O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika – matematika fakulteti

“Matematika” kafedrasi

5130100- “Matematika” ta’lim yo’nalishi bo’yicha bakalavr

darajasini olish uchun

Jabborova Aziza Allayorovnaning

«ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY MASALALAR »

mavzusida

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Rahbar: __________ fiz-mat.f.n., dots. X.Norjigitov

GULISTON - 2017

BMI "Matematika" kafedrasining 20___ yil __ may №__ sonli yig'ilishida ko'rib chiqildi va himoyaga tavsiya etiladi.

Kafedra mudiri __________ fiz-mat.f.n., dots. X. Norjigitov

Fizika matematika fakulteti dekani tomonidan himoya qilishga ruhsat etiladi.

Fakultet dekani __________ p.f.n. dots. Sh. Ashirov

Mundarija

	KIRISH…………………………………………………………….	**2**
	1-BOB. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY MASALALAR	**2**
§ 1.1	**Chegaraviy masalalar haqida umumiy tushuncha ....**	**2**
§ 1.2	**Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar..**	**2**
§ 1.3	**Umumlashgan Grin funksiyasi ....**	**2**
	2-BOB. SHTURM-LIUVILL MASALASI.........................	**2**
§2.1	**Masalaning qo'yilishi..**	**2**
§ 2.2	**Shturm –Liuvill masalasi xos sonlari va xos funksiyalarining xossalari..**	
§2.3	**Grin funksiyasi tuzishga doir misollar................................**	
	Xulosa...	
	Foydalanilgan adabiyotlar...	

KIRISH

Tadqiqotning dolzarbligi: Differensial tenglamaga Koshi masalasi qo'yilga bo'lsin. Koshi masalasining geometrik ma'nosi berilgan nuqtadan o'tadigan yechimni izlashdan iborat. Shu yechim boshqa nuqtadan o'tadimi? − degan savol tug'ilishi tabiiy. Ya'ni: biror I intervalda aniqlangan $y = \varphi(x)$ funksiya

$$y^{(n)} = f(\, x, y, y', \dots\ y^{(n-1)}) \qquad (0.1)$$

Differensial tenglamaning ushbu

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y_{01}, \ \ . \ . \ . \ \ \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{0(n-1)}\,, \ \ x_0 \epsilon \text{ I} \qquad (0.2)$$

Shartni qanoatlantiradigan yechimi bo'lsa, shu $y = \varphi(x)$ funksiya yana

$$\varphi(x_1) = y_1, \ \varphi'(x_1) = y_{11}, \ \ . \ . \ . \ , \varphi^{(n-1)}(x_1) = y_{1(n-1)}, \quad x_1 \epsilon I\,, \ x_1 \neq x_0 \quad (0.3)$$

Shartni ham qanoatlantiradimi?−degan savol tug'iladi. Bu yerda albatta $f(x,\ y, y',\ \dots\ , y^{(n-1)})$ funksiyaning aniqlanish sohasi ochiq $D_{n+1} \complement R^{n+1}$ to'plamdan iborat bo'lib, $(x_0, y_{01},\ y_{02}, .\ .\ .\ , y_{0(n-1)}) \epsilon D_{n+1}$ va $(x_1,\ y_{11},$ $y_{12},\ \dots, y_{1(n-1)}) \epsilon D_{n+1}$ shartlar bajariladi. Aks holda ma'noga ega bo'lmay qoladi.

Umuman, aytganda savol yuqoridagi kabi qo'yilmasligi ham mumkin, ya'ni no'malum funksiya va uning hosilalarining $x = x_0$ va $x = x_1$ qiymatlaridan tuzilishi mumkin. Shu sababli yanada umumiyroq bo'lgan quyidagi masalani qo'yamiz:

Agar

$$y^{(n)} = f(\, x, y, y',\ \dots, y^{(n-1)}) \qquad (0.1)$$

tenglama va

$$g_i(x_0, y(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0);\ \ x_1, y(x_1), \dots, y^{(n-1)}(x_1)) = 0 \qquad (0.4)$$

munosabatlar bilan berilgan bo'lsa, (0.1) tenglamaning (0.4) shartni qanoatlantiruvchi yechimlarini izlash chegaraviy masala deyiladi, bu yerda

$x_0 \epsilon I,\ x_1 \epsilon I,\ x_0 \neq x_1,\ \ i = 1,2,\dots,n.$

Bunday chegaraviy masalalarni yechish talabaga oson emas. Shu sababli ushbu bitiruv malakaviy ishda chegaraviy masalalar soddaroq holler uchun:

Birinchi va ikkinchi tartibli differensial tenglamalar uchun o'rganilgan va to'liq tahlil etilgan.

Tadqiqotning obyekti va predmeti: Bitiruv malakaviy ishning obyekti, matematika mutaxassisligini oluvchi talabalar bo'lib, ,,Differensial tenglamalar" mavzulari uning predmeti hisoblanadi.

Tadqiqotning yangiligi va ahamiyati: Ushbu bitiruv malakaviy ishda differensial tenglamalarda chegaraviy masalalarni yechishda Grin funksiyasidan foydalanilgan va Shturm−Liuvill masalasi tahlil etilgan hamda misollar bilan tushintirilgan.

Tadqiqotning strukturasi: Bitiruv malakaviy ish kirish, ikkita bob, oltita paragraf, xulosa va adabiyotlar ro'yhatidan iborat.

I–BOB. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY MASALALAR

1.1- §. Chegaraviy masalalar haqida umumiy tushuncha

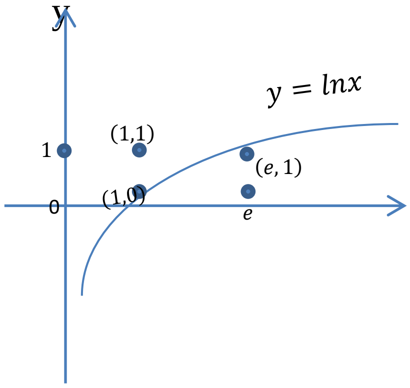
Agar integral egri chiziqning berilgan ikki nuqtadan o’tishi talab etilsa, bu masala Koshi masalasidan farq qilib , berilgan ikki nuqtaning har biri uchun alohida olingan Koshi masalasi yechimga ega bo’lsa ham, bu qo’yilgan masala yechimga ega bo’lmasligi mumkin.

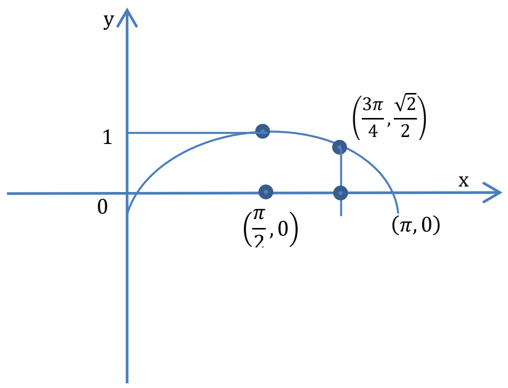
Birinchi tartibli differensial tenglama uchun masala qisqacha

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1 \qquad (1)$$

kabi yozilishi mumkin. Agar $y(x_0)=y_0$ shartni qanoatlantiradigan yechim mavjud bo’lsa, u yechim $y(x_1)=y_1$ shartni ham qanoatlantiradimi yoki yo’qmi? Degan savolga javob berish lozim bo’ladi. Bu holda tegishli savolga bevosita tekshirish bilan javob berish mumkin. Masalan, $y'=\frac{1}{x}$, $x>0$, $y(e)=1$, $y(1)=1$ masala yechimga ega emas. Haqiqatan, $y=lnx+C$ berilgan tenglamaning umumiy yechimi, $y(e)=1$ shartga ko’ra, $1=lne+C$ va $C=0$. Demak, $y=lnx$ yechim $y(e)=1$ shartni qanoatlantiradi. Ammo bu funksiya $y(1)=1$ shartni qanoatlantirmaydi, chunki $y(1)=ln1=0\neq 1$. Shunga o’xshash , ushbu $y'=\frac{1}{x}$, $x>0$, $y(e)=1$, $y(1)=0$ masala yechimga ega. Bu yuqoridagi mulohazalardan ko’rinib turibdi (1-chizma).

Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar uchun $y''=f(x,y,y')$, $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$ masala qo’yilishi mumkin. Bu masalada integral egri chiziq $(x_0,\ y_0)$ nuqtadan qanday y_0' –burchak koeffitsiyent bilan o’tishi avvaldan berilgan emas.





$1-$chizma. $2-$chizma.

Misol sifatida ushbu $y'' + y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y(x_1) = y_1$ masalani tekshiraylik. Berilgan tenglama xarakteristik tenglamasining ildizlari $\pm i$ va umumiy yechim $y = C_1 cosx + C_2 sinx$ dan iborat. Bundan $y(0) = 0$ shartni qanoatlantiradigan yechim $y = C_2 sinx, C_1 = 0$ ekani kelib chiqadi. Agar $x_1 = k\pi$ ($k -$berilgan ixtiyoriy butun son) bo'lsa , $y(k\pi) = C_2 sink\pi = 0$ ($C_2 -$ixtiyoriy bo'lganda ham). Agar $x_1 \neq k\pi$ bo'lsa, u holda $y_1 = C_2 sinx_1$ dan $C_2 = \frac{y_1}{sinx_1}$, $sinx_1 \neq 0.$ Tegishli yechim $y = \frac{y_1}{sinx_1} \cdot sinx$ dan iborat. Ko'rilayotgan masala yechimga ega. Ammo $y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ shartlarni qanoatlantiradigan trivial bo'lmagan yechim esa mavjud emas. Buning isboti $C_2 \neq 0$ bo'lganda $C_2 \cdot sin\frac{\pi}{2} = C_2 \neq 0$ dan ko'riladi. Agar berilgan chiziqli tenglamaning trivial $y = 0$ yechimini olsak , bu yechim uchun $y(0) = 0,\ y(x_1) = 0$ ($x_1 -$berilgan ixtiyoriy son) shartlar qanoatlantiriladi (2-chizma).

Yuqorida qo'yilgan va Koshi masalasidan farq qiladigan masala ikki nuqtali chegaraviy yoki baribir , chetki masala deb yuritiladi. Masala bundan umumiyroq ko'rinishda ham qo'yilishi mumkin.

1.2-§. Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar

1. Ikki nuqtali chegaraviy masala. Ushbu

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = \varphi(x) \qquad (2)$$ tenglamaning

$$y(x_0) = y_{0,}\ y(x_1) = y_1 \qquad (3)$$

shartlarni qanoatlantiradigan yechimini topish masalasi (2) tenglama uchun ikki nuqtali chegaraviy masala deb yuritiladi. (2)$-$(3) masalani o'zgaruvchini almashtirish bilan soddalashtirish mumkin. Chunonchi,

$$z = y - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) - y_0, \ \ x_0 \neq x_1$$

deb almashtirish bajarsak $z(x_0) = 0, \ z(x_1) = 0$ ga ega bo'lamiz. Bu aralashtirish natijasida (2) tenglama yana ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaga o'tadi. Bunga bevosita hisoblash bilan ishonch hosil qilish mumkin.

Ko'pincha (2) tenglamani tekshirishga qulay bo'lgan boshqa ko'rinishga yoziladi. Agar (2) ning ikki tomonini $e^{\int p_1(x)dx}$ funksiyaga ko'paytirsak,

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = f(x) \qquad (4)$$

ko'rinishidagi tenglamaga ega bo'lamiz. Yuqoridagi mulohazani e'tiborga olib (4) tenglama uchun

$$y(x_0) = 0, \ y(x_1) = 0 \qquad (5)$$

shartni qanoatlantiradigan yechimini toppish masalasini qo'yishimiz mumkin.

Agar $f(x) \not\equiv 0$ bo'lsa, (4)–(5) masala bir jinsli bo'lmagan, $f(x) \equiv 0$ bo'lganda esa bir jinsli masala deb yuritiladi.

2. (4)–(5) masala uchun Grin funksiyasi. Ikki argumentli $G(x, s)$ funksiya quyidagi to'rtta shartni qanoatlantirsi:

1^0. $G(x, s)$ funksiya x bo'yicha $x_0 \leq x \leq x_1$ intervalda uzluksiz bo'lib, s –tayinlangan va $x_0 \leq s \leq x_1$;

2^0. $G(x, s)$ funksiya $x_0 \leq x \leq x_1$ intervalda $x = s$ dan boshqa barcha nuqtalarda ushbu

$$(py')' + qy = 0$$

bir jinsli tenglamaning yechimidan iborat;

3^0. $G(x, s)$ funksiya

$$G(x_0, s) = G(x_1, s) = 0$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi;

4^0. $x = s$ nuqtada $G'_x(x,s)$ hosila birinchi tur uzilishga ega bo'lib, uning sakrashi $\frac{1}{p(s)}$ ga teng , ya'ni

$$G'_x(s+0,s) - G'_x(s-0,s) = \frac{1}{p(s)}$$

yoki

$$G'_x(s,s+0) - G'_x(s,s-0) = -\frac{1}{p(s)}.$$

Bu holda $G(x,s)$ funksiya qo'yilgan (4)−(5) chegaraviy masalaning Grin funksiyasi deb ataladi.

Teorema. $(Gilbert\ teoremasi)$. Agar (4)−(5) maslaning Grin funksiyasi ma'lum bo'lsa , bu masalaning yechimi

$$y = \int_{x_0}^{x_1} G(x,s)f(x)dx \qquad (6)$$

formula bilan yoziladi, aksincha agar $y = y(x)$ funksiya qo'yilgan masalaning yechimi bo'lsa , uni (6) ko'rinishida ifodalash mumkin (bu yerda $f(x)$ −uzluksiz funksiya).

Isbot. Haqiqatan, (6) formula bilan aniqlangan $y(x)$ funksiya $y(x_0) = y(x_1) = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi, chunki Grin funksiyasining ta'rifiga ko'ra $G(x_{0,}s) = G(x_1,s) = 0$ va $y(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} G(x_0,s)f(s)ds = 0$, $y(x_1) = \int_{x_0}^{x_1} G(x_1,s)f(s)ds = 0$. Endi (6) formula bilan aniqlangan $y(x)$ funksiya (4) tenglamaning yechimi ekanini ko'rsatamiz. Buning uchun avval (6) ni quyidagicha yozamiz:

$$y = \int_{x_0}^{x} G(x,s)f(s)ds + \int_{x}^{x_1} G(x,s)f(s)ds.$$

Bundan $y'(x)$, $y''(x)$ hosilalarni hisoblaymiz:

$$y'^{(x)} = \int_{x_0}^{x} G'_x\,(x,s)f(s)ds + \int_{x}^{x_1} G'_x\,(x,s)f(s)ds + G(x,x-0)f(x) -$$
$$G(x,x+0)f(x) = \int_{x_0}^{x_1} G'_x\,(x,s)f(s)ds + \int_{x}^{x_1} G'_x\,(x,s)f(x,s)ds =$$

$\int_{x_0}^{x_1} G'_x\,(x,s)f(s)ds;\; y''(x) = \int_{x_0}^{x_1} G''_{xx}\,(x,s)f(s)ds + \int_{x}^{x_1} G''_{xx}\,(x,s)f(s)ds +$

$[G'_x(x,x-0) - G'_x(x,x+0)]f(x) = \int_{x_0}^{x} G''_{xx}(x,s)f(x)ds + \frac{1}{p(x)}f(x).$

$y(x), y'(x), y''(x)$ larning qiymatini (4) ga qo'ysak,

$\int_{x_0}^{x_1} [p(x)G''_{xx}(x,s) + p'(x)G'_x(x,s) + qG(x,s)]f(s)ds + f(x) \equiv f(x).$

