O‘ZBEKIATON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

G. G‘AYMNAZAROV, X. NARJIGITOV, O.G.GAIMNAZAROV

LOBACHEVSKIYNING NOEVKLID GEOMETRIYASI

TOSHKENT – 2017

G. G‘aymnazarov, X.Narjigitov, O.G.Gaimnazarov. Lobachevskiyning noevklid geometriyasi *o‘quv-uslubiy qo‘llanma.*

Ushbu qo‘llanmada Lobachevskiyning noevklid geometriyasi elementlari bayon etilgan. Bunda avvalo Evklid geometriyasining aksiomalari va undagi ba’zi tushunchalar, ta’riflar, teoremalar keltirilgan. Lobachevskiy geometriyasining vujudga kelish sabablari bayon etilgan. Lobachevskiy geometriyasini bayon etishda tushunchalar, aksiomalar va undagi asosiy teoremalar, tasdiqlar (faktlar) berildi va ayrimlarining isboti ham berildi.

Qo‘llanma universitet, pedagogika instituti va oliy ta’lim muassasalarining talabalari uchun mo‘ljallangan.

Taqrizchilar: Eshmurodov A. – pedagogika fanlari nomzodi, dotsent.
Jamuratov K. – fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.

Guliston davlat universitetining o‘quv-metodik Kengashi qarori bilan nashrga tavsiya etilgan (28.09.2016 yildagi №2-sonli bayonnoma).

SO‘Z BOSHI

Qimmatli otamiz
Sarimsoq og‘li G‘aymnazarning
yorqin xotirasiga bag‘ishlaymiz

Ushbu qo‘llanmaning maqsadi Lobachevskiyning noevklid geometriyasining asoslanishini bayon etishdan iborat. Bu yerda Evklid geometriyasi asosida noevklid geometriyaning vujudga kelishi bayon etiladi.

Noevklid geometriyaning paydo bo‘lishida sharq mamlakatlarning mutafakirlari Arabistonlik al-Jauxari (IX asr), Bog‘dodlik Sabit ibn Korra (IXasr), Eron matematigi Abul Abbos al-Fadla Ibn Xatima (Samarqand, Buxoro, Isroil, Marv), an-Nayriziy (X asr), Umar Xayyom (XI asr, 1048-1131), Marog‘alik (Ozarbayjon) Muxiddin al-Mag‘ribi (XIII asr), Ibn Sino (980-1037), Misrlik Ibn al-Xaysam (965-1039), Xusam ad-Din as-Samr (XIII asr), Ozarbayjon Nasir ad-Din Tusi (XIII asr) va boshqalar asos soldilar. Jumladan Markaziy Osiyo mutafakiri Umar Xayyom, Ibn Sino va boshqalarning faoliytidagi geometriyaga doir ilmiy ishlari muhim ahamiyatga ega bo‘ldi va ular asos soluvchi b‘ldilar.

N. I. Lobachevskiy noevklid geometriyani yaratishda Umar Xayyomning bashoratlariga (gipotezalariga) asoslandi deb tasdiqlay olamiz. Chunki Umar Xayyom o‘z faoliyatida: “Uchburchakning ichki burchaklar yig‘indis 180^0 dan kata bo‘la olmaydi” deb bashorat qilgan edi. Keyinchalik bu bashorat (gipoteza) N.I.lobachevskiy tomonidan yaratilgan geometriyada “Uchburchakning ichki burchaklar yig‘indisi 180^0dan kichik” deb tasdiqlandi va bu asosiy teoremalardan biri bo‘lib qoldi.

Lobachevskiy o‘z geometriyasini Evklidning beshinchi postulatini quyidagicha qabul qilish bilan yaratdi. Evklid geometriyasidagi boshqa aksiomalar o‘zgarilmay qoladi. “Tekislikdagi *l* to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan A nuqtadan shu *l* to‘g‘ri chiziqni kesmaydigan kamida ikkita to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin”. Bu Lobachevskiy aksiomasi deb yuritiladi.

Lobachevskiy geometriyasini tushunish uchun kosmik masshtabda fikr-mulohaza yuritish talab etiladi. Noevklid geometriyasining yaratilish paytida Lobachevskiy g‘oyalarini, fikr-mulohazalarini o‘sha davrda tushunish qiyin bo‘lgan, murakkab bo‘lgan va hatto ba’zi buyuk matematiklar tushunmagan. Masalan, o‘sha murakkab bo‘lgan davrda matematik Ostrogradskiy (shogirdlari bilan birgalikda) tushunmaganlar va natijada Lobachevskiyning bu kashfiyotiga manfiy taqriz bergan. O‘sha davr matematilaridan Gauss esa ikkilanib turgan, ya’ni Lobachevskiy noevklid geometriyasining kashfiyoti haqida biror fikr aytishda o‘zini chetga olgan.

Parallellar nazariyasini va Lobachevskiyning noevklid geometriyasini tushunish murakkabligidan Laplas, Lagranj, Bunyakovskiylar ham chekindilar va o‘zlarini chetga oldilar. Bular parallel chiziqlar nazariyasi bilan ham shug‘ullangan edilar. Keyinchalik A.Puankare, F.Kleyn, Beltramilar Lobachevskiy geometriyasining interpretatsiyalarini berganlaridan so‘ng bu kashfiyot hammaga tushunarli bo‘ldi.

Lobachevskiy geometriyasiyasini tushunib tasavvur qilish uchun Evklid geometriyasini va undagi tushuncha-ta’riflarni, aksiomalarni, ayrim ma’lumotlarni (teoremalarni shu jumladan inversion almashtirishlarning xossalarini) eslash, xotirlash lozim, shu nuqtai nazardan bu yerda shularning ba’zilari keltirildi.

Ushbu qo‘llanmaning qo‘lyozmasini sinchiklab o‘qib chiqib undagi kamchiliklarni ko‘rsatgan, Samarqand davlat universiteti dotsenti Arziqulov Abduxoliqqa, GulDU dotsenti K.Jamuratovga va SVPXTQMOI dotsenti A.Eshmurodovga o‘z minnatdorchiligimizni bildiramiz.

Qo‘llanma haqida fikr-mulohazalar bildirgan hamkasblarning takliflarini mualliflar samimiy hurmat bilan qabul qiladilar.

Mualliflar.

I bob. EVKLID GEOMETRIYASINING ELEMENTLARI

1.1-§. Evklid geometriyasi haqida ma’lumotlar.

Geometriya buyumlarning boshqa hamma xossalarini e’tiborga olmay, faqat ularning fazoviy xossalarini o‘rganadi. Masalan, diametri 25 santimetr bo‘lgan rezina koptok bilan cho‘yandan quyilgan xuddi o‘sha diametrli yadro bir-biridan og‘irligi, rangi, o‘zining qattiqligi va hokazo belgilari bilan farq qiladi. Biroq geometriyada o‘sha koptok bilan yadroning bu xossalari e’tiborga olinmaydi, bularning fazoviy xossalari (shakli va kattaligi) esa bir xil. Geometriya fani nuqtai nazaridan bu ikki predmetning har biri diametri 25 *sm* bo‘lgan *sharni* tasvirlaydi.

Fazoviy xossalaridan boshqa hamma xossalarini fikran ajratib tashlanganda buyum – *geometrik jism* deb ataladi. Shar – jismlardan biridir.

Abstraktlashtirishni yana davom qilar ekanmiz, biz geometrik *sirt*, geometrik *chiziq* va geometrik *nuqta* tushunchalarini hosil qilamiz. Sirtni biz fikran tegishli jismdan ajratamiz, uning qalinligi yo‘q deb faraz qilamiz. Chiziqning qalinligini va eni yo‘q, nuqtaning esa hech qanday o‘lchami yo‘q deymiz. Biz nuqta – chiziqning (yoki uning bo‘laklarining) chegarasi, chiziq esa sirtning chegarasi, nihoyat sirt jismning chegarasi xizmatini o‘taydi deb o‘ylaymiz. Shuningdek, biz nuqta harakat qilib chiziqni vujudga keltirishi, chiziq esa harakat qilib sirtni vujudga keltirishi, nihoyat, sirt ham harakat qilib jismni vujudga keltirishi mumkin deymiz.

Tabiatda o‘lchamlari bo‘lmagan nuqta yo‘q, lekin o‘lchamlari shu qadar kichik buyumlar borki, ularni ba’zi hollarda geometrik nuqta sifatida qabul qilish mumkin. Shuningdek, tabiatda geometrik chiziqlar ham, geometrik sirtlar ham mustaqil holda mavjud emas, ammo chiziqlarning va sirtlarning geometriyada topilgan hamma xossalari fan va texnikada keng miqyosda tadbiq etiladi. Bu shundan kelib chiqadiki, geometrik tushunchalar haqiqiy olamning fazoviy xossalaridan vujudga kelgandir. Geometrik tushunchalarning abstrakt formasi xuddi ana shu xossalarni sof holida o‘rganishga xizmat qiladi.

Kishilarda dastlabki geometrik tushunchalar g‘oyat qadimgi zamonlarda vujudga kelgan. U tushunchalar turli buyumlarning (idishlarning, omborlarning va shunga o‘xshashlarning) sig‘imini aniqlash va yer maydonlarining yuzlarini bilish ehtiyojlari tufayli vujudga kelgan. Yuzlarni va hajmlarni aniqlashga doir ma’lum qoida va ta’riflar bayon qilingan eng qadimgi yozma xotiralar bundan to‘rt ming yil ilgari Misr va Bobilda tuzilgan. Bundan ikki yarim ming yil chamasi ilgari greklar geometrik bilimlarni misrliklardan va bobilliklardan olishgan. Dastlab bu bilimlardan asosan yer maydonlarini o‘lchashda foydalanilar edilar. Grekcha “geometriya” – “yer o‘lchash” nomining kelib chiqishi ham ana shunga bog‘liqdir.

Grek olimlari g‘oyat ko‘p geometrik xossalarni ochishgan va geometriyaga tegishli bilimlarining chiroyli sistemasini vujudga keltirishgan. Bu sistemaning asosi qilib, ular geometriyaning tajribadan topilgan xossalarini olishgan. Geometriyaning qolgan xossalari ana shu eng sodda tushunchalardan mulohaza yordamida keltirib chiqarilgan.

Biron xossani aniqlovchi mulohaza *isbot* deb ataladi. Isbot qilinadigan xossa *teorema* deb ataladi. Geometrik teoremani isbot qilishda biz undan ilgari aniqlangan xossaga tayanamiz. Ulardan ba’zilari o‘z navbatida teoremalar bo‘ladi; bu xossalardan ba’zilari esa geometriyada asosiy teoremalar deb hisobilanadi va isbotsiz qabul qilinadi. Isbotsiz qabul qilinadigan xossalar *aksiomalar* deb ataladi.

Aksiomani quyidagicha ta’riflash mumkin.

Isbotlashga zaruriyat bo‘lmagan bevosita tushunarli bo‘lgan mulohaza aksioma deyiladi.

Postulatni esa quyidagicha ta`riflash mumkin.

Geometrik yasashlarni amalga oshirish mumkinligini bayon etuvchi mulohaza postulat deyiladi.

Aksiomalar tajriba orqasida vujudga kelgan, tajribaning o‘zi esa bu aksiomalarning hammasini birgalikda qarab, ularning haqiqatligini tekshiradi. Bu tekshirish shundan iboratki, geometriyaning hamma teoremalari tajribaga mos keladi; agar aksiomalar sistemasi soxta bo‘lganda edi, bu moslik yuz bermas edi.

Ayrim holda olingan hech bir geometrik xossa aksioma bo‘la olmaydi, chunki uni boshqa xossalar yordamida hamma vaqt isbot qilish mumkin bo‘ladi. Masalan, geometriyada odatda o‘zaro parallel chiziqlarning quyidagi xossasi aksioma sifatida qabul qilinadi “bitta nuqtadan bitta to‘gri chiziqqa parallel qilib, turli ikkita to‘gri chiziq o‘tkazish mumkin emas” (parallellik aksiomasi). Bu aksioma (va yana bir qator boshqalari) yordamida uchburchakning quyidagi xossasi isbot etiladi: “uchburchak ichki burchaklarining yig‘indisi 180° ga teng”. Vaholanki, bu keyingi xossani parallellik aksiomasi o‘rniga (boshqa aksiomalarni o‘zicha qoldirishi sharti bilan) aksioma sifatida qabul qilish mumkin edi. Bu holda parallel chiziqlarning yuqorida ko‘rsatilgan xossasini isbot qilish mumkin bo‘lar va u, teoremaga aylanar edi.

Shunday qilib, aksiomalar sistemasini har xil yo‘llar bilan tanlash mumkin. Bunda faqat shuni ko‘zda to‘tish kerakki, tanlangan aksiomalar yordamida geometriyaning boshqa hamma xossalarini keltirib chiqarish mumkin bo‘lsin. Geometriyada aksiomalar sonini mumkin qadar kam qilib olishga intiladi. Buni ayrim xossalar orasidagi mantiqiy bog‘lanishni oydinlashtirish maqsadida qilinadi.

Aksiomalar ko‘pincha eng sodda geometrik xossalar ichidan tanlab olinadi. Biroq, biror xossaning soddaligi yoki murakkabligi haqidagi fikrlar har xil bo‘lishi mumkin.

Biz geometriyadagi ba’zi tushunchalarni boshlang‘ich tushunchalar sifatida qabul qilamiz, ularning mazmunini faqat tajriba vositasida aniqlash mumkin (masalan, nuqta tushunchasi shunday tushunchalardandir). Qolgan tushunchalarning hammasini ana shu boshlang‘ich tushunchalarga asosan aniqlaymiz. Bu xildagi tushuntirishlar *ta’riflar* deb ataladi. Har qaysi geometrik ta’rif yo bevosita boshlang‘ich tushunchalarga, yoki o‘zidan oldin ta’riflangan tushunchalarga tayaniladi.

Bir geometrik tushunchaning o‘zini turlicha ta’riflash mumkin. Masalan, aylananing diametrini o‘z markazidan o‘tadigan vatar sifatida ta’riflash yoki eng katta vatar sifatida ta’riflash mumkin. Bu xossalardan biri ta’rif sifatida qabul qilinsa ikkinchisini isbot qilish mumkin bo‘ladi. Eng sodda tushunchani ta’rif sifatida qabul qilish yaxshiroq; ammo bu masalada ham umumiy bir fikr bor deb bo‘lmaydi.

1.2-§. Evklid geometriyasi ta’rifi, aksiomalar, postulatlar.

To‘g‘ri chiziqni fikran ikkala tomonga cheksiz davom ettirish mumkin. Geometriyada *„to‘g‘ri chiziq”* deb odatda hech qaysi tomonidan cheklanmagan to‘g‘ri chiziq tushuniladi. Bir tomonidan cheklangan bo‘lib, ikkinchi tomonidan cheklanmagan to‘g‘ri chiziq, *yarim to‘g‘ri chiziq* yoki *nur* deb ataladi. Ikkala tomonidan cheklangan to‘g‘ri chiziq *kesma* deb ataladi.

Evklidning “Negizlar” kitobida avvalgi sakkizta ta’rif quyidagicha ifodalangan:

***Ta’rif* I.** Nuqta shudirki, u bo‘laklarga ega emas.

***Ta’rif* II.** Chiziq ensiz uzunlikdir.

***Ta’rif* III.** Chiziqning chegaralari nuqtalar deb ataladi.

***Ta’rif* IV.** To‘g‘ri chiziq deb shunday chiziqqa ataladiki, u o‘zining hamma nuqtalariga nisbatan bir xil joylashgandir.

***Ta'rif* V.** Sirt shudirki, u uzunlik va enga egadir.

***Ta'rif* VI.** Sirtning chegaralari chiziqlardir.

***Ta'rif* VII**. Tekislik shunday sirtki, u o'zidagi hamma to'g'ri chiziqlarga nisbatan bir xil joylashadi.

***Ta'rif* VIII**. Tekis burchak deb bir-biri bilan kesishgan va bir tekislikda joylashgan, lekin bir to'g'ri chiziqda yotmagan ikki chiziqning bir-biriga qiyaligini aytiladi.

Bu ta'riflardan keyin, *postulatlar* va *aksiomalar* keltiriladi.

Postulatlar

I. Har bir nuqtadan istalgan ikkinchi nuqtaga to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin bo'lishni talab qilish kerak.

II. Chegaralangan har bir to'g'ri chiziqni istalgancha davom ettirish mumkin bo'lsin.

III. Istalgan markazdan har qanday radius bilan aylana chizish mumkin bo'lsin.

IV. Hamma to'g'ri burchaklar o'zaro teng bo'lsin,

V. Bir to'g'ri chiziq ikki to'g'ri chiziq bilan kesishib, ular bilan yig'indisi *2d* dan kichik bo'lgan ichki bir tomonli burchaklar tashkil qilsa, ularni bu yig'indi *2d* dan kichik tomonga qarab davom qildirganda, ular shu tomonda kesishadigan bo'lsin.

Bu oxirgi postulat *parallellar haqidagi* Evklidning mashhur V-*postulatidir*. Undan foydalanib, *biror to'g'ri chiziqda yotmagan nuqtadan shu to'g'ri chiziqqa faqat bitta parallel o'tkazish mumkinligini isbotlash mumkin;* bu isbotni Evklidning o'ziyoq bergan edi.

Aksiomalar

I. Uchinchi miqdorga teng bo'lgan miqdorlar, o'zaro tengdir,

II. agar teng miqdorlarga baravardan qo'shilsa, ularning yig'indilari ham teng bo'ladi,

III. agar teng miqdorlardan baravardan ayrilsa, qoldiqlar ham teng bo‘ladi,

IV. agar teng bo‘lmagan miqdorlarga baravardan qo‘shilsa, ularning yig‘indilari ham teng bo‘lmaydi,

V. teng miqdorlarni ikkilatsak ham ular teng bo‘ladi,

VI. teng miqdorlarning yarimlari ham tengdir,

VII. bir-biriga joylashuvchi (miqdorlar, figuralar) o‘zaro tengdir,

VIII. butun o‘zining bo‘lagidan kattadir.

IX. ikki to‘g‘ri chiziq fazoni chegaralay olmaydi.

Evklid aksiomalari uning postulatlariga qaraganda kengroq xarakterga egadir. Aksiomalarda umuman miqdorlarning xossalari tavsiflanib, geometrik miqdorlar xususiy holni tashkil qiladi.

Umuman aytganda aksioma va postulat bir xil tushunchalar.

Evklid postulatni geometrik yasash mumkinligi haqida tasdiq deb qaragan.

V postulat (Evklidning)ning ifodalanishi murakkabligi ahamiyat berib uni teorema sifatida keltirib chiqarishga harakat qilganlar.

Lagranj (1736-1831), Lejandr (1752-1833), Italiyalik J.Sakkeri (167-1733), frantsuz I.G.Lambert (1728-1777) bir necha marta V postulatni isbotlashga urinib ko‘rganlar.

V postulatni ba’zilar quyidagicha tasdiqlagan.

Pleyfer tasdig‘i (ingliz matematigi XVIII asr). Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqda yotmagan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziq kesmaydigan bitta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.

Geometriyani (va har qanday matematik nazariyani) aksiomalar asosida qurish ishi, birinchidan, *asosiy ob’ektlar kategoriyasini,* ikkinchidan, *bu ob’ektlar orasadagi asosiy munosabatlarni,* uchinchidan, *aksiomalarni* ko‘rsatishdan boshlanishi kerak. Geometriyada qaraladigan undan keyingi hamma ob’ektlar va ular orasidagi munosabatlar asosiy ob’ektlar orqali ta’riflanishi kerak, va barcha teoremalarni aksiomalapga suyanib isbotlash kerak.

1.2.1. Gilbert aksiomalari sistemasi

Evklid aksiomalari asosida Gilbert tomonidan tuzilgan aksiomalar gruppasini keltiramiz.

Geometriyada ko‘riladigan asosiy ob’ektlar, asosiy narsalar: *“nuqtalar”*, *“to‘g‘ri chiziqlar”, “tekisliklar"* dir. Nuqta, to‘g‘ri chiziq va tekislik Gilbert sistemasida asosiy tushunchalar bo‘lib ta’riflanmaydi. Bu tushunchalar ta’riflanmaydi, tushuntirilmaydi, tavsiflanmaydi.

Asosiy ob’ektlar orasidagy asosiy munosabatlar: *“bir-biriga qarashlik”, “orasida”, “kongruent bo‘lish"*. Bu asosiy munosabatlar ham ta'riflanmaydi, tushuntirilmaydi, tvsiflanmaydi. Shuni esda to‘tish kerakki, bir narsani ikkinchi narsa orqali, bu ikkinchini uchinchi narsa, uchinchini to‘rtinchi orqali.... va h k. bepoyon ta’riflay berish mumkin ham emas bu zanjirning *uchi bo‘lishi kerak.* Geometriya shu printsipga asoslanib, *asosiy ob’ektlar* va ular orasidagi *asosiy munosabatlardan* boshlaydi.

Aksiomatikani boshlab o‘zlashtirish davrida, ta’riflanmaydigan asosiy tushunchalar va ta’riflanmaydigan asosiy munosabatlarni ma’lum deb hisoblash mumkin. Ishning muhim tomoni shundaki, *asosiy ob'ektlar* va *asosiy munosabatlardan* biz *faqat aksiomalarga itoat etishni talab qilamiz* va boshqa jihatdan ularni *butunlay ixtiyoriy* deb faraz qilamiz.

Shuni ham e’tiborga olish kerakki, asosiy ob’ektlar va asosiy munosabatlar kategoriyalari turlicha bo‘lgan turli aksiomalar sistemasi mavjud, lekin ular bir-biriga ekvivalentdir; bu ekvivalentlikning ma’nosi shuki, bu sistemalarga asoslangan geometriya birxildir.

Aksiomalarning birinchi gruppasi: birlashtirish (qarashlik) aksiomalari.
Asosiy munosabat *“bir-biriga qarashlik”.*

I_1. *Har qanday ixtiyoriy ikki nuqta uchun bu nuqtalar qarashli bo‘lgan to‘g‘ri chiziq mavjud..*

I_2. *Har qanday to‘g‘ri chiziqda kamida ikkita nuqta mavjud.*

I_3. *To‘g‘ri chiziqda hech bo‘lmaganda ikkita nuqta mavjud. Bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan hech bo‘lmaganda uchta nuqta mavjud.*

I_4. *Bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan istalgan uchta A, B, C nuqta uchun, ularning har biriga qarashli* α *tekislik mavjud. Har bir tekislik uchun unga qarashli kamida bitta nuqta mavjud.*

I_5. *Bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta A, B, C nuqta uchun, shu nuqtalarga qarashli bo‘lgan bittadan ortiq tekislik mavjud emasdir.*

I_6. *Agar a to‘g‘ri chiziqning ikki A, B nuqtasi* α *tekislikda yotsa, a to‘g‘ri chiziqning har bir nuqtasi ham* α *tekislikda yotadi.*

I_7. *Agar ikki a,* r *tekislik umumiy A nuqtaga ega bo‘lsa, ularning kamida yana bitta umumiy B nuqtasi bordir.*

I_8. *Bir tekislikda yotmagan kamida to‘rtta nuqta mavjuddir.*

Aksiomalarning birinchi gruppasi shu bilan tugaydi. Bu gruppadagi avvalgi uchta aksioma (I_1—I_3), bir *tekislikda joylashgan* ob’ektlarga doirdir; bu gruppaning qolgan beshta aksiomasi (I_4—I_8) *fazoviy ob’ektlarga* doirdir.

Aksiomalarning ikkinchi gruppasi: tartib aksiomalari.

Asosiy tushuncha **“***orasida***”.**

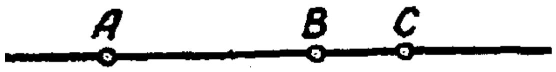
Gilbert quyidagi mulohazadan boshlaydi: „Bu grup-paning aksiomalari “*orasida”* tushunchasini aniqlaydi va bu tushunchaga asoslanib, to‘g‘ri chiziq, tekislik va fazoda nuqtalarning joylashishida *tartibni* o‘rnatishga imkoniyat beradi“.

II_1. *Agar B nuqta* (1-chizma) A va C *nuqtalar orasida yotsa, u holda A,B,C nuqtalar — to‘g‘ri chiziqning uchta turli nuqtalarini bildiradi va B nuqta C bilan A orasida ham yotadi.*

II_2. *A va C qanday nuqtalar bo‘lsada* (2-chizma), *AC to‘g‘ri chiziqda kamida shunday bitta B nuqta topiladiki, C nuqta A bilan B orasida yotadi.*

II_3. *To‘g‘ri chiziqning uchta nuqtasi berilgan bo‘lsa, ularning bittadan ortig‘i qolgan ikkitasi orasida yotaolmaydi.*

Ta’rif. Biror *a* to‘g‘ri chiziqda A va B dan iborat ikki nuqtani olaylik. *A* va B dan iborat ikki nuqta sistemasini



1-chizma

2-chizma

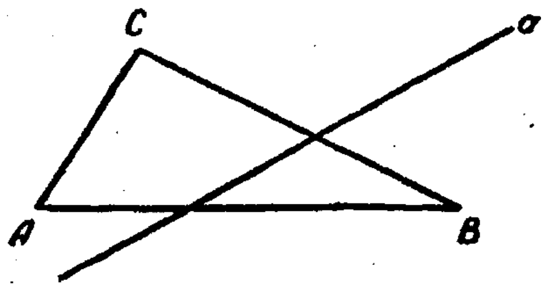
AB yoki B*A* *kesma* deb ataymiz: *A* bilan B orasida yotuvchi nuqtalarni — *AB* kesmaning nuqtalari, yoki *AB kesma ichida yotuvchi* nuqtalar deb ataymiz; *A* bilan B esa — *AB* kesmaning *chetlari, uchlari* deyiladi. To‘g‘ri chiziqning qolgan hamma nuqtalarini *AB* kesmadan *tashqarida* yotuvchi nuqtalar deymiz.

Bu gruppadagi shu uchta aksioma (II_1-II_3) ikkinchi gruppaning *chiziqli* aksiomalari deyiladi. Quyidagi aksioma (II_4) tekislikdagi *tartib* aksiomalaridan hisobilanadi.

Ta’rif. Bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan A, B, C nuqtalar sistemasi ABC uchburchak deb ataladi.

II_4. (P a s h a k s i o m a s i).

Bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta A, B, C nuqta va ABC tekislikda yotgan hamda A, B, C nuqtalarning hech biridan o‘tmagan a to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin (3-chizma),



3-chizma

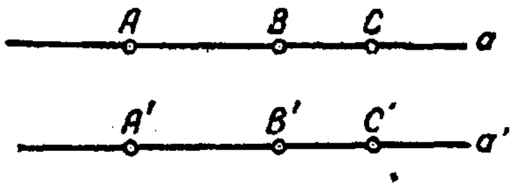
agar a to‘g‘ri chiziq AB kesma nuqtalarining biridan o‘tsa, u holda a to‘g‘ri chiziq yoki AC kesma nuqtalarining biridan yoki BC kesma nuqtalarining biridan o‘tadi.

Aksiomalarning uchinchi gruppasi: kongruentlik va harakat aksiomalari.

Asosiy tushuncha: *“kongruent”* yoki *“teng”*.

III$_1$. *Agar A, B — a to‘g‘ri chiziqning ikki nuqtasi,* va A' — *shu to‘g‘ri chiziq yoki boshqa a' to‘g‘ri chiziq nuqtasi bo‘lsa,* u holda *a' to‘g‘ri chiziqda A' nuqtadan berilgan tomonda yotuvchi bittagina shunday B' nuqtani hamisha topish mumkinki, AB kesma A'B' kesmaga kongruent (teng) bo‘ladi.*

Bu aksioma kesmalarni qo‘yaborish imkoniyatini beradi. Kesmalarning kongruentligi shunday belgilanadi: $AB \equiv A'B'$.



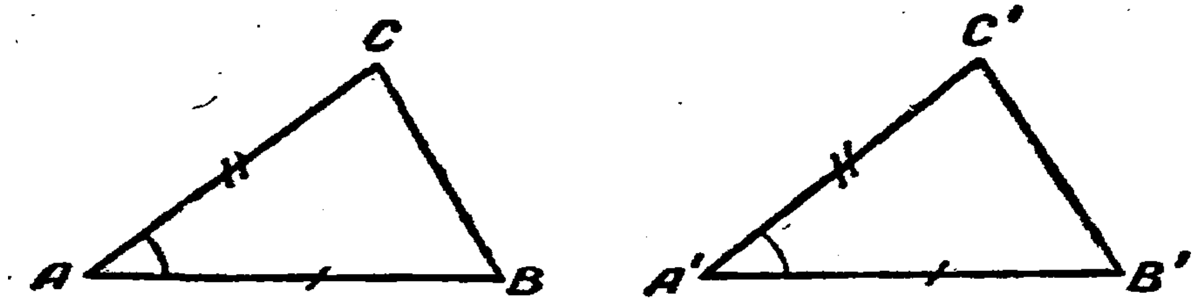
4-chizma

III$_2$. *Agar A'B' kesma va A''B'' kesma uchinchi AB kesmaga kongruent bo‘lsa, A'B' kesma A''B'' kesmaga ham kongruentdir; qisqaroq: agar ikki kesma uchinchi kesmaga kongruent bo‘lsa, ular bir-biriga kongruentdir.*

Istalgan kesmaning o‘z-o‘ziga kongruentligini bu ikki (III$_1$; III$_2$) aksiomaga suyanib isbotlash mumkin.

III$_3$. *Faraz etaylik, AB* va *BC—a to‘g‘ri chiziqning umumiy ichki nuqtalarga ega bo‘lmagan ikki kesmasi bo‘lsin; A'B' va B'C' esa, o‘sha to‘g‘ri chiziq yoki boshqa a' to‘g‘ri chiziqning yana umumiy nuqtalarga ega bo‘lmagan ikki kesmalari bo‘lsin (4-chizma), agar bunda $AB \equiv A'B'$ va $BC \equiv B'C'$ bo‘lsa, u holda $AC \equiv A'C'$ bo‘ladi.*

III$_4$. α *tekislikda <(h, k) burchak va α′ tekislikda a' to‘g‘ri chiziq* va *α ′ tekislikning a' ga nasbatan belgili bir tarafi berilgan bo‘lsin. a' to‘g‘ri chiziqning O′ nuqtasidan chiquvchi nuri h′ bo‘lsin. U holda* α' *tekislikda faqat bitta shunday h' nur mavjudki, <(h, k) burchak <(h', k') burchakka kongruent (teng) dir va shu bilan birga, <(h', k'), burchakning ichki nuqtalari a*' *dan yuqorida ko‘rsatilgan tarafda yotadi.*



5-chizma

T a ’ r i f. *Harakat deb tekislik nuqtalari to‘plamining o‘z-o‘ziga shunday akslanishiga aytiladiki, unda har bir AB kesma, o‘ziga kongruent bo‘lgan A'B' kesmaga almashinadi. (5-chizma)*

Shunday qilib, “*harakat*” kongruentlik orqali aniqlandi; Gilbert sistemasida “harakat” hosilaviy tushunchadir. Bundan so‘ng kongruentlik aksiomalaridan foydalanib, “harakat” ning xossalarini ifodalovchi bir necha teoremani isbotlash mumkin. Bu teoremalarning ba’zilarini keltiraylik.

1°. Harakat har qanday to‘g‘ri chiziqni to‘g‘ri chiziqqa almashtiradi.

2°. Harakat kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlarni kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlarga, parallellarni yana parallellarga almashtiradi.

3°. Nurlarni harakat yana nurlarga almashtiradi.

4°. Burchakning ichki sohasi yana burchakning ichki sohasiga almashinadi.

Bulardan so‘ng *harakat* turlarini ta’riflash mumkin. Agar *O* nuqta o‘zining *O′* obrazi bilan birlashsa, ya’ni *O* nuqta o‘z o‘rnida qolsa, *harakat O nuqta atrofida aylantirish* deb ataladi. Agar biror harakat natijasida hamma nuqtalar o‘z o‘rnida qolsa, u ham *aylantirishdir*.

Agar harakat natijasida: 1) biror *a* to‘g‘ri chiziqning har bir A nuqtasi shu *a* to‘g‘ri chiziqning biror *A′* nuqtasiga almashinsa, 2) α tekislikning *a* to‘g‘ri chiziqdan bir tarafda yotgan har bir nuqtasi, yana o‘sha tarafda qolsa, biz bu harakatni *parallel ko‘chirish* yoki *siljitish* deb ataymiz. Hamma nuqtalarni o‘z o‘rnida qoldirgan *harakatni* istalgan to‘g‘ri chiziq bo‘ylab siljitish yoki istalgan nuqta atrofida aylantirish qatoriga kiritish mumkin.

Agar harakat natijasida: 1) biror a to‘g‘ri chiziqning har bir A nuqtasi o‘z o‘rnida qolsa, *2)* α tekislikning har bir nuqtasi a to‘g‘ri chiziqning ikkinchi tarafidagi nuqtaga almashinsa, bunday harakat *simmetriya* deb ataladi.

Birin-ketin bajarilgan ikki harakatning natijasini, bir bor bajarilgan harakat bilan ham hosil qilish mumkin.

Agar α tekislikning ixtiyoriy nuqtasini M bilan belgilasak, birinchi harakat M nuqtani M' ga, ikkinchi harakat M' nuqtani M'' ga almashtiradi. Natijada α tekislikning hamma nuqtalarini shunday almashtirish yuzaga keladiki, uning oqibatida ixtiyoriy M nuqta M'' nuqtaga almashinadi. Keyingi bu almashtirish, albatta, *harakatdir*. Hosil qilingan harakat oldingi ikki harakatning *ko‘paytmasi* deyiladi.

Shunday qilib, juda muhim t e o r e m a hosil qilindi: *ikki harakatning ko‘paytmasi harakatdir*.

Harakatlardan iborat ko‘paytuvchilarning t a r t i b i muhim rolni o‘ynaydi.

Har bir harakat, ikki simmetriya va sonni bittadan oshmagan siljitishni ko‘paytirish natiasida hosil qilinishi mumkin. Biz buning isbotiga to‘xtamaymiz.

α tekislikning hamma nuqtalarini o‘z o‘rnida qoldirgan almashtirishning *harakatdan* iboratligini biz bilamiz. Bunday harakat *aynan* harakat deb ataladi; harakatlarni ko‘paytirishda u “birlik" rolini o‘ynaydi.

Agar harakat ixtiyoriy M nuqtani M' nuqtaga o‘tkazsa, M' nuqtalarni o‘z o‘rniga qaytaruvchi almashtirish vujudga keladi. Bu almashtirish ham *harakatdan* iboratdir, chunki u o‘zaro birqiymatli bo‘lib, istalgan kesmani unga kongruent kesmaga o‘tkazadi. Bu oxirgi harakat dastlabkiga nisbatan *teskari* deyiladi. Harakat bilan unga teskari harakatning ko‘paytmasi, aynan harakatga teng bo‘lib, ko‘paytuvchilar tartibiga bog‘liq emasdir; bunday harakatlar o‘zaro teskari deyiladi.

Tekislikning o‘z-o‘zi bo‘ylab qilgan harakatlarining xossalarini yakunlaylik.

1°. Ikki harakat ko‘paytmasi yana harakatdir.

2°. Barcha harakatlar to‘plami ichida aynan harakat bordir.
3°. Har bir harakat uchun teskari harakat mavjuddir.

Agar elementlarning biror to‘plamini, masalan, α tekislik nuqtalarini o‘z-o‘ziga o‘zaro birqiymatli almashtirishlarning to‘plami, yuqoridagi uchta xossani qanoatlantirsa, ular *gruppani* tashkil qiladi deb aytamiz.

Masalan, α tekislikning markazi *O* nuqtada bo‘lgan hamma gomotetik almashtirishlari gruppani tashkil qiladi, chunki:

1°. Markazi *O* dan iborat ikki gomotetiya ko‘paytmasi, markazi o‘sha *O* nuqtada bo‘lgan gomotetiyadir.

2°. α tekislikning aynan almashtirishi, (o‘xshashlik koefitsienti birga teng) *O* markazli gomotetiyadir.

3°. O markazli har qanday gomotetiya uchun teskari gomotetiya mavjuddir.

Markazi berilgan nuqtadan iborat barcha gomotetiyalar to‘plami garchi gruppani tashkil qilsa-da, ular *harakatlardan* iborat emasdir.

Biz *harakat tushunchasini kongruentlik* tushunchasi orqali aniqladik, ammo aksincha, ya’ni *kongruentlikni harakat* orqali aniqlash ham mumkin. Bu usul Evklid tomonidan qabul qilingan edi; uning izidan borib, kollej va litsey darsliklarida ham aksiomatik tomoniga diqqat qilmasdan, shu usul qo‘llaniladi. Harakatning yuqorida keltirilgan xossalariga asoslanib, kongruentlik aksiomalari o‘rniga harakat aksiomalarini kiritish mumkinligini ko‘rsatamiz.

Aksiomalarning uchinchi gruppasi: harakat aksiomalari.

A s o s i y t u s h u n c h a : *harakat.*

III'$_1$. *Harakatlar tekislikni o‘z-o‘ziga akslatishlarning gruppasini tashkil qiladi.*

III'$_2$. *Har bir harakat natijasida kesma yana kesmaga almashinadi.*

III'$_3$. *Ixtiyoriy ravishda berilgan bo‘lsin: O va O′ nuqtalar, OA* va *O'A' nurlar*; *bu nurlarning har biri* α *tekislikni ikkita yarim tekislikka bo‘ladi, ana shu yarim tekisliklardan bittadan olib, ularni* r va r' *bilan belgilaylik. Faqat bitta shunday* *harakat borki, u ayni zamonda O nuqtani O' nuqtaga, OA nurni O'A' nurga va* r *yarim tekislikni* r' *yarim tekislikka almashtiradi.*

Bu aksiomalar quyidagilarni isbotlashga imkon beradi: 1) har qanday harakat to‘g‘ri chiziqni yana to‘g‘ri chiziqqa, 2) burchakni burchakka, 3) uchburchakni uchburchakka almashtiradi va h. k. Buning ketidan *kongruentlikni* ta’riflash mumkin.

Ta’rif. Ikki kesma, ikki burchak, ikki uchburchak va **α** tekislikdagi umuman ikki figurani bir-biriga o‘tkazadigan harakat mavjud bo‘lsa, ular kongruent deb ataladi.

Harakat aksiomalariga asoslanib kongruentlikka berilgan bu ta’rifdan so‘ng, Gilbert aksiomatikasidagi uchinchi gruppa aksiomalarini isbotlash mumkin; demak yangi aksiomatikada bu aksiomalar *teoremalarga* aylanadi.

Bu muhokamalar, aksiomalar bilan teoremalarning bir-biri o‘rniga o‘tishiga yana bir misolni beradi; shu bilan birga, bu misol *asosiy tushunchalari* turli bo‘lgan aksiomalarning ekvivalent sistemalari borligini ko‘rsatib beradi.

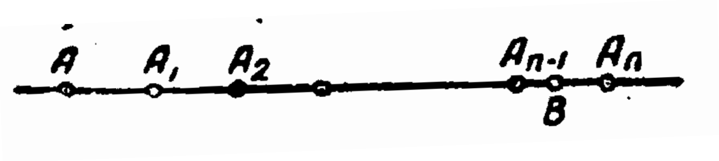
Aksiomalarning to‘rtinchi gruppasi: parallellar aksiomasi.

IV. (Evklid aksiomasi). *Agar a ixtiyoriy to‘g‘ri chiziq va A unda yotmagan nuqta bo‘lsa, u holda A nuqta va a to‘g‘ri chiziq bilan aniqlanuvchi tekislikda A nuqtadan o‘tib, a to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydigan to‘g‘ri chiziqlar bittadan oshiq emasdir.*

Ta’rif. Oldingi muhokama va Evklid aksiomasiga asosan *a* to‘g‘ri chiziq va *A* nuqta bilan aniqlangan tekislikka *A* dan o‘tib *a* bilan kesishmaydigan faqat bitta to‘g‘ri chiziqning borligini bilib olamiz. Uni biz A nuqtadan o‘tib, *a* ga *parallel* to‘g‘ri chiziq deb ataymiz.

Aksiomalarning beshinchi gruppasi: uzluksizlik aksiomalari.

V_1. (O‘lchash aksiomasi, yoki Arximed aksiomasi). *AB* va CD *ixtiyoriy ikki kesma bo‘lsin; u holda AB to‘g‘ri chiziqda chekli sonli shunday* A_1, A_2, A_3 *....,* A_n *nuqtalar mavjudki,* AA_1, A_1A_2, A_2 A_3,..., $A_{p-1}A_p$ *kesmalar CD kesmaga kongruent va B nuqta A bilan* A_n *orasida yotadi* (6-chizma).



6-chizma

Bu — Lejandrning birinchi teoremasini isbotlash vaqtida ishlatilgan A r x i m e d - E v d o k s aksiomasidir. Uni, ravshanroq qilib tushuntiraylik: agar AA_1 kesmaga kongruent *CD* kesma *AB* ga butun son marta “joylashsa“, aksiomaning shartlarini qanoatlantirish uchun, yana bir, ikki, uch,... “qadam” qo‘yish mumkin.

Bu grupparing ikkinchi aksiomasini keltirish oldidan, ushbu teoremani isbotsiz keltiraylik.

T e o r e m a (to‘rt nuqtaning bir to‘g‘ri chiziqqa joylashish tartibi haqidagi teoremani umumlashtiradi). *Chekli sonda olingan nuqtalar to‘g‘ri chiziqda qanday joylashsa-da, ularni A, B, C, D, E, ..., K harflar bilan shunday tartibda belgilash mumkinki, B harfi bilan belgilangan nuqta bir yoqdan. A ikkinchi yoqdan C, D, E, ..., K nuqtalar orasida yotadi; C bilan belgilangan nuqta bir yoqdan A, B nuqtalar va ikkinchi yoqdan D, E,...,K nuqtalar orasida yotadi; D—bir yoqdan A, B, C va ikkinchi yoqdan E,..., K orasida yotadi* va h.k. *Bu tariqada belgilash usulidan tashqari shu xossaga ega bo‘lgan teskari tartibda belgilash usuligina bordir: K,..., E, D, C, B, A.*

V_2. (To‘g‘ri chiziqda mukammallik aksiomasi). *To‘g‘ri chiziqning nuqtalari shunday sistemani tashkil qiladiki, u sistemani chiziqli tartibni saqlash* (**Teorema**) *sharti bilan birga, kongruentlik aksiomalarining birinchisini va Arximed aksiomasini* (ya’ni I_1-I_2; II; III_1; V_1 *aksiomalarni) buzmasdan turib, kengaytirish mumkin emasdir, ya’ni oldingi sistemaga, avvalgi va keyagaytirish natijasida qo‘shilgan nuqtalardan tuzilgan yangi sistemada keltirilgan aksiomalarning hammasining bajarilish sharti bilan, yangi nuqtalar qo‘shish mumkin emas*.

Bu aksioma uzundan-uzun bo‘lib, undagi tushunchalarni hatto odatlanib kelgan narsalarimiz, ya’ni “nuqtalar”, “to‘g‘ri chiziqlar” ni odatdagi nuqtalar, to‘g‘ri chiziqlar deb tushunsakda, baribir, bu aksiomaning ifodalanishi juda og‘ir, uni darrov tushunib bo‘lmaydi. Bu aksiomaning ifodasida oldingi aksiomalarning qariyb hammasi, va hatto “Teorema” ham ishtirok etadi.

A. Puankare Gilbert aksiomatikasidagi kamchilikni ko‘rsatib o‘tgan edi.

A.Puankare mulohazasiga yondashib quyidagi mulohazani keltiramiz. Kamchilik aksiomatikaning “mukammal emasligida” dir. I; II; III; IV; V_1 va V_2 nomerlar aksiomalarning “mukammal emasdigi” nimadan iboratligini tushunish uchun, quyidagicha muhokama yuritamiz.

To‘g‘ri chiziq sekin-asta nuqtalar bilan to‘ldirilmoqda, deb faraz etaylik. Masshtab birligini olib, to‘g‘ri chiziqqa 1 bilan belgilangan nuqtani “qo‘yaylik“. Hozircha to‘g‘ri chiziqda shu “birlik” nuqtadan boshqa nuqta mavjud emasdir. Ana shu birlik nuqtani olib, absissalari, 1 ga nisbatan to‘rtta arifmetik amalni (qo‘shish, ayirish, ko‘paytish, bo‘lish) *chekli marta* qo‘llash natijasida hosil qilingan nuqtalarni to‘g‘ri chiziqqa qo‘ya boramiz qisqacha aytganda, to‘g‘ri chiziqqa *“ratsional nuqtalar”*ni, ya’ni ratsional absissali nuqtalarni joylashtirmoqdamiz. Bizning ixtiyorimizda hozircha boshqa nuqtalar yo‘q. Masalan, tomoni 1 ga teng kvadratning diogonaliga tent *OA* kesmani *O* nuqtadan qo‘ysak, bu kesmaning oxiri “bo‘sh joyni” ko‘rsatadi, chunki *A* nuqtaning absissasi irratsional son $\sqrt{2}$ ga tengdir.

Bunday “bo‘shliq”lar hali juda ko‘p. Chindan ham, to‘g‘ri chiziq, OA+$\sqrt{2}$ kesma miqdorida o‘ng tomonga qarab siljitilgan deb faraz qilaylik, u holda *har bir ratsional va nuqta* $a+\sqrt{2}$ *dan iborat “bo‘sh joyga” borib tushadi.* Qizig‘i shundaki, barcha *ratsional* nuqtalarnnng to‘g‘ri chiziqni *hamma joyida zich* to‘ldirishiga qaramay, bo‘sh joylar yana qoladi, “hamma joyda zich” degan so‘zlar, bir-biriga har qancha yaqin ratsional x_1, x_2 nuqtalar orasida cheksiz ko‘p yana ratsional nuqtalar borligini bildiradi, masalan x_1, x_2 kesmaning o‘rtasi

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}$$

va h. k.

Endi arifmetik to‘rt amaldan tashqari, Gilbert bilan birgalikda beshinchi amalni olaylik:

$$\left|\sqrt{1+\omega^2}\right| .$$

Radikal ostidagi ω ko‘rsatilgan beshta amal yordami bilan ilgari hosil qilingan sondir. Masalan, ωq1 bo‘lsa, $\sqrt{2}$ hosil bo‘ladi; $\sqrt{2}$ ga istalgan ratsional *a* sonni qo‘shsak, $a+\sqrt{2}$ shakldagi nuqtalarni vujudga keltiramiz. Agar ω=1+$\sqrt{2}$ deb faraz qilsak, beshinchi amal $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ ni beradi va h. k. Bu ravishda hosil qilingan *barcha* nuqtalarni (bular Ω *maydonni* tashkil etsin) sonlar o‘qiga “qo‘ya borib” va boshqa nuqtalar yo‘q deb hisoblasak, to‘g‘ri chiziqni to‘ldirgan bo‘lmaymiz. Nuqtalari Ω maydon nuqtalaridan iborat to‘g‘ri chiziqning hali ham “teshiklari” ko‘p. Masalan, $\sqrt[3]{2}$ bo‘sh joyni ko‘rsatadi. To‘g‘ri chiziqni $\sqrt[3]{2}$ miqdorida siljitib, “Ω m a y d o n n i n g h a m m a n u q t a l a r i n i” “bo‘sh joylarga", ya’ni maydonga tegishli bo‘lmagan nuqtalarga ko‘chirgan bo‘lamiz. Hatto Ω maydonga qolgan hamma algebraik haqiqiy sonlarni qo‘shsakda, π yoki *e* miqdorida siljitish natijasida haqiqiy sonlarning bu to‘plami yana “bo‘sh joylar”ni ishg‘ol qiladi. Shunday qilib, Ω maydon nuqtalaridan “yasalgan” to‘g‘ri chiziqning hali “teshigi ko‘p”.

Endi Dekart sistemasining uchta o‘qi OX, OY, OZ — ana shunday “teshikli” to‘g‘ri chiziqlardan iborat, ya’ni ularning nuqtalari faqat Ω maydon nuqtalaridan iborat deb faraz etaylik. Koordinatalari Ω maydon elementlaridan iborat “teshikli" fazoga “*Omega skelet”* nomini beramiz.

“Omega skelet” tuhunchasini kiritgandan so‘ng, uzluksizlik aksiomalari faqat Arximed aksiomasidan iborat bo‘lgan Gilbert aksiomatikasining “*mukammal emasligi”* nimada ekanini ko‘rsatish mumkin.

Birinchi kategoriya ob‘ektlari, ya’ni *“nuqtalar”* sifatida Ω skelet nuqtalarini; ikkinchi kategoriya ob‘ektlari uchun, ya‘ni “*to‘g‘ri chiziqlar”* sifatida faqat Ω *skelet* nuqtalari bilan to‘ldirilgan oddiy to‘g‘ri chiziqlarni va “*tekisliklar”* sifatida Ω skelet nuqtalaridan tuzilgan “teshikli” tekisliklarni olaylik, so‘ngra “*qarashli”*, “*orasida”, “teng bo‘lish”* so‘zlarini odatdagidek tushunsak, *Gilbertning V_2 dan boshqa, hamma aksiomalari qanoatlantirilgan bo'ladi,* Gilbert o'z kitobining ikkinchi va keyingi nashrlarida ana shularni ko'rsatib o'tadi.

"Gilbert fazosida bizning fazomizda bo'lgan hamma nuqtalar mavjud emasdir, unda faqat ikki nuqtadan sirkul va lineyka yordami bilan yasash natijasida hosil qilinadigan nuqtalargina bor, xolos" deb Puankare yozgan edi.

"Omega skeletni" belgili bir usul bilan yangi nuqtalar bilan boyitish mumkin, masalan, haqiqiy algebraik sonlar maydonini asos qilib olish mumkin; bu holda V_2 *dan boshqa hamma aksiomalar qanoatlantirilgan bo'ladi.* Fazo bu holda ham "hamma joyda" uzlukliligicha qolar edi.

Nihoyat *"omega skeletni"* bizning uzluksiz fazomizgacha nuqtalar bilan to'ldirish mumkin; bu holda yana haligi aksiomalar qanoatlantirilgan bo'ladi. Demak, aksiomalari I, II, III, IV va V_1 dan iborat benihoya ko'p geometriyalar vujudga keladi.

Bu qiyinchilikdan qutulish maqsadida Gilbert o'zining ana shu sun'iy *mukammallik aksiomasini* kiritdi.

Gilbertning mukammallik aksiomasidagi kamchiliklarga keyinchalik 1948 yilda P.K.Rashevskiy tuzatish kiritdi.

Gilbertning uzluksizlik va boshqa aksiomalari asosida (Evklidning IV aksiomasidan foydalanmasdan) Dedekindning uzluksizlik aksiomasini isbotlash mumki (Dedekind aksiomasini quyida keltiramiz) va aksincha, Dedekind aksiomasi va boshqa aksiomalar asosida (IV aksiomadan foydalanmasdan), uzluksizlik aksiomalarni (V_1, V_2) isbotlash mumkin.

D e d e k i n d a k s i o m a s i quyidagicha ifodalanadi:
Agar to'g'ri chiziqning hamma nuqtalari ikki sinfga taqsimlanib:

1) Har bir nuqta faqat bitta sinfga kirsa va *har bir sinfda nuqtalar mavjud bo'lsa*.

2) *Birinchi sinfning har bir nuqtasi, ikkinchi sinfning har bir nuqtasidan oldin kelsa, u holda, yo birinchi sinfda shunday nuqta mavjudki, bu sinfning*

hamma nuqtalari undan oldin keladi, yoki ikkinchi sinfda shunday nuqta mavjudki, bu nuqta, ikkinchi sinfning hamma nuqtalaridan oldin keladi.

Aksiomada mavjudligi haqida aytilgan nuqta, to‘g‘ri chiziqni *kesuvchi* nuqta (*Dedekind kesimi)* deyiladi. “o*ldin keladi"* termini tartib aksiomalari yordami bilan aniqlanadi.

I.F.Kagan postulatlari

Evklid geometriyasining asosini tashkil etuvchi aksioma va postulatlarni D.Gilbert XVII asrda tuzgan edi.

Biz bu erda Evklid va Lobachevskiy geometriyasining postulatlarini V.F.Kagan 1905 yilda tuzgan sistemasini keltirib o‘tamiz.

Bulardan boshqa “vektorlar” asosida tuzilgan Veyyel aksiomalari ham mavjud.

V.F.Kagan postulatlari quyidagicha:

I. Har qanday A va B nuqtalar orasida uzunligi AB kesmadan kichik bo‘lgan ixtiyoriy uzunlikdagi kesmada shu A va B yoki B va A nuqtalar orasida yotuvchi oraliq nuqta mavjud.

II. Agar C va D nuqtalar A va B nuqtalarga nisbatan chiziqli joylashgan bo‘lsa, u holda aksincha A va B nuqtalar C va D nuqtalarga nisbatan chiziqli joylashgandir.

III. Agar biror harakat A va B nuqtalarni A′ va B′ nuqtalar bilan ustma-ust tushirsa, u holda AB va A′B′ masofalar tengdir.

IV. Fazodagi ikkita har xil nuqtani hech qanday harakat birinchi ikkinchisiga ustma-ust tushirmaydi.

Quyidagi beshinchi postulat harakat gruppani tashkil etishni tasdiqlaydi.

V. Fazoda ixtiyoriy C va C′ harakatlar qanday bo‘lmasin ularni ketma-ket hosil qiluvchi CC′ harakat mavjud.

VI. Agar C va C′ nuqtalar mos ravishda A nuqtadan ham va B nuqtadan ham bir xil uzoqlikda bo‘lsa, ya’ni AC=AC′ va BC=BC′ munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda C nuqtani C′ nuqtaga o‘tkazuvchi A va B nuqtalardan o‘uvchi to‘g‘ri chiziq atrofida aylantirish mavjud.

