O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika - matematika fakulteti

“Matematika” kafedrasi

5130100 - “Matematika” ta’lim yoʻnalishi boʻyicha bakalavr darajasini olish uchun

Mamarajabov Ravshan Isomiddin oʻgʻlining

“Uchinchi va to’rtinchi darajali tenglamalarni yechishning boshqa usullari”

mavzusida

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Rahbar ________ fiz-mat.f.n., dots. G. Gʻaymnazarov

BMI “Matematika” kafedrasining 2017 yil __ iyun №__ sonli yigʻilishida koʻrib chiqildi va DAKda himoyaga tavsiya etildi.

Kafedra mudiri ________ fiz-mat.f.n., dots. H. Norjigitov

Fizika matematika fakulteti dekani tomonidan himoya qilishga ruxsat berildi.

Fakultet dekani ________ p.f.n. dots. Sh. Ashirov

Guliston-2017

MUNDARIJA

Kirish

Mavzuning dolzarbligi. VII-VIII asrlarda matematikaning taraqqiyotida arablar muhim oʻrin tutadilar. Ular greklarning geometriyasi bilan hindlarning arifmetika va algebrasini birlashtirib rivojlantirdilar. U davrda keng hududni ishgʻol qilgan arab davlatigina emas, balki Oʻrta Osiyoda ham xalqaro ilmiy til sifatida arab tili ishlatildi. Oʻrta Osiyo IX-XV asrlarda yirik ilmiy markazlardan biri boʻlgan edi. Matematika va astranomiya sohasida katta-katta ishlar qilindi. Xorazmiy, Beruniy, Ulugʻbek kabi oʻzbek olimlarning nomlari alohida diqqatga sazovardir. “Aljabr” soʻzi esa birinchi boʻlib Xorazmiyning asarlaridan birida uchraydi (“algebra” termini ana shu “aljabr” soʻzidan olingan). U oʻzining bosh asarida asosan kvadrat tenglamalarni yechishga ahamiyat berib, uch tipdagi toʻliq kvadrat tenglamalarni va ularni yechish qoidalarini tekshirdi. Xorazmiy davridan boshlab, algebrani matematikaning mustaqil tarmogʻi deb qarash mumkin. Unga qadar algebraning ayrim elementlarigina vujudga keltirilgan boʻlib, ular arifmetika va geometriya masalalari sifatida uchrar edi.

XII asrda atoqli astronom va matematik Umar Xayyomning asarida uchinchi darajali tenglamalar chuqur va sistematik ravishda tekshirilgan.

Oʻrta asrning sharq olimlari grek va hindlar matematikasini haqiqiy shaklda qaytadan ishlab chiqib Yevropaga tarqatdilar.

Sharq matematikasi XII asrda Italiyaga koʻchdi. XIII asrda algebra muommolari bilan shugʻullanuvchi mashhur italiyan matematigi Leonardo Pizanskiy boʻldi. Uning “Hisoblash san’ati” nomli asarida arifmetik masalalar, birinchi va ikkinchi darajali tenglamalar, kvadrat va kub radikallar va ularga oid amallar bayon etildi, “Gul” nomli asarida esa uchinchi darajali :

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

tenglama ko‘rilgan. Bu tenglama ildizlarini L. Pizanskiy taqribiy hisoblagan. Sharq matematiklari hamma amallarni so‘zlar bilan bayon etib kelgan bo‘lsalar, Italiyada qisqacha matematik savollar ishlatila boshlagan. Masalan, plyus va minus so‘zlari p va m harflari bilan belgilangan. XV asrda Italiya matematiklarini asarlarida + va – ishoralar ham uchraydi.

Bu ishoralarning savdo ishlaridagi serobchilik va kamchiliklarni belgilash uchun ishlatilganligi haqida ma’lumotlar bor. XVI asrning boshida Italiya olimi Ferro

$$x^3 + px = q \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi to‘liqmas kubik tenglamani yechish usulini topdi. Lekin bu usulni Ferro hech kimga bildirmaslikka harakat qildi, chunki u, bu usuldan o‘sha davrda Italiya uchun xos bo‘lgan ochiq ilmiy munozaralarda ishtirok etishda foydalanish maqsadida sir saqlab kelgan. Ferroning vafotidan keyin, uning bu sirini biluvchi shogirdi Fior Floridus o‘sha davrning yirik matematigi Hikolo Tartalya bilan ilmiy munozaralarda uchrashib, Tartalya taqdim etgan masalalarni yecholmay undan yengildi.

Italiyaning mashhur matematigi Kardano o‘zining 1545-yilda nashr etilgan “Buyuk san’at yoki algebraik narsalar” nomli asarida asosan uchinchi darajali tenglamalarga bag‘ishlab, bu asarda u (1) ko‘rinishidagi tenglamani yechish usulini ham to‘la bayon etgan edi. Garchi u o‘z asarida bunday tenglamani yechish usulini unga Tartalya aytganini izohlab o‘tsada, o‘zi tomonidan ham u usulga anchagina muhim qo‘shimchalar kiritdi.

Kardanoning shogirdi Luidji Ferrari

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

ko‘rinishdagi to‘rtinchi darajali tenglamani ikkinchi va uchinchi darajali tenglamalarga keltirish bilan yechish usulini berdi.

XVIII asrda Peterburg fanlar akademiyasining a’zosi atoqli matematik Leonard Eyler va XIX asrning birinchi yarmida yashagan buyuk rus geometrigi N.I. Lobochevskiy yana ikkita metodni ishlab chiqdilar.

To‘rtinchi darajali tenglamalarni yechish munosabati bilan paydo bo‘lgan kompleks sonlar haqidagi eng boshlang‘ich tushunchalar Kardanoning asarlarida uchraydi. Lekin kompleks sonlar nazariyasini yaratish yo‘lida Italiyan matematigi Bombelli birinchi qadam qo‘ygan edi.

Kardano va Bombelli koeffisiyentlarni harflar bilan belgilash orqali tenglamalarni umumiy shaklda tekshirmadilar. Bunday belgilashni, birinchi marta XVI asrda yashagan fransuz matematigi F.Vieta kiritdi, u tenglama koeffitsiyentlari va ildizlari orasidagi bog‘lanishni topdi. XVII asrda fransuz matematigi Jirar algebraik tenglamalarning umumiy, haqiqiy va kompleks ildizlari bog‘liqligini va ildizlarining soni tenglamaning darajasiga teng ekanligini aytdi, lekin u davrdagi matematikaning taraqqiyoti bosqichi bu jumlani isbotlashga imkon bermadi.

Jirar aytib o‘tgan jumlani isbotlash uchun avval algebraning asosiy teoremasi nomi bilan yaratilgan jumlani, ya’ni har bir algebraik tenglamaning ildizi borligini isbotlash lozim edi. Jirardan 100 yil keyin, 1746-yilda fransuz matematigi Dalamber bu jumlani isbotlashga birinchi bo‘lib harakat qildi. Ammo uning mulohazasi umuman noto‘g‘ri bo‘lib chiqdi, chunki bu mulohaza musbat sonlarning kamayuvchi ketma-ketligi nolga intiladi degan fikrga asoslangan edi. Ammo, ma’lumki, bunday ketma-ketliklar har vaqt nolga intilavermaydi.

Bu teoremani birinchi bo‘lib, 1799-yilda nemis matematigi Karl Fridrix Gauss isbotladi. U avval haqiqiy koeffitsiyentli tenglamalar uchun teoremaning isbotini geometrik mulohazalar yordami bilan Umar Xayyom usulida berdi. So‘ngra 50-yildan keyin u, asosan algebraik metodni qo‘llab, teoremani kompleks koeffitsiyentli tenglamalarga ham tadbiq etdi.

Algebraik tenglamaning ildizlarini topish, ya’ni bunday tenglamalarni yechish masalasi ko‘p asrlar davomida algebraning eng muhim masalalaridan biri bo‘lib keldi.

Tadqiqot mavzusi. Tenglamalarni yechish fan va texnikada muhim ahamiyatga egaligi hammaga ma’lum. Bu masala xalq xo‘jaligining har bir tarmog‘ida uchraydi. Hisoblashlar qanchalik aniq bo‘lsa qaralayotgan masalaning yechimi shunchalik muhim va e’tiborga sazovar bo‘ladi. Hayotdagi ko‘pgina masalalar jumladan texnikadagi masalalar algebraik tenglamalarni yechishga olib keladi. Biz bu yerda tenglamalarni yechishning har xil usullarini ko‘rsatamiz, chunki ko‘rib o‘tilayotgan ob’ektga bog‘liq ravishda tenglamani yechish usuli topiladi. Shuning uchun BMI mavzuni “Uchinchi va to‘rtinchi darajali tenglamalarni yechishning boshqa usullari” deb nomladik.

Tadqiqot maqsadi. Darajasi beshdan yuqori bo‘lmagan algebraik tenglamalarni yechishni har xil usullarini ko‘rib o‘tish asosiy maqsad. Ko‘rib o‘tilayotgan usul mohiyati tenglamani yechish uchun tanlangan almashtirishga shakl o‘zgartirishlar bilan belgilanadi, ko‘rsatiladi.

Tadqiqot muommosi. Algebraik tenglamalarning yechishning har xil usullarini yaratish bu ilmiy tekshirishlarini, tadbiqlarini takomillashtirish, hisoblashlarni aniqlashtirishlarini taqazo etadi. Bu yerda ana shu muommolar ko‘riladi.

Tadqiqot ob’ekti. Matematika juda ko‘p tarmoqli fanlardan biri. Bu yerda matematikaning “algebra” tarmog‘ida ish olib borildi. Algebra fanining o‘zi ham bir necha yo‘nalishlarga ega.

Biz BMI da “algebra” fanining darajali tenglamalarini yechish yo‘nalishida tadqiqot ishi olib bordik.

Demak, ob’ekt “tenglamalarni yechish” dan iborat.

Tadqiqot predmeti. BMI da ko‘rib o‘tilayotgan ma’lumotlarni oliy ta’lim muassasalarida va O‘rta maxsus ta’lim muassasalarida talabalarga o‘rgatish masalasi ko‘riladi. Bunda hozirgi zamon fan yutuqlariga asoslanadi. Bu esa talabalarning fikrlash qobiliyati va bilim sa’viyasini rivojlantiradi.

Tadqiqot farazi (gipotezasi) va himoyaga olib chiqiladigan xulosalar. Bu ishimizda quyidagilar asosiy natijalar hisoblanadi:

1) Uchinchi darajali tenglamani geometrik usulda yechish (Umar Xayyom usuli).

2) Muhammad al-Xorazmiyning kvadrat tenglamani geometrik usul bilan yechishning asl nusxasi, al-Xorazmiyning aynan o‘zi bajargan ishi.

3) To‘rtinchi darajali tenglama va uchinchi darajali tenglamani yechishning yangi usuli, matritsa va determinantlarni tadqiqlash bilan yechish usuli.

4) To‘rtinchi darajali tenglamani ikkita kavadrat tenglamaga keltirib shartlarni topib yechish. Bu usul Ferrari usulidan jiddiy farq qiladi va eng sodda usuldir.

Tadqiqot vazifalari. Algebraik tenglamalarni yechishda almashtirishlar topish va unga mos shakl o‘zgartirishlarni bajarishni taqazo etadi. Bu yerda qaralayotgan tenglamalar uchun maxsus almashtirish, aniqlash va shu bilan birga maxsus shakl o‘zgartirishlar bajarish asosiy masala edi.

Tadqiqot yangiligi. Mazkur ishda uchinchi darajali tenglamalarni yechish uchun Chirengaus almashtirishlaridan foydalanib yangi usul hosil qilindi. Bu usul mavjud bo‘lgan Kardano formulasidan foydalanish usulidan jiddiy farqlanadi. Xuddi shu usulda to‘rtinchi darajali tenglamalarni yechish qaraladi. Bu esa mavjud bo‘lgan Ferrari usulidan katta farq qiladi. Yana bir usul to‘rtinchi darajali tenglamani ikkita kvadrat tenglamaga keltirib yechishdir. Bunda birinchi noma’lumlar qabul qilinib ularga shartlar qo‘yish usuli bilan yechish bayon etilgan.

Fan uchun ahamiyati. Matematika fanida “algebra” bo‘limi asosiy o‘rinni egallaydi. Bu bo‘lim bir necha yo‘nalishlarga ega. Ana shunday yo‘nalishlardan biri “Tenglamalarni yechish nazariya”sidan iborat. Biz bu yo‘nalish bo‘yicha uchinchi va to‘rtinchi darajali tenglamalarni yechishning yangi (boshqacha) usulini bayon etdik. Bu usullar mavjud bo‘lgan darsliklardagi usullardan jiddiy farq qilib ham nazariy va ham amaliy ahamiyatga sazovardir.

Amaliyot uchun ahamiyati. Hayotdagi har bir jarayon tenglamalar bilan ifoda etiladi. Tenglamalar ko‘rinishi har xil bo‘lishi mumkin. Jumladan: chiziqli tenglamalar sistemasi, darajali tenglamalar, differensial tenglamalar va boshqalar.

Biz BMI da bayon qilgan tenglamalar fan va texnikaning masalalarini, ya’ni hayotiy, xalq xo‘jaligidagi masalalarni yechishda asosiy o‘rinni egallaydi. Masalan:

1) Optika masalalarini yechishda to‘rtinchi darajali tenglama hosil bo‘ladi.

2) Harakatdagi jismlar masalasi, issiqlik, to‘lqin tarqalishi masalalari differensial tenglamalar bilan ifoda etiladi. Bunday differensial tenglamalar algebraik darajali tenglamalar yordamida yechiladi.

Bunday masalalarni ko‘p keltirish mumkin. Yuqorida bayon qilinganlar BMI da ko‘rib o‘tilgan tenglamalarning va ularni yechish usullari amaliy va tadqiqot nuqtai nazaridan juda muhim ekanligini ko‘rsatdik.