Endi qo'yilgan (4)−(5) masalaning yechimi mavjud bo'lsa, uni (6) formula bilan yozilisini isbotlaylik. $y(x)$ qo'yilgan (4)−(5) masalaning yechimi bo'lsin, bu masalaning Grin funksiyasi (mavjudligini keyinroq ko'rsatamiz) $G(x,s)$ bilan belgilaylik. (4) tenglamani $G(x,s)$ ga,

$$(p(x)G'_x)' + q(x)G = 0$$

Tenglamani $y(x)$ ga ko'paytirib , birinchisidan ikkinchisini ayiramiz:

$$[(p(x)y')'G - p(x)G'_x y] = G(x,s)f(x)$$

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'G - p(x)G'_x y] = G(x,s)f(x).$$

Bu tenglikning har ikkala tomonini x_0 dan x_1 gacha integrallaymiz (bunda $G'_x(x,s)$ funksiya $x = s$ bo'lganda birinchi tur uzilishga ega va $y(x), G(x,s)$ funksiyalar (4.5) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi): $[p(x)y'G - y(x)p(x)G'_x(x,s)]\Big|_{x_0}^{s-0} + [p(x)y'G - y(x)p(x)G'_x(x,s)]\Big|_{s+0}^{x_1} = - \int_{x_0}^{x_1} G(x,s)f(x)dx.$

Bundan chegaraviy shartlar va Grin funksiyaning xossasini e'tiborga olib ,

$-y(s)p(s)G'_x(s-0,s) + y(s)p(s)G'_x(s+0,s) = \int_{x_0}^{x_1} G(x,s)f(x)dx$

yoki

$$y(s) = \int_{x_0}^{x_1} G(x,s)f(x)ds$$

ni hosil qilamiz.

s ni x bilan almashtirsak :

$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(s,x)f(s)ds$ hosil bo'ladi.

Qo'yilgan masalaning Grin funksiyasi G o'z argumentlariga nisbatan simmetrikdir, ya'ni

$$G(x,s) = G(s,x).$$

Buni e'tiborga olsak, oxirgi munosabatdan (4.6) kelib chiqadi. Endi $G(x,s)$ ning simmetrikligini ko'rsatish qoldi. Buning uchun

$$L[y] = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + qy = f(x),\ \ L(z) = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dz}{dx}\right) + qz = g(x)$$

belgilanishni kiritamiz. Ixtiyoriy $y \in C^2, z \in C^2$ funksiyalar uchun quyidagi

$$zL(y] \equiv yL[z] = \frac{d}{dx}[p(zy' - yz')] = f(x)z - g(x)y \qquad (7)$$

Grin formulasi o'rinli bo'ladi. Bu formulada $z = G(x,\xi)$, $y = G(x,s)$ desak $L[y] = L[z] = 0$ bo'ladi. Integrallash sohasi $x_0 \leq x \leq x_1$ ni 3 bo'lakka , ya'ni $x_0 \leq x \leq s$, $s \leq x \leq \xi$, $\xi \leq x \leq x_1$

ga bo'lib, (4.7) ni integrallasak:

$$p\big[G(x,\xi)G'_{x'}(x,s) - G(x,s)G'_x(x,\xi)\big]\Big|_{x_0}^{s-0} +$$
$$p[G(x,\xi)G'_x(x,s) - G(x,s)G'_x(x,\xi)]\Big|_{s+0}^{\xi-0} +$$
$$p[G(x,\xi)G'_x(x,s) - G(x,s)G'_x(x,\xi)]\Big|_{\xi+0}^{x_1} = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerdan Grin funksiyasining xossalarini e'tiborga olsak , quyidagiga ega bo'lamiz:

$$p[G(x,\xi)G'_x(x,s) - G(x,s)G'_x(x,\xi)]\Big|_{\xi+0}^{s-0} +$$
$$p[G(x,\xi)G'_x(x,s) - G(x,s)G'_x(x,\xi)]\Big|_{s+0}^{\xi-0} = 0$$

yoki $p(s)G(s,\xi)[G'_x(s-0,s) - G'_x(s+0,s)] - p(s)G(s,s)[G'_x(s,\xi) - G'_x(s,\xi)] + p(\xi)G(\xi,\xi)[G'_x(\xi,s) - G'_x(\xi,s)] - p(\xi)G(\xi,s)[G'_x(\xi-0,\xi) - G'_x(\xi+0,\xi)] = 0$

yoki

$$p(s)G(s,\xi)\left(\frac{1}{p(s)} - p(\xi)G(\xi,s)\frac{1}{p(s)}\right) = 0.$$

Bundan

$$G(s,\xi) = G(\xi,s).$$

Shu bilan teorema to'la isbot bo'ldi.

Endi qo'yilgan masalaning Grin funksiyasini tuzish bilan shug'ullanamiz. Bundan Grin funksiyasining mavjudligini ta'minlaydigan yetarli shartlar kelib chiqadi.

Ushbu

$$(py')' + qy = 0 \qquad (8)$$

bir jinsli tenglamaning $y(x_0) = y(x_0) = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan yechimin $y \equiv 0$ bo'lsin.

(8) tenglamaning $y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = y_0' \neq 0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradigan yechimini $y_1(x)$ deb belgilaylik, bunday yechim mavjud , chunki $p,\ p'$ va q lar x_0 nuqta atrofida uzluksiz. Bu yechim, umuman olganda, ikkinchi $y(x_1) = 0$ chegaraviy shartni qanoatlantirmaydi.

Ma'lumki, $y = C_1y_1(x)$ (bu yerda C_1 −ixtiyoriy o'zgarmas son) funksiya $y(x_0) = 0$ chegaraviy shartni qanoatlantiradi. Xuddi shunga o'xshash tenglamaning $y(x_1) = 0$ chegaraviy shartni qanoatlantiradigan trivial bo'lmagan yechimi $y_2(x)$ ni topamiz. $C_2y_2(x)$ ham $y_2(x_1) = 0$ chegaraviy shartni qanoatlantiradi (bu yerda C_2 −ixtiyoriy o'zgarmas son).

Grin funksiyasini quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$G(x,s) = \begin{cases} C_1y_1(x), & x_0 \le x \le s, \\ C_2y_2(x), & s \le x \le x_1. \end{cases}$$

Bu yerdagi C_1 va C_2 larni shunday topamizki, natijasida Grin funksiyasi 1^0 va 4^0 shartlarni qanoatlantirsin, ya'ni 1) $G(x,s)$ funksiya tayinlangan s uchun x bo'yicha uzluksiz bo'lsin, xususiy holda $x = s$ da uzluksiz:

$$C_1 y_1(s) - C_2 y_2(s) = 0 \qquad (9)$$

va 2) $G'_x(x,s)$ funksiya $x = s$ nuqtada uzilishga ega bo'lib, uning sakrashi $\frac{1}{p(s)}$ ga teng bo'lsin:

$$C_2 y'_2(s) - C_1 y'_1(s) = \frac{1}{p(s)}. \qquad (10)$$

Ravshanki, $y_1(x)$ funksiya bilan chiziqli bog'liq bo'lgan funksiyalar $C_1 y_1(x)$ ko'rinishga ega bo'ladi. $y_1(x_1) \neq 0$ bo'lganidan $C_1 y(x_1) \neq 0$, $(C_1 \neq 0)$ bo'ladi. Shu bilan birga $y_2(x_1) = 0$. Bulardan $y_1(x)$ va $y_2(x)$ larning chiziqli erkliligi kelib chiqadi. Demak, mos Vronskiy determinanti

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

tekshirilayotgan $x = s$ nuqtada noldan farqli bo'ladi. Shuning uchun (9), (10) sistemadan C_1 va C_2 larni topamiz:

$$C_1 = \frac{y_2(s)}{W(s)p(s)}; \qquad C_2 = \frac{y_2(s)}{W(s)p(s)}.$$

Bularni e'tiborga olsak, Grin funksiyasi

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{y_2(s)y_1(x)}{W(s)p(s)}, & x_0 \leq x \leq s, \\ \frac{y_1(s)y_2(x)}{W(s)p(s)}, & s \leq x \leq x_1 \end{cases}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. (7) formuladan $W(s)p(s)$ =const ekanligi kelib chiqadi. $y_1(x)$ va $y_2(x)$ xususiy yechimlarni shunday tanlash mumkinki, natijada $W(s)p(s) = 1$ bo'ladi. Bu holda qo'yilgan masalaning Grin funksiyasi

$$G(x,s)=\begin{cases} y_2(s)y_1(x), & x_0\le x\le s,\\ y_1(s)y_2(x), & s\le x\le x_1. \end{cases}$$

formula bilan beriladi. Bu formuladan qo'yilgan masala uchun Grin funksiyasining simmetrikligi ko'rinib turibdi.