VII. Agar biror harakat bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta nuqtani tinch (qo‘zg‘almas) qoldirsa, u holda bu harakat fazoning hamma nuqtalarini tinch (qo‘zg‘almas) qoldiradi.

VIII. Fazoda tekislik mavjud.

IX. Agar A va C nuqtalar hamda C va D nuqtalar biror tekislikning bir tomonida joylashgan bo‘lsa, u holda A va D nuqtalar ham shu tekislikning bir tomonida joylashgan bo‘ladi.

Bu to‘qqizta postulatlar Evklid geometriyasini va Lobachevskiy geometriyasi orasida tanlashni keltirib chiqaradi.

Agar o‘ninchi postulat sifatida Evklidning beshinchi postulati qo‘shib olinsa, u holda biz ob’ektlarning asosiy sistemasida to‘la aniqlangan Evklid fazosini hosil qilamiz.

V.F.Kagan tomonidan taklif qilingan Evklid geometriyasining sistemasi D.Gilbert ishiga bog‘liq bo‘lmagan holda yaratilgan.

Endi Lobachevskiy geometriyasini tushunish uchun zarur bo‘lgan ma’lumotlarni keltiramiz.

1.3-§. Uchburchaklarning o‘xshashlik va tenglik alomatlari

O`xshash uchburchaklar; O`xshashlik alomatlari

Agar ikki uchburchakning burchaklari mos ravishda teng va mos tomonlari proporsional bo‘lsa, ular **o‘xshash** uchburchaklar deyiladi.

Teorema: (uchburchaklar o‘xshashligining birinchi alomati). *Bir uchburchakning ikki burchagi, ikkinchi uchburchakning ikki burchagiga teng bo‘lsa bunday uchburchaklar o‘xshashdir*.

Teorema: (uchburchaklar o‘xshashligining ikkinchi alomati). *Bir uchburchakning ikki tomoni, ikkinchi uchburchakning ikki tomoniga* *proporsional va bu tomonlar oralaridagi burchaklar teng bo'lsa, bunday uchburchaklar o'xshashdir.*

Teorema: (uchburchaklar o'xshashligining uchinchi alomati). *Agar ikki uchburchakning tomonlari proporsional bo'lsa, u holda bu uchburchaklar o'xshashdir.*

Teorema: (uchburchaklar o'xshashligining to'rtinchi alomati). *Bir uchburchakning ikki tomoni ikkinchi uchburchakning ikki tomoniga proporsional va birinchi uchburchakning bu tomonlaridan kattasi qarshisidagi burchak, ikkinchining tegishli burchagiga teng bo'lsa, bunday uchburchaklar o'xshashdir.*

Uchburchaklar tengligining asosiy alomatlari

Tomonlari va burchaklari mos ravishda teng bo'lgan ikki uchburchak **kongruent** yoki **teng** uchburchaklar deb ataladi. ABC va $A'B'C'$ uchburchaklarning tengligini ushbu ko'rinishlardan birida yozish mumkin:

$$\Delta ABC=\Delta A'B'C'; \qquad \Delta BAC=\Delta B'A'C'; \ldots$$

Teorema: (uchburchaklar tengligining birinchi alomati). *Bir uchburchakning ikki tomoni ikkinchi uchburchakning ikki tomoniga mos ravishda teng bo'lsa, va ular orasidagi burchak teng bo'lsa, bu uchburchaklar teng.*

Teorema: (uchburchaklar tengligining ikkinchi alomati). *Bir uchburchakning bir tomoni ikkinchi uchburchakning bir tomoniga teng bo'lib, bu uchburchaklarning shu tomonlariga yopishgan burchaklari ham mos ravishda teng bo'lsa, bunday uchburchaklar tengdir.*

Teorema: (uchburchaklar tengligining uchinchi alomati). *Bir uchburchakning uchta tomoni ikkinchi uchburchakning uchta tomoniga mos ravishda teng bo'lsa,bu uchburchaklar tengdir.*

Vallis (1616-1703) postulati. Ikkita o'xshash va teng bo'lmagan uchburchak mavjud.

Bu postulat Evklidning V postulatiga ekvivalent.

1.3.1. Figuralarda gomotetiya va o‘xshashlik. Inversiya.

1. Gomotetiyaning ta’rifi va xossalari.

Ushbu paragrafda o‘xshashlik tushunchasini istagan figurlarga umumlashtirish va undan tashqari, ikki o‘xshash figuraning tekislikda o‘zaro joylashish masofasini ko‘rib o‘tamiz. Ikki figuraning o‘xshashligidagi xususiy bir holdan boshlaylik.

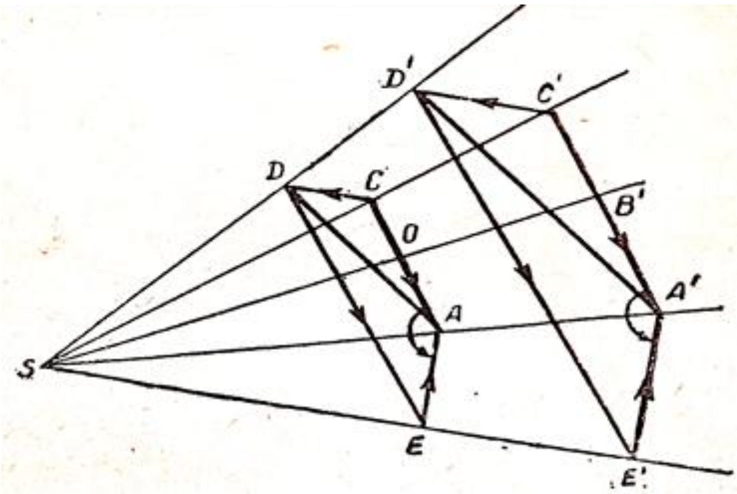
Berilgan **F′** va **F** figuraning nuqtlarini orasida o‘rnatilgan moslik quyidagi uch xossaga ega bo‘lsin:

a) bir-biriga mos har juft mos nuqtani tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziqlar bitta S nuqtadan o‘tsa;
b) bir-biriga mos har qanday ikki nuqta yo **S** dan bir tarafda yotadi yoki har juft mos nuqtalar **S** dan turli tarafda yotadi;
c) agar **A, B**-birinchi figuraning qandaydir ikki nuqtasi va **A′, B′**-ikkinchi figurada ularga mos kelgan nuqtalar bo‘lsa, u holda: **SA′:SA=SB′:SB** (1 va 2 chizma); bunday holda **F′** figura **F** ga gomotetik yoki perspektiv-o‘xshash deb ataladi.

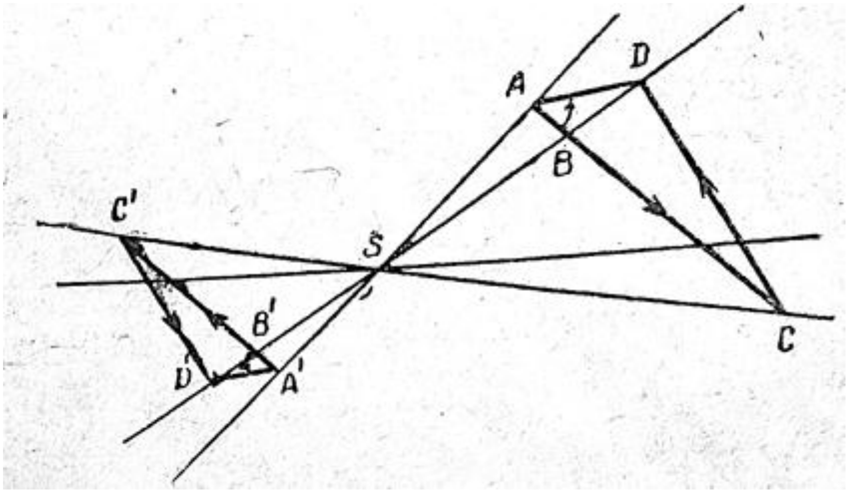
Bu tarifda ustida so‘z borgan **S** nuqta *o‘xshashlik markazi* (yoki *gomotetiya markazi*) deb ataladi; o‘zgarmas nisbat **k=SA′:SA=SB′:SB=…** esa **F′** figuraning **F** figuraga nisbatan *o‘xshashlik koefitsitenti (* yoki *gomotetiya koefitsitenti)* deb ataladi. Ikkala figura nuqtalari orasidagi moslik, yoki boshqacha aytganda, birinchi **F** figuraning nuqtalarini ikkinchi **F′** figuraning nuqtalariga o‘tkazuvchi almashtirish, **gomotetiya** deyiladi.

2. O‘xshashlik haqida tushuncha.

O‘xshashlik markazi **S** bo‘lgan gomgtrtiya ko‘z oldimizga yaqqol keltirish uchun, uni nuqtaga nisbatan cho‘zish deb tasavvur qilish kerak (aniqroq qilib aytganda **k>1** bo‘lsa, cho‘zish va **k<1** bo‘lsa- siqish; bunday cho‘zish yoki siqish, **S** nuqtadan qaytish bilan ham bir vaqtda bajarilishi mumkin). (1-chizma)



1-chizma



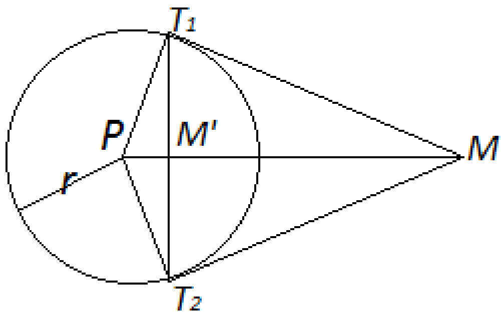
2-chizma

Agar har ikki mos nuqta **S** nuqtadan turli tarafda yotsa-*teskari gomotetik (*2-chizma*)* deb ataladi; o‘xshashlik markazining o‘zi birinchi holda o‘xshashlikning *tashqi markazi,* ikkinchi holda esa *ichki markazi* deb ataladi.

3. Inversiya haqida tushuncha.

Markazi **P** va radiusi r bo‘lgan aylana berilgan deb faraz qilaylik (3-chizma). Biror **M** nuqta aniqlik uchun, aylanaga nisbatan tashqi nuqtani olaylik. M nuqtadan berilgan aylanaga $\mathbf{MT_2}$ va $\mathbf{MT_1}$ urunmalar o‘tkazamiz va $\mathbf{T_2T_1}$ vatarning **PM** to‘gri chiziq bilan kesishgan **M′** nuqtani yasaymiz. To‘g‘ri burchakli $\mathbf{PMT}_1$ uchburchakdan (teorema*) quyidagini topamiz:

$$\mathbf{PM \cdot PM' = r^2} \qquad (1)$$



3-chizma

Aksincha, aylana ichida yotuvchi **M′** nuqta berilgan bo‘lsa, tashqi **M** nuqtani yasash oson.

Agar bir nurda yotgan ikki **M** va **M′** nuqtaning markazi **P**, radiusi **r** bo‘lgan aylana markazigach masoflari (1) tenglikni qanoatlantirsa, bu nuqtalar shu aylanaga nisbatan *o‘zaro teskari* deb ataladi. Ravshanki, aylanada yotgan nuqtaga teskari bo‘lgan nuqta shu nuqtaning o‘zi bilan birlashadi va aylana markaziga teskari nuqta mavjud bo‘lmaydi.

Bir-biriga teskari nuqtalar orasidagi moslik yoki boshqacha aytganda, har bir **M** nuqtadan unga teskari **M′** nuqtani hosil qilishga imkoniyat beruvchi almashtirish *aylanaga nisbatan inversiya* yoki *giperbolik inversiya* deyiladi. Aylaning o‘zi *inversiya aylanasi* deyiladi; uning markazi *inversiya markazi (*yoki *inversiya qutbi)* deyiladi; bu aylana radiusining kvadirati-*inversiya darajasi* deyiladi. Biror invesiyada bir-biriga mos kelgan ikki figura *o‘zaro teskari* (yoki *inversion mos*) figuralar deyiladi.

Yuqorida aytilganlardan, inversiya tekislik nuqtalarining (P nuqtasidan boshqa) o‘zaro bir qiymatli almashtirishdan iborat degan natija kelib chiqadi. Inversiya markazi teskari nuqtaga ega emas.

Inversiyada bir-biriga mos nuqtalar orasidagi moslik ushbu xossaga ega: agar **M′** nuqta **M** nuqtaga mos kelsa , **M** nuqta **M′** nuqtaga mos keladi. Inversiya aylanasidagi har bir nuqta qo‘sh nuqtadir.

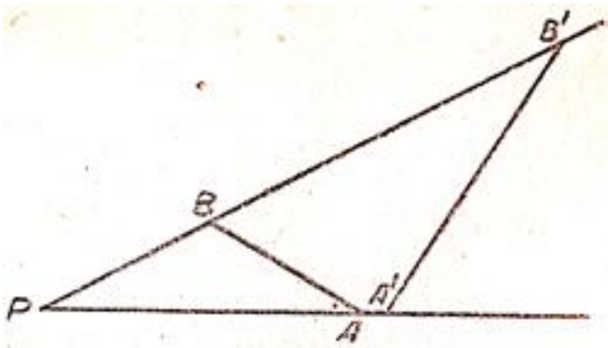
Endi o‘zaro teskari nuqtalarning bir xossasini isbot qilaylik.

Teorema. Agar **P** inversiya markazi, **h** uning darajasi, **A, A′** va **B, B′** o‘zaro teskari ikki juft nuqta bo‘lib, **A, B** nuqtalar inversiya markazi bilan bir to‘g‘ri chiziqda yotmasa, bu holda **PAB** va **PA′B′** uchburchak o‘xshashdir (tegishli uchlar deb hisobilangan, **A** va **B′**, **B** va **A′** nuqtalar bir biriga teskari emas) va **AB** va **A′B′** kesmalar orasida ushbu bog‘lanish bor:

$$A'B' = \frac{h \cdot AB}{PA \cdot PB}. \qquad (2)$$

Inversiya markazi bilan bir to‘g‘ri chizqda yotuvchi ikki juft teskari **A, A′** va **B, B′** nuqtalar uchun (absalyut kattalik va yo‘nalish jihatdan) ushbu tenglik bor: (4-chizma)

$$A'B' = \frac{h \cdot BA}{PA \cdot PB}. \qquad (2')$$



4-chizma

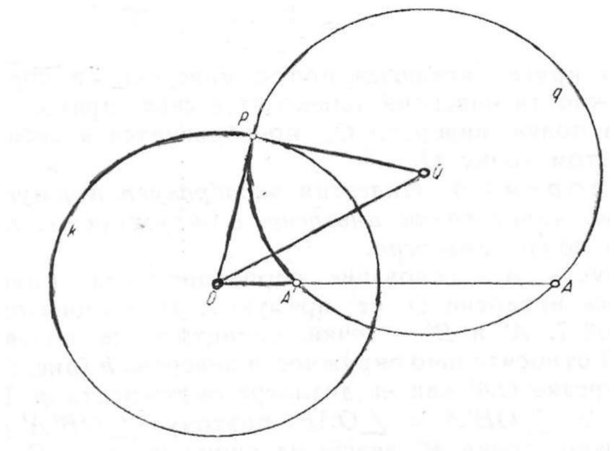
TEOREMA*. To‘g‘ri burchakli uchburchak katetini kvadrati, gepotenuza bilan shu katetni gepotenuzaga tushurilgan proyeksiyasi ko‘paytmasiga teng.

TA’RIF. Agar ikkita aylanalar kesishganda to‘g‘ri burchak tashkil etsa, u holda bunday aylanalar o‘zaro ortogonal (perpendikulyar) deyiladi.

TA’RIF. Agar ikki aylananing kesishgan nuqtasiga o‘tkazilgan urinmalar to‘g‘ri burchak tashkil etsa, u holda bunday aylanalar o‘zaro ortogonal deyiladi.

TEOREMA 1. Agar **q** aylana **k** aylanaga nisbatan simmetrik bo‘lib har xil **A** va **A′** nuqtasidan o‘tsa, u holda **q** va **k** aylanalar o‘zaro ortogonal bo‘ladi.

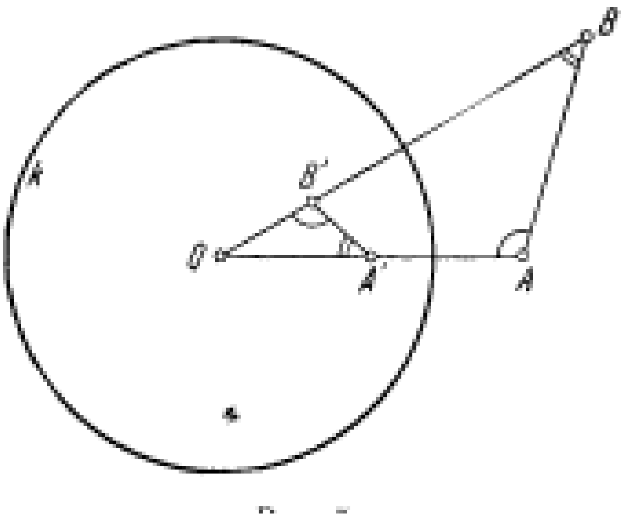
TEOREMA 2. Agar **k** va **q** aylanalar ortogonal bo‘lsa va **k** aylananing **O** markazidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq **q** aylanani biror nuqtada kesib o‘tsa, u holda bunday to‘g‘ri chiziq **q** aylanani **k** aylanaga nisbatan simmetrik bo‘lgan nuqtada kesib o‘tadi (5-chizma).



5-chizma

TEOREMA 3. Faraz qilaylik **OAB** uchburchak berilgan bo‘lsin, bunda **O** nuqta **k** aylananing markazi bo‘lib **A′** va **B′** nuqtalar **A** va **B** nuqtalarning **k** aylanaga nisbatan nuqtalari bo‘lsin (6-chizma). U holda

$$\angle \mathbf{OABq}\angle \mathbf{OB'A'} \quad \text{va} \quad \angle \mathbf{OBA}=\angle \mathbf{OA'B'}$$

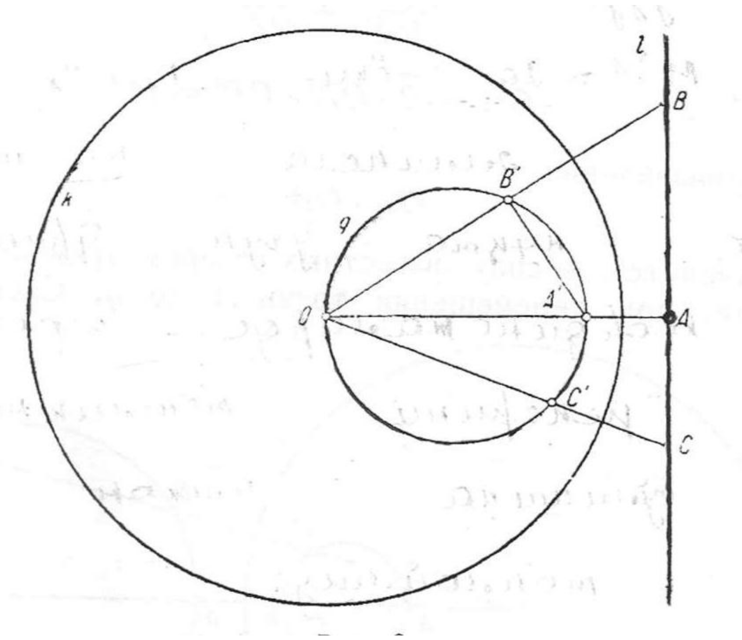


6-chizma

TEOREMA 4. Inversiya qutbidan o‘tmaydigan to‘g‘ri chiziqni inversiya aylanaga o‘tkazadi (tasvirlaydi), bunda aylana inversiya qutbidan o‘tadi.

Bu teoremani boshqacha qilib aytganda quyidagicha:

TEOREMA 4′. Inversion shakl almashtirish inversiya qutbidan o‘tmaydigan to‘g‘ri chiziqni inversiya qutbidan o‘tuvchi aylanaga almashtiradi (o‘tkazadi, tasvirlaydi).



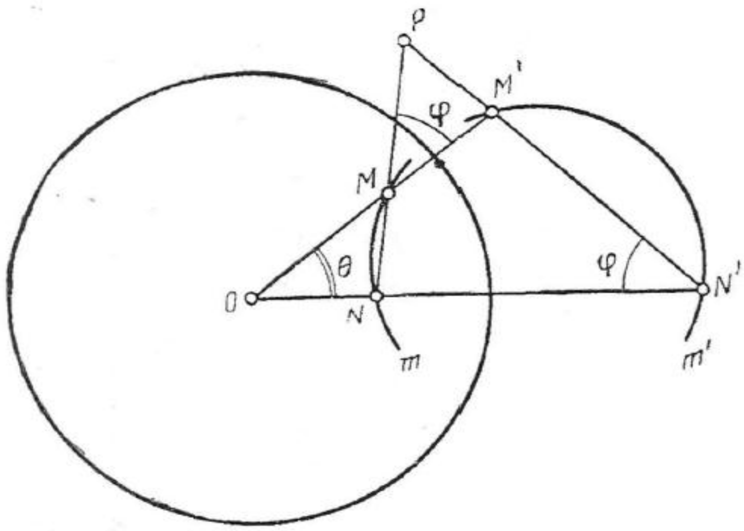
7-chizma

TEOREMA 5. Inversion almashtirish inversiya qutbidan o‘tuvchi aylanani inversiya qutbidan o‘tmaydigan to‘g‘ri chiziqqa aylantiradi (o‘tkazadi, tasvirlaydi). (7-chizma)

TEOREMA 6. Inversion almashtirish inversiya qutbidan o‘tmaydigan aylanani yana boshqa inversiya qutbidan o‘tmaydigan aylanaga almashtiradi (o‘tkazadi, tasvirlaydi).

TEOREMA 7. Biror **k** aylanaga ortogonal bo‘lgan **p** va **q** aylanalarning kesishgan nuqtalari shu **k** aylanaga nisbatan simmetrik bo‘ladi.

TEOREMA 8. **M** va **N** nuqtalar **k** aylanaga nisbatan simmetrik bo‘lgan **m** va **m′** chiziqlarning **k** aylanaga nisbatan simmetrik bo‘lgan nuqtalari bo‘lsa, u holda **m** va **m′** chiziqlarning **M** va **M′** o‘tkazilgan urinmalari **MM′** to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘ladi yoki asosi **MM′** dan iborat bo‘lgan teng yonli uchburchakni tashkil etadi.



8-chizma

TEOREMA 9. Inversion almashtirish burchak kattaligini o‘zgartirmaydi.

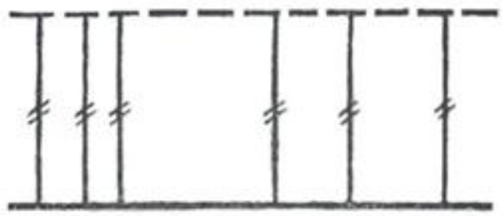
TA’RIF. Burchak kattaliklarini o‘zgartirmaydigan almashtirishlar (umuman almashtirishlar) konform almashtirishlar deyiladi (8-chizma).

Demak, inversion almashtirish konform almashtirishdan iborat (teorema9). Yuqorida keltirilgan teoremalarning isboti R.K.Otajonovning “Geometrik yasash metodlari” (Toshkent. 1972) kitobida ko‘rish mumkin.

1.4-§. Beshinchi postulatni isbotlashga doir urinishlar.

Qadimgi grek olimi Posidoniy (eramizdan avvalgi I-asr) parallel to‘g‘ri chiziqlarni nuqtalari berilgan bitta to‘g‘ri chiziqdan teng uzoqlikda yotuvchi to‘g‘ri chiziqni tushunishni taklif etgan. U holda beshinchi pastulot osongina isbotlanadi.

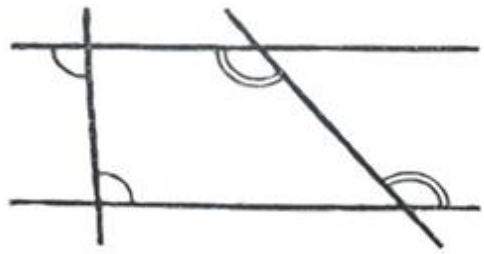
Bu yerda Posidoniy xatosi sezilmagan holda (parallellikni ta’riflashda) yangi pastulotni kiritmaganligidandir. Uning yangi pastuloti berilgan to‘g‘ri chiziqdan o‘zgarmas uzoqllikda yotuvchi tekislikdagi hamma nuqtalar to‘g‘ri chiziqdan iboratdir (1-chizma).



1-chizma

2) Arab olimi al Jauxari (IX-asr) o‘z isboti quyidagini qabul qilgan (faraz qilgan);

Agar bir kesuvchida kesishishidan hosil qilgan burchaklar teng bo‘lsa, u holda boshqa kesuvchida ham teng bo‘ladi (2-chizma).



2-chizma

3) Bog‘dod olimi Sobit ibn Korra (IX-asr) xatosi: “Sodda” harakat (ilgarilama, ketma-ket, hamma trayektoriyalar to‘g‘ri chiziq) mavjud deb qabul qiladi (qaraydi). U holda ixtiyoriy ikkita trayektoriya teng uzoqlikda turuvchi to‘g‘ri chiziqlar va parallellik postulati isbotlanadi.

4) Markaziy Osiyolik olim Umar Xayyomning V-postulatga doir ishlariga to‘xtab o‘tamiz.

Endi Umar Xayyom “Sharq va oshkola musadarot fi kitob uqlidis” asarida Evklidning postulatiga to‘xtaydi. Xayyom uning to‘g‘riligiga shubxa qilmaydi, ammo uni juda aniq emas deb hisoblaydi va to‘g‘ri ekanliginini ko‘rsatish uchun faylasufdan ya’ni Aristoteldan olingan beshta prinsipni keltiradi.

I. Miqdorlarni cheksiz bo‘lish mumkin, ya’ni ular bo‘linmaslardan tashkil topmagan.
II. Tog‘ri chiziqni cheksiz davom etrish mumkin.

III. Har qanday kesishuvchi ikki to‘g‘ri chiziq ochiladi va kesishish burchagi uchidan masofasi ortgani sari bir-biridan uzoqlashadi.

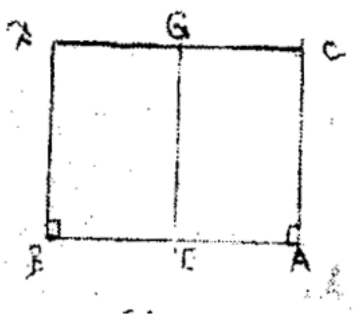
IV. Yaqinlashuvchi ikki to‘g‘ri chiziq kesishadi, ular yaqinlashish yo‘nalishida uzoqlashishi mumkin emas.

V. Ikki teng emas, chegaralangan miqdordan kichigini shunday tanlab olish mumkinki, u kattasidan katta bo‘ladi.

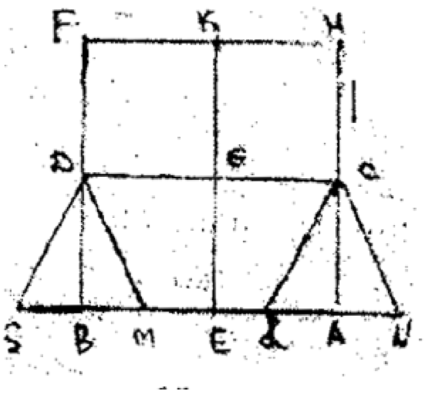
Yuqoridagi I, II va III prinsiplar Aristotelniki, IV prinsip esa unda yo‘q. V prinsip esa Arximed aksiomasi deb ataladi. Xayyom V postulatining to‘g‘riligini isbotlashda eng avval bitta to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar ikki to‘g‘ri chiziq kesishmaligini isbotlaydi. Aks holda to‘g‘ri chiziqlar o‘zlari tik bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning har ikkala tomonida kesishishlari mumkin edi.

II prinsipga ko‘ra ular bir-biridan uzoqlashmaydi agar uzoqlashsa, to‘g‘ri chiziqning har ikkala tomonida uzoqlashadi.

So‘ngra u sakkizta jumla isbotlaydi. Bu jumlalar uning $AC \perp AB$, $BD \perp AB$ hamda CD kesmalaridan yasalgan to‘rtburchagning burchaklari uchun kerak (3-chizma).



3-chizma



4-chizma

1-jumlada to‘rtburchakning yuqoridagi burchaklarining tengligi isbotlanadi.

2-jumlada to‘rtburchak pastki asosing o‘rtasiga o‘tkazilgan perpendikulyar uning ustki asosiga ham tik va uning teng ikki bo‘lakga ajratishi isbotlanadi.

3-jumlada yuqoridagi burchaklar ham to‘g‘ri burchak ekani isbotlanadi.

ACDB to‘rtburchak asosining o‘rtasi E nuqtada ustki CD asosini uning o‘rta nuqtasi G nuqtada kesuvchi EG perpendikliyar o‘tkaziladi (4-chizma), EG kesma EGqGK gacha davom ettiriladi. K nuqtada $EK \perp HF$ o‘tkaziladi. CHFD to‘rtburchakning ACDB to‘rtburchakga ega ekanligni ko‘rsatiladi.

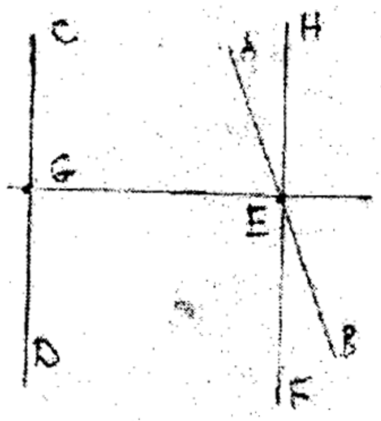
Agar $\angle ACD$ va $\angle BDC$ lar to‘g‘ri bo‘lsa, u haqiqat. Agar unday bo‘lmasa, ular yo burchakdan katta yoki to‘g‘ri burchakdan kichik. Faraz qilaylik, ular to‘g‘ri burchakdan kichik bo‘lsin. Agar CHFD yassi figurani ACDB figuraga qoysak, GK kesma ustiga EG, HF kesma AB kesma ustiga tushadi. Bunda HFqSN bo‘ladi, chunki $\angle HCG > \angle ACG$; HF>AB. Shuningdek, CH va FD lar davom ettirilsa, ular bir-biridan uzoqlashadi. Demak, AC va BD lar uzolashuvchi chiziqlar (4-chizma). Faraz qilaylik, ACD va BDC burchaklar to‘gri burchakdan katta bo‘lsin. U holda yuqoridagi figurani pastagi figuraga joylashtirsak; HFLM bo‘ladi va LM<AB. Demak, AC va BD chiziqlar yaqinlashuvchi.

Shunday qilib, o‘tmas va o‘tkir burchak gipotezalar zidlikga keltirildi va to‘g‘ri burchak gipotezasi qoldi.

4-jumlada to‘gri to‘rtburchaklarda qarama-qarshi tomonlarining tengligi isbotlanadi.

5-jumlada esa Evklidning V postulati isbotlanadi.

BG - to‘g‘ri chiziq EA va GC to‘g‘ri chiziqlarni yig‘indisini ikki burchakdan kichik AEG va CGE burchaklar hosil qilib kesadi (5-chizma).



5-chizma

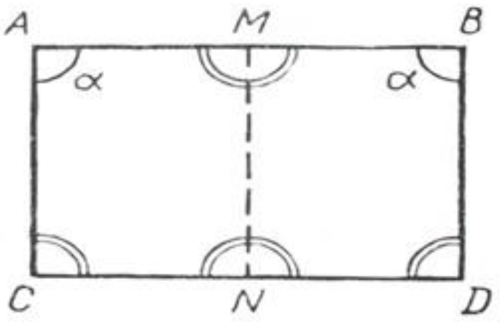
Agar $\angle AEG = \angle CGE$ bo‘lsa, EGD burchakga teng GEH burchak yasaladi. U holda EH. GC bo‘ladi. Agar ikki to‘g‘ri chiziq bitta to‘g‘ri chiziqqa tik bo‘lsa, ular parallel bo‘ladi degan jumlaga ko‘ra EH va GC to‘g‘ri chiziqlar orasi o‘zgarmas, GC va EA to‘g‘ri chiziqlar esa bir-biriga yaqinlashadi. Xayyom prinsipiga ko‘ra ular kesishadi. Shunday qilib Evklidning V postulati isbot bo‘ldi.

Umar Xayyom astronomiya bilan ham shug‘ulangan. Shu sababli Malikshox uni 1074-yildan so‘ng Eron Quyosh kalendarini islox qilish uchun Hamadonga taklif qilgan. Bu haqida tarixchi Ibn al-Asir quyidagilarni yozadi:

Bu yil Nizom al-Mulk va sulton Malikshoh uchun rasadxona qurildi. Uni tashkil qilishda eng yaxshi astronomlar Umar ibn roxim al-Xayyom, Abo‘l Muzaffar al-Isfizoriy, Maymun Najib al-Vasatiy va boshqalar ishtirok etishdi. Rasadxona tashkil qilishga juda ko‘p mablag‘ sarf qilindi.

Ingiliz matematigi Jon Vallis (1616-1703) beshinchi postulatga teng kuchli muloxazalarni ularning mualliflarni ko‘rsatib, sanab o‘tdi va o‘xshash (lekin teng emas) uchburchaklar mavjud degan muloxazalarni bayon etdi. Vallis o‘zining barcha ko‘p sonli va muhim natijalarni to‘la isbotni bermagan, ular keyinchalik isbotlangan. Uning yuqoridagi mulohazasining isboti quydagicha: (AA′) va (BB′)-AB to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lsin, AC nur esa [AB] bilan o‘tkir burchak tashkil etadi. AC nurning ixtiyoriy N_1 nuqtasidan AB ga perpindikulyar N_1B_1 ni tushiramiz va AB_1N uchburchakka o‘xshash to‘g‘ri burchakli uchburchak ABN ni qaraymiz. Buning uchun AN_1 ni davom ettirib va unda N nuqtani shunday olamizki, $\frac{|AN|}{|AN_1|} = \frac{|AB|}{|AB_1|}$ tenglik bajariladi. O‘xshashlikdan $ABN = AB_1N = d$. Demak, N nuqta BB' to‘g‘ri chiziqda yotadi, bundan perpindikulyar va o‘gmaning kesishligi kelib chiqadi, bu bilan beshinchi postulat isbotlanadi.

Italyan matematigi Jovanni Jirolomo Sakkeri “Barcha tugma dog‘lar”idan xalos etilgan Evklid asarida V postulatni teskarisidan faraz qilish yo‘li bilan isbotlashga urindi. Bunda u Xayom to‘rt burchagini o‘rganishga tayanadi. (6-chizma)



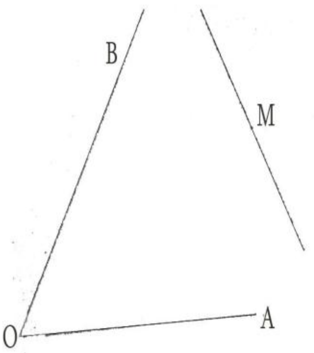
6-chizma

AC va BD tomonlar teng. U holda $\angle Aq\angle Bq\alpha$ burchak kattaligi haqida faraz mavjud:

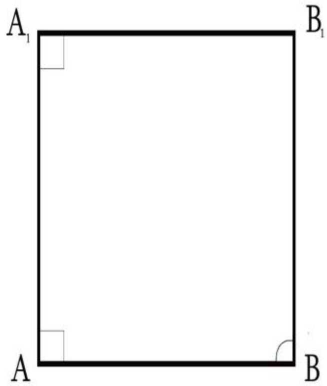
1) **α-** burchak o‘tkir, yani **α<π/2** (o‘tkir burchak farazi);
2) **α-**o‘tmas burchak, yani **α> π/2** (o‘tmas burchak farazi);
3) **α-** to‘g‘ri burchak, yani **α=π/2** (to‘g‘ri burchak farazi).

Umar Xayom Aristotel postulatidan 1 va 2 xollarning bo‘lishi mumkin emasligini ko‘rsatadi, shu orqali uchinchi farazning to‘g‘rligi isbotlanadi. Sakkeri esa o‘tmas burchak farazini qarama-qarshilikga olib keladi, so‘ngra uning fikricha mulohazalar yordamida o‘tkir burchak farazi ham qarama-qarshilikga uchraydi. Natijada, uchinchi farazning to‘g‘rligi kelib chiqadi, bu bilan postulat isbotlangandi. Lekin Sakkeri mulohazalarda xatoga yo‘l qo‘yib yagona muhim bo‘lgan geometriya-Evklid geometriyasi degan xulosag keladi, bu bilan beshinchi postulatning haqiqatligi “isbotlanadi”. O‘tmas burchak farazidan kelib chiqqan Sakkeri mulohazalari umuman olganda Lobachevskiy geometriyasining birinchi teoremalaridan iborat deb hisoblash mumkin.

Ularni keyinchalik qaytadan fransuz matematigi Mari Lejandr topgan. Lejandir 1794-yilda yozgan elementlar geometriya bo‘yicha o‘quv qo‘llanmasi “Geometriya asoslari”da Evklid postulatni isbotlashga bir qator urinishlar qilgan. U uchburchak burchaklari yig‘indisi π dan katta bo‘lmasligi isbotlanayotganda AOB o‘tkir burchak ichida yotuvchi M nuqtadan, burchakning OA va OB tomonlarini kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqni hamma vaqt ham o‘tkazish mumkin degan farazga tayanadi. Agar bu faraz bo‘lmaganda edi, Evklid postulati isbot qilingan deb hisoblanar edi. Haqiqatdan, agar uchburchakning burchaklari yig‘indisi π dan katta va kichik bo‘lmasa, u holda uchinchi mumkin bo‘lgan faraz: uchburchak ichki burchaklari yig‘indisi π ga teng ekanligi kelib chiqgan edi. Bundan esa Evklid nostulatining isboti kelib chiqadi. (7-chizma). Nemis matematigi Yogann Genrix Lambert (1728-1777) ham bu postulatni isbotlashga urindi.



7-chizma



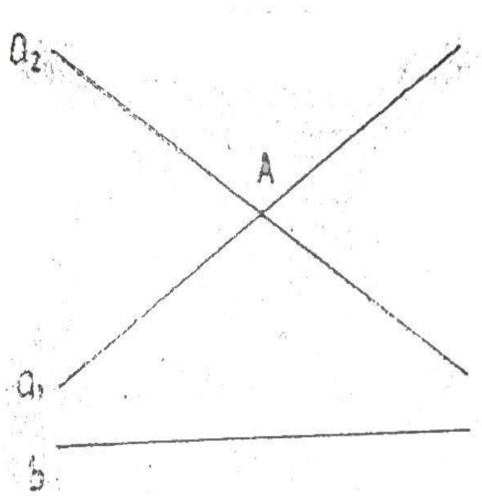
8-chizma

U quyidagicha yasashlarni bajaradi. AB kesmalarnning uchlaridan ikkita perpendikular va teng kesmalar AA_1 va BB_1 ajratadi. So‘ngra AA_1 kesmaning oxiridan A nuqtaga yana bitta perpendikulyar tushirdi, uchta to‘g‘ri burchakli to‘rtburchak hosil bo‘ladi (8-chizma). Sakkeriga o‘xshab u ham to‘rtinchi burchak farazlarini ilgari surdi. So‘ngra to‘g‘ri burchak farazi beshinchi postulatga teng kuchliligini hamda o‘tmas burchak farazi qarama-qarshilikga uchrashini isbotladi. Lambert keyinchalik o‘tkir burchak farazidan kelib chiqadigan fikrlarni rivojlantrishga harakat qildi, lekin bunda qarama-qarshilikni uchrata olmadi. Shunday qilib V postulatni isbot qilish mumkin emas degan fikrga keladi. Bu bilan XIX asr boshigacha beshinchi postulat muammosi hal qilinmay qoldi.

Bu muamoning yechimini buyuk rus matematigi Nikolay Ivanovich Lobachevskiy (1792-1856) 1826-yil 23 fevral kuni Qozon universiteti fizika-matematika bo‘limiga taqdim etgan “Geometriya asoslarining qat’iy isboti bilan” asari qo‘lyozmasida topdi. Bu yangi geometriya to‘g‘risidagi birinchi axborot edi va axborot bo‘lib kirdi. Faqat uch yildan so‘ng, 1829-1830 yillarda “Kazanskiy vestnik” jurnalida uning Geometriya asoslari haqida maqolasi bosilib bu kashfiyot mazmuni bayon etildi. Lobachevskiy birinchi marta Evklidning beshinchi postulati geometriyaning boshqa aksiomalariga bog‘liq emasligini isbotladi. Lobachevskiy Evklid aksiomatikasida beshinchi postulatni quyidagi aksioma bilan almashtirdi: to‘g‘ri chiziqdan tashqaridagi tekislikda yotuvchi, ular bilan kesishmaydigan ikkitadan kam bo‘lmagan to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.

Demak, Lobachevskiy aksiomasiga muvofiq A nuqtadan o‘tuvchi a_1 va a_2 to‘g‘ri chiziqlar b to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tmaydi (9-chizma).

Lobachevskiy o‘zi yaratgan geometriyani rivojlantira borib uni “faraz qiluvchi” geometriya deb atadi hamda qat’iy mantiqiy sistemani yaratadi.



9-chizma

Bu geometriya Evklid geometriyasidan tamoman farq qilar edi. Lekin u mantiqiy qarama-qarshilikga duch kelishi lozim edi, chunki ikkita geometriyaning bir vaqtda mabjud bo‘lishligi mumkin emas edi. Lobachevskiy yangi natijalar keltirib chiqara berdi, ular mantiqiy qarama-qarshiliklarga uchramadi. Lobachevskiy bu natijalarni 1835-yilda Qozon universiteti ilmiy ishlarida “Faraz qilinadigan geometriya” 1835-1838 yillarda e’lon qilingan “Parallel to‘g‘ri chiziqlar to‘la nazariyasi va geometriyaning yangi asoslari” va

1885-yilda yana Qozon universiteti ilmiy ishlarida chop etilgan “Pangeometriya” asarlarida bayon etdi. Yangi geomeriya va Evklid geometryasida birinchi to‘rtta guruh aksiomalar guruhlarini va ularning natijalari ABSALYUT GEOMETRIYA deb atay boshlandi.

Lobachevskiy geometriyasida qarama-qarshilik yo‘qligidan Evklidning beshinchi postulatni isbotlash mumkin emas degan kelib chiqadi. Nima uchun? Nima uchun bu postulatni absalyut geometriyasidan keltirib chiqarish mumkin emas? Mazkur savollarga javob berishga harakat qilib ko‘raylik. Ma’lumki absalyut geometriya bu ikkita geometriyaning umumiy qismidan tashkil topgan: agar absalyut geometiyaga Evklidning beshinchi postulatini qo‘shsak, Evklid geomeriyasiga, agarda absalyut Lobachevskiy aksiyomasini qo‘shsak, Lobachevskiy geometriyasi hosil bo‘ladi. Shunday qilib, Evklidning beshinchi poslutatini isbot qilish, ya’ni isbot qilish absalyut geometriyasidan mantiqiy keltirib chiqarish mumkin emas. Lobachevskiy geometriyasi kabi Evklid geometriyasi qarama-qarshiliksizlikdir, chunki arifmetikada qarama-qarshilik yo‘q. Demak ikkala geometriya ham mavjud bo‘lish huquqiga ega. Lekin noevklid geometriyasi Evklid geometriyasidan jiddiy farq qiladi.

Parallellik nazariyasi bilan Ibn Sino ham shug‘ullangan (794).

V postulatni isbotlash uchun G‘arbiy Yevropa olimlari ham uringanlar. Jumladan Angliya matematigi Djon Vallos (1616-1703), Italiya matematigi Dgirolamo Sakkeri (1667-1773), Fransuz matematigi A.Lejandr (1752-1833). Keyinchalik A.Lejandr o‘z xatosini tushungan.

Biz yuqorida V-postulatni isbotlashga uringan shaxslardan ko‘pchilikka tanish bo‘lganlarni keltirdik. Bulardan boshqa matematiklar ham shu sohada ishlaganlar. Masalan: Kloviy, nemis matematigi Iogan Genrix Lambert (1728-1777), Bertron, rus Gurev S. Y. (1764-1813) va boshqalar ([3]ga qarang).

Sakkeri, Lejandrlar V-postulatni isbotlash protsesida yuqorida ko‘rib o‘tilgan Umar Xayyom to‘rtburchagidan keng foydalanilgan. Shuning uchun geometriya fani tarixida «**Umar Xayyom-Sakkeri to‘rtburchagi**» deb yuritiladi.

V-postulatni isbotlashga urinishlar asosida noevklid geometriyasi vujudga keldi. Bunda asosan Umar Xayyom tekshirishlari diqqatga sazovor bo‘lgan va noevklid geometriyasining, yangi Lobacheviskiy va Riman geometriyasining yaratilishiga sabab bo‘ldi. Buning sababini Umar Xayyom ko‘rib o‘tgan o‘tkir burchak, o‘tmas burchak va to‘g‘ri burchak gipotenuzasi bilan izohlash mumkin.

Shunday qilib noevklid geometriyasining yaratilishiga dastlabki poydevorni Umar Xayyom qo‘ygan deb hisoblash mumkin.

Lobacheviskiy N.I. (1792-1856) fanda birinchi marta V-postulat geometriyaning boshqa aksioma (postulat)larga bog‘liq emasligini isbotladi. Ya’ni V-postulat avvalgi qabul qilingan aksiomalardan kelib chiqmasligini ko‘rsatdi.

Nihoyat Lobacheviskiy N.I. V-pastulotni o‘zgartirib yangi geometryani kashf qildi.

II bob. LOBACHEVSKIY GEOMETRIYASINING ELEMENTLARI

2.1-§. Lobachevskiy geometriyasi haqida ma’lumotlar.

Evklid geometriyasini kosmik masshtabda ko‘rib o‘tishni Lobachevskiy tavsiya qilgan. Buni avvalo Umar Xayyom ko‘rib o‘tgan edi.

Kosmik masshtab qarash uchun uchburchak uchlarini Er, Quyosh va Sirius yulduzlari olingan.

Lobacheviskiy geometriyasi modelini mashhur fransuz matematigi Jyul Anri Puankare (1854–1912) 1882 yilda yaratdi. Evklid geometriyasini olamiz va unda gorizontal a to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz, u tekislikni ikkita yarim tekislikka ajratadi. Yuqori yarim tekislik nuqtalarini noevkld nuqtalari (to‘g‘ri chiziq nuqtalari bunga kirmaydi) deb ataymiz. Noevklid to‘g‘ri chiziqlar deb esa markazlari a to‘g‘ri chiziqda yotuvchi yarim aylanalarni ataymiz. Noevklid to‘g‘ri chiziqlarga a to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar nurlarni ham kiritamiz

Bundan oldinroq, 1871 yilda nemis matematigi Feliks Xristian Kleyn (1849–1925) proektiv metrika g‘oyasi asosida Lobacheviskiy geometriyasi tavsifini bergan edi. U o‘zining geometrik tadqiqotlarini 1872 yilda nashr qilingan “Yangi geometrik tadqiqotlarga taqqoslama nazar” (Erlangen dasturi) asarida har qanday geometriya almashtirishlar maxsus guruhining invariatlar nazariyasi bo‘lib hisoblanishini ko‘rsatadi. Guruhni kengaytirib yoki qisqartirib, bir turdagi geometriyadan ikkinchi turdagi geometriyaga o‘tish mumkin. Evklid geometriyasi – metrik guruhlarning invariantlari haqidagi fan; proektiv geometriya proektiv guruhlarning invariantlari haqidagi fandir. Almashtirishlar guruhini sinflarga ajratish, geometriyalarni sinflarga ajratishga olib keladi. Har bir guruhlarning algebraik va differensial invariantlari nazariyasi geometriyaning analitik tuzilishini beradi.

Keyinchalik Kleyn Evklid geometriyasining modelini proektiv metrika orqali tuzish mumkinligini ko‘rsatadi. Bunda u ingliz matematigi

Artur Keli (1821–1895) 1859 yilda kiritgan proektiv metrika tushunchasiga asoslandi.

Lobacheviskiy, agar real fazo Evklid geometriyasi qonunlariga bo‘ysinmasa, u holda kosmosda uchburchak burchaklarining yig‘indisi 180^0 dan kichik, deb faraz qildi. U fazoning noevklidligiga ishonar edi. Agar olam o‘lchovlarining bizga ko‘rinarli qismini qisqartirgan holda qarasak, u holda Lobacheviskiy geometriyasi o‘rinli bo‘ladi.

1863 yilda italyan matematigi Eujenio Beltrami (1835 – 1900) va nemis matematigi Bernxard Riman (1826 – 1866) yangi geometriya tavsifi bo‘yicha katta ishlar qildilar. Beltrami, sirtida Lobachevskiy geometriyasi bajariladigan real jismlar mavjudligini ko‘rsatdi. U o‘zgarmas manfiy egrilikka ega bo‘lgan sirtlarda (psevdosfera) noevklid geometriyasi bajarlishini isbotladi, shuningdek, Lobachevskiy geometriyasi mantiqiy qarama-qarshiliksiz ekanligini ko‘rsatdi.

2.1.1. Paralel to‘g‘ri chiziqlar tushunchasining kiritilishidan oldingi teoremalar.

“Parallellar nazariyasigacha” bo‘lgan bo‘limga oid teoremalar o‘rta maktab darsliklarida fuyidagi tartibda keltiriladi: geoemetrik figura, chiziq, nuqta, tekislik, kesma, nur, aylana, aylana yoyi, vatar va hokazo to‘g‘risidagi tushunchalarni anglatgandan so‘ng, kesmalarni va yoylarni qo‘shish amali qaraladi. So‘ngra, to‘g‘ri chiziq haqidagi bobda burchak tushunchasi kiritiladi, burchaklarni qo‘shish va ayirish qaraladi, bissektrisa, qo‘shni burchaklar, vertikal burchaklar to‘g‘risida tushuncha kiritiladi. Bundan so‘ng, to‘g‘ri chiziqda yotmagan nuqtadan shu to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar tushirish mumkin, ham faqat bittagina degan muhim teorema va vetikal burchaklarning tengliginini ifoda etuvchi teorema isbot qilinadi. Siniq chiziq, ko‘pburchak, uchburchak, qavariq ko‘pburchak tushunchalari kiritiladi. O’qqa nisbatan simmetriya asoslaari tekshiriladi, teng yonli uchburchak xossalari va uchburchaklar tengligining alomatlari o‘rganiladi. Biz uchun katta ahamiyatga ega bo‘lgan ushbu teorema isbotlanadi: *uchburchakning tashqi burchagi o‘ziga qo‘shi bo‘lmagan ichki burchaklarning har biridan kattadir.* Bu teoremaning parallellar nazariyasigacha isbotlanishiga e’tibor qilish kerak.

Bulardan keyin, uchburchakning tomonlari bilan burchaklari orasidagi munosabatlar mufassal ravishda o‘rganiladi: *har qanday uchburchakda teng tomonlar qarshisidan teng burchaklar yotadi; katta tomon qarshisida katta burchak yotadi.* Bu teoremalarga teskari bo‘lgan teoremalar ham qaraladi.

Ikki nuqtani tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziq kesmasi, bu nuqtalarning tutashtiruvchi har qanday siniq chiziqdan kichikdir degan teorema isbotlanadi. Shu erning o‘zidayoq, mos ravishda teng bo‘lgan tomonlar orasidagi burchaklari teng bo‘lmagan ikki uchburchak haqidagi teorema qaraladi; ya’ni: *agar bir uchburchakning ikki tomoni, ikkinchi uchburchakning ikki tomoniga mos ravishda teng bo‘lsa, bu tomonlar orasidagi burchaklarning kattasi qarshisida katta tomon yotadi* va teskari teorema.

Evklid geometriyasi bilan Lobachevskiy geometriyasi orasidagi eng asosiy farq ulardagi “parallellar nazariyasining” turliligidan iboratdir.

Lobachevskiy geometriyasi uchta qismga bo‘linadi:
1) chiziqlarni o‘lchash haqida (longimetriya), 2) sirtlarnn o‘lchash haqida (planimetriya) va 3) jismlarni o‘lchash haqida (stereometriya).

Birinchi bo‘limda — “Chiziqlarni o‘lchash” bo‘limida — to‘g‘ri chiziq; aylana va yoylar, hamda ichki chizilgan siniq chiziq uzunligidan limitni topish bilan egri chiziq uzunligini hisoblash usuli ko‘rsatiladi;

Ikkinchi bo‘limda — “Burchaklar haqida” degan bo‘limda — Lobachevskiy chiziqli burchak, tekisliklar orasidagi burchak, to‘g‘ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni qaraydi, sfera to‘g‘risida bahs qiladi, uchburchaklarni va ko‘pburchaklarni turlarga bo‘ladi va ko‘pyoqlar haqida ozgina to‘xtalib o‘tadi.

Uchinchi bo‘limda — “Perpendikulyarlar haqida" degan bo‘limda — perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlardan tashqari perpendikulyar tekisliklar hamda tekislikka perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar tekshiriladi.

To‘rtinchi bo‘lim — “Mujassam burchaklarni o‘lchash. Muntazam ko‘pburchaklar va jismlar haqida” degan sarlavhali bo‘lib, muntazam ko‘pyoqlarning mavjudligini isbotlash va ularni turlarga ajratish bilan tugaydi. Lobachevskiy bu bo‘limda, parallellar nazariyasiga mumkin qadar tayanmaslik maqsadida, o‘z davrida qabul qilingan isbotlardan ancha farq qiladigan isbotlarni keltiradi.