I BOB. Ikkinchi va uchinchi darajali tenglamalarni yechishning maxsus usullari

§1.1. Kvadrat tenglamani yechishdagi Muhammad al-Xorazmiyning original usuli

Algebra fanining mustaqil fan sifatida rivojlanishida Xorazmiyning roli juda katta. ≪**Algebra**≫ atamasining o‘zi Xorazmiyning ≪**al-jabr va-l-muqobala hisobi haqida qisqacha kitob**≫ nomli asaridagi ≪**al-jabr**≫ so‘zining lotincha yozilishidagi buzilgan shakli. Bu asar bizgacha 1342 yili ko‘chirilgan arabcha nusxada yetib kelgan. U Oksford (Angliya) Universiteti kutubxonasida saqlanadi. Bu asar juda ko‘p Yevropa tillariga tarjima qilingan. Ulardan eng qadimgisi 1145 yili ingliz Robert Chester va 1160 yili italiyalik Gererdo qilgan lotincha tarjimalar hisoblanadi.

1486 yili Iogan Viddman birinchi marta Leyptsig (Germaniya) universitetida algebra kursidan ma’ruza o‘qiydi va algebradan darslik yozadi, Viddman darslikning ko‘p qismini Xorazmiyning yuqorida nomi tilga olingan risolasidan oladi.
Shuni ham eslatib o‘tish kerakki, O‘rta asrlarda yozilgan algebra qo‘llanmalarining ko‘pchiligida Xorazmiyning algebraga doir kitobidagi misol va masalalar uchraydi. Xorazmiyning bu asari rus tiliga ham, o‘zbek tiliga ham tarjima qilingan. Ruscha tarjimasini 1964 yili B.A.Rozenfeld o‘zbekcha tarjimasini 1983 yili Ashraf Ahmedov bajargan. Xorazmiy bu asarni nega yozganligini asarning bosh qismida quyidagicha izohlaydi: ≪ **Men arifmetikaning sodda va murakkab masalalarini o‘z ichiga oluvchi al-jabr va-l-muqobala hisobi haqida qisqacha kitob yozdim, chunki u odamlarga meros taqsimlashda, vasiyatnoma yozishda, boyliklarni bo‘lishda va adliya ishlarida, savdo-sotiqda, turli xil munosabatlarda, kanal qazishda va geometrik hisoblashlarda juda ham zarur**≫. Kitobning yozilishidan maqsad ma’lum bo‘ldi, undagi ≪**al-jabr**≫, ≪**va-l-muqobala**≫ atamalari arabcha bo‘lib, quyidagi ikki amalni anglatadi: ≪**al-jabr**≫-

≪**to‘ldirish**≫- tenglamaning biror qismidagi ayriluvchi hadni uning ikkinchi qismiga qo‘shiluvchi qilib o‘tkazish. Masalan, $3x^2 - 4x + 2 = 2x^2 + 7$ tenglamaga ≪**al-jabr**≫ amalini qo‘llasak, tenglama ushbu ko‘rinishga keladi:

$$3x^2 + 2 = 2x^2 + 4x + 7$$

≪**Al-muqobala**≫-≪**qarama-qarshi qo‘yish**≫- tenglamaning har ikkala qismidagi teng qo‘shiluvchilarni o‘zaro yeyishtirish. Masalan, yuqoridagi oxirgi tenglamaga ≪**al-muqobala**≫ amalini ishlatsak, u quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$x^2 = 4x + 5$$

Xorazmiy bu kitobda ≪**ildiz**≫, ≪**kvadrat**≫, ≪**soda son**≫ kabi atamalarni (albatta, arab tilida, chunki Xorazmiy zamonida fan tili arab tili bo‘lgan) ishlatadi. ≪**Ildiz**≫-noma’lum biz uni x orqali belgilaymiz. ≪**Kvadrat**≫-≪**ildiz**≫ ning kvadrati, ya’ni x^2, ≪**soda son**≫-natural son. Xorazmiy bu munosabatlar orasida quyidagi oltita munosabat borligini aytadi.

1) Kvadratlar ildizlarga teng: $ax^2 = bx$
2) Kvadratlar songa teng: $ax^2 = c$
3) Ildizlar songa teng: $bx = c$
4) Kvadratlar va ildizlar songa teng: $ax^2 + bx = c$
5) Ildizlar kvadratlar va songa teng: $bx = ax^2 + c$
6) Kvadratlar ildizlar va songa teng: $ax^2 = bx + c$

Xorazmiy o‘z kitobining oltida bobida yuqoridagi tenglamalarni yechish usullarini bayon etadi. Masalan, to‘rtinchi bobda $x^2 + 10x = 39$ tenglama qaraladi. Xorazmiyning tenglamasini yechish hozirgi bizning yozuvda quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$x = \sqrt{(\frac{10}{2})^2 + 39} - \frac{10}{2} = \sqrt{25 + 39} - 5 = 8 - 5 = 3;$$

$$x = 3; \;\; x^2 = 9$$

Beshinchi bobda $x^2 + 21 = 10$ tenglama yechiladi:

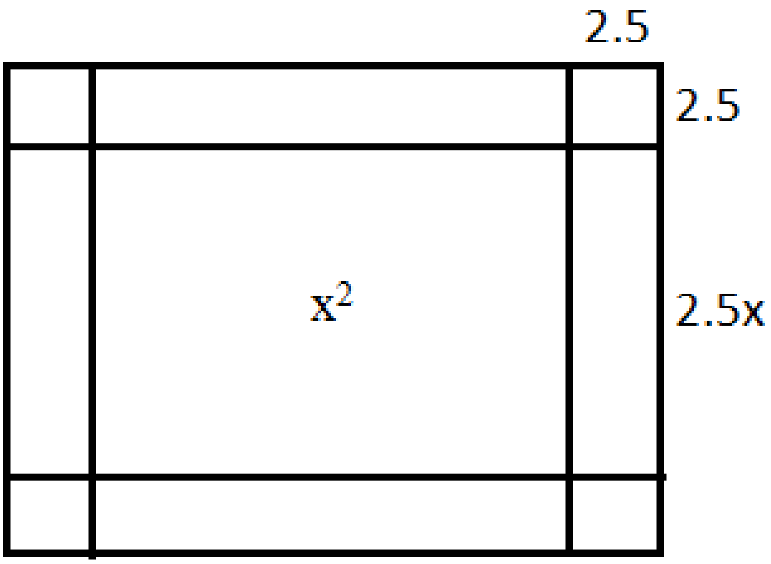
$$x^2 + 21 = 10;$$

$$x = \frac{10}{2} \pm \sqrt{(\frac{10}{2})^2 - 21} = 5 \pm \sqrt{25 - 21} = 5 \mp \sqrt{4} = 5 \mp 2,$$

$$x_1 = 3, \; x_1^2 = 9 \, , \; x_2 = 7 \, , \; x_2^2 = 49$$

Shu bobda Xorazmiy keltirilgan kvadrat tenglama uchun ikkita ildiz topadi. Bu haqda u quyidagicha yozadi: ≪**Agar senga shu bobga tegishli masala uchrab qolsa, uning to‘g‘ri yechimini qo‘shish yordamida topishga harakat qil, bordiyu, to‘g‘ri chiqmasa, ayirishing zarur bo‘ladi**≫.

Xorazmiy o‘zining bergan yechimining to‘g‘riligini geometrik usulda isbotlaydi.U $x^2 + 10x = 39$ tenglama uchun quyidagicha: tomoni x ga teng kvadrat oladi va uning tomonlarida balandligi $\frac{10}{4}$ ga teng to‘rtta to‘rtburchak yasaydi (1-rasm).



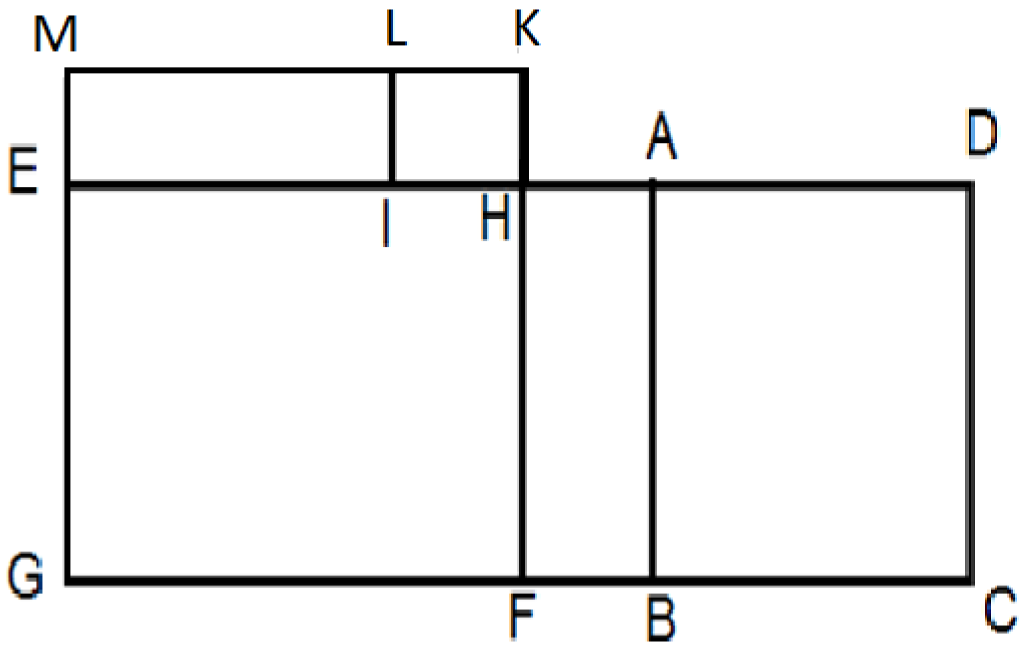
1-rasm

Bu shaklning burchaklariga tomoni $\frac{10}{4}$ ga teng to‘rtta kvadratcha qo‘shiladi. Hosil bo‘lgan shakl kvadrat bo‘lib, uning yuzi $39+4(\frac{10}{4})^{2}=64$ ga teng, uning tomoni $x+2\cdot\frac{10}{4}=8$, ya’ni $x=3$.

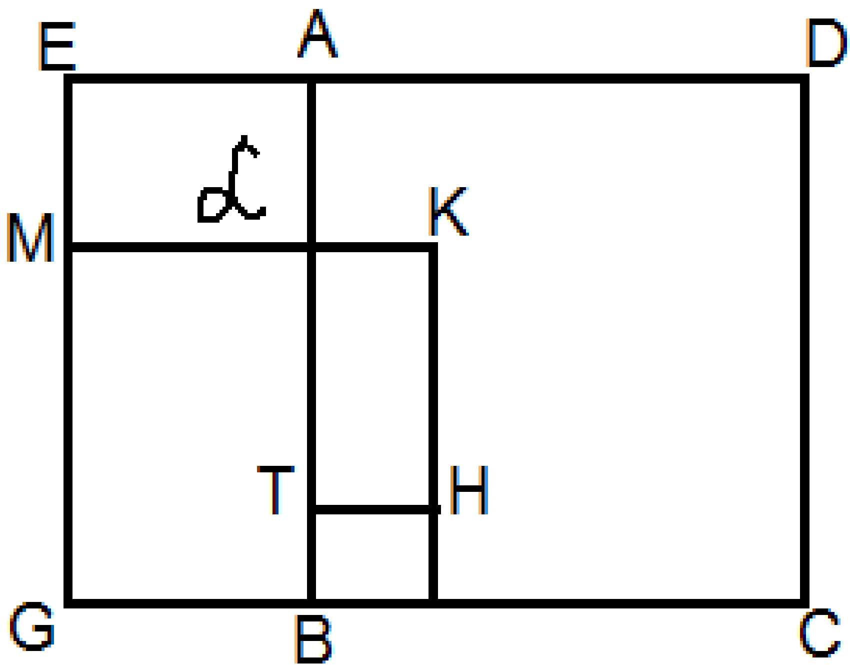
Xorazmiy o‘z kitobining keying boblarida har xil ko‘rinishdagi tenglamalarni echish usullarini ko‘rsatadi.

$x^2+21=10x$ tenglama uchun ikkita ildiz hosil bo‘ladigan hollarning geometrik isbotini Xorazmiy quyidagicha isbotlaydi.

Avval birinchi $x=\frac{p}{2}-\sqrt{(\frac{p}{2})^2-q}$ hol qaraladi. Tomonlari $GC=p$ va $CD=x$ bo‘lgan $GCDE$ -to‘g‘ri to‘rtburchak (2-rasm).



