Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги

Гулистон давлат университети

Норжигитов Ҳ., Норбоев Ф.

“ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИ ВА МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА” ФАНИ БЎЙИЧА МАЪРУЗА МАТНИ

(Бакалавриат босқичи талабалари учун)

Гулистон 2019

Норжигитов Ҳ., Норбоев Ф. “Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика” ўқув предмети бўйича: маъруза матни (бакалавриат босқичи талабалари учун) Гулистон.: ГулДУ 2019. 108 бет.

“Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика” фанидан маъруза матни Гулистон давлат университетининг “Математика” кафедрасида тайёрланган. Маъруза матни “Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика” фанини ўрганиш жараёнида талабанинг мустақил ишлашини таъминловчи ўқув-услубий материалларни ўз ичига олади ҳамда талаба олган билимининг сифатини доимо назорат қилишни таъминлайди.

Ушбу маъруза матни “Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика” фани ўқув режага киритилган математика, физика ва информатика мутахассисликлар учун мўлжалланган.

ГулДУ ўқув-методик Кенгашининг (30.07.2019 йил) йиғилиш қарори билан чоп этишга тавсия этилган.

Тақризчи: К.Жамуратов ГулДУ доценти
физика-математика фанлари номзоди

Мундарижа

1–мавзу. Эҳтимоллар назариясининг предмети ва унинг иқтисодий, техник масалалар учун аҳамияти. Эҳтимоллик ва унинг таърифи

Режа:

1. Эҳтимоллар назарияси предмети.
2. Эҳтимоллар назарияси ривожланишининг қисқача тарихи.
3. Эҳтимоллар назариясининг иқтисодий, техник масалалар учун аҳамияти.
4. Элементар ҳодисалар ва ҳодисалар.
5. Эҳтимоллик ва унинг таърифи.
6. Нисбий частота.

Узоқ даврлар мобайнида инсоният ўз фаолияти учун фақат детерминирланган деб аталмиш қонуниятларни ўрганар ва улардан фойдаланар эди. Бироқ тасодифий ҳодисалар бизнинг ҳаётимизга хоҳиш–иродамиздан қатъий назар кириб келгани ва бизни доимо ўраб тургани учун ҳамда, устига–устак, табиатнинг деярли барча ҳодисалари тасодифий хусусиятли бўлгани учун уларни тадқиқ қилишни ўрганиш ва шу мақсадда тадқиқот усулларини ишлаб чиқиш зарурдир.

Табиат ва жамият қонунлари сабабий боғланишларнинг намоён бўлиш шакли бўйича иккита синфга бўлинади: детерминирланган (олдиндан аниқ) ва статистик.

Масалан, осмон механикаси қонунларига асосан Қуёш системасидаги сайёраларнинг ҳозир маълум бўлган вазияти бўйича уларнинг ихтиёрий пайтдаги вазияти амалда бир қийматли олдиндан айтиб берилиши мумкин, шу жумладан, Қуёш ва Ой тутилишлари жуда аниқ башорат қилиниши мумкин. Бу детерминирланган қонунларга мисол.

Шу билан бирга ҳамма ҳодисаларни ҳам аниқ башорат қилиб бўлмайди. Масалан, иқлимнинг узоқ муддат давомида ўзгаришлари, об–ҳавонинг қисқа муддатли ўзгаришлари муваффақиятли башорат қилишнинг объектлари бўла олмайди, яъни кўпгина қонунлар ва қонуниятлар детерминирланган доирага анча кам даражада бўйсунади. Бундай турдаги қонунлар статистик қонунлар деб аталади. Бундай қонунларга асосан, бирор–бир тизимнинг келажакдаги ҳолати бир қийматли эмас, балки фақат маълум бир эҳтимоллик билан аниқланади.

Эҳтимоллар назарияси бошқа математик фанлар каби амалиёт эҳтиёжларидан пайдо бўлди ва ривожланди. У оммавий тасодифий ҳодисаларга хос қонуниятларни ўрганиш билан шуғулланади.

Эҳтимоллар назарияси шарт–шароитларнинг аниқ бир мажмуасини амалга оширганда кўп мароталаб қайтарилишга қодир бўлган оммавий тасодифий ҳодисаларнинг хоссаларини ўрганади. Табиатидан қатъий назар, ихтиёрий тасодифий ҳодисанинг асосий хусусияти – уни амалга ошишининг ўлчови ёки эҳтимоллиги.

Биз кузатадиган ҳодисаларни учта турга бўлиш мумкин: муқаррар, мумкин бўлмаган ва тасодифий.

Муқаррар ҳодиса деб албатта рўй берадиган ҳодисага айтилади. *Мумкин бўлмаган ҳодиса* деб мутлақо рўй бермайдиган ҳодисага айтилади.

Тасодифий ҳодиса деб рўй бериши ҳам, рўй бермаслиги ҳам мумкин бўлган ҳодисага айтилади.

Эҳтимоллар назарияси якка ҳодиса рўй бериш ёки бермаслигини олдиндан айтиб бериш вазифасини ўз олдига қўймайди, чунки тасодифий ҳодисага ҳамма шарт–шароитларнинг таъсирини ҳисобга олиш мумкин эмас. Бошқа томондан қараганда, конкрет табиатидан қатъий назар, етарлича кўп сондаги бир жинсли тасодифий ҳодисалар тайин қонуниятларга, аниқроғи эҳтимолий қонуниятларга бўйсунади.

Шундай қилиб, *эҳтимоллар назариясининг предмети оммавий бир жинсли тасодифий ҳодисаларнинг эҳтимолий қонуниятларини ўрганишдир*.

XVII асрнинг бошларидаёқ оммавий тасодифий ҳодисаларга хос бўлган баъзи–бир масалаларни тегишли математик услублардан фойдаланган ҳолда ечишга уринишган. Б. Паскаль, П. Ферма ва Х. Гюйгенс XVII асрнинг ўрталарида турли қимор ўйинларининг кечиши ва натижаларини ўргана бориб, классик эҳтимоллар назариясига асос солишди. Улар ўз ишларида эҳтимоллик ва тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси тушунчаларидан ош–кор бўлмаган ҳолда фойдаланишган. Фақат XVIII асрнинг бошида Я.Бернулли эҳтимоллик тушунчасини шакллантиради.

Эҳтимоллар назариясининг кейинги муваффақиятлари Муавр, Лаплас, Гаусс, Пуассон ва бошқаларнинг номлари билан боғлиқ.

Эҳтимоллар назариясининг ривожланишига П.Л. Чебышев, А.А. Марков, А.М. Ляпунов, С.Н. Бернштейн, А.Н. Колмогоров, А.Я. Хинчин, А. Прохоров ва бошқалар каби рус ва совет математиклари улкан ҳисса қўшишган.

Академиклар В.И. Романовский, С.Х. Сирожиддинов, Т.А. Саримсоқов, Т.А. Азларов, Ш.К. Фармонов, профессорлар И.С. Бадалбоев, М.У. Ғофуров, Ш.А. Хошимов каби ёрқин намоёндалари бўлган Ўзбекистон мактабининг эҳтимоллар назариясини ривожлантиришдаги алоҳида ўрни бор.

Юқорида таъкидлаб ўтилганидек, амалиёт эҳтиёжлари эҳтимоллар назариясининг пайдо бўлишига кўмаклашган ҳолда унинг фан сифатида ривожланишини таъминлади, янги тармоқлар ва бўлимларнинг пайдо бўлишига олиб келди. Вазифаси бош тўпламга хос бўлган тавсифларни танланма бўйича маълум бир ишончлилик даражасида тиклашдан иборат бўлган математик статистика эҳтимоллар назариясига таянади. Эҳтимоллар назариясидан тасодифий жараёнлар назарияси, оммавий хизмат кўрсатиш назарияси, ахборот назарияси, ишончлилик назарияси, эконометрик моделлаштириш каби фан тармоқлари ажралиб чиқди.