“Uchburchaklarning bir xilligi haqida” nomli beshinchi bo‘limda uchburchaklarning tenglik hollari tekshiriladi.

“To‘g‘ri to‘rtburchaklarni o‘lchash haqida” nomli oltinchi bo‘lim quyidagi so‘zlar bilan boshlanadi: “Tekisliklarni o‘lchash ushbu haqiqatga asoslanadi: agar ikki to‘g‘ri chiziq, uchinchi to‘g‘ri chiziqdan bir tarafda turib, bulardan biri shu to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar, ikkinchisi esa u bilan o‘tkir burchak tashkil qilsa, ular kesishadi...

... Bu haqiqatning isboti hozirgacha topilgan emas. Berilgan isbotlarni faqat unga berilgan izoh deb aytish mumkin bo‘lib, to‘liq ma’noda matematik isbot nomiini olishga arzimaydi”.

Lobachevskiy parallellar nazariyasiga bog‘liq bo‘lmagan ko‘p ma’lumotni to‘pladi. Bu ma’lumotlarning joylashish tartibi va bayoni odatdagiday shu qadar farq qilar ediki, akademik Fuss qo‘lyozmaga yomon baho beradi va u bosilmaydi. Lobachevskiy yozgan bu asarning keyinchalik Lobachevskiy nomini olgan g‘ayrievklid geometriyani vujudga keltirishda g‘oyat darajada katta rol o‘ynaganini endigina biz ko‘rib turamiz.

“Geometriya”ning keyingi bo‘limlarida parallel chiziqlar nazariyasi ishlatiladi. Bundan buyongi bayonimiz uchun kerak bo‘lgan va isboti parallel chiziqlar nazariyasiga asoslanmagan yana bir nechta teoremalarni keltiramiz.

2.1.2. Uchburchak burchaklarinnng yig‘indisi haqida Umar Xayyom-Sakkeri-Lejandrning teoremalari.

Umar Xayyom-Sakkeri-Lejandrning birinchi teoremasi. Istagan uchburchak burchaklarining yig‘indisi 2d dan katta bo‘lishi mumkin emas.

Eslatma. *a* kesma qanday kichik bo‘lsada, munosib *n* sonni olib, *a* ni har vaqt qo‘shiluchi sifatida *n* marta takrorlash mumkinki, na yig‘indi, oldindan berilgan *b* kesmadan katta kesmani beradi. Bu jumla, Arximed — Evdoks aksiomasi deyiladi.

Xullas, uchburchak burchaklarining yig‘indisi 2d dan katta degan faraz, Arximed — Evdoks aksiomasiga ziddir.

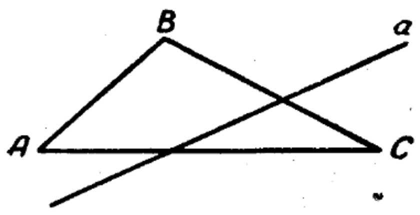
Umar Xayyom-Sakkeri-Lejandrning ikkinchi teoremasi. Agar berilgan biror uchburchakda burchaklarning yig‘indisi 2d ga teng bo‘lsa, har qanday uchburchakda ham burchaklarning yig‘indisi 2d ga tengdir.

Umar Xayyom-Sakkeri-Lejandrning uchinchi teoremasi. Agar biror uchburchak burchaklarining yig‘indisi 2d dan kichik bo‘lsa, bu yig‘indi har qanday uchburchak uchun ham 2d dan kichikdir.

2.1.3. Pash postulati.

Elementar geometriya kitoblarida bu intuitiv jumladan g‘ayrioshkor ravishda foydalanilsada, uni eslatib o‘tilmaydi.

Bu postulat quyidagicha ifoda qilinadi: Agar ABC uchburchak va uning uchlaridan o‘tmaydigan hamda uchburchak tomonlarining biri bilan ikki uch orasida kesishadigan a to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziq uchburchakning bo‘lgan ikki tomonidan biri bilan yana ikki uch orasidagi nuqtada muqarrar kesishadi (5-chizma).



5-chizma

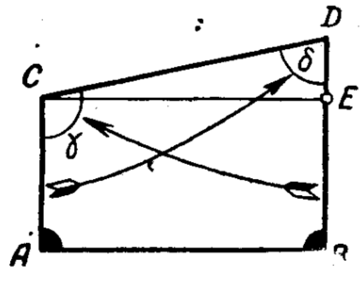
Zarur bo‘lgan bu aksiomani biz kelgusida tez-tez ishlatib turamiz. Uning muhimligini XIX asrning ohirida Pash kzrsatib berdi. Biz postulat so‘zini aksioma ma'nosida tushunamiz.

2.1.4. Ikki burchagi to‘g‘ri bo‘lgan to‘rtburchak va uning xossalari.

Bundan buyong‘i tadhiqotlar uchun burchagi to‘g‘ri bo‘lgan mahsus ko‘rinishli to‘rtburchak kerak bo‘ladi. Bu kabi to‘rtburchaklar ko‘pincha ikkito‘g‘riburchakli deb ataladi. Masalan, 6-chizmada tasvirlangan ABDC to‘rtburchak shunday uning A va V burchaklari — to‘g‘ri burchaklar. Bunday to‘rtburchaklarning quyidagi hossalarini isbot qilamiz.

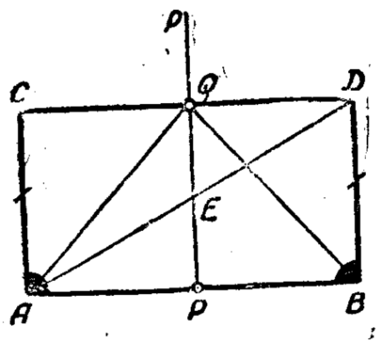
1°. Agar ikki to‘g‘ri burchakli to‘rtburchakda BD>AC bo‘lsa, $\gamma>\delta$ bo‘ladi. Bu teoremani ko‘zda tutib, biz ko‘pincha „katta tomon qarshisida kattaburchak yotadi” deb ataymiz.

Isbot. BD tomonda shunday E nuqtani olamizki, BEqAC bo‘lsin. E nuqta D bilan B orasiga tushadn. C ni E bilan tutashtirsak, A va B burchaklari to‘g‘ri, AC va BE bilan belgilangan. yon tomonlari bir-biriga teng ABEC to‘rtburchak hosil bo‘ladi. Bunday to‘rtburchak Sakkeri to‘rtburchagi deyiladi. Sakkeri to‘rtburchagining yuqori asosidagi burchaklarining bir biriga tengligini biz keyinroq ko‘rarmiz. Shu xossaga asoslanib, davoni isbot qilamiz: $\gamma>ACE=BEC<\delta$ (CE nurning γ burchak ichidan ketgani sababli, BEC burchak δ dan kichikdir; CED uchburchak uchun olingan tashqi burchak haqidagi teoremaga asosan, BEC burchak δ dan katta).

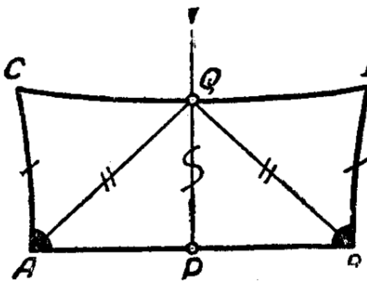


6-chizma

Sakkeri to‘rtburchagi. Oldingi teoremani isbotlashda Sakkeri to‘rt-burchagining bir xossasiga biz asoslandi. Hozir biz bu xossani isbot qilamiz va yo‘lakay Sakkeri to‘rtburchagining yana bir necha muhim xossasini chiqaramiz. Sakkeri to‘rtburchagi ABDC, yani A va B burchaklari to‘g‘ri, yon tomonlari AC va BD bir-biriga teng to‘rtburchak berilgan bo‘lsin. Yuqori asosdagi C va D burchaklarning bir-biriga tengligini isbot qilaylik (7-chizma).



7-chizma



8-chizma

Isbot. AB ning teng o‘rtasini belgilovchi P nuqtadan AB ga perpen-dikulyar chiqaramiz. Bu perpendikulyar CD tomon bilan C va D nunqtalar orasida kesishadi. Bu faktning juda ham ravshanligiga qaramay, uni isbotlash zarurdir. Pash aksiomasidan foydalanib bu isbotni hosil qilish oson. AD diagonalni o‘tkazib, Pash aksiomasini ABD uchburchak va P bilan belgilangan perpendikulyarga nisbatan qo‘llaymiz. P to‘g‘ri chiziq AB tomon bilan va A orasidagi P nuqtada kesishadi.

Demak, P yo AD bilan, yoki BD bilan kesishadi. (7-chizma). Lekin, BD bilan kesishaolmaydi, chunki bir to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan ikki perpendikulyar kesishmaydi. Xullas, P to‘g‘ri chiziq BD bilan kesishmaydi va shu sababli, *D* nuqtadan o‘tmaydi. (Shu singari, u C nuqtadan ham o‘tmaydi). Demak, Pash aksiomasiga ko‘ra, P to‘g‘ri chiziq AD bilan A va D nuqtalar *orasidagi* nuqtada kesishadi. Xuddi shu singari, P to‘g‘ri chiziq ACD uchburchakning AC tomoni bilan kesishmaydi va CD tomon bilan C va *D* orasidagi *Q* nuqtada kesishadi. *Q* ni *A* va B bilan tutashtiraylik, *APQ* uchburchak BP*Q* uchburchakka kongruentdir, chunki ularning katetlari tengdir (8-chizma).

Demak, *AQ*=*BQ* bundan esa, CA*Q* , DB*Q* uchburchaklar bir biriga kongruent degan xulosa chisadi, chunki ulardan birinint ikki tomoni, ikkinchisining ikki tomoniga mos ravishda teng va bu tomonar orasidagi burchaklar tengdir. Shuning uchun C burchak *D* burchakka teng, yani Sakkeri to‘rtburchagida yuqori **asosdagi** burchaklar o‘zaro tengdir, shuni isbotlash kerak edi.

Shhunday qilib biz ushbuni isbot qildik:

2°. P*Q* perpendikulyar yuqori asos bilap ham to‘gri burchak ostida kesishadi va kesilish nuqtasi *Q*, yuqori asosni teng ikkiga bo‘ladi.

E s l a t m a . Sakkeri to‘rgburchagining xossalarini chiqarishda, bir to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan ikki perpendikulyarning kesishmasligidan foydalandik. Uchburchakning tashqi burchagi haqidagi teoremadan foydalanib buni isbotlash mumkin, chunki bu perpendikulyarlar kesishgan holda uchburchakning tashqi burchagi o‘ziga qo‘shni bo‘lmagan ichki burchakka teng bo‘lar edi, buning esa bo‘lishi mumkin emas. Demak, parallellar haqidagi aksiomalardan foydalanmasdan turib, Sakkeri to‘rtburchagining yuqory asosidagi burchaklarining tengligini isbotladik. Biroq ularning ikkalasining ham to‘g‘ri yoki o‘tkir burchaklardan iborat bo‘lishi to‘g‘risida parallellar aksiomasini kiritmasdan hech narsa ayta olmaymiz buni biz keyinroq tushunarmiz. Lekin bu burchaklarning o‘tmas bo‘la olmasligini parallellar nazariyasiga asoslanmasdan isbotlash mumkin. Hakikatan, agar C va *D* burchaklar o‘tmas bo‘lsa, *ACD* va *BAD* uchburchaklarning birida burchaklar yig‘indisi *2d* dan katta bo‘lar edi, chunki bu uchburchaklardagi hamma burchaklarning yig‘indisi *4d* dan kattadir. Lekin uchburchak burchaklarining yig‘indisi 2*d* dan katta bo‘lishi mumkin emas; demak bir-biriga teng C va *D* burchaklar o‘tmas bo‘la olmaydi.

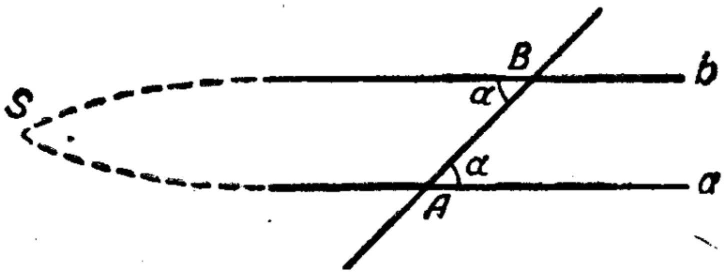
Parallellar nazariyasiga asoslanmasdan isbot qilinadigan va bundan buyon bizga kerak bo‘lgan teoremalar ana shulardan iborat

.

2.1.5. Evklid postulatiga (ekvivalent) teng kuchli teoremalar.

Odatda, parallel to‘g‘ri chiziqlar, bir tekslikda yotib kesishmaydigan, ya’ni bitta ham umumiy nuqtasi bo‘lmagan to‘g‘ri chiziqlar deb tariflanadi. Bunday to‘g‘ri chiziqlarning mavjudliigini isbotlash oson, va bu isbot parallellar aksiomasiga suyanmaydi.

Haqiqatdan agar *a* to‘g‘ri chiziq A nuqtada ixtiyoriy AB to‘g‘ri chiziq bilan kesishsa (9-chizma), AB to‘g‘ri chiziqning B nuqtasidan, almashinuvchi burchaklar bir-biriga teng bo‘ladigan qilib b to‘g‘ri chiziqni o‘tkazsak, kesishmaydigan, ya’ni parallel to‘g‘ri chiziqlar hosil bo‘ladi. Haqiqatan, *a* va b to‘g‘ri chiziqlar S nuqtada kesishgan taqdirda, ABS uchburchakning A uchidagi tashki burchagi o‘ziga qo‘shni bo‘lmagan ichki B burchakka teng bo‘lar edi, bu esa yuz beraolmaydi. Demak, *a* va b kesisha olmaydi. Shu singari, bir to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan ikki perpendikulyarning ham kesishmasligi bizga ma’lum. Bu oxirgi hol, bundan ilgarigi holning almashinuvchi burchaklar to‘g‘ri burchaklardan iborat bo‘lgan vaqtdagi, xususiy holiga mos keladi.



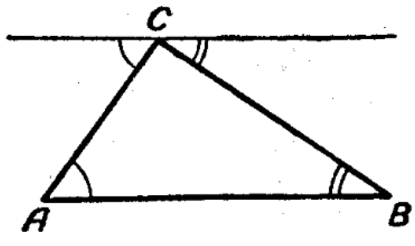
9-chizma

Shunday qilib, *a* to‘g‘ri chiziqda yotmagan A nuqta orqali berilgan tekislikda *a* bilan kesishmaydigan loaqal bitta b to‘gri chiziq o‘tkazish mumkinligi tayinlandi. Shunga diqqat qilish kerakki, bu oxirgi faktni aniqlash uchun, biz hech bir yangi aksiomani kiritmadik. Savol tug‘iladi: A nuqtadan *a* to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydigan bunday b to‘g‘ri chiziq bitta o‘tadimi, yoki bunday to‘g‘ri chiziqlar soni bitatadan ko‘mi?

Yangi aksiomani kiritmasdan bu savolga javob berib bo‘lmasligini biz kelgusida ko‘ramiz. Bu yangi aksiomani kiritishga majburmiz va bu yerda ikkita imkoniyat bor: 1) bunday to‘g‘ri chiziqdan faqat bitta o‘tkazish mumkin, 2) bunday to‘g‘ri chiziqlardan bittadan ortiq o‘tkazish mumkin. Evklid birinchi imkoniyatni tanladi.

Evklidning parallellar haqidagi aksiomasi (V postulat). Berilgan, *a* to‘g‘ri chiziqda yotmagan A nuqtadan, A nuqta va *a* to‘g‘ri chiziq bilan aniqlangan tekislikda *a* ga parallel ikki to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin emas.

Bu aksiomadan *A* nuqta orqali *a* ga parallel faqat *bitta* to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin degan xulosa chiqadi, chunki hech bo‘lmaganda bitta bunday to‘g‘ri chiziqning mavjudligini biz bilamiz. Parallellar to‘g‘risidagi aksiomani kiritgandan so‘ng, geometriyada parallellar xossalari tekshiriladi, masalan, agar *a* to‘g‘ri chiziq *b* to‘g‘ri chiziqqa, *b* esa — *c* to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, *a* va c to‘g‘ri chiziqlar paralleldir. Bundan keyin parallel ikki to‘g‘ri chiziqning kesuvchi bilan tashkil qilgan burchaklari qaraladi, va nihoyat uchburchak burchaklar yig‘indisining 2d ga tengligi isbot qilinadi. Bu teorema odatda shunday isbotlanadi: uchburchakning C uchidan *AB* asosga parallel o‘tkaziladi (10-chizma), va ichki almashinuvchi burchaklarning tengligidan foydalanib, *A*,*B*,*C* burchaklar yig‘indisining *2d* ga tengligi osonlik bilan isbotlanadi, Uchburchaklar burchaklarining yig‘indisi to‘g‘risidagi bu teoremaning parallellar haqidagi aksiomaga asoslanishiga, katta e’tibor berish va uni tushunib olish kerak. Uchburchak burchaklarining yig‘indisi haqidagi teoremani quyidagicha ifodalasak, aytgan fikrimiz yana ham oydinroq bo‘ladi: **agar *a* to‘g‘ri chiziqda yotmagan A nuqtadan *a* ga ikkita parallel o‘tkazish mumkin bo‘lmasa, uchburchak burchaklarning yig‘indisi 2d ga teng bo‘ladi.**

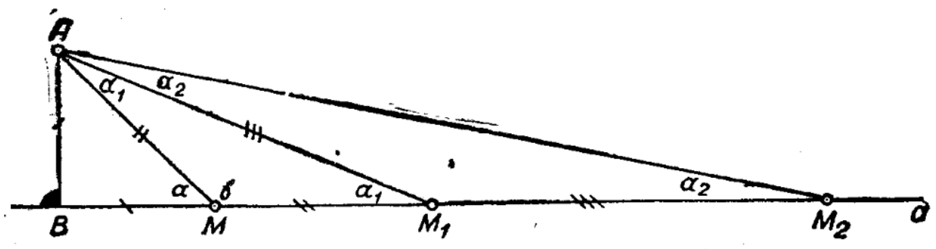


10-chizma

2.1.5.1. Uchburchak burchaklarining yig‘indisi 2*d* ga teng degan tasdiq Evklid postulatiga teng kuchlidir.

Agar biror uchburchak burchaklarining yig‘indisi 2d ga teng degan tasdiqni isbotsiz qabul qilsak, parallellar to‘g‘risidagi aksiomani isbotlash mumkin bo‘ladi.

Lemma. Agar *a* va AM to‘g‘ri chiziqlar (A nuqta *a* da yotmaydi, M nuqta esa — *a* da yotadi) berilgan bo‘lsa, A nuqtani quzg‘atmasdan M nuqtani *a* to‘g‘ri chiziq bo‘yicha shu qadar uzoqqa kuchirish mumkinki, *a* burchak (11-chizma) oldin berilgan α>0 burchakdan kichik bo‘ladi*;* yoki boshqacha aytganda, *M* nuqtaning *a* bo‘ylab, masalan o‘ng tomonga, cheksiz uzoqlashib borishi bilan, α burchak 0 ga intiladi.



11-chizma

Teorema. Agar biror uchburchak burchaklarining yig‘indisi 2d ga teng bo‘lsa, *a* to‘g‘ri chiziqda yotmagan A nuqtadan *a* ga ikkita parallel o‘tkazish mumkin emasdir.

Geometriyadagi faktlar to‘plamini buzmasdan turib, parallellar aksiomasi o‘rniga olinishi mumkin bo‘lgan tasdiqlarni, Evklid postulatiga teng kuchli tasdiqlar deb ataymiz. Masalan, uchburchak burchaklarining yig‘indisi 2d ga teng degan tasdiq Evklid postulatiga ten gkuchli. Agar geometriyadan Evklidning parallellar haqidagi aksiomasi chiqarib tashlansa, uning bilan birga uchburchak burchaklarining yig‘indisi *2d* ga teng degan tasdiqni ham chiqarib tashlashga to‘g‘ri keladi.

2.1.5.2. Hamma uchburchaklarda burchaklar yig‘indisi bir xil degan tasdiq — Evklid postulatiga teng kuchlidir.

Evklidning parallellar haqidagi aksiomasi o‘rniga shunday tasdiqni qabul qilish mumkin: hamma uchburchaklarda burchaklar yig‘indisi bir xildir. Agar shuni aksioma deb qabul qilsak, undan Evklidning parallellar haqidagi aksiomasi teorema tariqasida kelib chiqadi.

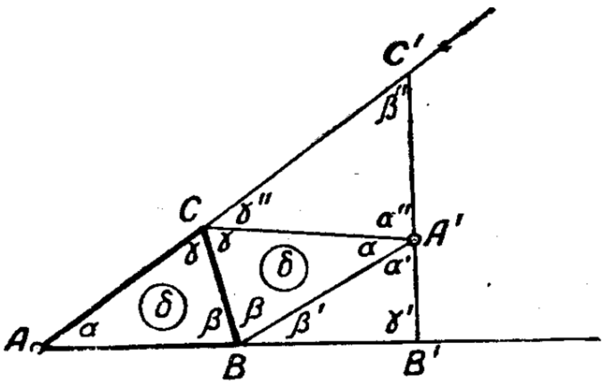
Olimlarning ko‘p asrlar davomida Evklid postulatini isbotlash yo‘lidagi urinishlari bu postulatga ekvivalent juda ko‘p tasdiqlarning borligini ochib berdi. Ularning har birini Evklid aksiomasi o‘rniga olish mumkin, u holda aksiomaning o‘zi teorema o‘rnini oladi.

Ko‘p geometrlarga bu ahvol g‘ayritabiiy ko‘rindi va parallellar aksiomasining o‘zini ham ular etarlicha ayon emas deb qaradilar. Bu aksiomani teoremalar qatoriga kiritish, ya'ni, isbotlash yo‘lida urinishlar ko‘paya bordi. Parallellar aksiomasini isbotlash vaqtida ba’zi olimlar, ochiq ravishda ko‘rsatib o‘tmasalarda, hamma uchburchaklarda burchaklar yig‘indisini bir xil faraz etib, undan so‘ng postulatni osonlik bilan isbot qilar edilar. Ba’zan indamay qabul qilinadigan tasdiqlar ichida, hatto avtorning o‘zi va uning tanqidchilari uchun ham yashirin bo‘lgan tasdiqlar uchrar edi. Bunday yashirin ravishda sezmasdan turib kiritilgan tasdiqlarning biridan Lejandr foydalandi. Uning yordami bilan Lejandr uchburchak burchaklari yig‘indisining *2d* dan kichik bo‘la olmasligini isbotladi. Bu isbotning xatosi bo‘lmaganda, undan uchburchak burchaklarining yig‘indisi *2d* ga teng degan xulosa chiqar edi, chunki Umar Xayyom-Sakkeri-Lejandrning birinchi teoremasiga ko‘ra, bu yig‘indi *2d* dan katta bo‘la olmaydi. Lejandrning “isbotiga” asosan bu yig‘indi *2d* dan kichik ham bo‘la olmaydi, bundan esa, Evklid postulatining isboti bevosita kelib chiqqan bo‘lar edi. Lejandrning o‘zi keyinchalik bu isbotning xatosini topdi.

2.1.5.3. “Uchburchak burchaklarining yig‘indisi *2d* dan kichik bo‘la olmaydi” degan teoremaning Lejandr tomonidan xatoli isboti.

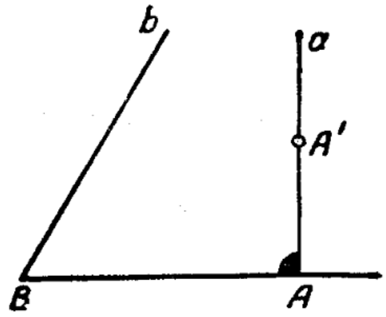
Lejandrning fikricha uchburchak burchaklari yig‘indisining *2d* dan kichik bo‘la olmasligini isbot etadi. Biroq Lejandrning isbotida xato bor. Bu xato nozik va muhokamada unga juda ham yashirin ravishda yo‘l qo‘yilgan.

Gap shundaki, muhokama olib borgan vaqtda Evklid postulatiga aslida teng kuchli bir tasdiq yashirin ravishda isbotsiz qabul qilingan edi. *AB'C'* uchburchakning yasalishini esga olaylik (12-chizma). BAC burchak ichida olingan *A'* nuqtadan *B'A'* kesuvchini o‘tkazib bu kesuvchi *BAC* burchak *(AB, AC)* tomonlaraning ikkalasi bilan ham kesishadi degan tasdiqni isbotsiz qabul qilgan edik. Boshqacha aytganda, ushbu tasdiq isbotsiz) qabul qilingan: BAC burchak ichida qanday A' nuqtani olsak ham doimo uning orqali, burchakning ikkala tomoni bilan ham kesishadigan to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin. Bu tasdiqning Evklid postulatiga teng kuchli ekanligini 2.1.9-da keltiramiz. Postulatga teng kuchli tasdiqga asoslanish, shu postulatning o‘ziga asoslanishdan boshqa narsa emasdir. Demak, gap shundaki, parallellar haqidagi aksiomani isbotlash vaqtida, o‘zimiz bilmay turib, uning o‘zini to‘g‘ri deb, undan boshqa jumlani niqobiga o‘ralgan holda foydalanib kelamiz. Demak biz, “o‘sha narsani o‘sha narsaning o‘zi orqali” isbotlagan bo‘lamiz. Isbotda yo‘l qo‘yiladigan bu kabi xatolar logikada “aylanaverish” deb aytiladi.



12-chizma

2.1.5.4. Evklid postulatiga ekvivalent yana bir tasdiq — burchak ichidagi istalgan nuqtadan burchakning ikkala tomoni bilan ham kesishuvchi to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.



13-chizma

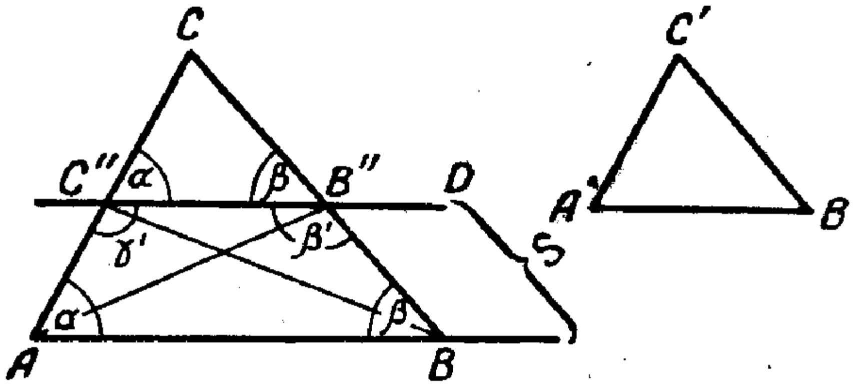
2.1.5.5. O‘xshash, lekin teng bo‘lmagan ikkita uchburchak mavjud, degan jumla Evklid postulatiga teng kuchlidir.

Bu tasdiqni ingliz matematigi Vallis kiritdi va uni isbotladi. Parallellar nazariyasi bilan shug‘ullanib kelgan ko‘p olimlardan Vallisning farki shundaki, Vallis o‘xshash figuralarning mavjudligi haqidagi farazni Evklid postulati o‘rniga olish mumkin deb ongli ravishda tasdiqladi. Buni isbotlaylik.

I. To‘g‘ri teorema. Evklid postulati qabul qilinsa, u holda bundan, bir-biriga teng bo‘lmagan, lekin o‘xshash uchburchaklar mavjud degan xulosa chiqadi. Parallellar aksiomasi qabul qilingan elementar geometriya kursidan bunday uchburchaklarning mavjudligi ma’lumdir.

II. Teskari teorema (Vallis teoremasi). Agar burchaklari mos ravishda teng va o‘zlari teng bo‘lmagan ikkita uchburchak mavjud bo‘lsa, berilgan to‘g‘ri chiziqda yotmagan nuqtadan shu to‘g‘ri chiziqda parallel ikkita to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin emas.

Evklidning parallellar aksiomasi o‘rniga bunday aksiomani qabul qilish mumkin: burchaklari mos ravishda teng va o‘zlari teng bo‘lmagan ikkita uchburchak mavjuddir.



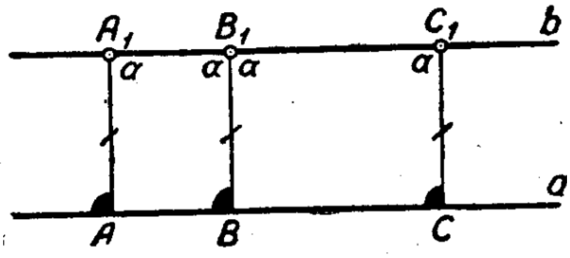
14-chizma

Parallellar aksiomasining o‘zi teorema o‘rnini oladi. Geometrik sistemamiz ilgarigidek qoladi. Agar Evklid geometriyasida figuralarning o‘xshashligi haqidagi ta’limotning (bu ta’limotning parallellar nazariyasiga boshdan-oyoq suyanishini biz hozirgina isbotladik) naqadar katta rol o‘ynaganini esga olsak, Evklid postulatining butun geometrik sistema uchun muhimligini ko‘rib turamiz. Parallellar postulati kiritilmasa, figuralarning o‘xshashligi to‘g‘risidagi ta’limot va undan kelib chiqadigan hamma natijalar ham mavjud bo‘lmas edi.

2.1.5.6. Evklid postulatining yana bir soxta isboti (Klaviy).

Klaviy tomonidan berilgan isbot va undan so‘ngra, o‘zi parallellar aksiomasiga teng kuchli bo‘lib, isbotlash vaqtida sezilmay qolgan postulatni ko‘rsatib o‘tamiz.

Muhokamalarni yurgizish vaqtida, Evklid postulatining o‘ziga ekvivalent bir tasdiqdan yashirin ravishda foydalandik. *a* to‘g‘ri chiziqdan bir tarafda va bir xil masofada yotuvchi uchta A_1B_l,C_l nuqtani olib, biz ularni bir to‘g‘ri chiziqda yotadi deb hisoblangan (faraz qilingan); bu farazning o‘zi esa, parallellar aksiomasiga ekvivalentdir.



15-chizma

Bu ekvivalentlik muhokamalarning o‘zidan kelib chiqadi, chunki Evklid postulati qabul qilingan bo‘lsa, bu uchta nuqtaning bir to‘g‘ri chiziqda yotishi elementar geometriya kurslarida isbot qilinadi. Biz teskarisini, ya’ni bunday uchta nuqta bir to‘g‘ri chiziqda yotsa, Evklid postulati kuchga ega deb qayd qildik.

Biror *a* to‘g‘ri chiziqdan bir tarafda joylashgan va undan baravar uzoqlikda turgan uchta nuqta, bir to‘g‘ri chiziqda yotadi degan faraz, Evklid geometriyasi sistemasini qurishda parallellar aksiomasining o‘rniga olinishi mumkin. Bu holda geometriya sistemasi, dastlabki ma’lumotlar tuzilishidagina ozroq o‘zgaradi. Sistemadagi jumdalarning hammasi o‘zicha qolib, faqat parallellar aksiomasi teoremalar qatoriga o‘tadi; aksioma o‘rnini qaralayotgan tasdiq egallaydi.

2.1.5.7. V.Boliyai teoremasi.

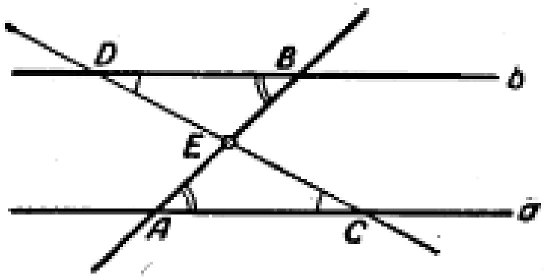
V.B o l i y a i t e o r e m a s i: agar bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan ixtiyoriy uchta nuqtadan aylana o‘tkazish mumkin bo‘lsa, bundan Evklidning parallellar to‘g‘risidagi aksiomasi kelib chiqadi.

Shuni aytib o‘tish kerakki, istagan uchburchakka tashqi chizilgan aylananing mavjudligi to‘g‘risidagi farazdan Evklid postulatini osonlik bilan isbot qilinishini V.Boliai ongli ravishda tasdiqlagan edi.

2.1.5.8. Evklid postulatiga ekvivalent yana bir aksioma.

Tekislikda bir-biri bilan kesishmaydigan to‘g‘ri chiziqlarning mavjudligi bizga ma’lum. Bunday to‘g‘ri chiziqlarniig mavjudligini isbotlash uchun parallellar aksiomasi talab qilinmaydi. *Umumiy nuqtasi bo‘lmagan ikki to‘g‘ri chiziq istagan to‘g‘ri chiziq bilan kesishganda bir-biriga teng ichki* *almashinuvchi burchaklar hosil qilsa, bundan Evklidning parallellar aksiomasi kelib chiqadi.*

Teskari teorema. *Agar Evklid postulati qabul qilingan bo'lsa, umumiy nuqtasi bo'lmagan ikki to'g'ri chiziq uchinchi to'g'ri chiziq bilan kesishib, bir-biriga ten ichki almashinuvchi burchaklar hosil qiladi.*

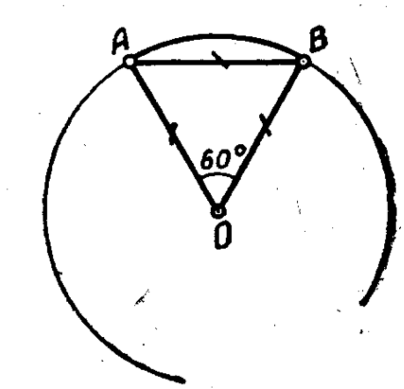


16-chizma

2.1.5.9. Ichki chizilgan oltiburchak tomoni radiusga teng degan jumla—Evklid postulatiga ekvivalentdir.

Evklid postulatiga, ekvivalent tasdiqlar qatoridan yana bir (oxirgi) tasdiqni keltiraylik. Doiraga ichki chizilgan muntazam oltiburchak tomonining bu doira radiusiga tengligi, elementar geometriyadan ma'lumdir. Bu teoremaning isboti, uchburchak burchaklari yig'indisining *2d* ga tengligiga asoslanadi. Bu esa, parallellar aksiomasidan foydalanishdir. Sodir bo'lgan ahvol tasodifiy emas, chunki ichki chizilgan muntazam oltiburchakning tomoni radiusga teng deb aytish Evklidning parallellik aksiomasiga teng kuchlidir.

T e o r e m a . Agar doiraga ichki chizilgach muntazam oltiburchakning tomoni shu doiraning radiusiga teng bo'lsa, bundan Evklidning parallellik postulati kelib chiqadi.



17-chizma

2.2-§. Lobachevskiy geometriyasida figuralar (shakllar).

2.2.1. Lobachevskiy geometriyasida masofa va sfera.

(Beltram-Kleyn interpretatsiyasi)

Lobachevskiy tekisligini aniqlashning eng sodda usularidan biri quyidagicha. Ikkita $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar orasidagi masofa bizning oddiy fazomizda

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}$$

ifoda etmasdi $\overline{OM_1}$ va $\overline{OM_2}$ vektorlar orasidagi φ burchak

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 - z_2^2}}$$

formulasida aniqlanadi.

Bunday fazo psevdoevklid fazosi. Oddiy Evklid fazosidan farq qiluvchi psevdoevklid fazosida kesma haqiqiy nol va mavhum uzunlikga ega. To‘g‘ri chiziqlar uch tipga ega: haqiqiy uzunlikga ega bo‘lgan, uzunlikga ega bo‘lgan va sof ma’nfiy uzunlikga ega bo‘lgan kesmalar bilan aniqlangan to‘g‘ri chiziqlar bo‘ladi.

Tekislik uch tipda aniqlanadi; evklid bilan, psevdoevklid bilan va ular oralig‘idagi “izotrop” – geometriya bilan aniqlanadi.

Sfera uch tipga bo‘linadi; haqiqiy radiusli, sof mavhum radiusli va nol radiusli. Markazi koardinata boshida bo‘lgan uch tipdagi sfera tenglamasi mos ravishda:

$$x^2 + y^2 - z^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = -R^2$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

tengliklar bilan aniqlanadi.

Shuning uchun psevdoevklid fazosida haqiqiy radiusli sfera bir qobiqli gipervalid ko‘rinishda sof mavhum radiusli sfera ikki qobiqli gipebaloid ko‘rinishda, nol radiusli sfera sfera konuslariga ko‘rinishida bo‘ladi. Yuqoridagi konus sferalarining asimitotik konusli deyiladi. Lobachevskiy tekisligini Psevodoevklid fazosida mavhum radiusli sfera deb aniqlash mumkin. Bunda undeametrol qarama –qarshi nuqtalar bilan aniqlangan deb aniqlash mumkin yoki uni bir kovachini bilan aniqlash mumkin. Lobachevskiy tekislikda to‘g‘ri chiziqlar sferaning diametral kesilmalari vazifasini bajaradi.

2.2.2. Lobachevskiy geometroyasida yoy uzunligi.
(Puankare interpretatsiyasi)

ω tekisligida ixtiyoriy u to‘g‘ri chiziqni qaraymiz va bu to‘g‘ri chiziq w tekislikni ikki qismga τ va τ^1 yarim tekisliklarga bo‘lingan bo‘lsin.

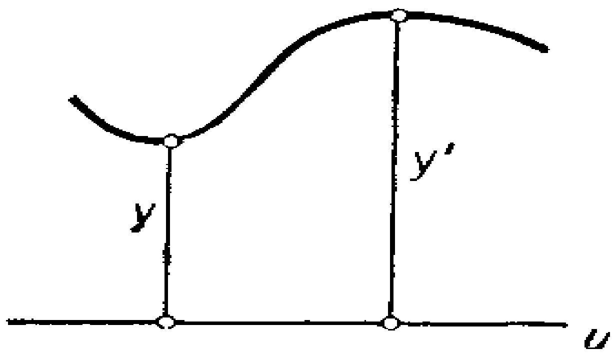
Faraz qilaylik τ yarim tekislik biror ikki o‘lchovli H fazoning kartasidan iborat bo‘lsin (Karta haqida … qarang). H fazoni chizig‘ining s uzunligi va berilgan kartadagi tasviri uzunligini δ bilan farqli deb qaraymiz. Bu s va δ miqdorlarni mos ravishda **giperbolik** va **evklid** uzunliklari deb ataymiz. Qaralayotgan kartada uzunlik o‘lchovi asosida quyidagi prinsiplsrni (tamoillarni) qabul qilamiz.

1°. Qaralayotgan bu to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lib bu to‘g‘ri chiziqdan y masofada bo‘lgan MN kesmaning giperbolik uzunligi $\frac{MN}{y}$ nisbatga teng, yani MN kesmaning uzunligining u to‘g‘ri chiziqdan y evklid masofaning nisbatiga teng. (Bu yerda $xy=a$ evklid chiziq giperboladan iborat ekanligini eslatib o‘tamiz.)

2°. Agar δ –evklid uzunligi bo‘lib, s esa egri chiziqning yoyining giperbolalik uzunligi (yoki to‘g‘ri chiziq kesmasi u to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lmasa) bo‘lib y va y' lar mos ravishda s dagi nuqtalarning u to‘g‘ri chiziqdan eng katta va eng kichik evklid masofalari bo‘lsa (bu yerda $y \neq 0$), u holda

$$\frac{\delta}{y'} < s < \frac{\delta}{y}$$

tengsizlik bajariladi (1-chizma).



1-chizma

Biz quyida keyinroq, H fazoning yuqoridagi ikki xossaga ega bo‘lgan kartasi Lobachevskiy tekisligidan iborat ekanligini tushunib olamiz va ishonch hosil qilamiz.

A nuqta *B* nuqtaga qarab *AB* yoyda

$$A,\ P_1,\ P_2,\ ....,\ P_{n-1},\ B \qquad (*)$$

nuqtalarni belgilaymiz. Faraz qilaylik

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ ...,\ y_{n\text{-}1},\ y_n$$
$$\delta_1,\ \delta_2,\ ...,\ \delta_n,$$
$$\xi_1,\ \xi_2,\ ...,\ \xi_n.$$

miqdorlar mos ravishda (*) nuqtalarning u to‘g‘ri chiziqdan evklid masofalari bo‘lsin: $AP_1, P_1P_2, ..., P_{n-1}B$ yoylar *AB* yoyning qism yoyi uzunliklari bo‘lsin (ya’ni $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$); $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ lar bu yoylarni tortib turuvchi evklid vektorlarining uzunliklari bo‘lsin. (ya’ni $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$)

Quyidagi yig‘indilarni tuzamiz:

$$\sum = \frac{\delta_1}{y_1} + \frac{\delta_2}{y_2} + ... + \frac{\delta_n}{y_n};$$

$$\sum{}' = \frac{\delta_1}{y_1} + \frac{\delta_2}{y_2} + ... + \frac{\delta_n}{y_{n-1}};$$

$$Z = \frac{\xi_1}{y_1} + \frac{\xi_2}{y_2} + ... + \frac{\xi_n}{y_n}.$$

Yuqoridagi 2° prinsipiga asosan

$$\sum < s < \sum{}' \qquad (3)$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz, chunki shartga asosan

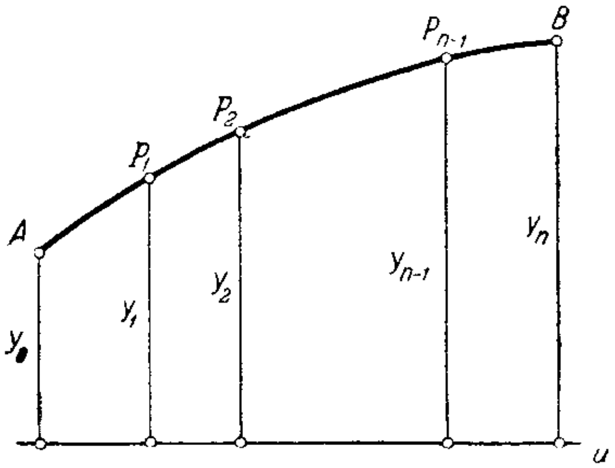
$$0 < y_0 < y_1 < \ldots < y_n$$

Yuqoridagi 1° va 2° prinsiplarga asosida giperbolalik uzunlikni o‘lchashning umumiy uzunligini ko‘rsatish mumkin.

Avvalo quyidagi xossalarga ega bo‘lgan *AB* yoyning *S* giperbolalik uzunlikni topamiz. 1) Agar nuqta *A* dan *B* ga qarab *AB* yoy bo‘yiga siljisa, u holda nuqtaning u to‘g‘ri chiziqdan masofasi o‘sib boradi.

1) A nuqtaning u to‘g‘ri chiziq dan masofani nolga teng emas.

AB yoy tekis, ya’ni siniq emas. (2-chizma)



2-chizma

Quyidagi

$$\sum{}' - \sum = \frac{\delta_1}{y_0 y_1}(y_1 - y_0) + \frac{\delta_2}{y_1 y_2}(y_2 - y_1) + \ldots + \frac{\delta_n}{y_{n-1} y_n}(y_n - y_{k-1})$$

ayirmani qarqymiz. Bu ayirma $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ larning eng kattasini δ' deb belgilab, mahrajini eng kichik y_0 ga almashtirib quyidagini hosil qilamiz.

$$\sum{}' - \sum < \frac{\delta'}{y_0^{\,2}}(y_1 - y_0 + y_2 - y_1 + \ldots + y_n - y_{n-1}) = \frac{\delta'}{y_0^{\,2}}(y_n - y_o)$$

Agar $\delta \to 0$ bo‘lsa, u holda $\sum' - \sum \to 0$.

Endi *Z* ni quyidagich yozamiz.

$$Z=\frac{\delta_1}{y_1}\frac{\xi_1}{\delta_1}+\frac{\delta_2}{y_2}\frac{\xi_2}{\delta_2}+\ldots+\frac{\delta_n}{y_n}\frac{\xi_n}{\delta_n}.$$

Bundan

$$\frac{\xi_1}{\delta_1},\frac{\xi_2}{\delta_2},\ldots\ldots,\frac{\xi_n}{\delta_n}$$

nisbatlarning eng kichigini α va eng kattasi β deb belgilab

$$\alpha\sum\leq Z\leq\beta\sum \tag{4}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Endi (3) va (4) lardan $n\to\infty$da $\sum,\sum',Z$ yig‘indilar bir xil limitga ega bo‘lishi va bu limit AB yoyning giperbolik uzunligi s ga teng bo‘lishini ko‘ramiz.

Shunday qilib

$$S=\lim Z. \tag{5}$$

Faraz qilaylik τ yarim tekislikning nuqtalari siljiganda ixtiyoriy yoyning giperlok uzunliklari har qanday yangi holatda y yoyning giperbolik uzunligiga teng bo‘lsin. Nuqtalarning bunday siljishini **giperbolik harakat** deb ataymiz.

Bu tushuncha Evklid tekisligining harakat tushunchasiga o‘xshash bo‘lib Evklid tekisligini biror nuqta atrofida aylantirishga o‘xshashdir.

Agar giperbolik harakat F figuradan F_1 figuruga almashtirilsa, u holda F va F_1 figuralar teng deb ataladi.

Giperbolik harakatlarning eng soddasini keltiramiz (ko‘rsatib o‘tamiz):

1) Yarim tekislik τ ni to‘g‘ri chiziq bo‘ylab Evklid siljitish giperbolik harakatdan iborat.
2) Markazi u to‘g‘ri chiziqda bo‘lgan o‘xshash almashtirish giperbolik harakatdan iborat, bunda o‘xshashlik koeffitsent musbat kattalikdan iborat.
3) Markazi u to‘g‘ri chiziqda bo‘lgan ixtiyoriy radiusli aylanaga nisbatan <u>inversiya</u> giperbolik harakatdan iborat.

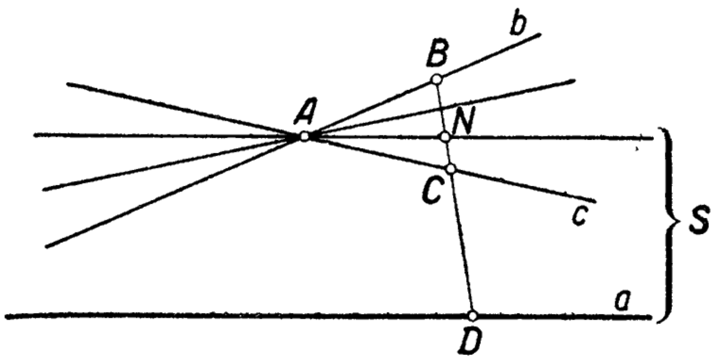
4) Biror *u* to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan o‘qqa nisbatan simmetrik almashtirish giperbolik harakatdan iborat.

2.3-§. Lobachevskiy geometriyasida aksiomalar.

2.3.1. Lobachevskiy postulati.

a to‘g‘ri chiziqda yotmagan A nuqta orqali *a* to‘g‘ri chiziq va A nuqta bilan aniqlanuvchi tekislikda, *a* to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydigan kech bo‘lmaganda ikkita *c* va *b* to‘g‘ri chiziq o‘tadi.

Bu postulatdan A nuqta orqali (A*a*) tekislik *a* to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydigan cheksiz ko‘p to‘g‘ri chiziqlari o‘tadi degan xulosa chiqadi. Masalan markazi A nuqtadan va o‘zlari BAC burchak bilan va unga vertikal bo‘lgan burchakda yotuvchi barcha to‘g‘ri chiziqlar dastasi shunday to‘g‘ri chiziqlardan iboratdir (1-chizma).



1-chizma

Buni isbotlaylik, b to‘g‘ri chiziq`idan shunday B nuqtani olamizki, B nuqta bilan *a* to‘g‘ri chiziq c to‘g‘ri chiziqdan turli tarafda yotsin. B ni *a* to‘g‘ri chiziqning biror D nuqtasi bilan tutashtiraylik. BD kesma c to‘g‘ri chiziq bilan biror C nuqtada kesishadi. N nuqta BC kesmaning ixtiyotiy nuqtasi bo‘lsin.

AN to‘g‘ri chiziq a bilan kesishmaydi.Haqiqatdan agar AN to‘g‘ri chiziq a bilan A dan N ga borgan yo‘nalishdagi S nuqtada kesishganda edi. Pash postulatini uchburchak NDS c to‘g‘ri chiziqqa qo‘llab, c to‘g‘ri chiziq DS D va S orasidagi nuqtada kesishadi degan xulosaga kelar edik:ammo bu qilingan farazga (postulatga) ziddir,chunki c to‘g‘ri chiziq a bilan kesishmaydi deb faraz qilgan edik. NA to‘g‘ri chiziq a bilan N dan A gacha bo‘lgan yo‘nalishdagi S nuqtada kesishadi desak yana zidlikka uchraymiz; bu Pash postulatini b to‘g‘ri chiziq bilan NDS uchburchakka qo‘llash kifoyadir.

Lobachevskiy postulatini tor manoda ham ifodalash mumkun, ya`ni postulatdagi tasdiq ma’lum bir *a* to‘g‘ri chiziq va ma’lun bir A nuqta uchun bajarilgan deb hisoblash mumkun. Haqiqatan, A nuqta va *a* to‘g‘ri chiziq uchun Lobachevskiy postulati bajarilgan bo‘lsin. Biror A_1 nuqta a_1 to‘g‘ri chiziq uchun Lobachevskiy postulati bajarilgan deb faraz qilib A_1 va a_1 uchun Evklid postulati kuchga ega degan xulosaga kelamiz. Evklid postulatining biror A_1 nuqta bilan bir a_1 to‘g‘ri chiziq uchun bajarilishidan, uning har qanday b to‘g‘ri chiziq va unda yotmagan har qanday B nuqta uchun bajarilganligi kelib chiqadi. Bu esa olingan bitta A nuqta bilan bitta *a* to‘g‘ri chiziq uchun qabul qilingan Lobachevskiy postulatiga ziddir.

2.3.2. Lobachevskiy geometriyasining Beltrami-Kleyn interpretatsiyasi

Agar Gilbertning yigirmata aksiomasini o‘zgartirmay qoldirib IV gruppa aksiomasini chiqarib tashlab uning o‘rniga Lobachevskiyning postulati olinsa, u holda Lobachevskiy geometriyasining besh gruppa aksiomasi hosil bo‘ladi.

Bu bilan yangi besh gruppa aksiomalar ro‘yxati tuziladi.

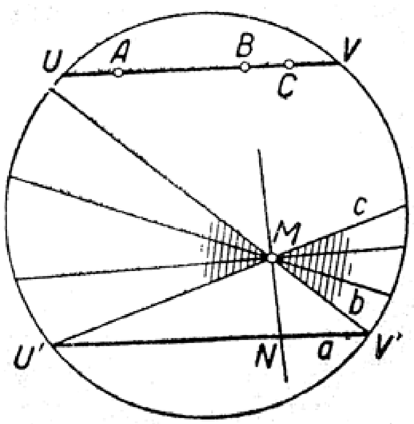
Yangi gruppa aksiomalarning hammasi bajariladigan asosiy ob’ektlar va bular orasida munosabatlarni ifodalovchi sistemani topish mumkinligi ma’lum bo‘ladi. Demak bundan kelib chiqadigan hamma teoremalar o‘rinli bo‘ladi. Beltrami va Kleyn tomonidan taklif qilingan shunday interpretatsiyalardan birini ko‘rib o‘tamiz. Modelni (andazani) quyidagicha tayyorlaymiz. Buni biz oddiy Evklid geometriyasining ma’lumotlari asosida yaratamiz, bunda Evklid geometriyasining teoremalari, metodlari va boshqa usullari bizning ixtiyorimizda deb qaraymiz.

Ixtiyoriy radius, ixtiyoriy markaz bilan doira chizamiz va Lobachevskiyning tekis geometriyasining quyidagi asosiy ob'ektlar kategoriyasini kiritamiz.

1. "Nuqta" – bu doira ichidagi oddiy Evklid nuqtasi. Qaralayotgan asosiy doira aylanasidagi va undan tashqaridagi nuqtalarni bu birinchi kategoriyaga kiritmaymiz.
2. "To'g'ri chiziqlar" – bu bizning doiramizdagi vatarlar. Bu erda "tegishli", "orasida" terminlar (so'zlar, iboralar) oddiy ma'noda tushuniladi.

Biz asosiy aylana ichida turib Evklid geometriyasining hamma shartlarida turgan bo'lamiz. Bu esa I va II tekislik gruppa aksiomalarining bajarilishini ko'rsatadi, ya'ni $I_{1\text{-}3}$, $II_{1\text{-}4}$ gruppa aksiomalarni to'g'riligini bildiradi. Agar doira o'rniga sferani ichki nuqtasi bilan olsak, u holda I va II gruppa aksiomalari to'laligicha (butunligicha) bajariladi.

"Kongruent" (yoki "tenglik") terminining ahamiyatini konstruktsiya qilinayotgan (interpretatsiya qilinayotgan) model tayyorlash uchun quyidagicha muhokama-mushohada yuritamiz: Bizning konstruktsiya (interpretatsiya)miz va uning Evklid bo'yicha ma'nosiga qarab *UV* vatarning chetki nuqtalarini *U* va *V* deb qayd etamiz. (2-chizma)



2-chizma

Ushbu $\frac{UB}{BV}$ birinchi; $\frac{UA}{AV}$ ikkinchi nisbatlarni topamiz, bunda AB kesma *UV* vatarni birinchi nisbatda bo‘ladi va A nuqta Ab kesmaning boshi, B nuqta AB kesmaning oxiri. Bu birinchi va ikkinchi nisbatlarning nisbatini tuzamiz:

$$\frac{UB}{BV}:\frac{UA}{AV}$$

bu nisat hamma vaqt musbatdir, chunki A va B nuqtalar *UV* kesmani ichki holatda bo‘ladi. Tuzilgan nisbatning ixtiyoriy tayinlangan asos bilan olingan logarifmni A va B nuqtalar orasidagi “masofa” deb qabul qilamiz. “birlik masshtab”ni ixtiyoriyligini e’tiborga olish maqsadida yana k ko‘paytuvchi kiritamiz.