2-rasm



3-rasm

$ABCD = x^2$ kvadrat unga yondosh qilib yasalgan $GBAE = (p - x)x = q$ to‘gri to‘rtburchakdan hosil qilingan. GC ning O‘rtasi F nuqtadan FH perpendikulyar o‘tkazilib, u K nuqtagacha davom ettirilgan: $HK = AH = \frac{p}{2} - x$ $GFKM = (\frac{p}{2})^2$ va $IHKL = (\frac{p}{2} - x)^2$ kvadratlar yasalgan. Yasalishiga ko‘ra $EILM$ va $FBAH$ to‘g‘ri to‘rtburchaklar teng, chunki ularning mos tomonlari o‘zaro teng. Shu sababli $IHKL$ kvadrat $GFKM$ kvadrat $GFHE$ va $EILM$ to‘g‘ri to‘rtburchaklar yig‘indisining ayirmasiga yoki $GFKM$ va $GBAE$ kattaliklarining ayirmasiga teng, ya’ni $(\frac{p}{2} - x)^2 = (\frac{p}{2})^2 - q$ .Bundan $IH = AH = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ izlangan tomon esa $AD = HD - HA$ ya’ni

$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

Ikkinchi $x = \frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ hol uchun geometrik isbot 3-rasmda ko‘rsatilgan, bunda $GC = p$ tomonning O‘rta nuqtasi $FBC = x$ kesmaning ichida yotadi, $AB = BC$. Tomoni $BF = x - \frac{p}{2}$ ga teng. $BFHI$ kvadrat $GFKM = (\frac{p}{2})^2$ kvadrat bilan $GBLM$ va $IHKL$ to‘g‘ri to‘rtburchaklar yig‘indisining ayrilganiga teng. O‘z navbatida $GBAE = q$, unda $BF = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ va $x = CF + FB$,

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

§1.2. Uchinchi darajali tenglamani yechishda Umar Xayyomning geometrik usuli

Biz bu paragrafda vatandoshimiz Umar Xayyomning (1048-1123) Samarqand va Buxorada yashagan davrda algebra sohasida qilgan ishlari haqida to‘xtab o‘tamiz. Arablarning harbiy yurishlari davri bo‘lgan VII-IX asrlarda Italiya, Ispaniya mamalakatlarini ishg‘ol qilgani tarixdan ma'lum. Arablar bu mamlakatlarda o‘z siyosatlarini joriy qilish bilan birga savdo-sotiq, ishlab chiqarishda mahsulotlarni ayriboshlashni ham olib bordilar. Bu esa keyinchalik Italiya mamlakatida va unga qo‘shni bo‘lgan mamlakatlarda arablarning ilmiy ishlari va arab tilida yaratilgan, kashf qilingan ilmiy ishlari arab tilida yoki tarjima holatda tarqalishiga sabab bo‘ldi. Arab tilida yaratilgan, kashf qilingan al-Xorazmiy, Beruniy, Umar Xayyom, G‘iyosiddin Jamshid al-Koshiy (XV asrdagi Ulug‘bek rasadxonasining yetuk matematigi) va boshqalarning ilmiy ishlaridan Yevropadagi matematiklar xabardor bo‘ldilar. Jumladan, Vallis, Viyet, Jordan, Dalamber, Ferro, Tartalya, Kardano, Ferrari, Gauss va boshqalar. Ustoz professor A. A’zamov {1} "Arabcha qo‘lyozmalarni chuqur o‘rgangan. L. Fibonachi (1180-1240), N.Orem (1323-1382) va ayniqsa, L.Pacholli (1445-1514) dastlabki algebraik belgilashlarni joriy qilib yuqori darajali ifoda va ildizlar ustida amallar bajarish qoidalarini yanada takomillashtirishgan", - deb qayd etadi.

Uchinchi darajali tenglamalarni yechishning geometrik nazariyasini yaratgan Umar Xayyomning tekshirishlarini bayon qilishdan avval, algebraik tenglamalar tarixiga bir nazar tashlaylik. Avvalo, Umar Xayyom algebrani geometriya bilan bog‘lashga asos solganini va Dekart tomonidan analitik geometriyani sistemalashtirishga olib kelganini qayd etaylik. Umar Xayyom algebraga doir asarida uchinchi darajali tenglamalarni tasniflash va ularni yechish usullari bilan shu'g‘ullangan. U uchinchi darajali tenglamalarni quyidagi 14 turini keltiradi:

1. $x^3 = qr$
2. $x^3 + px^2 = r$
3. $x^3 + r = px$
4. $x^3 + r = px^2$
5. $x^3 + qx = r$
6. $x^3 = px^2 + r$
7. $x^3 = qx + r$
8. $x^3 = px^2 + qx + r$
9. $x^3 + qx + r = px^2$
10. $x^3 + px^2 + r = qx$
11. $x^3 + px^2 + qx = r$
12. $x^3 + px^2 = qx + r$
13. $x^3 + qx = px^2 + r$
14. $x^3 + r = px^2 + qx$

Xayyom bu turdagi tenglamalarni yechish uchun konus kesimlari, ya'ni ikkinchi tartibli egri chiziqlardan foydalanadi. Masalan, to‘rtinchi turdagi tenglamani yechishda $y^3 = \sqrt[3]{r}(p - x)$ parabola va $xy = \sqrt[3]{r^2}$ teng tomonli giperboladan foydalangan. Mana shu egri chiziqlarning kesishishi, urinishi, kesishmasligiga qarab tenglamani ildizlari soni haqida fikr yuritadi. Yuqoridagi $x^3 + r = px^2$ tenglama yechimga ega yoki ega emasligini bilish uchun y tenglamadagi noma'lum koeffitsent bilan ozod had orasidagi bog‘lanishning quyidagi uch holini qaraydi:

$$1)\ \sqrt[3]{r} = \frac{p}{2}; \qquad 2)\ \sqrt[3]{r} > \frac{p}{2}; \qquad 3)\ \sqrt[3]{r} < \frac{p}{2};$$

Buning uchun $x = p - \sqrt[3]{r}$ da parabola hamda teng tomonli giperbolaning ordinatalarini taqqoslaydi.

Agar $\sqrt[3]{r} = \frac{p}{2}$ bo‘lsa, $y_{gip} = y_{par} = \sqrt[3]{r}$ bo‘ladi va egri chiziqlar bitta nuqtada kesishadi. Demak, tenglama bitta musbat ildizga ega. Misol tariqasida

$x^3 + 125 = 10x^2$ tenglamani qarash mumkin.

2) Agar $\sqrt[3]{r} > \frac{p}{2}$ bo‘lsa, $x = p - \sqrt[3]{r} < \sqrt[3]{r}$ va $y_{gip} = \frac{\sqrt[3]{r}}{p - \sqrt[3]{r}} > y_{par} = \sqrt[3]{r}$

Bunda giperbola va parabola tarmog‘i o‘ng tomonda kesishadi, urinadi yoki kesishmaydi.

Misol: $x^3 + 216 = 10x^2$; $\sqrt[3]{216} > 5$, lekin $x = 6$

3) $\sqrt[3]{r} < \frac{p}{2}$ bo‘lsa $x = p - \sqrt[3]{r} > \sqrt[3]{r}$ va $y_{gip} < y_{par}$. Giperbolani ba'zi nuqtasi parabolaning ichida yotadi va egri chiziqlar ikkita nuqtada kesishadi.

Misol: $x^3 + 64 = 10x^2$; $\sqrt[3]{64} < 5 = \frac{10}{2}$ (1-rasm)

$y^2 = \sqrt[3]{64}(10 - x) = 4(10 - x)$

$xy = \sqrt[3]{64} = 16 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{16}{x}$

$y^2 = 4(10 - x)$

$x = 10 ;\ \ y = 0$

$x = 8 ;\ y^2 = 8 \quad \Longrightarrow \quad y = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$x = 6 ;\ y^2 = 16 \quad \Longrightarrow \quad y = 4$

$x = 4 ;\ y^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad y = 2$

$x = 2 ;\ y^2 = 32 \quad \Longrightarrow \quad y = 4\sqrt{2}$

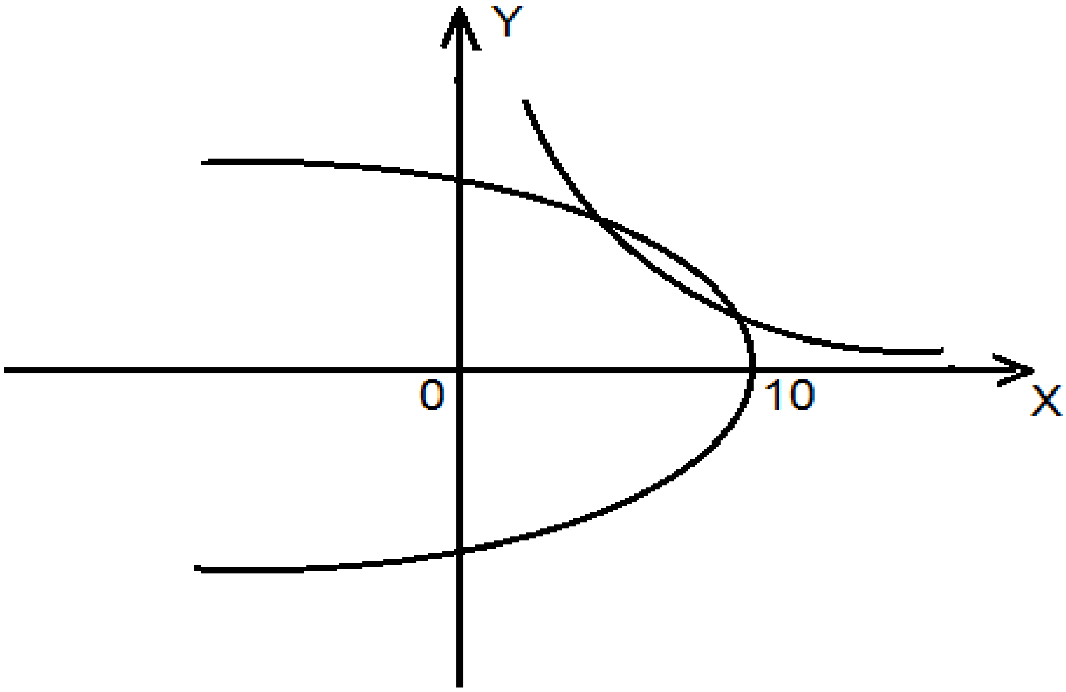
$x = 0 ;\ y^2 = 40 \quad \Longrightarrow \quad y = \sqrt{40} = 2\sqrt{20}$

$y = \frac{16}{x}$

$x = 2 ;\ y = 8 ;$

$x = 4 ;\ y = 4 ;$

$x = 8 ;\ y = 2 ;$



1-rasm

Endi quyidagilarni qayd qilamiz:

1. Eramizning 825 yillari atrofida Muhammad al-Xorazmiy ikkinchi darajali (kvadrat) tenglamani yechishning umumiy usulini (formulasini) yaratdi, bu hozirgacha kvadrat tenglamaning yechish formulasidir. Albatta uning kashfiyoti birdaniga, tasodifan bo‘lgan emas. U o‘zidan oldin yashagan shaxslarning kvadrat tenglamalarning xususiy holdagi yechimlarini o‘rganib chiqdi va o‘zi bir necha turdagi tenglamalarni yechib, nihoyat, bizga shu kunlardagi kvadrat tenglamaning yechish formulasini yaratib berdi.

2. Kvadrat tenglamani yechish formulasi kashf qilingandan so‘ng uchinchi darajali tenglamani yechish masalasi turar edi. Bu sohada Umar Xayyomgacha va Umar Xayyom davridagi matematiklar shug‘ullanganlar. Abu Rayhon Beruniy uchinchi darajali tenglamaning yechimlarini topish bilan shug‘ullangan. Bu masalani yetarlicha, ilmiy asosda Umar Xayyom hal qildi, ya'ni uchinchi darajali tenglamani geometrik usulda yechib, uning uchta ildizi bo‘lishini asosladi. Keyinchalik bu

masala italiyaliklar-Ferro, Fior, Tartalya, Kardano (XVI asrlar) ishlarida koʻrib chiqildi [2]. Albatta, bu yerda Umar Xayyom ishlari uchinchi darajali tenglamaning uchta ildizini aniqlashda oʻz ta'sirini koʻrsatdi. Ustoz professor A. A'zamov <<**…italiyan olimlari arabcha qoʻlyozmalarni zoʻr berib oʻrganishgan…**>> [1] deb qayd etadi.

3. Uchinchi darajali tenglama Umar Xayyom tomonidan yechilgandan soʻng toʻrtinchi darajali tenglamaning xususiy hollarini Gʻiyosiddin al-Koshiy yechib koʻrsatdi. Gʻiyosiddin al-Koshiygacha va uning zamonidagi matematiklar toʻrtinchi darajali tenglama bilan shugʻullangan emaslar. Gʻiyosiddin al-Koshiyning bu ilmiy ishlari keyinchalik Ferrari tomonidan toʻrtinchi darajali tenglamaning 4 ta ildizini aniqlashda muhim ta'sir koʻrsatdi.

4. Bizga birinchi, ikkinchi, uchinchi va toʻrtinchi darajali tenglamalar berilgan boʻlsa, uning ildizlarini koeffitsiyentlari orqali topish formulalari ma'lum. Ularni yuqorida qayd qilib oʻtdik. Endi beshinchi va undan yuqori darajali tenglamalar haqida toʻxtab oʻtaylik.

Yuqorida qayd etilgan tekshirishlar asosida 1629-yilda Jirar tenglamaning darajasi necha boʻlsa, shuncha illdizi bor deb bashorat qildi. Bu esa fanda shu sohada koʻp va har xil tekshirish olib borishga sabab boʻldi. Jumladan, Dalamber 1746-yilda algebraning asosiy teoremasini, ya'ni Jirar bashoratini isbotladi. Lekin uning fikrlashida xato va kamchilik mavjud boʻlib, Dalamber oʻz isbotida <<**kamayuvchi ketma-ketlikning limiti nolga teng boʻladi**>> deb tushungan edi. Shu nuqtai nazardan Dalamber isboti asosli emas deb topildi. Algebraning asosiy teoremasini, ya'ni << **n-darajali tenglamaning n ta ildizi mavjudligi**>> ni (kompleks sohada) 1799-yilda Gauss tomonidan geometriya usulida isbotlandi va ehtimol bunga Umar Xayyomning geometrik usuli ta'sir koʻrsatgandir. Endi Umar Xayyomning uchinchi darajali tenglamani yechishning geometrik nazariyasini bayon etamiz. Vatandoshimiz Umar Xayyom XI-XII asrlarda yashab va ijod qilgan boʻlib, bir necha fanlar bilan shugʻullangan. Jumladan, matematika, geometriya, adabiyot va boshqa fan sohalariga doir qator asarlar yaratgan. Shulardan biri kub tenglamalarning bir qancha xususiy ko‘rinishlarini geometrik nuqtai nazarda tahlil qilib, sodda geometrik tushunchalarga asoslanib, ularning yechimlari mavjudligini hamda topishning geometrik usulini chiziqlar yordamida ko‘rsata olgan.