Эҳтимоллар назариясини татбиқ қилишнинг энг муҳим йўналишлари сифатида иқтисодиёт, техника фанларини кўрсатиш мумкин. Ҳозирги пайтда эҳтимоллар назариясига таянувчи моделлаштиришларсиз, корреляциявий ва регрессиявий таҳлил, адекватлик ҳамда «сезгир» адаптив моделларисиз иқтисодий–техник тасодифий жараёнларни тадқиқ этишни тасаввур қилиш қийин.

Автомобиль оқимларида рўй берадиган ҳодисалар, машина қисмларининг ишончлилик даражаси, йўллардаги автоҳалокатлар, йўлларни лойиҳалаш жараёнидаги ҳар хил ҳолатлар детерминирланмаган бўлганлиги сабабли эҳтимоллар назарияси услублари орқали тадқиқ этилувчи муаммолар доирасига киради.

Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчалари – тажриба ёки эксперимент ва ҳодисалар. Муайян шартшароит ва ҳолатларда амалга ошириладиган хатти–ҳаракатларни *эксперимент* деб атаймиз. Экспериментнинг ҳар бир амалга ошиши *тажриба* деб аталади.

Экспериментнинг ҳар қандай мумкин бўлган натижаси *элементар ҳодиса* деб аталади ва ω орқали белгиланади. Тасодифий ҳодисалар бир қанча элементар ҳодисалардан ташкил топади ва *A, B, C, D*,... орқали белгиланади.

1) эксперимент ўтказилиши натижасида ω элементар ҳодисаларнинг биттаси доимо содир бўлади;
2) битта тажрибада фақат битта ω элементар ҳодиса содир бўлади

деган шартлар бажариладиган элементар ҳодисалар тўплами *элементар ҳодисалар фазоси* деб аталади ва Ω орқали белгиланади.

Шундай қилиб, ихтиёрий тасодифий ҳодиса элементар ҳодисалар фазосининг қисм тўплами бўлади. Элементар ҳодисалар фазосининг таърифига асосан муқаррар ҳодисани Ω орқали белгилаш мумкин. Мумкин бўлмаган ҳодиса $\varnothing$ орқали белгиланади.

1–мисол. Шашқолтош ташланмоқда. Ушбу экспериментга тўғри келувчи элементар ҳодисалар фазоси $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$ кўринишда бўлади.

2–мисол. Қутида 2 та қизил, 3 та кўк ва 1 та оқ, ҳаммаси бўлиб 6 та шар бўлсин. Эксперимент қутидан таваккалига шарларни олишдан иборат. Ушбу экспериментга тўғри келувчи элементар ҳодисалар фазоси $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$ кўринишда бўлади, бу ерда элементар ҳодисалар қуйидаги қийматларга эга бўлади: ω_1 – оқ шар чиқди; ω_2, ω_3 – қизил шар чиқди; $\omega_4, \omega_5, \omega_6$ – кўк шар чиқди. Қуйидаги ҳодисаларни кўриб чиқамиз:

A — оқ шарнинг чиқиши;
B — қизил шарнинг чиқиши;
C — кўк шарнинг чиқиши;
D — рангли (оқ бўлмаган) шарнинг чиқиши.

Бу ерда кўриниб турибдики, бу ҳодисаларнинг ҳар бири у ёки бу имкон даражасига эга: баъзилари – кўпроқ, бошқалари – камроқ. Шубҳасиз, *B* ҳодисанинг имкон даражаси *A* ҳодисаникидан кўпроқ; худди шундай *C* ники *B* никидан, *D* ники эса *C* никидан кўпроқ. Ҳодисаларни имкон даражалари бўйича миқдорий томондан таққослаш учун, шубҳасиз, ҳар бир ҳодиса билан маълум бир сонни боғлаш зарур. Бу сон ҳодиса қанчалик имкониятлироқ бўлса, шунчалик каттароқ бўлади.

Бу сонни $P(A)$ орқали белгилаймиз ва *A* ҳодисанинг эҳтимоллиги деб атаймиз. Энди эҳтимолликнинг таърифини берамиз.

Элементар ҳодисалар фазоси Ω чекли тўплам бўлсин ва унинг элементлари $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ бўлсин. Уларни тенг имкониятли элементар ҳодисалар деб ҳисоблаймиз, яъни ҳар бир элементар ҳодисанинг содир бўлиши бошқаларникидан кўпроқ имкониятга эга эмас. Маълумки, ҳар бир A тасодифий ҳодиса Ω нинг қисм тўплами сифатида элементар ҳодисалардан ташкил топган. Бу элементар ҳодисалар A нинг рўй беришига қулайлик туғдирувчилари дейилади.

A ҳодисанинг эҳтимоллиги

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad (1.1)$$

формула билан аниқланади, бу ерда m – A ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сони, n – Ω га кирувчи барча элементар ҳодисалар сони.

Агар 1–мисолда A орқали жуфт томон тушиши ҳодисаси белгиланса, у ҳолда $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

2–мисолда ҳодисаларнинг эҳтимолликлари қуйидаги қийматларга эга: $P(A) = \frac{1}{6}$; $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(D) = \frac{5}{6}$.

Эҳтимолликнинг таърифидан унинг қуйидаги хоссалари келиб чиқади:

1. *Муқаррар ҳодисанинг эҳтимоллиги бирга тенг*.

Ҳақиқатан, агар ҳодиса муқаррар бўлса, у ҳолда барча элементар ҳодисалар унинг рўй беришига қулайлик туғдиради. Бу ҳолда $m=n$, бинобарин

$$P(\Omega) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

2. *Мумкин бўлмаган ҳодисанинг эҳтимоллиги нолга тенг*.

Ҳақиқатан, мумкин бўлмаган ҳодисанинг рўй бериши учун бирорта ҳам элементар ҳодиса қулайлик туғдирмайди. Бу ҳолда $m=0$, бинобарин

$$P(\varnothing) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

3. *Тасодифий ҳодисанинг эҳтимоллиги ноль билан бир орасидаги мусбат сондир*.

Ҳақиқатан, тасодифий ҳодисанинг рўй беришига элементар ҳодисаларнинг фақат бир қисми қулайлик туғдиради. Бу ҳолда $0 < m < n$, демак $0 < \frac{m}{n} < 1$, бинобарин

$$0 < P(A) < 1.$$

Шундай қилиб, ихтиёрий ҳодисанинг эҳтимоллиги

$$0 \le P(A) \le 1 \qquad (1.2)$$

тенгсизликларни қаноатлантиради

Ҳодисанинг нисбий частотаси деб ҳодиса рўй берган тажрибалар сонининг аслида ўтказилган жами тажрибалар сонига нисбатига айтилади.

Шундай қилиб, A ҳодисанинг нисбий частотаси

$$W(A) = \frac{m}{n} \qquad (1.3)$$

формула билан аниқланади, бу ерда m – ҳодисанинг рўй беришлари сони, n – жами тажрибалар сони.

Эҳтимоллик ва нисбий частотанинг таърифларини солиштириб, қуйидаги хулосага келамиз: эҳтимолликнинг таърифида тажрибалар ҳақиқатан ўтказилганлиги талаб қилинмайди; нисбий частотанинг таърифида эса тажрибалар аслида ўтказилганлиги фараз қилинади.

3–мисол. Тасодифий танланган 80 та бир хил деталдан 3 таси яроқсиз эканлиги аниқланди. Яроқсиз деталларнинг нисбий частотаси $W(A) = \frac{3}{80}$ га тенг.

4–мисол. Бир йил давомида объектларнинг бирида 24 та текширув ўтказилди, бунда 19 марта қонунчиликнинг бузилишлари қайд этилди. Қонунчилик бузилишларининг нисбий частотаси $W(A) = \frac{19}{24}$ га тенг.

Узоқ кузатишлар шуни кўрсатадики, агар бир хил шарт–шароитларда тажрибалар ўтказилиб, уларнинг ҳар бирида тажрибалар сони етарлича катта бўлса, у ҳолда нисбий частота жуда оз (тажрибалар қанча кўп ўтказилган бўлса, шунча кам) ўзгариб, бирор ўзгармас сон атрофида тебранади. Бу ўзгармас сон ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги экан.

