O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika – matematika fakulteti

“Matematika” kafedrasi

Hasanova Jumagul Alisher qizining

5130100- “Matematika” ta’lim yo’nalishi bo’yicha bakalavr

darajasini olish uchun

«CHIZIQLI BIR JINSLI MATRITSALI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA ULARNI YECHISH USULLARI »

mavzusida

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Rahbar: __________ f.m.f.n., dots. H.Norjigitov

BMI “Matematika” kafedrasining 20___ yil __ may №__ sonli yig’ilishida ko’rib chiqildi va himoyaga tavsiya etiladi.

Kafedra mudiri__________ fiz-mat.f.n., dots. H.Norjigitov

Fizika- matematika fakulteti dekani tomonidan himoya qilishga ruxsat etiladi.

Fakultet dekani__________ p.f.n. dots. Sh. Ashirov

Guliston - 2017

MUNDARIJA:

K I R I SH

Tabiatda uchraydigan turli jarayonlar (avtomobil harakati, sayyoralarning uchishi, fizik, ximik va biologik jarayonlar va h.k.) o'z harakat qonunlariga ega.

Ba’zi jarayonlar bir xil qonun bo’yicha sodir bo’lishi mumkin, bu hol esa ularni o’rganish ishini yengillashtiradi. Ammo jarayonlarni tavsiflaydigan qonunlarni to’g’ridan-to’g’ri topish har doim ham mumkin bo’lavermaydi. Xarakter miqdorlar va ularning hosilalari yoki differensiallari orasidagi munosabatni topish tabiatan yengil bo’ladi. Bunda noma’lum funksiya yoki vektor-funksiya hosila yoki differensial ishorasi ostida qatnashgan munosabat hosil bo’ladi. Jumladan,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

birinchi tartibli oddiy differensial tenglama deyiladi. $F(x, y, y') = 0$ – birinchi tartibli hosilaga nisbatan yechilmagan oddiy differensial tenglama deyilsa,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}),$$

$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ – n-tartibli oddiy differensial tenglama deyiladi. $y^{(n)} = f(x, y, y' ... y^{n-1})$ – n-tartibli yuqori tartibli hosilaga nisbatan yechilgan oddiy differensial tenglama deyiladi. Agar $f(x, y, ..., y^{(n-1)})$ yoki $F(x, y, y', ..., y^{(n)})$ lar $y, y' ..., y^{n-1})$ va u $y^{(n)}$ agrumentlarga nisbatan chiziqli funksiyalar bo’lsa, tegishli differensial tenglama chiziqli deyiladi. Yuqoridagi differensial tenglamalarda noma’lum funksiya bir agrumentli deb qaraladi. Aslida, noma’lum funksiya ko’p agrumentli bo’lgan hollar ham tez-tez uchraydi. Bunday holda differensial tenglama xususiy hosilasi deyiladi. Ushbu $F(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$ tenglama birinchi tartibli xususiy hosilali tenglamalarda,

$$\Phi(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = 0$$

Tenglama esa ikkinchi tartibli xususiy hosilasi differensial tenglamalardan iborat. Quyidagi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a^2 \frac{d^2 u}{\partial y^2}$$ (issiqlik o’tkazuvchanlik tenglamasi),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{d^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \text{(Laplas tenglamasi),}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{d^2 u}{\partial y^2}=f(x,y) \qquad \text{(Puasson tenglamasi)}$$

Tenglamalar ikkinchi tartibli xususiy hosilasi differensial tenglamalarning muhim xususiy hollari hisoblanadi, ularda noma’lum funksiya ikki agrumentlidir.

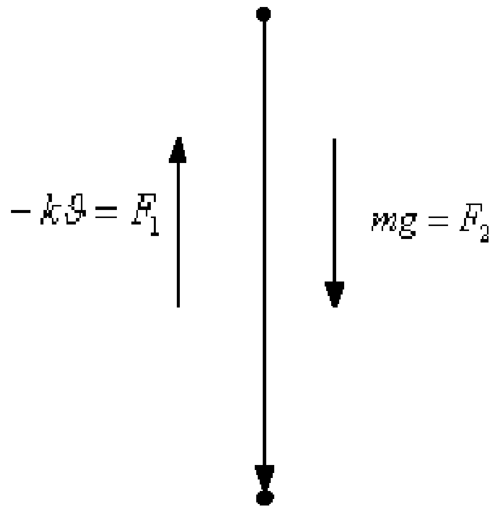
Mavzuning dolzarbligi. Differensial tenglamalarga olib keladigan ba’zi masalalarni qaraylik.

1-masala. Massasi *m* bo’lgan jism $\upsilon(0)=\upsilon_0$ boshlang’ich tezlik bilan biror balandlikdan tashlab yuborilgan. Jism tezlikning o’zgarish qonuni topaylik. (1-chizma).

Nyutonning ikkinchi qonuniga ko’ra:

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=F,$$

bu yerda F-jismga ta’sir etayotgan kuchlarning yig’indisi (teng ta’sir etuvchisi). Jismga faqat ikkita kuch ta’sir etishi mumkin deb hisoblaylik: havoning qarshilik kuchi $F_1=-k\vartheta, k>0$; yerning tortish kuchi $F_2=mg$. Shunday qilib, matematik nuqtai nazardan F-kuch



1-чизма

a) F_2 ga; b) F_1 ga; v) $F_1=F_2$ ga teng bo’lishi mumkin.

a) $F=F_2$ bo’lsin. Unda birnchi tartibli $m\frac{d\partial}{dt}=mg$ differensial tenglamaga egamiz. Oddiy hisoblashlar bu tenglamada noma’lum funksiya $\upsilon_1(t)=gt+C$ (S-ixtiyoriy o’zgarmas son) ko’rinishida bo’lishini ko’rsatadi. $\upsilon(0)=\upsilon_0$ bo’lgani uchun $C=\upsilon_0$ deb olishimiz mumkin, u holda izlangan qonun $\upsilon_1(t)=gt+\upsilon_0$ ko’rinishda bo’ladi.

b) Agar $F = F_1$ bo’lsa, $m\frac{d\upsilon}{dt} = -k\upsilon$, bunda $\upsilon(t) = \upsilon_0 e^{-\frac{k}{m}1}$ ekani ravshan.

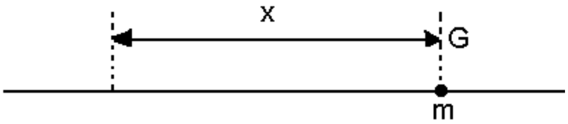
v) $F = F_1 + F_2$ bo’lsin, bu holda ushbu $m\frac{d\upsilon}{dt} = mg - k\upsilon (k > 0)$ differensial tenglamaga kelamiz. Noma’lum funksiya υ $\upsilon(t) = Ce^{-\frac{k}{m}1} + \frac{mg}{k}$; $\upsilon(0) = \upsilon_0$, $\upsilon_2(t) = \left(\upsilon_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}1} + \frac{mg}{k}$ ko’rinishda bo’lishini ko’rsatish qiyin emas. Ravshanki, $\lim\limits_{k\to 0}(t) = \upsilon_1(t)$. Haqiqatan,

$$\lim_{k\to 0}\upsilon_2(t) = \lim_{k\to 0}\left[\left(\upsilon_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}1} + \frac{mg}{k}\right] = \upsilon_0 \lim_{k\to 0} e^{-\frac{k}{m}1} -$$

$$-mg\lim_{k\to 0}\left(\frac{e^{-\frac{k}{m}1} + 1}{-\frac{k}{m}t}\right)\left(-\frac{t}{m}\right) = \upsilon_0 + gt = \upsilon_1(t).$$

2-masala. Massasi m bo’lgan moddiy nuqta to’g’ri chiziqli harakat qilmoqda. Uning harakat qonunini toping.

Har bir momentda G nuqtadan koordinata boshigacha bo’lgan masofa x bo’lsa (2-chizma), nuqtaning tezligi $\dot{x}\left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}\right)$ bo’ladi. Moddiy nuqtaga ikki tashqi kuch: ishqalanish kuchi $-b\dot{x}$, $b > 0$ va taranglik kuchi $-kx$, $k > 0$ ta’sir etadi. Nyutonning ikkinchi qonuniga asosan G nuqtaning harakati



2-чизма

$$m\dot{x} = -b\dot{x} - kx$$

qonun bilan sodir bo’ladi. Bu ikkinchi tartibli diferensial tenglamadir. Agar moddiy nuqta dvigatel bilan ta’minlangan bo’lib, dvigatelning G nuqtaga ta’sir kuchi F bo’lsa, u holda G ning harakat qonuni $m\dot{x} = -b\dot{x} - kx + F$ bo’ladi. Ko’pincha F miqdor $|F| \le F_0 = const$ munosabatga bo’ysunadi.

Bu masalalardan ko’rinib turibdiki, differensial tenglamalarni o’rganish hozirgi kunda juda dolzarbdir.

Bitiruv – malakaviy ishning maqsadi. Mazkur bitiruv-malakaviy ishda matritsali differensial tenglamalar, ularning normal sistemasi, chiziqli bir jinsli va bir jinsli bo’lmagan matritsali differensial tenglama yechimlari, avtonom sistemalar o’rganilgan.

Bitiruv-malakaviy ishning muammosi. Matritsali differensial tenglama yechish metodikasini ishlab chiqish.

Bitiruv-malakaviy ishning ob’ekti. Bitiruv-malakaviy ishning ob’ekti, tabiatda uchraydigan ayrim jarayonlarni tekshirishdan iborat. Kelgusida Universitet talabalariga differensial tenglamalar fani mavzularida mazkur bitiruv-malakaviy ish bilan tanishtirish lozim.

Bitiruv-malakaviy ishning predmeti. Matritsa tushunchalari, hosila va differensial tushunchalar, differensial tenglama yechimi va uni yechish usullarini o’rganish.

Bitiruv-malakaviy ishning yangiligi. Mazkur bitiruv-malakaviy ishda, chiziqli, bir jinsli va bir jinsli bo’lmagan differensial tenglamalar sistemasiga doir bir necha mashqlar yechib ko’rsatilgan.

