Muassislar:
T.N.Qori Niyoziy nomidagi O'zbekiston Pedagogika fanlari ilmiy tadqiqot instituti

ILMIY-OMMABOP BO'LIM

STEREOGRAFIK PROYEKSIYA VA KARTOGRAFIYA

G. G'aymnazarov, *Guliston DU, f.-m.f.n., dotsent,*
H. Narjigitov, *Guliston DU, f.-m.f.n.,*
O. G. Gaimnazarov, *Guliston DU, katta o'qituvchisi*

Ushbu maqolada stereografik proyeksiya, uning ba'zi xossalari, Yer xaritasini chizishda va bu xaritadan foydalanishlar bayon etilgan.

Tayanch so'zlar: *Stereografik proyeksiya, globus, xarita, navigatsiya, olam.*

In this article presents a stereographic projection, some of its properties, value in the construction, maps of the Earth and the use of these maps.

Keywords: *Stereographic projection, globe, map, navigation, Universe.*

В статье изложены стереографическая проекция, некоторые её свойства, значение при построении карты Земли и использование этих карт.

Ключевые слова: *Стереографическая проекция, глобус, карта, навигация, Вселенная.*

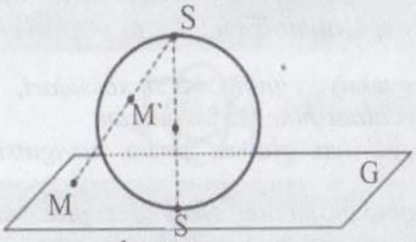
Biror shar G tekislik ustida joylashgan bo'lsin. Shar **G** tekislikning **S** nuqtasida urunadi. Sferadagi **S** nuqtaga qarama-qarshi diametrial nuqtani **S`** deb belgilaylik, ya'ni sfera ustidagi **S** va **S`** nuqtalar diametrlar uchida bo'lsin. Sfera ustidagi hamma nuqtalarining G tekislikdagi proyeksiyalari **stereografik proyeksiya** deyiladi. Sfera ustidagi **M`** nuqtaning **G** tekislikdagi proyeksiyasi bo'lgan **M** nuqta quyidagicha topiladi.

S`M` to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq **G** tekislikni **M** nuqtada kesib o'tadi. Shu **M** nuqta **M`** nuqtaning **G** tekislikdagi stereografik proyeksiyasi deyiladi.

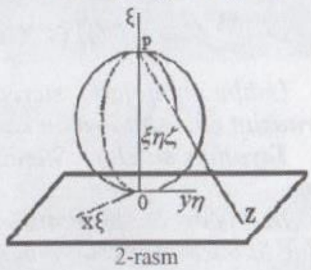
Sferadagi **S`** va **S** nuqtalar sfera **qutblari** deyiladi (1-rasmga qarang). **S`, M`, M** nuqtalar **S`M** to'g'ri chiziq ustida yotadi. **S`** nuqta proyeksiya markazi deyiladi.

Stereografik proyeksiyaning ba'zi xossalarini ko'rsatuvchi teoremalarni ko'rib o'tamiz.

1-teorema. Sfera ustida yotuvchi aylana **G** tekislikka aylana ko'rinishda proyeksiyalanadi yoki aylana proyeksiya markazidan o'tsa, u holda to'g'ri chiziq ko'rinishda proyeksiyalanadi.



1-rasm



2-rasm

Isboti. Bu teoremada "aylana" keng ma'noda tushuniladi va bunda to'g'ri chiziq cheksiz katta radiusli aylana deb qaraladi.

XOY tekislikda ixtiyoriy aylana (2-rasmga qarang)

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \qquad (1)$$

ko'rinishdagi tenglama bilan ifoda etiladi. A=0 bo'lganda (1) tenglama

$$Bx + Cy + D = 0 \qquad (2)$$

to'g'ri chiziqni aniqlaydi. Bu (2) to'g'ri chiziqqa sfera ustida mos keluvchi chiziqni aniqlash uchun (1) tenglikdagi x, y o'zgaruvchilarni

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}, \quad z = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta} \qquad (3)$$

$$x^2 + y^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1-\zeta)^2} = \frac{\zeta}{1-\zeta} \qquad (4)$$

almashtirish bajaramiz. U holda (1) tenglama

$$A\frac{\zeta}{1-\zeta} + B\frac{\xi}{1-\zeta} + C\frac{\eta}{1-\zeta} + D = 0 \qquad (5)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu (5) dan

$$B\xi + C\eta + (A-D)\zeta - D = 0 \qquad (6)$$

hosil bo'ladi.

