmadan) hisoblashlar uchun ham foydalanish mumkin. Aniq hisoblashlar uchun funksiya berishning jadval usulidan ko'pincha esa hisoblash mashinalarida amalga oshdigan algaritmik usuldan foydalaniladi.

Mashiqlar.

R1va R2 munosabatlarning R2·R1 kampazitsiyasi quyidagi tarizda aniqlanadi:

R2·R1:={(x,y)|∃y(xR1y)⋀(yR2z)} xususan, agar R1⊂XxY va R2⊂TxZ bo'lsa, u holda Rq R2·R1⊂XxZ bo'ladi shu bilan birga xRz:= ∃y((y∈y)⋀(xR1y)⋀(yR2z))

$\Delta_X - X^2$ to'plam dioganali $\Delta_Y$ esa – Y2 to'plam dioganali bo'lsin. Agar R1⊂XxY va R2⊂TxZ munosabatlar shundayki bunda (R2·R1= $\Delta_X$ )⋀(R1·R2=$\Delta_1 Y$) bo'lsa ularning ikkisi ham funksional munosabatlar bo'ladi va X,Y to'plamlarning o'zaro teskari akslantirishlarni beradi.

$R \subset X^2$ bo'lsin.R munosabatning tranzitivlik sharti bunda R·R⊂R bo'lishiga teng kuchli bo'ladi.

$Agar$ (yR'x)⟺(xRy) bo'lsa, R'⊂YxX munosabatni R⊂XxY munosabatning traspanerlangani deb ataladi.

R⊂X2 antismmetrikligi bunda R∩$R'$ ⊂$\Delta_X$ bo'lishiga teng kuchli bo'lishini ko'rsating.

Agar va faqat agar R∩$R'$+ X2 bo'lsa X to'plamning ixtiyoriy ikkita elementi R⊂X2 munosabat bilan (birorta tartibda) bog'langan bo'lishini tekshiring.

Yechilishi: a) (x,y1)∈R2 va (x,y2)∈R1 ekanligini e'tiborga olib (y2,y1)∈R1 R2=$\Delta_Y$ ⇒y2=y1 bo'lishini hosil qilamiz. Demak R1⊂XxY munosabat funksional munosabat bo'ladi. Endi (y,x1)∈R2 va (y,x2)∈R2 bo'lsin. Unda (x1,y)∈R1 va (x2,y)∈R1 bo'ladi. Shunday qilib (x2,y)∈R1 va (y,x1)∈R2 dan (x2,y)∈R2 R1$^{=\Delta_X \Rightarrow}$ x2=x1. Demak R2 munosabat ham funksional munosabat ekan. R2·R1=$\Delta_X$ va R1·R2=$\Delta_Y$ bo'lganidan R1:X⟶Y va R2:Y⟶X aks ettirishlar o'zaro teskari bo'ladi.

b) Agar R·R⊂R bo'lsa, u holda (x,z)∈ R·R⇒(x,z)∈R bo'ladi. Ammo (x,z) ∈R ·R bo'ladi shunda qachonki shunday y mavjudki (x,y)∈R va (y,z)∈R bo'ladi. Shunday qilib (x,y)∈R va (y,z)∈R dan (x,z)∈R bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni xRy va yRz⇒xRz

R munosabat tranzitivdir. Endi R munosabat tranzitiv bo'lsin, ya'ni xRy va yRz⇒xRz bo'lishi kelib chiqadi, yani (x, y)∈R va (y,z)∈R⇒(x,y)∈R (x,y)∈RR⇒(x,z)∈R

Demak RR⊂R ekan.

c) R – antisimmetrik munosabat, ya'ni xRy va yRx⇒xqy bo'lsin. Unda xRy va yRx⇒xqy (x,y)∈R∧(x,y)∈R'⇒(x,y)∈$\Delta_X$ (x,y)∈R∩R'⇒(x,y)∈$\Delta_X$, ya'ni R∩R'⊂$\Delta_X$ bo'ladi. Aksincha R∩R'⊂$\Delta_X$ **agar** $\mathbf{R} \cap \mathbf{R}' \subset \Delta_X$ bo'lsa, u holda (x,y)∈R∩R'⇒(x,y)∈$\Delta_X$ ((x,y)∈R)∧((x,y)∈R')⇒xqy (xRy)∧(yRx)⇒xqy, ya'ni R munosabat antisimmetrik munosabat bo'ladi.

d) R∩R'qX2⇔(x,y)∈ R∩R'qX2⇔(x,y)∈R∨(x,y)∈R'⇔

(x,y)∈R∨(y,x)∈R⇔xRy∨yRx

2. $f$:X⟶Y –akslantirish bo'lsin y∈Y elementining $f^{-1}$(y)⊂X asl obrozi y ustidagi qatlam deb ataladi.