1-masala. Quyidagi kubik tenglamani yeching:

$$x^3 + \mathrm{ax} = \mathrm{b} \qquad (1.2.1)$$

Yechish. (1.2.1) tenglamani $x^2 + y^2 = \mathrm{qx}$ aylana va $x^2 = \mathrm{py}$ parabolalar yordamida $x^3 + p^2x = p^2q$ shaklga keltiramiz:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = qx \\ x^2 = \mathrm{py} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{y}{q-x} \\ \frac{p}{x} = \frac{x}{y} \end{cases} \Longrightarrow \frac{p^2}{x^2} = \frac{x}{y} \circ \frac{x}{y} = \frac{x}{y} \circ \frac{y}{q-x} = \frac{x}{q-x}$$

Demak, $\frac{p^2}{x^2} = \frac{x}{q-x}$ dan $p^2(q-x) = x^3$,

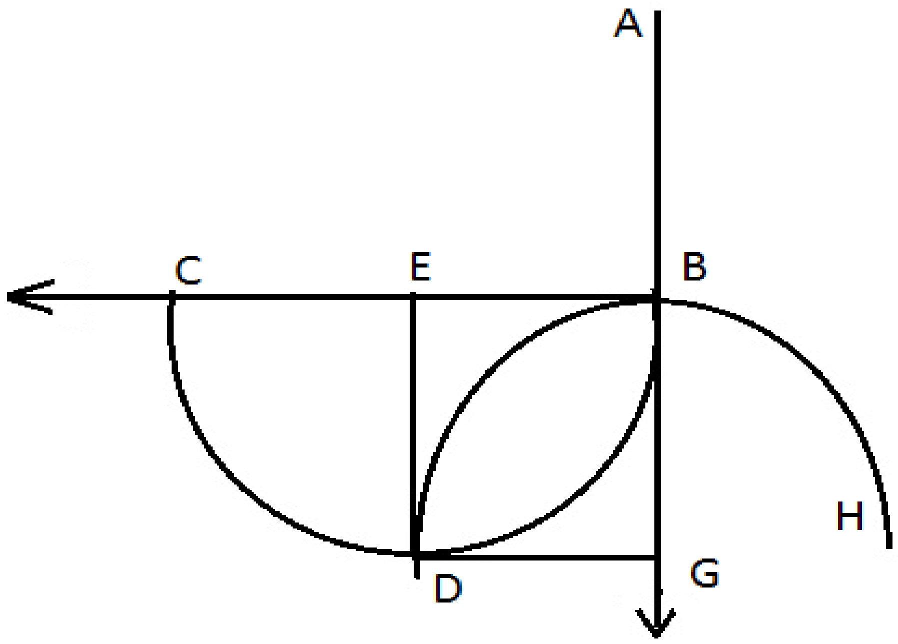
ya’ni $x^3 + p^2x = p^2q$ (1.A) ni hosil qilamiz.

(1.A) tenglamani yechish $\begin{cases} x^2 + y^2 = qx \\ x^2 = \mathrm{py} \end{cases}$ tenglamalar

sistemasini yechishga olib kelinadi. Sistemadagi tenglamaning biri tekislikda aylana, ikkinchisi parabola bo‘lib, ularning grafiklarini sxematik ko‘ramiz.

Umar Xayyom davrida koordinatalar sistemasi 1-rasmdagi gorizontal o‘qning musbat yo‘nalishi chapga, vertikal o‘qning musbat yo‘nalishi pastga deb qaralgan.

Sistemadagi aylana va parabolalar kesishgan nuqtalarining absissalari (1.A) tenglamaning ildizlari ekanligi ko‘rsatilgan. Koordinata boshi e'tiborga olinmagan. Shunday qilib Umar Xayyom (1) ko‘rinishidagi tenglama har doim yagona musbat ildizga ega ekanligini chizma yordamida ko‘rsata olgan.



1-rasm

2-masala.

$$x^3 + \mathrm{ax} = \mathrm{b} \qquad (1.2.2)$$

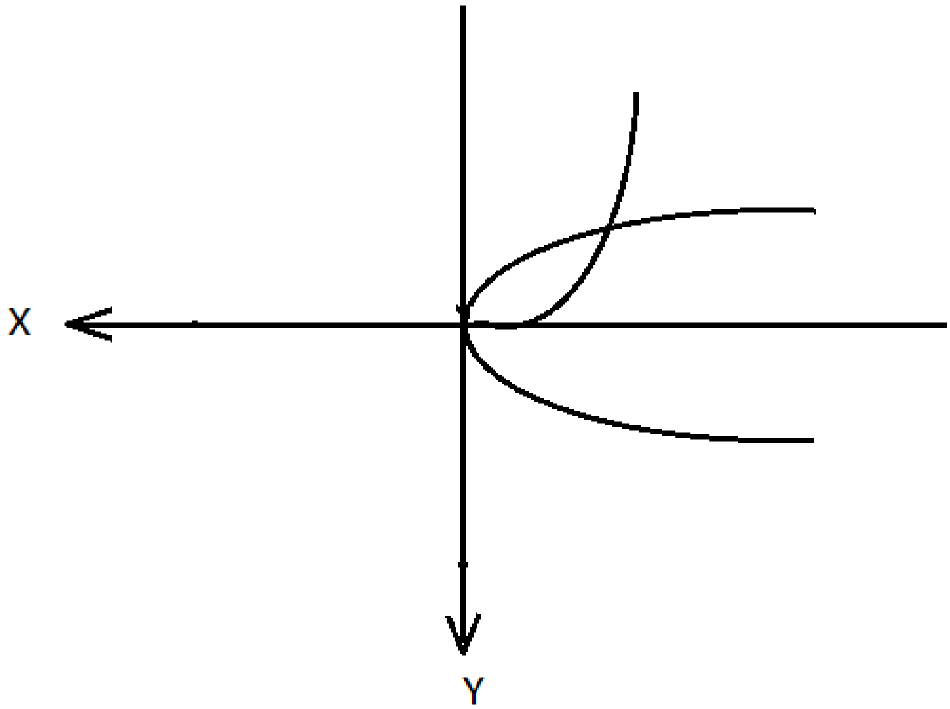
ko‘rinishidagi tenglamaning ildizlarini topish va grafigini yasash.

Yechish. Umar Xayyom (1.2.2) ko‘rinishidagi tenglamani quyidagi parabola va teng tomonli giperbolaning chap tarmog‘i yordamida yechishga erishadi .

$$\begin{cases} x^2 = \sqrt{b}y \\ x^2 - \frac{a}{b}x = y^2 \end{cases} \qquad (1.2.3)$$

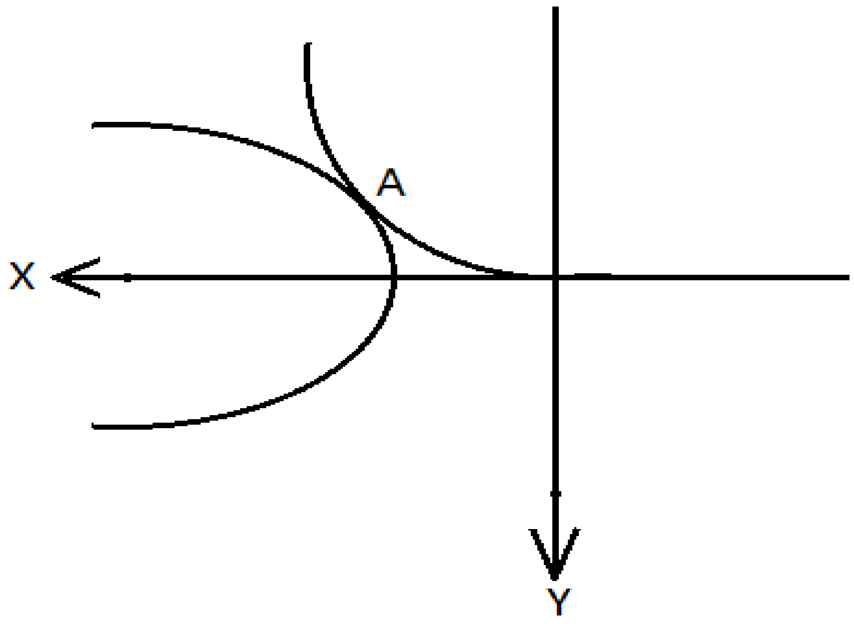
Umar Xayyom (1.2.3) sistemadagi egri chiziqlarni yasashda ko‘p hollar ro‘y berishini aytadi. Jumladan, egri chiziqlar kesishmasligi mumkin. Yana bir hol, giperbola o‘ng tarmog‘i parabolaning uchidan o‘tib, parabolaning yana bitta nuqtasidan o‘tgan holni e’tiborga olmaydi, bu holda ildiz manfiy ekanligidan yechim yo‘q deyiladi.

Ammo 2-rasmdan ko‘rinadiki, (1.2.2) tenglama **bitta manfiy** ildizga**, ikkita mavhum** ildizga ega.

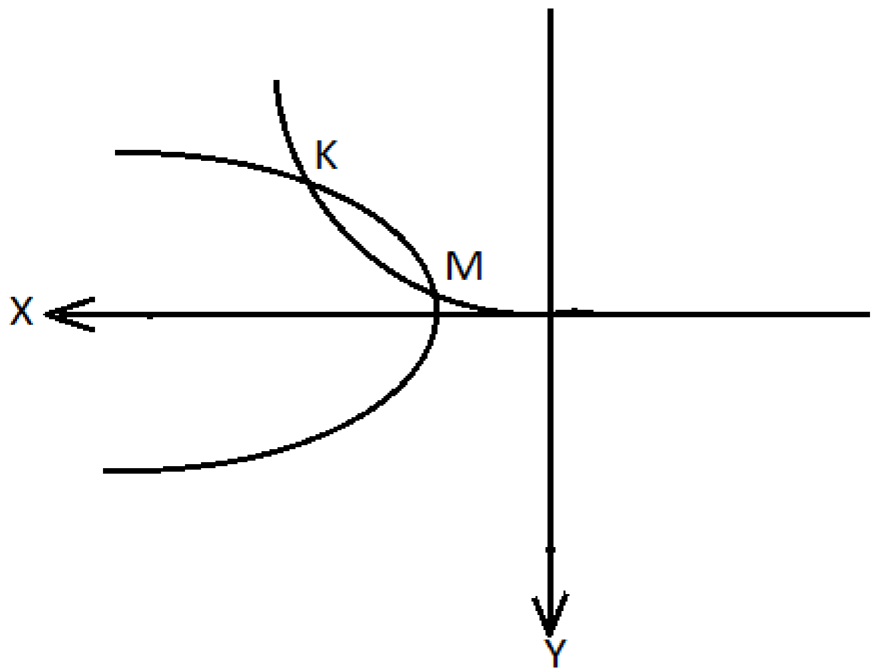


2-rasm

(1.2.2) tenglamaning yechimlarini yasashda quyidagi hollarni ham e’tiborga oladi.



3-rasm



4-rasm

3-, 4- rasmlardan birida egri chiziqlar urinishi mumkin, bu holda bitta yechim, ikkinchi holda ikki nuqtada kesishishi mumkin, bunda ikkita yechim deb hisoblangan. Umar Xayyom bu (1.2.2) ko‘rinishdagi tenglama yordamida kubik tenglamalarning ikkita haqiqiy ildizlarga ega ekanligini ko‘rsatadi.

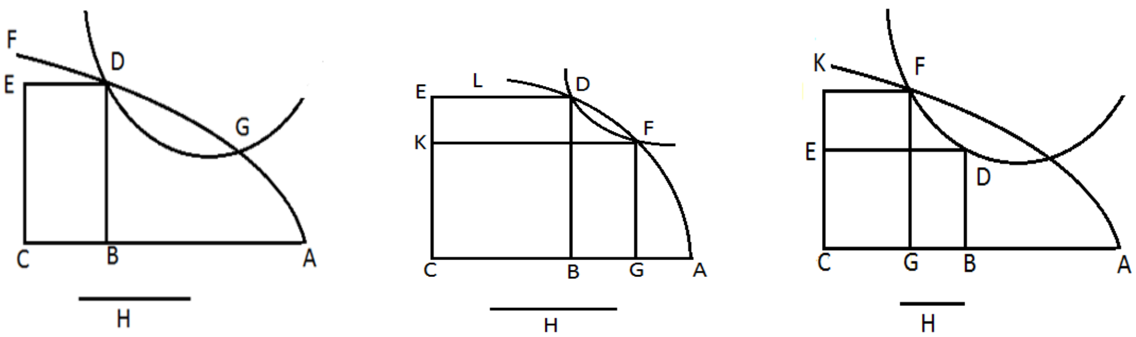
3-masala. $x^3 + a = cx^2$ (1.2.4) ko‘rinishdagi tenglamaning ildizlarini topish (yasash).

Yechish. (1.2.4) ko‘rinishdagi masala Arximed masalasida ham uchraydi. Bu tenglamaning ildizlarini yasash quyidagi parabola va giperbolalar yordamida amalga oshirgan.

$$\begin{cases} y^2 = \sqrt[3]{a}(c - x) \\ xy = \sqrt[3]{a^2} \end{cases} \qquad (1.2.5)$$

Umar Xayyomning xulosasiga ko‘ra, tenglama parabola tarmoqlari bilan giperbola tarmoqlarining urinish yoki kesishishlari sababli bitta yoki ikkita ildizlari borligini bildiradi. Egri chiziqlar tarmoqlari kesishmasalar, tenglama yechimga ega emasligi ta’kidlanadi.