Шундай қилиб, агар тажриба йўли билан нисбий частота аниқланган бўлса, у ҳолда уни эҳтимолликнинг тақрибий қиймати сифатида олиш мумкин. Бу эҳтимолликнинг статистик таърифидир.

Хотимада эҳтимолликнинг геометрик таърифини кўриб чиқайлик.

Агар элементар ҳодисалар фазоси Ω ни текислик ёки фазодаги қандайдир бир соҳа, A ни эса унинг қисм тўплами деб қарайдиган бўлсак, у ҳолда *A ҳодисанинг эҳтимоллиги* A ва Ω нинг юзалари ёки ҳажмлари нисбатида қаралади ҳамда

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} \qquad (1.4)$$

ва

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)} \qquad (1.5)$$

формулалар бўйича топилади.

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Табиат ва жамият қонунлари сабабий боғланишларнинг намоён бўлиш шакли бўйича қандай синфларга бўлинади?
2. Ҳодисаларни қандай турларга бўлиш мумкин?
3. Эҳтимоллар назариясининг предмети нима?
4. Эҳтимоллар назарияси ривожланиши тарихи ҳақида нималарни биласиз?
5. Эҳтимоллар назариясининг иқтисодий, техник масалалар учун аҳамияти қандай?
6. Эксперимент, тажриба, элементар ҳодиса ва ҳодиса нима, улар қандай белгиланади?
7. Элементар ҳодисалар фазоси деб нимага айтилади?
8. Ҳодисанинг эҳтимоллиги қандай аниқланади?
9. Эҳтимолликнинг қайси хоссаларини биласиз?
10. Ҳодисанинг нисбий частотаси ҳақида нима биласиз?
11. Эҳтимолликнинг статистик таърифининг моҳияти нимада?
12. Эҳтимолликнинг геометрик таърифи қанақа?

2–мавзу.Ҳодисалар устида амаллар. Шартли эҳтимоллик

Режа:

1. Ҳодисалар устида амаллар.
2. Шартли эҳтимоллик.

Иккита A и B тасодифий ҳодисалар бир–бири билан қанчалик боғланган, бу ҳодисалардан биттасининг содир бўлиши иккинчисининг содир бўлиш имкониятига қай даражада таъсир қилади деган савол тез–тез пайдо бўлади.

Иккита ҳодиса ўртасидаги боғланишнинг энг содда мисоли сифатида ҳодисалардан бирининг содир бўлиши иккинчисининг албатта содир бўлишига олиб келадиган ёки, аксинча, ҳодисалардан бирининг содир бўлиши иккинчисининг содир бўлиш имкониятини йўққа чиқарадиган ҳолатларни келтириш мумкин.

Агар эксперимент натижасида A ва B ҳодисалар бир вақтнинг ўзида рўй бериши мумкин бўлмаса, улар *биргаликда бўлмаган* ҳодисалар деб аталади, акс ҳолда эса *биргаликда бўлган* ҳодисалар деб аталади.

1–мисол. Яшикдан таваккалига битта деталь олинди. Унинг стандарт бўлиши ностандарт эканлигини истисно қилади. «Таваккалига олинган деталнинг стандарт бўлиши» ва «Таваккалига олинган деталнинг ностандарт бўлиши» ҳодисалари биргаликда бўлмаган ҳодисалардир.

Агар ҳодисалар элементар ҳодисалар фазосининг қисм тўпламлари сифатида қаралса, у ҳолда ҳодисалар ўртасидаги муносабатларни тўпламлар ўртасидаги муносабатлар сифатида талқин қилиш мумкин. Биргаликда бўлмаган ҳодисалар – бу умумий элементар ҳодисаларга эга бўлмаган ҳодисалардир.

Агар эксперимент натижасида A ҳодисанинг рўй беришидан B ҳодисанинг рўй бериши албатта келиб чиқса, *A ҳодиса B ҳодисани эргаштиради* дейилади ва бу $A \subset B$ орқали белгиланади. Агар $A \subset B$ ва $B \subset A$ бўлса, у ҳолда $A = B$ бўлади.

2–мисол. Шашқолтош ташланмоқда. «4 рақамли томон чиқди» ҳодисаси «жуфт очко чиқди» ҳодисасини эргаштиради.

Иккита A ва B ҳодисаларнинг йиғиндиси деб ё A ҳодисанинг, ё B ҳодисанинг, ё шу иккала ҳодисанинг рўй беришидан иборат бўлган ҳодисага айтилади. У $A+B$ ёки $A \cup B$ орқали белгиланади. *Бир нечта ҳодисаларнинг йиғиндиси* деб шу ҳодисалардан ҳеч бўлмаганда биттасининг рўй беришидан иборат бўлган ҳодисага айтилади.

3–мисол. Замбаракдан икки марта ўқ узилмоқда. Агар A ҳодиса биринчи ўқ узишда нишонга тегиш, B эса иккинчи ўқ узишда нишонга тегиш ҳодисаси бўлса, у ҳолда $A+B$ ҳодисаси ё биринчи ўқ узишда, ё иккинчи ўқ узишда, ё иккала ўқ узишда нишонга тегиш ҳодисаси бўлади.

Иккита A ва B ҳодисаларнинг кўпайтмаси деб A ва B ҳодисаларнинг биргаликда рўй беришидан иборат бўлган ҳодисага айтилади. У AB ёки $A \cap B$ орқали белгиланади. *Бир нечта ҳодисаларнинг кўпайтмаси* деб шу ҳодисалардан ҳаммасининг биргаликда рўй беришидан иборат бўлган ҳодисага айтилади.

4–мисол. Яшикда биринчи ва иккинчи сонли заводларда ишлаб чиқарилган деталлар бор. Агар *A* ҳодиса стандарт деталнинг чиқиши, *B* эса деталь биринчи сонли заводда тайёрланган ҳодисаси бўлса, у ҳолда *AB* ҳодисаси биринчи сонли заводнинг стандарт детали чиқиши ҳодисаси бўлади.

A ҳодисага *қарама–қарши* ҳодиса $\overline{A}$ орқали белгиланади. У *A* ҳодиса рўй бермаганда ва фақат шу ҳолдагина рўй берган ҳисобланади. Бошқача қилиб айтганда, *A* ва $\overline{A}$ ҳодисалар иккаласи жамланиб муқаррар ҳодисани ташкил этадиган биргаликда бўл–маган ҳодисалардир, яъни $A \cup \overline{A} = \Omega$.

5–мисол. Ўқ узишда нишонга тегиш ва хато кетиш қарама–қарши ҳодисалар. Агар *A* нишонга тегиш бўлса, у ҳолда $\overline{A}$ хато кетишдир.

A ҳодисанинг рўй бериши ва *B* ҳодисанинг рўй бермаслигидан иборат бўлган ҳодиса *A ва B ҳодисаларнинг айирмаси* деб аталади ва *A**B* орқали белгиланади.

Агар иккита ҳодисадан бирининг эҳтимоллиги иккинчисининг рўй бериши ёки рўй бермаслигига боғлиқ бўлмаса, у ҳолда бундай ҳодисалар *боғлиқмас* деб аталади. Акс ҳолда бу ҳодисалар *боғлиқ* деб аталади.

6–мисол. Танга 2 марта ташланмоқда. Биринчи ташлашда гербнинг чиқиши (*A* ҳодиса)нинг эҳтимоллиги иккинчи ташлашда гербнинг чиқиши (*B* ҳодиса)га боғлиқ эмас. Ўз навбатида, иккинчи ташлашда гербнинг чиқиши биринчи ташлашнинг натижасига боғлиқ эмас. Шундай қилиб, *A* ва *B* ҳодисалар боғлиқ эмас.

Агар бир нечта ҳодисанинг ихтиёрий иккитаси ўзаро боғлиқ бўлмаса, у ҳолда бундай ҳодисалар *жуфт–жуфти билан боғлиқ эмас* деб аталади.