Shunday hosil qilingan “masofa” ko‘pincha “noevklid masofa” deyiladi va

$$\delta_{AB} = k \cdot \ln\left(\frac{UB}{BV}:\frac{UA}{AV}\right)$$

deb belgilanadi.

Manfiy yoki musbat ishora *UV* “to‘g‘ri chiziq”dagi AB “kesma” yo‘nalishiga qarab aniqlanadi.

Bu “masofa”ning modulini kesma “uzunligi” yoki uni “noevklid uzunligi” deb ataymiz.

Bunday masofa kongruentlik aksiomasida kesmalarni, burchaklarni o‘lchashga taaluqli emasligini qayd etamiz.

Agar AB va CD kesmalar “uzunligi” teng bo‘lsa, u holda ularni “kongruent” deb shartlashib olamiz, ya’ni

$$\left|\delta_{AB}\right| = \left|\delta_{CD}\right| \text{ bo‘lsa, u holda } AB \equiv CD.$$

Yuqoridagilar asosida hamma gruppa aksiomalarning bajarilishini tekshirib ko‘rish mumkin.

Lobachevskiy geometriyasiga (tekis geometriyaga, planimetriyasiga) yasalgan model **Beltrami xaritasi** deyiladi.

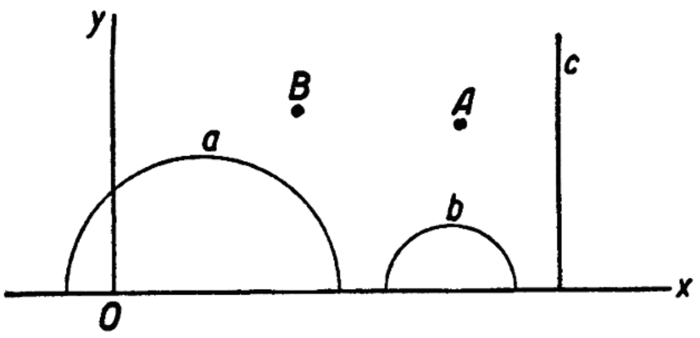
2.3.3. Tekislikdagi Lobachevskiy geometriyasining Puankare interpretatsiyasi

Lobachevskiy geometriyasini Puankare Evklid geometriyasining elementlari bilan Evklid tekisligiga interpretatsiyalaydi.

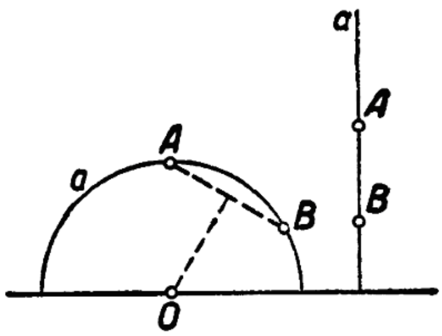
Asosiy ob’ektlar kategoriyasi quyidagicha bo‘lsin:

1. “Nuqta” – bu **yuqori yarim tekislik**dagi oddiy nuqtalar bo‘lsin. OX o‘qidagi va pastki yarim tekislikdagi nuqtalar bu kategoriyaga kirmaydi;
2. “To‘g‘ri chiziq” – bu markazi OX to‘g‘ri chiziqda bo‘lgan yarim aylanadan va asosiy OX to‘g‘ri chiziqga perpendikulyar bo‘lgan oddiy yarim to‘g‘ri chiziqdan iborat. (3-chizma)
3. “Tekislik” – bu yuqori yarim tekislik OX to‘g‘ri chiziqga nisbatan. “Tegishli” va “orasida” oddiy ma’noda tushuniladi.

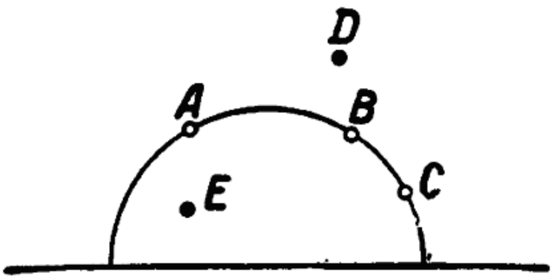
4, 5 chizmalar tekislikning $I_{1\text{-}3}$ birinchi gruppa aksiomalarining bajarilishini tasvirlaydi. Ikkinchi gruppa $II_{1\text{-}4}$ aksiomalarnin bajarilishini 6, 7, 8 chizmalar tasvirlaydi.



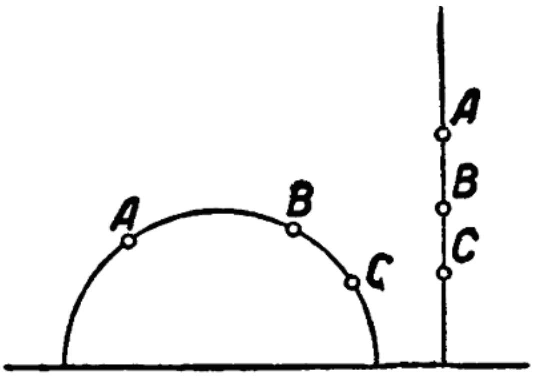
3-chizma



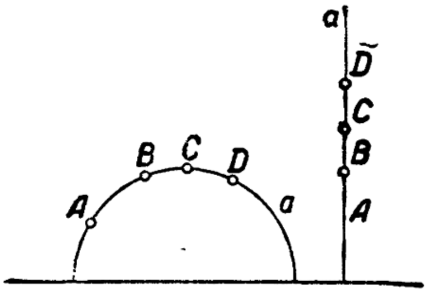
4-chizma



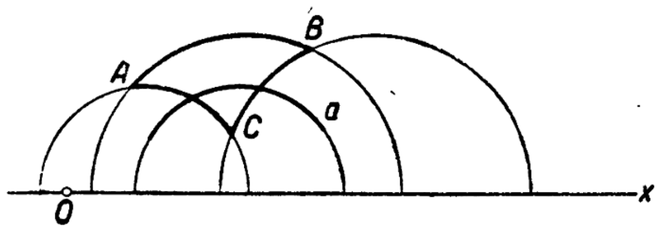
5-chizma



6-chizma



7-chizma



8-chizma

"Kongruentlik" tushunchasini kiritish uchun avvalo A va B nuqtalar orasidagi "masofa" tushunchasini kiritamiz.

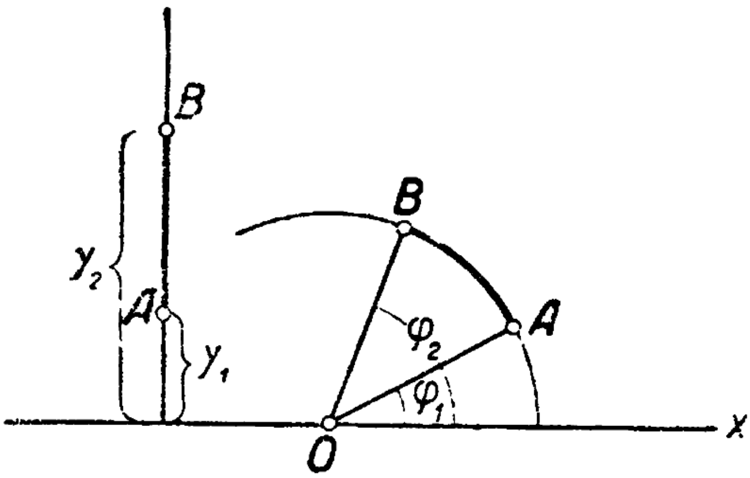
Agar A va B nuqtalar Puankarening xaritasidagi tasvirlangan yarim aylana, ya'ni "to'g'ri chiziq"da yotsa, u holda bunday A, B juft nuqtalar uchun

$$\delta_{AB} = k \cdot \ln\left(\frac{tg\,\frac{\varphi_2}{2}}{tg\,\frac{\varphi_1}{2}}\right)$$

sonni mos keltiramiz. Agar nuqtalar xaritada tasvirlangan yarim to'g'ri chiziqda (OXga perpendikulyar), ya'ni "to'g'ri chiziq"da yotsa, u holda A, B nuqtalar uchun

$$\delta_{AB} = k \cdot \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

sonni mos keltiramiz. (9-chizma)



9-chizma

Bu erda φ_1, φ_2 burchaklar va y_1, y_2 ordinatalar oddiy Evklid ma'nosiga ega bo'lib chizmadan $0 < \varphi < \pi$ va $y > 0$ ekanligi ko'rinib turibdi.

Agar ularning moduli (“masofasi”) teng bo‘lsa, u holda “kesmalar” “kongruent” deb ataymiz, ya’ni agar $|\delta_{AB}| = |\delta_{CD}|$ bo‘lsa, u holda $AB \equiv CD$.

Puankare va Beltrami-Kleyn interpretatsiyalari bir-biriga ekvivalent.

Lobachevskiy aksiomasi.

Aksioma. Tekislikda yotuvchi *l* to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan A nuqtadan shu *l* to‘g‘ri chiziqni kesmaydigan kamida ikkita to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.

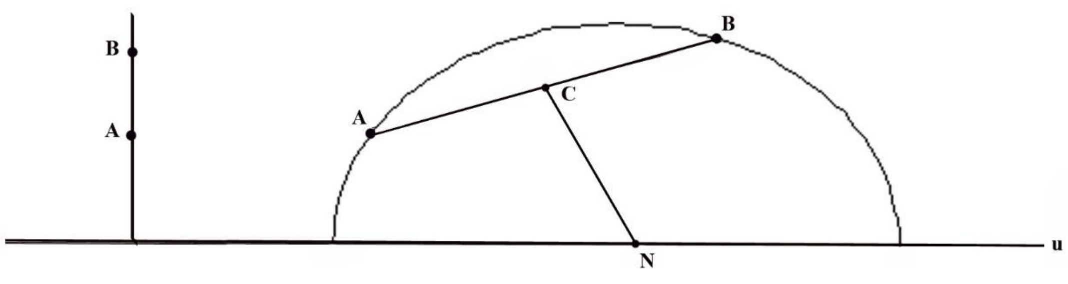
Endi III va boshqa gruppa aksiomalarning bajarilishini tekshirib ko‘rish mumkin.

Yarim tekislik τ da *Lobachevskiy* geometriyasining tekislikdagi aksiomalarining bajarilishini ko‘rish mumkin.

Biz quyida ikkita aksiomalarning (ba’zilarining) bajarishini ko‘rsatamiz:

Aksioma 1: Ikkita har xil nuqtalardan faqat va faqat bitta giperbolik to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin. (10-chizmaga qarang).

Agar berilgan *A* va *B* nuqtalar u to‘g‘ri chiziqqa evklid perpendikulyarda yotsa, u holda bu perpendikulyar izlangan giperbolik to‘g‘ri chiziqdan iborat.
Aks holda *u* to‘g‘ri chiziqda *A* va *B* nuqtalardan δ teng uzoqlikda turuvchi *N* nuqtani topamiz. So‘ngra *N* nuqtani markaz qilib *NA* radiusli Evklid yarim aylanani chizamiz (10-chizma).
Bu yarim aylana- izlangan giperbolik to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘ladi.



10-chizma

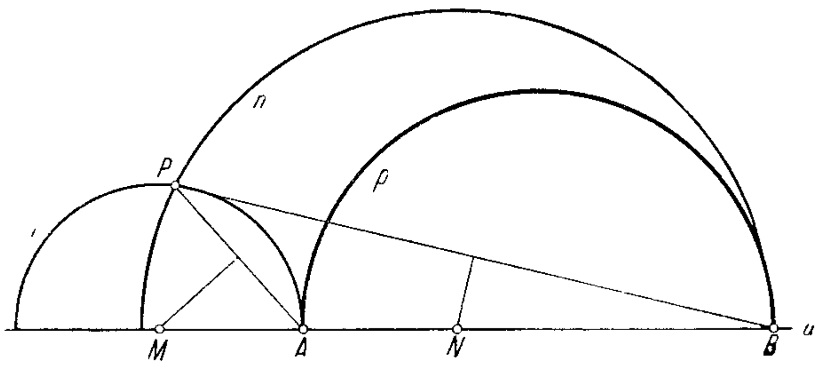
C nuqta AB – ning o‘rtasi.

Aksioma 2. Giperbolik to‘g‘ri chiziq *P* da yotmagan *P* nuqtadan shu *P* to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan ikkita giperbolik chiziq o‘tkazish mumkin.

Ta'rif. Agar ikki giperbolalik chiziq bitta cheksiz uzoqlashgan umumiy nuqtaga ega bo'lsa, u holda bu ikki geperbolalik to'g'ri chiziq parallel deyiladi.

Xususiy holda giperbolik chiziqlar u to'g'ri chiziqning Evklid perpendikulyarini tasvirlasa, ular paraleldir, ya'ni ularning τ yarim tekislikdagi cheksiz uzoqlashgan nuqtasi Evklidning ω tekisligidagi cheksiz uzoqlashgan nuqtalardan iborat.

Giperbolik to'g'ri chiziq *P* ning cheksiz uzoqlashgan nuqtalarini *A* va *B* deb belgilaylik (11-chizma)



11-chizma

P va *A* nuqta orqali markazi u to'g'ri chiziqning *M* nuqtasida bo'lgan *m* Evklid yarim aylanasini o'tkazamiz.*P* va *B* nuqtalar orqali markazi *u* to'g'ri chiziqning *N* nuqtasida bo'lgan *n* Evklid yarim aylanasini o'tkazamiz. Hosil qilingan *m* va *n* evklid yarim aylansalar izlangan giperbolik to'g'ri chiziqlar bo'ladi. Ular P giperbolik to'g'ri chiziqlar har xil yo'nalishda parallel. Bunda m to'g'ri chiziq *B* nuqtadan *A* nuqtaga yo'nalishda parallel bo'lib n to'g'ri chiziq *A* nuqtadan *B* nuqtaga yo'nalish bo'yicha parallel.

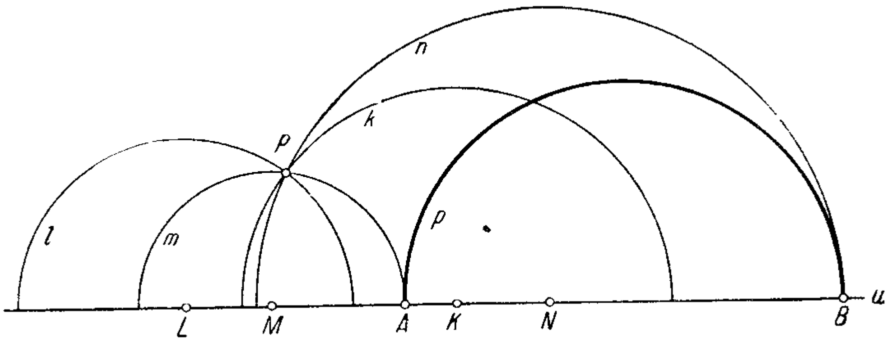
P nuqtadan uch xil-jinsli giperbolik to'g'ri chiziqlar o'tadi.

1) *P* to'g'ri chiziqli kesuvchi to'g'ri chiziqlar,

2) *P* to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziqlar,

3) *P* to'g'ri chiziqli kesmaydigan va *P* to'g'ri chiziqqa paralel bo'lmagan to'g'ri chiziqlar. Birinchi xil – jinsli giperbolik to'g'ri chiziqlarning cheksiz to'plami mavjud; Uchinchi xil- jinsli giperbolik to'g'ri chiziqlarning cheksiz to'plam mavjud; Ikkinchi xil – jinsli giperbolik to'g'ri chiziqlar faqat ikkita.

Birinchi xil-jinsli giperbolik to‘g‘ri chiziqni yasash uchun *MN* kesmaning ixtiyoriy *K* nuqtasini markaz qilib *KP* radiusli yarim aylana chizish kerak. (12-chizma). Agar u to‘g‘ri chiziqli *MN* kesmasidan tashqarisida yotuvchi ixtiyoriy nuqtasi *L* nuqtani markaz qilib radusi *KP* yarim aylana chizishni bajarsak, u holda uchinchi xil-jinsli *l* giperbolik to‘g‘ri chiziqni hosil qilamiz.(xuddi shu 18-chizma).



12-chizma

Endi aksioma 2 Lobachevskiyning paralellik aksiomasiga ekvivalent ekanligi tushinarlidir. (yuqorida Lobachevskiyning paralellik aksiomasi keltirilgan) Lobachevskiyning parallelik aksiomasi quydagicha edi:

Aksioma. Berilgan to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan nuqtadan shu to‘g‘ri chiziqni kesmaydigan kamida ikkita to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.

Bu yerda quyidagini qayd etamiz. Lobachekiy bu aksiomasi bilan noevklid geometrisini kashf qildi.Lobachevskiy geometriyasidan boshqa yana ko‘p noevklid geometriyasini yaratish mumkin ekanligini keyinchalik aniqlandi.

Agar ikki giperbolik to‘g‘ri chiziqlar kesishmasa va parallel bo‘lmasa, u xola ularni uzoqlashuvchi to‘g‘ri chiziqlar deyiladi.

Masalan 12-chizmadagi *p* va *l* to‘g‘ri chiziqlar uzoqlashuvchidir.

Shunday qilib τ yarimtekislikda aksiomalar bajariladi va demak Lobachevskiy geometriyasining teoremalari bajariladi.

Shuning uchun τ yarim tekislik yuqorida uzunlikni o‘lchash qoidasi bilan birgalikda Lobachevskiy tekisligidan iboratdir.

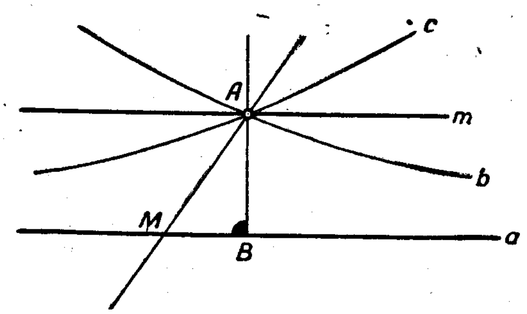
2.4-§. Lobachevskiy tekisligidagi to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro vaziyati.

Lobachevskiy tekisligidagi to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro vaziyatini batafsil va sistemali ravishda ko‘raylik. O‘tkir burchakning bir tomoniga tik va ikkinchi tomoni bilan kesishmaydigan birinchi perpendikulyar haqidagi teorema, to‘g‘ri chiziqlarning bir-biriga nisbatan olgan vaziyatlarida Evklid geometriyasi bilan Lobachevskiy geometriyasida juda katta farqning borligini ko‘rsatadi.

Lobachevskiy geometriyasida to‘g‘ri chiziqlar yo kesishadi, yoki kesishmaydi, ammo kesishmaydigan to‘g‘ri chiziqlar, Evklid geometriyasidagi singari, u qadar sodda xossalarga ega emas. Bunda ahvol ancha murakkabdir.

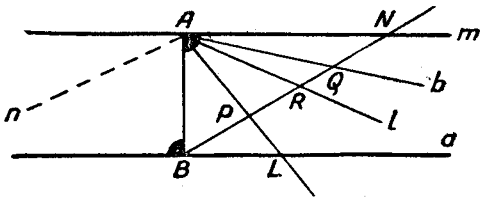
2.4.1. Parallel va o‘taparallel to‘g‘ri chiziqlar.

Lobachevskiy postulati ustida to‘xtalib o‘taylik. *a* to‘g‘ri chiziqda yotmagan *A* nuqtadan *(a,A)* tekislikda *a* bilan kesishmaydigan eng kamida ikkita to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin; ularni b va *c* bilan belgilaylik. Demak *A* nuqtadan *a* bilan kesishmaydigan cheksiz ko‘p to‘g‘ri chiziqlar o‘tadi. (1-chizma)



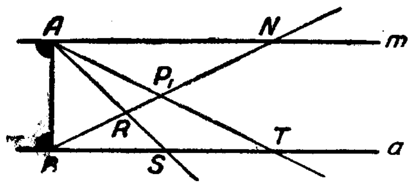
1-chizma

Bular qatoriga *bAc* burchakdagi hamma to‘g‘ri chiziqlar kiradi. Shu sababli markazi *A* nuqtadagi dasta to‘g‘ri chiziqlari ikki sinfga ajraladi. Birinchi sinfga dastaning *a* to‘g‘ri chiziq bilan kesishuvchi barcha to‘g‘ri chiziqlarini, ikkinnchi sinfga — dastaning qolgan hamma to‘g‘ri chiziqlarini kiritamiz. Sinflarning har birida cheksiz ko‘p to‘g‘ri chiziqlar bor. Masalan, *a* to‘g‘ri chiziqdagi *M* nuqtalar *A* nuqta bilan tutashtirilib birinnchi sinf to‘g‘ri chiziqlarini hosil qilamiz; *b* va *c* to‘g‘ri chiziqlar va shuningdek, *bAc* burchakdagi barcha to‘g‘ri chiziqlar ikkinnchi sinfga kiradi; bu ikkinchi sinfga kiruvchilar orasida *AB* ga perpendikulyar bo‘lgan *Am,* to‘g‘ri chiziq ham bor, bunda *AB* ning o‘zi *a* ga perpendikulyar. *BAm* to‘g‘ri burchakdagi to‘g‘ri chiziqlar ham ikki sinfga bo‘linadi (2-chizma).



2-chizma

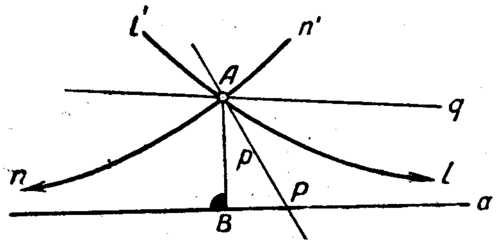
Birinchi sinfga *a* bilan kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlarning hammasini, ikkinchi sinfga *a* bilan kesishmaydigan hamma to‘g‘ri chiziqlarni kiritamiz. *Am* nurda *N* nuqtani olib va *BN* kesmani yasab, *BAm* burchakdagi hamma to‘g‘ri chiziqlarning *BN* bilan kesishganini ko‘ramiz. *ABN* uchburchakni olib qarasak, bunga ishonch hosil qilamiz. Birinnchi sinfga qarashli to‘g‘ri chiziqlar, masalan, *AL, BN* kesmani birinnchi sinf nuqtalarida (ular *P* bo‘lsin) va; ikkinnchi sinf to‘g‘ri chiziqlarini masalan, *b, BN* kesmaning ikkinchi sinf nuqtalarida (ular *Q* bo‘lsin) kesadi deb hisoblaymiz. *BN* kesmaning nuqtalari xullas ikki sinfga ajraldi.

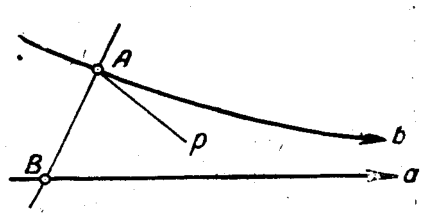


3-chizma

Ularning har birida cheksiz ko‘p nuqtalar bor va birinchi sinfning hamma nuqtalari (ya’ni *P),* ikkinchi sinfdagi har bir *Q* nuqtadan bir tarafda yotadi. Dedekind aksiomasini qo‘llab, *BN* kesmani ikki bo‘lakka ajratuvchi yagona *R* nuqtaning borligini aniqlaymiz. Bo‘laklarning biri birinchi sinf nuqtalari *R,* ikkinchisi esa ikkinchi sinf nuqtalari *Q* dan iboratdir. Bu bo‘laklarnang chegarasi bo‘lgan *R* nuqta ikkinchi sinfga kiradi. Birinchi sinfning oxirgi nuqtasi yo‘q, ya’ni *AR* nur *a* to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydi. Haqiqatan, *AR* nur *a* to‘g‘ri chiziq bilan *S* nuqtada kesishadi deb faraz qilaylik (21-chizma) va *a* to‘g‘ri chiziqda shunday *T* nuqta olaylikki, u *BS* yo‘nalishda *S* nuqtadan keyin yotsin. *A* ni *T* bilan tutashtiraylik. *AT* nur *BN* kesma bilan P_1 nuqtada kesishadi. Demak P_1 nuqta birinchi sinf nuqtasidir; biroq bu holning sodir bo‘lishi mumkin emas, chunki *RN* kesmadagi hamma nuqtalar ikkinchi sinf nuqtalaridir. *AR* nur *a* to‘g‘ri chiziq bilan kesishadi degan faraz zidlikka keltirdi, demak *AR* nur *a* to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydi. Bu yerdagi ahvolni anglatib ayonlash mumkin: Birinchi sinfning *AL* nurini *A* nuqta atrofida (keltirilgan 6-chizmada soat strelkasiga teskari) aylantira borsak, o‘zgaruvchi bu nur *a* to‘g‘ri chiziq bilan *L* nuqtada kesishadi; bu nuqta, nurning aylana borishi bilan *a* to‘g‘ri chiziq bo‘ylab borgan sari uzoqlashadi, va nihoyat, shunday payt keladiki, aylanuvchi nur *a* to‘g‘ri chiziqdan “uzilib ketadi”. Bu payt, aylanuvchi nur *AR* vaziyatni olganda, ya’ni birinchi sinf nurlaridan ikkinchi sinf nurlariga o‘tganida yuz beradi. Bundan keyin bu nurni to Am nurning vaziyatigacha aylantira borganimizda, u *a* to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydi. Ana shu “chegaraviy” *ARq l* to‘g‘ri chiziqni (2-chizma) Lobachevskiy *A nuqtaga nisbatan BL yo‘nalishda a to‘g‘ri chiziqqa parallel chiziq* deb atagan edi. Agar simmetriya o‘qi AB ga nisbatan *l* bilan simmetrik bo‘lgan *n* to‘g‘ri chiziqni olsak, oldingi yo‘nalishga qarama-qarshi bo‘lgan *LB* yo‘nalishda *a* ga parallel bo‘lgan ikkinchi to‘g‘ri chiziqni hosil qilamiz.

Bu yerda parallellik Lobachevskiy ta’rificha tushuniladi. Shunday qilib, har bir *a* to‘g‘ri chiziq va har bir A nuqta, uchun shunday ikki *l*, *n* to‘g‘ri chiziq mavjudki, ular *a* ga Lobachevskiy ta’rifi bo‘yicha paralleldir; bulardan biri *a* ga bir yo‘nalishda, ikkinchisi esa qarama-qarshi yo‘nalishda paralleldir.





4-chizma 5-chizma

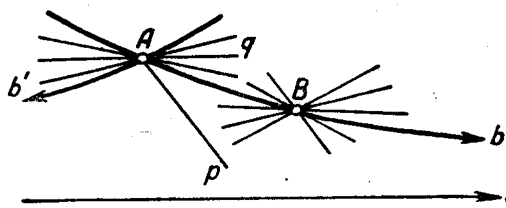
lAn burchakdagi hamma *p* to‘g‘ri chiziqlarning *a* bilan kesishishini biz aniqladik. *n'Al* burchagidagi hamma *q* to‘g‘ri chiziqlar *a* bilan kesishmaydi. *q* to‘g‘ri chiziqlar *a* to‘g‘ri chiziqqa o‘taparallel deb ataladi (7-chizma). *a* ga o‘taparallellar qatoriga *BA* ga perpendikulyar *m* to‘g‘ri chiziq ham kiradi (1-chizma). Agar *a* to‘g‘ri chiziqda strelka bilan ko‘rsatilgan tayin bir yo‘nalish tanlanib olingan bo‘lsa, *a* to‘g‘ri chiziqda yotmagan har bir *A* nuqtadan, berilgan yo‘nalishda *a* to‘g‘ri chiziqqa parallel faqat bitta *b* to‘g‘ri chiziq o‘tadi.

Berilgan *A* nuqtadan o‘tib, *a* to‘g‘ri chiziqqa berilgan yo‘nalishda parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqqa quyidagicha ta'rif berish mumkin: *a* to‘g‘ri chiziqning istalgan *B* nuqtasini *A* bilan tutashtiramiz (5-chizma). *AB* to‘g‘ri chiziq tekislikni ikkita yarim tekislikka bo‘ladi. *a* to‘g‘ri chiziqda berilgan yo‘nalishda harakat qilib, bu yarim tekisliklarning biridan ikkinchisiga o‘tamiz. *bAB* burchak ikkinchi yarim tekislikda yotadi. Quyidagi ikki shart bajarilsa, *b* to‘gri chiziq *a* ga ko‘rsatilgan yo‘nalishda parallel deb ataladi: 1) *b to‘gri chiziq a bilan kesishmaydi;* **2)** *bAB burchakdagi istalgan p to‘g‘ri chiziq a bilan kesishadi.* Bu ta'rifning, parallellarga Lobachevskiy tomonidan berilgan ta’rifga ekvivalentligi ravshandir.

2.4.2. Parallel to‘g‘ri chiziqlarning xossalari.

Parallellarga Lobachevskiy bo‘yicha berilgan ta’rifda A nuqta maxsus rolni o‘ynagan edi. Parallelizm ta’rifi, birinchidan, *berilgan yo‘nalishga, ikkinchidan, berilgan A nuqtaga* nisbatan edi. Ammo *a* to‘gri chiziqqa berilgan yo‘nalishda parallel bo‘lgan *b* to‘g‘ri chiziqdagi *A* nuqtaning alohida ahamiyatga ega emasligini isbotlash mumkin.

Teorema. Agar b to‘gri chizq *a* to‘g‘ri chiziqqa ma’lum yo‘nalishda va ma’lum A nuqtaga nisbatan parallel bo‘lsa, b to‘g‘ri chizq *a* to‘g‘ri chiziqqa o‘sha yo‘nalishda o‘zining istagan B nuqtasiga nisbatan ham paralleldir. (6-chizma)

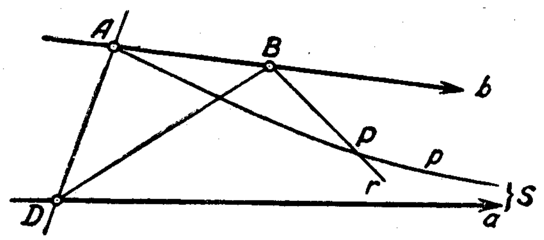


6-chizma

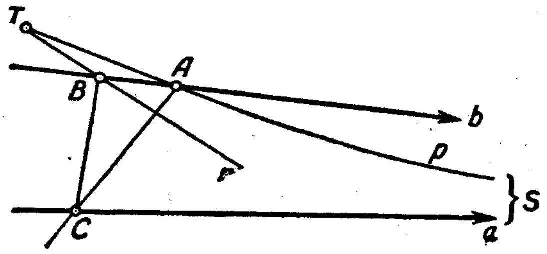
Bu teoremani isbotlashdan oldin, masalaning qo‘yilishiga to‘xtalib o‘taylik. Agar b to‘g‘ri chiziq *a* to‘g‘ri chiziqqa *A* nuqtaga nisbatan *a* dagi ma’lum yo‘nalishda parallel bo‘lsa, demak *b* to‘g‘ri chiziq *a* bilan kesishmaydi va b bilan kesishmaydigan hamma to‘g‘ri chiziqlar uchun chegaraviy to‘g‘ri chiziqdir. *a* bilan kesishmaydigan to‘gri chiziqlar uchun ikkinchi chegaraviy to‘g‘ri chiziq, *a* ga qarama-qarshi yo‘nalishda parallel bo‘lgan *b* to‘g‘ri chiziqdan iboratdir. *bAb'* burchak va unga vertikal bo‘lgan burchakdagi har bir *p* to‘g‘ri chiziq *a* bilan kesishadi. Ikkinchi juft vertikal burchaklardagi har bir *q* to‘g‘ri chiziq esa *a* bilan kesishmaydi.

Agar *B* nuqtani *b* to‘g‘ri chiziqda olsak, *B* nuqtadan o‘tgan to‘g‘ri chiziqlar dastasi orasida, *a* to‘g‘ri chiziq bilan kesishadigan hamda kesishmaydiganlari mavjuddir. *a* bilan kesishmaydiganlar orasida *b* to‘g‘ri chiziq ham bor. Lekin, *b* to‘gri chizqning *a* bilan kesishadigan kesishmaydiganlarni ajratib turuchi chegaraviy bo‘lish-bo‘lmasligini biz hali bilmaymiz. *b* to‘g‘ri chiziq *a* to‘g‘ri chiziqqa *B* nuqtaga nisbatan o‘taparallel bo‘la olmaydimi? Ana shu holning yuz bermasligi to‘g‘risida teoremada tasdiq qilinadi. *b* to‘g‘ri chiziqning *a* ga *B* nuqtaga nisbatan ham berilgan yo‘nalishda parallelligini isbotlash uchun ikki narsani isbotlash kerak: *birinchidan, b* to‘g‘ri chiziq *a* bilan kesishmaydi (bu esa ma’lum, chunki *b* to‘g‘ri chiziq *a* ga *A* nuqtaga nisbatan paralleldir), *ikkinchidan, bBD* burchakdagi har bir *r* to‘g‘ri chiziq (6-chizma) *a* bilan kesishadi. Isbotni ikki qismga bo‘lamiz.

I. *b* to‘g‘ri chiziqning *B* nuqtasi, *A* nuqtadan o‘ng tomonda, ya’ni parallellik tomonida yotadi (7-chizma). *bBD* burchakdagi istalgan *r* to‘g‘ri chiziqning *a* bilan kesishishini isbotlash kerak. r to‘g‘ri chiziqda shunday *P* nuqta olamizki, u *a* bilan b orasida yotadigan bo‘lsin va bu *P* nuqtani *A* bilan tutashtiramiz; ularni tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziq *p* bo‘lsin. *b* to‘g‘ri chiziqning *bAD* burchak ichiga kirgani va *b* ning *a* to‘g‘ri chiziqqa *A* nuqtaga nisbatan parallelligi sababli, *p* to‘g‘ri chiziq *a* bilan *S* nuqtada kesishadi.



7-chizma

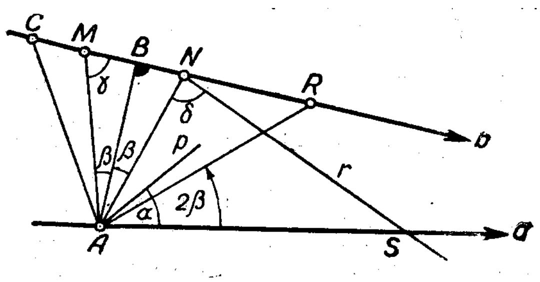


8-chizma

Pash postulatini *ADS* uchburchak va *r* to‘g‘ri chiziqqa nisbatan qo‘llaymiz. *r* to‘g‘ri chiziq uchburchakning *AS* tomoni bilan *A* va *S* orasidagi *P* nuqtada kesishadi va *AD* tomoni bilan kesishmaydi, chunki *r* to‘g‘ri chiziq, *AD* kesma nuqtalarini o‘z ichiga olmagan *bBD* burchakdagi to‘g‘ri chiziqdir. Demak, *r* to‘g‘ri chiziq *AD* tomon bilan *A* va *D* orasida kesisha olmaydi. Shu sababli, *ADS* uchburchakning bitta ham uchidan o‘tmaydigan *p* to‘g‘ri chiziq, *bu uchburchakning DS tomoni bilan D va S* orasida yotuvchi nuqtada kesishadi, ya’ni u *a* bilan kesishadi.

II. *b to‘g‘ri chiziqning B nuqtasi A nuqtadan chap tomonda, ya’ni parallelizm yo‘nalishiga qarama-qarshi tomonda yotadi. bBS* burchak ichidagi istalgan *r* to‘g‘ri chiziqning *a* bilan kesishishini isbotlash kerak. Isbotlash uchun *r* to‘g‘ri chiziqda shunday *T* nuqta olamizki, u *bBS* burchakka vertikal bo‘lgan burchakda yotsin va so‘ngra *T* ni *A* bilan tutashtiramiz, *T* ni A bilan tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziq p bo‘lsin (8-chizma). p to‘g‘ri chiziq bAS burchak ichiga kirib, a to‘g‘ri chiziq bilan S nuqtada kesishadi, chunki b to‘g‘ri chiziq A nuqtaga nisbatan a ga paralleldir. ACS uchburchak va r to‘g‘ri chiziqni olaylik. r to‘g‘ri chiziq AS tomon bilan A va C orasida kesishadi, chunki r to‘g‘ri chiziq ABC burchakka qarashlidir; r to‘g‘ri chiziq AS bilan A va S orasida kesishmaydi, chunki u $p \equiv AS$ bilan AS dan tashqarqaridagi T nuqtada kesishgan edi. Pash postulatini ACS uchburchak va uning uchlaridan o‘tmagan r to‘g‘ri chiziqqa nisbatan qo‘llab r ning CS bilan C va S orasidagi kesishganini, ya’ni r to‘g‘ri chiziqning a bilan kesishganini isbotlaymiz. Teorema to‘la isbotlandi. Bundan buyon a ga parallel bo‘lgan b to‘g‘ri chiziq haqida gapirganda, b da alohida nuqtani ko‘rsatib o‘tirmaymiz, chunki isbot qilishimizga asosan, bm to‘g‘ri chiziq a ga o‘zining hamma nuqtalariga nisbatan berilgan yo‘nalishda paralleldir.

Teorema. Agar b to‘g‘ri chiziq a to‘g‘ri chiziqqa berilgan yo‘nalishda parallel bo‘lsa, a to‘g‘ri chiziq ham o‘z navbatida b to‘g‘ri chiziqqa o‘sha yo‘nalishda paralleldir (9-chizma).



9-chizma

Buni isbotlash uchun *quyidagilarga ishonch hosil qilish kerak*: 1) a to‘gri chiziq b to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydi; 2) aAC burchakning a bilan ixtiyoriy α burchak tashkil qilgan har qanday p to‘g‘ri chizig‘i b bilan kesishadi (C bilan b dagi ixtiyoriy nuqta belgilangan). b ning a ga parallelligi, va shu tufayli a ning b bilan kesishmasligiga asosan, bu tasdiqlarning birinchisi to‘g‘ridir. Ikkinchisini isbotlash qoladi, b to‘g‘ri chiziqqa AB perpendikulyar tushiramiz va b da B nuqtaning turli tarafidan shunday ikki M, N nuqta olamizki,

$$\angle NAB = \angle BAM = \beta < \frac{\alpha}{2}$$

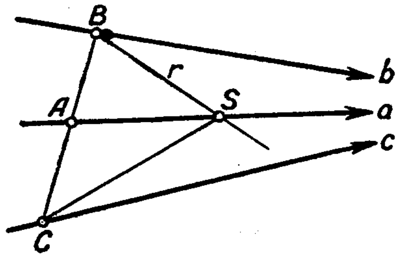
bo‘lsin. AMB burchakni γ bilan belgilaylik; *γ<bNA*, chunki *bNA* burchak *ANM* uchburchakning tashqi burchagidir. *AN* to‘g‘ri chiziq bilan *δ* (*δ*=∠*AMB*=*γ*) burchak tashkil qilgan *r* to‘g‘ri chiziqni yasaylik. *r* to‘g‘ri chiziq *bNA* burchak ichidan ketadi, chunki $\angle bNA > \gamma = \delta$; demak u, *a* bilan *S* nuqtada kesishadi. Bu — *b* ning *a* to‘g‘ri chiziqqa parallelligidan kelib chiqadi. So‘ngra *b* to‘g‘ri chiziqqa *M* nuqtadan boshlab parallellik tomoniga qarab *MR=NS* kesmani qo‘yamiz va ΔAMR ni olamiz. Bu uchburchak *NAS* uchburchakka tengdir, chunki yasashimizga ko‘ra: *AM=AN*, *MR=NS* va $\delta = \gamma$. Agar ΔANS ni soat strelkasiga qarshi tomonga *A* nuqta atrofida 2β dan iborat burchakka burasak, u *AMR* uchburchak bilan ustma-ust keladi. Jumladan, *AS* tomon buralishdan so‘ng *AR* bilan ustma-ust keladi; demak $\angle RAS = 2\beta$ lekin $\beta < \frac{\alpha}{2}$ yoki $2\beta < \alpha$, shu sababli *p* to‘g‘ri chiziq *MAR* uchburchakning *A* burchagi ichiga kiradi va shuning uchun, bu uchburchakning *MR* tomoni bilan kesishadi. Xullas, *p* to‘g‘ri chiziq *b* bilan kesishadi. Ammo *p* esa *BAa* burchakning ixtiyoriy to‘g‘ri chizig‘idir. Shunday qilib, *a* to‘g‘ri chiziqning *b* to‘g‘ri chiziqqa *A* nuqtaga nisbatan parallelligi isbot qilindi.

Oldingi teoremadan, *a* to‘g‘ri chizq *b* ga o‘zining istagan nuqtasiga nisbatan ham parallel degan natijani chiqaramiz. Hozir isbotlangan teorema, *a* va *b to‘g‘ri chiziqlar berilgan yo‘nalishda o‘zaro parallel* deb gapirishga imkoniyat beradi.

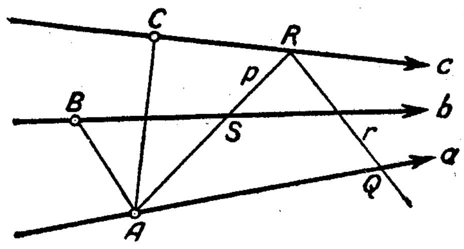
Endi *parallelizmning tranzitivlik xossasiga* ega bo‘lishini ko‘rsataylik.

T e o r e m a . Biror *a* to‘g‘ri chiziqqa ma’lum yo‘nalishda parallel bo‘lgan ikki , b, c to‘g‘ri chiziq, o‘sha yo‘nalishda o‘zaro paralleldir.

Isbotni ikki qismga bo‘lamiz.



10-chizma



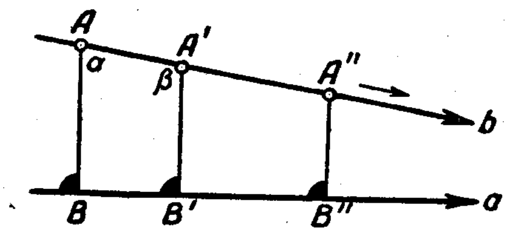
11-chizma

1) *b* va *c to‘g‘ri chiziqlar a to‘g‘ri chiziqdan turli tarafda yotadi* (10-chizma). *b* to‘g‘ri chiziqda *B* nuqtani va *c* to‘g‘ri chiziqda *C* nuqtani olamiz. *BC* kesmaning chetlari *a* to‘g‘ri chiziqdan turli tarafda yotgani uchun *BC* kesma *a* bilan *A* nuqtada kesishadi. Shartga ko‘ra *a* ga *b* paralleldir, shu sababli, *bBC* burchakdagi istalgan *r* to‘g‘ri chiziq *a* to‘g‘ri chiziq bilan *(S* nuqtada) kesishadi va *aSC* burchak ichiga qarab, *c* to‘g‘ri chiziq bilan kesishadi. Bundan tashqari, *a* to‘g‘ri chiziqdan turli tarafda yotgani sababli, *b* va *s* to‘g‘ri chiziqlarning o‘zlari ham kesishmaydi. Shunday qilib, *b* to‘g‘ri chiziq *c* to‘g‘ri chiziqqa paralleldir.*r* nurning *SBC* yarimtekislikda o‘tkazilganligi tufayli, *b* bilan *c a* to‘g‘ri chiziqqa qaysi yo‘nalishda parallel bo‘lsa, *b* o‘sha yo‘nalishda *c* ga paralleldir.

2) b va c to‘g‘ri chiziqlar a ga bir yo‘nalishda parallel, lekin a to‘g‘ri chiziqdan bir tarafda yotadi (11-chizma). Uchta nuqta olaylik. *A ni a* to‘g‘ri chiziqda, *B* ni *b* da va *C* ni *c* da. *B va C* nuqtalarni *A* bilan tutashtiramiz; aniqlik uchun *b* to‘g‘ri chiziq *a* bilan *c* orasida yotsin. *c* ning *b* bilan *kesishmasligini* isbotlaylik. Haqiqatan, *c* to‘g‘ri chiziq *b* bilan kesishsa, u holda *c* bir-biriga parallel *b* va *a* to‘g‘ri chiziqlar orasidagi sohaga ularning parallellik tomonidan kirar edi va shuning uchun *a* bilan kesishar edi. Ammo *c* ning bu yo‘nalishda *a* ga parallelligi tufayli, bu hol yuz bera olmaydi. Endi *Bad* va *CAa* burchaklarning umumiy qismiga qarashli bo‘lgan istalgan *p* to‘g‘ri chiziqni olaylik (chizmaga qarang), *a* ning *b* va *c* ga parallelligi sababli, *p* to‘g‘ri chiziq ham *b* bilan (C da) ham *c* bilan (*R* da) kesishadi. *cRA* burchakda istalgan *r* to‘g‘ri chiziq o‘tkazaylik. *c* ning *a* ga parallelligidan *a* to‘g‘ri chiziq bilan *r (Q* nuqtada) kesishadi.

Demak, r to‘g‘ri chiziq b bilan ham kesishadi. Bunga ishonch hosil qilish uchun *ARQ* uchburchak va b to‘g‘ri chiziqqa Pash postulatini qo‘llash kifoya qilinadi. Shunday qilib, teoremaning ikkinchi qismi ham isbotlandi.

Endi parallel ikki to‘g‘ri chiziqni olib, ularning bir - biridagi nuqtadan ikkinchi **to‘g‘ri** chiziqqacha bo‘lgan masofaning nuqta birinchi to‘g‘ri chiziq bo‘ylab parallelizm yo‘nalishida yoki unga qarama – qarshi yo‘nalishda harakatlana borishi bilan ,o‘zgarishini tekshiraylik. Olingan nuqta *A* bo‘lsin. *A* nuqtaning parallelizm yo‘nalishi bo‘ylab harakatlanishi bilan, *AB* masofaning *monoton ravishda kamaya borganligini* isbotlash oson. *A* ning qarama-qarshi yo‘nalishda harakatlanishi bilan *AB monoton ravishda* o‘sadi (12-chizma).

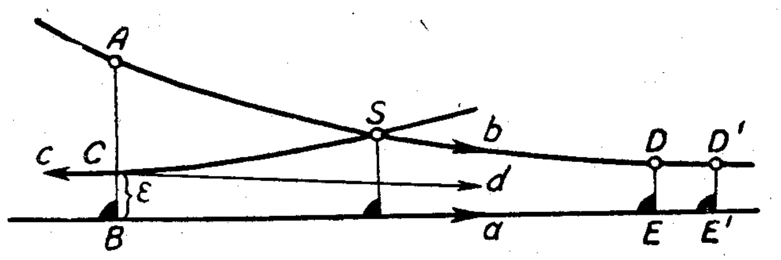


12-chizma

Chindan ham, α — o‘tkir, β — o‘tmas bo‘lganidan $A'B'<AB$, chunki “to‘rtburchakning” katta burchagi qarshisida katta tomon yotadi. Shuningdek, *A''B''* kesmaning *A'B'* dan kichikligini ham ko‘rsatish mumkin. Shunday qilib, *A* nuqtaning parallelizm yo‘nalishi bo‘ylab harakatlanishi bilan *AB* ning monoton kamayishini isbotladik. Qarama-qarshi yo‘nalishda esa *AB* ning monoton o‘sishini isbotlash mumkin. Lekin, o‘zgaruchi miqdor monoton usili bilan biror o‘zgarmas miqdordan kichikligicha qolishi mumkin (masalan, aylanaga ichki chizilgan muntazam ko‘pburchakning perimetri, tomonlar sonining cheksiz ikkilana borishi bilan o‘sadi, lekin tashqi chizilgan ko‘pburchak perimetridan kichikligicha qoladi). Xuddi shu singari, agar *AB* masofa parallellik tomonida monoton kamayib borsa, bundan bu masofa ma’lum bir uzunlikdan katta bo‘la olmaydi degan xulosa chiqarib bo‘lmaydi (masalan, tashqi chizilgan muntazam ko‘pburchak perimetri tomonlar

sonining cheksiz ikkilanib borishi bilan monoton kamayadi, lekin u istalgan muntazam ichki chizilgan ko‘pburchak perimetridan kichik bo‘la olmaydi). Ko‘rilayotgan holda esa, ushbu teorema kuchga egadir*:* ikki parallel chiziqdan biridagi nuqtalarning ikkinchisigacha bo‘lgan masofalari parallelizm tomoniga qarab harakatlanganda chegarasiz kamayadi va nuqtaning qarama – qarshi tomonga qarab harakatlana borishi bilan chegarasiz o‘sadi.

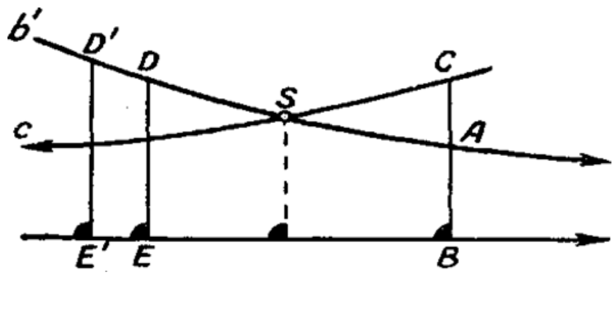
Avvalo shuni isbotlaylik: ixtiyoriy ε kesma qanday bo‘lsa bo‘lsin, *b* to‘g‘ri chiziqda harakatlanuvchi nuqtaning parallellik yo‘nalishida shunday *D'* vaziyatini ko‘rsatish mumkinki, uning *a* gacha masofasi ε dan kichik bo‘ladi. Isbotlash uchun *ε=BC* kesmani (13-chizma) *AB* perpendikulyarga shunday qo‘yamizki, *C* nuqta parallellar orasidagi sohaga tushsin, va *C* orqali qarama - qarshi yo‘nalishda *a* ga parallel *c* to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz.



13-chizma

c ning *b* to‘g‘ri chiziq bilan kesishganligini isbotlaylik. Buning uchun, *C* nuqtadan ilgarigi yo‘nalishda *a* ga parallel *d* to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. *d* to‘g‘ri chiziq *b* ga ham parallel bo‘ladi. *c* to‘g‘ri chiziq *dCA* burchakka qarashlidir, demak u *b* to‘g‘ri chiziq bilan *C* nuqtada) kesishadi, chunki *d* to‘g‘ri chiziq *b* to‘g‘ri chiziqqa parallel edi. *b* to‘g‘ri chiziqda *S* ga nisbatan parallellik yo‘nalishida yotuvchi shunday *D* nuqtani olamizki, *SDqCS* bo‘lsin. *a* ga tushirilgan *DE* perpendikulyarning uzunligi *ε* ga tengdir, chunki *C* va *D* nuqtalar va shu singari *B* va *E* nuqtalar *S* dan *a* ga tushirilgan perpendikulyarga nisbatan simmetrikdir va *CBqDE* q^{ε}. Agar *D* nuqtani *b* bo‘ylab parallellik tomonga qarab siljitsak, masalan *D'* vaziyatiga keltirsak, uning *a* to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofasi ε dan kichik bo‘ladi. $D'E' < DE = \varepsilon$. Hosil qilingan natija qisqacha shunday ifoda etiladi*:* parallel to‘g‘ri chiziqlar parallellik tomonida bir-biriga asimptotik ravishda yaqinlashadi. Ba’zi mualliflar “parallel to‘g‘ri chiziqlar” termini o‘rniga asimptotik to‘g‘ri chiziqlar terminini ishlatadilar. Bunday to‘g‘ri chiziqlarni Lobachevskiyning o‘zi yaqinlashuchi to‘g‘ri chiziqlar deb atagan edi.

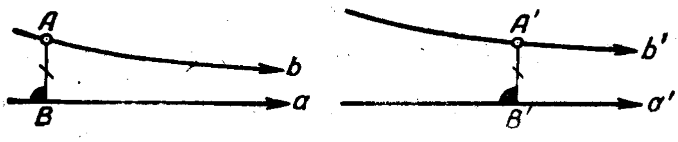
Endi, *parallelizm yo‘nalishiga qarama – qarshi tomonda parallel to‘g‘ri chiziqlar nuqtalari orasidagi masofaning cheksiz o‘sishini ko‘rsatamiz.* Buning ma’nosi quyidagidan iborat: *n* kesma qancha katta olingan bo‘lsada, *b* da harakatlanuvchi nuqtaning shunday D′ vaziyatini ko‘rsatish mumkinki, uning *a* to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofasi *n* dan katta bo‘ladi. *BA* perpendikulyarda *BCqn* kesmani olib, berilgan yo‘nalishga qarama-qarshi yo‘nalishda *a* to‘g‘ri chiziqqa *C* nuqtadan parallel *c* to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz (14-chizma). Bu *c* to‘g‘ri chiziq *b* to‘g‘ri chiziq bilan *S* nuqtada kesishadi, chunki *b* to‘g‘ri chiziqning *Ab′* nurga qarashli nuqtalarining *a* to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofalari, **A** dan **B** gacha bo‘lgan masofadan katta; *c* to‘g‘ri chiziqdagi nuqtalar esa, uning *a* ga parallellik tomonida *a* ga cheksiz yaqinlasha boradi. Bundan so‘ngra, **SDqSC** ni qo‘yamiz va **D** dan *a* ga **DE** perpendikulyar tushiramiz. Xuddi oldingi holdagidek, **DE** va **CB** kesmalarning n ga tengligiga *(*DE=CB=n)



14-chizma

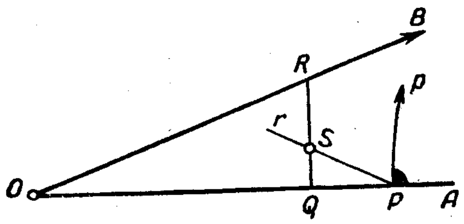
ishonch hosil qilamiz va S nuqtadan D ga qaraganda uzoqroq turuvchi D' nuqtani olib, D'E' ning n dan kattaligini ($D'E' > n$) isbot qilamiz. Teorema to‘la ravishda isbotlandi. Parallelizm yo‘nalishiga qarama-qarshi tomonda asimtotik to‘g‘ri chiziqlar cheksiz uzoqlasha boradi. Tekislikning parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi qismi parallellar orasidagi mintaqa deyiladi.