Bitiruv-malakaviy ishning fan uchun ahamiyati. Ushbu ishda fanlarning o’zaro aloqadorligi va uzviyligi ta’minlanganligi muhim ahamiyatga ega.

Bitiruv-malakaviy ishning amaliyot uchun ahamiyati. Qaralgan barcha masalalar tabiatdan olinib tahlil etilishi amaliyot uchun muhimligini ko’rsatadi.

Bitiruv malakaviy ishning tuzilishi. Bitiruv malakaviy ish kirish, ikkita bob, ... paragraf, xulosa va adabiyotlar ro'yxatidan iborat.

I-BOB. CHIZIQLI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING NORMAL SISTEMASI.

Ma'lumki, chiziqli tenglamalar sistemasi ushbu

$$y' = A(x)y + b(x) \qquad (1)$$

vektor-matritsali ko'rinishida yoziladi, bunda A(x) matritsa va b(x) ustun-vektor I intervalda aniqlangan va uzluksiz. (1) tenglama chiziqli bir jinsli bo'lmagan,

$$y' = A(x)y \qquad (2)$$

tenglama esa, chiziqli bir jinsli tenglama (vektor-matritsali) deb yuritiladi.

§1.1 Chiziqli bir jinsli vektor-matritsali tenglama.

1.Chiziqli operator va yechimning xossalari. Biz (2) ko'rinishdagi vektor-matritsali tenglamani o'rganamiz. Buning uchun ushbu

$$L[y] = \frac{dy}{dx} - A(x)y$$

operatorni kiritamiz. Shu operator yordamida (2) tenglama

$$L[y] = 0, \qquad (2')$$

(1') tenglama esa

$$L[y] = b(x) \qquad (3)$$

Ko'rinishda yozish mumkin.

L operatorning ba'zi xossalari bilan tanishamiz.

1^0. $L[Cy] = CL[y]$, $\quad C$ =const≠0.

Isbot. Ravshanki,

$$L[Cy] = \frac{dCy}{dx} - A(x)(Cy) = C\frac{dy}{dx} - CA(x)y = C\left(\frac{dy}{dx} - -A(x)y\right) = C\ y_1$$

.

2^0. $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$.

Isbot. L operatorning ta'rifiga ko'ra

$L[y_1 + y_2] = \frac{d}{dx}(y_1 + y_2) - A(x)(y_1 + y_2) = \left[\frac{dy_1}{dx} - A(x)y_1\right] + \left[\frac{dy_2}{dx} -\right.$

$\left.-A(x)y_2\right] = L[y_1] + L[y_2]$.

Bu ikki xossadan quyidagi natija kelib chiqadi:

$$L\left[\sum_{j=1}^{k} C_j y_j\right] = \sum_{j=1}^{k} C_j L[y_j]$$

$$C_j = \text{const}$$

Haqiqatdan ham,

$$L\left[\sum_{j=1}^{k} C_j y_j\right] = \sum_{j=1}^{k} L[C_j y_j] = \sum_{j=1}^{k} C_j L[y_j]$$

Endi L operatorning bu xossalaridan foydalanib, (2) tenglamaning yechimlari haqida ba'zi tasdiqlarni keltiramiz.

1-teorema. $Agar\ y = \varphi(x),$
$x\epsilon I\ vektor\ funksiya\ (2')\ tenglamani\ yechimi\ bo'lsa, u\ \ holda\ y = C\varphi(x),$
$C = const\ funksiya\ ham\ shu\ (2')\ tenglamaning\ \ yechimi\ bo'ladi.$

Isbot. Shartga ko'ra $L[\varphi(x)] \equiv 0,\ x\epsilon I$ shuning uchun 1^0 xossasiga ko'ra $L[C\varphi(x)] = CL[\varphi(x)] \equiv 0$. Teorema isbot bo'ldi.

2-teorema. $Agar\ y = \varphi^1(x), x\epsilon I_1\ va\ y = \varphi^2(x),\ x\epsilon I_2\ funksiyalar$
$(2^{'})\ tenglamaning\ \ tegishli\ intervallarida\ aniqlangan\ yechimlari\ bo'lsa,$

$u\ holda\ \ y = \varphi^1(x) + \varphi^2(x)\ funksiya\ (2^{'})\ tenglamaning\ I = I_1 \cap I_2$
$intervalda\ aniqlangan\ yechimi\ bo'ladi.$

Isbot. 2^0 xossaga ko'ra I intervalda quyidagiga egamiz:

$$L[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)] = L[\varphi_1(x)] + L[\varphi_2(x)].$$

Shart bo'yicha I intervalda $L[\varphi_1(x)] \equiv 0, \quad L[\varphi_2(x)] \equiv 0$

ayniyat o'rinli. Shuning uchun $L[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)] \equiv 0$ ekani kelib chiqadi.

Natija. $Agar\ \ y = \varphi_1(x), \quad x\ \epsilon I_1, \ldots\ldots,\ \ y =$
$\varphi_k(x), \quad x\ \epsilon I_k\ vektor\ funksiyalar\ (2^{'})\ \ tenglamaning\ tegishli\ intervallar$-
$da\ aniqlangan\ yechimlari\ bo'lsa, u$

$$holda\ \ y = \sum_{j=1}^{k} C_j\varphi_j(x)\,, \qquad C_j = const\ funksiya\ I\ = \bigcap_{j=1}^{k} I_j\ intervalda$$

$$aniqlangan\ yechim\ bo'ladi.$$

Isbot. Haqiqatan, 1^0, 2^0 xossalarga va 1-2 teoremalarga ko'ra quyidagiga egamiz ($x\ \epsilon I$ bo'lganda):

$$L\left[\sum_{j=1}^{k} C_j\varphi_j(x)\right] = \sum_{j=1}^{k} L\left[C_j\varphi_j(x)\right] = \sum_{j=1}^{k} C_j L\left[\varphi_j(x)\right] \equiv 0$$

.

3- teorema. $Agar\ A(x) matritsa\ haqiqiy\ bo'lgan\ (2^{'})\ tenglama\ y = u(x) +$
$+iv(x),\ \ x \in I\ kompleks\ yechimga\ ega\ bo'lsa,$
$u\ holda\ u(x)\ va\ v(x) funksiyalarning\ har\ biri\ (2) tenglamaning\ yechimi$

$$bo'ladi.$$

Isbot. Shartga bo'yicha $L[u(x)+iv(x)]\equiv 0$. 2^0 xossaga ko'ra $L[u(x)+$ $+iv(x)]=L[u(x)]+L[iv(x)]\equiv 0.$ Bundan $L[u(x)]\equiv 0,\ \ L[iv(x)]\equiv 0$ kelib chiqadi.

2. Vektorlarning chiziqli bog'liqli va erkliligi. Vronskiy determinant. Agar I intervalda aniqlangan $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots\dots,\varphi_n(x)$ bunda

$\varphi_j(x)=\begin{pmatrix}\varphi_{1j}\\ \varphi_{2j}\\ \vdots\\ \varphi_{nj}\end{pmatrix}$ vektor funksiyalar uchun bir vaqtda nolga teng bo'lmagan shunday $\propto_1,\ \propto_2\ \dots\dots,\propto_n$ o'zgarmas sonlar mavjud bo'lsaki, shu sonlar uchun $x\in I$ da $\propto_1\varphi_1(x)+\propto_2\varphi_2(x)+\ \dots\dots+\propto_n\varphi_n(x)\equiv 0$ (4)

ayniyat o'rinli bo'lsa, u holda berilgan $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots\dots,\varphi_n(x)$ vektor funksiyalar uchun I intervalda $chiziqli\ bog'liq$ deyiladi. Agar (4) ayniyat $\propto_1=\propto_2=\cdots=\propto_n=0$ bo'lgandagina o'rinli bo'lsa, berilgan $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots\dots,\varphi_n(x)$ vektor funksiyalar I intervalda chiziqli erkli deyiladi.

Ravshanki, (4) vektor ayniyat $\propto_1,\ \propto_2\ \dots\dots,\propto_n$ larga nisbatan n ta noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasidan iborat. Uning determinant $W(x)=W[\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots\dots,\varphi_n(x)$] deb belgilaymiz. Shunday qilib,

$$W(x)=\begin{vmatrix}\varphi_{11}(x)\dots & \varphi_{1n}(x)\\ \varphi_{21}(x)\dots & \varphi_{2n}(x)\\ \vdots & \vdots\\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{nn}(x)\end{vmatrix}$$

Bu determinant sistema uchun Vronskiy determinanti deyiladi.

4-teorema. $Agar\ (2')\ vektor\ matritsali\ tenglamaning\ A(x)\ matritsasi\ I\ intervalda\ uzluksiz\ bo'lib, shu\ tenglamaning\ \varphi^{(1)}(x),\varphi^{(2)}(x),\dots\dots,\varphi^{(n)}(x)$ $yechimlaridan\ tuzilgan$ (4) $Vronskiy\ determinanti\ I\ intervalning\ kamida\ bitta\ x=x_0\ nuqtasida\ nolga\ teng\ bo'lsa, u\ holda\ \varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots\dots,\varphi_n(x)$ $vektor\ funksiyalar\ (yechimlar) I\ intervalda\ chiziqli\ bog'liq\ bo'ladi,$ $boshqacha\ aytganda\ I\ da\ W(x)=0\ bo'ladi.$