Hosil qilingan (6) tenglama ξ,η,ζ o'zgaruvchilarga nisbatan birinchi darajali tenglama bo'lib, uch o'lchovli fazoda tekislikni aniqlaydi. Shunday qilib ξ,η,ζ kordinatalar ikkita (6) va yoki

$$\xi^2+\eta^2+\left(\xi-\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{1}{4} \text{ yoki } \xi^2+\eta^2=\xi(1-\xi) \qquad (7)$$

tenglamani qanoatlantiradi.

Bu (7), markazi $(0,\,0,\,\frac{1}{2})$ nuqtada bo'lib, radiusi $\frac{1}{2}$ ga teng bo'lgan uch o'lchovli fazoda, sfera tenglamasidan iboratdir. Endi (7) ning hosil bo'lishini keltiramiz.

Buning uchun $z=x+iy$ kompleks sonning **XOY** tekislikdagi koordinatalari x, y bo'lgan nuqtalardan iborat ekanligini e'tiborga olamiz. Bu son sferada koordinatalari ξ,η,ζ bo'lgan nuqtani tasvirlasin, ya'ni tekislikdagi $M(x,y)$ nuqta sferadagi $N(\xi,\eta,\zeta)$ nuqtaga akslansin (proyeksiyalansin). U holda markazi $Q\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$ nuqtada bo'lib ra diusi $\frac{1}{2}$ ga teng bo'lgan sfera tenglamasi (sfera diametri 1 ga teng deb olingan). $\xi^2+\eta^2+\left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ yoki $\xi^2+\eta^2=\xi(1-\xi)$

ko'rinishidan iborat bo'ladi, ya'ni (7) tenglama hosil bo'ladi.

Demak, ξ,η,ζ koordinatalar (7) sfera tenglamasi va (6) tekislik tenglamasini qanoatlantiradi.

Endi (3) va (4) larni hosil bo'lishini tushuntiramiz. Uch o'lchovli fazoda (0,0,1), (ξ,η,ζ) va $(x,y,0)$ nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotgani uchun (chunki (x,y) tekislik nuqtasi sferaning (ξ,η,ζ) nuqtasining stereografik proyeksiyasi) P(0,0,1) proyeksiya kazi fazoda ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasiga asosan

$$\frac{\xi-0}{x-0}=\frac{\eta-0}{y-0}=\frac{\zeta-1}{z-1} \qquad (8)$$

tenglik bajariladi. Bu (8) tengliklardan

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y=\frac{\eta}{1-\zeta}, \quad z=\frac{\xi+i\eta}{1-\zeta} \quad \text{yoki} \quad z=x+iy$$

yoki $z = x + iy$ (9)

hosil bo'ldi, ya'ni (3) tengliklar hosil bo'ldi.

Bu (9) tekislik nuqtalarini sfera nuqtalari orqali ifodalanishini ko'rsatadi, ya'ni sfera nuqtalari tekislik nuqtalariga akslantirishini ko'rsatadi, (mos ravishda). Hosil qilingan (9) dan

$$x^2+y^2=\frac{\xi^2+\eta^2}{(1-\zeta)^2}=\frac{\zeta}{1-\zeta}, \; |z|^2=x^2+y^2=\frac{\xi^2+\eta^2}{(1-\zeta)^2}$$

hosil bo'ldi ya'ni (4) hosil bo'ldi. Oxirgi tenglikdan

$$\zeta=\frac{(x^2+y^2)}{x^2+y^2+1} \qquad (10)$$

hosil bo'ldi va bunga asosan (9) dan (ya'ni (3) dan)