Endi quyidagi 5-rasmda (1.2.4) tenglamaning mumkin bo‘lgan barcha yechimlarini qurib, ularni tahlil qilamiz.



5-rasm

5-rasmdagi chizmalarda (1.2.5) tenglamalar sistemasidagi koeffitsiyentlarni inobatga olib, quyidagi belgilashlarni kiritamiz. $AC = c$, $H = \sqrt[3]{a}$, $BC = H, B = c - \sqrt[3]{a}$. Umar Xayyom $\sqrt[3]{a} \geq c$ bo‘lganda (1.2.4) tenglama yechimga ega emas, chunki $x = \sqrt[3]{a}$ bo‘lganda $cx^2 \leq a$ bo‘ladi, $x < \sqrt[3]{a}$ bo‘lganda esa $cx^2 < a$

, $x > \sqrt[3]{a}$ bo‘lganda $a > cx^2$ bo‘lib, (1.2.4) tenglamada ziddiyat kelib chiqadi deb ta’kidlaydi. Endi 5-rasmdagi chizmalardan foydalanib, $\sqrt[3]{a} \geq \frac{c}{2}$, $\sqrt[3]{a} \leq \frac{c}{2}$ hollarda parabola va giperbolalar ordinatalarini (BD), $x = c - \sqrt[3]{a}$ bilan solishtirib, uch holni tahlil qilib chiqamiz.

1. Aytaylik, $\sqrt[3]{a} = \frac{c}{2}$ bo‘lsin. U holda egri chiziqlarning ordinatalari $\sqrt[3]{a}$ ga teng bo‘ladi, chiziqlar ikkita nuqtada kesishib, shu nuqtalar absissalari ikkita ildizni beradi.
2. Agar $\sqrt[3]{a} > \frac{c}{2}$ bo‘lsa,u holda $x = c - \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{a}$ bo‘ladi va giperbolaning ordinatasi $\frac{\sqrt[3]{a}}{c - \sqrt[3]{a}}$,parabola ordinatasi $\sqrt[3]{a}$ dan katta bo‘ladi.Natijada BD dan o‘ng tomonda egri chiziqlar uchrashmasligi (kesishmasligi) mumkin, lekin urinishi mumkin.Bu holda tenglama ildizga ega bo‘lmaydi yoki bitta ildizga ega bo‘ladi.
3. Oxirgi hol $\sqrt[3]{a} < \frac{c}{2}$ bo‘lganda, giperbolaning *D* nuqtasi parabola ichida bo‘ladi va chiziqlar ikkita nuqtada kesishadi va tenglama ikkita ildizga ega bo‘ladi. Umar Xayyom (1.2.4) ko‘rinishidagi tenglamaning ildizlarini yasashda oxirigacha to‘la tahlil qila olmagan. Undan oldin Arximed, keyinchalik Al-Kuxiy (X asr) (1.2.4) ko‘rinishdagi tenglamaning musbat ildizlari chegaralari $a \leq \frac{4c^3}{27}$ shart bilan aniqlanishini aytgan. Shuningdek, Umar Xayyom $a \leq \frac{c^3}{8}$ $=\frac{3\frac{3}{8}c^3}{27}$ bo‘lganda ikkita ildiz, $a > \frac{3\frac{3}{8}c^3}{27}$ bo‘lganda esa, yoki ikkita, yoki bitta, yoki bitta ham ildizlari mavjud emasligini aytib o‘tadi. Agar $a \geq c^3$ bo‘lsa, tenglamaning ildizlari mavjud emasligini ham aytib o‘tadi.Yuqorida aytib o‘tganimizdek, (1.2.4) ko‘rinishidagi tenglamalar Arximed ishlarida ham o‘rganilgan. Umar Xayyom, Arximed tenglamasini tahlil qilib, bu sohada ham tekshirish olib brogan. Abu-Judning (XI asr) bu tenglamada, $\sqrt[3]{a} = \frac{c}{2}$ da egri chiziqlar urinadi, $\sqrt[3]{a} > \frac{c}{2}$ bo‘lganda esa egri chiziqlar uchrashmaydi (kesishmaydi) degan xatolikka yo‘l qo‘yganligini quyidagi tenglama misolida aniqlik kiritadi.

Ushbu $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{144} > 5 = \frac{c}{2}$ shartlar asosida $x^3 + 144 = 10x^2$ (1.2.6) tenglamani o‘rganadi.Shu bilan birga, $y^2 = \sqrt[3]{144}(10 - x)$ va $xy = \sqrt[3]{144^2}$ egri chiziqlar absissasi $x = 6$ bo‘lgan nuqtada kesishadi (Lekin $x = 2 + 2\sqrt{7}$ ildiz ko‘rsatilmagan).

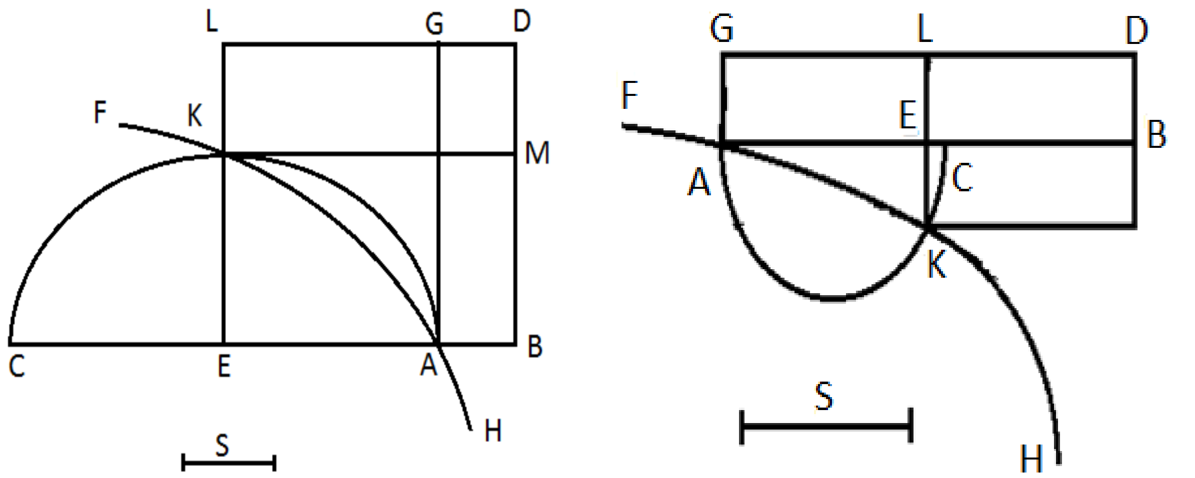
(1.2.4) ko‘rinishidagi tenglamalarga yaqin bo‘lgan tenglamalarning yechimlarini topishda Umar Xayyomning o‘zi ham xatolikka yo‘l qo‘yadi. Jumladan, agar $\sqrt[3]{a}$ koeffitsiyent $\frac{c}{2}$ dan yetarlicha katta bo‘lsa, egri chiziqlar kesishmaydi deb, $x^3 + 41^3 = 80x^2$ (1.2.7) tenglamani misol sifatida tahlil qiladi. Bu (3.C) tenglamada absissalari $x_1 = \sqrt[3]{a} = 41$,

$x_2 = \sqrt[3]{a} + \frac{3}{4}\left(c - \sqrt[3]{a}\right) = 41 = \frac{3}{4} \cdot 39$ bo‘lgan nuqtalarda parabola ordinatalari, giperbola ordinatalaridan kichik, demak egri chiziqlar kesishmaydi degan xato xulosaga keladi.Ammo, bu shu nuqtalar orasida absissalari $x_3 = \frac{11}{10} \cdot 41$ bo‘lgan nuqtada parabola ordinatasi, giperbola ordinatasidan katta bo‘ladi va shu ikki nuqtalar orasida ikkita kesishish nuqtalari bor. Agar tenglamadagi ozod hadni kattaroq qilib olganda edi, hech bo‘lmaganda, 43^3 deb olganda bu xatolik bo‘lmagan bo‘lar edi. Umar Xayyom (1.2.6) va (1.2.7) tenglamalar asosida , ildizlarni aniqlashning umumiy geometrik nazariyasini sonli koeffitsiyentli tenglamalarda ko‘rib o‘tgan. Bu jarayonda Umar Xayyom tahlillarining to‘laqonligiga va aniqlikka rioya qilgan. U o‘quvchilarning aql va zakovatlariga ishonib, ularning har bir ko‘rinishdagi tenglama tahlillaridan umumiy qonuniyat topishga harakat qilgan.

4-masala. $x^3 + bx = cx^2 + a$ (1.2.8) tenglamaning ildizlarini topish (chizmalarda yasash).

Umar Xayyomning kubik tenglamalarni tahlil qilishdagi ko‘plab tekshirishlari muvaffaqiyatli bo‘lgan. Shulardan biri (1.2.8) ko‘rinishdagi tenglamani tahlil qilishi diqqatga sazovar. Bu ko‘rinishdagi tenglamaning ildizlarini aniqlash quyidagi aylana va parabolalarni yasashga olib keladi.

$$\begin{cases} y^2 = \left(x - \frac{a}{b}\right)(c - x) \\ x\left(\sqrt{b} - y\right) = \frac{a}{\sqrt{b}} \end{cases} \qquad (1.2.9)$$



6-rasm

6-rasmda ko‘rinib turibdiki, Umar Xayyom (1.2.8), (1.2.9) tenglamalar har doim ildizlarga ega deb to‘g‘ri ko‘rsatgan. Ular K nuqtaning absissasi bo‘lib, bunda $BC = c$, $BD = \sqrt{b}$, $S = AB = \frac{a}{b}$ va $\frac{a}{b}$ ≥c bo‘lganda u ildiz yagonadir. Biroq $\frac{a}{b} < c$ bo‘lganda yana ikkita musbat ildizlar mavjudligini sezmagan. Shu tariqa Umar Xayyom kub tenglamaning uchta ildizlari bo‘lishi mumkinligini ko‘rsatishga asos soldi. Bu uchta ildiz XVI asrning O‘rtalarida Jirolamo Kardano (1501-1576) tomonidan aniqlandi. Bunda u Umar Xayyom tekshirishlaridan xabardor edi. Umar Xayyomning 6-rasmdagi chizmasida A va K nuqtalar orasida yana ikkita kesishish nuqtalari borligini ko‘rish ancha mushkul. Umar Xayyom 25 ta har xil ko‘rinishdagi kubik tenglamalarni tahlil qilib, shu tenglamalarga keltiriladigan, ammo noma’lum o‘zgaruvchining teskari darajalarini o‘z ichiga olgan tenglamalarni ham tahlil qilgan. Misol uchun, $x^2 = a \cdot \frac{1}{x^2}$ ko‘rinishdagi tenglamani o‘rgangan. Bu ko‘rinishdagi tenglamalarning ildizlarini yasashda 1 va a sonlari orasidagi 4 ta proporsional sonlarni aniqlashga olib kelishini va bu avval Al-Xaysan (IX asr) tomonidan o‘rganilganligini ham ta’kidlab o‘tgan. Uning bu yo‘nalishda qilgan ishlari juda murakkab bo‘lganligi uchun tafsilotlarini keltirmaymiz.

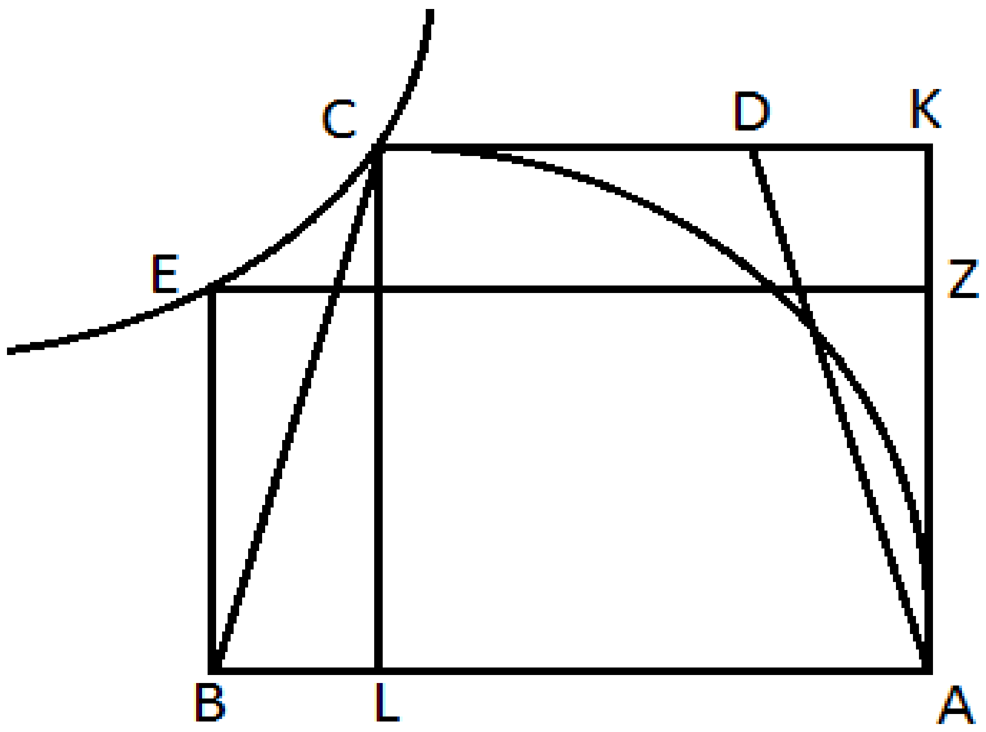
Umar Xayyom 4-darajali tenglamalar haqida, jumladan, $x^2 + 2x = 2 + 2 \cdot \frac{1}{x^2}$ tenglama yechimlarini yasash usullari hali noma’lum ekanligini aytib o‘tgan. Umar Xayyom o‘sha zamon matematiklari 4-darajali tenglamalarga keltiriladigan masalalarni bir-birlariga yechish uchun taklif qilishganlarini qayd qiladi. Ammo ular masalalarning yechimlari haqida aniq xulosaga kela olmaganlar. 4-darajali tenglamalarni yechish bilan XV asrda Samarqand rasadxonasining matematigi al-Koshiy shug‘ullandi va xususiy hollarda yechish usullarini ko‘rsatdi. Umar Xayyom va undan keying vatandosh matematiklarimiz yuqori darajali tenglamalarning yechimlarini topishning asosan geometrik nazariyalari (chizmalari) bilan shug‘ullanishgan. Bu izlanishlar Gauss (1777-1856) tomonidan algebraning asosiy teoremasi isbotlanishiga katta ta’sir ko‘rsatganligi ehtimoldan xoli emas [6].