Misol. Quyidagi

$$y''+y=f(x),\qquad y(0)=0,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

Chegaraviy masalaning Grin funksiyasini toping.

Yechish. Eng avval $y''+y=0$ tenglamaning $y(0)=0$ shartni qanoatlantiruvchi $y_1=C_1sinx$ yechimini topamiz. So'ngra shu bir jinsli tenglamaning $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ shartni qanoatlantiruvchi $y_2=C_2cosx$ yechimni topamiz. Grin funksiyasini quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$G(x,s)=\begin{cases} C_1sinx, & 0\le x\le s,\\ C_2cosx, & s\le x\le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Grin funksiyasi $x=s$ nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun

$$C_1\sin s-C_2\cos s=0$$

Munosabatga, hosilasi esa $x=s$ nuqtada uzilishga ega bo'lgani uchun $p(x)=1$ ni hisobga olsak,

$$-C_2\sin s-C_1\cos s=1$$

Munosabatga egamiz. Bu ikki tenglama sistemasidan $C_1=-\cos s$, $C_2=-\sin s$ larni hosil qilamiz. Demak, yig'ilga masalaning Grin funksiyasi

$$W(x,s)=\begin{cases} -\cos s\sin x, & 0\le x\le s,\\ -\sin s\cos x, & s\le x\le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

formula bilan ifodalanadi.

Eslatma. Biz $(py')' + qy = 0$ tenglamaning $y(x_0) = y(x_1) = 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi trivial bo'lmagan yechimi mavjud emas deb faraz qildik. Bu shart qo'yilgan (4)–(5) masala yechimining mavjudligini va yagonaligini ta'minlash bilan birga , qo'yilgan masala Grin funksiyasining yagonaligini ham ta'minlaydi.

Haqiqatdan, qo'yilgan (4)–(5) masalaning ikkita $G_1(x,s), G_2(x,s)$ Grin funksiyalari mavjud deb faraz qilsak, mos ravishda ikkita har xil yechimni yozish mumkin:

$$y_1(x) = \int_{x_0}^{x_1} G_1(x,s) f(s) ds,$$

$$y_2(x) = \int_{x_0}^{x_1} G_2(x,s) f(s) ds.$$

Bularning ayirmasidan iborat ushbu

$$\int_{x_0}^{x_1} [G_1(x,s) - G_2(x,s)] f(s) ds$$

funksiya bir jinsli tenglamani va (5) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi, bu esa farazimizga qarama-qarshidir. Demak, $G_1 = G_2$. Endi yuqorida qo'yilgan chegaraviy masalaning Grin funksiyasi $G(x,s)$ ga va masalaning ushbu

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x,s) f(s) ds$$

yechimiga fizik ma'no beramiz. Buning uchun erkli o'zgaruvchi x ni t bilan belgilaymiz.

Fizikaning ko'p masalalarida

$$\big(p(t)y'(t)\big)' + q(t)y(t) = f(t) \qquad (4')$$

tenglamaning $y(t)$ yechimi biror mexanik sistemaning $[x_0, x_1]$ intervalda uzluksiz taqsimlangan $f(t)$ kuch ta'sira ostida siljishini ifodalaydi (bu yerda $t -$ vaqt).

Faraz qilaylik , $t < s$ bo'lganda sistema tinch turgan bo'lsin, uni $f_\varepsilon(t)$ kuch ta'sirida siljitaylik, bu yerda $f_\varepsilon(t)$ kuch faqat $s < t < s + \varepsilon$ oralig'ida noldan farqli bo'lib qolgan nuqtalarida nolga teng, shu bilan birga kuch impulsi 1 ga teng:

$$\int_x^{x+s} f_\varepsilon(t)dt = 1.$$

Endi $y_\varepsilon(t)$ orqali

$$\big(p(t)y'(t)\big)' + q(t)y(t) = f_\varepsilon(t),$$

$$y(x_0) = y(x_1) = 0.$$

chegaraviy masalaning yechimini belgilaymiz. Demak,

$$y_\varepsilon(t) = \int_{x_1}^{x_\varepsilon} G(t,s)f_\varepsilon(s)ds$$

formula o'rinli. O'rta qiymat haqidagi teoremani qo'llasak:

$$y_\varepsilon(t) = G(t, s + \varepsilon^*) \int_s^{s+\varepsilon} f_\varepsilon(\tau)d\tau = G(t, s + \varepsilon^*), \qquad 0 < \varepsilon^* < \varepsilon.$$

Demak,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(t) = G(t,s).$$

1.3–§. Umumlashgan Grin funksiyasi

Biz yuqorida $L[y] = 0$, $y(x_0) = y(x_1) = 0$ masala trivial bo'lmagan yechimga ega emas deb qabul qildik. Ko'p hollarda bu masalaning trivial bo'lmagan yechimi mavjud bo'ladi , ya'ni shunday $y_0(x) \not\equiv 0$ funksiya topiladiki, $L[y_0(x)] = 0$, $y_0(x_0) = y_0(x_1) = 0$ bo'ladi. Bu holda oddiy Grin funksiyasini tuzish mumkin bo'lmay, *umumlashgan Grin funksiyasi* deb ataladigan funksiyani tuzishga to'g'ri keladi. Keyingi mulohazalarda $y_0(x)$

deb yuqorida eslatilgan masalalaning trivialmas yechimini belgilaymiz, $G(x,s)$ funksiyasi quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1^0. $G(x,s)$ funksiya x argumenti bo'yicha $x_0 \leq x \leq x_1$ intervalda uzluksiz , $s -$ tayinlangan va $x_0 < s < x_1$;

2^0. $G(x,s)$ funksiya x bo'yicha $[x_0, s)$ va $(s, x_1]$ intervallarning har birida

$$L[y] = y_0(x)y_0(s)$$

tenglamani qanoatlantiradi;

3^0. $G(x_0,s) = G(x_1,s) = 0$;

4^0. $G_x(s+0,s) - G_x'(s-0,s) = \frac{1}{p(s)}$

yoki

$$G_x'(s,s+0) - G_x'(s,s-0) = -\frac{1}{p(s)}.$$

5^0. $\int_{x_0}^{x_1} G(x,s)y_0(x)dx = 0$.

($G(x,s)$ va $y_0(x)$ funksiyalarning ortogonallik sharti).

Yuqorida keltirilgan $1^0 - 5^0$ shartlarni qanoatlantiruvchi funksiya berilgan (4)−(5) masalaning *umumlashgan Grin funksiyasi* deb ataladi.

Umumlashgan Grin funksiyasini tuzish oddiy Grin funksiyasini tuzish kabi bajariladi.

$y_0(x)$ funksiya $L[y] = 0$ tenglamani va $y(x_0) = y(x_1) = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan normallashgan $\left(\int_{x_0}^{x_1} y_0^2(x)dx = 1\right)$ yechim bo'lsin. $y_1(x)$ esa $L[y] = y_0(x)y_0(s)$ tenglamaning biror xususiy yechimi bo'lsin. U holda oxirgi tenglamaning umumiy yechimini

$$y(x) = y_1(x) + \alpha y_0(x) + \beta z(x)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $z(x)$ funksiya $L[y] = 0$ tenglamaning $y_0(x)$ bilan chiziqli erkli yechimi. $z(x)$ ni shunday tanlash mumkinki,

$$p(x)[y_0(x)z'(x) - z(x)y_0'(x)] = 1$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Grin funksiyasini quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$G(x) = \begin{cases} y_1(x) + \alpha_1 y_0(x) + \beta_1 z(x), & x < t, \\ y_1(x) + \alpha_2 y_0(x) + \beta_2 z(x), & x > t. \end{cases}$$

Bu yerda β_1 va β_2 noma'lum chegaraviy shartlardan foydalanib aniqlanadi. $G(x,s)$ ning $x = s$ nuqtada uzluksizligidan α_2 miqdor α_1 miqdor orqali ifodalanadi. Shunday qilib, Grin funksiyasida faqat α_1 noma'lum qoladi. Uni toppish uchun esa 5^0 shartdan foydalanish lozim.