Isbot. $A(x)$ matritsa uzluksiz bo'lgani uchun yechimning mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremaning shartlari bajariladi. Jumladan, $y(x_0) = 0$ boshlang'ich shart yechimni aniqlaydi. U yechim $y(x) \equiv 0$ trivial yechimdan iborat. Teorema sharti bo'yicha $W(x_0) = 0$. Shuning uchun bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $C_1, C_2, \dots \dots C_n$ sonlari uchun

$$C_1\varphi^{(1)}(x_0) + C_2\,\varphi^{(2)}(x_0) + \dots \dots + C_n\varphi^{(n)}(x_0) \equiv 0$$

ayniyat o'rinli. Endi $\varphi(x_0) = \sum_{j=1}^{n} C_j\,\varphi_j(x)(x)$ vektor funksiyani ko'raylik. Avvalo, L operatorning xossasiga ko'ra:

$$L[\varphi(x)] = L\left[\sum_{j=1}^{n} C_j\,\varphi^{(j)}(x)\right] = \sum_{j=1}^{n} C_j\,L\left[\varphi^{(j)}(x)\right] \equiv 0,$$

ya'ni $y = \varphi(x)$ vektor funksiya ($3'$) tenglamaning yechimidan iborat. So'ngra ,

$$\varphi(x_0) = \sum_{j=1}^{n} C_j\,\varphi^{(j)}(x_0) \equiv 0$$

ga egamiz. Shu boshlang'ich shartga ega bo'lgan yechim trivial yechim $y(x) \equiv 0$ dan iborat edi, demak, $\varphi(x) \equiv y(x)$. Bundan $\sum_{j=1}^{n} C_j\,\varphi^{(j)}(x) \equiv 0\left(\sum_{j=1}^{n} C_j^2 \neq 0\right)$ ekani, ya'ni $\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \dots \dots, \varphi^{(n)}(x)$ vektor funksiyalar I intervalda chiziqli bog'liq ekani, ya'ni $W(x) \equiv 0$ ekani kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Misollar. 1. Ushbu

$$\varphi^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 2e^x \end{pmatrix}, \quad \varphi^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 2e^{2x} \end{pmatrix}$$

Vektorlar $-\infty < x < +\infty$ intervalda chiziqli erkli. Haqiqatdan, bu vektorlar uchun

$$\alpha_1\varphi^{(1)}(x) + \alpha_2\varphi^{(2)}(x) \equiv 0$$

Yoki

$$\begin{cases} \alpha_1 e^x + 2\alpha_2 e^x \equiv 0 \\ 2\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^x \equiv 0 \end{cases}$$

ayniyatlar $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ bo'lganda o'rinli.

Eslatib o'tamiz, $W[\,\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x)] = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ 2e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - 2e^{3x} \equiv 0.$ Xulosa shuki, ko'rilayotgan vektorlar uchun Vronskiy determinant aynan nolga teng, ammo ular chiziqli erkli. Yuqoridagi 4-teoremaga ko'ra bu vektorlar bir vaqtda differensial tenglamaning yechimi bo'la olmaydi.

2. Yechimlarning fundamental sistemasi va umumiy yechim. Berilgan $(3')$ tenglamaning n ta chiziqli erkli yechimlari sistemasi mavjud. Haqiqatdan,

$$\varphi^{(1)}(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi^{(2)}(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \ \varphi^{(2)}(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlatiradigan yechimlar chiziqli erkli yechimlar sistemasini tashkil etadi. Bu tasdiqni umumiyroq isbot etamiz.

5-teorema.
$Agar\ \ \varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \dots \dots, \varphi^{(n)}(x)\ yechimlar\ uchun\ W(x_0) \neq 0, x_0 \in I\ bo'lsa, W(x_0) \neq 0,\ x \in I$ bo'ladi.

Isbot. $W(x)$ determinant ustun bo'yicha hosila olmiz:

$$W'(x) = \begin{vmatrix} \varphi'_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi'_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi'_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi'_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi'_{22}(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi'_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$+ \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi'_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \dots & \varphi'_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi'_{nn}(x) \end{vmatrix} = W_1(x) + W_2(x) + \cdots + W_n(x).$$

Bundan ko'rinadiki, $W'(x)$ hosila n ta determinant yig'indidan iborat. Ulardan birinchisini olamiz. Unda $\varphi'_{11}(x),\ \varphi'_{21}(x), \dots, \varphi'_{n1}(x)$ hosilalarni tegishli ifodalari orqali ifodalaymiz:

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} \varphi'_{11}(x)\ \varphi_{12}(x)\ \dots\ \varphi_{1n}(x) \\ \varphi'_{21}(x)\ \varphi_{22}(x)\ \dots\ \varphi_{2n}(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi'_{n1}(x)\ \varphi_{n2}(x) \dots\ \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}\varphi_{11}(x) + a_{12}\ \varphi_{12}(x) + \ \dots\ + a_{1n}\varphi_{1n}(x)\ \varphi_{12}(x)\ \dots\ \varphi_{1n}(x) \\ a_{11}\varphi_{21}(x) + \ a_{12}\varphi_{22}(x) + \ \dots + a_{1n}\varphi_{2n}(x)\varphi_{22}(x)\ \dots\ \varphi_{2n}(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{11}\varphi_{n1}(x) + \ a_{12}\varphi_{n2}(x) + \cdots + a_{1n}\varphi_{nn}(x)\varphi_{n2}(x)\ \dots\ \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x)\ \varphi_{12}(x)\ \dots\ \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x)\ \varphi_{22}(x)\ \dots\ \varphi_{2n}(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{n1}(x)\ \varphi_{n2}(x) \dots\ \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} +$$

$$+a_{12} \begin{vmatrix} \varphi_{12}(x)\ \varphi_{12}(x)\ \dots\ \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{22}(x)\ \varphi_{22}(x)\ \dots\ \varphi_{2n}(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{n2}(x)\ \varphi_{n2}(x) \dots\ \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$+a_{1n} \begin{vmatrix} \varphi_{1n}(x)\ \varphi_{12}(x)\ \dots\ \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{2n}(x)\ \varphi_{22}(x)\ \dots\ \varphi_{2n}(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{nn}(x)\ \varphi_{n2}(x) \dots\ \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}W(x) + a_{12} \cdot 0 + \cdots + a_{1n} \cdot 0 = a_{11}W(x).$$

Shunday qilib, $W_1(x) = a_{11}W(x)$. Shunga o'xshash ushbu $W_2(x) = a_{22}W(x), \dots$, $W_n(x) = a_{nn}W(x)$ formulalarni ham isbotlash mumkin. Demak, biz

$W'(x) = (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})W(x)$ formulaga egamiz. Uni $W(x)$ ga nisbatan o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama kabi (x_0 dan x gacha) integrallasak,

$$W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x}(a_{11}+\ \dots + a_{nn})dx} \qquad (6)$$

formulaga kelamiz. Bundan $W(x_0) \neq 0$ bo'lganda $W(x) \neq 0,\ x \in I$ ekni kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Agar

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x) = SpA(x)$$

($SpA(x)$ berilgan $A(x)$ matrisaning bosh diagonal elementlarining yig'indisini anglatib, $matritsaning\ izi$ deb ataladi) deb belgilasak,

$$W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} SpA(x)dx} \qquad (7)$$

formulaga ega bo'lamiz. Uni sistema uchun $Ostrogradskiy - Liuvill$ formulasi deyiladi.

Ravshanki ($2'$) tenglama ixtiyoriy $n+1$ ta yechimi chiziqli bog'liq. Buni ko'rsatish uchun ixtiyoriy yechim berilgan chiziqli erkli yechimlarining chiziqli kombinatsiyasi orqali yozilishi mumkinligini ko'rsatish yetarli. Boshqacha aytganda, berilgan yechimdan iborat vektor qolgan chiziqli erkli vektor yechimlar bo'yicha yoyilishi mumkinligini ko'rsatish yetarli. Bu quyidagi teoremada isbotlangan.

6-teorema.
$Agar\ \ \varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \dots\dots, \varphi^{(n)}(x)\ \ vektor\ funksiyalar\ I\ intervalda$

$aniqlangan\ chiziqli\ erkli\ yechimlardan\ iborat\ bo'lsa, u\ holda\ qaralayotgan$

$(2')\ tenglamaning\ ixtiyoriy\ \varphi(x) yechimi\ quyidagi$

$$\varphi(x) = C_1\varphi^{(1)}(x) + C_2\,\varphi^{(2)}(x) + \dots\dots + C_n\varphi^{(n)}(x) \qquad (8)$$

$formula\ bilan\ (C_1,\ C_2, \dots\dots, C_n\ o'zgarmaslarningyagona\ qiymati\ uchun)$ $yozildi.$

Isbot. Agar $\varphi^{(1)}(x_0) = \varphi_0^{(1)}, \dots\dots, \varphi^{(n)}(x_0) = 0,\ \varphi_0^{(n)}$ va $\varphi(x_0) = \varphi_0$ boshlang'ich shartlar berilgan bo'lsa, (8) formulada $x = x_0$ deb $C_1,\ C_2, \dots\dots, C_n$

larga nisbatan chiziqli sistema hosil qilamiz. Agar $\varphi(x) \equiv 0, \varphi_0 = 0$ bo'lsa, bir jinsli

$$\sum_{j=1}^{n} C_j\, \varphi_j(x_0) = \sum_{j=1}^{n} C_j\, \varphi_0^{(j)} = 0$$

sistemadan $W(x_0) \neq 0$ bo'lgani uchun $C_1 = \ \dots\dots = C_n = 0$ kelib chiqadi. Agar $\varphi(x) \neq 0$ bo'lsa, $\varphi_0 \neq 0$ bo'lgani uchun bir jinsli bo'lmagan

$$\sum_{j=1}^{n} C_j\, \varphi_0^{(j)} = \varphi_0$$

sistemadan ($W(x_0) \neq 0$ bo'lgani uchun) $C_1,\ C_2, \dots\dots, C_n$ larning yagona qiymatlarini topamiz. Demak, (8) yoyilma koeffitsiyentlari yagona. Teorema isbot bo'ldi.

(8) yoyilma ixtiyoriy $\varphi(x)$ yechim uchun yozilishi mumkin. Shuning uchun (8) formula $umumiy\ yechim\ formulasi$ deb yuritiladi.

Shunday qilib $(2')$ tenglama chiziqli erkli yechimlarining soni aniq n ta ekan. Shu chiziqli erkli yechimlar sistemasini $yechimlarning\ fundamental\ sistemasi$ deyiladi.

Yuqorida isbotlangan (7) teoremaga ko'ra berilgan fundamental sistema bo'yicha umumiy yechimni yozish mumkin. Demak, $(2')$ chiziqli bir jinsli sistemaning umumiy yechimini topish masalasi uning fundamental sistemasini topishdan iborat.

Misollar. 1. Ushbu

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$

sistemani integrallang.