Teorema. Parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi barcha mintaqalar kongruentdir, ya’ni ular bir-biriga hamma nuqtalari bilan ustma-ust keltirilishi mumkin.



15-chizma

Ixtiyoriy ikki *a*, *b* va *a'*,*b'* mintaqani olaylik (15-chizma). b to‘g‘ri chiziqda *A* nuqtani olib, undan *a* ga AB perpendikulyar tushiramiz. A' nuqtalarning *a'* to‘g‘ri chiziqqacha masofalari nol bilan cheksizlik orasidagi barcha qiymatlarni qabul qilgani sababli, shunday A' nuqta topiladiki, A'B'q AB bo‘ladi; endi A'B′ ni AB bilan ustma-ust keltirsak, olingan mintaqalardan birini ikkinchisiga yotqizgan bo‘lamiz. Pirovardida *AOB* burchakning *OA* tomoniga tik va uning QB tomoni bilan kesishmaydigan qilib o‘tkazilgan birinchi perpendikulyar *p* ga qaytaylik (16-chizma)



16-chizma

Teorema. Ixtiyoriy o‘tkir AOB burchakning OA tomoniga tik va uning ikkinchi OB tomoni bilan kesishmaydigan birinchi p perpendikulyar OB tomonga paralleldir.

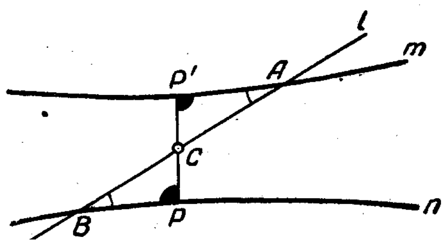
Isbot. 1) OB va p kesishmaydi. 2) OPp burchakning istalgan r to‘g‘ri chizig‘i OB bilan kesishadi. Chindan ham, r nurda S nuqtani olib va OA ga S perpendikulyarni o‘tkazib, oldingidek, bu perpendikulyarning OB bilan (R nuqtada) kesishganini ko‘ramiz. Endi OQR uchburchak bilan r to‘g‘ri chiziqqa Pash postulatini qo‘llasak, r to‘g‘ri chiziqning OR bilan O va R nuqtalar orasida kesishadi degan xulosaga kelamiz.

Bu teoremaning isbotlanishi natijasida birinchi perpendikulyar haqidagi teoremani quyidagicha ifodalash mumkin. Qanday o‘tkir burchak berilgan bo‘lmasin, uning bir tomoniga perpendikulyar va ikkinchi tomoniga parallel to‘g‘ri chizitq hama vaqt mavjuddir.

2.4.3. Parallellik burchagi.

O‘taparallel to‘g‘ri chiziqlarga doir bir lemmani isbot qilamiz. Agar ikki to‘g‘ri chiziq (*m*, *n*) uchinchi (*l*) to‘g‘ri chizq bilan kesishib, bir-biriga teng ichki almashinuvchi burchaklar tashkil qilsa, bu (*m*, *n*) to‘g‘ri chiziqlar o‘taparalleldir.

Olingan to‘g‘ri chiziqlar bilan kesishuvchi *l* to‘g‘ri chiziq *AB* kesmasining o‘rtasi *C* bo‘lsin (17-chizma).

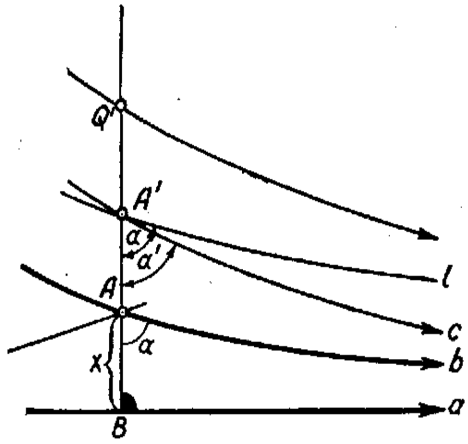


17-chizma

C dan *n* to‘g‘ri chiziqqa *CP* perpendikulyar va *m* to‘g‘ri chiziqqa *CP'* perpendikulyar tushiraylik. Bu perpendikulyarlarning *biri ikkinchisining davomini tashkil etadi.* Haqiqatan, *CPB* uchburchak *CP'A* uchburchakka tengdir, chunki to‘g‘ri burchakli bu uchburchaklarda gipotenuzalar va o‘tkir burchaklar o‘zaro tengdir, demak C nuqtadagi burchaklar ham tengdir (ular bu holda vertikal burchaklar bo‘ladi); shu sababli, PCP' chiziq to‘g‘ri chiziqdir. PP' to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lganliklaridan, *m, n* to‘g‘ri chiziqlar *o‘taparalleldir.* Lemma isbotlandi.

Agar a to‘g‘ri chiziqda yotmagan A nuqtadan a ga parallel qilib b o‘tkazilsa, u holda bAB burchak (uni α bilan belgilaylik, $\alpha = \angle bAB$), *A nuqta* va *a to‘g‘ri chiziq uchun parallellik burchagi* deb ataladi. A nuqtaning a to‘g‘ri chiziqqacha olingan harbir x masofasiga aniq bir parallellik a burchagi mos kelishini tushunish oson, chunki a to‘g‘ri chiziqdan x masofadagi A nuqtadan, berilgan yo‘nalishda a ga faqat bitta b parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin; demak u to‘g‘ri chiziq AB perpendikulyar bilan aniq bir α burchak tashkil qiladi. A nuqtadan qarama-qarshi yo‘nalishda o‘tkazilgan parallel, b to‘g‘ri chiziqqa AB perpendikulyarga nisbatan simmetrikdir va AB bilan o‘sha α burchakni tashkil etadi. Xullas, har bir x *kesmaga aniq* bir α *burchak mos keladi.* Demak, α burchak x ning funksiyasidir. Lobachevskiy bu funksiya uchun αqP(x) belgini kiritdi. Bu funksiyani sifat jihatdan tekshiraylik.

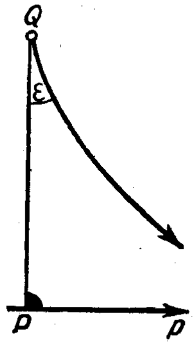
1) P(x)—monoton kamayuchi funksiyadir. Bu — x : argumentning o‘sishi bilan P(x) ning kamayishini ko‘rsatadi. Bunga ishonch hosil qilish oson. AB perpendikulyarda shunday A' nuqtani olamizki, $A'B = x' > x$ bo‘lsin, va A' nuqtadan a ga berilgan yo‘nalishda parallel c to‘g‘ri chiziqni o‘tkazaylik. U holda parallellik burchagi $\alpha' = \Pi(x')$ bo‘ladi. Agar A' nuqtadan $A'B$ bilan α burchak tashkil etuchi l to‘g‘ri chiziq o‘tkazsak, b ga l o‘taparallel bo‘ladi, chunki AA' kesuvchi bilan l va b to‘g‘ri chiziqlar α ga teng mos burchaklarni, *demak o‘zaro teng almashinuvchi* burchaklarni



18-chizma

ham tashkil etadi; bunday to‘g‘ri chiziqlarning o‘taparallelligini biz bilamiz. Bu muhokamalardan *l* to‘g‘ri chiziqning *cA'B* burchakka qarashli emasligi kelib chiqadi, bu esa $\alpha'<\alpha$ ni, ya'ni $x<'x$ da $P(x')<P(x)$ ni bildiradi.

2) x ning chegarasiz o‘sishi bilan burchak $\alpha = \Pi(x)$ chegarasiz kamayadi, ya’ni istagancha kichik ixtiyoriy ε burchakdan kichik bo‘ladi $(\varepsilon > 0)$.Chindan ham, ε burchakni yasab, uning bir tomonida shunday *P* nuqtani topamizki (19-chizma),



19-chizma

P nuqtada shu tomonga o‘tkazilgan *p* perpendikulyar, “birinchi perpendikulyar haqidagi teorem” ga asosan, burchakning ikkinchi tomoniga parallel bo‘ladi. Endi *p* to‘g‘ri chiziqni *a* to‘g‘ri chiziq bilan shunday ustma-ust keltiramizki, *P* nuqta *B* nuqtaga tushsin (18-chizma). *PQ* perpendikulyar *BA* yo‘nalish bo‘ylab ketadi va ε burchakning *Q* uchi *Q'* nuqtaga borib tushadi. *Q'* da *a* to‘gri chiziqqa o‘tkazilgan parallelning parallellik burchagi ε ga tengdir. *Q'* nuqtaning *BA* perpendikulyar bo‘yicha yuqoriga ko‘tarilaborishi bilan parallellik burchaklari (ε dan) kamaya boradi.

Isbotlanganni shunday ifodalash mumkin: $\lim_{x\to\infty} \Pi(x) = 0$. Parallelik burchagi P(*x*) ning *x* masofa O ga intilishi bilan $\frac{\pi}{2}$ ga intilishini anglash qiyin emas. Lobacheviskiy *P(x)* funksiyani *x* masofa orqali ifodalovchi formulani chiqarib berdi. *Lobacheviskiyning formulasini hozircha isbotsiz keltiraylik:*

$$tg\,\frac{1}{2}\,\Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}}$$

Bunda *e* – neper soni. *k* – butunlay ixtiyoriy musbat o‘zgarmas sondir. Lobacheviskiyning hamma formulalarida ixtiyoriy o‘zgarmas *k* ning ishtirok etishi, Lobacheviskiy geometriyasining xususiyatidir. O‘zgarmas *k*, ayoniy xarakterli ikkinchi bir o‘zgarmas *c* ga yaqin aloqadordir. O‘zgarmas bu *c*, shunday masofani bildiradiki, unga $\frac{\pi}{4}$ ga teng bo‘lgan parallellik burchak to‘g‘ri keladi, ya’ni Lobacheviskiy formulasi *x* o‘rniga *c* ni qo‘ysak

$$\Pi(c) = \frac{\pi}{4}$$

bo‘ladi,

$$tg\,\frac{1}{2}\,\Pi(c) = e^{-\frac{c}{k}}$$

yoki *P(c)*ning qiymatini etiborga olib

$$tg\,\frac{\pi}{8} = e^{-\frac{c}{k}}$$

ni hosil qilamiz, bundan

$$-\frac{c}{k} = \ln tg\,\frac{\pi}{8}, \qquad k = -\frac{c}{\ln tg\,\frac{\pi}{8}}$$

ya’ni k son c ga proporsional. Oxirgi tenglikdan: $\Pi(x)=\frac{\pi}{2}$; bu $\frac{\pi}{2}$ esa, c o‘zgarmasni ixtiyoriy ravishda berish, Lobacheviskiy doimiysi k ni ixtiyoriy ravishda berish demakdir. $c\to\infty$ da k ham $\to\infty$. O‘zgarmas c miqdor, ya’ni $\frac{\pi}{4}$ dan iborat burchakka mos keluvchi masofa nimaga teng?

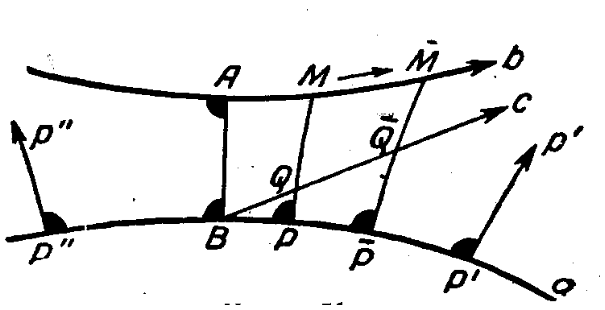
Lobacheviskiy geometriyasi c o‘zgarmas miqdor mutlaqo ixtiyoriy ravishda tanlab olishi mumkin deb davo qiladi. Bu c kesma ko‘pincha masshtab birligi sifatida qabul qilishi mumkin bo‘lgan aniq bir kesmaning mavjudligi ajoyib bir holdir. Evklid geometriyasidagi singari, Lobachevskiy geometriyasida “burchaklarning tabiiy o‘lchovi” mavjuddir, ya’ni to‘g‘ri burchakni masshtab birligi deb olish mumkin. Lobachevskiy geometriyasida kesmalar uchun ham tabiiy o‘lchov bordir. c kesmani birlik sifatida olish mumkin. Quyidagi hol e’tiborga molikdir: c kesma naqadar katta olinsa, doimiysi shu c dan iborat Lobachevskiy geometriyasi, Evklid geometriyasiga shuncha yaqin keladi. $c\to\infty$, *ya’ni* $k\to\infty$ bo‘lsa, Evklid geometriyasi Lobachevskiy geometriyasining limitdagi holiga aylanadi. Chunonchi, Lobachevskiy formulasida $k\to\infty$ deb faraz qilib, limitga o‘tilsa, istagan x uchun $\Pi(x)=\frac{\pi}{2}$ bo‘ladi, bu esa Evklid geometriyasi uchun xarakterli xossadir.

Lobachevskiy formulasidan shunday xulosa chiqarish mumkin: berilgan harbir k uchun tekislikning shu qadar kichik bo‘lagini qarash mumkinki. “eng katta bo‘lgan hamma masofalar” unda shunday kam ko‘rinadiki, $e^{-\frac{x}{k}}$ birga “juda yaqin”, demak *P(x)* esa “$\frac{\pi}{2}$ ga juda yaqin” bo‘ladi. Bu yerdan shunday natija chiqadi*:* Lobachevskiy tekisligining etarlicha kichik bo‘laklarida deyarlik xato qilmasdan Evklid geometriyasidan foydalanish mumkin.

2.4.4. O‘taparallellar xossalari.

Bir to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan, ikki perpendikulyarning o‘taparallelligi bizga ma’lumdir. O‘taparallel ikki to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan umumiy perpendikulyarning bu to‘g‘ri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofani berishini Sakkeri to‘rtburchagining xossalarini tekshirganda ko‘rgan edik. Bundan tashqari, o‘taparallel ikki to‘g‘ri chiziqning biri bo‘ylab bu umumiy perpendikulyardan o‘ng yoki chap tomonga qarab harakat qilsak, ularning biridagi nuqtalarning ikkinchi o‘taparallelgacha bo‘lgan masofalari o‘sa boradi.

Endi biz, ***o‘taparallel ikki to‘g‘ri chiziqning biridagi* M *nuqtalarning ikkinchi to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan* MP *masofalarning*** **M** nuqtaning ularga o‘tkazilgan umumiy *AB* perpendikulyarning asosidan uzoqlashgani sari, cheksiz o‘sa borishini ko‘rsatamiz. Buni, masalan, shunday isbotlash mumkin: **B** nuqtadan ma’lum yo‘nalishda ***b*** ga parallel qilib *c* to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz (20-chizma).



20-chizma

Bu to‘g‘ri chiziq **aBA** burchakka qarashlidir. *a* to‘g‘ri chiziqqa **P** nuqtada o‘tkazilgan **PQ** perpendikulyar, **BP** masofaning o‘sishi, bilan o‘sadi: $PQ \to \infty$ ***P*** nuqta shunday **P'** holatni olishi mumkinki, unda bu perpendikulyar **c** to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi; demak u, *b* to‘g‘ri chiziqqa ham parallel bo‘ladi.

2.5-§. Lobachevskiy geometriyasining asosiy faktlari.

Lobachevskiy geometriyasida ba’zi bir natijalar bilan tanishish uchun parallellik postulatiga asoslanmagan tushuncha va tasdiqlar Evklid geometriyasining tasdiqlari mos tushishi e’tiborga olish kifoya. Bunda Lobachevskiy tekisligida Evkilid geometriyasidagidek perpendikular, o‘q simmetriyasi va aylantirish (burchak) mavjud. Teng yonli uchburchak xossasi o‘rinli, uchburchakda tamonlar va burchaklar orasidagi “kata”, “kichik” munosabatlar o‘rinli. Uchburchaklar tenglik alomati va uchburchakning tashqi burchagi haqidagi teorema va boshqalar o‘rinli. Bu tasdiqlar ma’lumotlar u yoki bu geometiryada, hozirgi zamon terminalogiyasidagi “absolyut geometriya” faktlarini tashkil etadi.

Lobachevskiy va Evklid geometiryasida asosiy farqni parallelik postulatiga asoslanib isbotlanadigan teoremalarda ko‘rish mumkun.

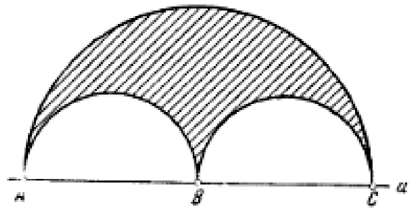
Biz quyida Lobachevskiy geametriyasining asosiy teoremalarini isbotsiz keltiramiz va shu bilan birga Evklid geometriyasidan farqini yoki u bilan mos tushishini ko‘satib o‘tamiz, chunki isbotlar ko‘p joyni talab qiladi va ko‘p muhokama-mushohadalar, fikir mulohazalar yuritishni talab qiladi.

Endi Lobachevskiy geometryasining faktlarini (teoremalarini) keltiramiz.

1. Ikkita parallel to‘ri chiziqlar asimptotik ravishda parallellik yo‘nalishi bo‘yicha yaqinlashadi (ya’ni birining biror nuqtasidan ikkinchisigacha bo‘lgan masofani yetarlicha kichik qilish mumkin, xohlagancha kichik qilish mumkin) va qarama-qarshi yo‘nalishda chegaralangan holda.
2. Faraz qilaylik C to‘g‘ri chiziqni A va B nuqtalarda kesib o‘tsin. Agar C to‘g‘ri chiziq berilgan uzoqlashuvchi to‘g‘ri chiziqlarning umumiy perpendikulyari bilan mos tushsa, u holda AB kesmaning uzunligi eng qisqa bo‘ladi. Umumiy perpendikulyardan ikkala tomondagi *a* va *b* to‘g‘ri chiziqlargacha perpendikulyar chegaralanmagan holda uzoqlashadi.
3. ABC uchburchakning yuzi

$$s = r^2\left[\pi - \left(\angle A + \angle B + \angle C\right)\right]$$

miqdorga teng, bunda burchak kattaligi radian o‘lchovda olingan bo‘lib r^2 hamma uchburchaklar uchun bir xil o‘zgarmas kattalik. Agar ABC uchburchakninghamma burchaklari nolga teng bo‘lsa, u holda bunday uchburchakning yuzi eng kata bo‘ va πr^2 ga teng (chizmada shtrixlangan joy)



1-chizma

4. Aylanaga chizilgan burchak hama vaqt yoyning yarmi bilan o‘lchana bermaydi (ya’ni o‘zi tiralgan yoyning). Xususiy holda diametr hamma vaqt o‘tkir burchakka tiraladi (Evklid geometriyasidagidek to‘g‘ri chiziq kesmasiga emas).
5. Agar n>6 natural son berilgan bo‘sa, u holda muntazam n burchakli ko‘pburchak ichki chizilgan aylanani chizish mumkin va uning bir tomoni aylananing radiusiga teng bo‘lai. Aylanaga ichki chizilgan oltiburchakli ko‘pburchakning bir tomoni aylana radiusidan kata. Demak:
   1) $n>6$ a_nqR
   2) $n=6$ $a_n>R$
   3) $n<6$ a_n - ?
6. Lobachevskiy geometriyasida doira kvadraturasi masalasini ba’zi holatlarda yechiladi ($S_g=S_{kv}$), ya’ni lineyka va sirkul yordamida yuzi doira yuziga teng bo‘lgan “kvadrat”ni yasash mumkin (aniqrog‘i tengburchakli romb, chunki giperbolik tekislikda to‘rtta to‘g‘ri burchakli to‘rtburchak mavjud emas).

   Evklid geometriyasida doira kvadraturasi bajarilmasligi (masala yechilmasligi) hammaga ma’lum.

   Yuqorida bayon etilganlar Evklid eometriyasi va Lobachevskiy geometriyasi jiddiy farq qilishini ko‘rsatadi.

7. Agar uchburchak burchaklarini A, B, C, deb uning yuzini σ deb belgilasak u holda

$$\sigma = k^2\left[\pi - \left(A + B + C\right)\right],$$

munosabat o‘rinli, bunda k biror o‘zgarmas kattalik, burchaklar radian o‘lchovida. Bu munosabatdan $\sigma \le \pi k^2$ kelib chiqadi, ya’niy uchburchak yuzi istalgancha katta bo‘lolmaydi.

2. Lobachevskiy tekisligida o‘xshash uchburchaklar mavjud emas (kongurent bo‘lmagan figuralar uchun), chunki o‘xshash uchburchaklar haqidagi teoremalar faqat Evklid geometryasida parallellar nazaryasi bo‘yicha isbot qilinadi. Lekin bu yerda uchburchaklar tengligining yangi belgisi (xossasi) uning uchta burchaklar tengligidan paydo bo‘ladi. Bunday xossa Evklid geometriyasida mavjud emas.

3. Parallel to‘g‘ri chiziqlar xossasini keltiramiz.

3.1. Tekislikda berilgan nuqta orqali berilgan to‘g‘ri chiziqqa berilgan yo‘nalishda shu nuqtaga parallel bo‘lgan faqat bitta chiziq o‘tadi. (bu fakt Lobachevskiy aksiomasida ifodalangan).

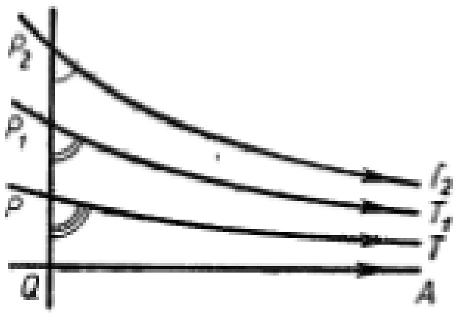
3.2. Biror a to‘g‘ri chiziqqa biror p nuqtada F nuqtada o‘tkazilgan p parallel to‘g‘ri chiziq , o‘zining har bir nuqtasida a to;g;ri chiziqqa parallel (buni e’tiborga olib kelgusida “bir to‘g‘ri chiziq boshqa to‘g‘ri chiziqqa berilgan yo‘nalishda parallel” deb ataymiz).

3.3. O‘zarolik xossa bajariladi (agar l to‘g‘ri chiziq m to‘g‘ri chiziqqa berilgan yo‘nalishda parallel bo‘lsa, u holda m to‘g‘ri chiziq l to‘g‘ri chiziq berilgan mos yo‘nalishda parallel); tranzitivlik xossasi bajariladi. (agar l va m to‘g‘ri chiziqlar n to‘g‘ri chiziqqa bir yo‘nalishda parallel bo‘lsa, u holda ular bir-biriga mos yo‘nalishda ya’ni shu yo‘nalishda paralleldir.

4. Paralellik α burchak o‘zgarmas bo‘lishi mumkin emas (agar o‘zgarmas bo‘lsa u holda biz Evklid geometriyasiga qaytamiz).

Geometrik tekshirishlar paralellik α burchak PQ kesma uzunligining monoton kamayuvchi funksiyadan iborat ekanligini ko‘rsatadi, ya’ni PQ ortgabda burchak α kamayadi.

Agar biz [PQ] uzunlikni x deb belgilasak, u holda α burchak $\frac{\pi}{2}$ dan 0 gacha o‘zgaradi (kamayadi). (2-chizma)



2-chizma

5. Lobachevskiy paralellik α burchak funksiyasi uchun

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = e^{-\frac{x}{k}} \qquad (*)$$

tenglamani hosil qilgan, (shuning uchun Lobachevskiy o‘z natijalarini doklad qilganda bu tenglamani parallellar haqida teorema deb eslatgan bo‘lishi ehtimol). Oxirgi (*) munosabatdan

$$\alpha = 2arctg(e^{-\frac{x}{k}})$$

kelib chiqadi, bunda k biror o‘zgarmas kesmaning uzunligi bo‘lib keyinchalik **fazoning egrilik radiusi** deb ataluvchi kattalik **e** son esa natural logarifmlarning asosidan iborat, shu bilan

e=2.71828……

Endi

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha}{2} = \lim_{k\to\infty} arctg\, e^{-\frac{x}{k}} = 1$$

yoki

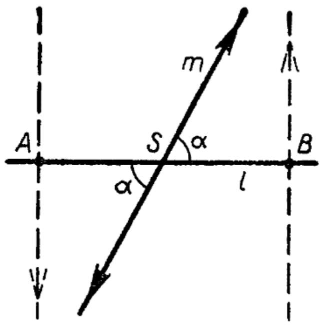
$$\frac{\alpha}{2} \to \frac{\pi}{4}, \qquad \alpha \to \frac{\pi}{2}$$

ekanligini qayd etamiz.

Demak Evklid geometriyasi Lobachevskiy geometriyasining xususiy holi deb qarash mumkin.

6. Yuqorida qayd etilgan funksional bog‘lanishni asoslagan Lobachevskiy har bir o‘tkir burchakni biror kesmaning parallelik burchagi deb qarash mumkinligini isbotlagan.

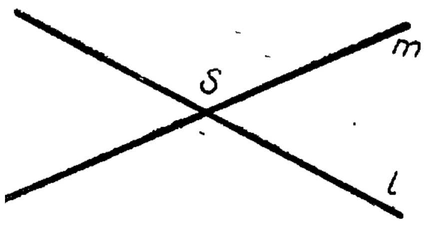
Parallellikning yangi aksiomasi biz uchun to‘g‘ri chiziqlarning odatiy bo‘lmagan xossalarini chiqaradi , ya’ni Evklid geometriyasida o‘rinli bo‘lmagan xossalarini keltirib chiqardi. Masalan: oldingi teoremadan m to‘g‘ri chiziqning ortogonal proyeksiyasi l to‘g‘ri chiziqning S nuqtasidagi α burchak ostida kesib o‘tuvchi AB intervaldan iboratdir, lekin $[AS]$,$[SB]$ kesmalar uchun α paralellik burchak bo‘luvchi to‘g‘ ri chiziq emas (3-chizma)



3-chizma

7. Tekislikdagi ikkita to‘g‘ri chiziq faqat quyidagi uch tipdan iborat bo‘lgan juftlik bo‘lishi mumkin:

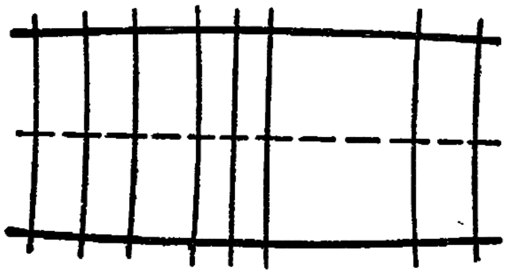
7.1° Kesuvchi to‘g‘ri chiziqlar (4-chizma) . Ular ikkalasi qayd etilgan yangi xossasi. Boshqa xossasi Evklid geometriyasidek. Ya’ni kesishish nuqtasidan yetarlicha uzoqlashganda bir to‘g‘ri chiziqdan ikkinchi to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa qaralatotgan nuqtaga nisbatan chegaralanmagan holatda ortib boradi.



4-chizma

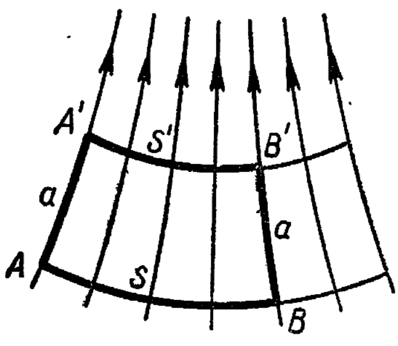
7.2° Ekvidistantlar yoki teng masofadagi chiziqlar (5-chizma) - Bu II jins to'g'ri chiziqlarning ortogonal trayektoriyasidan iborat (bunga baza-asos kiritilmaydi). Ekvidistantlarning hamma nuqtalari bazadan o'zgarmas masofada bo'lishligi isbot qilindi (shuning uchun distantic-masofa aedias- teng deb ataladi). Bu chiziq baza tomoniga qarab egilgan va berk emas.

Lobachevskiy geometriyasining Kleyn intervertensiyasiga asoslanib ekvidistantlarni ideal markazli aylana deb qarash mumkin, ya'ni markazi cheksiz uzoqlashgan nuqtadagi aylana.



5-chizma

7.3°. Limit chiziq yoki oriskil (6-chizma). Bu III jinsli to'g'ri chiziqlar dastasining ortogonal trayektoriyasi. U ajoyib xossalaarga ega. Hamma limit chiziqlari kongurent. Ular berkmas bo'lib parallel to'g'ri chiziqlar dastasi tomon egilgan. Limit chiziqni markazi cheksiz uzoqlashgan nuqta bo'lgan aylana deb qarash mumkin.



6-chizma

Bitta uch jinsli chiziqlar dastasiga yasalgan ikkita limit chiziqlar bu to'g'ri chiziqlar dastasini kongurent kesmalar bilan kesishganligi ya'ni bu chiziqlar faqat kongurent bo'lib qolmasdan hatto "konsentrik"larga isbot qilinadi.

Ikkita to‘g‘ri chiziqlar dastasi bilan chegaralangan ,,konsentrik” yoylar uzunligining nisbati yoylar orasidagi a masofaning ko‘rsatgichli funksiyadan iborat, ya’ni

$$\frac{s}{s\prime} = e^{\frac{a}{k}}$$

8. Har bir aylana anologlarini (andozasini) o‘z-o‘ziga ichiga siljitish mumkin. Xuddi to‘g‘ri chiziqlar kabi har bir aylananing analoglarini (andozalarini) o‘zini –o‘ziga siljitish mumkin ekanligininmuhim va maxsus qayd etamiz. Agar shunday umumlashgan aylana bilan birgalikda hamma tekislikni harakat qilishiga majbur etilsa, u holda tekislikni aylantirishning quyidagi uch ta tipi vujudga keladi.

8.1°. O‘zining markazi atrofida.

8.2°. Ideal markaz atrofida (bu holda trayektoriyalardan biri to‘g‘ri chiziq bo‘lib qolganlari esa ekvidistantlardan iborat bo‘ladi).

8.3°. Cheksiz uzoqlashgan markaz atrofida (hamma trayektoriyalar o‘zaro kongurent, chunki bo‘lar limit chiziqlar, lekin bosib o‘tilgan (siljigan aylangan) yoylar uzunligi har xil. To‘g‘ri chiziqni o‘z- o‘ziga siljitishda (sirpantirishga) paydo bo‘ladigan tekislik harakati 10.2° tipdagi aylantirishdan farq qilmaydi.

9. Fazoda o‘xshash aylanalarning (aylana anologlarining) biror to‘g‘ri chiziq (bu to‘g‘ri chiziq dastani hosil qiladi) atrofira aylanishdan hosil bo‘luvchi sirt o‘xshash sferalardan (sfera anologlaridan) iborat va mos ravishda quyidagi uch tipga bo‘linadi:

1°. Sfera o‘ziga xos ma’noda;

2°. Bir xil (teng) masofali sirt (o‘zgarmas masofali baza (to‘g‘ri chiziq) ning aylanishidan hosil bo‘lgan va tekislikdan uzoqlashgan nuqtalar to‘plami);

3°. Limit sirt yoki orisfera sferada (o‘ziga xos ma’noda) katta doiraning ichki geometriyasi paydo bo‘ladi. Bu oddiy sferik geometriya.

Tekislikda teng masofalarning ekvidistant geometriyasi paydo bo‘ladi. Bu Lobachevskiy planametriyasi.

Lobachevskuy tomonidan tasdiqlangan maxsus muhim fakt quyidagicha:

Limit sirtdagi ichki geometriya Evklid geometriyasidan iborat. Bu yerda to‘g‘ri chiziq vazifasini (rolini) limit chiziq bajaradi (o‘ynaydi). Bu to‘g‘ri chiziq orisfera bilan parallellik bog‘lamasining biror to‘g‘ri chizig‘i orqali o‘tuvchi tekislikning kesishidan hosil qilingan (qayd etilgan to‘g‘ri chiziqlar bog‘lamasi sirtni ifodalaydi, aniqlaydi, keltirib chiqaradi). Bu bog‘lamaning har bir to‘g‘ri chizig‘i orisfera bilan kesishgan nuqtasida shu orisferaga orgonoldir.

Shunday qilib Lobachevskiy fazodasida egri chiziqli geometrik obrazlar ajratiladi va ular Evklid geometriyasiga bo‘ysunadi. Bu muhim natijadan Lobachevskiy o‘z fazosida uchburchaklarning to‘g‘ri chiziqli elementlari orasida trigonometrik munosabatlar chiqarishda foydalandi (masalan Pifagor teoremasi ko‘rinishiga qarang). Bunda u yoy va limit chiziq vatarning Evklid uchburchaklari uchun ma’lum bo‘lgan trigonometrik formulalar bilan bog‘liq, ya’ni ularning analoglarini (o‘xshashlarini) yaratdi (hosil qildi). Lekin natijaviy trigonometrik munosabatlar Evklid geometriyasidan juda murakkabdir.

Bu formulalarda (Lobachevskiy formulalarida) burchakning trigonometrik funksiyalaridan tashqari faqat oddiy tomonlar uzunliklarini o‘z ichiga olmasdan hatto ularga bog‘liq bo‘lgan funksiyalarni o‘z ichiga olar edi. Masalan, giborbolik funksiyalar deb ataluvchi ko‘rsatgichli funksiyalarni o‘z ichiga olar edi va bo‘larni o‘z navbatida parallellik P (a) burchagining trigonometrik funksiyalar orqali ifodalash mumkin. Bunday munosabatlarni Lobachevskiy yaratgan, kashf qilgan.

10. Biz bu yerda bu murakkab formulalarni yozmaymiz, lekin Lobachevskiy fazosida ixtiyoriy o‘lchashlar masalasi bunga asoslanishini eslatib o‘tamiz.

Bitta muhim natijani qayd etamiz, ya’ni uchburchak yuzi uning burchaklar yig‘indisi orqali

$$\sigma = k^2[\pi - (A + B + C)]$$

formula bilan aniqlanadi. Agar A=0, B=0, C=0 bo‘lsa , A+B+C=0 bo‘lib yuza eng katta

$$\sigma = k^2\pi$$

bo‘ladi. Bu holat uchburchak burchaklari cheksiz uzoqlashganda o‘rini bo‘adi, ya’ni uchburchak tomonlari juft-jufti bilan parallel bo‘lgan holat bo‘ladi. (7-chizma).

7-chizma

Bunday umumlashgan uchburchak asimptotik uchburchak deyiladi.

O‘ziga xos har qanday uchburchak yuzi asimptotik uchburchak yuzidan kichik bo‘lsa, ularning orasidagi farqni yetarlicha kichik qilib olish mumkin. Shunday qilib uchlari chekli masofada bo‘lgan eng katta yuzali uchburchak mavjud emas.

Quyidagini maxsus qayd etish zarur, ya’ni trigonometrik munosabatlarda agar to‘g‘ri chiziqli uchburchak uchun k$\to\infty$ deb olinsa yoki uchburchakning a,b,c o‘lchovlari (tomonlari) cheksiz kichik (a$\to 0$, b$\to 0$,c$\to 0$) deb qaralsa yoki boshqacha aytganda $\frac{a}{k}\to 0$, $\frac{b}{k}\to 0$, $\frac{c}{k}\to 0$.(bunda k - o‘zgarmas) deb qaralsa, u holda Lobachevskiy formulalarining limitidan Evklid fazosi uchun oddiy trigonometrik munosabatlari bevosita hosil bo‘ladi.

Buni ko‘rsatish uchun quyidagi bitta misol bilan chegaralanamiz.

Lobachevskiy tekisligida to‘g‘ri burchakli uchburchakning katetlari va gipotenuzasi orasidagi munosabat quyidagicha:

$$ch\frac{c}{k} = ch\frac{a}{k}\cdot ch\frac{b}{k}, \qquad (1)$$

G‘ayrievklid Pifagor teoremasini hosil qilamiz: bunda, ch – giperbolik kosinus, *c*–to‘g‘ri burchakli uchburchak gipotenuzasi, *a, b* – katetlari, k–egriligi. Ko‘pincha kq1 faraz etib, belgili masshtab birligi tanlab olinadi: bu holda teorema shunday o‘qiladi: “Gipotenuzaning giperbolik kosinusi, katetlar giperbolik konuslarining koʻpaytmasiga tengdir”. Evkilid Pifagor teoremasining gʻayrievklid Pifagor teoremasi uchun $k\to\infty$ dagi hususiy hol ekanini bu yerda koʻrsataylik.

$$ch\frac{x}{k}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}\right) \tag{2}$$

$$e^{\frac{x}{k}}=1+\frac{x}{k}+\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{k}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{k}\right)^3+\ldots \tag{3}$$

$$ch\frac{x}{k}=1+\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{k}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{x}{k}\right)^4+\ldots \tag{4}$$

Giperbolik kosinuslarni (4) formula boʻyicha qatorlarga yoyib chiqamiz, u holda (1) formula ushbu shaklni oladi:

$$1+\frac{\left(\frac{c}{k}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{c}{k}\right)^4}{4!}+\ldots\ldots=\left(1+\frac{\left(\frac{a}{k}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{a}{k}\right)^4}{4!}+\ldots\ldots\right)\times\left(1+\frac{\left(\frac{b}{k}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{b}{k}\right)^4}{4!}+\ldots\ldots\right)$$

Qavslarni ochamiz va ikki tomonni ham $2k^2$ ga koʻpaytiramiz:

$$c^2+\frac{c^4}{2k^2}+\ldots\ldots=a^2+b^2+\frac{a^4+b^4+2a^2b^2}{2k^2}+\ldots\ldots \tag{A}$$

Bu tenglikda nuqtalar qoʻyib yozilib chiqilmagan barcha kasrlarning mahrajlarida k^2 ning tegishli darajalari bordir. $k\to\infty$ da limitga oʻtsak, Pifagorning odatdagi teoremasini hosil qilamiz:

$$c^2=a^2+b^2.$$

Bu hulosaga boshqa muhokamalar yurgizib kelish ham mumkin. Oʻzgarmas k ning qiymati muayan bir songa teng, deb yuqorida yozilgan (A) tenglikda uchburchak tomonlari kamaya boradi desak va u tenglikda toʻrtinchi va undan yuqori darajali hadlarni tashlasak, ushbu xulosaga kelamiz: Lobachevskiy tekisligida cheksiz kichik uchburchak uchun Pifagor teoremasini qoʻllash mumkin (yuqori darajali cheksiz kichik miqdorlar tashlansa).

Pifagor teoremasining ($c^2=a^2+b^2$.) Evkilid postulatiga ekvivalatligini tushunish endi oson.

Ba'zi hisoblashlarni bajarib:

$$\cos B = ch\frac{b}{k}\sin C,$$

shunga o'xshash

$$\cos C = ch\frac{c}{k}\sin B$$

munosabatlarni hosil qilish mumkin.

Lobachevskiy tekisligidagi to'g'riburchakli uchburchakning ikki burchagi bilan kateti orasidagi bog'lanish shuni ko'rsatadiki, bu uchburchakning o'tkir ikki burchagi $\left(B + C < \frac{\pi}{2}\right)$ berilsa, ular uchburchakning boshqa hamma elementlarini aniqlanashini ko'rsatadi.

11. Lobachevskiy o'zining geometriyasida muhim problemalarni tekshirishlarda katta muvaffaqiyatlarga erishdi. Jumladan, differensial va integral hisob metodlar yordamida egri chiziq bilan chegaralangan konturning yuzini va hajmini topdi. Bu miqdorlarni toppish formulasi aniq integralni o'z ichiga oladi. Bu yo'nalishda u avval bir koordinata sistemasini tadbiqladi va u 200 tadan ortiq aniq integralning qiymatini topish uchun formulalar yaratdi. Bu formulalarning to'g'riligini klassik hisoblash usullari bilan tekshirib ko'rish mumkin (o'z vaqtida tekshirib ko'rilgan).

Shunday qilib, Lobachevskiy o'z geometriyasining matematikaga tadbiqlanishini ko'rsatdi.

Aniq integral qiymatlari mexanikaning texnik tadbiqlarida, fizikada va astronomiyada keng foydalaniladi.

Lobachevskiy hisoblagan aniq integrallar qiymati "integrallar jadvali" kitobiga kiritilgan.

Lobachevskiy o'z geometriyasining bir holati sferik geometriya bilan mos tushishini angladi. Bunda sfera radiusini sof mavhum *ki* - son deb olishb kifoya bo'lishini va mavhum argumentli funksiyalar nazariyasiga tadbliqlanishini ko'rdi (bu tadbiqlanishni boshqalar ko'rsatgan edi) va ishonch hosil qildi.

Demak, Lobachevskiy geometriyasi zidsiz bo‘lib tabiiy reallikdan (tabiiy ob’ektlarni o‘rganishdan) iboratdir.

2.5.1. Lobachevskiy geometriyasining ba`zi faktlari haqida

Ikki to‘g‘ri chiziqning bir biriga nisbatan joylashishida yuz berishi mumkun bo‘lgan imkoniyatlari Lobachevskiy bilan birgalikda ko‘zdan kechiraylik. Bunda biz “parallellar nazariyasigacha” bo‘lgan ma’lumotlardan foydalanamiz. Ikki to‘g‘ri chiziqning tekislikda joylashishida uchta imkoniyati bor.

1) Har qanday ikki to‘g‘ri chiziq kesishadi. Bu holni tashlashga to‘g‘ri keladi, chunki har qanday ikki to‘g‘ri chiziqning kesishi mumkun emas, bunga bir to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan perpendikulyar misol bo‘laoladi, ya’ni ularning umumiy nuqtasi yo‘qdir.

2) *a* to‘g‘ri chiziqda yotmagan A nuqtadan (A*a*) ((A*a*)-simvol A nuqta va *a* to‘g‘ri chiziq bilan aniqlanuvchi tekislikni bildiradi) tekislikda *a* bilan umumiy nuqtasi bo‘lmagan faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tadi. Bu imkoniyat faqat Evklid postulatini qabul qilgan taqdirdagina yuz berishi mumkun.

3) *a* to‘g‘ri chiziqda yotmagan A nuqtadan (A*a*) tekislikda umumiy nuqtaga ega bo‘lmagan to‘g‘ri chiziqlar bittadan oshiq. Bu imkoniyat Evklidning parellellar postulati rad qilgan holda yuz berishi mumkun.

Agar biror tekislikda Evklid postulati qabul qilingan bo‘lsa uni biz bunday bayon etamiz Evklid tekisligi (yoki evkilid tekislik) deb atashni shart qilib olamiz. Agar tekislikdagi to‘g‘ri chiziqlar Evkilid postulatiga itoat qilmasa, biz bu tekislikni Lobachevskiy tekisligi deb ataymiz. Bu tekislikda to‘g‘ri chiziqlar Lobachevskiy postulatiga itoat qiladi. Bu tekislikda figuralarning xossalari bilan kelgusida kengroq tanishamiz.

2.5.2. Lobachevskiy tekisligida uchburchak burchaklarining yig‘indisi haqida

Endi Lobachevski tekisligida joylashgan uchburchak burchaklari yig‘indisi masalasi bilan shug‘ullanaylik. Bu yig‘indining 2d dan kichik bo‘lishini tushunish oson. Haqiqatan bu yig‘indi 2d dan eng bo‘lsa bundan Evklidning paralellik postulati kelib chiqar edi ammo biz Lobachevskiy tekisligi bilan ish ko‘rmoqdamiz shu sababli uchburchak burchaklarining yig‘indisi 2d ga teng degan faraz zidlikka keltiradi. Ammo Lobachevskiy tekisligida va shuningdek Evklid tekisligida ham uchburchak burchaklarining yig‘indisi 2d dan oshiq bo‘la olmasligi sababli bu yig‘indi 2d dan kichik bo‘lishligi kerak. Bundan tashqari oldingi mulohazalardan Lobachevskiy tekisligidagi turli uchburchak burchaklari yig‘indisining umuman aytganda turli ekanligi kelib chiqadi. Oldingi mulohozalardan Lobachevskiy tekisligida ushbu teoremaning mavjudligi kelib chiqadi: **agar bir uchburchakning uchta burchagi ikkinchi uchburchakning uchta burchagiga mos ravishda teng bo‘lsa bunday uchburchaklar tengdirlar.**

Teoremaning tasdiq‘iga qarshi, bunday uchburchaklar teng bo‘lsa ular o‘xshash bo‘lar edi: ammo Vallisning teoremasiga asosan bu yerdan Evklid pastuloti kelib chiqar edi: Lobachevskiy tekisligida esa bu pastulot kuchga ega emas. Hosil bo‘lgan zidlik teoremani isbot etadi. Biz Lobachevskiy tekisligida uchburchaklar tengligining yana bir alomatini paydo bo‘lganini ko‘rib turamiz; bu alomat Evklid tekisligida kuchga ega emasdir. Vallis teoremasidan.

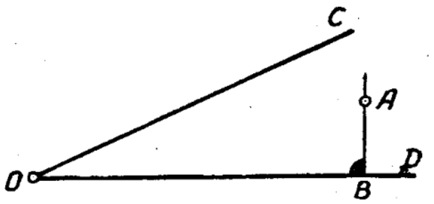
Lobachevskiy tekisligida o‘xshash figuralar yo‘q degan xulosa ham kelib chiqadi.

Lobachevskiy geometriyasida har bir burchak bir qiymatli ravishda kesmani aniqlaydi.

Tomonlari berilgan kesmaga teng bo‘lgan teng tomonli uchburchak yasasak teoremaning tasdiqsining to‘g‘riligiga ishonch hosil qilamiz:bunday uchburchak teng burchakli ham bo‘ladi. Birinchi kesmaga teng bo‘lgan boshqa kesmani olib yana teng tomonli uchburchak yasasak, uning burchagi birinchi uchburchakning burchagiga teng bo‘la olmaydi, chunki aks holda bu uchburchaklar tengligini xozirgina hosil qilingan yangi alomatiga ziddlik qilar edik. **Teng tomonli har bir uchburchak burchaklarining kattaligi uchburchak tomonlariga bog‘liqdir**. **Lobachevskiy geometriyasida o‘xshashlik haqida tasdiq yo‘q, lekin uning o‘rnida kesmalar bilan burchaklar orasida ajoyib bog‘lanish bor. Evklid geometriyasida bunday bog‘lanish yo‘q.**

2.5.3. Burchakning bir tomoni bilan kesishmay uning ikkinchi tomoniga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq haqidagi teorema.

Evklid pastulotiga Lejandr tomonidan berilgan soxta isbotdan foydalanib, Lobachevskiy geometriyasining ushbu teoremasini hosil qilamiz: **har bir BOC burchak ichida shunday A nuqtalar borki bu nuqtalar orasidagi burchakning ikkala OB vaOC tomonlar bilan kesishuvvchi to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazish mumkun emasdir** (8-chizma).



8-chizma

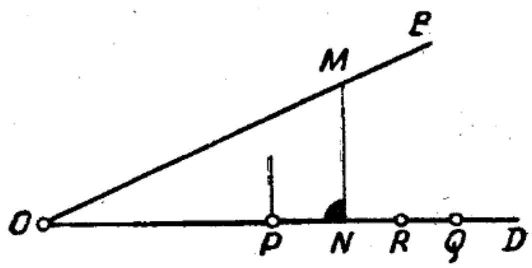
Haqiqatan A nuqta BOC burchak ichidagi qanday nuqta bo‘lsada A orqali burchakning ikkala tomoni bilan kesishadigan to‘g‘ri chiziq o‘tkazish hamma vaqt mumkun deb faraz qilinsa, u holda bu yerdan Lejandr muhokamalariga asosan Evklid postulate kelib chiqadi: Lobachevskiy tekisligida esa Evklid postulati kuchga ega bo‘lishi mumkun emas. Lobachevskiy geometriyasida ushbu muhim teorema kuchga egadir DOC o‘tkir burchak qanday bo‘lsada doimo shunday to‘g‘ri chiziq mavjudki u burchakning bir tomoniga perpendikulyar bo‘lib ikkinchi tomoni bilan kesishmaydi (8-chizma).

A bilan DOC burchakning shunday nuqtasini belgilaylikki undan burchakning har ikkala tomoni bilan kesishuvvchi bitta ham to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkun bo‘lmasin.A nuqtadan OD tomonga AB perpendikulyar tushirilib, teoremada aytilgan perpendikulyarni hosil qilamiz.

Shuni esda to‘tish kereki Lobachevskiy pastulotini qabul qilgan taqdirda, biz undan chiqqan xulosani ham, ular qanchalik g‘alati, g‘ayri tabiiy bo‘lsada, qabul qilishga majburniz. Lobachevskiy so‘zlarini keltiraylik: “Mening tomonimdan hayoliy deb atalgan geometriyaning teoremalarini har taraflama mulohaza qilsa, umuman zidlikka yo‘l qo‘yadi deb o‘ylash mumkun: lekin shuni aytib o‘tishim lozimki, hatto ular bizning kundalik tasovvurimiz va idrok qilishimizga zidlik qilsada, ammo ular mantiqiy jihatdan shubhasizdir”.

Lobachevskiy hayotligida uning g‘oyalarini boshqalar tushunmadilar; u o‘zi yaratgan geometriyasini e’tirof etishga erisholmaydi. Fazoviy tassavurimizga ayonlikka qancha zid bo‘lsada, o‘quvchi Lobachevskiy geometriyasidan chiqaradigan hamma xulosalarni ular faqat mantiqiy jihadanzarur bo‘lishiga itoat qilib, qabul qilishga tayyor bo‘lishi kerak.

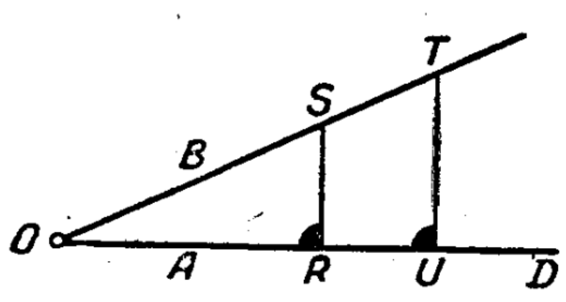
Endi BOD burchakning OD tomoniga o‘tkazilgan perpendikulyarga qaytaylik. Biz istalgan o‘tkir BOD burchakning OD ga o‘tkazilgan perpendikulyar OB bilan kesishmaydi (9-chizma).



9-chizma

Ikkinchi tomondan OB da shunday nuqtalar ham albatda borki,ulardagi perpendikulyarlar OB tomon bilan kesishadi.OB bilan kesishadigan bu perpendikulyarlarni yasash oson; OB to‘g‘ri chiziqqa istalgan M nuqtani olib, undan OD ga perpendikulyar tushiramiz.Bu perpendikulyarning N asosi shunday nuqtalar qatoriga kiradiki ular orqali OD ga o‘tkazilgan perpendikulyarlar OB tomon bilan kesishadi. N nuqtadan chapdagi ya`ni O va N orasidagi hamma nuqtalar shunday sifatga kiradi, ulardan OD ga o‘tkazilgan perpendikulyarlar OB tomon bilan kesishadi. Haqiqatdan,P nuqtada OD ga otkazilgan perpendikulyarlar ONM uchburchakning ON tomoni O bilan N orasidagi nuqtada kesib o‘tadi;ayni vaqtda bu perpendikulyar NM tomon bilan kesishmaydi chunki bir to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan ikki perpendikulyar o‘zoro kesishmaydi. Demak Pashning pastulotiga asosan bu perpendikulyar OM tomon bilan O va M uchlar orasidagi nuqtada kesishadi.Shunday qilib OD nurning hamma nuqtalari ikki sinifga bo‘linadi.Birinchi sinifga nurning shunday P nuqtasini kritamizki, ulardan OD ga chiqarilgan perpendikulyarlar OB bilan kesishadi.Ikkinchi sinifga shunday Q nuqtani kiritamizki, ulardan OD tomonga o‘tkazilgan perpendikulyarlar OB tomon bilan kesishmaydi. **Biz ikki narsani isbotladik: Birinchidan, ham birinchi sinifga,ham ikkinchi sinifga kiruvchi nuqtalarning borligini va OD nurdagi har bir nuqtaning bu sinifdan biriga kirishini**; ikkinchidan, birinchi sinifga qarashli harbir nuqtaning ikkinchi sinifga qarashli hamma nuqtalardan bir tarafda yotishi.

R nuqtaning ikkinchi sinifga qarashli bo‘lishini ya’ni R dan OD ga chiqarilgan perpendikulyarlarning OB tomon bilan kesishmasligini isbot qilaylik. Haqiqatdan agar bu perpendikulyar OB bilan biror S nuqtada kesishsa S ning O nuqta tomonida yotmagan T nuqtani olib va undan OD ga perpendikulyar tushurib, shunday N nuqtani hosil qilgan bo‘lar edikki,u birinchi sinifga qarashli bo‘laturib, R nuqtadan o‘ng tomonda yotadi; bu esa birinchi sinifdagi hamma nuqtalarning R nuqtadan chap tomonda yotishiga qarshi keladi (10-chizma).