Ushbu aks ettirishlar uchun qarlamlari ko'rsatilsin pr1:X1xX2→X1, pr2:X1xX2→X2,

Agar $f$(x1)q $f$(x2) bo'lsa, ya'ni agar x1 va x2 elementlar bitta qatlamda yotsa, u holda x1∈X element x2∈X element bilan R⊂X2 munosabat bog'langan deb hisoblaymiz va x1Rx2 deb yozamiz. Bundan R ekvivalentlik munosabatdan iborat bo'lishini tekshiring.

$f$:X⟶Y aks ettirishning qatlamlari bunda kesishmaydigan bo'lishini, qatlamlarning birlashmasini esa butun X to'plam bo'lishini ko'rsating.

To'plam elementlari orasidagi ixtiyoriy ekvivalentlik munosabati bu to'plamni ekvivalent elementlarning kesishmaydigan sinflari birlashmasi ko'rinishda taverlashga imkon berishini tekshiring.

Yechilishi: a) p$r_1^{-1}$(x1)={x1}xX2 x1∈ X1

p$r_2^{-1}$(x2)={x2}xX1 x2∈ X2

b) Agar x1∈X va x2∈X elementlar uchun x1R x2 bo'lsa, ya'ni $f$(x1)= $f$(x2) bo'lsa, u holda $f$(x2)=$f$(x1) bo'ldi, ya'ni x2Rx1 bo'ladi. Demak bu munosabat simmetrkdir. $f$:X⟶Y aks etttirishda ∀x∈X $f$(x)= $f$(x) bo'lgani uchun xRx bo'ladi, ya 'ni bu munosabat refleksiv $\forall$ x1, x2, x3$\in$X elementlar uchun x1Rx2 x2Rx3 bo'lsa, ya'ni $f$(x1)=$f$(x2) va $f$(x2)= $f$(x3) bo'lsa, u holda $f$(x1)=$f$(x3) bo'ladi, ya'ni x1Rx2demak R tranzitiv munosabat. Shunday qilib R munosabat ekvivalentlik munosabatidir.

c) $\forall$y1,y2$\in$Y va y1$\neq$y2 elementlar uchun $f^{(-1)}$( y1)$\cap f^{-1}$(y2)q$\emptyset$ bo'ladi. Haqiqatdan ham aksini faraz qilaylik, ya'ni $f^{(-1)}$( y1)$\cap f^{-1}$(y2) $\neq\emptyset$ bo'lsin. Unda shunday x$\in$X element mavjudki x$\in f^{(-1)}$( y1)$\cap f^{-1}$(y2)$\Rightarrow$$x \in f^{(-1)}$( y1)$\wedge$x$\in f^{-1}$(y2)$\Rightarrow$ $f$(x)q y1$\wedge f$(x)q y2$\Rightarrow$y1 qy2. Hosil qilingan ziddiyat y1 qy2 da$f^{(-1)}$( y1)$\cap f^{-1}$(y2)=$\emptyset$ bo'lishini isbotlaydi. $\forall$y$\in$Y uchun $f^{(-1)}$( y1)$\subset$X bo'lganidan $\bigcup_{y\in Y} f^{-1}(y1) \subset X$ bo'ladi $\forall$x$\in$X uchun $f$(x)$\in$Y bo'lganidan $f$(x)=y0 deyilsa, u holda x$\in f^{(-1)}$( y0)$\subset \bigcup_{y\in Y} f^{-1}(y)$ . demak X$\subset \bigcup_{y\in Y} f^{-1}(y)$ bo'ldi. Shunday qilib $\bigcup_{y\in Y} f^{-1}(y) \subset X$ va $X \subset \bigcup_{y\in Y} f^{-1}(y)$ munosabatlardan bo'lishini hosil qilamiz.

d) R – X to'plamda ekvivalentlik munosabati bo'lsin. x$\in$X elementi uchun Cx orqaliy bo'shmas {x'$\in$X:x'Rx} to'plamni belgilaymiz va uni x elementning ekvivalentlik sinfi deb ataymiz. x1,x2$\in$ Cx bo'lsa, u holda x1Rx2 bo'ladi. Haqiqatdan ham x1,x2$\in$ Cx$\Rightarrow$ x1Rx va x2Rx$\Rightarrow$ x1Rx va xRx2$\Rightarrow$x1Rx2