$$\xi=\frac{x}{x^2+y^2+1} \qquad (11)$$

$$\eta=\frac{y}{x^2+y^2+1} \qquad (12)$$

koordinatalarni hosil qilamiz. Oxirgi (11), (12), (10) formulalar sfera nuqtalarining koordinatalari tekislikning nuqtalar koordinatalari bilan mos ravishda aniqlanishini ko'rsatadi, ya'ni tekislikning sferaga stereografik proyeksiyasini ko'rsatadi. Teorema to'la isbot bo'ldi. Teorema isbotidagi (11), (12), (10) va (3) (yoki (9)) formulalar stereografik proyeksiya formulalari deyiladi.

2-teorema. Stereogerafik proyeksiya sfera ustida yotuvchi egri chiziqlar orasidagi burchak, bu egri chiziqlarning G tekislikdagi proyeksiyalari orasidagi burchakka teng, ya'ni G tekislikdagi egri chiziqlar orasidagi burchaklar teng.

Isboti. Sferada ikkita egri chiziqni olib qaraylik. Ular qandaydir M nuqtada kesishsin va ularga M nuqtada o'tkazilgan urunmalar α burchak tashkil etsin.

M nuqtaning tekislikdagi stereografik proyeksiyasi M` bo'lsin, bunda proyeksiya markazi P nuqtadir. Sferadagi egri chiziqlarning tekislikdagi stereografik proyeksiyalari ham egri chiziqlar bo'lib ularning M` nuqtadagi urinmalar orasidagi burchagi α ga teng ekanligini ko'rsatish mumkin, ya'ni sterografik proyeksiyada burchakning qiymati saqlanishini ko'rsatishi mumkin.

Buning uchun egri chiziqni kesuvchisi urinmaga intilishini e'tiborga olamiz, ya'ni urinmasi bilan mos tushishga intilishini e'tiborga olamiz. Bu vaqtda kesuvchilarning proyeksiyalari ham xuddi shunday tekislikdagi proyeksiyalar ham urinmaga mos tushishga intiladi. Shu bilan teoremaning isboti tugaydi.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

3-teorema. Agar sferani SS` diametr (S va S` qutblar) atrofida biror α burchakka aylantirilsa, u holda G tekislik S` urinish nuqta atrofida shu α burchakka aylanadi, ya'ni G tekislikning S` nuqtasidan o'tuvchi to'g'ri chiziq shu α burchakka buriladi (3-rasmga qarang).

Stereografik proyeksiyaning yuqorida uchta teorema ko'rinishda keltirilgan xossasidan allomalar Yer xaritasini chizishda keng foydalangan, lekin isbotlamagan. Teorema 1 ni IX asrda Bog'dodda yashab ijod qilgan Ahmad al-Farg'oniy o'z zamonida isbotlagan. U o'zining "Kitob as-san'a al-asturlab" (Astrolyabiyani yasash haqida kitob) nomli kitobida to'liq isbotini bergan (bu haqida [1], 119-betga qarang).

Stereografik proyeksiyaga doir ma'lumotlar va A.Farg'oniy tomonidan isbotlangan bir teorema haqida A.A'zamov [2] ishda ma'lumot keltirgan va shu bilan birga "Ahmad al-Farg'oniyning geometriya sohasida hali topilmagan ishlari bo'lishi mumkin" deb ta'kidlaydi. Hamda A.A'zamov "Ahmad al-Farg'oniy geometriyaga doir risola yozgan bo'lishi kerak degan farazni o'rinli" deb ta'kidlaydi. ([2], 70-betga qarang) .

Biz yuqorida ikki o'lchovli (tekislikni) fazoni uch o'lchovli (sfera) ga mos keltirishning (akslantirishning) bir usulini ko'rib o'tdik.