Yechish. Yuqorida ko'rilishi bo'yicha $\varphi^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$, $\varphi^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$ vektor funksiyalar berilgan sistemaning yechimi va hatto ular chizqli erkli. Demak, ular fundamental sistemani tashkil etadi. Umumiy yechim

$$y = C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

Ko'rinishda yoziladi.

2. Ushbu

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + 2y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 2y_1 + y_2 \end{cases}$$

sistemani integrallang.

Yechish. Tekshirib ko'rish mumkinki, $\varphi^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}$,

$\varphi^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix}$ vektor funsiyalar sistema uchun yechimlardan iborat. Bu vektor funksiyalar fundamental sistemani tashkil etadi. Haqiqatdan,

$$W[\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}] = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-x} \\ e^{3x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{2x} - e^{2x} = -2e^{2x} \neq 0.$$

Shunday qilib, umumiy yechim

$$y = C_1 \begin{pmatrix} e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda yoziladi.

§1.2 Chiziqli bir jinsli bo'lmagan vektor-matritsali tenglama.

1. Umumiy yechim haqida. Yuqorida ta'kidlab o'tilgan (3) tenglamani o'rganishga o'tamiz.

7-teorema. $Agar\ y = \overline{\varphi}(x), x \in I\ vektor\ funksiya\ (3) chiziqli\ bir\ jinsli$

$vektor\ matritsali\ tenglamaning\ yechimi, y = \varphi^{(1)}(x), x \in I\ esa\ mos\ bir$

$jinsli\ tenglamaning\ yechimi\ bo'lsa, u\ holda\ y = \varphi^{(1)}(x) + \overline{\varphi}(x) funksiya$

$(3) tenglamaning\ I\ intervalda\ aniqlangan\ yechimi\ bo'ladi.$

Isbot. Teorema shartiga ko'ra:

$$L[\overline{\varphi}(x)] \equiv b(x), \quad L\left[\varphi^{(1)}(x)\right] \equiv 0.$$

bundan, $L\left[\varphi^{(1)}(x) + \overline{\varphi}(x)\right] = L\left[\varphi^{(1)}(x)\right] + L[\overline{\varphi}(x)] \equiv b(x).$

Teorema isbot bo'ldi.

8-teorema (umumiy yechim haqida).
$Agar\ b(x)\ vektor\ va\ A(x) matritsa\ I\ intervalda\ uzluksiz\ bo'lib, y = \sum_{j=1}^{n} C_j\, \varphi_j(x)\ funksiya\ mos\ bir\ jinsli$

$tenglamaning\ umumiyyechimi\ va\ y = \overline{\varphi}(x)\ funksiya\ esa\ tegishli\ bir$

$jinsli\ bo'lmagan\ tenglamaning\ yechimi\ bo'lsa, u\ holda\ bir\ jinsli$

$bo'lmagan\ tenglamaning\ umumiy\ yechimi$

$$y = \sum_{j=1}^{n} C_j\, \varphi^{(j)}(x) + \overline{\varphi}(x) \qquad (9)$$

$formula\ bilan\ yoziladi.$

Isbot.

Shart bo'yicha $L[\overline{\varphi}(x)] \equiv b(x)$, $L\left[\sum_{j=1}^{n} C_j\, \varphi^{(j)}(x)\right] \equiv 0.$ Shuning uchun

$L\left[\sum_{j=1}^{n} C_j\, \varphi_j(x) + \overline{\varphi}(x)\right] \equiv 0,$ demak, (9) formula bilan berilgan funksiya (3) tenglamaning yechimidir. (3) tenglamaning ixtiyoriy $y = g(x)$, $g(x) \neq \bar{\varphi}(x')$ yechimni olaylik. $x = x_0$ bo'lganda ushbu

$$g(x_0) = \left[\sum_{j=1}^{n} C_j\, \varphi_j(x_0) + \overline{\varphi}(x_0)\right] \qquad (10)$$

sistemaga egamiz. Unda $g(x_0) \neq \bar{\varphi}(x_0)$ bo'lgani uchun (10) sistema $C_1,\ C_2, \dots \dots, C_n$ larga nisbatan bir jinslibo'lmagan chiziqli sistemadir. Uning determinant $W(x_0)$ Vronskiy determinantidan iborat, u holda ravshanki, $W(x_0) \neq 0$. Shuning uchun (10) sistemadan yagona $C_1^0, \dots\ , C_n^0$ larni topamiz. Demak,

$$g(x) = \left[\sum_{j=1}^{n} C_j^0\, \varphi_j(x) + \overline{\varphi}(x)\right]$$

Bu esa (9) formula umumiy yechim formulasi ekanini isbot etadi. Teorema isbot bo'ldi.

2. O'zgarmaslarni variatsiyalash metodi (Logranj metodi). Agar (3) tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi ma'lum bo'lsa, u holda bir jinsli bo'lmagan tenglamaning umumiy yechimini topish mumkin. Quyida shu metodning mohiyati bilan tanishamiz.

Aytaylik ,

$$y = \sum_{j=1}^{n} C_j\, \varphi_j(x) \text{ funksiya } (**)\text{tenglamaning umumiy yechimi bo'lsin. Bu}$$

formulada $C_1,\ C_2, \dots \dots, C_n$ lar ixtiyoriy o'zgarmaslar ekani ma'lum. Endi (3) tenglamaning yechimini shunga o'xshash

$$y = \sum_{j=1}^{n} g_j(x)\, \varphi^{(j)}(x), \qquad g_j(x) \in C^1\ (1) \qquad (11)$$

ko'rinishda izlaymiz. (11) funksiya (3) tenglamaning yechimi bo'lsin deylik. U holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y' = \sum_{j=1}^{n} g_j'(x)\, \varphi^{(j)}(x) + \sum_{j=1}^{n} g_j(x) \frac{d(\varphi^{(j)}(x))}{dx}.$$

Topilgan ifodani (3) ga qo'yamiz:

$$\sum_{j=1}^{n} g_j'(x)\, \varphi^{(j)}(x) + \sum_{j=1}^{n} g_j(x) \frac{d(\varphi^{(j)}(x))}{dx} = A(x)\left[\sum_{j=1}^{n} g_j(x)\, \varphi^{(j)}(x)\right] + b(x).$$

Bundan $\frac{d(\varphi^{(j)}(x))}{dx} = A(x)\varphi^{(j)}(x)$ ekanini hisobga olib quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\sum_{j=1}^{n} g_j'(x)\, \varphi^{(j)}(x) + \sum_{j=1}^{n} g_j(x)\left[A(x)\varphi^{(j)}(x)\right] = \sum_{j=1}^{n} g_j(x)\left[A(x)\varphi^{(j)}(x)\right] + b(x)$$

yoki,

$$\sum_{j=1}^{n} g_j'(x)\, \varphi^{(j)}(x) = b(x) \qquad (12)$$

Topilgan (12) sistema uchun $b(x) \not\equiv 0$ bo'lganidan u $g_j'(x)$ larga nisbatan bir jinsli bo'lmagan sistemadan iborat. Uning determinant $W\left[\varphi^{(1)}, \dots \dots\ , \varphi^{(n)}\right] \neq$ $\neq 0, x \in I$. Demak, (12) dan $g_j'(x)$ larning yagona ifodalarini topamiz.

$$g_j'(x) = h_j(x).$$

Bundan $g(x) = \int h_j(x)dx + \overline{C_J}$. Bu ifodani (11) ga qo'yamiz:

$$y = \sum_{j=1}^{n} \overline{C_J}\, \varphi^{(j)}(x) + \sum_{j=1}^{n} \varphi^{(j)}(x) \int h_j(x)dx, \qquad (13)$$

bu yerda $\overline{C_J}$ lar ixtiyoriy o'zgarmaslardir.

O'zgarmasni variatsiyalash metodining mohiyati ana shundan iborat. Topilgan (13) formulaga diqqat bilan e'tibor bersak, bu formula mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{C_J}\, \varphi^{(j)}(x)$$

bilan bir jinsli bo'lmagan tenglamaning yechimi(xususiy yechimi)

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_x^{(j)}(x) \int h_j(x)d_\tau$$

yig'indisidan iborat. Bu funksiya haqiqatdan ham xususiy yechim ekanini ko'rsatish qiyin emas. Buning uchun (3) tenglama ayniyatga aylanishini ko'rsatamiz:

$$y' = \frac{d}{dx}\left[\sum_{j=1}^{n} \varphi^{(j)}(x) \int h_j(x)dx\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[\left[\left(\frac{d}{dx}\varphi^{(j)}(x)\right) \int h_j(x)dx + \varphi^{(j)}(x)\, h_j(x)\right] =\right.$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{d}{dx}\varphi^{(j)}(x)\right) \int g_j'(x)dx + b(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{d}{dx}(\varphi^{(j)}(x))\right) \int [g_j'(x)] + b(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} A(x)\left(\varphi^{(j)}(x)\right)[g_j(x)] + b(x) = A(x)\sum_{j=1}^{n} g_j(x)\, \varphi^{(j)}(x) + b(x) =$$

$$= A(x)y + b(x).$$

Bu sodda hisoblashlar yuqoridagi tasdiqni isbotlaydi.

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + \dfrac{1}{cosx}, \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$

sistemani integrallang.