Agar Cx$\cap$Cy$\neq\emptyset$ bo'lsa, u holda Cx=Cy haqiqatdan ham Cx$\cap$Cy$\neq\emptyset$ ekanligidan shunday x' element mavjudki bunda x'$\in$ Cx$\cap$Cy$\Rightarrow$x'$\in$ Cx va x'$\in$Cy$\Rightarrow$x'Rx va x'Ry

Agar z$\in$Cx$\Rightarrow$zRx$\Rightarrow$zRx va x'Rx$\Rightarrow$zRx va xRx'$\Rightarrow$zRx'$\Rightarrow$zRx' va x'Ry$\Rightarrow$zRy$\Rightarrow$z$\in$Cy ya'ni Cx$\subset$Cy Agar z$\in$ Cx$\Rightarrow$zRy$\Rightarrow$zRy va x'Ry$\Rightarrow$zRy va yRx'$\Rightarrow$zRx'$\Rightarrow$zRx' va x'Rx$\Rightarrow$zRx$\Rightarrow$z$\in$Cx, ya'ni Cy$\subset$Cx Cx$\subset$Cy va Cy$\subset$Cx $\Rightarrow$ Cx=Cy Shunday qilib X to'plam yo juft juft bo'lib kesishmaydigan yaki ustma-ust tushuvchi bo'shmas ekvivalent sinflarga bo'linadi.

$\forall x \in X \Rightarrow x \in Cx$ chunki $xRx$ $x \in Cx \Rightarrow x \in \bigcup_{x \in X} C_x$, ya'ni $X \subset \bigcup_{x \in X} C_x$

$Cx \subset X \Rightarrow \bigcup_{x \in X} C_x \subset X \bigcup_{x \in X} C_x \subset X$ va $X \subset \bigcup_{x \in X} C_x \Rightarrow X = \bigcup_{x \in X} C_x$ ▶

# XULOSA

Bitiruv malakaviy ish ilmiy xarakterda bo’lib, u talabalarga matematik simvolikalarni, to’plamlar va ular ustida amallar, bir qiymatli akslantirishlar, funktsiya kabi tushunchalari o’rgatadi va ular haqida tasavvurni kengaytiradi. Bitiruv malakaviy ish kirish, ikkita bob, to’rtta paragraf, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro’yxatidan iborat.

Bitiruv malakaviy ishning kirish qismida ishning dolzarbligi, maqsadi, muammosi, predmeti, ob’ekti va sturukturasi kabi talablarga to’xtalgan.

Birinchi bob ikkita paragrafdan iborat bo’lib, unda mantiqiy simvolika, to’plam va to’plamlar ustida amallarga to’xtalgan. Ikkinchi bob ham ikkita paragrafdan iborat bo’lib, unda akslantirishlarning sodda klassifikatsiyasi va funktsiya tushunchalari o’rganilgan.

Mazkur bitiruv malakaviy ish to’plangan materiallar yordamida matematika yo’nalishi talabalari matematik to’garaklarda foydalanishlari mumkin.

## Foydalanilgan adabiyotlar


1. **Каримов И.А. Миллий истиқлол ғояси: асосий тушунчалар ва тамойиллар. Т.: 2001.**
2. **Каримов И.А. Ўзбекистон XXИ асга интилмоқда. Т.: “Ўзбекистон”, 1999.**
3. **Каримов И.А. Юксак маънавият йенгилмас куч. Т.: “Маънавият”, 2008.**
4. Зорич В.А. Математический анализ.част 1. Москва, 2002, с. 658
5. Фихтенголц Г.М. Курс дифференциалного и интегралного исчисления. Том 1, М. “Наука” с. 600
6. Валуце И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. М. “Наука”, 1989г., с.575
7. Ҳикматов А.Ғ., Турдиев Т.Т. Математик анализ. Т. “Ўқитувчи”, 1990й.б.255
8. Азларов Т.А., Мансуров Ҳ. Математик анализ. Т. “Ўқитувчи”, 2002й.б.578
9. Клейн Ф. Елементарная математика с точки зрения вўсшей. Част1. М. “Наука” с. 402
10. **www.ziyonet.uz**
11. **www.mathpropress.com**
12. **www.problems.ru**