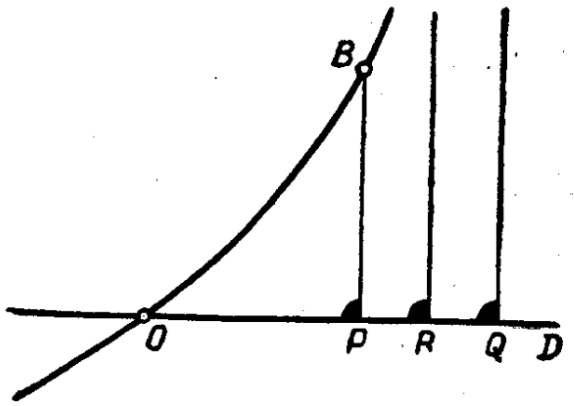


10-chizma

Demak, R nuqtadagi perpendikulyarlar OB bilan kesishadi deganfaraz zidlika keltiradi. Shunday qilib R nuqta **ikkinchi sinifga kiradi**, boshqacha qilib aytganda(nurni ikki sinifga ajratuvchi) R nuqtada OD to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan perpendikulyar burchakning OB tomoni bilan kesishmaydi. **Birinchi sinif nuqtalaridagi hamma perpendikulyarlar orasidagi oxirgisi yo‘q; ikkinchi sinf perpendikulyarlar orasida esa birinchi mavjud bo‘lib, u R nuqtadan o‘tadi.**

Istalgan o‘tkir burchakning bir tomoniga tik va ikkinchi tomoni bilan kesishmaydigan **birinchi perpendikulyarlar haqida isbot** qilingan teorema, Lobachevskiy geometriyasining eng muhim teoremalaridan biridir.

Giperbolani asimtotasi bilan birga olib qarasak, bu kabi hol Evklid tekisligida ham yuz beradi (11-chizma).

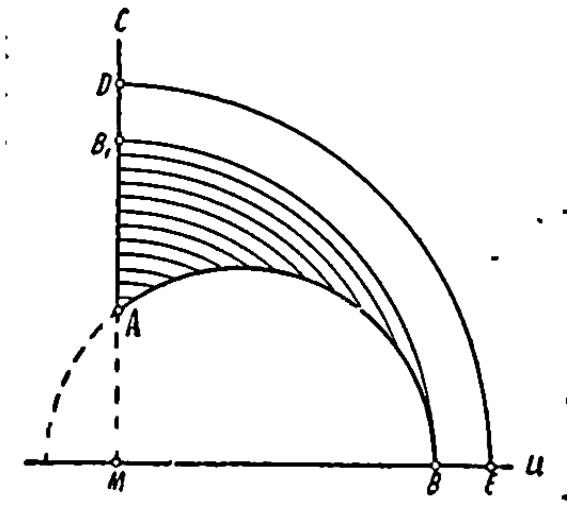


11-chizma

Agar OB geperbola, OD - *y* bilan kesishuvchi to‘g‘ri chiziq va R nuqtada OD ga o‘tkazilgan perpendikulyar giperbola asimtotasi bo‘lsa, R dan chapdagi ham P nuqtalar ham birinchi sinifga R dan o‘tgan hamma nuqtalar esa – ikkinchi sinifga kiradi.

Teorema 4. O’tkir burchak tomonining boshqa tomoniga to‘g‘ri burchakli proektsiyasi kesmadan iborat.

(Evklid geometriyasida yarim to‘g‘ri chiziqdan iborat)



12-chizma

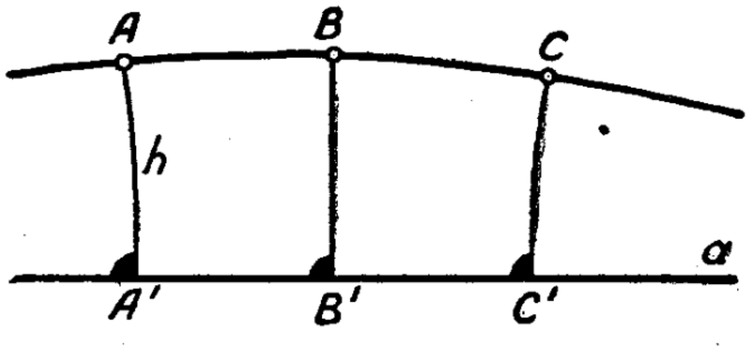
Teorema 5. Agar ABC uchburchakning mos ravishda A′B′C′ uchburchakning mos uchta burchagiga teng bo‘lsa, u holda bu burchaklar teng bo‘ladi.

Natija. Lobachevskiy geometriyasida berilgan uchburchakka o‘xshash uchburchak mavjud emas, lekin unga teng bo‘lmagan.

2.5.4. Ekvidistanta.

Biror *a* to‘g‘ri chiziqning bir tarafida joylashib undan berilgan masofaga joylashgan nuqtalarining geometrik o‘rni to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘lsa, bu holda Evklid postulatini kuchga egaligini bilamiz. Lobachevskiy geometriyasida esa bu postulat kuchga ega emas. Shuning uchun Evklid postulatiga ekvivalent bo‘lgan hamma jumlalar ham kuchga ega emasdir. Lobachevskiy geometriyasida quyidagi teorema to‘g‘ridir:

Berilgan to‘g‘ri chiziqning bir tarafida joylashib undan berilgan masofaga uzoqlashgan nuqtalarning geometric o‘rni, hech bir uchta nuqtasi bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan egri chiziqdan iboratdir. Haqiqatan bu geometik o‘rinning uchta A, B, C nuqtasi bir to‘g‘ri chiziqda yotsa, Sakkeri to‘rtburchagi bo‘lgan ACC\`A\` ning 4 ta to‘g‘riburhagi bo‘lar edi. Bu holda esa Lobachevskiy tekisligida yuz beraolmaydi (13-chizma).

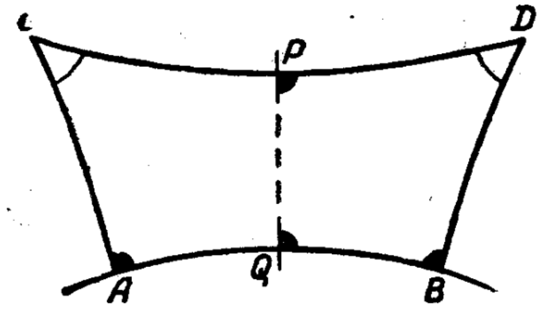


13-chizma

Hosil qilingan egri chiziqni Lobachevskiy ekvidistanta deb atalar edi. Evklid geometriyasida bunday egri chiziqlar faqat aylana va to‘g‘ri chiziqlardan iborat. Lobachevskiy geometriyasida egriligi o‘zgarmas egri chiziqlar qatoriga to‘g‘ri chiziqva aylanalardan tashqari ekvidistantalar ham kiradi. Agar AA′ perpendikulyarning A′ asosini uning o‘zi bilan birga a to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakatlantirsak perpendikulyarning A uchi ekvidistantani chiza boradi: Agar ABC ekvidistanta AA′ perpendikulyar bilan qattiq bog‘langan bo‘lsa, haligi harakat vaqtida bu ekvidistanta o‘zi bo‘ylab sirpana boradi, demak u o‘zgarmas egrilikka egadir. Bu egri chiziqning istalgan AB burchagini uchlari bilan shu egri chiziqning o‘ziga “qo‘shish” mumkin va bu holda shu bo‘lakning hamma nuqtalari ekvidistanta nuqtalari bilan ustma-ust tushadi. Ekvidistanta nuqtalarining ekvidistanta asosi a gacha bo‘lgan h masofani, ekvidistanta balandligi deyiladi. Turli radiusli aylanalar kabi balandliklari turli bo‘lgan ikki ekvidistantadan birining hech qaysi bo‘lagini, ikkinchisining hech qanday bo‘lagiga yotqizish mumkin emasdir.

2.5.5. Lobachevskiy geometriyasining yana ba’zi teoremalari haqida

Lobachevskiy geometriyasining ba’zi teoremalari ustida to‘xtalib o‘taylik. Masalan, kesishmaydigan ikki to‘g‘ri chiziq uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesilsa, ichki almashinuvchi burchaklar umuman aytganda bir-biriga teng emasdir, chunki bu burchaklar istalgan kesuvchi uchun ham o‘zaro teng bo‘lsa bundan evklid postulati kelib chiqadi: Lobachevskiy geometriyasida esa bu postulat kuchga ega emasdir. Demak, bir-biri bilan kesishmovchi AB va CD to‘g‘ri chiziqlar (simmetriya o‘qi PQ ga tik bo‘lganlari sababli) BD to‘g‘ri chiziq bilan keishib o‘zaro teng ichki almashinuvchi burchaklarni tashkil qilmaydi. Sakkerining o‘sha to‘rtburchagini olib CD to‘g‘ri chiziqdagi D nuqtaning AB to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan BD masofaning PQ masofadan kattaligini ko‘ramiz. Chunki, PQBD to‘rtburchakda “katta bo‘lgan P burchak qarshisida katta tomon ham yotadi” (P- to‘g‘ri burchak, D-o‘tkir burchak). Demak, AB va CD to‘g‘ri chiziqlarning umumiy perpendikulyari bo‘lgan PQ, bu to‘g‘ri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofadir (14-chizma).



14-chizma

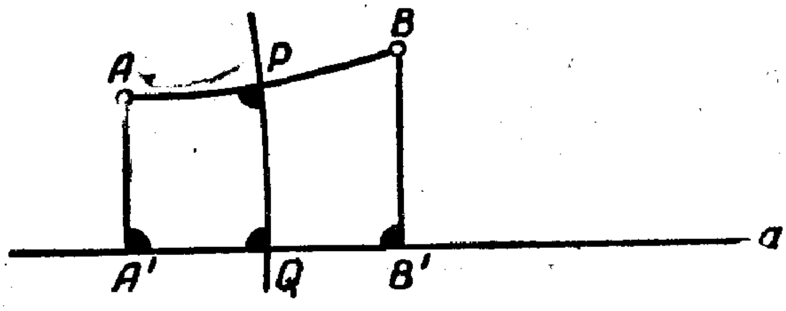
Agar PQ ni shu to‘rtburchakning asosi deb qabul qilsak B bilan belgilangan to‘g‘ri to‘rtburchakning qarshisida kattaroq tomon PD yotadi. Ammo ABq2QB va CDq2PD. Demak, CD>AB.

2.5.6. Tashqarisiga aylana chizib bo‘lmaydigan uchburchaklar to‘g‘risida

V.Boliyai teoremasidan, Lobachevskiy geometriyasida tashqarisiga aylana chizib bo‘lmaydigan uchburchaklarning mavjudligi kelib chiqadi, chunki har bir uchburchak tashqarisiga aylana chizish mumkin bo‘lsa, V. Boliai teoremasidan Evklid postulatining kuchga egaligi kelib chiqqan edi.

Biror a to‘g‘ri chiziq va undan biror tarafda va baravar uzoqlikda yotuvchi A, B, C nuqtani olaylik. A, B, C nuqtalar ekvidistantaga qarashli bo‘lganidan bir to‘g‘ri chiziqda yotolmaydi. Demak, ekvidistantaga ichki chizilgan har qanday uchburchakka tashqi aylana chizib bo‘lmasligini isbotlaylik. Haqiqatan ABB′A′

to‘rtburchak Sakkeri to‘rtburchagidir va uning simmetriya o‘qi PQ, ekvidistanta vatari bo‘lgan yuqori asos AB ga hamda ekvidistanta asosi *a* to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyardir (15-chizma).



15-chizma

Shunday qilib ushbuni isbotladik: ***Ekvidistanta vatarining o‘rtasida shu vatarga o‘tkazilgan ekvidistantaning ikki A, B nuqtasidan baravar uzoqlashgan nuqtalarining geometrik o‘rni bo‘lgan perpendikulyar, shu ekvidistantaning a asosiga perpendikulyar to‘g‘ri chiziqdan iboratdir.***

ABC uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazi, agar u mavjud bo‘lsa uchta geometrik o‘rinning kesishgan nuqtasidan iborat bo‘lishi kerak edi:

1) A, B nuqtalardan baravar uzoqlashgan nuqtalarning geometrik o‘rni;
2) B, C nuqtalardan baravar uzoqlashgan nuqtalarning geometrik o‘rni;
3) A, C nuqtalardan baravar uzoqlashgan nuqtalarning geometrik o‘rni;

Ammo hozirgina isbot qilishimizga asosan, bu geometrik o‘rinlarning hammasi ekvidistantaning *a* asosiga perpendikulyardir; bunday perpendikulyarlar esa umumiy nuqtaga ega emas. Demak, ABC uchburchaknig uchlaridan baravar uzoqlashgan nuqta ham yo‘qdir. Bu uchburchakka tashqi aylana chizib bo‘maydi. Isbotsiz bo‘lsada shuni ko‘rib o‘taylik: tashqarisiga aylana chizib bo‘lmaydigan uchburchaklar ekvidistantaga ichki chizilgan uchburchaklar bilan tamom bo‘lmaydi. Evklid geometriyasida ekvidistantalar to‘g‘ri chiziqqa va ko‘rilayotgan uchburchaklar esa kesmalarga aylanadi.

Doiraga ichki chizilgan muntazam oltiburchak tomoni bu doiraning radiusidan kattadir.

Doiraga ichki chizilgan muntazam oltiburchak tomonining shu doira radiusiga teng emasligini biz bilamiz. Chunki bu tomon radiusga teng bo‘lsa bundan Evklid postulati kelib chiqadi. Bu oltiburchak tomonlarining radiusdan kattaligini 2.1.5.9-dagi 17-chizmaga o‘xshash chizma yasab va ABO uchburchak ustida muhokama yurgizib isbot qilamiz. AOB burchak 60^0 ga teng. Teng yonli AOB uchburchakda bir-biriga teng A, B burchaklarning har birini 60^0 dan kichik, chunki uchburchak burchaklarining yig‘indisi 2d dan kichikdir. Shunday qilib bu uchburchakning eng katta burchagi O dir. Demak AB>OAqR.

2.5.7. Lobachevskiy geometriyasida yuzalarni o‘lchash masalasi.

Ta’riflar: AB, BC, CD, …, KL kesmalar sistemasi A bilan L ni tutashtiruvchi ***siniq chiziq*** deyiladi. Bu siniq chiziq qisqacha shunday belgilanadi: ABCD…KL. AB, BC, CD, …, KL kesmalarning ichki nuqtalari va A, B, C, D, …, K, L nuqtalarning o‘zlari siniq chiziqning nuqtalari deyiladi. Agar L nuqta A bilan birlashib qolsa va hamma nuqtalar bir tekislikda yotsa, siniq chiziq ***ko‘pburchak*** deb ataladi. AB, BC, CD, …, KL kesmalar ko‘pburchakning ***tomonlari*** deyiladi va A, B, C, D, …, K, L nuqtalar esa uning ***uchlari*** deyiladi. Uchlarining soniga qarab, ko‘pburchak ***uchburchak, to‘rtburchak, …, n-burchak*** deyiladi. Agar ko‘pburchakning hamma uchlari turli bo‘sa, birorta ham uning tomonida yotmasa, va uning tomonlaridan istalgan ikkitasi ichki umumiy nuqtaga ega bo‘lmasa, ko‘pburchak ***sodda*** deb ataladi.

Sodda tekis ko‘pburchak jumladan uchburchak yuzi haqidagi tushunchani barpo qilish, bunday ko‘pburchakning xar biri uchun quyidagi ikki shart bajarilgan holda *musbat* sonni korishdan iboratdir:

1^o.Kongruent (teng) ko‘pburchaklarga teng sonlar mos keladi.

2^o.Qo‘shni bo‘lgan ikki ko‘pburchakdan tuzilgan ko‘pburchakka mos son, bu ko‘pburchaklarning xar biriga mos kelgan **uchlar** yig‘indisiga teng (additivlik xossasi).

Agar ikkita soda ko‘pburchak bitta yoki birnecha umumiy tomonga ega bo‘lksa yoxud bu tomonlarning ayrim qismlari umumiy bo‘lsa va ularning bitta ham umumiy ichki nuqtasa bo‘lmasa bunday ko‘pburchaklar qo‘shni deb ataymiz.

Qo‘yilgan talablar bajarilgan taqdirda har bir soda ko‘pburchakga mos kelgan son, bu ko‘pburchakning ***yuzi*** deb ataladi.

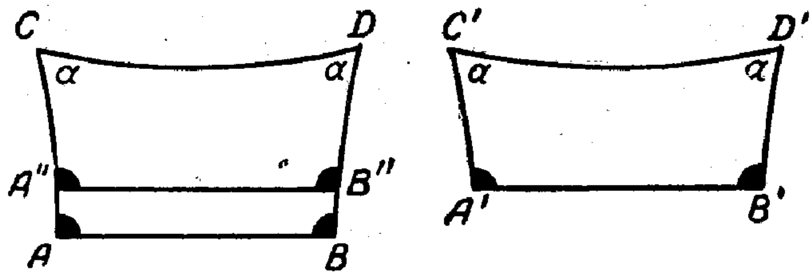
Quyida bayon qilinganlardan maqsad, har bir uchburchakga bu uchburchak nuqsoniga proportsional miqdorini berish, Lobachevskiy geometriyasida yuzalarni o‘lchash sistemasining barpo qilinishi uchun yetarli ekanligini ko‘rsatishdir. [uchburchaklarning nuqsoni deb π bilan uchburchak burchaklarining yig‘indisi orasidagi ayirmani aytiladi yani δq π -(AQBQC)]. Har qanday sodda ko‘pburchakning yuzi additivlik hossasiga muvofiq anilanadi, ya’ni ko‘pburchakning yuzi uni uchburchaklarga bo‘lish natijasida hosil qilingan.Uchburchaklar yuzlari yig‘indisi sifatida anilanadi; bunda ko‘pburchak yuzi mos kelgan son, ko‘pburchakni uchburchaklarga bo‘lish usuliga bog‘liq emasdir.

2.5.8. Umar Xayyom-Sakkeri to‘rtburchaklarining kongruentligi.

Xuddi Evklid geometriyasidagidek, Lobachevskiy geometriyasida egri chiziqli figuralarining yuzalari ularga ichki va tashqi chizilagan ko‘pburchaklar yuzalarining limitlari sifatida ta’riflanadi; demak ish ko‘pburchaklar yuzalarini hisoblashga keltiradi . Bu ko‘pburchaklar qABariq bo‘lasa, ularni deyoganalari bilan uchburchaklarga bo‘lib, biz uchburcgakni yuzini aniqlash masalasiga kelamiz va bu masala bilan ushbu bobda shug‘ullanamiz. Avvalo yordamchi bir tasdiqni isbotlaylik.

Yuqori asoslari teng va bu asoslarga yopishgan o‘tkirburchaklari mos ravishda teng bo‘lgan Umar Xayyom-Sakkeri to‘rtburchaklari bir-biriga kongurentir.

Isbot. Faraz etaylik, Umar Xayyom-Sakkerining ABDC va A′B′D′C′ to‘rtburchaklarida CD=C′D′ va bilan CD asoslariga yopishgan o‘tkir burchaklar bir-biriga teng bo‘lsin (16-chizma)



16-chizma

Bu burchaklarni α belgilaylik . A′B′D′C′ to‘rtburchaklarni ABDC to‘rtburchakga shunday qo‘yamizki, C′D′ tomon CD bilan ustma ust kelsin; burchaklarni kengligidan, C′A′ to‘g‘ri chiziq CA bo‘lib ketadi. Shu ssbabning o‘ziga ko‘ra, D′B′ tog‘ri chiziq DB bo‘lib ketadi; endi hamma gap, A′ nuqtaning A nuqtaga, B′ nuqtaning B nuqtaga tushishida. A′ nuqta A″ vaziyatni , B′ nuqta esa – B ″vaziyatni oladi va A″B″ nuqtalar AB to‘g‘ri chiziqda bir tarafda yotadi deb faraz etaylik(chizmamizda ABda yuqorida). AC to‘g‘richiziqqa o‘tkazilgan ikki perpendikuliyar AB va A″B″ o‘ta paralleldir; demak o‘taparallel AB va A″B″ to‘g‘ri chiziqlar bunday holda ikkta umumiy perpendikuliyarga ega bo‘ladi:AC va BD, bu esa yuz beraolmaydi .

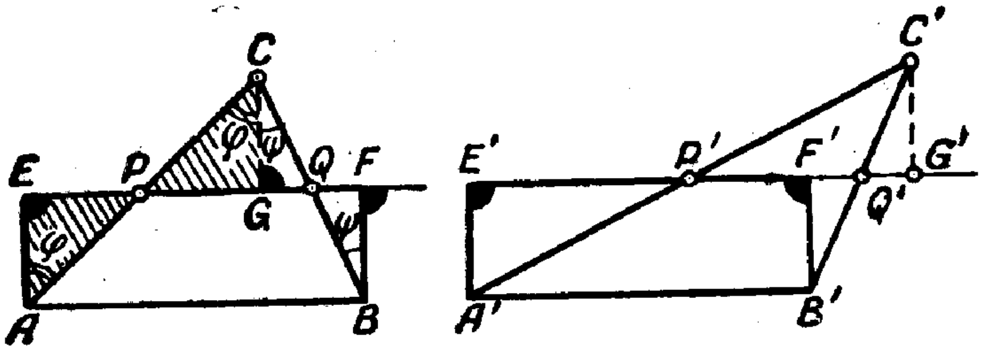
Shuning uchun, Umar Xayyom-Sakkeri to‘rtburchaklarni yuqoridagidek qilib ustma-ust keltirsak ularning pastki A′B′ va AB asoslari ham ustma-ust tushishi kerak. Xullas ,bu to‘rtburchaklar **kongurentdir**.Tasdiq isbot bo‘ldi.

2.5.9. Uchburchaklarning nuqsoni va uchburchaklarning yuzi.

Teorema: Nuqsonilari teng va bittadan tomonlari teng bo‘lgan ikki uchburchak teng yuzlidir.

Isbot. ABC va A′B′C′A av BA gninralkahcrubhcu ′B′ tomonlariga teng bo‘lsin va ularning nuqsonlari bir xil bo‘lsin: δ=π-(A+B+C), δ=π-(A′+B′+C′), δ=δ′ (17-chizma).

Har bir uchburchakda quyidagi yasashlarni bajaraylik. ABC uchburchakning AC va CB tomonlarining P, Q bilan belgilangan, o‘rtalarini to‘g‘ri chiziq bilan birlashtirib, bu to‘g‘ri chiziqqa A,B nuqtalardan AE, BF perpendikulyarlar tushiramiz. C nuqtadan ham bu to‘g‘ri chiziqqa CG perpendikulyar tushiramiz. A′B′C′ uchburchakda ham shularni takrorlaymiz.

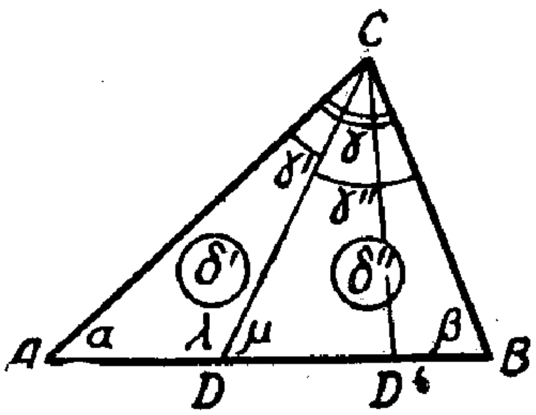


17-chizma

To‘g‘ri burchakli PGC, AEP uchburchaklar tengdir, chunki ularning gipotenuzalari teng va HP nuqhtadagi burchaklari ham vertical bo‘lganligi uchun bir-biriga tengdir. Shu singari, CGQ va QFB uchburchklar ham bir-biriga tengdir. Demak, AEFB to‘rtburchakning yuzi ABC uchburchakning yo‘ziga tengdir. Xudi shuningdek A′E′F′B′ to‘rtburchakning yuzi A′B′C′ uchburchakning yo‘ziga tengdir. Ammo EFBA va E′F′B′A′ to‘rtburchaklar Umar Xayyom-Sakkeri to‘rtburchaklaridir, chunki EA=CG=FB, A′E′=C′G′=B′F′ va E′,F,E,F′ burchaklar – to‘g‘ri burchaklardan iborat. Birinchi to‘rtburchakning “yuqori” asosidagi A va B burchaklarning yeg‘indisi ABC uchburchak burchaklar yeg‘indisiga tengdir, chunki C nuqtadan EF ga tushirilgan perpendikulyar, C burchakni ABC uchburchakning A va B burchaklariga qo‘shilgan ikkita φ,ψ burchakga bo‘linadi. Shuningdek E′F′B′A′ to‘rtburchakning “yuqori” asosidagi burchaklarning yeg‘indisi A′B′C′ uchburchak burchaklarining yeg‘indisiga tengdir. Ammo ABC va A′B′C′ uchburchaklarning nuqsonlari, shartga ko‘ra, tengligi sababli, ulardagi burchaklarning ham yig‘indilari tengdir; bundan esa EFBA va E′F′B′A′ to‘rtburchaklar o‘zaro congruent degan xulosani chiqaramiz, chunki ularning “yuqori” asoslari teng: ABqA′B′ va “yuqori” asosdagi burchaklari ham tengdir (AEFB to‘rtburchakda $\angle A = \angle B$ va A burchak ABC uchburchak burchaklari yig‘indisining yarimiga teng). Demak ABC va A′B′C′ uchburchaklar ham kongruentdir.

Endi yana bir lemmani isbotlaylik.

LEMMA. Agar ABC uchburchak CD transversal bilan ikkita uchburchakga bo‘lingan bo‘lsa, bu uchburchak nuqsonlarining yeg‘indisi olingan ABC uuchburchakning nuqsoniga tengdir. (18-chizma).



18-chizma

Hosil qilingan ADC, DBC uchburchakning nuqsonlarini b’,b’’ bilan belgilaylik: $\delta' = \pi - (\alpha + \lambda + \gamma'), \delta'' = \pi - (\mu + \beta + \gamma'')$; bo‘larni qo‘shaylik:

$$\delta' + \delta'' = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma' + \gamma'') - (\lambda + \mu);$$

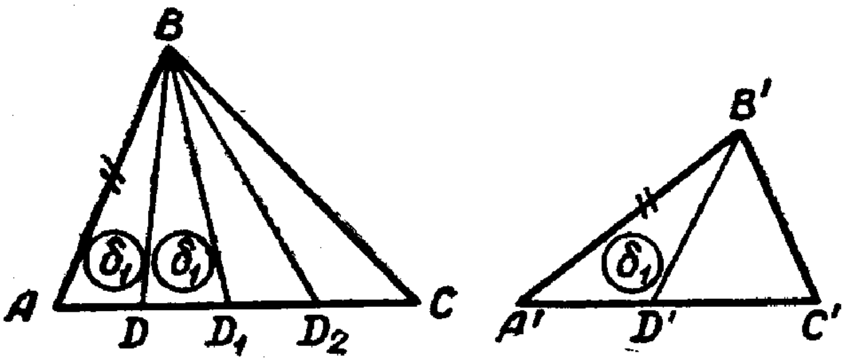
Ammo $\gamma' + \gamma'' = \gamma;\ \lambda + \mu = \pi;$ shu sababli: $\delta' + \delta'' = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) = \delta.$

Bundan tashqari, agar D nuqta AB bo‘ylab A dan B gacha harakat qilsa, δ` nuqson 0 bilan b orasidagi istalgan qiymatni qabul qilaturib, 0 dan δ gacha o‘zgaradi. Agar D nuqta A nuqta bilan birlashishga intisa, u holda $\gamma' \to 0, \mu \to \alpha;$ demak $\lambda \to \pi - \alpha$ va $\delta = \pi - (\alpha + \gamma' + \lambda) \to \pi - \pi = 0.$ Agar D nuqta o‘z harakatini A dan boshlasa, ADC uchburchakning b nuqsoni o‘z o‘zgarishini 0 dan boshlaydi. Agar D nuqta D′ holatni olsa, AD′C uchburchakning nuqsoni ADC va DD′C uchburchaklar nuqsonlarining yig‘indisiga teng bo‘ladi. Bu muhokamalardan, D nuqtaning A dan B gacha harakat qilishi bilan ADC uchburchakning b nuqsoni 0 dan δ gacha o‘sadi degan xulosa chiqadi, bundan δ berilgan ABC uchburchakning nuqsonidir. Bunda shuni ham e’tiborga olish kerakki, o‘sish uzluksiz boradi, bu esa 0 bilan δ orasidagi δ_1 son qanday bo‘lsada ($0<\delta_1<\delta$), D nuqtaning shunday vaziyatining borligini ko‘rsatadiki, ADC uchburchakning nuqsoni δ_1 gat eng bo‘ladi. Bu muxum lemmani biz kelgusida ishlatamiz.

Teorema. Bittdan tomonlari teng bo‘lgan ikki uchburchak yuzlarining nisbati, ularning nuqsonlarining nisbatiga tengdir.

Isbot. ABC va A′B′C′ uchburchaklardan (19-chizma) AB=A′B′, δ, δ` – bu uchburchaklarning nuqsonlari, Δ, Δ' - ularning yuzlari bo‘lsin. $\frac{\Delta}{\Delta'}=\frac{\delta}{\delta'}$ munsabatning borligini isbotlash talab qilinadi.

1^o. δ, δ' nuqsonlar o‘lchovdosh bo‘lsin, yani ularning b nuqsonga m marta, δ` nuqsonga n marta joylashdigan umumiy δ_1 o‘lchovi mavjud bo‘lsin: $\delta = m\delta_1, \delta' = n\delta_1,$ bunda m, n – natural sonlar va $0<\delta_1 \le \delta, 0<\delta_1 \le \delta'$. oldingi muhokamalarga asosan, AC da va shuningdek A′C′ da ham shunday D va D′ nuqtalar topiladiki, ADC va A′D′C′ uchburchakning yo‘q sonlari δ_1 ga teng bo‘ladi. Bunday holda esa, ADB va A′D′B′ uchburchaklar tengyuzlidir, uchunki ularning nuqsonlari birxil va bittadan tomonlari tengdir (AB=A′B′). Endi BD_1 transversal o‘tkazib, DBC uchburchakdan nuqsonni δ_1 ga teng bo‘lgan DD_1B uchburchakni qirqib olamiz; so‘ngra D_1BC uchburchakdan nuqsoni yana δ_1 gat eng ΔD_1D_2B ni qirqib olamiz va hakoza. Natijada B nuqtadan o‘tkazilgan transvellar ΔABC ni nuqsonlari δ_1 ga teng bo‘lgan m – ta uchburchakka bo‘ladi. Shu singari, B’ nuqtadan o‘tkazilgan transversallar $\Delta A'B'C'$ ni nuqsonlari δ_1 ga teng n – ta uchburchakka bo‘ladi. Ammo BD tomonlari umumiy va nuqsonlari teng bo‘lganidan, DBD_1 va ABD uchburchaklar tengyuzlidir. O‘sha sababga ko‘ra, ΔD_1D_2B ning yuzi ΔDD_1B ning yo‘ziga tengdir va hakoza. Demak, ABC uchburchakdan bo‘linish natijasida hosil qilingan m – ta uchburchak teng yuzlidir.



19-chizma

Shu sababning o‘ziga asosan, A’B’C’ uchburchakdanbo‘linish natijasida hosil qilingan n – ta uchburchakning yuzlari o‘zaro teng va ABC va A’B’C’uchburchaklar tengyuzlidir. Demak, bitta yuzaning o‘zi birinchi uchburchakka m marta, ikkinchisi uchburchakka n marta joylashadi. Bundan:

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{m}{n} = \frac{m\delta_1}{n\delta_1} = \frac{\delta}{\delta'};$$

2^o. δ va δ’ nuqsonlar olchovdosh bo‘lmagan hol bunday masalalarda an’ana bo‘lib qolgan usul bilan tekshiriladi, yani: o‘lchovdosh nuqsonlar uchun o‘tkazilgan isbotning birinchi qismidan foydalanib, uchburchak yuzalarining nisbati $\frac{1}{N}$ gacha (N – istalgan butun son) anqlik bilan nuqsonlar nisbatiga teng degan natijaga kelamiz. N ni cheksizlikka intiltirib, nuqsonlar o‘lchovdosh bo‘lmagan hol uchun teorema isbotlanadi. Endi teoremani umumiy hol uchun isbotlaylik.

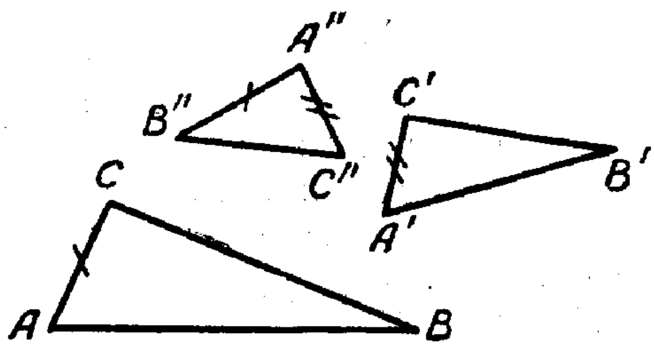
Teorema. Har qanday ikki uchburchak yuzalarining nisbati, ularning nuqsonlari nisbatiga tengdir.

Isbot. Faras qilaylik, ABC va A′B′C′ nuqsonlari mos ravishda δ va δ' ga teng ikkita uchburchak bo‘lsin. Shuday uchichi A″B″C″ uchburchak yasaymizki, A″B″=AC va A″C″=A′C′ bo‘lsin (20-chizma). Bu uchburchakning nuqsoni δ'' bo‘lsin. Shunday qilib, ABC uchburchakning bir tomoni A″B″C″

uchburchakning bir tomoning tengdir. Demak, oldingi teoremaga asosan, bu uchburchaklar yuzlarining nisbati ularning nuqsonlarning nisbatiga teng:

1) $\frac{\Delta}{\Delta''}=\frac{\delta}{\delta''}.A''B''C''vaA'B'C'$ uchburchaklar ham bittadan umumiy tomonga egadir, demak:

2) $\frac{\Delta''}{\Delta'}=\frac{\delta''}{\delta'}$; bunda $\Delta, \Delta', \Delta''$ qaralayotgan uchburchak yuzalari; hosil qilingan tengliklarni hadma – had ko‘paytirib chiqsak, $\frac{\Delta}{\Delta'}=\frac{\delta}{\delta'}$ kelib chiqadi, bu esa teoremani isbotlab beradi.



20-chizma

Bundan, uchburchak yuzining shu uchburchak nuqtasiga nisbati uchburchakka bog‘liq bo‘lmagan o‘zgarmas miqdorning, degan xulosani chiqaramiz (yani bu miqdor hamma uchburchak uchun birxildir). Haqiqatan, $\frac{\Delta}{\Delta'}=\frac{\delta}{\delta'}$ tenglikdan $\frac{\Delta}{\delta}=\frac{\Delta'}{\delta'}$ tenglik kelib chiqadi. Agar ABC ni berilgan uchburchak, A’B’C’ ni esa ixtiyoriy uchburchak desak, hosil qilingan tenglik ixtiyoriy uchburchak yuzining shu uchburchak nuqsoniga nisbatining, berilgan uchburchak yuzining shu uchburchak nuqsoniga nisbatiga tengligini ko‘rsatadi. O‘zgarmas bu nisbatning qanday belgilanishi (ishoralanishi), yuzlari o‘lchovining berilganliga bog‘liqdir. Bu o‘zgarmas miqdorni, Lobachevskiy geometriyasida parallellikburchgini aniqlovchi formulaga kiruvchi o‘zgarmas k miqdorning kvadratiga teng qilinib olinadi. O‘zgarmas nisbat miqdorni bu yusinda tanlab olinsa, $\frac{\Delta}{\delta}=\kappa^2$, yoki $\Delta=\kappa^2\delta$ ni hosil qilamiz, yoki

$\delta = \pi - (A+B+C)$ ni etiborga olib, uchburchak yuzining formulasini shunday yozish mumkin:

$$\Delta = \kappa^2 \left[\pi - (A+B+C)\right].$$

Eslatma. Bu formulada k o‘rniga formal tariqada iR ni qo‘ysak, ($i = \sqrt{-1}$), uchburchak yuzi uchun formula hosil bo‘ldi:

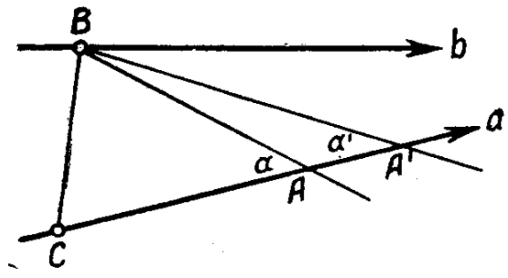
$$\Delta = -R^2\left[\pi - (A+B+C)\right] = R^2\left[(A+B+C) - \pi\right],$$

bu esa – sferadagi uchburchak yuzining formulasidir, bu uchburchakning tomonlari katta doiralar yoylaridan va burchaklari A,B,C dan iboratdir. Lobachevskiy geometriyasidagi barcha formulalarda k o‘rniga iR qo‘yilsa, ular sferadagi geometriyaning formulalariga aylanadi.

Lobachevskiy o‘zining geometriyasi bilan sferik geometriya orasidagi bu bog‘lanishni batafsil asosladi.

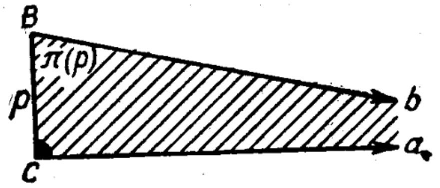
Uchburchaklarning limitik hollari.

Endi $\Delta = \kappa^2 \left[\pi - \left(A+B+C\right)\right]$ formuladan kelib chiqadigan natijalarga to‘xtab o‘taylik. Bu formula uchburchak burchaklarining yeg‘indisi AQBQC qanch kichik bo‘lsa, uchburchak yuzi Δ ning shuncha katta bo‘lishini ko‘rsatadi. Aksincha uchburchakning yuzi qancha kichik bo‘lsa, uning burchaklarining yeg‘indisi π ga shu qadar yaqin bo‘ladi. Limitda hosil bo‘ladigan ushbu holni ko‘raylik. ΔABC ni olib (21-chizma), uning B,C uchlarini harkatsiz qoldiramiz va A uchni CA asos bo‘ylab, misol uchun, o‘ng tomonga qarab ko‘chiraboramiz; bu holda ma’lumki $\angle A = \alpha$ burchak 0 intiladi, BA tomon esa, limitik holni oladi, yani α ga parallel bo‘lgan b to‘g‘ri chiziq vaziyatini qabul qiladi;

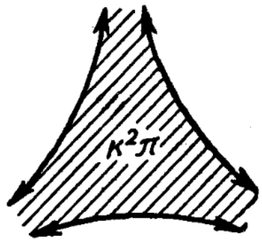


21-chizma

ABC uchburchak esa bir – biriga parallel *a*, b to‘g‘ri chiziqlar orasida joylashgan va BC to‘g‘ri chiziqdan o‘ng tarafdagi mintaqaga aylandi. Chegaralangan bunday mintaqani bir burchagi 0 ga teng “uchburchak” deb aytish va uning yuzini ushbu $\Delta = \kappa^2[\pi - (B+C)]$ formulaga asoslanib hisoblash tabiiydir. Misol tariqasida bir burchagi 0 ga, ikkichi burchagi $\frac{\pi}{2}$ ga , demak uchinchi burchagi



22-chizma



23-chizma

P(r) ga teng bo‘lgan uchburchak yuzini topaylik, bunda r bilan BC tomonning uzunligi belgilangan (22-chizma). Bunday “uchburchakning” yuzi:

$$\Delta = \kappa^2\left\{\pi - \left[\Pi(\rho) + \frac{\pi}{2}\right]\right\}, \quad \text{yoki} \quad \Delta = \kappa^2\left[\frac{\pi}{2} - \Pi(\rho)\right]$$

Ikkinchi misol sifatida, “uchta burchagi ham 0 ga teng uchburchakni” olamiz; bu uchburchak (23-chizma) da tasvirlangan. Bu uchburchak burchaklarining AQBQC yeg‘indisi 0 ga tengdir. Demak, bu uchburchakning Δ yuzini $k^2\pi$ ga teng deb qabul qilish mumkin. Hechbir uchburchakning yuzi burchaklari 0 ga teng uchburchak yuzidan katta yoki unga teng bo‘laolmaydi. Burchaklari 0 ga teng uchburchak burchaklarining yig‘indisi har qanday uchburchak burchaklarining yig‘indisidan kichik, demak uning yuzi eng kattadir.

Grek olimlari amaliyot va nazariya uchun muxim bo‘lgan ko‘pgina chiziqlarning xossalari tekshirdilar.

Ayniqsa *konussimon* kesimlarning xossalari to‘la o‘rganishgan. Eramizdan oldingi ikkinchi asrda Apolloniy konussimon kesimlar nazariyasini XVIII asr davomida hukm surgan kashfiyotlar bilan boyitgan.

Apolloniy konussimon kesimlarni o‘rganishda kordinatalar metodidan foydalanilgan. Bu metod tekislikdagi har xil chiziqlarni o‘rganishda fransuz olimi Ferma (1601-1655) va Dekart (1596-1650) tamonidan XVII asrning 30-yillaridagina tadbiq etilgan. U zamon texnika extiyojlari uchun tekis chiziqlarning mavjudligi kifoya edi. Faqat yuz yil keyingina astronomiya, geodeziya va mexanikaning extiyojlari ortishi tufayli kordinatalar metodi egri sirtlari va ularga o‘tkazilgan egri chiziqlarni o‘rganishga tadbiq etildi.

1747-yilda har taraflama genial olim-rus akademigi Eyler fazoda koordinatalar metodini sistemali ravishda rivojlantirdi.

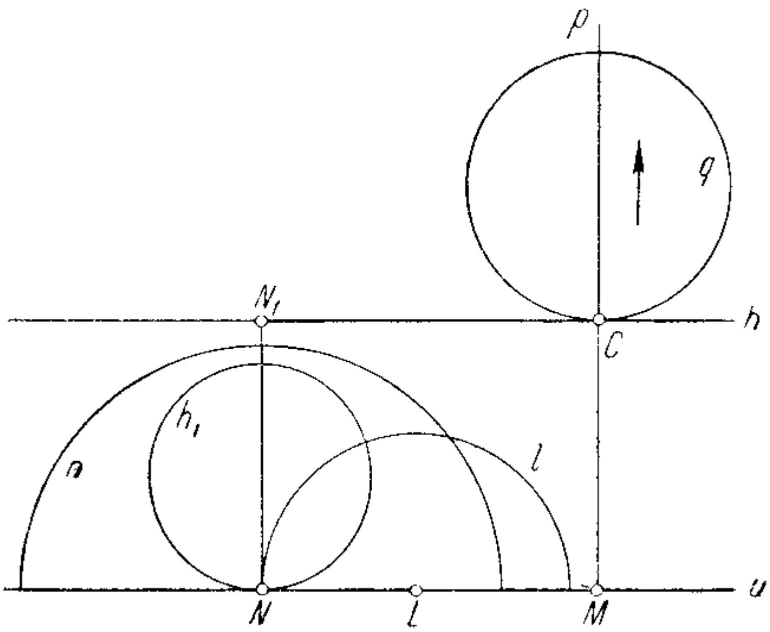
Evkilid sistemasi ikki ming yildan ortiq davr davomida o‘zgarmas deb hisoblab keldi. Ammo 1826-yilda genial rus olimi Nikolay Ivanovish Loboshevskiy yangi geometrik sistemani barpo qildi. Uning dastlabki qoidalari Evkilidning asosiy qoidalaridan bir punktda farq qiladi. Ammo shuning o‘zidan juda ko‘p va g‘oyat muhim xossalar kelib chiqadi.

Masalan Lobachevskiy geometriyasida uchburchak burchaklarining yig‘indisi hamma vaqt 180 gradusdan kam (Evkilid geometriyasida u yig‘indi 180 gradus). Shu bilan birga uchburchakning yuzi qancha qancha katta bo‘lsa, 180°dan qiladigan farq shuncha katta bo‘ladi. Birinchi qarashda tajriba Lobachevskiyning bu va boshqa xulosalarini rad qilganday bo‘lib ko‘rinishi mumkin. Ammo bu shunday emas. Uchburchak burchaklarining yig‘indisi taxminan 180° ekanligi bevosita o‘lchash yo‘li bilan topamiz. Ammo o‘lchash qurollarimizni takomillashmagani tufayli biz bu yig‘indini aniq o‘lchay olmaymiz. Shu bilan birga biz bevosita o‘lchay oladigan hamma uchburchaklar shu qadar kichikki ularning burchaklari yig‘indisining 180° dan qancha farq qilishini bevosita o‘lchash yo‘li bilan aniqlash juda qiyin.

Lobachevskiy genial g‘oyalar rivojlanishi tufayli Evkilid sistemasi g‘oyat katta o‘lchamli figuralar tekshiriladigan astranomiya va fizikadagi ko‘pgina masalalarni tekshirishda yetarli emasligi sezilib qoldi. Biroq odatdagi tajribalar sharoitida u to‘la yaroqli bo‘lib qolaveradi. Shu bilan birga Evklid sistemasining ustunligi uning soddaligidadir, undan texnikaga doir masalalarda bemalol foydalanilmoqda va bundan keyin ham foydalaniladi hamda u maktablarda o‘rganilmoqda va bundan keyin ham o‘rganiladi.

2.5.10. Limit chiziq

Biror *u* to‘gri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan *q* aylanasi P diametr o‘tkazamiz va uning *q* aylana bilan kesishgan *u* chiziqqa eng yaqin bo‘lgan nuqtasini C deb belgilaymiz. (24-chizma)



24-chizma

Agar C nuqtani taynlab (qo‘zg‘almas saqlab) ko‘rsatilgan strelka bo‘ylab q aylananing radiusini chegaralanmagan ravishda oshirib borib markazini esa ko‘rsatilgan strelka yo‘nalishida P to‘g‘ri chiziq bo‘ylab siljitilsa, u holda *q* aylananing limiti *h* Evklid to‘g‘ri chizig‘ida aylanadi va u bu *h* to‘g‘ri chiziq *u* to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi. Bu *h* chiziq giperbolik to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘lmasa **limit chiziq** deb ataladi.

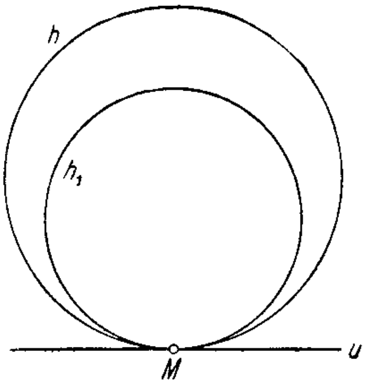
Shunday qilib aylananing limit shakli Evklid geometriyasidagi to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘lib Lobachevskiy geometriyasida **limit chiziqdan** iborat, bunda ko‘rilayotgan aylana limit chiziqqa o‘tuvchi uning bir nuqtasi va u va bu nuqtadagi urinma qo‘zg‘almagan (tayinlangan) bo‘lib, radiusi chegaralanmagan ravishda ortib boradi . Limit chiziqning bunday nomlanishi bilan tushunarlidir. Endi giperbolik harakatdan iborat bo‘lagan markazi u to‘g‘ri chiziqda bo‘lgan P aylanaga nisbatan inversiyasini ko‘rib o‘tamiz (24-chizma). Bu *u* to‘g‘ri chiziqning N nuqtasida bo‘lgan *n* aylanaga inversion *h* chiziqqa h_1 Eevklid aylanasiga akslantiradi, yani o‘tkazadi .

Bu aylana N nuqtadan o‘tib markazi NN_1 perpenduklarda bo‘lib, NN_1 perpenduklar *u* va *h* Eevklid to‘g‘ri chiziqlarga umumiydir hamda undan h_1 aylanisiga *u* to‘g‘ri chiziqqa urinuvchi ekanligi kelib chiqadi .

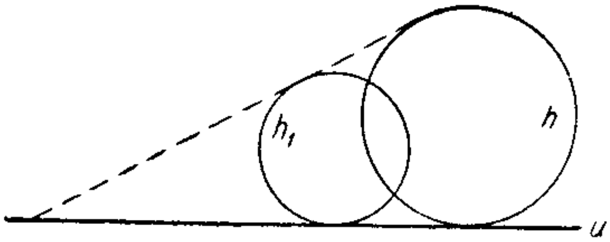
Shunday qilib **limit chiziq τ** tekisligida u to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan Evkilid ko‘rinishdagi to‘g‘ri chiziqni tasvirlaydi yoki *u* to‘g‘ri chiziqqa urinuvchi Eevklid ko‘rinishdagi aylanani tasvirlaydi.

Endi *u* to‘g‘ri chiziqning L nuqtasini markaz qilib N nuqta orqali *l* Eevklid aylanasi o‘tkazaylik. Evkilid aylanalari h_1 va *l* larning radiuslari o‘zaro perpendulyar bo‘lganidan *l* giperbolik to‘g‘ri chiziq h_1 **limit chiziqli** to‘g‘ri chiziqni to‘g‘ri burchak ostida kesib o‘tadi . Bundan esa **limit chizig‘i**ning cheksiz uzoqlashgan nuqtasidan o‘tuvchi va uning o‘qi deb ataluvchi hamma giperbolik to‘g‘ri chiziqlar bu chiziqni to‘gri burchak ostida kesib o‘tadi deb xulosa qilamiz. Ixtiyoriy h **limit chiziq** boshqa ixtiyoriy h_1 limit chiziqqa giperbolik ravishda teng , yani h giperbolik chiziqni h_1 giperbolik chiziqqa o‘tkazuvchi giperbolik harakat mavjud. Bunday giperbolik xarakterlar :

- Agar h va h_1 lar u to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan Evkilid chiziqlari bo‘lsa , yoki u to‘g‘ri chiziqqa urinuvchi har-hil radiusli Evklid aylnalari bo‘lsa , u holda o‘xshashlik markazi u to‘g‘ri chiziqda bo‘lgan o‘xshash almashtrishlardan iborat bo‘ladi.(25-chizma, 26-chizma)



25-chizma



26-chizma

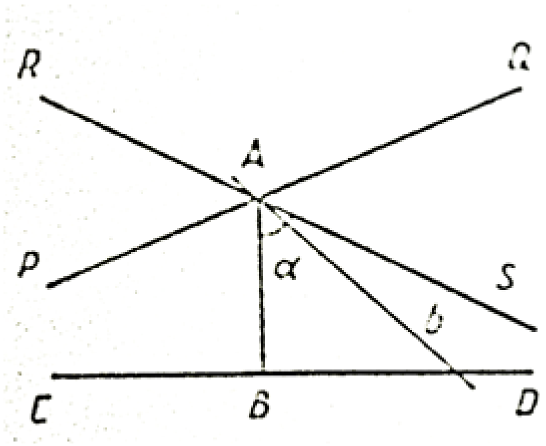
- Agar h va h_1 lar u to‘g‘ri chiziqqa urinuvchi bir xil radiusli Evklid aylanalari bo‘lsa , u holda **τ** tekislikni u to‘g‘ri chiziq bo‘ylab siljitishdan iborat.
- Agar h va h_1 larning bittasi u to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan Evklid to‘g‘ri chizig‘i u bo‘lib, ikkinchisi u to‘g‘ri chiziqqa urinuvchi Eevklid aylanasi bo‘lsa, u holda qutbi u to‘g‘ri chiziqqa bo‘lgan **inversiyadan** iborat bo‘ladi.

2.6-§. Lobachevskiy geometriyasida ba’zi bir hisoblashlar.

2.6.1. Lobachevskiy geometriyasida parallellik burchagini hisoblash.

Agar biror tekislikda CD to‘g‘ri chiziq va unda yotmagan A niqta berilgan bo‘lsa, u holda bu nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqni kesmaydigan cheksiz ko‘p to‘g‘ri chiziq to‘plamini o‘tkazish mumkin (1-chizma).

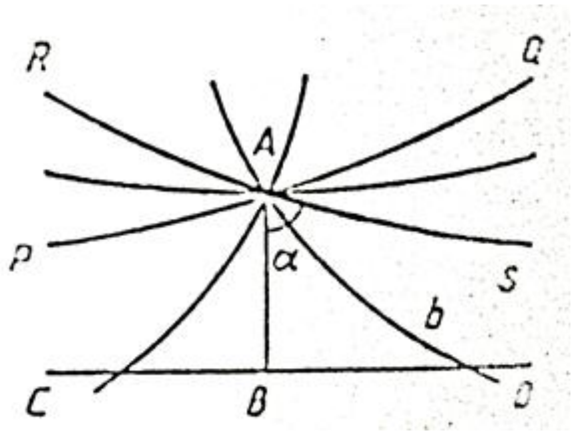
Bunda RS va PQ to‘g‘ri chiziqlar chegaraviy to‘g‘ri chiziqlar deyiladi. Bu esa AB kesma bilan α burchakdan kichik bo‘lgan burchak tashkil etuvchi har qanday *b* to‘g‘ri chiziq CD to‘g‘ri chiziqni kesishini bildiradi. Aynan RS va PQ to‘g‘ri chiziqlar CD to‘g‘ri chiziq bilan parallel deb qaraladi. Boshqa to‘g‘ri chiziqlar, ya’ni CDni kesmaydigan to‘g‘ri chiziqlar CD to‘g‘ri chiziqga nisbatan uzoqlashuvchi deb ataladi.



1-chizma

Berilgan CD to‘g‘ri chiziqga A nuqtada parallel bo‘gan RS chegaraviy to‘g‘ri chiziqlar CD to‘g‘ri chiziq yo‘nalishi bo‘ylab parallel deyiladi. Buni o‘ng yo‘nalish bo‘yicha parallel deyiladi. Xuddi shunday PQ chegaraviy to‘g‘ri chiziq chap yo‘nalish bo‘yicha parallel deyiladi (2-chizma).