Umumlashgan Grin funksiyasi simmetrikdir, ya'ni

$$G(x,s) = G(s,x).$$

Haqiqatdan, ushbu

$$L[G(x,s)] = y_0(x)y_0(s)$$

tenglikni $-G(x,t)$ ga,

$$L[G(x,t)] = y_0(x)y_0(t)$$

tenglikni esa $G(x,s)$ ga ko'paytirib qo'shamiz. So'ngra Grin formulasidan va Grin funksiyasining hamma xossalaridan foydalanib, hosil bo'lgan tenglikni x_0 dan s gacha, s dan t gacha va t dan x_1 gacha integrallaymiz. Natijada

$$p(x)[G(x,s)G_x'(x,t) - G(x,t)G_x'(x,t)]\Big|_{x_0}^{s-0} + p(x)[G(x,s)G_x'(x,t) - G(x,t)G_x'(x,s)]\Big|_{s+0}^{f-0} + p(x)[G(x,s)G_x'(x,t) - G(x,t)G_x'(x,s)]\Big|_{t+0}^{x} == y_0(t)\int_{x_0}^{x_1} G(x,s)y_0(x)dx - y_0(s)\int_{x_0}^{x_1} G\,(x,t)y_0(x)dx = 0$$

tenglikni yoki

$$p(x)[G(x,s)G'_x(x,t)-G(x,t)G'_x(x,s)]\Big|_{s+0}^{s-0}+p(x)[G(x,s)G'_x(x,t)-G(x,t)G'_x(x,s)]\Big|_{t+0}^{t-0}=0$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan izlangan simmetriklikning o'rinli ekaniga ishonch hosil qilish qiyin emas.

Quyidagi lemma o'rinli.

Lemma. (4)−(5) $chegaraviy\ masala\ yechimga\ \ ega\ bo'lishi$

$uchun\ \ f(x) funksiya\ bilan\ mos\ bir\ jinsli\ tenglamaning$ (5)$shart$
$-\ larni\ qanoatlantiradigan\ trivialmas\ yechimi\ o'zaro\ \ \ ortogonal$

$bo'lishi\ \ \ zarur$.

Lemmaning isboti (7) formuladan kelib chiqadi.

Eslatma . Agar (5) shartlar o'rniga ushbu

$$a_1y(x_0)+b_1y'(x_0)=C_1,$$

$$a_2y(x_1)+b_2y'(x_1)=C_2 \qquad (11)$$

shartlar ko'rilsa, u holda $a_1^2+b_1^2\neq 0,\ \ a_2^2+b_2^2\neq 0$ bo'lib, $C_1=C_2=0$ bo'lsa, (4)−(11) masala bir jinsli chegaraviy shartli masala deyiladi. $C_1^2+C_2^2\neq 0$ bo'lganda esa tegishli masala bir jinsli bo'lmagan chegaraviy shartli masala deb yuritiladi. Har ikki holda (4)−(5) masala uchun yuritilgan mulohazalarni olib boorish, mos Grin funksiyasini kiritish mumkin.

II−BOB. SHTURM−LIUVILL MASALASI

2.1−§.Masalaning qo'yilishi.

Shturm−Liuvill masalasi quyidagicha qo'yiladi.

Parametr λ ning shunday qiymatlari topilsinki, u qiymatlarda ushbu

$$L[y] = -\lambda y, \qquad y(x_0) = y(x_1) = 0 \qquad (12)$$

chegaraviy masala aynan nolga teng bo'lmagan yechimga ega bo'lsin.

Parameter λ ning tegishli qiymatlari mavjud bo'lsa, uni (12) masalaning xos sonlari , unga mos yechimni esa xos funksiyalari deb ataladi.

Shturm−Liuvill masalasiga bitta misol keltiramiz. Ushbu

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = y(1) = 0 \qquad (13)$$

masala qo'yilgan bo'lsin.

a) $\lambda > 0$ bo'lsin. Ma'lumki, $y'' + \lambda y = 0$ tenglamaning umumiy yechimi

$$y = A\cos\sqrt{\lambda}\, x + B\sin\sqrt{\lambda}\, x$$

bo'ladi. $y(0) = 0$ chegaraviy shartdan $A = 0$ kelib chiqadi. $y(1) = 0$ chegaraviy shartdan $\sin\sqrt{\lambda} = 0$, $\lambda_n = n^2\pi^2$ $(n = 1,2,3, \dots \dots)$ kelib chiqadi. Bu holda masalaning yechimi ($n \neq 0$ bo'lganda yechim trivialmas)

$$y_n = B_n \sin n\,\pi\, x, \qquad n = 1,2, \dots .$$

bo'ladi.

b) $\lambda = 0$ bo'lsin. (13) tenglamaning umumiy yechimi $y = Ax + B$ bo'ladi. $y(0) = y(1) = 0$ chegaraviy shartlardan $A = B = 0$ kelib chiqadi. Demak, tegishli yechim $y \equiv 0$ bo'ladi. Shunday qilib, (13) tenglamaning tegishli shartlarni qanoatlantiradigan trivialmas yechimi mavjud emas.

v) $\lambda < 0$ bo'lsin. (2) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

bo'ladi. Chegaraviy shartlardan

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ Ae^{\sqrt{-\lambda}} + Be^{-\sqrt{-\lambda}} = 0 \end{cases}$$

kelib chiqadi. Bu sistemadan $A = B = 0$ ni topamiz. Demak, yechim: $y \equiv 0$. Yuqorida ko'rilgan uchta holga ko'ra quyidagi xulosaga kelamiz: agar $\lambda_n = n^2\pi^2$ $(n = 1, 2, \ . \ . \ .)$ bo'lsa, (13) masala cheksiz ko'p $y_n = B_n \sin n\pi x$ yechimga ega. Agar $\lambda_n \neq n^2\pi^2$ bo'lsa, (13) masala faqat trivial yechimga ega. λ_n $(n = 1, 2, \ . \ . \ .)$ lar (12) masalaning xos qiymatlari, ularga mos keluvchi y_n $(n = 1, 2, \ . \ . \ .)$ funksiyalar esa (13) masalaning xos funksiyalari bo'ladi.

Lekin hamma vaqt ham qo'yilgan Shturm−Liuvill masalasini osongina yechib bo'lavermaydi.

Shturm−Liuvill masalasini umumiy holda yechish bilan shug'ullanamiz.

$L[y]$ differensial operatorning oddiy Grin funksiyasi $G(x, s)$ mavjud deylik. U holda Gilbertning fundamental teoremasiga asosan (6) formulada $f(x) = -\lambda y(x)$ deb (12) Shturm−Liuvill masalasiga ekvivalent bo'lgan bir jinsli integral tenglama deb yuritiladigan

$$y(x) = -\lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x, s) y(s) ds \qquad (14)$$

tenglamani hosil qilamiz.

Eslatib o'tamizki noma'lum funksiya integral belgisi ostida albatta qatnashadigan tenglamalar albatta qatnashadigan tenglamalar integral tenglama deyiladi.

Integral tenglamalarga oid ba'zi tushunchalarni (14) tenglamaga nisbatan aytib o'tamiz.

(14) integral tenglamaning $y = \varphi(x)$ yechimi deb $x_0 \leq x \leq x_1$ intervalda aniqlangan, uzluksiz va tenglamani

$$\varphi(x) \equiv -\lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x,s)\varphi(s)ds$$

ayniyatga aylantiradigan funksiyaga aytiladi. (14) tenglamani chiziqli bir jinsli integral tenglama deb ataladi.