Yechish. Mos bir jinsli sistemaning umumiy yechimi

$$y = C_1\begin{pmatrix} cosx \\ -sinx \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} sinx \\ cosx \end{pmatrix}$$

ko'rinishda yoziladi. Sistemani o'zgarmasni variatsiyalash metodi bilan integrallaymiz. Yechimi

$$y = g_1(x)\begin{pmatrix} cosx \\ -sinx \end{pmatrix} + g_2(x)\begin{pmatrix} sinx \\ cosx \end{pmatrix}$$

ko'rinishda izlaymiz. $g_1'(x)$ va $g_2'(x)$ larni topish uchun ushbu

$$\begin{cases} g_1'(x)\cos x + g_2'(x) sin\, x = \dfrac{1}{cosx} \\ -g_1'(x) sin\, x + g_2'(x) cos\, x = 0 \end{cases}$$

sistemaga egmiz. Undan $W = 1$, $g_1'(x) = 1$, $g_2'(x) = tgx$ va $g_1(x) = x + \overline{C_1}$, $g_1(x) = -\ln|cosx| + \overline{C_2}$ kelib chiqadi. Shunday qilib, umumiy yechimni quyidagicha yozamiz:

$$y = \overline{C_1}\begin{pmatrix} cosx \\ -sinx \end{pmatrix} + \overline{C_2}\begin{pmatrix} sinx \\ cosx \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} cosx \\ -sinx \end{pmatrix} - \ln|cosx|\begin{pmatrix} sinx \\ cosx \end{pmatrix}.$$

§1.3 Chiziqli o'zagarmas koeffitsiyentli vektor matritsli tenglama

1. Chiziqli bir jinsli o'zgarmas koeffitsiyentli tenglama. Agar (2') da $A(x) = const$ bo'lsa, bu

$$y' = Ay \qquad (14)$$

tenglama chiziqli bir jinsli o'zgarmas koeffitsiyentli tenglama deyiladi. Agar (3) da $A(x) = const$ bo'lsa, hosil bo'lgan

$$y^{\prime} = Ay + b(x) \qquad (15)$$

tenglamani chiziqli bir jinsli bo'lmagan o'zgarmas koeffitsiyentli tenglama deb ataladi. Quyida (15) ko'rinishidagi vetkor matritsali tenglamalarni integrallash bilan shug'ullanamiz.

(14) vektor matritsali tenglama yechimini

$$y = \alpha e^{kx} \qquad (16)$$

ko'rinishida izlaymiz, bunda $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ biror haqiqiy yoki kompleks son. (16) ga ko'ra $y_1 = \alpha_1 e^{kx}$, $y_2 = \alpha_2 e^{kx}$......... , $y_n = \alpha_n e^{kx}$. Bu funksiyalardan hosila olib, ularni (14) ga qo'yamiz:

$$\alpha k e^{kx} = e^{kx} A\alpha$$

yoki

$$\alpha k = A\alpha$$

Bundan

$(A - kE)\alpha = 0,\ E$ –birlik matritsa (*).

Qayd qilamizki, biz (14) tenglamaning trivial bo'lmagan yechimini izlaymiz, ya'ni (16) da $\alpha \neq 0$ (yoki baribir, $\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 \neq 0$) bo'lsin. Bu bir jinsli tenglamaning trivial yechimi bor ekani ravshan. Shunday qilib, oxirgi munosabat $\alpha_1, \dots , \alpha_n$ larga nisbatan chiziqli bir jinsli sistemadir. Bu sistema trivial bo'lmagan (ya'ni $\alpha \neq 0$ bo'lganda) yechimga ham ega bo'lishi uchun uning determinanti nolga teng bo'lishi zarur va yetarli. Demak, ko'rilayotgan holda

$|A-kE|=0$ ($|A-kE|$ – bu $A-kE$ matritsaning determinanti) munosabat bajariladi. Bu k ga nisbatan n-tartibli algebraik tenglamadan iborat bo'lib, uni (14) tenglamaga mos $xarakteristik\ tenglama$ deyiladi,

Xarakteristik tenglamani yana

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0 \qquad (17)$$

Ko'rinishda yozish mumkin. Bu tenglama algebraning asosiy teoremasiga ko'ra n ta ildizga ega. Biz a_{ij} elementlar haqiqiy bo'lgan holni ko'ramiz. Bunda ildizlar ichida komplekslari bo'lsa, ularga qo'shma bo'lgan kompleks sonlar ham ildiz bo'ladi.

Har bir ildizga mos (16) yechimni topish lozim. (17) tenglamaning o'zaro farqli ildizlari n ta bo'lishi ham, n tadan kam bo'lishi ham mumkin. Shu hollarni alohida ko'ramiz.

1) Xaraktiristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va har xil. Bu hollarda har bir $k=k_1,\ j=\overline{1,n}$ ni (*) tenglamaga qo'yib, mos $\alpha^{(j)}$ vektorni topamiz. Shu bilan n ta

$$y^{(j)}=\alpha^{(j)}e^{k_jx}, \quad j=\overline{1,n}$$

yechimni topamiz. Bu yechimlar chiziqli erkli, chunki $C_1\alpha^{(1)}e^{k_1x}+C_2\alpha^{(2)}e^{k_2x}+\dots+C_n\alpha^{(n)}e^{k_nx}\equiv 0$ ayniyat faqat $C_1=C_2=\dots=C_n=0$ bo'lgandagina o'rinli bo'ladi. Demak, topilgan vektorlar yechimlarning fundamental yechimlarini tashkil etadi. Shuning uchun umumiy yechimni yozish mumkin bo'ladi.

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} y_1'=y_1+2y_2 \\ y_2'=2y_1+y_2 \end{cases}$$

sistemani integrallang.

Yechish . Bu holda $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ bo'lib, xarakteristik tenglama

$\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 2 & 1-k \end{vmatrix} = 0$ yoki $(1-k)^2 - 4 = 0$ ko'rinishga ega. Tenglamani yechib, $k_1 = -1,\ k_2 = 3$ ildizlarni topamiz.ildizlar haqiqiy va har xil. Avval $k_1 = -1$ ga mos yechimni ko'ramiz.

$$y^{(1)} = \alpha^{(1)} e^{-x} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} \end{pmatrix} e^{-x}$$

Bundan $\alpha_1^{(1)}$ va $\alpha_2^{(1)}$ larni topish uchun

$$\begin{cases} [1-(-1)]\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0 \\ 2\alpha_1^{(1)} + [1-(-1)]\alpha_2^{(1)} = 0 \end{cases}$$

sistemaga egamiz. Uni soddaroq

$$\begin{cases} 2\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0 \\ 2\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0 \end{cases} \text{ yoki } \ \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} = 0$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bundan $\alpha_1^{(1)} = C_1,\ \ \alpha_2^{(1)} = -C_1$ deb olsak bo'ladi, bu yerda $-C_1$-ixtiyoriy o'zgarmasa. Shunday qilib, $y^{(2)} = \binom{C_1}{-C_1} e^{-x}$. Agar $k_2 = 3$ bo'lsa, quydagiga egamiz:

$$y^{(2)} = \alpha^{(2)} e^{-x} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(2)} \\ \alpha_2^{(2)} \end{pmatrix} e^{-x}$$

va

$$\begin{cases} (1-3)\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} = 0 \\ 2\alpha_1^{(2)} + (1-3)\alpha_2^{(2)} = 0 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} -2\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} = 0 \\ \ 2\alpha_1^{(2)} - 2\alpha_2^{(2)} = 0 \end{cases}$$

Bu sistemadan $\alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)} = C_2$ kelib chiqadi, bu yerda C_2-ixtiyoriy o'zgarmas. Shunday qilib, , $y^{(2)} = \binom{C_2}{C_2} e^{3x}$. Umumiy yechimi

$$y = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}$$

ko'rinishda yoki koordinatalar bo'yicha

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} \\ y_2 = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} \end{cases}$$

ko'rinishida yozish mumkin.

2) Xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va ularning ichida karrali ildizlar ham bor. Karrali bo'lmagan oddiy ildizlarga mos yechimlar avvalgi holdagi kabi topiladi. Endi $k = k_s$ ildiz γ_s karrali bo'lsin deylik. Bu holda mos yechim

$$y^{(s)} = \left(\alpha_0^{(s)} + \alpha_1^{(s)}x + \cdots + \alpha_{\gamma_s-1}^{(s)}x^{\gamma_s-1}\right)e^{k_s x} \quad (18)$$

ko'rinishga izlanadi, buyerda

$$\alpha_0^{(s)}\begin{pmatrix}\alpha_{10}^{(s)}\\ \alpha_{20}^{(s)}\\ \vdots\\ \alpha_{n0}^{(s)}\end{pmatrix}, \dots \ , \alpha_j^{(s)} = \begin{pmatrix}\alpha_{1j}^{(s)}\\ \alpha_{2j}^{(s)}\\ \vdots\\ \alpha_{nj}^{(s)}\end{pmatrix}, \quad j = 0,\ \gamma_s - 1.$$

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 4y_2 \\ y_2' = y_1 - y_2 \end{cases}$$

sistemani integrallang.

Yechish. Agar xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -1-k \end{vmatrix} = 0 \ \text{ yoki } -(3-k)(1+k) + 4 = 0$$

Bundan $k^2 - 2k + 1 = 0$. Bu tenglamaning ildizlari o'zaro teng va $k_{1,2} = 1$. Demak, $k = 1$ ildiz haqiqiy va ikki karrali. Mos yechimni

$$\begin{cases} y_1 = (a_1 + b_1 x)e^x \\ y_2 = (a_2 + b_2 x)e^x \end{cases}$$

ko'rinishida izlaymiz. Bundan:

$$y_1' = (a_1 + b_1 + b_1 x)e^x, y_2' = (a_2 + b_2 + b_2 x)e^x$$

Endi bu formulalarni berilgan sistemaga qo'ysak, quydagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} (a_1 + b_1 + b_1 x)e^x = 3(a_1 + b_1 x)e^x - 4(a_2 + b_2 x)e^x \\ (a_2 + b_2 + b_2 x)e^x = (a_1 + b_1 x)e^x - (a_2 + b_2 x)e^x \end{cases}$$

Bu yerda:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + b_1 x = 3a_1 - 4a_2 + (3b_1 - 4b_2)x \\ a_2 + b_2 + b_2 x = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)x \end{cases}$$

Mos koeffitsiyentlarni taqqoslab topamiz:

$$x^0: a_1 + b_1 = 3a_1 - 4a_2; \quad a_2 + b_2 = a_1 - a_2$$

$$x: b_1 = 3b_1 - 4b_2; \quad b_2 = b_1 - b_2.$$

Oxirgi ikkita tenglamadan $b_1 = 2b_2$ kelib chiqadi. Shuning uchun $b_2 = C_2$ ni ixtiyoriy o'zgarmas deb olsak, $b_1 = C_2$, $b_2 = C_2$ bo'ladi. Birinchi ikki tenglamadan $a_1 = 2a_2 + b_2$ kelib chiqadi. Bunda a_2 ixtiyoriy bo'lib qoladi. Agar $a_2 = C_1$ desak, $a_1 = 2C_1 + C_2$ ga ega bo'lamiz. Shunday qilib, yechimni

$$y_1 = (2C_1 + C_2 + 2C_2x)e^x, \quad y_1 = (C_1 + C_2x)e^x$$

ko'rinishda yozish mumkin.