Sferani ixtiyoriy ravishda o'zaro kesishmaydigan qavariq ko'pburchaklarga ajratish **sferadagi karta** deyiladi. Sferik karta yasashning bir usuli quyidagicha. Faraz qilaylik, F ixtiyoriy ko'pyoqlik bo'lsin. Uning ichida O nuqta olamiz va ixtiyoriy (O, R) sferani olib qaraymiz (4-rasmga qarang). Agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ – biz qarayotgan ko'pyoqlikning biror yoqi bo'lsa, u holda ko'pyoqlikning $OA_1A_2 \dots A_n$ burchagiga odatdagidek (O, R) sferadagi $OB_1B_2 \dots B_n$ sferik *n* burchak mos keltiriladi (chizmaga qarang). F ko'pyoqlikning hamma yoqlari shunday ko'rib o'tib sferik ko'pburchaklarning mos keltirilishidan sferadagi xaritani hosil qilamiz.

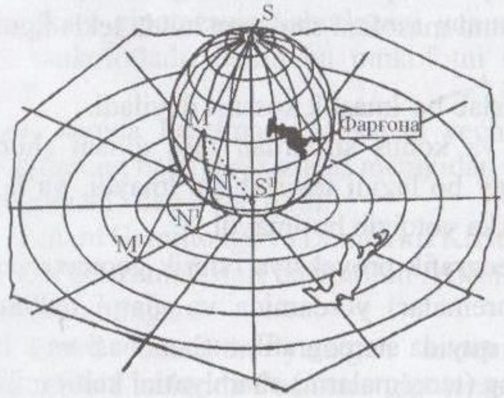
Sferadagi xaritani yasashda quyidagi Eyler teoremasi muhim ahamiyatga ega. U sferadagi xarita uchun ham va qavariq ko'pburchak uchun ham o'rinlidir.

Teorema (Eyler) Agar *b* ixtiyoriy qavariq ko'pyoqlikning uchlari soni, *p* ularning qirralari soni va *r* yoqlari soni bo'lsa, u holda bu sonlar uchun

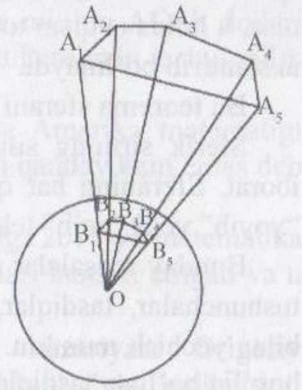
$$b-p+r=2$$

munosabat o'rinli ([3] ga qarang).

Masalan, *n* burchakli piramida uchun $b=n+1$, $p=2n$, $r=n+1$. Xuddi shunday *n* burchakli prizma uchun $b=2n$, $p=3n$, $r=n+2$, oktaedr uchun $b=6$, $p=12$, $r=8$.



3-rasm



4-rasm

Ko'pgina amaliy masalalarni yechishda Yer shaklini shar deb hisoblash qulaydir. Bu sharni taxminan 10 million marta kichraytirib qit'alarni, okeanlarni, dengizlarni, ko'llarni, daryolarni, davlatlarni va boshqalarni tasvirlab globus hosil qilamiz. Lekin globusdan foydalanish hamma vaqt qulay bo'lavermaydi. Shu sababli foydalanishga qulay bo'lishi uchun globusni sirtini tekislikda tasvirlaymiz, ya'ni Yer xaritasi chiziladi. Kartografiyaning (xarita chizishning asosiy masalasi **imkon boricha** globus sirtini tekislikka **aniqroq** tasvirlashdan iborat. Bunda bir qator qiyinchiliklar, noqulayliklar vujudga keladi va karta chizishda har xil usullar izlab topishni, yaratishni keltirib chiqaradi.

Qiyinchiliklarning asosiy sababining birini quyidagi misolda ko'rish mumkin. Rezina materialdan to'pning (futbol to'pi, voleybol to'pi va shunga o'xshaganlari) kesib olingan bir bo'lagini stol (tekis taxta)ga to'la yoyib bo'lmaydi (buni albatta uni cho'zmasdan yoki qisqartirmasdan bajarish qaraladi).

Matematikada biz uni ushbu teorema bilan ifodalaymiz va u sfera geometriyasida muhim teorema sifatida isbotlangan.