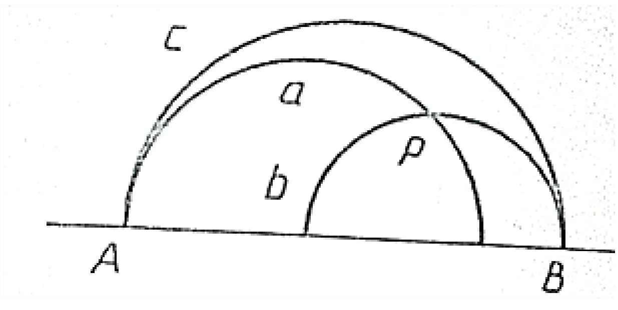
Bu erda <BASqα burchak A nuqtaga parallellik burchagi deyiladi.



2-chizma

Teorema. Agar ikkita to‘g‘ri chiziqlar boshqa bir to‘g‘ri chiziqga parallel bo‘lsa, u holda ular o‘zaro paralleldir.

Ushbu 3-chizmani qaraylik .



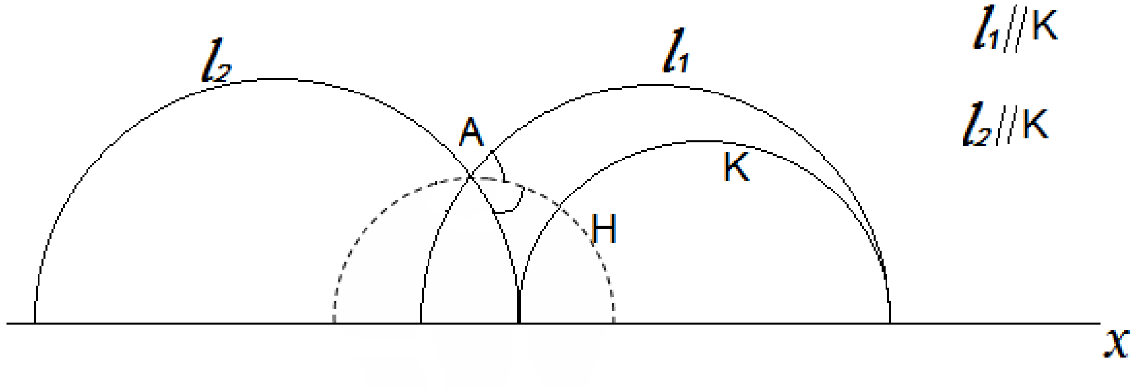
3-chizma

Noevklid *a* va *b* to‘g‘ri chiziqlar P nuqtada kesishadi. Noevklid *s* to‘g‘ri chiziq esa *b* to‘g‘ri chiziqni kesmaydi (A va B nuqtalar noevklid nuqtalaridan iborat).

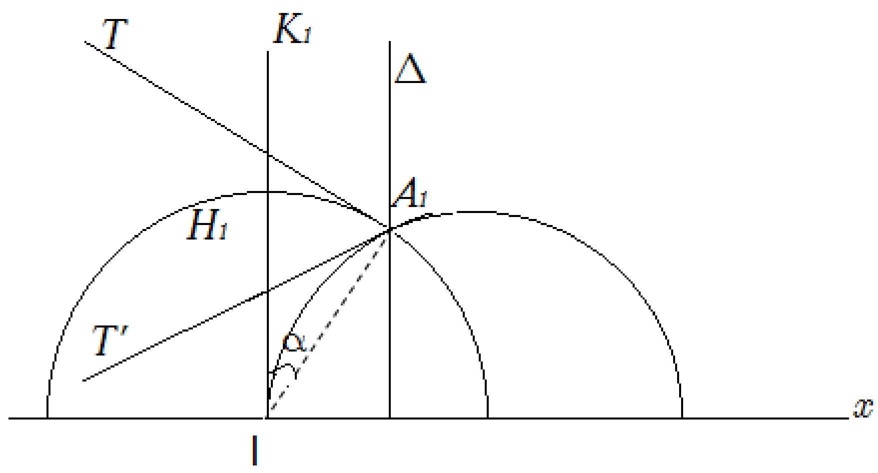
Shunday qilib *a* va *b* to‘g‘ri chiziqlar P nuqtadan o‘tib *s* to‘g‘ri chiziqqa parallel. Bundan tashqari yana P nuqtadan *s* to‘g‘ri chiziqni kesmaydigan to‘g‘ri chiziqlarning cheksiz to‘plami o‘tadi.

Noevklid to‘gri chiziq K ning A nuqtasidagi tushirilgan AH perpenduklyar ikkita noevklid parallel to‘g‘ri chiziqlar bilan bir xil burchak tashkil etadi. Bu noevklid burchak parallellik burchagi deyiladi (4-chizma).

Bizning maqsadimiz bu burchagning Π(P) qiymatini p=D(A,H) ga bog‘liq funksiya sifatida hisoblash kerak. Qulaylik uchun Noevklid siljitishdan foydalanamiz ya’ni yuqori yarim tekislikni saqlovchi chiziqli alamashtrishda noevklid to‘g‘ri chiziq K ni haqiqiy o‘qga perpendkilyuar bo‘lgan K_1 to‘g‘ri chiziqqa tasvirlashdan foydalanamiz (5-chizma). U holda A nuqtadan ikkita noevklid to‘g‘ri chiziqlar OX nuqtaga perpendkulyar bo‘lgan Δ to‘g‘ri chiziqqa va yarim aylananing I nuqtasiga urinma bo‘lgan K_1 to‘g‘ri chiziqqa tasvirlanadi (5-chizma).



4-chizma



5-chizma

A_1 nuqtasidan K_1 ga tushurilgan noevkilid perpindikulyar markazi J nuqtada bo‘lib A_1 nuqtadan o‘tuvchi yarim aylanaga akslanadi.

Burchak A_1J H_1 ni α bilan belgilab JA_1 to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. U holda 27-chizmadan

$$\Delta A_1 T = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad T' A_1 = \alpha$$

bo‘lganidan

$$TA_1T' = \frac{\pi}{2} - \alpha = \Delta A_1 T = P(P),$$

A_1H to‘g‘ri chiziqni $A_1\Delta$ va A_1J to‘g‘ri chiziqlar bilan tashqi qolgan burchaklarning tengligi isbotlandi.

Ikkinchi tomondan

$$\text{P(P)} = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

ekanligi ko‘rinadi.

Endi

$$p = D(A_1H_1) = K \int\limits_{A_1H_1} \frac{ds}{y}$$

Integralni hisoblaymiz va

$$p = K \int\limits_{\Pi(P)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{RdW}{R\sin W} = K \int\limits_{\Pi(P)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dW}{\sin W} = K\left[\ln tg\frac{w}{2}\right]_{\Pi(P)}^{\frac{\pi}{2}}$$

yoki

$$p = -K \ln tg \frac{\Pi(P)}{2},$$

bundan

$$tg \frac{\Pi(P)}{2} = e^{\frac{K}{P}}.$$

2.6.2. Giperbolik to‘g‘ri chiziqlarning kesmalar uzunligini hisoblash.

Avvalo τ yarim tekislikda Evkilidning yarim to‘g‘ri chizig‘ini ko‘rib o‘tamiz.Bu yarim ro‘g‘ri chiziq u to‘g‘ri chiziqning M nuqtasida (6-chizma) perpendikulyar bo‘lib undagi A,B,C,D nuqtalar

$$\frac{MB}{MA} = \frac{MD}{MC}$$

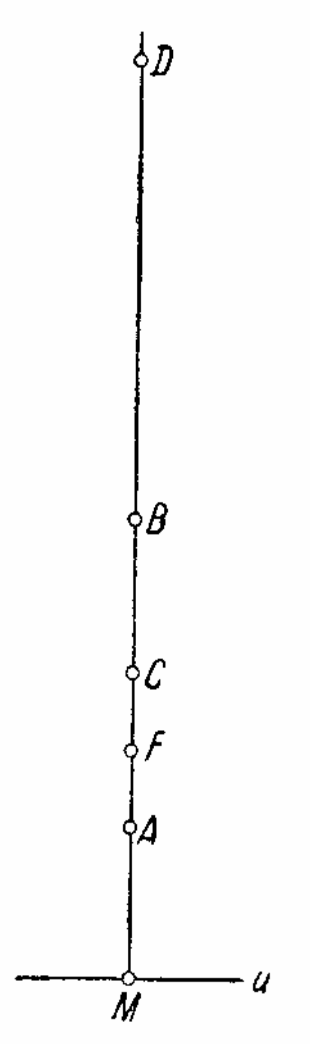
bo‘ladigan holatda joylashtirilgan va uni

$$\frac{MB}{MD} = \frac{MA}{MC}$$

deb ham yozish mumkin.

Oxirgi ikki munosabatning har birini μ deb belgilaylik. Bunda o‘xshash almashtirish μ koefitsentga ega bo‘lib CD kesmani AB kesmaga almashtiradi. Demak bu kesmalarning giperbolik uzunliklari o‘zaro, teng.

Yuqorida bayon etilganlardan AB kesmaning giperbolik uzunligi (biz uni $AB_Г$ deb belgiliymiz) $\frac{MB}{MA}$ nisbat bilan xarakterlanishi kelib chiqadi. Buni boshqacha qilib aytsak $AB_Г$ giperbolik uzunlik $\frac{MB}{MA}$ nisbatining biror funksiyadan iborat. Bu funksiyani logarifmik funksiya deb qabul qilinishini ko‘rsatamiz, yani



6-chizma

$$AB_{\Gamma} = \log \frac{MB}{MA} \qquad (1)$$

deb olish mumkin (logarifm asosi ixtiyoriy).

Faraz qilaylik F nuqta AB kesmaning nuqtasi bo‘lsin. U holda

$$\frac{MB}{MA} = \frac{MF}{MA} * \frac{MB}{MF}$$

deb yoza olamiz.

Bu tenglikdan logarifm olib (1) ga asosan

$$AB_{\Gamma} = AF_{\Gamma} = FB_{\Gamma}$$

bo‘lib kesmalarni qo‘shish qoydasi bilan mos tushadi.

Umuman aytganda (1) formulada hamma kesmalar uchun logarifm asosini bir xil musbat son qilib olish mumkin (1 sondan farqli). Lekin biz yuqorida ko‘rib o‘tgan hollarni e’tiborga olib (chiqargan qoidalarni e’tiborga olib) natural asosni logarifmni tanlash zarurligini ko‘ramiz.

Demak biz (1) formulani

$$AB_{\Gamma} = \ln \frac{MB}{MA} \qquad (2)$$

ko‘rinishda yozishimiz zarur. Haqiqatdan ham, agar AB kesma MA ga nisbatan yetarlicha kichik bo‘lsa u holda

$$\ln \frac{MB}{MA} = \ln \frac{MA + AB}{MA} = \ln(1 + \frac{AB}{MA})$$

munosabatdan $\ln(1+x) \approx x$ va (2) formulaga asosan

$$AB_{\Gamma} \approx \frac{AB}{MA}$$

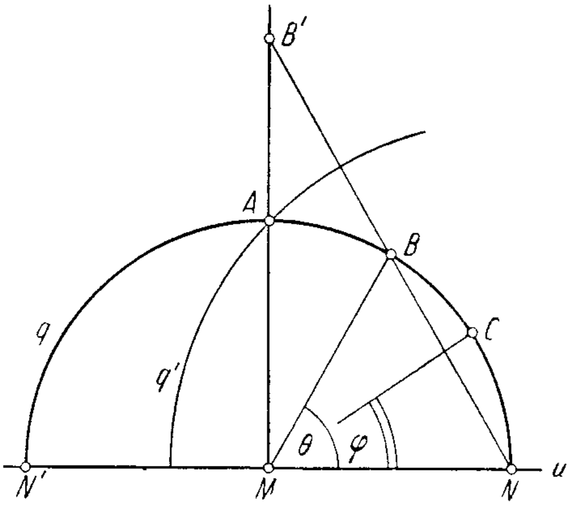
munosabatlarni hosil qilamiz. Bu yuqorida qabul qilingan prinsiplarga mos keladi.

AB va BA kesmalarning giperbolik uzunliklari (2) formula bilan hisobilanganda ularning absalyut qiymatlari 0 ga teng bo‘lib ishoralari har xil bo‘lishini qayd etamiz.

Bu esa kesmaning yo‘nalishi uning teskari tomon yo‘nalishiga o‘zgarganda giperbolik uzunlikning ishorasi o‘zgarishini ko‘rsatadi.

Agar biz uchun kesma yo‘nalishi farqsiz bo‘lsa u holda (2) formulaning o‘ng tomonida logorifmning absalyut qiymatini olishlik kelib chiqadi.

Endi markazi I to‘g‘ri chiziqning M nuqtasida bo‘lgan Evklidning q yarim aylanasini ko‘rib o‘tamiz. (7-chizma)



7-chizma

Bu q Evklid yarim aylanasi u to‘g‘ri chiziqni N va $N^{'}$ nuqtalarda kesib o‘tsin va u to‘g‘ri chiziqning M nuqtasidagi Evklid perpindikulyar q Evklid yarim aylanani A nuqtada kessin.

Faraz qilaylik B nuqta AN yoyning nuqtasi bo‘lsin. NB Evklid to‘g‘ri chizig‘ini o‘tkazamiz va u MA bilan $B^{'}$ nuqtada kesishsin.

Endi q va MA giperbolik to‘g‘ri chiziqlarning kesmalari AB va $AB^{'}$ teng ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Haqiqatdan ham, markaz N nuqtada bo‘lgan NA radiusli $q^{'}$ aylanaga nisbatan **inversiya** q yarim aylanani MA Evklid to‘g‘ri chizig‘ini almashtiradi (o‘tkazadi, mos keltiradi, (tasvir). Shu bilan birga A nuqta o‘z-o‘ziga, B nuqta $B^{'}$ nuqtaga almashtiradi (o‘tkazadi, mos keltiradi, tasvirlaydi) chunki B va $B^{'}$ nuqtalar **inversiya qutbi** N nuqtadan o‘tuvchi Evklid to‘g‘ri chizig‘ida yotadi.

Demak,

$$AB_{\Gamma} = AB^{'}_{\Gamma} = \ln \frac{MB^{'}}{MA}$$

Endi NMB burchakni θ deb belgiliymiz u holda

$$\angle MNB = 90^0 - \frac{\theta}{2}$$

va

$$\frac{MB'}{MA} = \frac{MB'}{MN} = tg\left(90^0 - \frac{\theta}{2}\right) = ctg\frac{\theta}{2}.$$

Bundan

$$AB_{\Gamma} = \ln ctg\frac{\theta}{2}. \qquad (3)$$

Agar (7-chizma) C nuqtada BN yoyning nuqtasi bo‘lsa va $\angle$NMC=φ bo‘lsa, u holda (3) dan

$$AC_{\Gamma} = \ln ctg\frac{\varphi}{2}, \qquad BC_{\Gamma} = AC_{\Gamma} - AB_{\Gamma} = \ln ctg\frac{\varphi}{2} - \ln ctg\frac{\theta}{2}.$$

kelib chiqadi. Bundan

$$BC_{\Gamma} = \ln\left(ctg\frac{\varphi}{2} \cdot tg\frac{\theta}{2}\right) \qquad (4)$$

hosil bo‘ladi (tgα·ctgα=1).

Shunday qilib giperbolik to‘g‘ri chiziq berilgan kesmani o‘z ichiga olgan holatda Evlklid yarim to‘g‘ri chizig‘iga tasvirlaydigan formulani hosil qildik.

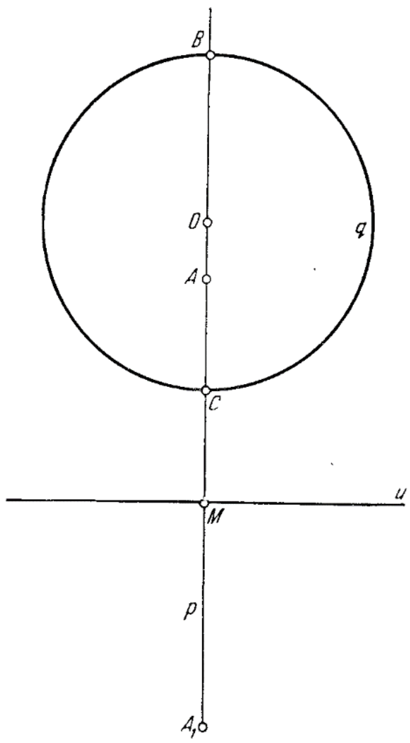
Xuddi shunday giperbolik to‘g‘ri chiziqni Evklid yarim aylanasiga tasvirlaydigan xolatda formulani hosil qildik.

2.6.3. Lobachevskiy tekisligida aylana.

Lobachovskiy tekisligida aylananing τ tekisligiga qanday tasvirlanishini ko‘rib o‘tamiz. U to‘g‘ri chiziqning M nuqtasidan o‘to‘vchi *u* to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan P Evklid to‘g‘ri chizig‘ini o‘tkazamiz, va P dagi τ tekislikda ikkita ixtiyoriy B va C nuqtalarni olamiz MB>MC, (8-chizma). Bu yerda A nuqtani

$$\frac{CM}{AM} = \frac{AM}{BM} \qquad (5)$$

tenglik bajariladigan qilib yasaymiz.



8-chizma

Bu (5) tenglikdan CA va AB kesmalarning giperbolik uzunliklari bir xil deb xulosa qilamiz ya’ni

CA=AB

Haqiqatdan ham o‘xshashlik markazi M nuqtada va koeffisienti $k=\dfrac{CM}{AB}$ bo‘lgan o‘xshash almashtirish AB kesmani CA kesmaga almashtiradi.

Bunda

$$AM\cdot\frac{CM}{AM}=BM\cdot\frac{AM}{BM}=AM,\qquad AM=k\cdot BM$$

Demak B nuqta nuqtaga o‘tadi

$$AM\cdot\frac{CM}{AM}=CM,\qquad CM=k\cdot AM$$

DemakA nuqta C nuqtaga o‘tadi

Endi BC kesmaning Evklid o‘rtasining nuqtasini O bilan belgilaymiz. O nuqtani markaz deb OB radiusli *q* Evklid aylanasini chizamiz va U to‘g‘ri chiziqqa nisbatan A nuqtaga semmitrik bo‘lgan A_1 nuqtani yasaymiz.

Endi

$$OA = OM - AM,\ \ OA_1 = OM + MA_1 = OM + AM$$

bo‘lganidan

$$OA \cdot OA_1 = OM^2 - AM^2 \tag{6}$$

bo‘ladi. Demak (6) tenglikni quyudagicha yozish mumkun

$$OA \cdot\ OA_1 = \frac{1}{4}(BM + CM)^2 - BM \cdot CM =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot (BM^2 + 2BM \cdot CM + CM^2 - 4BM \cdot CM)$$

yoki

$$\mathrm{OA} \cdot OA_1 = (BM - CM)^2. \tag{7}$$

Endi

$$0{,}5(BM - CM) \quad = OB$$

bo‘lganidan (7) tenglikdan

$$OA \cdot OA_1 = OB^2$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan A va A_1 nuqtalarning q aylanaga nisbatan simmetrik ekanligini ko‘rsatamiz.

Endi q chiziqning hamma nuqtalari A nuqtadan bo‘lgan giperbolik masofalari o‘zaro tengligini ko‘rsatamiz.

A va A_1 nuqtalardan ixtiyoriy P evklid aylanasini o‘tkazamiz. Uning markazi U to‘g‘ri chiziqning N nuqtasida yotadi. Demak uning τ tekislikdagi joylashgan qismi giperbolik to‘g‘ri chiziqni tasvirlaydi.

Faraz qilaylik n va q lar D va E nuqtalarda kesishgan hamda n va u lar F va G nuqtalarda kesishgan. Markazi F radiusi FA bo‘lgan f evklid aylanasini chizamiz. Bu f va q aylanalar o‘zaro ortaganaldir chunki f evklid aylanasi q aylanasiga nisbatan simmetrik bo‘lgan A va A_1 nuqtalardan o‘tadi. Shuning uchun f ga nisbatan inversiya q aylanani o‘ziga almashtiradi. Bu inversiya F qutbdan o‘taydigan P to‘g‘ri chiziqni F dan o‘tadigan hamda A vaA_1 nuqtalrdan o‘tadigan, bunda berilgan inversiyada A va A_1 nuqtalar o‘zgarmay qoladi, ya’ni n aylanaga o‘tadi. Ikkinchi tamondan inversiya qutbdan o‘tuvchi n aylanani aynan p to‘g‘ri chiziqqao‘tkazadi. Chunki bu to‘g‘ri chiziq A va A_1 nuqtalardan o‘tishi kerak. Bundan n aylananing AD va AE kesmalarni giperbolik uzunliklari p giperbolik to‘g‘ri chiziqdagiAB va AC kesmalarning giperbolik uzunliklarig teng. Buni boshqacha qilib aytganda A nuqtadan B,C,D,E nuqtalargacha bo‘lgan giperbolik masofalar bir xil. Bu giperbolik aylananing τ koordinatada evklid aylanasi ko‘rinishda tasvirlanishini ko‘rsatadi , bunda bu aylana U to‘g‘ri chiziq bilan umumiy nuqtaga ega bo‘lmaydi. Lekin tasvirning markazi A nuqta unga mos keluvchi evklid aylanasining O markazi bilan mos tushmaydi.

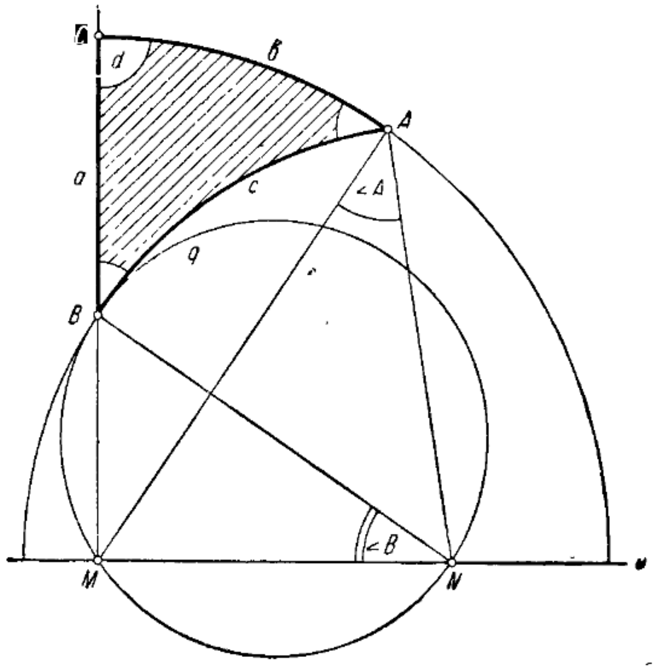
Xulosada A nuqtadan o‘tuvchi giperbolik to‘g‘ri chiziq q aylanani tp’g‘ri burchak ostida kesib o‘tishini qayd etamiz. Bu esa evklid aylanasidan ma’lum bo‘lgan diametrlar xossasiga o‘xshashdir.

2.6.4. Lobachevskiy geometriyasining ba’zi teoremalari.

Teorema 1. Ixtiyoriy uchburchakning burchaklar yig‘indisi 2d dan kichik.

Isbot. Avvalo to‘g‘ri burchakli ABC uchburchakni ko‘rib o‘tamiz (9-chizma). Uning a,b,c tomonlari mos ravishda to‘g‘ri chiziqqa Evklid perpendikulyarda, markazi M nuqtada bo‘lgan Evklid aylanasining yoyida markazi N nuqtada bo‘lgan Evklid aylanasining yoyida tasvirlangan. C burchak to‘ri burchakdan iborat. A burchak b va c aylanalarning A nuqtasiga o‘tkazilgan urinmalar orasidagi burchakdan iborat yoki boshqacha aytganda bu aylanalarning NA va MA radiuslari orasidagi burchakdan iborat. Nixoyat $< B = < BNM$.

BN kesmada uni diametr sifatida qarab q Evklid aylanasini yasaymiz. Bu aylana c aylana bilan faqat bitta umumiy B nuqtaga ega, chunki uning diametri c aylananing radiusidan iborat. Shuning uchun A nuqta q aylana bilan chegaralangan doiradan tashqarida yotadi.



9-chizma

Demak,

$$\angle A = \angle MAN < \angle MBN$$

Bundan

$$\angle MBN + \angle B = d$$

bo‘lgandan

$$\angle A + \angle B < d \qquad (8)$$

tengsizlikni hosil qilamiz va shuning uchun

$$\angle A + \angle B + \angle C < 2d$$

bo‘ladi. Teorema isbot bo‘ldi.

Endi biz yuqorida ko‘rib o‘tgan giperbolik harakat tufayli ixtiyoriy to‘g‘ri burchakli uchburchakning bir katetini to‘g‘ri chiziqni Evklid perpendikulyari ustida joylashtirish mumkin ekanligini qayd etamiz.

Demak, (8) tengsizlikni isbotlashdagi biz foydalangan ixtiyoriy uchburchakka tadbiq etiladi.

Agar o‘tmas burchakli uchburchak berilgan bo‘lsa, u holda uning biror balandligi yordamida uni ikkita to‘g‘ri burchakli uchburchakka ajratamiz. Bu o‘tmas burchakli uchburchak burchaklarining yig‘indisi ajratilgan to‘g‘ri burchakli uchburchaklarning o‘tkir burchaklari yig‘indisiga teng bo‘ladi. Bundan (9) tengsizlikni e’tiborga olib teoremani har qanday uchburchak uchun o‘rinli deb xulosa chiqaramiz.

Teorema. Lobachevskiy geometriyasida uchburchak burchaklar yig‘indisi uchburchak o‘lchamlariga va forma shakliga (ko‘rinishi) bog‘liq bo‘lgan o‘zgaruvchi miqdordan iborat va 180^0 dan kichik.

Lobachevskiy geometriyasida o‘xshash va teng emas uchburchaklar mavjud emas.

Teorema 2. To‘rtburchak burchaklarining yig‘indisi 4d dan kichik.

Bu teoremani isbotlash uchun to‘rtburchaklarni diagonal bo‘ylab ikkita uchburchakka ajratish kifoya.

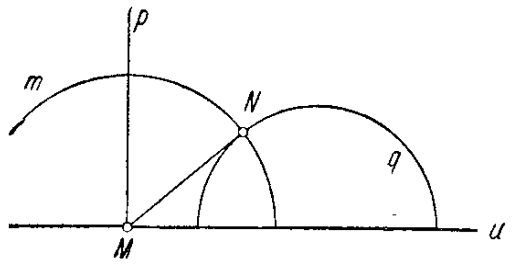
Teorema 3. Ikkita uzoqlashuvchi to‘g‘ri chiziqlar faqat va faqat bitta umumiy perpendikulyarga ega.

Isbot. Faraz qilaylik uzoqlashuvchi to‘g‘ri chiziqlardan biri τ tekislikda to‘g‘ri chiziqning M nuqtasidagi p Evklid perpendikulyar ko‘rinishda tasvirlangan bo‘lsin, ikkinchisi esa markazi u to‘g‘ri chiziqda bo‘lgan q Evklid yarim aylana ko‘rinishida tasvirlangan bo‘lsin. Shu bilan birga q va p lar umumiy nuqtaga ega bo‘lmasin. (10-chizma)

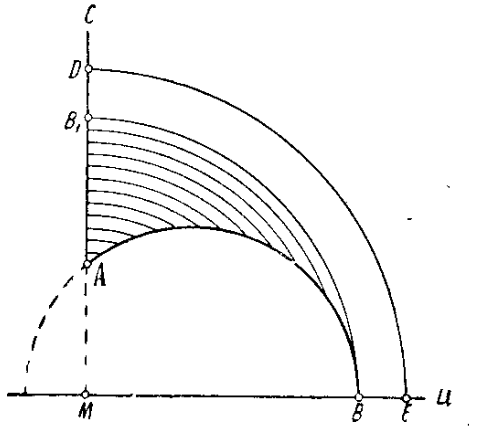
Bunday ikkita uzoqlashuvchi giperbolik to‘g‘ri chiziqlarni τ tekislikda joylashtirishga giperbolik harakat yordamida hamma vaqt erishish mumkin .

Endi M nuqtadan q yarim aylanaga giperbolik to‘g‘ri chiziq MN Evklid urinmasini o‘tkazamiz va M nuqtani markaz deb MN radius bilan m Evklid yarim aylanasini yasaymiz. Bu m giperbolik to‘g‘ri chiziq ekanligi tushunarli va p va q larni to‘g‘ri burchak ostida kesib o‘tadi. Demak, m giperbolik to‘g‘ri chiziq τ tekislikda izlangan va berilgan uzoqlashuvchi to‘g‘ri chiziqlarga umumiy perpendikulyardan iborat.

Ikkita uzoqlashuvchi to‘g‘ri chiziqlar ikkita umumiy perpendikulyarga ega bo‘lishi mumkin emas, chunki bunday holatda to‘rtta burchagi to‘g‘ri burchakdan iborat bo‘lgan to‘rtburchak mavjud bo‘lgan bo‘lar edi. Bu esa teorema 2 ga ziddir. Teorema isbot bo‘ldi.



10-chizma



11-chizma

Teorema 4. O‘tkir burchak tomonining uning boshqa tomoniga to‘g‘ri burchakli proyeksiyasi kesmadan iborat (Evklid geometriyasidagidek yarim to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘lmaydi).

Isbot. Teoremaning o‘rinligi 11-chizmadan ko‘rinib turibti, bu yerda AB, kesma BAC o‘tkir burchakning AB tomoni AC tomonga to‘g‘ri burchakli proyeksiyasidan iborat.

Bu chizmada DE markazi M nuqta bo‘lgan Evklid aylanasining DE yoyi bo‘lib AC giperbolik to‘g‘ri chiziqda perpendikulyardan iborat. Bu perpendikulyar AB og‘mani kesmaydi.

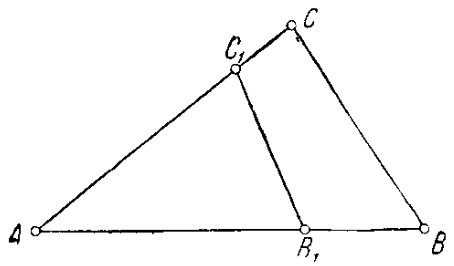
Demak, bitta to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar va og‘ma bo‘lgan chiziqlar hamma vaqt kesishadi deb qarash Lobachevskiyning parallellik aksiomasi ziddir, u Evklidning parallellik aksiomasiga teng kuchlidir. Teorema isbot bo‘ldi.

Teorema 5. Agar ABC uchburchakning uchta burchagi mos ravishda A’B’C’ uchburchakning uchta burchaklariga teng bo‘lsa, u holda bu uchburchaklar tengdir.

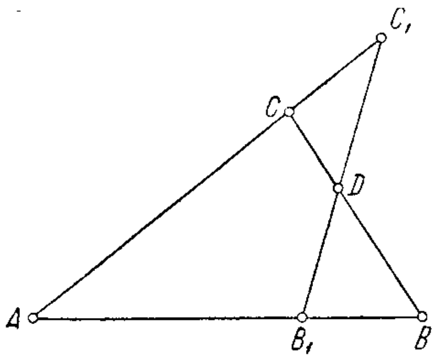
Isbot. Teskaridan faraz qilamiz va AB va AC nurlardan mos ravishda $AB_1=A'B'$, $AC_1=A'C'$ kesmalarga ajratamiz. AB_1C_1 va $A'B'C'$ uchburchaklar ikki tomoni va ular orasidagi burchaklari tengligi bo‘yicha tengdir. B_1 nuqta B nuqta bilan mos tushmaydi, C_1 nuqta C nuqta bilan mos tushmaydi, chunki bu holatlarning ixtiyoriysida berilgan uchburchaklar teng bo‘lar edi. Bu esa farazga ziddir.

Quyidagi mumkin bo‘lish holatlarni ko‘rib o‘tamiz.

a) B_1 nuqta A va B nuqtalar orasida, C_1 nuqta A va C nuqtalar orasida yotsin. (12-chizma; bunda va keyingi chizmada giperbolik to‘g‘ri chiziqlar shartan Evklid to‘g‘ri chiziqlar bilan tasvirlangan). BCC_1B_1 to‘rtburchak burchaklarining yig‘indisi 4d tengligiga ishonch hosil qilish mumkin. Lekin teorema 2 ga asosan bu mumkin emas.



12-chizma



13-chizma

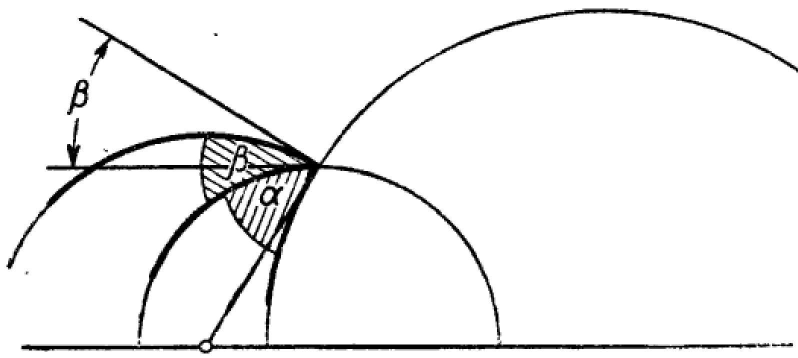
b) B_1 nuqta A va B nuqtalar orasiga, C nuqta A va C_1 nuqtalar orasida yotsin (12-chizma). BC va C_1B_1 kesmalarning kesishgan nuqtasini D deb belgilaylik. $\angle C=C'$ va $\angle C'=C_1$ bo‘lganidan $\angle C=C_1$. Bu mumkin emas, chunki C burchak CC_1D uchburchakka nisbatan tashqi burchak.

Bu yerda “Uchburchakning tashqi burchagi ichki burchagidan kattadir (unga qo‘shni bo‘lmagan)” degan teoremaning isboti parallellik aksiomasiga bog‘liq emasligini qayd qilib o‘tamiz.

Xuddi shunday boshqa mumkin bo‘lgan holatlar muhokama etiladi. Teorema isbot bo‘ldi, chunki biz qabul qilgan faraz zidlikka olib keldi. Teorema 5 dan Lobachevskiy geometriyasida berilgan uchburchakka o‘xshash bo‘lgan uchburchak mavjud emasligi kelib chiqadi. (Lekin unga teng bo‘lmagan h).

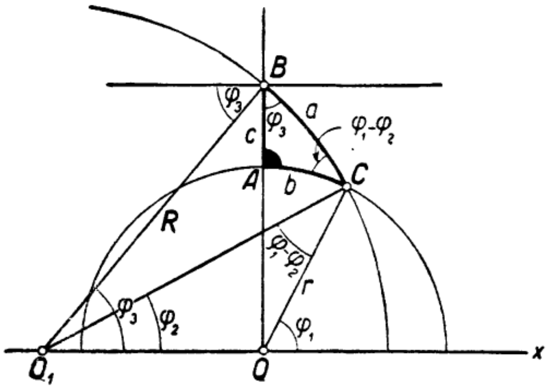
2.7-§. Lobachevskiyning noevklid trigonometriyasi (Puankare interpretatsiyasi)

Lobachevskiy tekisligining Evklid yarim tekisligidagi (y>0) conform tasvirini beradi (konformlik – burchaklarning buzilmasligini bildiradi). Burchaklar uchun kongruentlik aksiomalarining bajarilishini tekshiramiz. Agar berilgan nurda belgili nuqta va bu hurdan belgili taraf olingan bo‘lsa, uchi shu nuqtada bo‘lib, o‘zi ko‘rsatilgan tarafda yotuvchi va berilgan burchakka teng faqat bitta burchak yasash mumkin (III_4); bu tasdiqning to‘g‘riligi xaritada burchaklarning Evklidiy manoga ega ekanligidan kelib chiqadi. Burchaklarning yeg‘indisini yasash misoli 1-chizmada keltirilgan.



1-chizma

Xulas, 4 – nchi aksiomaning (III_4) bajarilishi ko‘rsatildi. Beshinchi (III_5) aksiomaning kuchga egaligini sinab ko‘rish og‘irroqdir, chunki bu aksiomada kesmalarning “kongruentligi” burchaklarning “kongruentligi”ga muvofiqlangan bo‘lishi kerak. Bu aksiomaning kuchga ega bo‘lishini tekshirish maqsadida biz “xarita bilan ishlash” usuli bilan va Lobachevskiy geometriyasining ancha yangi faktlari bilan, qisman Lobachevskiy tirgonometriyasining elimetlari bilan tanishib chiqamiz. “Uchburchak”ning ikki tomoni va ular orasidagi burchak, bu uchburchakdagi boshqa elemenlarni ham aniqlashini isbotlaymiz. Bu isbotni Avval Puankare xaritasida A burchagi to‘g‘ri burchakdan iborat. ABC uchburchak uchun o‘tkazamiz (2-chizma).



2-chizma

Bu yerda AB katet – to‘g‘ri chiziq kesmasidan, va CB gipotenuza bilan AC katet esa – markazlari O_1, O va evklidiy raduslari mos ravishda R, r dan iborat aylanalar yoylari bo‘lsin deb faraz qilishimiz mumkin.

Chizmada $\angle B = \varphi_3; \angle C = \varphi_1 - \varphi_2$, bunda

$\varphi_3 = \angle BO_1O; \varphi_1 = \angle xOC; \varphi_2 = \angle CO_1O; \varphi_1 - \varphi_2 = \angle OCO_1$. G‘ayrievklid ABq*c*, ACq*b*, BCq*a* kesmalar uchun ushbo‘larni yozaolamiz:

$$c = k \cdot \ln \frac{OB}{r} \tag{1}$$

$$b = k \cdot \ln \frac{tg\frac{\pi}{4}}{tg\frac{\varphi_1}{2}} = -k \cdot \ln tg\frac{\varphi_1}{2} \tag{2}$$

$$a = k \cdot \ln \frac{tg\frac{\varphi_2}{2}}{tg\frac{\varphi_2}{2}}. \tag{3}$$

a,*b*,*c* orasidagi bog‘lanishni, yani *b*,*c* katetlar bilan *a* gipotenuza orasidagi bog‘lanishni (Pifagorning g‘ayrievklid teoremasini) topaylik. (2) dan:

$$tg\frac{\varphi_1}{2} = e^{-\frac{b}{k}}; \quad \frac{1}{tg\frac{\varphi_1}{2}} = e^{\frac{b}{k}}; \quad \frac{e^{\frac{b}{k}} + e^{-\frac{b}{k}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{tg\frac{\varphi_1}{2}} + tg\frac{\varphi_1}{2}\right) = \frac{1 + tg^2\frac{\varphi_1}{2}}{2tg\frac{\varphi_1}{2}} = \frac{1}{\sin\varphi_1}.$$

Ko‘rsatkichli $e^{\frac{b}{k}}$ va $e^{-\frac{b}{k}}$ funksiyalardan tuzilgan ushbu $\frac{e^{\frac{b}{k}}+e^{-\frac{b}{k}}}{2}$ funksiya, $\frac{b}{k}$ argumetning giperbolik kocinuci deyiladi va shunday belgilanadi:

$$\frac{e^{\frac{b}{k}}+e^{-\frac{b}{k}}}{2}=ch\frac{b}{k}.$$

chap tomondagi kasrning suratidagi ko‘rsatkichli funksiyalarni qatorga yoysak

$$ch\frac{b}{k}=1+\frac{\left(\frac{b}{k}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{b}{k}\right)^4}{4!}+\frac{\left(\frac{b}{k}\right)^6}{6!}+..... \qquad (4)$$

b katet uchun shuni hosil qilamiz:

$$ch\frac{b}{k}=\frac{1}{\sin\varphi_1} \qquad (2('$$

Endi c katetga o‘taylik. (1) dan:

$$\frac{OB}{r}=e^{\frac{c}{k}};\quad \frac{r}{OB}=e^{-\frac{c}{k}};\quad \frac{e^{\frac{c}{k}}+e^{-\frac{c}{k}}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{OB}{r}+\frac{r}{OB}\right).$$

yoki

$$ch\frac{c}{k}=\frac{OB^2+r^2}{2\cdot OB\cdot r}.$$

Ammo xaritadagi O_1OB uchburchakdan Pifagorning evklidiy teoremasiga ko‘ra:

$$OB^2=R^2-OO_1^2=R^2-\left[R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

bu tenglikda OO_1^2, O_1CO uchburchakdan kocihuclarning evkilid teoremasiga asoslanib xisobilangan (2-chizma).

$OB^2=r^2+2Rr\cos(\varphi_1-\varphi_2);$ bundan $OB^2+r^2=2Rr\cos(\varphi_1-\varphi_2).$ shunday qilib,

$$ch\frac{c}{k}=\frac{2Rr\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{2\cdot OB\cdot r}=\frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{\frac{(OB)}{R}},$$

Ammo O_1OB uchburchakdan: $\frac{OB}{R}=\sin\varphi_2$, shu sababli, g‘ayrievklid uzunligi c ga teng katet uchun:

$$ch\frac{c}{k}=\frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{\sin\varphi_2} \qquad (1('$$

Nihoyat, BC gipotenuzaning g‘ayrievklid uzunligi a ning ifodasini shaklan o‘zgartiradi: (3) dan birin – ketin quydagilarni hosil qilamiz:

$$\frac{tg\frac{\varphi_3}{2}}{tg\frac{\varphi_2}{2}}=e^{\frac{a}{k}}; \qquad \frac{tg\frac{\varphi_2}{2}}{tg\frac{\varphi_3}{2}}=e^{-\frac{a}{k}}; \qquad \frac{e^{\frac{a}{k}}+e^{-\frac{a}{k}}}{2}=\frac{tg^2\frac{\varphi_2}{2}+tg^2\frac{\varphi_3}{2}}{2tg\frac{\varphi_2}{2}\cdot g\frac{\varphi_3}{2}}$$

yoki

$$ch\frac{a}{k}=\frac{\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi_2}{2}}-1\right)+\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi_2}{2}}-1\right)}{2tg\frac{\varphi_2}{2}\cdot tg\frac{\varphi_2}{2}}=\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi_2}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi_3}{2}}-2}{2tg\frac{\varphi_2}{2}\cdot tg\frac{\varphi_3}{2}}.$$

O‘ng tomonning surat va mahrajini $\cos^2\frac{\varphi_2}{2}\cos^2\frac{\varphi_3}{2}$ ko‘paytmaga ko‘paytiramiz:

$$ch\frac{a}{k}=2\cdot\frac{\cos^2\frac{\varphi_3}{2}+\cos^2\frac{\varphi_2}{2}-2\cos^2\frac{\varphi_2}{2}\cdot\cos^2\frac{\varphi_3}{2}}{\sin\varphi_2\sin\varphi_3}$$

yoki

$$ch\frac{a}{k}=2\cdot\frac{\frac{1+\cos\varphi_3}{2}+\frac{1+\cos\varphi_2}{2}-2\frac{1+\cos\varphi_2}{2}\cdot\frac{1+\cos\varphi_3}{2}}{\sin\varphi_2\sin\varphi_3}$$

bu formulali sodalashtirsak, gipotenuza uchun formula topamiz:

$$ch\frac{a}{k}=\frac{1-\cos\varphi_2\cdot\cos\varphi_3}{\sin\varphi_2\cdot\sin\varphi_3} \qquad (3')$$

To‘g‘ri burchakli BAC uchburchak tomonlarning g‘ayrievklid *a,b,c* uzunliklarini xaritadagi $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ burchaklarning funksiyalari orqali ifodaladik. Endi bu burchaklar orasidagi bog‘lanishni va bu bo‘g‘lanishga asoslanib, g‘ayrievklid a,b,c uzunliklar orasidagi bog‘lanishni topamiz. Sinuslarning evklidiy teoremasiga asosan O_1CO uchburchakdan (2-chizma)

$$\frac{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\sin\varphi_1}=\frac{O_1O}{O_1C}=\frac{O_1O}{R}.$$

Ammo O_1OB uchburchakdan: $\frac{O_1O}{R} = \cos\varphi_3$, demak:

$$\cos\varphi_3 = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin\varphi_1}. \tag{5}$$

$\cos\varphi_3$ ning bu ifodasini (3′) ga qo‘yamiz:

$$ch\frac{a}{k} = \frac{1 - \cos\varphi_2 \dfrac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin\varphi_1}}{\sin\varphi_3 \cdot \sin\varphi_2} = \frac{\sin\varphi_1 - \cos\varphi_2 \cdot (\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)}{\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3}$$

$$ch\frac{a}{k} = \frac{\sin\varphi_1 - \sin\varphi_1 \cos^2\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin\varphi_2}{\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3}$$

$$ch\frac{a}{k} = \frac{\sin\varphi_1 \sin^2\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin\varphi_2}{\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3}$$

kasrning surat va maxrajini $\sin\varphi_2$ ga bo‘lsak:

$$ch\frac{a}{k} = \frac{1}{\sin\varphi_1} \cdot \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin\varphi_3}.$$

Endi (2′) va (1′) bog‘lanishlarni e’tiborga olsak, g‘ayrievklid Pifagor teoremasini hosil qilamiz:

$$ch\frac{a}{k} = ch\frac{b}{k} \cdot ch\frac{c}{k}. \tag{6}$$

ko‘pincha kq1 faraz etib, belgili masshtab birligi tanlab olinadi: bu holda teorema shunday o‘qiladi: Gipotenuzaning giperbolik kosinusi, katetlar giperbolik konuslarining ko‘paytmasiga tengdir. Evkilid Pifagor teoremasining g‘ayrievklid Pifagor teoremasi uchun $k \to \infty$dagi hususiy hol ekanini bu yerda ko‘rsataylik.

Gipotenuzaning kosinuslarni (4) formula bo‘yicha qatorlarga yoyib chiqamiz; u holda (6) formula ushbu shaklni oladi:

$$1 + \frac{\left(\frac{a}{k}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{a}{k}\right)^4}{4!} + \ldots\ldots = \left(1 + \frac{\left(\frac{b}{k}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{b}{k}\right)^4}{4!} + \ldots\ldots\right)\left(1 + \frac{\left(\frac{c}{k}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{c}{k}\right)^4}{4!} + \ldots\ldots\right).$$

Qavslarni ochamiz va ikki tomonni ham $2k^2$ ga ko‘paytiramiz:

$$a^2+\frac{a^4}{12k^2}+......=b^2+c^2+\frac{b^4+c^4+2b^2c^2}{12k^2}+..... \quad (7)$$

Bu tenglikda nuqtalar qo‘yib yozilib chiqilmagan barcha kasrlarning mahrajlarida k^2 ning tegishli darajalari bordir. $k\to\infty$ da limitga o‘tsak, Pifagorning odatdagi teoremasini hosil qilamiz:

$$a^2=b^2+c^2.$$

Bu xulosaga boshqa muhokamalar yurgizib kelish ham mumkin. O‘zgarmas k ning qiymati muayan bir songa teng, deb yuqorida yozilgan (7) tenglikda uchburchak tomonlari kamayaboradi desak va u tenglikda to‘rtinchi va undan yuqori darajali hadlarni tashlasak, ushbu xulosaga kelamiz: Lobachevskiy tekisligida cheksiz kichik uchburchak uchun Pifagor teoremasini qo‘llash mumkin (yuqori darajali cheksiz kichik miqdorlar tashlansa).

Pifagor teoremasining ($a^2=b^2+c^2.$) Evkilid postulatiga ekvivalatliginitushunish endi oson.

(5) formulada φ_3 o‘rniga $\angle B$ va $\varphi_1-\varphi_2$ o‘rniga $\angle C$ qo‘yib, (2′) formulaga ko‘ra $\frac{1}{\sin\varphi_1}$ o‘rniga $ch\frac{b}{k}$ ni qo‘ysak, yangi tenglik kelib chiqadi:

$$\cos B=ch\frac{b}{k}\sin C$$

shunga o‘xshash

$$\cos C=ch\frac{c}{k}\sin B$$

Lobachevskiy tekisligidagi to‘g‘riburchakli uchburchakning ikki burchagi bilan kateti orasidagi bog‘lanish shuni ko‘rsatadiki, bu uchburchakning o‘tkir ikki burchagi $\left(B+C<\frac{\pi}{2}\right)$ berilsa, ular uchburchakning boshqa hamma elementlarini

aniqlaydi, bu esa Lobachevskiy geometriyasida o‘xshash uchburchaklar va figuralarning yo‘qligini bildiradi; biz yuqorida Vallis teoremasini isbotlaganimizda bu fakt bilan tanishgan edik. O‘xshash figuralarning yo‘qligi Lobachevskiy geometriyasi bilan ish ko‘rayotganimizni va Puankare modelida uning Lobachevskiy poctulati kuchga egaligini ko‘rsatadi. Endi to‘g‘riburchakli uchburchakning a gipotenuzasi bilan B o‘tkir burchagi ma’lum bo‘lsa, Puankare modelida uning hamma elementlari to‘la aniqlanishini ko‘rsataylik. Yuqoridagidek ish ko‘rib, birin-ketin quydagilarni chiqaramiz:

$$tg\frac{\varphi_1}{2}=e^{-\frac{b}{k}};\qquad \frac{1}{tg\frac{\varphi_1}{2}}=e^{\frac{b}{k}};\qquad \frac{e^{\frac{b}{k}}-e^{-\frac{b}{k}}}{2}=\frac{1-tg^2\frac{\varphi_1}{2}}{2tg\frac{\varphi_1}{2}},$$

yoki

$$sh\frac{b}{k}=\frac{\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1} \tag{8}$$

Ko‘rsatkichli $e^{\frac{b}{k}}-e^{-\frac{b}{k}}$ funksiyalardan tuzilgan $\frac{e^{\frac{b}{k}}-e^{-\frac{b}{k}}}{2}$ funksiya giperbolik sinus deb ataladi:

$$\frac{e^{\frac{b}{k}}-e^{-\frac{b}{k}}}{2}=sh\frac{b}{k}$$

Shu singari (3) dan:

$$e^{\frac{a}{k}}=\frac{tg\frac{\varphi_3}{2}}{tg\frac{\varphi_2}{2}};e^{-\frac{a}{k}}=\frac{tg\frac{\varphi_2}{2}}{tg\frac{\varphi_3}{2}};\frac{e^{\frac{a}{k}}-e^{-\frac{a}{k}}}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{tg\frac{\varphi_3}{2}}{tg\frac{\varphi_2}{2}}-\frac{tg\frac{\varphi_2}{2}}{tg\frac{\varphi_3}{2}}\right].$$

Yuqoridagidek ish ko‘rib, bu tenglikni soddalashtirsak, shuni hosil qilamiz:

$$sh\frac{a}{k}=\frac{\cos\varphi_2-\cos\varphi_3}{\sin\varphi_2\sin\varphi_3}.$$

Endi (5) ni e’tiborga olaylik:

$$sh\frac{a}{k}=\frac{\cos\varphi_2-\frac{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\sin\varphi_1}}{\sin\varphi_2\sin\varphi_3}=\frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3},$$

$$sh\frac{a}{k}=\frac{\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1\sin\varphi_3}=\frac{\cos\varphi_2}{\sin\varphi_1}*\frac{1}{\sin\varphi_3}$$

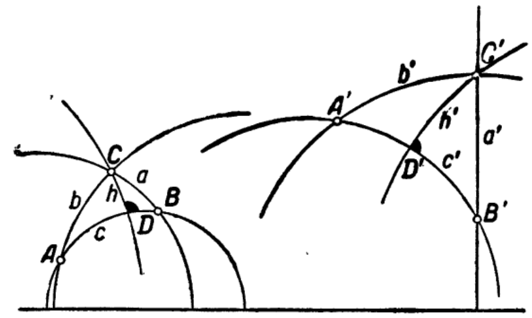
Lekin $\varphi_3=\angle B$ va (8) ga asosan $\frac{\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1}=sh\frac{b}{k}$ demak: $sh\frac{a}{k}=sh\frac{b}{k}\cdot\frac{1}{\sin B}$ Natijada:

$$sh\frac{b}{k}=sh\frac{a}{k}\sin B.$$

Bu bog‘lanish, gipotenuza a bilan o‘tkir burchak B malum bo‘lganda, B burchak qarshisidagi b katetni aniqlashga imkoniyat beradi. Bundan keyin (1) formuladan ikkinchi katetni topish mumkin: (1) formulani yana bir bor qo‘llasak ikkinchi o‘tkir burchak C ni ham topamiz. Endi beshinchi (III_5) aksiomani sinab ko‘rish uchun hamma tayorgarlik ko‘rildi. Agar ABC va A’B’C’ dan iborat ikki uchburchakda ushbu kongruentliklar yuz bersa: AB=A′B′: AC=A′C′, ∠BAC=∠B′A′C′, u holda quyidagi kongruentlik ham bajariladi:

$$\angle ABC=\angle A'B'C'.$$

Haqiqatdan, Puankare modelidagi ABC va A′B′C′ (3-chizma) uchburchaklar uchun AB=A′B′; AC=A′C′; ∠BAC=∠B′A′C′ bo‘lsin. Kesmalar va



3-chizma

burchaklarning mos ravishda “kongruentligi” tushunchasiga yuqorida tegishli ma’no bergan edik, ya’ni

$$P_{AB}=P_{A'B'};P_{AC}=P_{A'C'},$$

bunda

$$P_{AB}=c,P_{A'B'}=c';P_{AC}=b;P_{A'C'}=b',$$

tengliklarni ana shu ma’noda tushunish kerak va ∠BACq∠B′A′C′ tenglikni esa odatdagi ma’noda tushunamiz. Uchburchaklarning CD, C′D′ baladliklarni o‘tkazib, tog‘riburchakli ACD va A′C′D′ uchburchaklar uchun yozaolamiz:

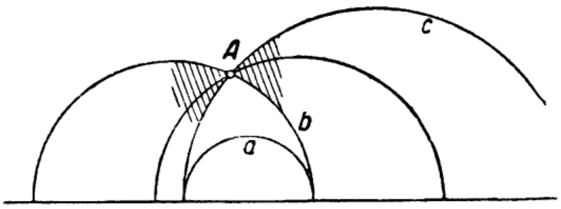
$$sh\frac{h}{k}=sh\frac{b}{k}\sin A:va,sh\frac{h'}{k}=sh\frac{b'}{k}\sin A,$$

ammo bqb′ ($P_{AC}=P_{A'C'},$) va ∠A=∠Ah nuhcu gninuhs ,′qh′. Bu esa $P_{CD}=P_{C'D'}$ ni, ya’ni CD tomonning C′D′ ga “konguretligini” bildiradi. ADC va A′D′C′ uchburchaklar uchun (1) formulaga asosan yozamiz:

$$ch\frac{P_{AD}}{k}=\frac{ch\frac{b}{k}}{ch\frac{h}{k}};ch\frac{P_{A'D'}}{k}=\frac{ch\frac{b}{k}}{ch\frac{h}{k}},$$

bu tengliklarning o‘ng tomonlari teng, demak $ch\frac{P_{AD}}{k}=ch\frac{P_{A'D'}}{k}$. bundan $P_{AD}=P_{A'D'}, yoki; AD=A'D'$. So‘ngra, “uzunliklar”ning additivlik xossasiga binoan: $P_{AB}=P_{AD}+P_{DB}, va; P_{A'B'}=P_{A'D'}+P_{D'B'}, ammo; P_{AB}=P_{A'B'}, P_{AD}=P_{A'D'}$ shuning uchun $P_{DB}=P_{D'B'}$, BU ESA Db ning D’B’ ga konguretligini (DB=D′B′)ko‘rsatadi. Shunday qilib, to‘g‘riburchakli CDB, C′D′B′ uchburchaklarda katetlar uzunliklari tengdir; bundan (1) formulaga asosan CB, C′B′ gipotenuzalarning *a*, *a*′ uzunliklarning tengligi kelib chiqadi, demak kongurentlik CB=C′B′ yuz beradi. Shuning bilan birga, (11) formulaga asosan CDB, C′D′B′ uchburchaklar uchun quydagilar kelib chiqadi: $sh\frac{h}{k}=sh\frac{a}{k}\sin B; sh\frac{h'}{k}=sh\frac{a'}{k}\sin B'$; ammo h=h′, *aqa*′, shuning uchun bo‘lardan BqB′ yoki ushbu konguretlik hosil bo‘ladi: ∠ABC=∠A′B′C′.