3) Xarakteristik tenglamaning ildizlari ichida oddiy va karrali kompleks ildizlar ham bor. Masalan, $k = a \pm ib$ ildizlar oddiy ildiz bo'lsin. Bu holda mos yechimlar

$$y^{(1)} = a^{(1)}e^{ax}cosbx, \; y^{(2)} = a^{(2)}e^{ax}sinbx,$$

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ \vdots \\ a_n^{(1)} \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} a_1^{(2)} \\ \vdots \\ a_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda izlanadi. Agar $k = a \pm ib$ son γ karrali kompleks ildiz bo'lsa, u holda yechim

$$y^{(1)} = \left(a_0^{(1)} + a_1^{(1)}x + \dots + a_{\gamma-1}^{(1)}x^{\gamma-1}\right)e^{ax}cosbx$$

$$y^{(2)} = (a_0^{(2)} + a_1^{(2)}x + \dots + a_{\gamma-1}^{(2)}x^{\gamma-1})e^{ax}sinbx$$

ko'rinishda izlanadi.

§1.4 Chiziqli bir jinsli bo'lmagan o'zgarmas koeffitsiyentli tenglama

Avvalo eslatamizki, biz (15) ko'rinishadgi vektor matritsali tenglamaga egamiz va uning umumiy yechimini mos bir jinsli tenglama umumiy yechimi bo'yicha o'zgarmasni variatsiyalash metodi bilan topishimiz mumkin. Ba'zi hollarda $b(x)$ vektor funksiya maxsus ko'rinishga ega bo'ladi. Bu maxsus ko'rinishdagi funksiya kvaziko'phaddan iborat bo'lib, bunday funksiya $g(x)e^{kx}$ ko'rinishga ega va $g(x)$ - biror tartibli vektor ko'phad, k-haqiqiy yoki kompleks son bo'lsa, $e^{kx} = e^{k_1+ik}x = e^{k_1x}(cosk_1x + isink_2x)$ formulaga ko'ra vektor matritsali tenglamaning o'ng tomoni o'rnida

$$g(x)e^{k_1x}cosk_2x \text{ va } g(x)e^{k_1x}sink_2x$$

vektor funksiyalar olinadi.

1) agar k son xarakteristik tenglamaning oddiy ildizi bo'lsa, mos yechim $h(x)e^{kx}$ ko'rinishida izlanadi, bunda $h(x)$-koeffitsiyentlari noma'lum bo'lgan, tartibi esa $g(x)$ vektor ko'phadning tartibi bilan bir xil bo'lgan vektor ko'phaddir.

2) agar k son xarakteristik tenglamaning γ karrali ildizi bo'lsa, mos yechim $x^{\gamma-1}h(x)e^{kx}$ ko'rinishida izlanadi.

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + y_2 \end{cases}$$

sistemani integrallang.

Yechish. Avvalo xarakteristik tenglamani tuzamiz va yechamiz. U tenglama

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 2 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{yoki} \quad (1-k)^2 - 4 = 0$$

ko'rinishga ega. Bundan $k^2 - 2k + 1 - 4 = 0$ yoki $k^2 - 2k - 3 = 0$. Uning ildizlari: $k_1 = 3,\ \ k_2 = -1$. Berilgan sistemada $b_1(x) = e^x,\ \ b_2(x) = e^{3x}$ bo'lib, bunda $k_1 = 3$ xarakteristik tenglamaning 1-karrali ildizidir. Buni hisobga olgan holda xususiy yechimni

$y_1 = b_1e^x + (b_2 + b_3x)e^{3x} \quad\quad y_2 = a_1e^x + (a_2 + a_3x)e^{3x}$

ko'rinishda izlaymiz. Tegishli hosilalar olib, ularni berilgan sistemaga qo'yamiz va so'ngra so'ngra sodda o'zgartirishlar bajaramiz:

$$y_1' = b_1e^x + (b_3 + 3b_2 + 3b_3x)e^{3x}$$

$$y_2' = a_1e^x + (a_3 + 3a_2 + 3a_3x)e^{3x}$$

$$\begin{cases} b_1e^x + (b_3 + 3b_2 + 3b_3x)e^{3x} = b_1e^x + (b_2 + b_3x)e^{3x} + \\ +2(a_2 + a_3x)e^{3x} + e^x \\ a_1e^x + (a_3 + 3a_2 + 3a_3x)e^{3x} = 2b_1e^x + 2(b_2 + b_3x)e^{3x} + \\ +a_1e^x + (a_2 + a_3x)e^{3x} + e^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = b_1 + 2a_1 + 1, \quad b_3 + 3b_2 + 3b_3x = b_2 + b_3x + 2a_2 + 2a_3x\,, \\ a_1 = 2b_1 + a_1, \quad a_3 + 3a_2 + 3a_3x = 2b_2 + 3b_3x + a_2 + a_3x + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 1 = 0, \quad b_3 + 3b_2 = b_2 + 2a_2, \quad 3b_3 = b_3 + 2a_3; \\ 2b_1 = 0, \quad a_3 + 3a_2 = 2b_2 + a_2 + 1, \quad 3a_3 = 2b_3 + a_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2}; \quad b_1 = 0; \\ b_3 + 2b_2 = 2a_2; \\ 2b_3 = 2a_3, \\ 2b_2 = a_3 + 2a_2 - 1; \end{cases}$$

Oxirgi tenglamalardan $a_3 = b_3 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{4}, \quad b_2 = 0$ kelib chiqadi. Shunday qilib, berilgan sistemaning xususiy yechimi $y_1 = \frac{1}{2}xe^{3x}$, $y_2 = -e^x + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x\right)e^{3x}$ ko'rinishga ega bo'ladi.

Mos bir jinsli sistemaning umumiy yechimini ham topish qiyin emas. Ushbu

$$\begin{cases} y_1 = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} \\ y_2 = C_1e^{3x} - C_2e^{-x} \end{cases}$$

vektor funksiya tegishli umumiy yechim ekanligini bevosita tekshirib ko'rish mumkin. Shunday qilib, berilgan bir jinsli bo'lmagan sistemaning umumiy yechimi

$$y_1 = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{3x} \quad y_2 = C_1e^{3x} - C_2e^{-x} - e^x + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x\right)e^{3x}$$

vektor funksiyadan iborat.

2-BOB. AVTONOM SISTEMALAR.

§2.1 Umumiy xossalar.

Differensial tenglamaning normal sistemasini ushbu

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots\dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, \dots\dots, y_n), \\ \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots\dots, y_n), \end{cases} \quad (**)$$

ko'rinishda yozgan edik. Agar (**)sistemada $f_1(x, y_1, \dots\dots, y_n)$, $f_2(x, y_1, \dots\dots, y_n), \dots\ , f_n(x, y_1, \dots\dots, y_n)$ funksiyalar x ga oshkora bog'liq bo’lmasa, u holda bu sistema

$$\begin{cases} y_1' = f_1(\,y_1, \dots \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(\,y_1, \dots \dots, y_n), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_n' = f_n(\,y_1, \dots \dots, y_n), \end{cases} \qquad (19)$$

ko’rinishda yoziladi. (19) ko’rinishda yozilgan normal sistemani birinchi tartibli differensial tenglamalarning $normal\ avtonom$ (yoki $dinamik$) sistemasi deyiladi.

Juda ko’p tadbiqiy masalalarni yechishda (19) ko’rinishidagi avtonom sistemalar bilan tavsiflanadigan jarayonlarni o’rganishga to’g’ri keladi. Shu jihatdan avtonom sistemalar muhim ahamiyat kasb etadi. Nazariy jihatdan ham avtonom sistemalaning boshqa sistemalardan farq qiladigan xarakterli xossalari mavjud.

Qayd qilib o’tamizki, ixtiyoriy normal sistemani tenglamalari sonini bittaga oshirish hisobiga avtonom sistemaga keltirish mumkin. Haqiqatan, (**)

sistemada $x = y_{n+1}$ deb, $y_{n+1}' = 1$ tenglamani hosil qilish mumkin. Bunda (**) sistema o’rniga

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_{n+1}\ y_1, \dots \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(y_{n+1}, y_1, \dots \dots, y_n), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y_n' = f_n(y_{n+1}, y_1, \dots \dots, y_n), \\ y_{n+1}' = 1 \end{cases} \qquad (20)$$

avtonom sistemaga ega bo’lamiz.

Avtonom sistemaning ba’zi muhim xossalariga to’xtalamiz.

1-lemma. $Agar\ y = \varphi(x),\ x \in$
$I\ funksiya\ (19) sistemaning\ yechimi\ bo'lsa, u\ holda$

$$shunday\ o'zgarmas\ C\ lar\ topish\ mumkinki, y = \varphi(x + C)\ funksiya\ ham$$

$$bu\ sistemaning\ yechimi\ bo'ladi.$$

Isbot. Haqiqatan, ravshanki,

$$\frac{d\varphi(x+C)}{dx}=\frac{d\varphi(x+C)}{d(x+C)}=f\big(\varphi(x+C)\big),$$

bu yerda $\varphi(x)$ va $f(y)$ lar n o'lchovli ustun vektorlar. Lemma isbot bo'ldi.

Agar $y=\varphi(x),\ \varphi(x)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x)\\ \vdots\\ \varphi_n(x)\end{pmatrix}$ vektor funksiyalar (19) sistemaning I intervalda aniqlangan yechimi bo'lsa, u holda ushbu $\{y\colon y=\varphi(x),\ \ x\in I\}$ to'plam n o'lchovli R^n fazoda egri chiziqni ifodalaydi. $y=\varphi(x),\ x\in I$ esa bu chiziqning parametrik tenglamasidan iborat. Shu egri chiziqni avtonom sistemaning $holat\ trayektoriyasi$, tegishli fazoni esa avtonom sistemanning $holat\ fazosi$ deb yuritiladi. Holatlar fazosini xarakterli xususiyatlaridan biri shuki, $n+1$ o'lchovli R^{n+1} fazoda chizilgan integral egri chiziqni abssisa o'qi bo'ylab R^n fazoga ortogonal proeksiyalasak, hosil bo'lgan egri chiziq holat trayektoriyasidan iborat bo'ladi.