Teorema. Agar sfera ω qism to'plam ω sferik segmentni o'z ichiga olsa, u holda ω qism to'plamni masofani saqlagan holda tekis figuraga akslantirib bo'lmaydi.

Bu teorema sferani tekislab bo'lmaslik xossasi deyiladi.

Sferik sirtning silindr va konus sirtlardan farq qilishi shundan iborat. Sferaning har qanday bo'lagini tekislab bo'lmaydi, ya'ni uni "yoyib" yoki "egib" tekislikka yotqizib bo'lmaydi.

Bunday masalalar stereografik proyeksiya (sferik geometriyadagi tushunchalar, tasdiqlar, teoremalar) yordamida va ularni tadbiqlash bilan yechish mumkin. Biz quyida stereografik tushunchasi va u bilan bog'liq bo'lgan tasdiqlarning (teoremalarni) ahamiyatini keltiramiz.

Navigatsiyaning eng sodda masalasi dengizda, okeanda kema qatnovida harakat yo'nalishini tanlash va eng yaqin marshrutni (masofa yo'lini) aniqlashdan iborat. Navigatsiya – bu lotincha so'z bo'lib, kemada suzishdir. Hozirgi zamonda bunday masalani yechish faqat suvda suzuvchilar uchun emas, hatto samolyotda uchuvchilar uchun va kosmonavtlar uchun, davlatlarni kartasini yaratish uchun ham muhim bo'lib qoldi. Ana shunday masalalar sferik geometriya, stereometrik proyeksiyalar bilan uzviy bog'langan.

Biz yuqorida Yerni shar deb oldik. Hisoblashlar haqiqiy Olamda aniqroq bo'lishi uchun astranomiya fanida Yerni ellipsoid deb oladi va bu ellipsoidni ellipsning kichik o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lganini tanlaydilar. Bu yerda Yer shari ellipsoid ham emasligini qayd etamiz.

Sfera bilan bog'liq bo'lgan hozirgi zamon ilmiy tekshirishlardan birini qayd etamiz.

1904-yilda fransuz matematigi Anri Puankare bashorati (gipotezasi) 2002-2003-yillarda Grigoriy Yakovlevich Perelman tomonidan isbot etildi. ([4], [5] ishlarga qarang).

A.Puankare gipotezasini keltiramiz. **Ixtiyoriy bir bog'lamli uch o'lchovli kompakt ko'pxillik** (chegarasi kirmaydi) uch o'lchovli sferaga gomomorfdir.

2010-yilda Kleya matematika instituti (Angliya) G.Ya.Perelmanga A.Puankare gipotezasini isbotlagani uchun bir million AQSh dollari bilan mukofotladi. Lekin bu mukofotni G.Ya.Perelman qabul qilib olmadi.

Bu haqida Perelman "Masalani yechishda Amerika matematigi Gamiltonning bajargan xizmati menikidan hech qanday kam emas deb hisoblayman" deb e'lon qildi.

Richard Gamiltonga va Demetrios Kristodulga 2011-yil matematika bo'yicha Shao mukofoti bir million AQSh dollari taqdim etilgan va u qabul qilib olingan.

Richard Gamilton yaratgan matematik nazariyani Grigoriy Perelman o'z ishlarida Puankare gipotezasini isbotlashda rivojlantirdi ([4], [5] ishlarga qarang).

G.Ya.Perelmanning izohlashiga qaraganda Yau Shintun bilan hamkorlikda ishlagan Richard Gamilton o'z ilmiy tekshirishlarida noaniq texnik (hisoblashlarda) qiyinchiliklarga (noqulayliklarga) duch kelib tekshirishlarni sezilarli darajada kechiktirgan.

Adabiyotlar:

1. Розенфельд Б.А. История неевклидовой геометрии. М. 1976.
2. A'zamov A. Farg'oniy Ptolemey teoremasini qanday isbotlagani haqida // Fizika, matematika va informatika. №3(5), 2002. 63-71 b.
3. Мир математики, 1, Золотое сечение. М. 2013.
4. http://www.arxiv.org/abs/math.DG/0303109
5. http://www.arxiv.org/abs/math.DG/0211159