A ва *B* иккита тасодифий ҳодиса бўлиб, бунда $P(B) \neq 0$ бўлсин. Боғлиқ ҳодисаларнинг таърифидан иккита ҳодисадан бирининг эҳтимоллиги иккинчисининг рўй бериши ёки рўй бермаслигига боғлиқ эканлиги келиб чиқади. Шунинг учун, агар бизни *A* ҳодисанинг эҳтимоллиги қизиқтирса, у ҳолда *B* ҳодисанинг рўй берганлигини билиш муҳимдир.

A ҳодисанинг *B* ҳодиса рўй берганлиги шартидаги эҳтимоллиги *шартли эҳтимоллик* деб аталади ва $P(A/B)$ орқали белгиланади.

7–мисол. Қутида 3 та оқ ва 3 та қора шар бор. Қутидан таваккалига орқага қайтармасдан икки марта биттадан шар олинади. Агар биринчи синовда қора шар чиққан бўлса (*B* ҳодиса), иккинчи синовда оқ шарнинг чиқиши (*A* ҳодиса)нинг эҳтимоллиги топилсин.

<u>Ечиш</u>. Биринчи синовдан кейин қутида ҳаммаси бўлиб 5 та шар, улардан 3 таси оқ шар қолди. Қидирилаётган шартли эҳтимоллик $P(A/B) = \frac{3}{5}$ га тенг.

Энди шартли эҳтимоллик формуласини чиқарамиз. *A* ва *B* ҳодисаларнинг рўй беришига n та элементар ҳодисадан мос равишда m ва k таси қулайлик туғдирсин; у ҳолда, (1.1) га асосан, уларнинг шартсиз эҳтимолликлари мос равишда $\frac{m}{n}$ ва $\frac{k}{n}$ га тенг. A ҳодисанинг рўй беришига B ҳодиса рўй берганлиги шартида r та элементар ҳодиса қулайлик туғдирсин, у ҳолда, (1.1) га асосан, A ҳодисанинг шартли эҳтимоллиги

$$P(A/B)=\frac{r}{k}$$

га тенг. Сурат ва махражни n га бўлиб, шартли эҳтимолликнинг

$$P(A/B)=\frac{r/n}{k/n}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

ёки
$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \qquad (2.1)$$

формуласини оламиз, чунки AB ҳодисага r та элементар ҳодиса мос келади, бинобарин, $\frac{r}{n}$ – унинг шартсиз эҳтимоллиги.

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Қандай ҳодисалар биргаликда бўлмаган, қайсилари эса биргаликда бўлган ҳодисалар деб аталади?
2. «A ҳодиса ўзидан кейин B ҳодисани келтириб чиқаради (эргаштиради)» деган ибора нимани билдиради ва у қандай белгиланади?
3. Ҳодисаларнинг йиғиндиси деб нимага айтилади ва у қандай белгиланади?
4. Ҳодисаларнинг кўпайтмаси деб нимага айтилади ва у қандай белгиланади?
5. Қарама–қарши ҳодиса нима ва у қандай белгиланади?
6. Ҳодисаларнинг айирмаси деб нимага айтилади ва у қандай белгиланади?
7. Қандай ҳодисалар боғлиқмас, қайсилари эса боғлиқ ҳодисалар деб аталади?
8. Шартли эҳтимоллик нима ва унинг формуласи қандай?

3–мавзу. Эҳтимолликларни қўшиш ва кўпайтириш теоремалари.

Режа:

1. Эҳтимолликларни қўшиш теоремалари.
2. Эҳтимолликларни кўпайтириш теоремалари.

A ва *B* ҳодисалар биргаликда бўлмасин ҳамда уларнинг эҳтимолликлари берилган бўлсин. Ё *A*, ё *B* ҳодисанинг рўй бериши, яъни бу ҳодисаларнинг йиғиндиси *A+B* нинг эҳтимоллигини қандай топиш мумкин? Бунга қуйидаги теорема жавоб беради.

3.1–теорема (биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг эҳтимолликларини қўшиш). *Иккита биргаликда бўлмаган ҳодисалар йиғиндисининг эҳтимоллиги бу ҳодисалар эҳтимолликларининг йиғиндисига тенг:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (3.1)$$

Исбот. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

n — элементар ҳодисаларнинг умумий сони;

m_1 — *A* ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сони;

m_2 — *B* ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сони.

Ё *A*, ё *B* ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сони m_1+m_2 га тенг. Шунинг учун

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}$$

бўлади.

$\frac{m_1}{n}=P(A)$ ва $\frac{m_2}{n}=P(B)$ эканлигини эътиборга олиб,

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

ни оламиз.

3.1–натижа. *Бир нечта биргаликда бўлмаган ҳодисалар йиғиндисининг эҳтимоллиги бу ҳодисалар эҳтимолликларининг йиғиндисига тенг:*

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n). \qquad (3.2)$$

1–мисол. Қутида 30 та шар бор, улардан 10 таси қизил, 5 таси кўк ва 15 таси оқ. Рангли шар чиқишининг эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. Рангли шарнинг чиқиши ё қизил, ё кўк шарнинг чиқишини билдиради.

Қизил шар чиқиши (*A* ҳодиса)нинг эҳтимоллиги $P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$ га тенг.

Кўк шар чиқиши (*B* ҳодиса)нинг эҳтимоллиги эса $P(B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$ га тенг.

A ва *B* ҳодисалар биргаликда бўлмаган ҳодисалардир (бирор рангдаги шарнинг чиқиши бошқа рангдаги шарнинг чиқишини истисно қилади), шунинг учун қидирилаётган эҳтимоллик

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$ бўлади.

Қарама–қарши ҳодисалар биргаликда муқаррар ҳодисани ташкил этгани учун 3.1–теоремадан

$$P(\Omega)=P(A)+P(\overline{A})=1$$

эканлиги келиб чиқади, шу сабабли

$$P(\overline{A})=1-P(A). \qquad (3.3)$$

2–мисол. Кун давомида ёғингарчилик бўлишининг эҳтимоллиги $p=0{,}3$ га тенг. Кун очиқ бўлишининг эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. «Кун давомида ёғингарчилик бўлади» ва «Кун очиқ» ҳодисалари қарама–қарши ҳодисалардир, шунинг учун қидирила–ётган эҳтимоллик $q=1-p=1-0{,}3=0{,}7$ га тенг.

(2.1) формуладан қуйидаги теоремани оламиз.

3.2–теорема (боғлиқ ҳодисаларнинг эҳтимолликларини кўпайтириш). *Иккита боғлиқ ҳодисалар кўпайтмасининг эҳтимоллиги улардан бирининг эҳтимоллигининг шу ҳодиса рўй берди деган фаразда ҳисобланган иккинчи ҳодиса шартли эҳтимоллигига кўпайтмасига тенг:*

$$P(AB)=P(A/B)\cdot P(B). \qquad (3.4)$$

3–мисол. Йиғувчида 3 та конуссимон ва 7 та эллипссимон валик бор. Йиғувчи таваккалига аввал битта валикни, сўнгра эса иккинчи валикни олди. Биринчи валик конуссимон, иккинчиси эса эллипссимон эканлигининг эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. Биринчи валик конуссимон эканлиги (B ҳодиса)нинг эҳтимоллиги $P(B)=\frac{3}{10}$ га тенг. Иккинчи валик эллипссимон эканлиги (A ҳодиса)нинг биринчи валик конуссимон деган фаразда ҳисобланган шартли эҳтимоллиги $P(A/B)=\frac{7}{9}$ га тенг.

У ҳолда (3.4) формулага асосан қидирилаётган эҳтимоллик

$$P(AB)=P(A/B)\cdot P(B)=\frac{7}{9}\cdot\frac{3}{10}=\frac{7}{30}$$ бўлади.

Энди A ва B ҳодисалар боғлиқмас бўлган ҳолга ўтамиз ва бу ҳодисалар кўпайтмасининг эҳтимоллигини топамиз.