5-masala. Yuzi 90 ga teng bo‘lgan, tomonlari $AB = AD = BC = 10$ shartni qanoatlantiruvchi $ABCD$ trapetsiyani yasang (chizmasini quring).

Yechish. $DK = z$ deb, CD ning o‘ng tomoniga AK perpendikulyar o‘tkazilgan. Trapetsiya yuzini hisoblash natijasida quyidagi 4-darajali tenglama hosil qilingan.

$$x^2 + 2000z = 20x^3 + 1900 \qquad (1.2.10)$$

AB ga $BE = \frac{9}{10}AB$ perpendikulyar o‘tkazamiz, so‘ng E nuqtadan $(10 - x)y = 90$ giperbolani o‘tkazamiz (7-rasm).



7-rasm

BA ni absissa o‘qi, BE ni ordinata o‘qi deb, markazi B nuqtada bo‘lgan $x^2 + y^2 = 10^2$ aylanani quramiz. Giperbola va aylanalarning kesishish nuqtasi bo‘lgan C nuqta absissasi (1.2.10) tenglamaning ildizi bo‘ladi.

§1.3. Uchinchi darajali tenglamani yechishda maxsus almashtirish usuli

Uchinchi darajali tenglamani XI asrda Umar Xayyom (1048-1123) birinchi marta geometrik usulda yechgan edi. U uchinchi darajali tenglamani aylana va parabola tenglamalariga ajratib ularning kesishish nuqtasining berilgan tenglamaning yechimi ekanligini isbotlagan edi. Uning koordinitalar sistemasidagi o‘qlar chapdan o‘ngga va yuqoridan pastga qarab yo‘naltirilgan .([1], ga qarang) XVI asr boshida italiyalik Ferro (1465-1526)

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (1.3.1)$$

ko‘rinishdagi tenglamaning yechish usulini topgan edi.

1545 yilda italiyalik Kardano (1501-1576) esa (1.3.1) ko‘rinishdagi tenglamani italiyalik Tartalya (1500-1557) ko‘rsatgan usulda bayon etdi. To‘rtinchi darajali tenglamalarni yechish usuli bilan dastlab XV asrda G‘iyosiddin Jamshid al-Koshiy (Mirzo Ulug‘bekning safdoshi va rasadxonasining yetuk xodimi) shug‘ullangan edi. Al-Koshiygacha bo‘lgan davrda hech kim shug‘ullangan emas. Bu haqda ishimizda qayd etganmiz.

Biz yuqorida qayd etilgan usullardan jidiy farq qiluvchi usulni bayon qilamiz.

Avvalo uchinchi darajali tenglamani ko`rib chiqaylik.

Biz

$$x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3 = 0 \qquad (1.3.2)$$

tenglamani ko‘rib o‘tamiz, bunda c_1, c_2, c_3 berilgan sonlar (haqiqiy yoki kompleks).

Agar

$$x = t + \frac{C_1}{3}$$

almashtirish bajarilsa (1.3.2) tenglama

$$t^2 + at + b = 0$$

ko‘rinishga keladi, ya’ni (1.3.1) ko‘rinishda bo‘ladi.

Biz (1.3.2) dan

$$x^3 = -C_1x^2 - C_2x - C_3 \qquad (1.3.3)$$

deb yozamiz.

1683-yilda Chirengaus taklif qilgan

$$y = p_0 + p_1x + p_2x^2$$

almashtirishdan foydalanamiz, bunda p_0, p_1, p_2 - sonlar hozircha noma’lum (haqiqiy, kompleks). Bu almashtirish va (1.3.3) ga asosan

$$yx=(p_1-c_1p_2)x^2+(p_0-c_2p_2)x-c_3p_2=p_0^{'}+p_1^{'}x+p_2^{'}x^2$$

$$yx^2=(p_1-c_1p_2)x^3+(p_0-c_2p_2)x^2-c_3p_2=p_0^{''}+p_1^{''}x+p_2^{''}x^2$$

tengliklarni hosil qilamiz, bunda

$$x^3=-C_1x^2-C_2x-C_3.$$

Shunday qilib biz

$$\begin{cases} y=p_0+p_1x+p_2x^2 \\ yx=p_0^{'}+p_1^{'}x+p_2^{'}x^2 \\ yx^2=p_0^{''}+p_1^{''}x+p_2^{''}x^2 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga egamiz. Bu sistemani

$$\begin{cases} p_0-y+p_1x+p_2x^2=0 \\ p_0^{'}+(p_1^{'}-y)x+p_2^{'}x^2=0 \\ p_0^{''}+p_1^{''}x+(p_2^{''}-y)x^2=0 \end{cases} \quad (1.3.4)$$

ko‘rinishda yozamiz.

Endi

$$z_1=1,\ z_2=x,\ z_3=x^2 \quad (1.3.5)$$

deb belgilaymiz. U holda (1.3.4) ni

$$\begin{cases} (p_0-y)z_1+p_1z_2+p_2z_3=0 \\ p_0^{'}z_1+(p_1^{'}-y)z_2+p_2^{'}z_3=0 \\ p_0^{''}z_1+p_1^{''}z_2+(p_2^{''}-y)z_3=0 \end{cases}$$

ko‘rinishda yozamiz. Buni z_1, z_2, z_3 larga nisbatan bir jinsli tenglamalar sistemasi deb qaraymiz. Uning nol bo‘lmagan yechimlari cheksiz ko‘p. Bir jinsli tenglamalar sistemasining nol bo‘lmagan yechimlaridan biri. $z_1=1,\ z_2=x,\ z_3=x^2$ ekanligi (ya’ni (1.3.5) ekanligi) (1.3.4) sistemadan ko‘rinib turibdi.

Shuning uchun oxirgi sistemada

$$\begin{vmatrix} p_0 - y & p_1 & p_2 \\ p_0^{'} & p_1^{'} - y & p_2^{'} \\ p_0^{"} & p_1^{"} & p_2^{"} - y \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.3.6)$$

bo‘lganda qaralayotgan sistema nolmas yechimlarga ega bo‘ladi.

Endi (1.3.6) tenglikdan (determinantini yoyib)

$$y^3 + (p_0 + p_1' + p_2'')y^2 + (p_0p_1' + p_0p_2'' + p_1'p_2'' - p_2p_0'' - p_2'p_1'' - p_1p_0')y + p_2p_0''p_1' + p_2'p_1''p_0 + p_1p_0'p_2'' - p_0p_1'p_2'' - p_0''p_2'p_1 - p_1''p_0'p_2 = 0$$

tenglamaga ega bo`lamiz va buni quyidagi ko`rinishda yozsak

$$y^3 + d_1y^2 + d_2y + d_3 = 0 \qquad (1.3.7)$$

tenglamaga ega bo‘lamiz, bunda

$$d_1,\ d_2,\ d_3 \qquad (1.3.8)$$

sonlar

$$p_0, \quad p_1, \quad p_2, \quad p_0', \quad p_1', \quad p_2', \quad p_0'', \quad p_1'', \quad p_2''$$

larga bog‘liq sonlar . Shu bilan birga o‘z navbatida

$$p_0', \quad p_1', \quad p_2', \quad p_0'', \quad p_1'', \quad p_2''$$

sonlar bilan ifoda etiladi va huddi shunday $p_0'',\ p_1'',\ p_2''$ sonlar ham $p_0,\ p_1,\ p_2$ lar orqali ifoda etiladi.

Demak (1.3.8) sonlar $p_0,\ p_1,\ p_2$ lar orqali ifodalanadi va

$$\begin{cases} p_0' = -c_3p_2\ , \\ p_1' = p_0 - c_2p_2, \\ p_2' = p_1 - c_1p_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} p_0'' = c_1c_3p_2 - c_3p_1\ , \\ p_1'' = c_1c_2p_2 - c_2p_1 - c_3p_2\ , \\ p_2'' = c_1^2p_2 - c_1p_1 + p_0 - c_2p_2, \end{cases}$$

ekanligini e`tiborga olamiz. Endi $p_0,\ p_1,\ p_2$ larni

$$\begin{cases} d_1 = 0 \\ d_2 = 0 \end{cases} \qquad (1.3.9)$$

shartni qanoatlantiradigan qilib tanlaymiz, ya`ni

$$\begin{cases} d_1 = p_0 + p_1' + p_2'' = 0 \\ d_2 = p_0 p_1' + p_0 p_2'' + p_1' p_2'' - p_2 p_0'' - p_2' p_1'' - p_1 p_0' = 0 \end{cases}$$

shartni qanoatlantiradigan qilib tanlaymiz, bunda p_i larning birortasini parametr deb olish kerak.

Natijada (1.3.9) ga asosan (**) tenglama

$$y^3 + d_3 = 0 \qquad (1.3.10)$$

ko‘rinishga keladi. (1.3.10) tenglamadan y_1, y_2, y_3 larni topamiz.

Endi

$$y = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 \qquad (1.3.11)$$

almashtirishga asosan y_i (i=1,2,3) larni qiymatlarini qo‘ysak uchta kvadrat tenglama hosil bo`ladi. Bu erda p_0, p_1, p_2 lar (1.3.9) dan aniqlanadi. Oxirgi (1.3.11) ni kvadrat tenglama sifatida yechamiz.

U holda: 1) $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$, 2) $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$, 3) $x_1^{(3)}, x_2^{(3)}$ (1.3.12)

noma’lumlarni topgan bo‘lamiz.

Shunday qilib $x_0=1$, x_1, x_2 yechimlar topilgan bo‘ladi, ya’ni (1.3.2) tenglamaning yechimlari hosil bo‘ladi. Hosil qilingan (1.3.12) yechimlardan (1.3.1) ni qanoatlantiradiganlarini aniqlaymiz.

§1.4. Uchinchi darajali tenglamani yechishning yana bir (o‘zgacha) usuli

Biz

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1.4.1)$$

tenglamani umumiy holda yechishni ko`rib o`tamiz.

Dastlab $x = y - \frac{a}{3}$ almashtirish qilib

$$y^3 + py + q = 0 \qquad (1.4.2)$$

ko‘rinishdagi tenlamaga kelamiz. So‘ngra $y = \sqrt{p}z$ almashtirish bilan. Agar tenglama $y^3 - py + q = 0$ ko`rinishda bo`lsa $y = i\sqrt{p}z$ almashtirish qilib

$$z^3 + z + r = 0 \qquad (1.4.3)$$

ko‘rinishdagi tenglamani hosil qilamiz.

Bu tenglamaga $z = t - \frac{1}{3t}$ almashtirishni qo‘ysak

$$t^3 - \frac{1}{27t^3} + r = 0 \qquad (1.4.4)$$

ko‘rinishga keladi. Hosil bo‘lgan tenglamani $\mathrm{t}^3 = \mathrm{u}$ belgilash bilan

$$27u^2 + 27ru - 1 = 0 \qquad (1.4.5)$$

Kvadrat tenglama hosil bo`ladi. Bu kvadrat tenglamadan $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2$ yechimlarni topib $t^3 = u$ ga qo‘ysak t_{11}, t_{12}, t_{13} va t_{21}, t_{22}, t_{23} lar kelib chiqadi. Bular yordamida z_{11}, z_{12}, z_{13} lar topiladi. z_{21}, z_{22}, z_{23} lar esa z_{11}, z_{12}, z_{13} larning aynan o‘zi bo‘ladi. *z* lar yordamida y topilib so‘ngra *x* ya’ni tenglama yechimi topiladi.

Misol.

$$27x^3 + 81x^2 + 108x + 28 = 0$$

tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamani quyidagi ko`rinishda yozib olamiz.

$$x^3 + 3x^2 + 4x + \frac{28}{27} = 0$$

$x = y - 1$ almashtirish bilan tenglamamiz $y^3 + y - \frac{26}{27} = 0$ ko`rinishni oladi.

$y = z - \frac{1}{3z}$ almashtirish orqali $z^3 - \frac{1}{27z^3} - \frac{26}{27} = 0$ tenglamani hosil qilamiz.

$z^3 = u$ desak $27u^2 - 26u - 1 = 0$ kvadrat tenglamaga kelamiz. Bu tenglamani yechib $u_1 = 1$ va $u_2 = -\frac{1}{27}$ lar topiladi. So`ngra z va y lar topiladi. So`ngra bular yordamida tenglama ildizlari bo`lgan x lar topiladi. Demak

$$x_1 = -13, \qquad x_2 = -4 + 23i^3, \qquad x_3 = -4 - 23i^3$$

bo`ladi. Bu yechimlar tenglamani to`la qanoatlantiradi.