Ko'pincha holat trayektoriyasini o'rganish integral egri chiziqlar haqida to'la tasavvurga ega bo'lish uchun yetarli bo'ladi.

2-lemma.

$$Avtonom\ sistemaning\ ikkita\ holat\ trayektoriyasi\ yo\ bitta\ ham$$

$$umumiy\ nuqtaga\ ega\ emas, yoki\ ular\ o'zaro\ ustma-ust\ tushadi.$$

Isbot. Avtonom sistemaning ikkita holat trayektoriyasini $y=\varphi(x)$ va $y=\mu(x)$ deb belgilaylik. $x_1\neq x_2$ bo'lganda $\varphi(x_1)=\mu(x_2)=y_0$ bo'lsin deylik. Agar $x_1=x_2$ bo'lganda $\varphi(x_1)=\mu(x_1)=y_0$ dan x_1 ning biror atrofida $\varphi(x)\equiv\mu(x)$ ekani kelib chiqadi (mulohazalarimizda avtonom sistema uchun yechimning mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremaning shartlari bajariladi deb faraz qilamiz). Shuning uchun $x_1\neq x_2$ holni ko'rish lozim. Ushbu $y=\mu(x++x_2-x_1)\equiv\delta(x)$ vektor funksiyani ko'ramiz. Bu funksiya $\delta(x_1)=\mu(x_1+x_2--x_1)=\varphi(x_2)=y_0$ bo'lgani uchun 1-lemmaga ko'ra (19) sistemaning yechimidan iborat. Ammo $\varphi(x_1)=y_0$ bo'lgani uchun $\varphi(x)\equiv\delta(x)$, ya'ni $\varphi(x)\equiv\mu(x+x_2-x_1)$. Lemma isbot bo'ldi.

Ta'rif. Agar $a = (a_1, \ a_2, \dots, a_n) \in \ R^n$ nuqta uchun $f(a) = 0$ vektor tenglik o'rinli bo'lsa, u holda a nuqta (19) sistemaning *muvozanat holati* deyiladi.

3-lemma. $Agar\ y = a\ nuqta$ (19) $sistemaning\ muvozanat\ holati\ bo'lsa,$ $y(x) \equiv a\ vektor\ funksiya\ shu\ sistamaning - \infty < x < +\infty\ \ intervalda\ aniqlangan\ yechimi\ bo'ladi.$

Isbot. Haqiqatan, $y = a$ bo'lsa, $\frac{dy}{dx} = \frac{da}{dx} = 0$ va $f\big(y(x)\big) = f(a)$ dan $\frac{da}{dx} \equiv f(a)$ kelib chiqadi.

4-lemma. $Agar\ y = a\ nuqta$ (19) $sistemaning\ muvozanat\ holati\ bo'lsa,$ $u\ holda\ y(x) = a\ shu\ sistemaning\ holat\ trayektoriyasi\ bo'ladi.$

Isbot ravshan. Qayd qilamizki, agar a nuqta (19) sistemaning muvozanat holati bo'lib, biror $x = x_0$ uchun R^n fazoda $y(x)$ nuqta $y = a$ nuqtada bo'lsa, u holda x ning muvozanat holatida bo'ladi. Shu fikrning ma'nosidan erkli o'zgaruvchi x vaqt rolini o'ynayotgani bilinib turibdi. Keyingi mulohazalarimizda x ni vaqt t ga almashtirib yozamiz. Shunday qilib, u qolgan vaqt davomida ham shu holda bo'ladi., ya'ni harakat qilmaydi.

5-lemma. $Nuqtadan\ farq\ qiladigan\ holat\ trayektoriyasi\ silliq\ egri\ chiziqdan\ iborat.$

Isbot. Haqiqatan, agar $y = \varphi(t)$ funksiya (19) sistemaning yechimi bo'lib, muvozanat holatidan farq qilsa, u holda $t = t_0$ da $y^0 = \varphi(t_0)$ nuqtada urinma vektor $\frac{d\varphi(t_0)}{dt}$ ga teng. Ammo $\frac{d\varphi(t_0)}{dt} = f\big(\varphi(t_0)\big) = f(y^0)$. Endi $\varphi(t_0) = y^0$ nuqta ixtiyoriy ekanidan lemmaning isboti kelib chiqadi.

Quyida holat trayektoriyalarining turlarini ajratib beradigan muhim teoremani keltiramiz.

9-teorema. (19)$avtonom\ sistemaning\ holat\ tayektoriyasi\ quyidagi\ uch\ tipdan\ birortasiga\ mansub\ bo'ladi$:

1) $o'zini - o'zi\ kesmaydigan\ nuqtadan\ farqli\ silliq\ egri\ chiziq$;

2) $yopiq\ silliq\ chiziq\ (sikl)$;

3) $nuqta$.

$Agar\ y = \varphi(t)\ yechimga\ mos\ holat\ trayektoriyasi\ silliq\ yopiq\ egri\ chiziqdan\ iborat\ bo'lsa, bu\ yechim\ T > 0\ davrli\ funksiya\ bo'ladi.$

Isbot. Agar holat trayektoriyasi muvozanatidan farq qilsa, bu chiziq 5-lemmaga ko'ra silliq egri chiziq bo'ladi va u yo yopiq bo'ladi, yoki yopiq bo'lmaydi.

$y = \varphi(t)$ yechimga mos yopiq holat trayektoriyasini G deb belgilaylik. Bu yechim davriy ekanini isbot qilamiz. Biror $a \in G$ ni olamiz. 1-lemmaga ko'ra $a = \varphi(0)$ deb olsa bo'ladi. Shu trayektoriyaning elementar yoyi uzunligi quydagicha topiladi:

$$ds = |dx| = \left|\frac{dy}{dt}\right| dt = |f(\varphi(t))|dt. \qquad (21)$$

$f(\varphi(t))$ funksiya G daquyidan va yuqoridan chegaralangan, chunki G –nuqta-larning chegaralangan to'plami deb qaralishi mumkin, ya'ni $0 < m \le |f(y)| \le \le M < \infty,\ y \in G$. Endi (21) ni 0 dan t gacha integrallaymiz va tegishli yoy uzunligini $l(t)$ deb belgilaymiz:

$$l(t) = \int_0^t |f(\varphi(\tau))|d\tau.$$

Bundan

$$l(t) = \int_0^t |f(\varphi(\tau))|d\tau \ge mt, \text{ya'ni } \ l(t) \ge mt$$

Demak, $l(t)$ funksiya t ning monoton o'suvchi funksiyasidir. Shunday qilib,

$l(T) = l$ bo’ladigan yagona $T > 0$ mavjud. Shuning uchun ravshanki, $(T) = = \varphi(0)$. Bu munosabat birinchi marta bajariladigan T ning qiymatini topish uchun ushbu

$$l = \int_0^T |f(\varphi(\tau))| d\tau \qquad (22)$$

tenglamaning eng kichik musbat yechimi (ildizini) topish lozim bo’ladi. Teorema isbot bo’ldi.

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$

sistemaning muvozanat holati va davriy yechimlarini toping. So’ngra (1,0) nuqtadan o’tadigan yopiq holat trayektoriyasi yoyi uzunligini hisoblang.

Yechish. Ma’lumki, yuqoridagi sistemaning umumiy yechimi

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} sint \\ cost \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -cost \\ sint \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 sint - C_2 cost \\ C_1 cost + C_2 sint \end{pmatrix}$$

dan iborat. Bu yechim yana

$$\begin{cases} y_1 = Acos(t + \alpha) \\ y_2 = Asin(t + \alpha) \end{cases}$$

$(A > 0,\ \alpha -$ixtiyoriy o’zgarmas) ko’rinishda ham yozish mumkin. Ravshanki, $y_1^2 + y_2^2 = A^2$. Markazi koordinatalar boshida bo’lgan konsentrik aylanalar oilasi hosil bo’ldi. Bu aylanalar ichida (1,0) nuqtadan o’tadigani $y_1^2 + y_2^2 = 1$ aylanadir, uning radiusi: $A = 1$. Bir tomondan, bu aylana yoyining uzunligi 2π ga teng. Ikkinchi tomondan, $A = 1$ bo’lganda shu aylananing parametrik tenglamasi

$$y_1 = cos(t + \alpha) \qquad (= \varphi_1(t))$$

$$y_2 = sin(t + \alpha) \qquad (= \varphi_2(t))$$

kabi yoziladi. Shuning uchun $f(\varphi(t)) = \sqrt{f_1^2(\varphi(t)) + f_2^2(\varphi(t))} =$

$= \sqrt{sin^2(t + \alpha) + cos^2(t + \alpha)} = 1$. Demak, $2\pi = \int_1^T 1 d\tau$ dan $T = 2\pi$ kelib chiqadi. Eng kichik davr $T = 2\pi$ dan iborat. Shu bilan birga $k \cdot 2\pi, k =$

$= \pm 2, \pm 3, \ldots$ sonlar ham davr bo'ladi.