(14) chiziqli bir jinsli tenglama har doim yechimga ega. Haqiqatdan, (14) uchun trivial $\varphi(t) \equiv 0$ yechim mavjud. Ammo bu tenglama trivialmas yechimlarga ham ega bo'lishi mumkin. Agar $\varphi_1(x)$, . . . , $\varphi_k(x)$ funksiyalarning har biri (14) uchun yechim bo'lsa, u holda $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} C_i\varphi_i(x)$ funksiya ham yechim bo'ladi. Haqiqatdan , shart bo'yicha $\varphi_i(x) = -\lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x,s)\varphi_i(s)ds$. Bundan $C_i\varphi_i(x) = -\lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x,s)(C_i\varphi_i\,(s))ds$ kelib chiqadi. Endi i bo'yicha yig'indi olamiz:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} C_i\,\varphi_i(x) =$$
$$-\sum_{i=1}^{k}\left[\lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x,s)\big(C_i\varphi_i(s)\big)ds\right] = -\lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x,s)\left[\sum_{i=1}^{k} C_i\varphi_i(s)\right]ds =$$
$$-\lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x,s)\varphi(s)ds.$$

Bu esa tasdiqni isbotlaymiz.

Berilgan (14) integral tenglama uchun λ ning shu tenglama trivialmas yechimga ega bo'ladigan qiymatlari $G(x,s)$ yadrosining $xarakteristik$ qiymatlari (sonlar) deyiladi. Agar $\lambda = \lambda_0$ xarakteristik funksiyasi deyiladi.

Quyida muhim teoremani keltiramiz.

2 - teorema. $Agar\ L[y] = (p(x)y')' + q(x)y\ \ differensial\ ifodada$ $0 <$ $p(x)\epsilon C^1[x_0,x_1]$, $q(x) \in C[x_0,x_1]$ $bo'lib,$

$parametrning \ \lambda =$
$0 \ qiymati \ (3.11) masalaning \ xos \ soni \ bo'lmasa \ hamda \ G(x,s)$

$(4)-(5) \ \ masalaning \ Grin \ funksiyasi \ bo'lsa, u \ holda \ Shturm$
$- Liuvill \ masalasi \ (\ ya'ni \ (11) masala \ ) \ (14) \ integral \ tenglamani$

$yechish \ masalasiga \ ekvivalent \ bo'ladi, ya'ni \ 1) \ agar \ \lambda \ son$

$(12) \ masalaning \ mos \ xos \ funksiyasi \ \ y = \varphi(x) \ bo'lgan \ xos$

$sonidan \ iborat \ bo'lsa \ , u \ holda \ shu \ \lambda \ (14) \ tenglamaning \ mos$
$xos \ funksiyasi \ y = \varphi(x) \ bo'lgan \ xarakteristik \ soni \ bo'ladi;$

$2) \ agar \ \lambda \ son \ (12) \ integral \ tenglamaning \ mos \ xos \ funksiyasi \ y$
$= \varphi(x) dan \ iborat \ xarakteristik \ soni \ bo'lsa, u \ holda \ \varphi(x)$
$\in C^2[x_0, x_1] \ va \ \lambda, \varphi(x) \ lar \ (12) \ masalaning \ bir$
$- biriga \ mos \ xos \ soni \ hamda \ xos \ funksiyasi \ bo'ladi.$

Isbot. 1) haqiqatdan, agar λ va $\varphi(x)$ lar shunday bo'lsaki , ular uchun

$\big(p(x)\varphi'(x)\big)' + q(x)\varphi(x) \equiv -\lambda\varphi(x), \quad \varphi(x_0) = \varphi(x_1) = 0$ bo'lsa 1-teoremaga ko'ra quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x,s)\big(-\lambda\varphi(s)\big)ds \equiv -\lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x,s)\,\varphi(s)ds.$$

Bundan λ xarakteristik son ekani, $\varphi(x)$ esa mos xos funksiya ekani kelib chiqadi.

2) endi

$$\varphi(x) \equiv -\lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x,s)\varphi(x)ds$$

ayniyat o'rinli bo'lsin. Bu ayniyatning o'ng tomonidagi funksiya ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi (Gilbert teoremasiga ko'ra) bo'lib, $L[y] \equiv f$ ayniyatni $f(x) = -\lambda\varphi(x)$ bo'lganda qanoatlantiradi.$G(x,s)$

funksiya (4)-(5) masalaning Grin funksiyasi bo'lgani uchun $\varphi(x_0) = -\lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x_0, s)\varphi(s)ds = 0,\ \varphi(x_1) = -\lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x_1, s)\varphi(s)ds = 0.$

Demak, λ va $\varphi(x)$ lar (12) masalaning mos ravishda xos soni va xos funksiyasidan iborat. Teorema isbot bo'ldi.

2.2−§. Shturm−Liuvill masalasi xos sonlari va xos funksiyalarining xossalari

Agar $L[y] \equiv [p(x)y']' + q(x)y$ differensial ifodada $0 < p(x) \in C' \in [x_0, x_1], q(x) \in C[x_0, x_1]$ bo'lib, parametrning $\lambda = 0$ qiymati (12) masalaning xos soni bo'lmasa ham $G(x, s)$ tegishli masalaning Grin funksiyasi bo'lsa, u holda Shturm−Liuvill masalasi xos sonlari va funksiyalari quyidagi xossalarga ega bo'ladi.

1^0. Shturm−Liuvill masalasining xos funksiyalari $[x_0, x_1]$ intervalda ikki marta uzluksiz differensiallovchi.

2^0. Shturm−Liuvill masalasining xos qiymatlari simmetrik $G(x, s)$ yadroga ega bo'lgan (14) integral tenglamaning xarakteristik qiymatlari bilan ustma-ust tushadi.

3^0. Shturm−Liuvill masalasining xos qiymatlari haqiqiy sonlardan iborat.

4^0. Shturm−Liuvill masalasining xos qiymatlari oddiy xos qiymatlardir (eslatib o'tamizki, xarakteristik qiymatga xos kelgan chiziqli erkli xos funksiyalarning maksimal soni *s* tegishli xarakteristik sonning *karrasi* deyiladi. Shunday ta'rif xos qiymatlar uchun ham kiritiladi.).

Isbot. L operator uchun λ xos qiymat bo'lib, bu oddiy bo'lmasin, boshqacha aytganda λ soniga ikkita chiziqli erkli $u(x), v(x)$ xos funksiyalar mos kelsin deylik. Bu holda shu funksiyalardan tuzilgan Vronskiy determinant

$$W[u(x), v(x)] = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix}$$

x ning $[x_0, x_1]$ intervaldan olingan ixtiyoriy qiymatida noldan farqli. Jumladan $W[x_0] = 0,\ W[x_1] = 0$ kelib chiqadi. Bu esa $u(x), v(x)$ larning $[x_0, x_1]$ da chiziqli erkli bo'lsin degan farazga zid.

5^0. Shturm−Liuvill masalasining modullari qatnashmaydigan qilib joylashtirilgan , ya'ni

$$|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ . \ . \ . \le |\lambda_n| \le \ . \ . \ . \ ,$$

xos qiymatlari $+\infty$ ga uzoqlashuvchi ketma-ketlikni tashkil etadi.

2.3−§. Grin funksiyasini tuzishga doir misollar

Quyida oddiy umumlashgan Grin funksiyasini tuzishga doir misollar ko'ramiz.

Misol 1. Ushbu $L[y] \equiv y''$ differensial ifodaning $y(0) = y(1) = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan Grin funksiyasini tuzing.

Yechish. Grin funksiyasini

$$G(x,s) = \begin{cases} C_1 x, & x < s, \\ C_2(1-x), & x > s \end{cases}$$

ko'rinishda izlaymiz.

$x = s$ nuqtada $G(x,s)$ funksiya uzluksiz, lekin uning birinchi tartibli hosilasi $G'_x(x,s)$ uzilishga ega bo'lgani uchun

$$\begin{cases} C_1(s)s = C_2(s)(1-s)' \\ C_1(s) + C_2(s) = \frac{1}{p(s)} = 1 \end{cases}$$

Sistemani hosil qilamiz. Bu sistemani yechib $C_1 = 1 - s,\ C_2 = s$ larni topamiz. Demak, izlanayotgan Grin funksiyasi quyidagicha yoziladi:

$$G(x,s) = \begin{cases} (1-s)x, & x < t, \\ (1-x)s, & t < x. \end{cases}$$

Misol 2.Ushbu $L[y] = y"$ differensial ifodaning $y(0) = 0, y'(1) = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan Grin funksiyasini tuzing.