II BOB. To‘rtinchi darajali tenglamalarni yechishning maxsus usullari

§2.1. To‘rtinchi darajali tenglamani yechishning N.I.Lobachevskiy usuli

Quyidagi to‘rtinchi darajali tenglama

$$ax^4 + bx^3 + cy^2 + dy + e = 0 \qquad (2.1.0)$$

berilgan bo‘lsin. Quyidagicha :

$$x = y - \frac{a}{4} \qquad (2.1.1)$$

Almashtirish yordami bilan (2.1.0) tenglamani:

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \qquad (2.1.2)$$

shaklga keltiramiz. Buni to‘rtinchi darjali tenglamaning normal shakli deyiladi. Bu normal tenglamaning istalgan ildizini *y* bilan belgilaymiz ushbu:

$$z^3 - yz^2 + \alpha z + \beta = 0 \qquad (2.1.3)$$

Yordamchi tenglamani tuzamiz bunda shuni aytish kerakki, α ning qiymati bizga kerak bo‘lmaydi, β ning qiymati esa keyinroq aniqlanadi. Agar (2.1.3) tenglamada *z* ni -*z* almashtirsak,

$$z^3 + yz^2 + \alpha z - \beta = 0 \qquad (2.1.4)$$

tenglama hosil bo‘ladi. So‘ngi (2.1.3) va (2.1.4) tenglamalarni o‘zoro ko‘paytirib,

$$u^3 + yu^2 + au - n = 0$$

tenglamani hosil qilamiz, bunda $u=z^2$ va

$$l = 2\alpha - y^2, \quad m = ay^2 + 2\beta y, \quad n = \beta^2$$

bu tengliklarning birinchi va uchinchisidan α va β ni aniqlab, ikkinchisiga qo‘ysak,

$$y^4 + 2ly^3 + 8\sqrt{ny} + (l^2 - 4m) = 0 \qquad (2.1.4)$$

tenglama kelib chiqadi. Bu tenglamanig xuddi yuqoridagi (2.1.2) tenglamadan iborat bo‘lishini talab qilib,

$$2l = p, \quad n = \frac{q^2}{64}, \quad m = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{4} - r\right) \qquad (2.1.5)$$

hosil bo‘ladi; $\beta^2 = n$ va $n = \frac{q^2}{64}$ tengliklarga asosan, $\beta = \frac{q}{8}$ deb hisoblashimiz mumkin.

(2.1.5) tengliklardan foydalanib, (2.1.4) tenglama:

$$u^3 + \frac{p}{2}u^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{p^2}{4} - r\right)u - \frac{q^2}{64} = 0 \qquad (2.1.6)$$

shaklga keltiramiz. Bu hal qiluvchi tenglama yoki (2.1.2) tenglamaning **rezolventasi**dir.

Agar u_1, u_2, u_3 bilan (2.1.6) tenglamanig ildizlarini belgilasak, $z^2 = u$ ga asosan $z_1 = \sqrt{u_1}$, $z_2 = \sqrt{u_2}$, $z_3 = \sqrt{u_3}$ sonlar (2.1.3) yordamchi tenglamaning ildizlarini ifodalaydi. Shu sabab:

$$z_1 + z_2 + z_3 = y \qquad z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -\beta = -\frac{q}{p}$$

shartlar bajariladi.

Ko‘ramizki, z_1, z_2, z_3 qiymatlar $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -\frac{q}{p}$ shartni qanoatlantiradigan bo‘lsa,

$$z_1, \quad -z_2, \quad -z_3;$$

$$-z_1, \quad z_2, \quad -z_3;$$

$$-z_1, \quad -z_2, \quad z_3;$$

Qiymatlar ham bu shartni qanoatlantiradi. Demak (2.1.2) tenglamaning ildizlari quyidagilardan iborat bo‘ladi:

$$y_1 = z_1 + z_2 + z_3,$$

$$y_2 = z_1 - z_2 - z_3$$

$$y_3 = -z_1 - z_2 - z_3$$

$$y_4 = -z_1 - z_2 + z_3$$

Bu qiymatlarni (2.1.1) ga qo`yib, (2.1.5) tenglamaning ildizlarini topamiz.

Misol: $x^4 + 4x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x - \frac{3}{16} = 0$

tenglamani yechaylik.

Avval $x = y - 1$ almashtirish bajarib, normal tenglamaga o`tamiz:

$$y^4 - \frac{7}{2}y^2 + y + \frac{21}{16} = 0$$

Bunda $p = -\frac{7}{2}$, $q = 1$, $r = \frac{21}{16}$ ekanini etiborga olib, (2.1.6) rezolventani tuzamiz:

$$u^3 - \frac{7}{4}u^2 + \frac{7}{16}u - \frac{1}{64} = 0$$

Bu tenglamani ko`paytuvchilarga ajratib yechish yengildir:

$$\left(u^3 - \frac{1}{64}\right) - \frac{7}{4}u\left(u - \frac{1}{4}\right) = \left(u - \frac{1}{4}\right)\left(u^2 + \frac{1}{4}u + \frac{1}{16}\right) - \frac{7}{4}u\left(u - \frac{1}{4}\right) =$$
$$= (u - \frac{1}{4})(u^2 - \frac{3}{2}u + \frac{1}{16}) = 0$$

Demak: $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_{2,3} = \frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{4}$.

Bunda q=1>0 bo`lgani uchun, $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -\frac{q}{8} = -\frac{1}{8}$ shartni qanoatlantirish maqsadida:

$$z_1 = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}, \quad z_{2,3} = +\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$ deb olamiz.

Natijada:

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}+1}{2} + \frac{\sqrt{2}-1}{2} - 1 = \frac{-3+2\sqrt{2}}{2}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}+1}{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{2} - 1 = \frac{-3-2\sqrt{2}}{2},$$

$$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}+1}{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$x_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}+1}{2} + \frac{\sqrt{2}-1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}.$$

Lobachevskiy usulidan oz farq qiladigan yana bir usulni ko`rib o`taylik.

§2.2. To‘rtinchi darajali tenglamani yechishning L.Eyler usuli

Bunda xam (2.1.0) tenglamani avval (2.1.1) almashtirish yordami bilan normal (2.2.1) shaklga keltiramiz.

$$y^4 - py^2 + qy + r = 0. \qquad (2.2.1)$$

Endi *x* ni uchta noma’lumning yig`indisi sifatida yozamiz:

$$y = u + v + \omega \qquad (2.2.2)$$

Ikkala tomonni kvadratga ko`tarib, ushbuni hosil qilamiz:

$$y^2 - (u^2 + v^2 + \omega^2) = 2(uv + u\omega + v\omega)$$

Ikkinchi marta kvadratga ko`tarib,quyidagini topamiz.

$$y^4 - 2(u^2 + v^2 + \omega^2)y^2 + (u + v + \omega)^2 = 4(uv + u\omega + v\omega)^2 \qquad (2.2.3)$$

Bunda:

$$(uv + u\omega + v\omega)^2 = u^2v^2 + u^2\omega^2 + v^2\omega^2 + 2uv\omega(u + v + \omega)$$

yoki (2.2.2) ga asosan

$$(uv + u\omega + v\omega)^2 = u^2v^2 + u^2\omega^2 + v^2\omega^2 + 2uv\omega y$$

Bu ifodani (2.2.3) ga qo`yib,

$$y^4 - 2(u^2 + v^2 + \omega^2)y^2 - 8uv\omega y + (u + v + \omega)^2 - 4(u^2v^2 + u^2\omega^2 + v^2\omega^2) = 0 \qquad (2.2.4)$$

tenglamaga kelamiz.

Yangi u, v, ω noma`lumlarning qiymatlarini (2.2.4) tenglama xuddi (2.2.1) tenglamaning o`zidan ibirat bo`lib qoladigan qilib aniqlaylik. Buning uchun

$$-2(u^2 + v^2 + \omega^2) = p,$$

$$-8uv\omega = q \qquad (2.2.5)$$

$$(u^2 + v^2 + \omega^2)^2 - 4(u^2v^2 + u^2\omega^2 + v^2\omega^2) = r$$

yoki bundan

$$2(u^2 + v^2 + \omega^2) = -p,$$

$$16(u^2v^2 + u^2\omega^2 + v^2\omega^2) = p^2 - 4r \qquad (2.2.6)$$

$$64u^2v^2\omega^2 = q^2$$

bo`lishi kerak. Agar

$$4u^2 = z_1, 4v^2 = z_2, \quad 4\omega^2 = z_3 \qquad (2.2.7)$$

deb olsak, (2.2.6) tengliklar quidagicha yoziladi.

$$z_1 + z_2 + z_3 = -2p$$

$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = p^2 - 4r, \qquad (2.2.8)$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = q^2$$

(2.2.8) tengliklar $z_1 z_2 z_3$ qiymatlar quyidagi uchinchi darajali tenglamaning ildizlari ekanini ko`rsatadi.

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0 \qquad (2.2.9)$$

Bu xuddi hal qiluvchi tenglama yoki (2.2.1) tenglamaning rezalventasidan iborat.

(2.2.9) tenglamani yechib, u,v,ω ning qiymatlarni (2.2.7) tenglikdan topamiz:

$$u = \frac{1}{2}\sqrt{z_1}, \quad v = \frac{1}{2}\sqrt{z_2}, \quad \omega = \frac{1}{2}\sqrt{z_3} \qquad (2.2.10)$$

Lekin u, v, ω ning qiymatlarini

$$8uv\omega = -q$$

yoki

$$\sqrt{z_1} \cdot \sqrt{z_2} \cdot \sqrt{z_3} = -q$$

shart bajariladigan ishoralar bilan olish kerak.

Agar $\sqrt{z}_{1,}\sqrt{z}_{2,}\sqrt{z}_3$ qiymatlar (2.2.10) shartni qanoatlantirsa, uni

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{z_1} & -\sqrt{z_2} & -\sqrt{z_3} \\ -\sqrt{z_1} & \sqrt{z_2} & -\sqrt{z_3} \\ -\sqrt{z_1} & -\sqrt{z_2} & \sqrt{z_3} \end{array}$$

qiymatlar ham qanoatlantiradi.

Demak, (2.2.2) ga asosan (2.2.1) tenglamaning ildizlari qiymatlaridan iborat:

$$y_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}),$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}),$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}),$$

$$y_4 = -\frac{1}{2}(\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}).$$

Nixoyat bularni (29) ga qo`yib, (24) tenglamaning ildizlarini xosil qilamiz. Misol:

$$x^4 + 4x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x - \frac{3}{16} = 0$$

Tenglamani yechaylik. Ma`lumki, $x = y - 1$ deb olib, u tenglamani

$$y^4 - \frac{7}{2}y^2 + y + \frac{21}{16} = 0$$

shaklga keltiramiz. Avval, (2.2.9) rezolventani tuzamiz:

$$2p = -7; \quad p^2 - 4r = \frac{49}{4} - \frac{21}{4} = 7; \quad q^2 = 1$$

Demak:

$$z^3 - 7z^2 + 7z - 1 = 0$$

Bu tenglamani ko`paytuvchilarga ajratib yozsak,

$$(z^3 - 1) - 7z(z - 1) = (z - 1)(z^2 - 6z + 1) = 0$$

Bundan:

$$z_1 = 1, \quad z_{2,3} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

hosil bo`ladi.

Endi (2.2.10) shartni qanoatlantirish uchun

$$\sqrt{z_1} = -1, \qquad \sqrt{z_1} = \sqrt{2} + 1, \qquad \sqrt{z_1} = \sqrt{2} - 1$$

Deb olamiz va ushbuni tuzamiz:

$$x_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1) - 1 = \frac{2\sqrt{2} - 3}{2},$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} - 1\right) - 1 = \frac{-2\sqrt{2} - 3}{2}$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} - 1) - 1 = \frac{1}{2},$$

$$x_4 = -\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1) - 1 = -\frac{3}{2}.$$

§2.3. To‘rtinchi darajali tenglamani maxsus almashtirish bilan yechish

To‘rtinchi darajali tenglamalarni yechishni dastlab Beruniy, Umar Xayyom, al-Koshiy, Ali Qushchi kabi matematik olimlar bu borada ko‘p ishlar olib borishgan.

Har qanday to‘rtinchi darajali tenglamalarni yechishni quyidagi

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{2.3.1}$$

ko‘rinishga keltirish mumkin va buni uchinchi va ikkinchi darajali tenglamalarga keltirish yo‘li bilan yechish usulini Italiyan olimi Ferrari (1522-1565) ko‘rsatgan edi. Hozirgi oliy algebra kursida shu usulni bayoni keltirigan.

XVII asrda Fransuz olimi Dekart (1536-1650) ikkita kvadrat tenglamaga keltirib yechish usulini ko‘rsatdi. So‘ngra XVIII asrda rus olimlari L.Eyler (1701-1783) va N.I.Lobachevskiy (1792-1856) lar boshqa-boshqa usullarni ko‘rsatdilar. Bu usulda (2.3.1) tenglama

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0 \tag{2.3.2}$$

ko‘rinishdagi tenglamaga keltirib yechilishi bayon etilgan.

Biz bu yerda Chirengaus (1651-1708) almashtirishlar yordamida Prosolovning "Mnogochlen" nomli kitobida izohlangan usulda bayon qilamiz.

Bizga

$$x^4 + c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4 = 0 \tag{2.3.3}$$

Tenglama berilgan bo‘lsin. Bunday holatda

$$y = p_3x^3 + p_2x^2 + p_1x + p_0 \tag{2.3.4}$$

almashtirish bajaramiz.