§2.2 Chiziqli bir jinsli o'zgarmas koeffitsiyentli sistemaning holatlar tekisligi

Chiziqli bir jinsli o'zgarmas koeffitsiyentli ikkinchi tartibli sistemani ko'raylik. Bunday sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases} \qquad (23)$$

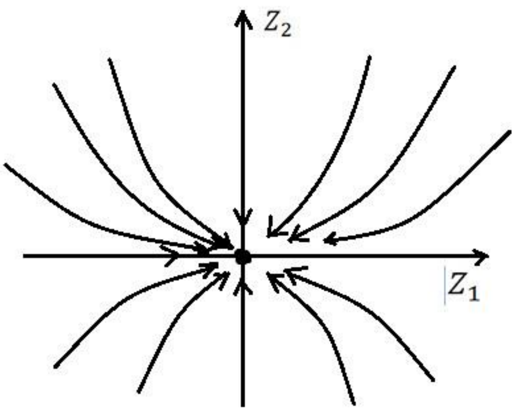
ko'rinishda yoziladi($a_{ij} = const$). Bu sistemaning muvozanat holati

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases} \qquad (24)$$

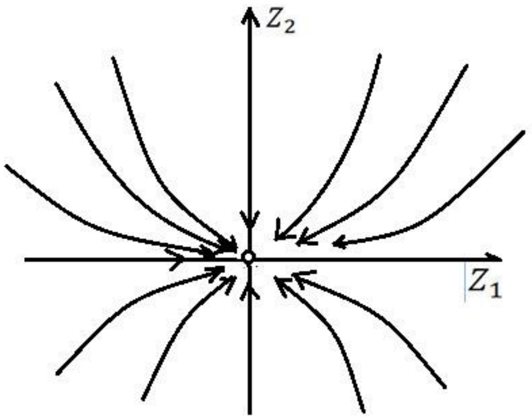
sistemaning trivial yechimi $y_1 \equiv 0,\ \ y_2 \equiv 0$ dan iborat bo'lib, holatlar tekisligida koordinatalar boshidan iborat. Bizni shu muvozanat holat atrofida holat trayektoriyalarining ko'rinishi qiziqtiradi. Bu esa $|A| = \det(a_{ij})$ determinantga bog'liq bo'ladi, chunki mos xarakteristik tenglama

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0 \qquad (25)$$

ko'rinishda yozilishi ma'lum. (3.24) tenglama k ga nisbatan kvadrat tenglama bo'lib, uning ildizlari $k_1,\ k_2$ haqiqiy yoki kompleks bo'lishi mumkin. Eslatib o'tamizki, a_{ij} lar haqiqiy o'zgarmaslardir.



1-chizma



2-chizma

I. k_1 va k_2 haqiqiy, har xil va noldan farqli.

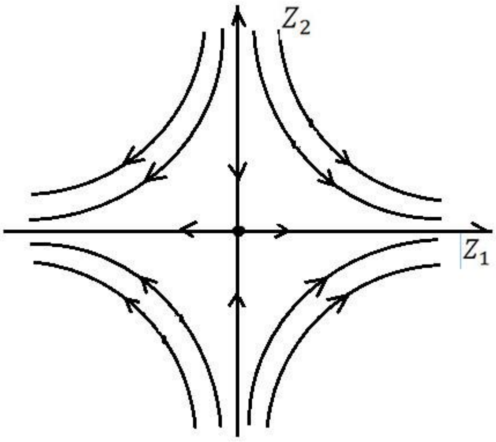
1) k_1 va k_2 lar bir xil ishoraga ega. Shu holga va umuman, I holga tegishli mulohazalarni (23) sistemani soddaroq ko'rinishga keltirib olib borilsa, qulay bo'ladi. Eslatilgan I holda o'zgaruvchilarni shunday almashtirish mumkinki, natijada hosil bo'lgan sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = k_1 z_1 \\ \dfrac{dz_2}{dt} = k_2 z_2 \end{cases} \qquad (26)$$

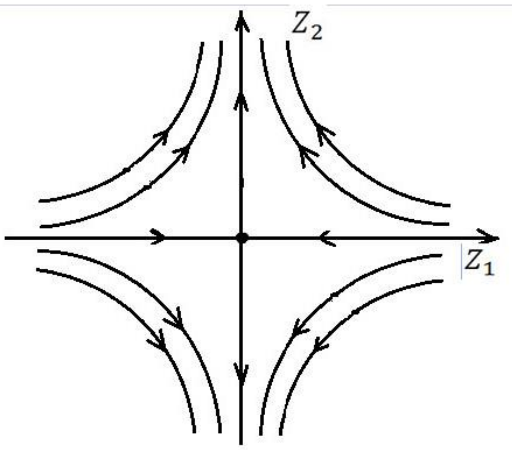
ko'rinishga keladi. Bundan $z_1 = C_1 e^{k_1 t},\ z_1 = C_2 e^{k_2 t}$. Bu $(z_1,\ z_2)$ tekislikda holat trayektoriyasining parametrik tenglamasidir.

Agar $k_1 < 0,\ k_2 < 0$ bo'lib, $k_1 > k_2$ bo'lsa, trayektoriyalar 1-chizmadagidek bo'ladi; $k_1 < 0,\ k_2 < 0\ \ k_1 < k_2$ bo'lsa, trayektoriyalar 2-chizmadagidek bo'ladi. Har ikki holda ham hosil bo'lgan rasm $turg'un\ tugun\ rasmi$ (hamma traektory-lar bo'yicha harakat $t \to +\infty$ da muvozanat holati tomon yo'nalgan) deyiladi. Agar $k_1 > 0,\ \ k_2 > 0$ bo'lsa, biz yana yuqoridagi rasmning o'ziga faqat yo'nalishi teskari bo'lgan holda ega bo'lamiz. Bunday rasm $turg'unmas\ tugun\ rasmi$ deyiladi.

2) k_1 va k_2 lar turli ishoralarga ega. Agar $k_2<0< k_1$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda biz $egar$ rasmiga egamiz. Bu 3-chizmada tasvirlangan. $k_1 < 0 < < k_2$ bo'lsa, rasm 4-chizmadagidek bo'ladi.



3-chizma.



4-chizma.

II. k_1 va k_2 kompleks sonlar. Bu holda shunday almashtirish topiladiki, natijada yangi noma'lumlarga nisbatan

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = az_1 - bz_2, \\ \dfrac{dz_2}{dt} = bz_1 - az_2, \qquad b \neq 0 \end{cases} \tag{27}$$

sistema hosil bo'ladi. Yuqorida $k_1 = a + ib,\ k_2 = a - ib$ deb qaraldi. (27) sistemaning umumiy yechimini

$$\begin{cases} z_1 = Re^{at}\cos(bt + \alpha), \\ z_2 = Re^{at}\sin(bt + \alpha), \quad R > 0 \end{cases} \tag{28}$$

deb yozish mumkin. Bu esa holat trayektoriyalarining parametrik tenglamalaridir.

Holat trayektoriyasining grafigini chizishga doir misollar:

1. $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 2y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = y_2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = 2y_2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -2y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = -2y_2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -3y_1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -2y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 2y_1 - y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1 + 2y_2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 3y_1 + y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -2y_1 + y_2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_1 + 2y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1 + y_2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_1 + 3y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_1 + y_2 \end{cases}$

X U L O S A

Bitiruv malakaviy ish ilmiy xarakterda bo'lib, u differensial tenglamalar sistemasini o'rganishga bag'ishlangan. Ushbu bitiruv malakaviy ishda asosan quyidagi mavzularga to'xtalgan:

- Differensial tenglamalar sistemasining boshlang'ich tushunchalari o'rganilgan;
- Normal sistemaning yechimlari haqida to'xtalgan;
- Matritsali differensial tenglamalarni yechimlarini topish usullari;
- Avtonom sistemalar qisqacha o'rganilgan;
- Sistemaning holatlar tekisligi tekshirilgan;
- Ishning har bir bobida misol va masalalar yechib ko'rsatilgan;

Mazkur bitiruv malakaviy ishda to'plangan materiallar yordamida matematika yo'nalishi talabalari differensial tenglamalar sistemasini o'rganishda foydalanishlari mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Понтрягин Л.С. “Обыкновенные дифференциальные уравнения”, Москва, Наука, 1969
2. Петровский И.Г. “Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений”, Москва, Наука 1964
3. Степанов В.В. “Курс дифференциальных уравнений”, Москва, Гиз физ. мат. Литературы 1958
4. Еругин Н.П ва бошкалар. “Курс обыкновенных дифференциальных уравнений”, Головне изд. Киев. 1974
5. Хартман Ф. “Обыкновенные дифференциальные уравнения”, изд, Москва,“Мир” 1970
6. Коддингтон Э.А., Левинсон Г. “Теория обыкновенных дифференциальных уравнений”, Москва, ИЛ, 1958
7. Пуанкаре А. “О кривых опредиляемих дифференциальными уравнениями” Москва, Л, 1947.
8. Ляпунов А.М. “Общая задача об устойчивости движения” Собр. Соч.т II изд АНСССР, 1956
9. Элсьголц Л.Э. “Дифференциальные уравнения и вариационное исчесление” Москва,Наука 1965
10. Понтрягин Л.С. ДАНСССР т. 174 №6, 1967
11. Пейович Т. “*Bulletin de la socicte mathematique de France”* 53, 1925, 208-225
12. Еругин Н.П. “Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений”. Наука И техника, Минск, 1970
13. Наймарк М. А. “Линейные дифференциальные оператори” Москва, Наука, 1969
14. Кори-Ниезов Т.Н. “Танланган асарлар, 4-том. Дифференциал тенгламалар”, УзССР “Фан” нашриети Тошкент 1968
15. Трикоми Ф. “Дифференциальные уравнения”, изд, “ИЛ” Москва,1962
16. Четаев Н.Г. “Устойчивост движения”. Гостехиздат. Москва,1955
17. Малкин И.Г. “Теория устойчивест движения” Москва,Наука, 1966
18. Демидович Б.П. “Лекции по математической теории устойчивости” Москва,Наука, 1967

19.Флиппов А.Ф. “О некоторых вопросах теории оптималного регулирования” Вестник Московского университета №2 1959г
20.Андронов А.А. Витт А.А. Хайкин С.Э “Теории колбаний” в изд 2-е Физматгиз Москва,1955
21.Курант П. “Уравнения с частними производными” изд-во в “Мир” Москва,1967
22.Гюнтер Н.М “Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных” ОНТИ, ГТТИ, 1934
23.Трикоми Ф. “Лекции по уравнения с частных производных” Москва,ИЛ, 1957.
24. Q.B.Boyqo’ziyev “Differensial tenglamalar”, Toshkent “O’qituvchi”-1983
25. M.S.Salohitdinov, G’.N.Nasritdinov, “Oddiy differensial tenglamalar” Toshkent “O’qituvchi”-1982