A ҳодиса B ҳодисага боғлиқ бўлмагани учун унинг $P(A/B)$ шартли эҳтимоллиги $P(A)$ шартсиз эҳтимоллигига тенгдир, яъни

$$P(A/B)=P(A).$$

Бу ердан қуйидаги теорема келиб чиқади.

3.3–теорема (боғлиқмас ҳодисаларнинг эҳтимолликларини кўпайтириш). *Иккита боғлиқмас ҳодисалар кўпайтмасининг эҳтимоллиги* *шу ҳодисалар эҳтимолликларининг кўпайтмасига тенг:*

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \qquad (3.5)$$

3.2–натижа. *Бир нечта боғлиқмас ҳодисалар кўпайтмасининг эҳтимоллиги шу ҳодисалар эҳтимолликларининг кўпайтмасига тенг:*

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

4–мисол. 10 тадан детали бор 3 та яшик мавжуд. 1–яшикда 8 та, 2–яшикда 7 та ва 3–яшикда 9 та стандарт деталь бор. Ҳар бир яшикдан таваккалига биттадан деталь олинмоқда. Уччала олинган деталь стандарт бўлишининг эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. 1–яшикдан стандарт деталь олиниши (*A* ҳодиса)нинг эҳтимоллиги $P(A) = \frac{8}{10} = 0{,}8$ га тенг. 2–яшикдан стандарт деталь олиниши (*B* ҳодиса)нинг эҳтимоллиги $P(B) = \frac{7}{10} = 0{,}7$ га тенг. 3–яшикдан стандарт деталь олиниши (*C* ҳодиса)нинг эҳтимоллиги $P(C) = \frac{9}{10} = 0{,}9$ га тенг.

A, *B* ва *C* ҳодисалар боғлиқмас бўлгани учун 3.2–натижага асосан қидирилаётган эҳтимоллик

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}504 \text{ га тенг.}$$

Энди *A* ва *B* ҳодисалар биргаликда бўлган ҳолга ўтамиз ва бу ҳодисалар йиғиндисининг эҳтимоллигини топамиз.

3.4–теорема (биргаликда бўлган ҳодисаларнинг эҳтимолликларини қўшиш). *Иккита биргаликда бўлган ҳодисалар йиғиндисининг эҳтимоллиги бу ҳодисалар эҳтимолликларининг йиғиндисидан уларнинг кўпайтмаси эҳтимоллигининг айирмасига тенг:*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (3.6)$$

5–мисол. Биринчи ва иккинчи замбаракдан ўқ узишда нишонга тегиш эҳтимолликлари мос равишда $p_1 = 0{,}7$ ва $p_2 = 0{,}8$ га тенг. Иккала замбаракдан бир вақтнинг ўзида ўқ узишда ҳеч бўлмаганда битта замбаракнинг ўқи нишонга тегиши эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. Ҳар бир замбаракдан нишонга тегиш эҳтимоллиги бошқа замбаракдан ўқ узиш натижасига боғлиқ эмас, шунинг учун *A* ҳодиса (биринчи замбаракдан нишонга тегиш) ва *B* ҳодиса (иккинчи замбаракдан нишонга тегиш) боғлиқмас.

Шу сабабли *AB* ҳодиса (иккала замбаракдан нишонга тегиш)нинг эҳтимоллиги $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$ га тенг. У ҳолда қидирилаётган эҳтимоллик

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}56 = 0{,}94 \text{ га тенг.}$$

Агар б о ғ л и қ м а с $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар биргаликда муқаррар ҳодисани ташкил этса, у ҳолда шу ҳодисалардан ҳеч бўлмаганда биттасининг рўй бериш эҳтимоллигини қуйидаги формула бўйича топиш мумкин

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_n) \qquad (3.7)$$

6–мисол. Босмахонада 4 та дастгоҳ бор. Ҳар бир дастгоҳнинг айни шу пайтда ишлашининг эҳтимоллиги 0,9 га тенг. Айни шу пайтда ҳеч бўлмаганда битта дастгоҳ ишлаши (A ҳодиса)нинг эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. Айни шу пайтда дастгоҳ ишламаслигининг эҳтимоллиги $q = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$ га тенг. У ҳолда қидирилаётган эҳтимоллик $P(A) = 1 - q^4 = 1 - (0{,}1)^4 = 0{,}9999$ га тенг.

Агар $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар биргаликда бўлмаса ва ҳаммаси жамланиб муқаррар ҳодисани ташкил этса, яъни $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$; $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$ бўлса, у ҳолда улар *ҳодисаларнинг тўла группасини* ташкил этади деб аталади.

Фараз қилайлик, A ҳодиса фақат тўла группани ташкил этувчи $H_1, H_2, \ldots, H_n$ ҳодисалардан бири рўй бергандагина содир бўлиши мумкин, бу ҳодисаларни *гипотезалар* деб атаймиз. Бу ҳодисаларнинг эҳтимолликлари ва $P(A/H_i)$ $(i = \overline{1, n})$ шартли эҳтимолликлар маълум бўлсин.

$A\Omega = A$ бўлгани учун $A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n$ бўлади.

$H_1, H_2, \ldots, H_n$ ларнинг биргаликда эмаслигидан $AH_1, AH_2, \ldots, AH_n$ ҳодисаларнинг биргаликда эмаслиги келиб чиқади.

(3.1) формулани қўллаб, қуйидагини оламиз

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(AH_n).$$

(3.4) формулага асосан ($H_1, H_2, \ldots, H_n$ ҳодисалар боғлиқ бўлиши ҳам мумкин) охирги ифоданинг ўнг томонидаги ҳар бир $P(AH_i)$ қўшилувчини $P(A/H_i)P(H_i)$ кўпайтма билан алмаштириб,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i) \qquad (3.8)$$

тўла эҳтимоллик формуласини оламиз.

7–мисол. Деталларнинг 2 та тўплами бор. 1–тўпламдан таваккалига олинган деталь стандарт бўлишининг эҳтимоллиги 0,8 га, иккинчисидан олинганники эса 0,9 га тенг. Таваккалига олинган тўпламдан таваккалига олинган деталнинг стандарт бўлиши эҳтимолллиги топилсин.

Ечиш. A орқали «олинган деталь стандарт» ҳодисасини белгилайлик. Деталь ё 1–тўпламдан олиниши мумкин (H_1 ҳодиса), ё 2–тўпламдан (H_2 ҳодиса).

Деталь 1–тўпламдан олинишининг эҳтимоллиги $P(H_1) = \frac{1}{2}$ га, 2–тўпламдан олинишининг эҳтимоллиги эса $P(H_2) = \frac{1}{2}$ га тенг бўлади.

Мисол шартига асосан $P(A/H_1) = 0{,}8$ ва $P(A/H_2) = 0{,}9$ бўлади. У ҳолда қидирилаётган эҳтимоллик тўла эҳтимоллик формуласига асосан топилади ва қуйидагига тенг

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=0{,}5\cdot 0{,}8+0{,}5\cdot 0{,}9=0{,}85\ .$$

Тўла эҳтимоллик формуласини келтириб чиқаришдаги ҳодисалар учун A ҳодиса рўй берган бўлсин ва гипотезаларнинг $P(H_k/A)$ $(k=\overline{1,n})$ шартли эҳтимолликларини топиш масаласи қўйилган бўлсин.

(2.1) формуладан $P(H_k/A)=\dfrac{P(AH_k)}{P(A)}$ га эга бўламиз.

Сўнгра, (3.4) формуладан қуйидагини оламиз

$$P(AH_k)=P(H_k)P(A/H_k)\,.$$

Тўла эҳтимоллик формуласини қўллаб, бу ердан ва бундан аввалги муносабатдан

$$P(H_k/A)=\frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)} \qquad (3.9)$$

Байес формуласини келтириб чиқарамиз.