Yuqoridagi (2.3.3) dan

$$x^4 = -c_1x^3 - c_2x^2 - c_3x - c_4 \qquad (2.3.5)$$

ifodaga asosan (2.3.4) almashtirishni ketma-ket x ga ko‘paytiramiz va o‘xshash hadlarni ixchamlaymiz:

$$y \cdot x = p_3x^4 + p_2x^3 + p_1x^2 + p_0x =$$

$$= p_2x^3 + p_1x^2 + p_0x - c_1p_3x^3 - c_2p_3x^2 - c_3p_3x - c_4p_3 =$$

$$= p_3'x^3 + p_2'x^2 + p_1'x + p_0' \qquad (2.3.6)$$

Bu (2.3.6) tenglikni x ga ko‘paytirib va (2.3.5) ni e'tiborga olamiz:

$$y \cdot x^2 = p_3'x^4 + p_2'x^3 + p_1'x^2 + p_0'x =$$

$$= p_2'x^3 + p_1'x^2 + p_0'x - c_1p_3'x^3 - c_2p_3'x^2 - c_3p_3'x - c_4p_3' =$$

$$= p_3''x^3 + p_2''x^2 + p_1''x + p_0'' \qquad (2.3.7)$$

Bu (2.3.7) va (2.3.5) dan

$$y \cdot x^3 = p_3''x^4 + p_2''x^3 + p_1''x^2 + p_0''x =$$

$$= p_2''x^3 + p_1''x^2 + p_0''x - c_1p_3''x^3 - c_2p_3''x^2 - c_3p_3''x - c_4p_3'' =$$

$$= p_3'''x^3 + p_2'''x^2 + p_1'''x + p_0''' \qquad (2.3.8)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Endi (2.3.4), (2.3.6), (2.3.7) va (2.3.8) larga asosan:

$$\begin{cases} (p_0 - y) + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 = 0 \\ p_0' + (p_1' - y)x + p_2'x^2 + p_3'x^3 = 0 \\ p_0'' + p_1''x + (p_2'' - y)x^2 + p_3''x^3 = 0 \\ p_0''' + p_1'''x + p_2'''x^2 + (p_3''' - y)x^3 = 0 \end{cases} \qquad (2.3.9)$$

tenglamalar sistemasini yozamiz.

Ushbu: $t_1 = 1,\ t_2 = x,\ t_3 = x^2,\ t_4 = x^3$ (*)

Belgilashni olib (2.3.9) ni bunday yozamiz:

$$\begin{cases} (p_0 - y)t_1 + p_1 t_2 + p_2 t_3 + p_3 t_4 = 0 \\ p'_0 t_1 + (p'_1 - y)\, t_2 + p'_2 t_3 + p'_3 t_4 = 0 \\ p''_0 t_1 + p''_1 t_2 + (p''_2 - y) t_3 + p''_3 t_4 = 0 \\ p'''_0 t_1 + p'''_1 t_2 + p'''_2 t_3 + (p'''_3 - y) t_4 = 0 \end{cases} \tag{2.3.10}$$

Bu (2.3.10) sistema t_1, t_2, t_3, t_4 noma'lumlarga nisbatan bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasidir va cheksiz ko‘p nol bo‘lmagan yechimlarga ega.

Bu sistemaning nolmas yechimlaridan biri(yuqorida (*) ga asosan)

$$t_1 = 1,\ t_2 = x,\ t_3 = x^2,\ t_4 = x^3 \tag{2.3.11}$$

Endi (2.3.10) sistemaning nolmas yechimlariga ega bo‘lishining zarur va kifoyalik sharti

$$\begin{vmatrix} (p_0 - y) & p_1 & p_2 & p_3 \\ p'_0 & (p'_1 - y) & p'_2 & p'_3 \\ p''_0 & p''_1 & (p''_2 - y) & p''_3 \\ p'''_0 & p'''_1 & p'''_2 & (p'''_3 - y) \end{vmatrix} = \mathbf{0} \tag{2.3.12}$$

(2.3.12) determinant nolga tengligini e'tiborga olamiz.

Bu (2.3.12) ning chap tomonini to‘rtinchi tartibli determinant bo‘lgani uchun uning yoyilmasi y o‘zgaruvchiga nisbatan to‘rtinchi darajali ko‘pxaddir.Shuning uchun (2.3.12) tenglamani

$$y^4+q_1y^3+q_2y^2+q_3\text{y}+q_4=0 \qquad (2.3.13)$$

deb yoza olamiz, bunda

$$q_1, q_2, q_3, q_4 \qquad (2.3.14)$$

koeffitsiyentlar

$$p_0, p_1, p_2, p_3,\ p_0', p_1', p_2', p_3',\ p_0'', p_1'', p_2'', p_3'',\ p'''_{0,}p_1''', p_2''', p_3''' \qquad (2.3.15)$$

sonlarga bog‘liq.

Bu (2.3.15) dagi

$$p_0\ , p_1, p_2, p_3 \qquad (2.3.16)$$

sonlardan boshqalari shu (2.3.16) sonlar va (2.3.3) tenglamaning koeffisiyentlari

$$c_1, c_{2,} c_3, c_4 \qquad (2.3.17)$$

sonlar orqali aniqlanadi. Demak, (2.3.14) sonlar (2.3.16), (2.3.17) sonlar bilan aniqlanadi.

Endi (2.3.13) tenglama

$$y^4 + q_2y^2 + q_4 = 0 \qquad (2.3.18)$$

ko‘rinishda bo‘lishi uchun (2.3.16) sonlarni

$$\begin{cases} q_1 = 0 \\ q_3 = 0 \end{cases} \qquad (2.3.19)$$

Shart bajariladigan qilib tanlaymiz, ya'ni (2.3.19) sistemani berilgan (2.3.17) sonlarga asosan (2.3.16) sonlarga nisbatan yechamiz. So‘ngra bu (2.3.16) sonlarga asosan (2.3.14) dagi q_2, q_4 sonlarni aniqlaymiz va (2.3.18) bikvadrat tenglamani yechamiz. Bu yechimlarga asosan, ya'ni topilgan

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \qquad (2.3.20)$$

yechimlarga asosan (2.3.4) tenglamani yechamiz va natijada (2.3.3) ning yechimlarini aniqlaymiz. To‘rtinchi darajali tenglamalarni yechish masalasi Umar Xayyom ishlaridan boshlanadi. U uchinchi darajali tenglamalarni yechish usulini ko‘rsatgandan so‘ng

$$x^2 + 2\text{x} = 2 + \frac{2}{x^2}$$

tenglamani, ya'ni to‘rtinchi darajali tenglamalar haqida mulohaza yuritadi va bu tenglamani yechish usuli noma'lum deb ta'kidlaydi.

G‘iyosiddin Jamshid al-Koshiy to‘rtinchi darajali tenglamalar bilan shug‘ullanib 70 xil ko‘rinishdagi to‘rtinchi darajali tenglamalarni yechimini bergan. Al-Koshiygacha va uning zamonidagi matematiklar to‘rtinchi darajali tenglamalar bilan shug‘ullanmagan.

§2.4. To‘rtinchi darajali tenglamani yechishning eng sodda usuli

$$t^4 + at^3 + bt^2 + ct + d = 0 \qquad (2.4.0)$$

tenglamani $t = x - \frac{a}{4}$ almashtirish bilan

$$x^4 - px^2 - qx + r = 0 \qquad (2.4.1)$$

ko‘rinishga keltiramiz. Endi (2.4.1) ning o‘ng tomonini quyidagicha yozamiz.

$$x^4 - px^2 - qx + r = (x^2 + yx + z)(x^2 - yx + v) \qquad (2.4.2)$$

Bunda x, y, v lar ixtiyoriy noma'lum. Bu (2.4.2) ning koeffisiyentlarini tenglab

$$\begin{cases} z - y^2 + v = -p \\ -zy + vy = -q \\ vz = r \end{cases} \qquad (2.4.3)$$

sistemani tuzamiz. Oxirgi (2.4.3) dan

$$y^6 - 2py^4 + (p^2 - 4z)y^2 - q^2 = 0 \qquad (2.4.4)$$

tenglamani hosil qilamiz va

$$y^2 = t \qquad (2.4.5)$$

deb belgilash qilib,

$$t^3 - 2pt^2 + (p^2 - 4z)t - q^2 = 0 \qquad (2.4.6)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu (2.4.6) rezolventadir (hal qiluvchi). Endi (2.4.6) ni yechib (2.4.5) dan y noma'lumlarni va (2.4.3) ga asosan z, v noma'lumlarni aniqlaymiz. Nihoyat (2.4.2) dagi ikkita kvadrat tenglamani yechamiz. Bu bilan (2.4.1) va berilgan tenglamani yechgan bo‘lamiz.

Xulosa va tavsiyalar

Mazkur bitiruv malakaviy ishida “Algebra” faning muhim qismi bo‘lgan darajali tenglamalarni yechishning darsliklarda bo‘lmagan usuli qaraldi. Bu yerda uchinchi va to‘rtinchi darajali tenglamalarni yechishning nisbatan yangi usulini ko‘rib o‘tdik. BMI da bayon etilgan uchinchi, to‘rtinchi darajali tenglamalarni yechish usullari oliy ta’lim muassasalarida va akademik litseylarida iqtidorli talabalar uchun tashkil etilgan ilmiy o‘quv seminar mashg‘ulotlarida foydalanishni va bunday usullarning yana boshqasini topib ko‘rsatishni tavsiya qilamiz. Chunki algebraning asosiy teoremasini isbotlashning 10 (o‘n) xil usuli yaratilgan. Usullarni yaratishda insonning fikrlash qobiliyati oshadi va bu bilan fanni rivojlantirishga o‘z hissasini qo‘shadi.

Shunday qilib hozirgi vaqtda uchinchi darajali tenglamalarni yechishning Umar Xayyom usuli, Kardano (Tartalya) usuli va biz bayon qilgan usullarni, ya’ni 3 (uch) ta usuli ma’lum. To‘rtinchi darajali tenglamani yechishda

1) Ferrari usuli

2) Lobachevskiy usuli

3) Eyler usuli

4) Biz bayon qilgan ikki usul ma’lum, ya’ni 5 (besh) ta usul ma’lum bo‘ldi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Karimov I.A, “Yuksak ma’naviyat yengilmas kuch”-1. “Ma’naviyat” 2008

2. Karimov I.A, “Asosiy vazifamiz vatanimiz taraqqiyoti va xalqimiz farovonligini yanada yuksaltirishdir”. O‘zbekiston Respublikasi 1-prezidenti I.A.Karimovning 2009-yilning asosiy yakunlari va 2010-yilda O‘zbekistonni ijtimoiy-iqtisodiy rivojlantirishning eng muhim ustuvor yo‘nalishlariga bag‘ishlangan Vazirlar Mahkamasi majlisidagi ma’ruzasi.

3. O‘zbekiston Respublikasining “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi”, “Barkamol avlod O‘zbekiston taraqqiyotining poydevori-T. “O‘zbekiston” 1997

4. Karimov I.A, “Vatan ravnaqi uchun har birimiz mas’ulmiz” Toshkent. “O‘zbekiston” 2001 y

5. Mirziyoyev Sh. M, “Tanqidiy tahlil, qat’iy tartib intizom va shaxsiy javobgarlik har bir rahbar faoliyatining kundalik qoidasi bo‘lishi kerak”, 2017 yil 14-yanvar

6. Nazarov R.N, Toshpo‘latov B.T, Dusumbetov A.D. “Algebra va sonlar nazariyasi” Toshkent. “O‘qituvchi” 1995

7. Narzullayev X.N, Narzullayev U.X, “Bir noma’lumli taqqoslamalar” bo‘yicha metodik ko‘rsatmalar. Samarqand, 1986

8. Barnes W.E. “Introduction to abstract algebra”. Boston: D.C heath and company 1963.93

9. Brutton D. M, “Elementary number theory”. Boston: Allyn and Bacon 1980.

10. Malik D. S, Mordeson J. N and Sen. M. K, “Fundamentals of abstract algebra”. MeGraw Hill 1997

11. Nurboyev A.R, G‘aymnazarov G. “Uchinchi darajali tenglamalarni yechishning yana bir usuli”, Global oliy ta’lim tizimida ilmiy tadqiqotlarni

zamonaviy usullari, Xalqaro konferensiya (9-aprel 2015) materiallari, Navoiy 2015, 119-122

12. Nurboyev A.R “Uchinchi darajali tenglamalarni yechishning o‘zgacha usuli” Ta’lim tizimiga pedagog kadrlarni tayyorlash masalalari, Ilmiy-nazariy anjuman. Guliston 2016

13. G‘aymnazarov G, X.M. Nurullayev, A.X. Nurullayev “Umar Xayyom va algebra” FMI jurnali 5-son 2014

14. G‘aymnazarov G, Norjigitov H, G‘aymnazarov O, “Mirzo Ulug‘bek safdoshi, G‘yosiddin Jamshidning ilmiy merosi”, Fizika, matematika va informatika jurnali. T-2015, 3-son, 31-37 betlar.

15. Iskandarov R.I, Nazarov R , “Algebra va sonlar nazariyasi” (o‘quv qo‘llanma)- Toshkent. “O‘qituvchi” 1977

16. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. I.-М.:Физматлит, 1999.

17. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. II.-М.:Физматлит, 1999.

18. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. III.-М.:Физматлит, 2000.

19. Кострикин А.И. Введение в алгебру. - М.: Наука, 1977.

20. Сборник задач по алгебре / Под. Ред А.И. Кострикина, - М.: Факториал, 1995.

21. Дыбкова Е.В., Журков И.Б., Семенов А.А., Щмидт Р.А. Задачи по алгебре. Основы теории групп. – С.-Пб.: Изд-во С.- Пб. Ун-та, 1996.

22. Генералов А.И., Дыбкова Е.В., Журков И.Б., Меркурьев А.С., Семенов А.А., Щмидт Р.А. Задачи по алгебре. Основы теории колец. - С.-Пб.: Изд-во С.- Пб. Ун-та, 1998,

23. Винберг Э.Б. Курс алгебры. - М.: Факториал, 2001,

24. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Лаборатория базовых знаний, 1999.

25. Exercices in algebra: a collection of exercices in algebra , linear algebra and geometry / Ed. A. I. Kostrikin. – Gordon and Breach Publ., 1966.

26. www.mcce.ru

27. www.ziyonet.uz

28. www.kitob.uz

29. www.matem.narod.ru

30. www.lib.mexmat.ru