Yechish. Grin funksiyasini quyidagi

$$G(x,s)=\begin{cases} C_1(x), & x<s, \\ C_2(x), & s<x \end{cases}$$

ko'rinishda izlaymiz. Grin funksiyasining ta'rifi bo'yicha

$$\begin{cases} C_1(s)s = C_2(s), \\ C_1(s) = 1 \end{cases}$$

sistemaga va $C_1 = 1$, $C_2 = s$ ga egamiz.

Demak, izlanayotgan Grin funksiyasi quyidagicha yoziladi:

$$G(x,s)=\begin{cases} x, & x<s, \\ s, & s<x. \end{cases}$$

Misol 3. Ushbu $L[y] \equiv y''$ differensial ifodaning $y(-1) = y(1) = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan Grin funksiyasini quyidagi

$$G(x,s)=\begin{cases} C_1(1+x), & x<s, \\ C_2(1-x), & x>s \end{cases}$$

ko'rinishda izlaymiz. C_1 va C_2 larni topish uchun ushbu

$$\begin{cases} C_1(1+s) = C_2(1-s), \\ C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$$

sistemaga egamiz. Bu sistemadan $C_1 = \frac{1-s}{2}$ va $C_2 = \frac{1+s}{2}$ ni topamiz. Demak, Grin funksiyasi quyidagicha yoziladi:

$$G(x,s)=\begin{cases} \frac{(1-s)(1+x)}{2}, & x<s \\ \frac{(1+s)(1-x)}{2}, & x>s. \end{cases}$$

Misol 4. Ushbu $L[y] = y''$ differensial ifodaning $y(0) = -y(1)$, $y'(0) = -y'(1)$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan Grin funksiyasini tuzing.

Yechish. $y'' = 0$ tenglamaning umumiy yechimi $y = \alpha x + \beta$ ko'rinishga ega bo'lgani uchun mos Grin funksiyasini

$$G(x,s)=\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_{1,} & x<s, \\ \alpha_2 x + \beta_{2,} & x>s \end{cases}$$

ko'rinishda izlaymiz.

Chegaraviy shartlardan $\beta_1 = -(\alpha_2 + \beta_2)$, $\alpha_1 = -\alpha_2$ kelib chiqadi. Grin funksiyasining uzluksizligi va hosilasining 1-tur uzilishga egaligi sharti bo'yicha ushbu

$$\begin{cases} -\alpha_2(1+s) - \beta_2 = \alpha_2 s + \beta_2, \\ -\alpha_2 - \alpha_1 = 1 \end{cases}$$

sistemaga egamiz. Bu sistemani yechib $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$; $\beta_2 = \frac{1+2s}{4}$ larni hosil qilamiz. Topilganlarni o'rniga qo'yib, so'ngra ixchamlashtirsak, Grin funksiyasi uchun

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x-s) + \frac{1}{4}, & x < s, \\ \frac{1}{2}(s-x) + \frac{1}{4}, & s < x \end{cases}$$

yoki

$$G(x,s) = -\frac{1}{2}|x-s| + \frac{1}{4}$$

ifodani topamiz.

Misol 5. Ushbu $L[y] = (xy')'$ differensial ifodaning $|y(0)| < \infty$, $y(1) = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan Grin funksiyasini tuzing.

Yechish. $L[y] = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = \alpha \ln x + \beta, \quad x > 0$$

bo'lganidan, Grin funksiyasini quyidagicha izlaymiz:

$$G(x,s) = \begin{cases} \alpha_1 \ln x + \beta_1, & x < s, \\ \alpha_2 \ln x + \beta_2, & x > s. \end{cases}$$

Endi $|y(0)| < \infty$ dan $\alpha_1 = 0$, $y(1) = 0$ dan $\beta_2 = 0$ kelib chiqadi. $G(x,s)$ ning uzluksizligidan va $G'_x(x,s)$ ning $x = s$ nuqtada uzilishga ega ekanidan

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_2 \ln s \\ -\alpha_2 \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \end{cases}$$

sistema kelib chiqadi. Bundan $\alpha_2 = -1$, $\beta_1 = \ln s$ larni topamiz. Shunday qilib, Grin funksiyasi quyidagicha yoziladi:

$$G(x,s) = \begin{cases} -\ln s, & x < s, \\ -\ln x, & x > s\,. \end{cases}$$

Misol 6. Ushbu

$$L[y] = (xy')' - \frac{n^2}{x}y$$

differensial ifodaning $|y(0)| < \infty$, $y(1) = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan Grin funksiyasini toping.

Yechish. $l[y] = 0$ tenglamaning ikkita chiziqli erkli yechimi x^n va x^{-n} bo'lishini bevosita tekshirib bilish mumkin. Shuning uchun $L[y] = 0$ tenglamaning umumiy yechimi $y = \alpha x^n + \beta x^{-n}$ bo'ladi (bu yerda α va β ixtiyoriy o'zgarmaslar).

Grin funksiyasini quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$G(x,s) = \begin{cases} \alpha_1 x^n + \beta_1 x^{-n}, & x < s, \\ \alpha_2 x^n + \beta_2 x^{-n}, & x > s. \end{cases}$$

$|y(0)| < \infty$ chegaraviy shartdan $\beta_1 = 0$ topiladi. $y(1) = 0$ shartga ko'ra $\alpha_2 = -\beta_2$ kelib chiqadi. Shunday qilib, Grin funksiyasi

$$G(x,s) = \begin{cases} \alpha_1 x^n & x < s, \\ \alpha_2 (x^n - x^{-n}), & x > s \end{cases}$$

ko'rinishida izlanishi lozim.

$G(x,s)$ ning $x = s$ nuqtada uzluksizligidan, $G'_x(x,s)$ hosilaning uzilishga egaligidan foydalanib,

$$\begin{cases} \alpha_1 s^n - \alpha_2 (s^n - s^{-n}) = 0, \\ n\alpha_1 s^{n-1} - \alpha_2 n (s^{n-1} + s^{-n-1}) = \frac{1}{s} \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Bu sistemani yechib, $\alpha_1 = \frac{s^{-n} - s^n}{2n}$ va $\alpha_2 = -\frac{s^n}{2n}$ larni topamiz. Demak, izlanayotgan Grin funksiyasi ushbu

$$G(x,s)=\begin{cases}-\frac{s^n-s^{-n}}{2n}x^n, & x<s,\\ -\frac{x^n-x^{-n}}{2n}s^n, & x>s\end{cases}$$

formula bilan aniqlanadi.

Misol 7. Ushbu $L[y]=\left((1-x^2)y'\right)'-\frac{h^2}{1-x^2}\,y$ differensial ifodaning $|y(-1)|<\infty,\ \ |y(1)|<\infty$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan Grin funksiyasini tuzing.

Yechish. $L[y]=0$ tenglamaning $x=-1$ da chekli bo'ladigan yechim $C_1(\frac{1+x}{1-x})^{h/2}$ dan iborat; xuddi shunga o'xshash, $x=+1$ da chekli bo'ladigan yechim $C_2(\frac{1-x}{1+x})^{h/2}$ bo'ladi. Bu holda Grin funksiyasini

$$G(x,s)=\begin{cases}C_1(\frac{1+x}{1-x})^{h/2} & x<s,\\ C_2(\frac{1-x}{1+x})^{h/2} & x>s\end{cases}$$

ko'rinishda izlaymiz. Endi $x=s$ da $G(x,s)$ ning uzluksizligidan va $G_x'(x,s)$ hosilaning uzluksizligidan foydalanib, quyidagi

$$\begin{cases}C_1(\frac{1+s}{1-s})^{h/2}=C_2(\frac{1-s}{1+s})^{h/2},\\ C_1\,\frac{h}{2}\,(\frac{1+s}{1-s})^{\frac{h}{2}-1}\cdot\frac{2}{(1-s)^2}+C_2\,\frac{h}{2}\left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{\frac{h}{2}-1}\cdot\frac{2}{(1+s)^2}=\frac{1}{1-s^2}\end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Bu sistemani yechib

$$C_1=\frac{1}{2h}\,(\frac{1-s}{1+s})^{\frac{h}{2}};\qquad C_2=\frac{1}{2h}\,(\frac{1+s}{1-s})^{\frac{h}{2}}$$

larni topamiz. Demak, izlanayotgan Grin funksiyasi

$$G(x,s)=\begin{cases}\frac{1}{2h}\,(\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1-s}{1+s})^{\frac{h}{2}}, & x<s,\\ \frac{1}{2h}\,(\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1+s}{1-s})^{\frac{h}{2}}, & x>s\end{cases}$$

ko'rinishga ega.