8–мисол. Завод цехида тайёрланаётган деталларнинг стандарт эканлигини иккита назоратчидан бири текширади. Деталнинг 1–назоратчига тушиш эҳтимоллиги 0,6 га, 2–назоратчига тушиш эҳтимоллиги эса 0,4 га тенг. Яроқли деталнинг 1–назоратчи томонидан стандарт деб топилишининг эҳтимоллиги 0,94 га, 2–назоратчи томонидан эса 0,98 га тенг бўлсин. Яроқли деталь текширувда стандарт деб топилди. Бу деталь 1–назоратчи томонидан текши–рилганлигининг эҳтимоллиги топилсин.

<u>Ечиш</u>. A орқали яроқли деталь стандарт деб топилиши ҳодисасини белгилаймиз. Иккита фараз қилиш мумкин

1) детални 1–назоратчи текширди (H_1 гипотезаси);
2) детални 2–назоратчи текширди (H_2 гипотезаси).

Мисол шартига асосан қуйидагиларга эгамиз:

$P(H_1)=0{,}6$ (деталнинг 1–назоратчига тушиш эҳтимоллиги);

$P(H_2)=0{,}4$ (деталнинг 2–назоратчига тушиш эҳтимоллиги);

$P(A/H_1)=0{,}94$ (яроқли деталнинг 1–назоратчи томонидан стандарт деб топилишининг эҳтимоллиги);

$P(A/H_2)=0{,}98$ (яроқли деталнинг 2–назоратчи томонидан стандарт деб топилишининг эҳтимоллиги).

Қидирилаётган эҳтимолликни Байес формуласи бўйича топамиз:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)}=$$

$$=\frac{0{,}6\cdot 0{,}94}{0{,}6\cdot 0{,}94+0{,}4\cdot 0.98}\approx 0{,}58996\ .$$

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Биргаликда бўлмаган ҳодисалар эҳтимолликларини қўшиш теоремаси нима ҳақида ва унинг исботи қандай?
2. Қарама–қарши ҳодисанинг эҳтимоллиги нимага тенг?
3. Боғлиқ ва боғлиқмас ҳодисалар эҳтимолликларини кўпайтириш теоремаларида нима ҳақида гап боради?
4. Биргаликда бўлган ҳодисалар эҳтимолликларини қўшиш теоремаси нима ҳақида?
5. Ҳеч бўлмаганда битта ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллигини қандай топиш мумкин?

4–мавзу. Тўла эҳтимоллик ва Байес формулалари

Режа:

1. Тўла эҳтимоллик формуласи.
2. Байес формуласи.

Агар $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар биргаликда бўлмаса ва ҳаммаси жамланиб муқаррар ҳодисани ташкил этса, яъни $A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j$; $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$ бўлса, у ҳолда улар *ҳодисаларнинг тўла группасини* ташкил этади деб аталади.

Фараз қилайлик, A ҳодиса фақат тўла группани ташкил этувчи $H_1, H_2, \ldots, H_n$ ҳодисалардан бири рўй бергандагина содир бўлиши мумкин, бу ҳодисаларни *гипотезалар* деб атаймиз. Бу ҳодисаларнинг эҳтимолликлари ва $P(A/H_i)$ $(i = \overline{1, n})$ шартли эҳтимолликлар маълум бўлсин.

$A\Omega = A$ бўлгани учун $A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n$ бўлади.

$H_1, H_2, \ldots, H_n$ ларнинг биргаликда эмаслигидан $AH_1, AH_2, \ldots, AH_n$ ҳодисаларнинг биргаликда эмаслиги келиб чиқади.

(3.1) формулани қўллаб, қуйидагини оламиз

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(AH_n).$$

(3.4) формулага асосан ($H_1, H_2, \ldots, H_n$ ҳодисалар боғлиқ бўлиши ҳам мумкин) охирги ифоданинг ўнг томонидаги ҳар бир $P(AH_i)$ қўшилувчини $P(A/H_i)P(H_i)$ кўпайтма билан алмаштириб,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i) \qquad (3.8)$$

тўла эҳтимоллик формуласини оламиз.

7–мисол. Деталларнинг 2 та тўплами бор. 1–тўпламдан таваккалига олинган деталь стандарт бўлишининг эҳтимоллиги 0,8 га, иккинчисидан олинганники эса 0,9 га тенг. Таваккалига олинган тўпламдан таваккалига олинган деталнинг стандарт бўлиши эҳтимолллиги топилсин.

<u>Ечиш</u>. A орқали «олинган деталь стандарт» ҳодисасини белгилайлик. Деталь ё 1–тўпламдан олиниши мумкин (H_1 ҳодиса), ё 2–тўпламдан (H_2 ҳодиса).

Деталь 1–тўпламдан олинишининг эҳтимоллиги $P(H_1)=\frac{1}{2}$ га, 2–тўпламдан олинишининг эҳтимоллиги эса $P(H_2)=\frac{1}{2}$ га тенг бўлади.

Мисол шартига асосан $P(A/H_1)=0{,}8$ ва $P(A/H_2)=0{,}9$ бўлади. У ҳолда қидирилаётган эҳтимоллик тўла эҳтимоллик формуласига асосан топилади ва қуйидагига тенг

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=0{,}5\cdot 0{,}8+0{,}5\cdot 0{,}9=0{,}85\,.$$

Тўла эҳтимоллик формуласини келтириб чиқаришдаги ҳодисалар учун *A* ҳодиса рўй берган бўлсин ва гипотезаларнинг $P(H_k/A)$ $(k=\overline{1,n})$ шартли эҳтимолликларини топиш масаласи қўйилган бўлсин.

(2.1) формуладан $P(H_k/A)=\frac{P(AH_k)}{P(A)}$ га эга бўламиз.

Сўнгра, (3.4) формуладан қуйидагини оламиз

$$P(AH_k)=P(H_k)P(A/H_k)\,.$$

Тўла эҳтимоллик формуласини қўллаб, бу ердан ва бундан аввалги муносабатдан

$$P(H_k/A)=\frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)} \qquad (3.9)$$

Байес формуласини келтириб чиқарамиз.

8–мисол. Завод цехида тайёрланаётган деталларнинг стандарт эканлигини иккита назоратчидан бири текширади. Деталнинг 1–назоратчига тушиш эҳтимоллиги 0,6 га, 2–назоратчига тушиш эҳтимоллиги эса 0,4 га тенг. Яроқли деталнинг 1–назоратчи томонидан стандарт деб топилишининг эҳтимоллиги 0,94 га, 2–назоратчи томонидан эса 0,98 га тенг бўлсин. Яроқли деталь текширувда стандарт деб топилди. Бу деталь 1–назоратчи томонидан текши–рилганлигининг эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. *A* орқали яроқли деталь стандарт деб топилиши ҳоди–сасини белгилаймиз. Иккита фараз қилиш мумкин

3) детални 1–назоратчи текширди (H_1 гипотезаси);

4) детални 2–назоратчи текширди (H_2 гипотезаси).

Мисол шартига асосан қуйидагиларга эгамиз:

$P(H_1)=0{,}6$ (деталнинг 1–назоратчига тушиш эҳтимоллиги);

$P(H_2)=0{,}4$ (деталнинг 2–назоратчига тушиш эҳтимоллиги);

$P(A/H_1)=0{,}94$ (яроқли деталнинг 1–назоратчи томонидан стандарт деб топилишининг эҳтимоллиги);

$P(A/H_2)=0{,}98$ (яроқли деталнинг 2–назоратчи томонидан стандарт деб топилишининг эҳтимоллиги).

Қидирилаётган эҳтимолликни Байес формуласи бўйича топамиз:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)}=$$

$$=\frac{0{,}6\cdot 0{,}94}{0{,}6\cdot 0{,}94+0{,}4\cdot 0.98}\approx 0{,}58996\ .$$

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Қайси ҳодисалар ҳодисаларнинг тўла группасини ташкил этади?
2. Тўла эҳтимоллик формуласи нима ва у қандай келтириб чиқарилади?
3. Байес формуласи нима ва у қандай келтириб чиқарилади?