Beshinchi aksiomaning bajarilishi tekshirildi. Biz yo‘lakay Lobachevskiy tekisligidagi to‘g‘ri burchakli uchburchak trigonometriyasini vujudga keltirdik va uning vositasi bilan Puankare modelida Lobachevskiy postulatining amalga oshishini isbotladik. Oxirgi faktni bevosita ham isbotlash mumkin (4-chizma).

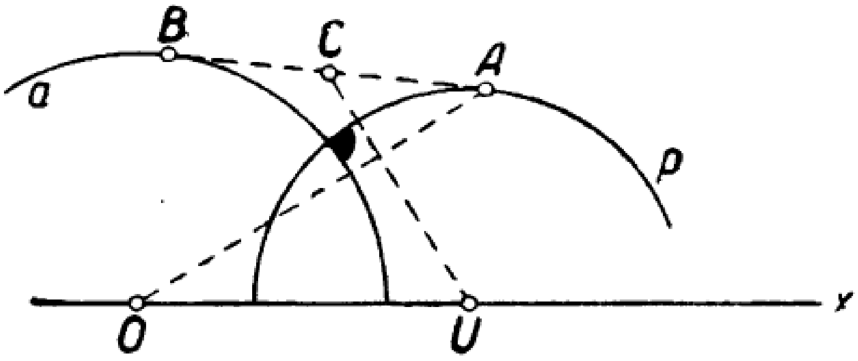


4-chizma

b va c to‘g‘ri chiziqlar a to‘g‘ri chiziqa Lobachevskiy ma’nosida paralleldir. Shitixlangan burchaklar ichiga kiruvchi barcha to‘g‘ri chiziqlar a to‘g‘ri chiziqqa o‘taparaslidir. Bu yerda Lobachevskiy aksiomasi (IV) bajariladi: IV a to‘g‘ri chiziq va A nuqta bilan aniqlanuvchi tekislikda, A nuqtadan o‘tib, a to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydigan to‘g‘ri chiziqlar bittadan ortiqdir. Beshinchi gruppa aksiomalari ham o‘z kuchini saqlaydi, chunki bu yerda uzluksizlikni odatdagi evkilid manoda tushinish mumkin; argumed aksiomasi yuqorida bevosita tekshirilib ko‘rilgan edi. Shuning bilan Puankare modelida Lobachevskiy pilanametriyasining aksiomalarini sinashni tamomlaymiz. Endi batafsil bo‘lsada, Lobachevskiy pilanmetriyasining bazi teoremalariga to‘htalib o‘tamiz. Avvalo parallellar aksiomasini kiritishgacha vujudga kelgan, yani ham Evklid geometriyasida, ham Lobachevskiy geometriyasida kuchga ega bo‘lgan eng soda teoremalardan boshlaymiz.

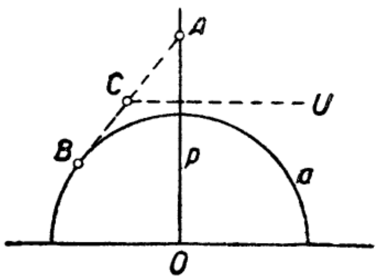
1. A nuqtadan ato‘g‘ri chiziqqa faqat bitta p perpendikulyar o‘tkazish mumkin. Agar biz modelga, modelda yaratilgan geometriya nuqta nazaridan emas, balki oddiy ko‘zlar bilan qarasak, quyidagilarni ko‘ramiz:

1′. Yuqori yarim tekislikda $(y > 0)$ yotgan A nuqtadan markazi Ox to‘g‘ri chiziqda, o‘zi shu yarimtekislikda joylashgan yarim aylanaga yoki Ox ga perpendikulyar bo‘lgan yuqori nurga perpendikulyar qilib markazi Ox da bo‘lgan faqat bitta yarim aylana (yoki Ox ga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq) o‘tkazish mumkin. Evklid geometriyasining yangi teoremasi hosil qilinadi: uning to‘g‘riligi 1-teoremani isbotlashda ishlatilgan barcha aksiomalarning bu modelda kuchga egaligidan kelib chiqadi. 1-teoremani garchi odardagicha isbotlash mumkin bo‘lsada, u ayrim isbotni talab etmaydi. Xaritada yasash usulini ko‘rsatib o‘taylik. Umumiy xolni ko‘zda tutib aaylana bilan A nuqtaning radikal o‘qini yasaymiz bu radikal o‘q A nuqtadan o‘tib, a aylana bilan ortagonal holda kesishgan aylanalar markazining geometric o‘rnidan iboratdir. Bu radikal o‘qning Ox bilan kesishgan nuqtasi izlangan aylananing (U) markazini beradi. Radikal o‘qni quyidagicha yasaymiz: A nuqtadan a aylanaga AB urinma o‘tkazib, uning (C) tuqtasidan markazlar chizig‘i AO ga CU perpendikulyar o‘tkazamiz. Markazi U va radiusi UA ga teng aylana izlangan aylanadir (5-chizma).

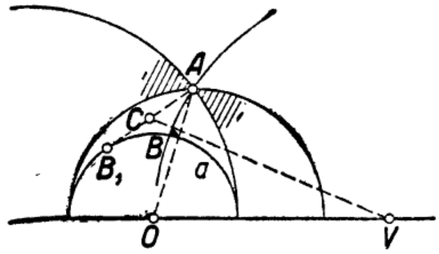


5-chizma

6-chizmada xususiy hol qaralgan. Qolgan hollarni mashq tariqasida tekshirib chichish foydali ish bo‘ladi. Lobachevskiy aksiomasining amalga oshishini ko‘rsatuvchi 7-chizmada AB to‘g‘ri chiziq *a* ga perpendikulyardir.



6-chizma



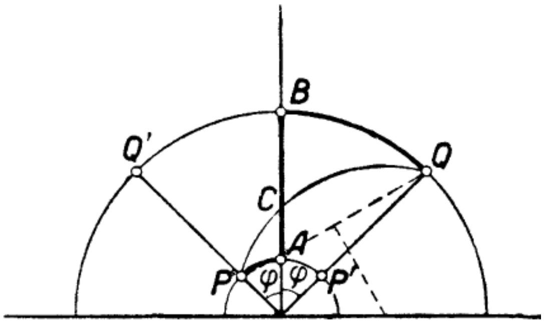
7-chizma

2. AB kesmani teng ikkiga bo‘lish uchun quydagicha ish ko‘rish mumkin: kesmaning chetlarida unga AP va BQ perpendikulyarlar o‘tkazib, ularning ustida yotuvchi va AB dan turli tarifda yotuvchi PQ nuqtalarni shunday tanlab olish kerakki, ABqBQ bo‘lsin. PQ to‘g‘ri chiziq AB bilan izlangan(C) nuqta kesishadi. 8-chizmada yasash maxsus hol uchun bajarilgan: AB kesma xaritada Ox ga perpendikulyar nurda yotadi. AP ning BQ ga koguretligini (AP=BQ) isbotlash uchun birinchidan, BQ=AP′ ni etiborga olamiz, chunki

$$\delta BQ = k \cdot \ln \frac{tg \dfrac{\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right)}{2}}{tg \dfrac{\pi}{4}} = k \cdot \ln tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right),$$

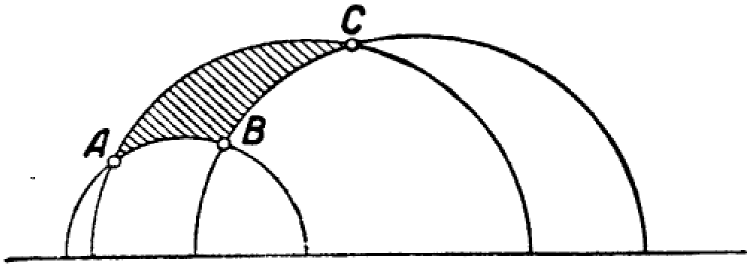
bu esa $\delta_{AP'}$ ga tengdir. So‘ngra simmetriyaga asosan, AP=P′A; buni uzunliklarni hisoblab ham isbotlash mumkin. A nuqtani radusi nolga teng aylana deb qarasak, bu masala ikki aylana uchun radikal o‘qni yasash masalasiga keltiriladi;

Endi Lobachevskiy geometriyasining o‘ziga xos bo‘lgan bazi teoremalariga o‘taylik.



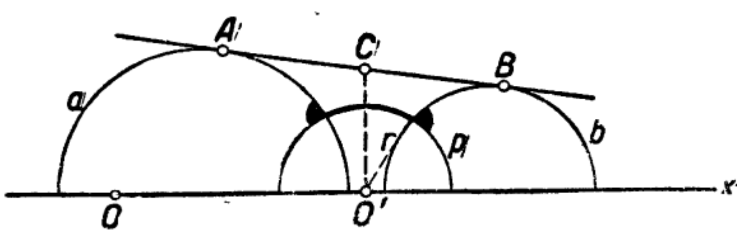
8-chizma.

3. Uchburchak burchaklarining yeg‘indisi 2d dan kichikdir. Bu faqat 9-chizmada tushuntirilgan va bu yerda markazlari bir to‘g‘ri chiziqda yotgan aylanalarga oid yangi teorema hosil bo‘ladi.



9-chizma.

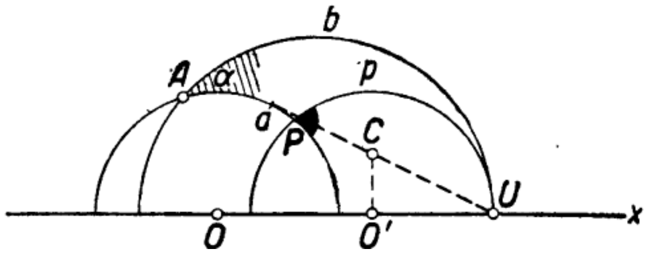
4. O‘taparallel ikki a,b tog‘ri chiziqning faqat bitta umumiy perpendikulyari mavjuddir. Bu teorema, umumiy nuqtalari bo‘lmagan malum ikki aylana bilan ortaganal holda kesuvchi va markazi bu aylanalar markazini tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziqda yotuvchi faqat, bitta aylananing bog‘langanini bildiradi (10-chizma).



10-chizma.

Yasash ishini shunday olib boramiz: a,b aylanalarga umumiy AB urunma o‘tkazib, uning (C) o‘rtasidan Ox ga perpendikulyar tushuramiz, yani berilgan ikki aylananing radikal o‘qini yasaymiz O′ ni markaz qilib olib, radusi r,O′ dan berilgan ikki aylanaga o‘tkazilgan urunma uzunligiga teng aylana chizamiz. Ana shu aylana, olingan ikki o‘ta parallel to‘g‘ri chiziqlarga o‘tkazilgan umumiy perpendikulyarning xaritadagi tasviridir.

5. Berilgan o‘tkir burchak qanday bo‘lmasin, harvaqt shunday to‘g‘ri chiziq topiladiki, u shu burchakning bir tomoniga perpendikulyar va ikkinchi tomoniga paralleldir. Berilgan o‘tkir burchak a va uning tomonlari a, b to‘g‘ri chiziqlardan iborat bo‘lsin. Xaritada yasashni shunday bajaramiz: a aylana bilan U nuqtaning radikal o‘qini yasab, uning o‘rtasidan Ox ga perpendikulyar tushuramiz va uning asosi O′ nuqtani markaz qilib O′U radus bilan p aylana o‘tkazamiz (11-chizma).



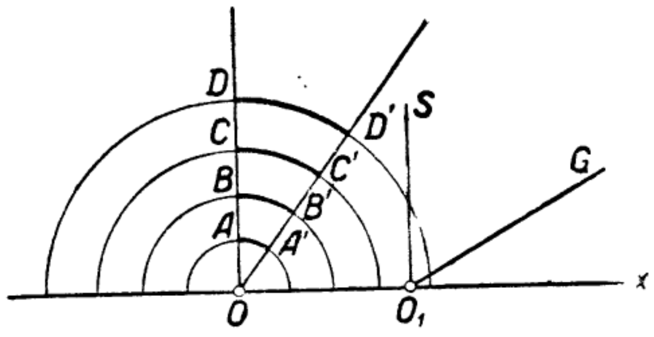
11-chizma.

6. Ekvidistantaning hech qaysi uchta nuqtasi bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydi (12-chizma). Asosiy OABCD….dan iborat ekvidistanta xaritada OA′B′C′D′… dan iborat to‘g‘ri chiziq bilan tasvirlanadi, chunki to‘g‘ri chiziqli ushbu kesmalar o‘zaro kongruentdir:

AA′=BB′=CC′=DD′=...

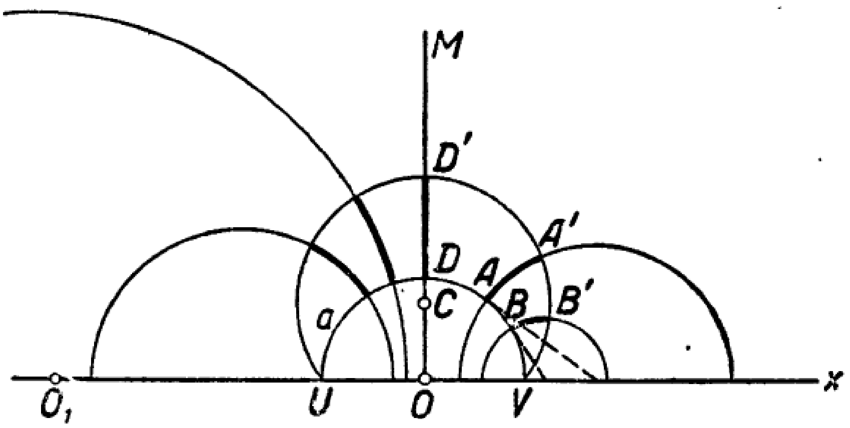
Umuman, Ox ga og‘ma barcha O_1G to‘g‘ri chiziqlar ekvidistantalarni tasvirlayda, ular uchun O_1S to‘g‘I chiziqlar asoslari rolini o‘ynaydi. A′, B′, C′ dan iborat hechqanday uchta nuqta, markazi Ox da yotgan bitta aylanada yoki Ox ga perpendikulyar tog‘ri chiziqda yotadi.

7. Evvidistanta o‘z asosiga o‘tkazilgan (AA′, BB′, CC.. ,′.) perpendikulyarlar bilan ortagonal holda kesishadi (12-chizma).



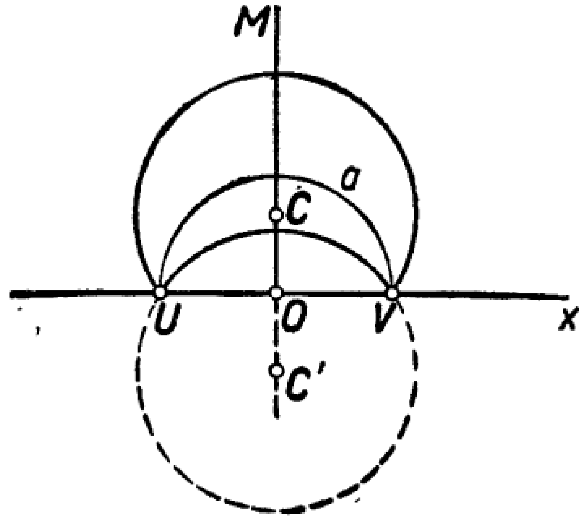
12-chizma.

Bu teoremadan istalgan asosli ekvidistantani yasash uchun foydalanaylik. a aylana bilan ortagonal holda kesishuvvchi aylanalar dastasini yasaymiz. Bu aylananing markazlari Ox to‘g‘ri chiziqda yotadi (13-chizma). Bu dastaning hamma aylanalari bitta umumiy OM radikal o‘qqa egadir; bu OM to‘g‘ri chiziqning o‘zini ham dastaning aylanasi deb qarash mumkin – uning radusi cheksiz kattadir. Asosi a dan iborat ekvidistantani yasash uchun, dasta aylananing hammasi bilan ortagonal holda kesuvch chiziqni toppish kerak.



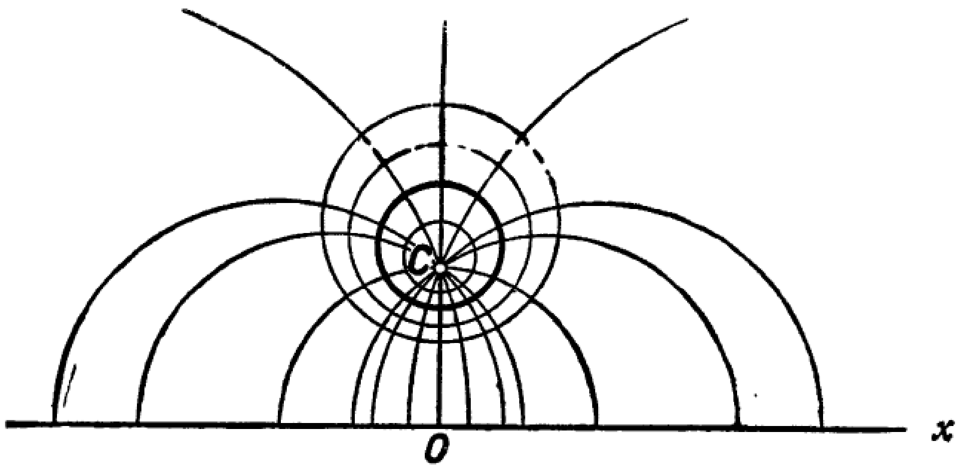
13-chizma

Aylanalar dastalari va bog‘lamlari nazariyasidan malumki, bu chiziq, dastaning limit nuqtalari deb atalgan U, V nuqtalardan o‘tib, markazi dastaning radikal o‘qida yotuvchi aylanadan iboratdir. OM radikal o‘qning istalgan C yoki C′ nuqtasidan RqCUqCV yoki RqC′UqC′V radius bilan aylananing yuqoridagi (ostidagi) yonini chizamiz. Asosiy a dan iborat ekvidistantaning xaritadagi tasvirini hosil qilamiz. Ekvidistantaning ikki qismi *a* asosda turli tarafda joylashadi. Shunday qilib, Ox to‘g‘ri chiziq bilan to‘g‘ri burchak ostida kesishmaydigan aylanalar va to‘g‘ri chiziqlar, Puankare xaritasida ekvidistantalarni tasvirlaydi. AA′, BB′, DD′, … kesmalar kongruentdir (13-chizma). Xaritada aylanalarga nimaning mos kelishini ko‘raylik, yani ularning obrazlarining nimadan iboratligini ayon qilaylik. Bu maqsadda faqat aylanaga oid bo‘lgan xossadan foydalanaylik.



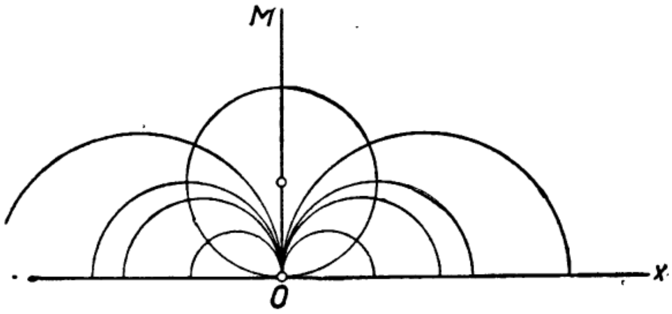
14-chizma.

8. Aylana o‘zining markazlaridan o‘tuvchi hamma to‘g‘ri chiziqlar bilan ortagonal holda kesishadi. Xaritada bu xossa quyidagich ifodalanadi: aylananing obrazi shunday chiziqdirki, u markazlari Ox da yotuvchi va C nuqtadan o‘tuvchi yalanalar dastasiga qarashli aylanalar bilan ortagonal holda kesishadi. Ma’lumki, bunday chiziq, olingan dasta yalanalarga ortagonal dastaning aylanasidan iboratdir. 15-chizmada markazi C dan iborat konsetrik aylanalar tasvirlangan.



15-chizma.

Shunday qilib, ustki yarim tekislikda joylashib, Ox bilan kesishmaydigan aylanalar, Lobachevskiy aylanalarini tasvirlaydi.



16-chizma

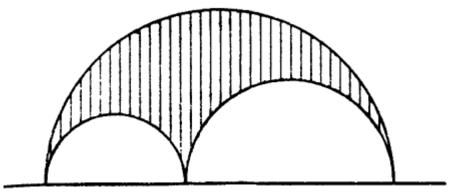
Aylanani yasashni bilish munosabati bilan birga, congruent kesmalarni istalgan nuqta “kogruent kesmalarni” istalgan nuqtadan ixtiyoriy yo‘nalishda ajratish mumkinligini hosil qilamiz. Demak, “markaz”ning obrazi markaz obrazidan (tasviridan) iborat emas.

Xulosa qilib aytganda bir yo‘nalishdagi hamma parallellarni (lobachevskiy ma’nosidagi parallellar dastasini) ortogonal ravishda kesuvchi chiziq Lobachevskiy tomonidan limit chiziq deb atalgan.

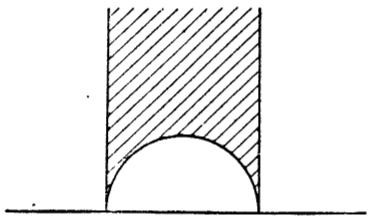
Limit chiziq 16-chizmada OX o‘qning O nuqtasiga urinuvchi aylana ko‘rinishda tasvirlangan.

Agar “markaz”ning OX to‘g‘ri chiziqqa siljishini “aylanalar”ning tasvirini kuzatib borilsa, u holda limit chiziq deb atalishi (ma’nosi) tushunarli bo‘ladi, ya’ni cheksizlikka “siljitib borishda” OX to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar qilib tasvirlanuvchi “to‘g‘ri chiziqlar” ham parallellar dastasiga tegishlidir, bunda ular o‘zaro nolga teng bo‘lgan burchaklarni takshil qiladi.

17 va 18 chizmalar “burchaklari nol bo‘lgan uchburchaklarni” tasvirlaydi.



17-chizma

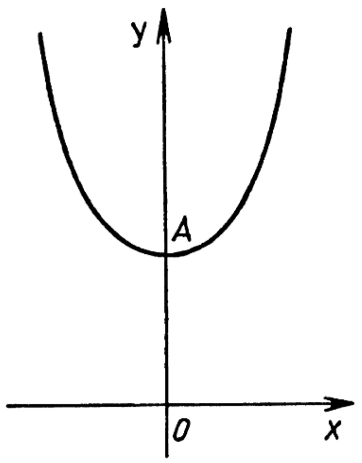


18-chizma

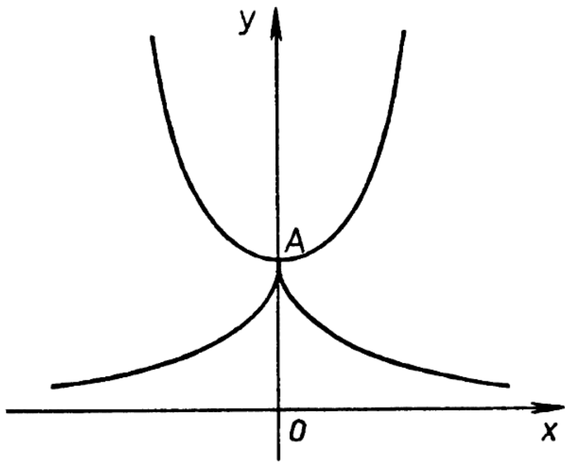
2.8-§. Lobachevskiy geometriyasi bajariladigan sirtlar.

Lobachevskiy geometriyasi bajariladigan sirtlardan birini quyidagicha hosil qilish mumkin.

Zanjir chiziq deb ataluvchi egri chiziqni ko‘rib o‘tamiz (1-chizma)



1-chizma



2-chizma

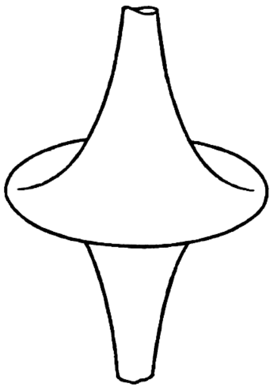
Agar biz og‘ir zanjirni ikki uchidan ikkita nuqtaga osib qo‘ysak, u holda u shu shaklni oladi.

Endi zanjirni A nuqta kesamiz. U holda uning kesilgan uchlari **traktrissa** deb ataluvchi biror egri chiziqni chizadi (2-chizma).

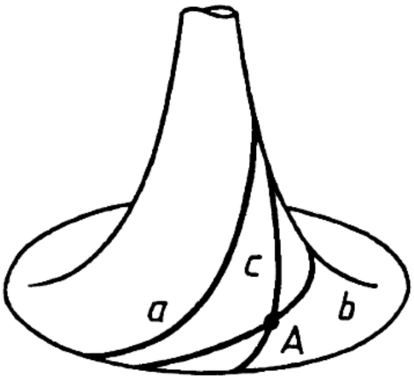
Endi buni matematik nuqtai nazardan qaraylik. Shaklda OA urinma o‘zgarmas miqdor (abstsissa o‘qining O nuqtasidan A nuqtaga bo‘lgan masofa). Egri chiziqning tarmoqlari chegaralanmagan holatda abstsissa o‘qiga yaqinlashadi. Hosil bo‘lgan traktrissa chizig‘ini abstsissa o‘qi atrofida aylantirib ikkita murakkab birlashtirilgan truba (Quvur) ko‘rinishidagi sirtni hosil qilamiz (3-chizma). Bu sirtlar psevdosfera deyiladi. Qaralayotgan sirtdagi chiziqni shartli ravishda to‘g‘ri chiziq deb olinadi va u **“geodezik”** chiziq deyiladi. Bu sirtdagi A va B nuqtalar orasidagi eng qisqa masofani “to‘g‘ri chiziq” deb qaraladi.

Psevdosferada Lobachevskiy tekisligining bir qismi deb interpretatsiya qilinadi.

Psevdosferaning A nuqtasidan o‘tuvchi *b* va *s* “to‘g‘ri chiziqlar” *a* “to‘g‘ri chiziq”ga parallel (4-chizma).

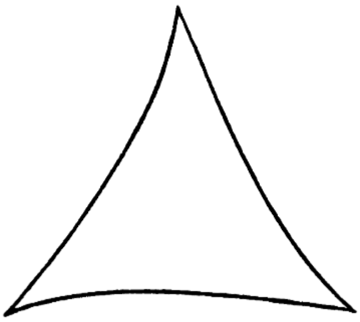


3-chizma



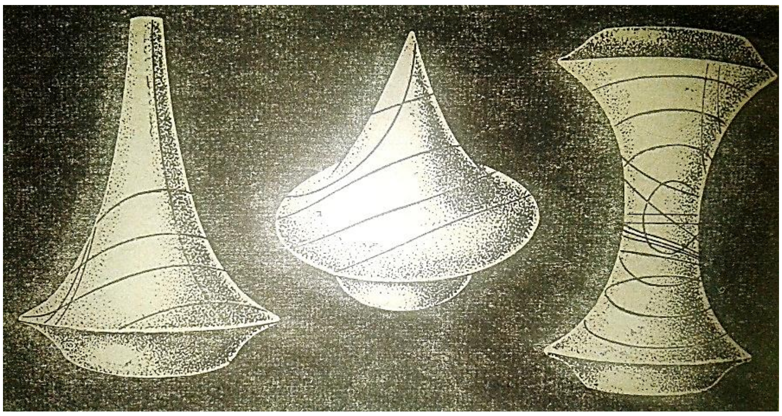
4-chizma

Qaralayotgan psevdosfera o‘zgarmas manfiy egrilikka ega bo‘lgan sirt deyiladi. Agar egri chiziqli uchburchakda burchaklar yig‘indisi 180^0dan kichik bo‘lsa, u holda biz sirt manfiy egrilikka ega deb yuritamiz (5-chizma)



5-chizma

Agar Beltrami psevdosferasini aylanma sirtda bukilsa (izognut), u holda uch xil tipdagi shunday psevdosferani hosil qilish mumkin (6-chizma). Buni Minding ko‘rsatgan.



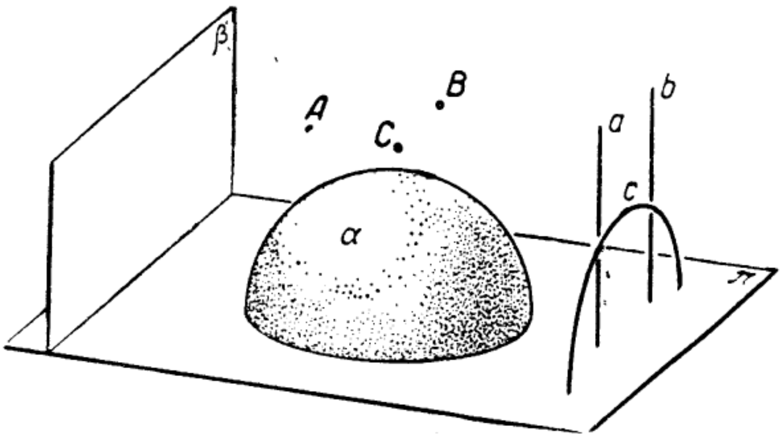
6-chizma

2.9-§. Fazoda Lobachevskiy geometriyasining Puankare interpretatsiyasi

Avvalo model tuzamiz. Odatdagi Evklid fazosini va tekislikni ko‘rib o‘tamiz. Qaralayotgan tekislikni asosiy tekislik deb ataymiz. Tekislikning yuqorisida yotuvchi hamma Evklid nuqtalarni Lobachevskiy “nuqta”lari deb ataymiz.

Tekislik asosiy tekislikka perpendikulyar bo‘lib markazi asosiy tekislikda bo‘lgan yarim aylanalarni “to‘g‘ri chiziqlar” deb ataymiz. Asosiy tekislikka perpendikulyar bo‘lgan oddiy to‘g‘ri chiziqlar ham “to‘g‘ri chiziqlar” bo‘lib xizmat qiladi.

Markazi asosiy tekislikda bo‘lgan yarimsferalar “tekisliklar” bo‘lgan deb olamiz hamda asosiy tekislikka perpendikulyar bo‘lgan tekisliklar “tekisliklar” deb olinadi (1-chizma).



1-chizma

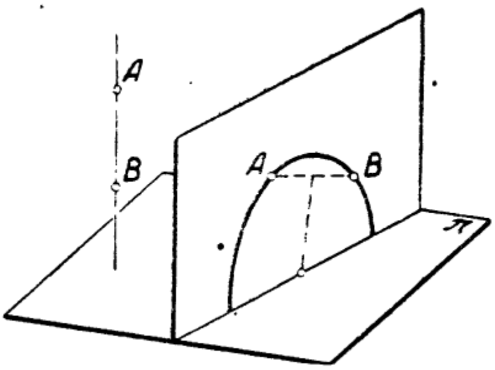
Ob’ektlar orasidagi asosiy munosabatlar odatdagi ko‘rgazmali ma’noga ega bo‘lsin deb qaraymiz.

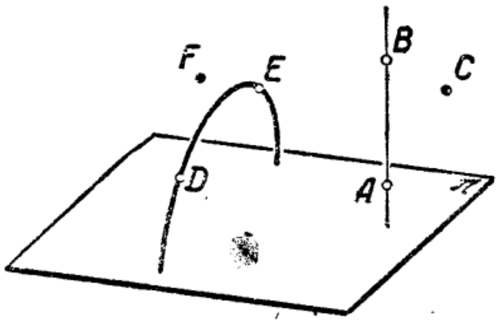
Bu interpretatsiyada burchaklar kongruentligi Evklid geometriyasidagi kongruentlik bilan mos tushadi.

Aksiomalarning bajarilishini tekshirish bilan shug‘ullanamiz.

Gilbert aksiomalarning bitta aksiomasidan boshqa aksiomalar bajariladi. Bu bitta Evklid aksiomasi (postulati) Lobachevskiy postulati bilan almashtiriladi.

A va B nuqtalarda bizning π tekisligimizga perpendikulyar bo‘lgan tekislik o‘tkazamiz va A, B nuqtalarni birlashtirib AB ning o‘rtasidan asosiy π tekislikkacha perpendikulyar o‘tkazamiz. Bu perpendikulyarning π tekislik bilan kesishgan nuqtasini markaz qilib yarimaylana o‘tkazamiz. Bu esa A va B “nuqtalar” bilan aniqlanuvchi “to‘g‘ri chiziq” bo‘ladi. Bu erda I_2 aksiomaning bajarilishi ko‘rinib turibdi (2-chizma). I_3 aksioma bajariladi (3-chizma).

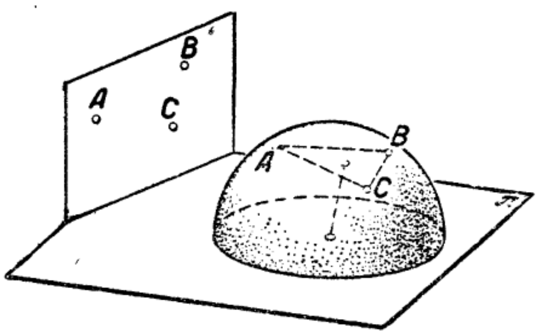


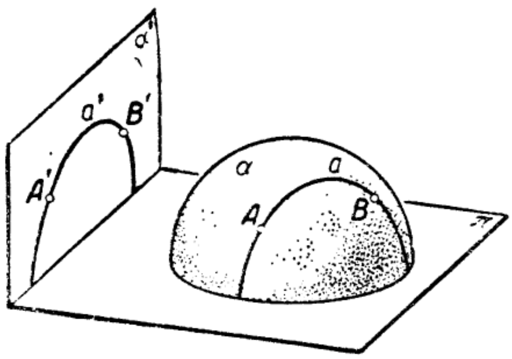


2-chizma 3-chizma

Bir “to‘g‘ri chiziqda” yotmagan uchta “nuqta” hammavaqt “tekislik”ni aniqlaydi. Bu esa bizda markazi asosiy tekislikda bo‘lib uchta A, B, C punktlardan o‘tuvchi sferadir.

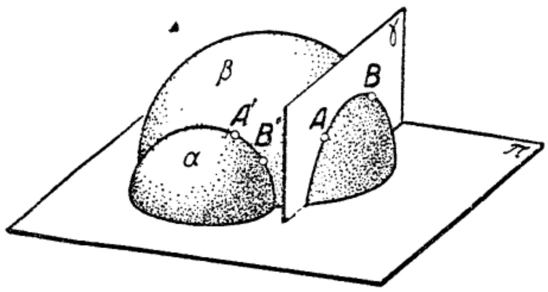
Demak I_4, I_5, I_6 aksiomalar bajarildai (4-chizma, 5-chizma)

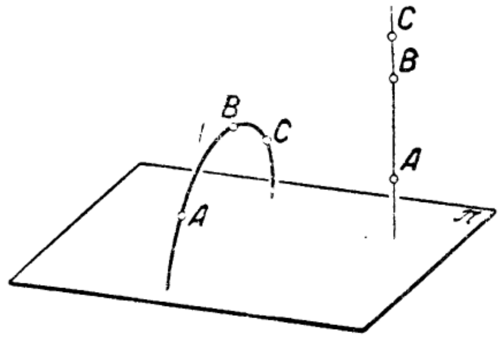




4-chizma 5-chizma

I_7 – agar ikki tekislik bita umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, u holda ular hech bo‘lmaganda yana bitta umumiy nuqtaga ega (6-chizma)





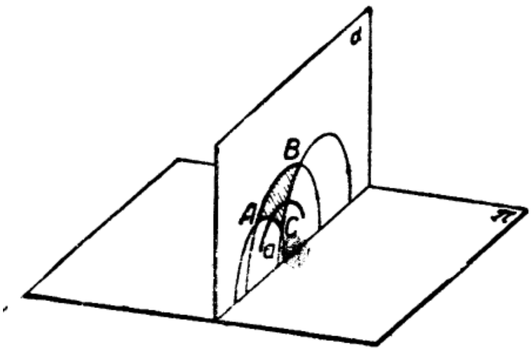
6-chizma 7-chizma

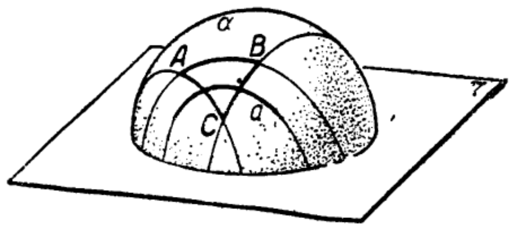
I_8 aksioma bajariladi (1-chizma).

$II_{1\text{-}2}$ aksiomalar bajariladi. Bularni bevosita ko‘ramiz (7-chizma).

Endi Pash postulatini ko‘rib o‘tamiz.

Agar qaralayotgan tekislik asosiy π tekislikka perpendikulyar bo‘lsa, u holda unda tekislikdagi Puankare interpretatsiyasi o‘rinli bo‘ladi. Buni biz avval ko‘rib o‘tamiz (8-chizma).





8-chizma 9-chizma

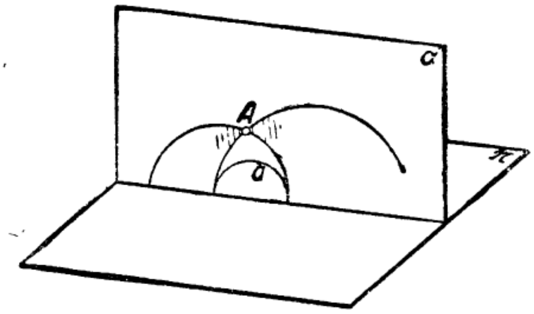
9-chizma yarim sferaning “tekislik” holatini tasvirlaydi.

$III_{1\text{-}5}$ gruppa aksiomalari bajariladi, lekin bunga to‘xtab o‘tirmaymiz va xuddi shunday “kesmalarning kongruent bo‘lish” tushunchasiga ham konkret misolda to‘xtab o‘tirmaymiz. Bularni har kim o‘zi tekshirib ko‘rishi mumkin.

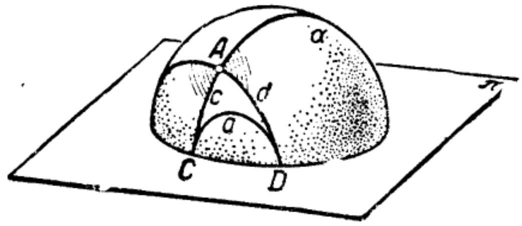
$V_{1\text{-}2}$ uzluksizlik gruppa aksiomalari bu erda ham bajariladi.

IV_L parallellik aksiomasini (Lobachevskiy aksiomasini) ko‘rib o‘tamiz. Bu erda Lobachevskiy postulati bajariladi. Agar qaralayotgan “tekislik” asosiy π tekislikka perpendikulyar bo‘lsa, u holda Lobachchevskiy postulatining bajarilishi batafsil tekislikdagi Lobachevskiy geometriyasining Puankare interpretatsiyasida qaralgan (10-chizma).

“Tekislik” yarimsfera holatda tasvirlangan bo‘lsa (11-chizma), u holda A va C nuqtalardan asosiy tekislikka perpendikulyar bo‘lgan tekislik o‘tkazamiz: Bunda u C “to‘g‘ri chiziq”ni kesadi (hosil qiladi).



10-chizma

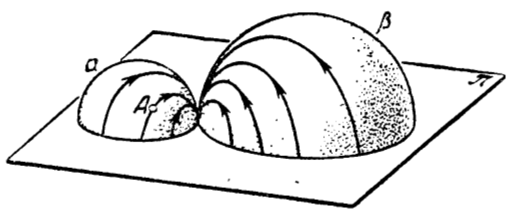


11-chizma

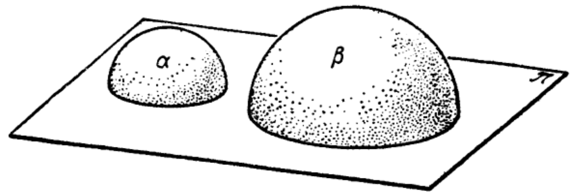
Xuddi shunday A va D nuqtalarda tekislik o‘tkazamiz. Bunda u d “to‘g‘ri chiziq”n kesadi (hosil qiladi). Shunday qilib kiritilgan bu modelda Lobachevskiy geometriyasining fazoviy tasvirini vujudga keltiriladi.

Eslatma. Agar “nuqta” deb yarimsfera nuqtasi qaralsa, “to‘g‘ri chiziq” deb undagi yarim aylana qaralsa, u holda oxirgi holatdagi α “tekislikda” (α yarimsferada) Lobachevskiy geometriyasi to‘laligcha vujudga keltiriladi. Bunda “to‘g‘ri chiziq” yarimsferadagi yarim aylanadan iborat yuo‘lib tekisligi ekvator tekisligiga perpendikulyardir. Endi biz Lobachevskiyning tekislik geometriyasining yarimsferada tasvirlangan (vujudga keltirilgan) yangi interpretatsiyasiga ega bo‘ldik.

Endi Puankarening fazoviy interpretatsiyasida Lobachevskiyning ba’zi teoremalari qanday ko‘rinishga ega ekanligini ko‘rib o‘tamiz. Xususiy xolda undan foydalanib yangi teoremalarni hosil qilamiz. Ikkita “tekislik” bir-biriga nisbatan quyidagicha joylashishga ega: “tekisliklar” kesishadi (6-chizma). “Tekisliklar” “parallel” (12-chizma); Bu ikki “tekisliklarda” ikkita bir-biriga parallel bo‘lgan dastalar bo‘lib har birida “parallel” bo‘lgan “to‘g‘ri chiziqlar” dastasiga ega. Har bir A “nuqta”dan β “tekislikka” “parallel” bo‘lgan α “tekislik” o‘tkazish mumkin. Bu “tekisliklar” o‘ta paalleldir (13-chizma)



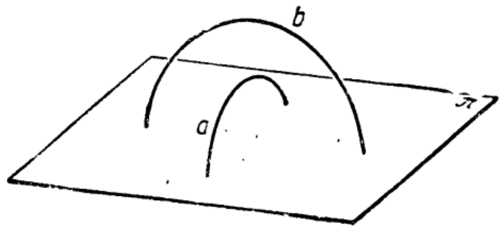
12-chizma



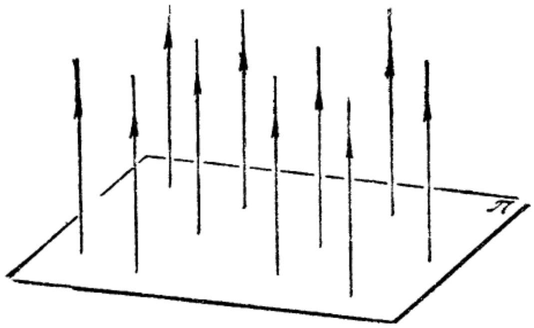
13-chizma

Bukilgan “tg‘ri chiziqlar” mavjud (14-chizma) va “parallel” bog‘lama “to‘g‘ri chiziqlar” mavjud (12-chizma).

15-chizmada tasvirlangan parallel “to‘g‘ri chiziqlar” bog‘lamasi biz uchun juda muhimdir.



14-chizma



15-chizma

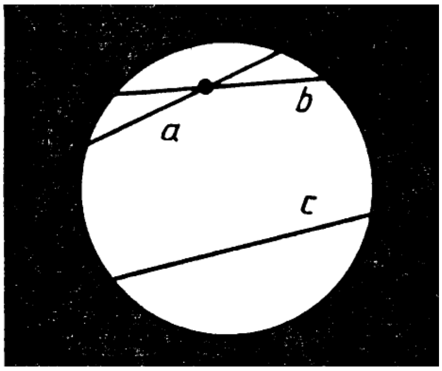
2.10-§. Lobachevskiy geometriyasining tadbiqlari.

Evklid geometriyasini kosmik masshtabda ko‘rib o‘tishni Lobachevskiy tavsiya qilgan. Buni avvalo Umar Xayyomlar ko‘rib o‘tgan edi.

Kosmik masshtab qarash uchun uchburchak uchlarini Er, Quyosh va Sarius yulduzlari olingan.

Astronomik instrumentlar Metagalaktikaning ba’zi bir qismini “Ko‘rish”ga imkon beradi, aniqrog‘i bizdan bir necha miliard parsekdagilarni “Ko‘rish”ga imkon beradi (1 parsek = 3,26 yorug‘lik yili) Yorug‘lik 300000 km/sekund tezlik bilan tarqaladi.

Shunday qilib biz cheksiz bo‘lgan koinotning ko‘rinuvchi qismi chekli fazodir. Bu koinot kengayishini tushuntiradi.



1-chizma

Agar biz Koinotning ko‘rinish qismi bilan chegaralansak, u holda Lobachevskiy geometriyasi bajariladi.

Agar uchburchakda $\alpha+\beta+\gamma<2d$ bo‘lsa, u holda sirt egriligi manfiy deb qaraladi.

Agar uchburchakda $\alpha+\beta+\gamma>2d$ bo‘lsa, u holda sirt egriligi musbat deb qaraladi.

Agar uchburchakda $\alpha+\beta+\gamma=2d$ bo‘lsa, u holda sirt egriligi nol deb qaraladi.

Koinotni bir jinsli deb qarab fizik Fridman A.A. (1888-1925) Koinotning zichligiga nisbatan fazoning egriligini quyidagicha isbotladi.

1) Agar Koinotdagi moddaning zichligi biror o‘zgarmasdan (kritik zichlik) kichik bo‘lsa, u holda fazo manfiy egrilikga ega;
2) Agar Koinotdagi moddaning zichligi biror o‘zgarmasdan (kritik zichlik) katta bo‘lsa, u holda fazo musbat egrilikga ega;
3) Agar Koinotdagi moddaning zichligi biror o‘zgarmasdan (kritik zichlik) kritik bo‘lsa, u holda fazo nol egrilikga ega;

Shunday qilib A.A.Fridman ma’lum shartlarda Koinot geometriyasi manfiy egrilikka ega ekanligini ko‘rsatdi va bu esa Lobachevskiy geometriyasi bilan mos tushadi.

Koinotning modelini Fridman nazariyasi bo‘yicha tuzilishi astronom E. Xabbl (1889-1953) tomonidan ekspert asosida (tajriba asosida) tasdiqlandi.

Hozirgi zamon fanining taraqqiyot mavqei (darajasi) Koinotning real (tabiiy) fazosi egriligi o‘zgaruvchan bo‘lgan fazodan iboratligini tasdiqlaydi. Demak Koinot geometriyasi Evklid geometriyasi ham, Lobachevskiy geometriyasi ham, Riman geometriyasi ham bo‘la olmaydi, chunki bu geometriyalarda fazo egriligi o‘zgarmas nol, o‘zgarmas manfiy va o‘zgarmas musbatdir. Bu erda Lobachevskiy geometriyasi Koinot geometriyasiga yaqin deb hisoblash mumkin.

Giperbolik geometriya sohasida Lobachevskiy tekshirishlari keng bo’lib uning elemintar qismlarini, trigonometriyasini, analitik va differensial geometriya qismlarini o’z ichiga oladi. Lobachevskiy o‘zi yaratgan geometriya metodlari bilan aniq integralni hisoblash uchun 200 dan ortiq formulani topdi.

Evklid tekisligida Lobachevskiy geomrtriyasi kartasining bir necha usulda yasash (ko’rsatish) mumkin, chunki bunday holat sfera uchun ko’rsatilgan. 1868 yilda E.Beltpami (italyan) ko’rsatdi.

Real fizik fazo Evklid fazosidan iboratmi yoki yo’qmi? degan savol fiziklarga muammo bo’lib qoladi. Agar Evklid fazosi bo’lmasa, u holda qaysi fazoga taaluqli? Bu muammo hali to’la yechilmagan.

Nisbiy nazariyasida real fizik fazo noevklid fazosidan iborat deb qaraladi. Yorug’lik tezligidan kata tezlik mavjud emas. Bu Evklid geometriyasida edi.

Lobachivskiy geometriyasida yorug’lik tezligidan kata tezlik mavjudligini Lobachevskiy geometriyasi bilan izohlash mumkin.

Nisbiylik nazariyasida noevklid geometriyasining formulalari tatbiq etiladi. Noevklid geometriyasining formulalari Evklid geometriyasidan kelib chiqmaydi, aksincha noevklid geometriyasi formulalardan Evklid formulasini hosil qilish mumkin (limit holat sifatida). Masalan: astrologiyada, alximiyada.

Lobachevskiy geometriyasi nisbiylik nazariyasining yaratilishida va rivojlanishida keng tadbiqlandi.

Lobachivskiy tekshirishlari asosida fizik olimlar **atom ichida bo’ladigan** prosseslarni (jarayonlarning) hioblashlarni bajarish mumkinligini ko’rsatuvchi nazariya yaratdilar.

Bnday nazariyani 1950 yillarda V.Fok, N.A.Chernikov, Ya.I.Smordinskiy va ularning shogirtlari yaratdilar.

XOTIMA

Bordan yo‘q bo’lmaydi va yo‘qdan bor bo’lmaydi. Modda shakli, holati o’zgaradi bu hammamizga ma’lum.

“Olam kengayib borayapti” degan iborani “Bizning bilim chegaramiz kengayib borayapti” deb qarash tabiiy holdir.

A.A.Fridman (rassiyalik) o‘z tekshirishlarida olam kengayishini t vaqtga nisbatan proporsionaldir va u vaqtning $t^{\frac{2}{3}}$ $(C \cdot t^{\frac{2}{3}}$ C-proporsionallik koeffisienti) darajasi kabi kengayishini ta’kidlaydi va masofa vaqtga nisbatan o‘zgarishini ta’kidlaydi. Habll (AQSh), eksperimenti *v*=HR $H \approx \frac{1}{t}$ Habll doimiysi.

Yer shar ham emas, ellipsoid ham emas va u dumaloq sirti adir-budur, jismdan iborat ekanligi ma’lum. Demak, Yer ustidagi o’lchashlar, kuzatishlar taqribiy, nisbiy va shartlashilgan holatdagi tekshirishlardan iborat.

Koinot geometriyasi Lobachevskiy, Riman, Evklid geometriyasiga aniq mos tushmaydi. Lekin, Koinot geometriyasi Lobachevskiy geometriyasiga yaqindir (taqribiy holatidir).

Адабиётлар

1. Lobatshefsky N.I. Ecludes geometregues sur la theorie des paralleles. Trad. J. Hööl. Paris, 1866.
2. Lobatschewsky N.I. Pangeometria. Trad. G. Battaglini. –Giorn. math. 1867. 5, 273-330.
3. Хаййам Омар. Трактаты. Пер. Б.А.Резанфольда. М., Изд.вост.лит-ры, 1962.
4. Battaglini G. Sulla geometria immaginaria di Lobatschevsky. – Giorn.math., 1867, 5, 217-231.
5. Blashke W. Euklidische Kinematik und nichteneuklidische Gemetrie. – Math.Phys., 1911, 60, 61-91.
6. Смогоржевский А.С. - О геометрии Лобачевского. М., 1957.
7. Розенфельд Б.Д. История неевклидовой геометрии, «Наука», М., 1976.
8. Лаптев Б.Л. Лобаческий и его геометрия, М. 1976.
9. Абдурахманов А. Математика тарихи. Тошкент 1998.
10. Х.Назаров, Қ.Остонов Математика тарихи, Тошкент, 1996.
11. Кутузов Б.В. Геометрия Лобачевского и элементы основания геометрии. М. 1960.
12. Силин А.В., Шмакова Н.А. Открываем неевклидовую геометрию. Москва 1988.

Mundarija

Gulmurat G‘aymnazarov
Xusanboy Narjigitov
Olimdjon Gulmuratovich Gaimnazarov

LOBACHEVSKIYNING NOEVKLID GEOMETRIYASI