Bu metod $h = 0$ bo'lganda yaramaydi, chunki $h = 0$ bo'lganda $L[y] = 0$ tenglama $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ normallashgan yechimga ega bo'lib, bu yechim chegaraviy shartlarni ham qanoatlantiradi.

Bu yerda oddiy Grin funksiyasi mavjud emas, shuning uchun umumlashgan Grin funksiyasini tuzishimiz kerak. Buning uchun

$$\left((1 - x^2)y'\right)' = \frac{1}{2}$$

tenglamaning umumiy yechimini topamiz :

$$y = -\frac{1}{4}\ln(1 - x^2) + \frac{\alpha}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + \beta$$

(bu yerda α va β lar ixtiyoriy o'zgarmas sonlar). Endi Grin funksiyasini quyidagicha izlaymiz:

$$G(x,s) = \begin{cases} -\frac{1}{4}\ln(1 - x^2) + \frac{\alpha_1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + \beta_1, & x < s, \\ -\frac{1}{4}\ln(1 - x^2) + \frac{\alpha_2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + \beta_2, & x > s. \end{cases}$$

$|y(-1)| < \infty$ shartdan $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $|y(1)| < \infty$ shartdan esa $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$ kelib chiqadi. α_1 va α_2 larning qiymatini e'tiborga olsak,

$$G(x,s) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\ln(1 - x) + \beta_1, & x < s, \\ -\frac{1}{2}\ln(1 + x) + \beta_2, & x > s \end{cases}$$

hosil bo'ladi.

Grin funksiyasining uzluksizligidan quyidagi

$$-\frac{1}{2}\ln(1 - s) + \beta_1 = -\frac{1}{2}(1 + s) + \beta_2$$

munosabatga egamiz. Bundan

$$\beta_1 = -\frac{1}{2}\ln(1 + s) + C, \qquad \beta_2 = -\frac{1}{2}\ln(1 - s) + C$$

larni topib, Grin funksiyasini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$G(x,s)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\ln[(1-x)(1+s)]+G, & x<s,\\ -\frac{1}{2}\ln[(1+x)(1-s)]+C, & x>s.\end{cases} \qquad (*)$$

Bu yerdagi ixtiyoriy o'zgarmas C ni

$$\int_{-1}^{1} G(x,s)\frac{1}{\sqrt{2}}dx=0$$

shartdan aniqlaymiz:

$$0=\int_{-1}^{1} G(x,s)=\int_{-1}^{s}\left[-\frac{1}{2}\ln(1-x)(1+s)+C\right]dx++\int_{s}^{1}\left[-\frac{1}{2}\ln(1-s)(1+x)+C\right]dx=-\ln 2+\frac{5+1}{2}-\frac{s}{2}\ln(1-s)++\frac{1}{2}\ln(1-s)-\frac{1}{2}(1+s)\ln(1+s)+C(s+1)+\frac{1}{2}(1+s)\ln(1+s)++\frac{1}{2}(1-s)-\frac{1}{2}(1-s)-\frac{1}{2}\ln(1-s)(1-s)-\ln 2+C(1-s).$$

Bundan $-2\ln 2+1+2C=0$ tenglamaga egamiz. Uni yechib $C=\ln 2-\frac{1}{2}$ ni topamiz. Demak, qo'yilgan masalaning umumlashgan Grin funksiyasi (*) formula bilan berilib, unda $C=\ln 2-\frac{1}{2}$ bo'ladi. 8.Ushbu $L[y]=y''$ differensial ifodaning $y(-1)=y(+1)$; $y'(-1)=y'(+1)$ shartlarni qanoatlantiradigan Grin funksiyasini tuzing.

Yechish. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ funksiya $L[y]=0$ tenglamani va chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechim bo'lgani uchun umumlashgan Grin funksiyasini tuzishga to'g'ri keladi. Buning uchun

$$y''=\frac{1}{2}$$

tenglamaning umumiy yechimini topamiz. Bunday yechim osongina topiladi: $y=\frac{1}{4}x^2+x+\beta$. Demak, umumlashgan Grin funksiyasini

$$G(x,s)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^2+\alpha_1 x+\beta_1, & x<s,\\ \frac{1}{4}x^2+\alpha_2 x+\beta_2, & x>s\end{cases}$$

ko'rinishida izlaymiz.

Chegaraviy shartlardan va Grin funksiyasining uzluksizligidan foydalanib

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_1 = \beta_1 - \beta_2, \\ \alpha_2 - \alpha_1 = -1, \\ \beta_1 - \beta_2 = s(\alpha_2 - \alpha_1) \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Bu sistemani yechib topamiz:

$\alpha_1 = \frac{1-s}{2}$; $\alpha_2 = -\frac{1+s}{2}$; $\beta_1 = \beta_2 - s$. Shuning uchun

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \frac{1-s}{2}x - s + \beta_2, & x < s, \\ \frac{1}{4}x^2 - \frac{1+s}{2}x + \beta_2, & x > s. \end{cases}$$

Bu yerdagi β_2 ni $\int_{-1}^{1} G(x,s)dx = 0$ shartdan topamiz:

$0 = \int_{-1}^{1} G(x,s)dx = \int_{-1}^{s} \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1-s}{2}x - s + \beta_2\right] dx + \int_{s}^{1} \left[\frac{1}{4}x^2 - -\frac{1+s}{2}x + \beta_2\right] dx = -\frac{1}{3} + 2\beta_2 - s - \frac{s^2}{2}.$

Biz β_2 ga nisbatan birinchi tartibli tenglamaga egamiz. Uni yechib β_2 ni topamiz:

$$\beta_2 = \frac{s^2}{4} + \frac{s}{2} + \frac{1}{6}.$$

Buni e'tiborga olsak, tegishli Grin funksiyasi uchun uzil-kesil quyidagini hosil qilamiz:

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-s)^2 + \frac{s-x}{2} + \frac{1}{2}, & x < s, \\ \frac{1}{2}(x-s)^2 + \frac{s-x}{2} + \frac{1}{6}, & x < s. \end{cases}$$

Misol 9. Ushbu $L[y] = y''$ differensial ifodaning $y'(0) = y'(1) = 0$ shartlarini qanoatlantiradigan Grin funksiyasini tuzing.

Yechish. Bu yerda oddiy Grin funksiyasi mavjud emas. Chunki $y = 1$ funksiya $y'' = 0$ tenglamani va chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi. Demak, biz, $y'' = 1$ tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \alpha x + \beta.$$

Bu holda Grin funksiyasi quyidagi ko'rinishda izlanadi:

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, & x < s, \\ \frac{1}{2}x^2 + \alpha_2 x + \beta_2, & s > x. \end{cases}$$

Ravshanki, chegaraviy shartlardan $\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -1$ kelib chiqadi. Grin funksiyasining uzluksizligidan

$$\beta_1 - \beta_2 = -s$$

ni topamiz. Bu holda Grin funksiyasi

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - s + \beta_2, & x < s, \\ \frac{1}{2}x^2 - x + \beta_2, & x > s \end{cases}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yerda β_2 ni $\int_0^1 G(x,s)dx = 0$ shartdan topiladi: $0 = \int_0^1 G(x,s)dx = \int_0^s \left(\frac{1}{2}x^2 - s + \beta_2\right) dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - x + +\beta_2\right) dx^0 = \beta_2 - \frac{s^2}{2} - \frac{1^0}{3}$. Demak, Grin funksiyasi quyidagi ko'rinishga keladi:

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}s^2 - s + \frac{1}{s}, & x < s, \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}s^2 - x + \frac{1}{s}, & x > s. \end{cases}$$