5–мавзу. Боғлиқмас тажрибалар кетма–кетлиги. Лапласнинг локал ва интеграл теоремалари

Режа:

1. Боғлиқмас тажрибалар кетма–кетлиги.
2. Бернулли формуласи.
3. Муваффақиятларнинг энг эҳтимолли сони.
4. Лапласнинг локал теоремаси.
5. Лапласнинг интеграл теоремаси.
6. Нисбий частотанинг ўзгармас эҳтимолликдан четланишининг эҳтимоллиги.

Ҳар бирида *A* ҳодиса рўй бериши (муваффақият) ҳам, рўй бермаслиги (муваффақиятсизлик) ҳам мумкин бўлган *n* та боғлиқмас тажрибалар амалга оширилсин. *A* ҳодисанинг ҳар бир тажрибадаги эҳтимоллигини бир хил, яъни *p* га тенг деб ҳисоб–лаймиз. Демак, *A* ҳодиса рўй бермаслигининг эҳтимоллиги ҳам ҳар бир тажрибада доимий ва $q=1–p$ га тенг. Тажрибаларнинг бундай кетма–кетлиги *Бернулли схемаси* деб аталади.

Бундай тажрибаларга мисол сифатида, масалан, технологик ва ташкилий шарт–шароитларнинг доимийлиги ҳолатида маълум бир ускуналарда маҳсулотларни ишлаб чиқаришни қараш мумкин, бу ҳолда яроқли маҳсулотни тайёрлаш – муваффақият, яроқсизини тайёрлаш — муваффақиятсизлик. Агар бирор маҳсулотни тайёрлаш жараёни аввалги маҳсулотларнинг яроқли ёки яроқсиз эканлигига боғлиқ эмас деб ҳисобланса, бу вазият Бернулли схемасига мос келади.

Бошқа мисол сифатида нишонга қарата ўқ узишни олиш мумкин. Бу ерда ўқнинг нишонга тегиши – муваффақият, нишонга тегмаслиги – муваффақиятсизлик.

n та тажрибада *A* ҳодиса роппа–роса *k* марта рўй бериши ва демак, *n*—*k* марта рўй бермаслиги, яъни *k* та муваффақият ва *n*—*k* та муваффақиятсизлик бўлишининг эҳтимоллигини ҳисоблаш масаласи қўйилган бўлсин.

Қидирилаётган эҳтимолликни $P_n(k)$ орқали белгилаймиз. Масалан, $P_5(3)$ ёзуви бешта тажрибада ҳодиса роппа–роса 3 марта рўй бериши ва демак, 2 марта рўй бермаслигининг эҳтимоллигини билдиради.

n та боғлиқмас тажрибалар кетма–кетлигини *n* та боғлиқмас ҳодисалар кўпайтмасидан иборат бўлган мураккаб ҳодиса деб қараш мумкин. Демак, *n* та тажрибада *A* ҳодиса *k* марта рўй бериши ва *n*—*k* марта рўй бермаслигининг эҳтимоллиги боғлиқмас ҳодисаларнинг эҳтимолликларини кўпайтириш ҳақидаги 3.3–теоремага асосан $p^k q^{n-k}$ га тенг. Бундай мураккаб ҳодисалар *n* та элементдан *k* тадан нечта группалаш тузиш мумкин бўлса, шунча, яъни C_n^k та бўлади.

Бу мураккаб ҳодисалар биргаликда бўлмагани учун биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг эҳтимолликларини қўшиш ҳақидаги 3.1–теоремага асосан изланаётган эҳтимоллик мумкин бўлган барча мураккаб ҳодисалар эҳтимолликларининг йиғиндисига тенг. Бу мураккаб ҳодисаларнинг эҳтимолликлари бир хил бўлгани учун изланаётган эҳтимоллик (*n* та тажрибада *A* ҳодисанинг *k* марта рўй бериш эҳтимоллиги) битта мураккаб ҳодисанинг эҳти–моллигини уларнинг сонига кўпайтирилганига тенг

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

ёки

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \qquad (4.1)$$

Ҳосил қилинган формула *Бернулли формуласи* деб аталади.

1–мисол. Бир суткада электр қуввати сарфининг белгиланган меъёрдан ортиб кетмаслиги эҳтимоллиги $p = 0{,}75$ га тенг. Яқин 6 сутканинг 4 суткаси давомида электр қуввати сарфининг белгиланган меъёрдан ортиб кетмаслиги эҳтимоллиги топилсин.

<u>Ечиш</u>. 6 сутканинг ҳар бирида электр қувватининг меъёрда сарфланишининг эҳтимоллиги ўзгармас ва $p = 0{,}75$ га тенг. Демак, ҳар бир суткада электр қувватининг меъёрдан ортиқ сарфланишининг эҳтимоллиги ҳам ўзгармас ва $q = 1 - p = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$ га тенг.

Изланаётган эҳтимоллик Бернулли формуласига асосан

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = C_6^2 p^4 q^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}(0{,}75)^4 \cdot (0{,}25)^2 = \frac{1215}{4096} \approx 0{,}297$$

га тенг бўлади.

Қатор масалаларда муваффақиятларнинг энг эҳтимолли со–нини, яъни эҳтимоллиги (4.1) эҳтимолликлар ичида энг каттаси бўлган муваффақиятларнинг сони m ни топиш талаб этилади. k ортганда (4.1) эҳтимолликлар аввал ўсиб, сўнгра, маълум бир пайтдан бошлаб, камайгани сабабли m учун

$$P_n(m) \geq P_n(m-1) \qquad (4.2)$$

ва

$$P_n(m) \geq P_n(m+1) \qquad (4.3)$$

муносабатлар ўринли бўлиши керак.

(4.1) формуладан ва $p + q = 1$ муносабатдан фойдаланиб, (4.2) ва (4.3) дан мос равишда

$$(n-m+1)p \geq mq \qquad (4.4)$$

ва

$$(m+1)q \geq (n-m)p \qquad (4.5)$$

тенгсизликларни оламиз.

Пировард натижада m нинг узунлиги 1 га тенг бўлган ин–тервалда ётиши келиб чиқади:

$$np-q \leq m \leq np+p. \qquad (4.6)$$

Бироқ, таъкидлаб ўтиш жоизки, Бернулли формуласини n нинг катта қийматларида қўллаш анча қийин, чунки формула жуда катта сонлар устида амаллар бажаришни талаб қилади.

Масалан, $n=50$, $k=30$, $p=0{,}1$ бўлса, у ҳолда $P_{50}(30)$ эҳтимолликни ҳисоблаш учун $P_{50}(30)=\dfrac{50!}{30!\cdot 20!}\cdot(0{,}1)^{30}\cdot(0{,}9)^{20}$ ифодани ҳисоблашга тўғри келади, бу ерда $50! = 30414093\ \cdot 10^{57}$, $30! = 26525286\ \cdot 10^{25}$, $20! = 24329020\ \cdot 10^{11}$.

Бундай савол туғилиши табиий: бизни қизиқтираётган эҳтимолликни Бернулли формуласини қўлламасдан ҳисоблаш ҳам мумкинми? Мумкин экан. Лапласнинг локал теоремаси тажрибалар сони етарлича катта бўлганда ҳодисанинг n та тажрибада роппароса k марта рўй бериши эҳтимоллигини тақрибий ҳисоблаш учун асимптотик формула беради.

Лапласнинг локал теоремаси. *Агар ҳар бир тажрибада А ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги p ўзгармас бўлиб, ноль ва бир–дан фарқли бўлса, у ҳолда n та тажрибада А ҳодисанинг роппа–роса k марта рўй беришининг эҳтимоллиги* $P_n(k)$ *тақрибан (n қанча катта бўлса, шунчалик аниқ)*

$$y=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\phi(x)$$

функциянинг $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$ *даги қийматига тенг.*

$\phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ функциянинг қийматларидан тузилган жадваллар мавжуд. Бунда $\phi(-x)=\phi(x)$ эканлигини ҳисобга олиш керак, чунки $\phi(x)$ функция жуфт функциядир.

Шундай қилиб, n та боғлиқмас тажрибада A ҳодисанинг роппа–роса k марта рўй бериш эҳтимоллиги тақрибан

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\phi(x) \qquad (4.7)$$

га тенг, бу ерда $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

2–мисол. Агар ҳар бир тажрибада A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги 0,2 га тенг бўлса, 400 та тажрибада бу ҳодисанинг роппа–роса 80 марта рўй бериши эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. Шартга кўра $n=400$; $k=80$; $p=0,2$; $q=0,8$.

(4.7) формуладан фойдаланамиз:

$$P_{400}(80)\approx\frac{1}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}\cdot\phi(x)=\frac{1}{8}\cdot\phi(x).$$

x нинг мисол шартлари орқали аниқланадиган қийматини ҳисоблаймиз:

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{80-400\cdot 0,2}{8}=0.$$

Жадвалдан $\phi(0)=0,3989$ эканлигини топамиз.

Изланаётган эҳтимоллик $P_{400}(80)=\frac{1}{8}\cdot 0,3989=0,04986$ га тенг.

Бернулли формуласи ҳам тахминан шу натижага олиб келади (ҳисоблашлар узундан–узоқ бўлгани учун келтирилмади):

$$P_{400}(80)=0,0498.$$

Энди n та тажрибада A ҳодисанинг камида k_1 марта ва кўпи билан k_2 марта (қисқача «k_1 дан k_2 мартагача») рўй бериши эҳтимоллиги $P_n(k_1,k_2)$ ни ҳисоблаш талаб қилинган бўлсин. Бу муаммо қуйидаги теорема ёрдамида ҳал қилинади.

Лапласнинг интеграл теоремаси. *Агар ҳар бир тажрибада А ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги р ўзгармас бўлиб, ноль ва бир–дан фарқли бўлса, у ҳолда n та тажрибада А ҳодисанинг* k_1 *дан* k_2 *мартагача рўй бериши эҳтимоллиги* $P_n(k_1,k_2)$ *қуйидаги аниқ интегралга тенг:*

$$P_n(k_1,k_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{z^2}{2}}dz, \qquad (4.8)$$

бу ерда $x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$ *ва* $x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Лапласнинг интеграл теоремасини қўллашни талаб этувчи масалаларни ечишда $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ интеграли учун махсус жадвалдан фойдаланилади. Жадвалда $\Phi(x)$ функциянинг қийматлари $x\geq 0$ учун берилган, $x<0$ учун эса $\Phi(x)$ функциянинг тоқ эканлигидан фойдаланамиз, яъни $\Phi(-x)=-\Phi(x)$. $\Phi(x)$ функция кўпинча *Лаплас функцияси* дейилади.

Шундай қилиб, n та боғлиқмас тажрибада A ҳодисанинг k_1 дан k_2 мартагача рўй бериши эҳтимоллиги

$$P_n(k_1,k_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1) \qquad (4.9)$$

га тенг, бу ерда $x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$ ва $x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$.

3–мисол. Ташкилотнинг солиқ инспекцияси текширувидан ўтмаслигининг эҳтимоллиги $p=0,2$ га тенг. Тасодифан олинган 400 та ташкилотдан 70 тадан 100 тагачаси текширувдан ўтмаслигининг эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. Шартга кўра $n=400$; $k_1=70$; $k_2=100$; $p=0,2$; $q=0,8$. (4.9) формуладан фойдаланамиз:

$$P_{400}(70,100)\approx \Phi(x_2)-\Phi(x_1).$$

Интеграллашнинг қуйи ва юқори чегараларини ҳисоблаймиз:

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{70-400\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}=-1,25;$$

$$x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{100-400\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}=2,5.$$

Шундай қилиб, қуйидагини ҳосил қиламиз

$$P_{400}(70,100)\approx \Phi(2,5)-\Phi(-1,25)=\Phi(2,5)+\Phi(1,25).$$

$\Phi(x)$ функциянинг қийматлари жадвалидан $\Phi(2,5)=0,4938$; $\Phi(1,25)=0,3944$ эканлигини топамиз.

Изланаётган эҳтимоллик қуйидагига тенг

$$P_{400}(70,100)\approx 0,4938+0,3944=0,8882.$$

1–мавзуда таъкидлаб ўтилганидек, эҳтимолликнинг статистик таърифига асосан эҳтимоллик сифатида нисбий частотани олиш мумкин, шунинг учун улар орасидаги фарқни баҳолаш қизиқиш уйғотиши мумкин. $\frac{m}{n}$ нисбий частотанинг ўзгармас p эҳтимолликдан четланиши абсолют қиймати бўйича аввалдан берилган $\varepsilon>0$ сондан катта бўлмаслигининг эҳтимоллиги

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \qquad (4.10)$$

га тенг.

4–мисол. Деталнинг ностандарт бўлиши эҳтимоллиги $p=0,1$ га тенг. Тасодифан танланган 400 та деталь ичида ностандарт деталлар бўлиши нисбий частотасининг $p=0,1$ эҳтимолликдан четланиши абсолют қиймати бўйича 0,03 дан катта бўлмаслигининг эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. Шартга кўра $n=400$; $p=0,1$; $q=0,9$; $\varepsilon=0,03$.

$P\left(\left|\frac{m}{400}-0,1\right|\le 0,03\right)$ эҳтимолликни топиш талаб қилинади.

(4.10) формуладан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз

$$P\left(\left|\frac{m}{400}-0,1\right|\le 0,03\right)\approx 2\Phi\left(0,03\cdot\sqrt{\frac{400}{0,1\cdot 0,9}}\right)=2\Phi(2).$$

Жадвалдан $\Phi(2)=0,4772$ ни топамиз. Демак, $2\Phi(2)=0,9544$. Шундай қилиб, изланаётган эҳтимоллик тақрибан 0,9544 га тенг.

Ҳосил қилинган натижанинг маъноси қуйидагича: агар етарли даражада кўп марта текшириш ўтказилиб, ҳар бир текширишда 400 тадан деталь олинса, у ҳолда бу текширишларнинг тахминан 95,44 % ида нисбий частотанинг ўзгармас $p = 0{,}1$ эҳтимолликдан четланиши абсолют қиймати бўйича 0,03 дан катта бўлмайди.

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Бернулли схемаси деб нима аталади?
2. Бернулли формуласи қандай келтириб чиқарилади?
3. Муваффақиятларнинг энг эҳтимолли сони қандай топилади?
4. Лапласнинг локал теоремасида нима ҳақида гап боради?
5. Лапласнинг интеграл теоремасида нима ҳақида гап боради?
6. Нисбий частотанинг ўзгармас эҳтимолликдан четланишининг эҳтимоллиги қандай топилади?

Таянч иборалар:

Эркли тажрибалар кетма–кетлиги, Бернулли схемаси, Бернулли формуласи, муваффақиятларнинг энг эҳтимолли сони, Лаплас–нинг локал теоремаси, n та эркли тажрибада A ҳодисанинг роппа–роса k марта рўй бериш эҳтимоллиги, Лапласнинг интеграл теоремаси, n та эркли тажрибада A ҳодисанинг k_1 дан k_2 мартагача рўй бериши эҳтимоллиги, Лаплас функцияси, нисбий частотанинг ўзгармас эҳтимолликдан четланишининг эҳтимоллиги.

6–мавзу. Дискрет тасодифий миқдорлар. Тақсимот қонуни. Дискрет тақсимотларнинг турлари

Режа:

1. Тасодифий миқдор тушунчаси ва унинг турлари.
2. Дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни.
3. Айрим дискрет тақсимотлар.

Олдинги мавзуларда у ёки бу соннинг чиқишидан иборат бўлган ҳодисалар бир неча марта келтирилди. Масалан, шашқолтош ташланганда 1, 2, 3, 4, 5 ва 6 сонлари чиқиши мумкин эди. Чиққан очколар сонини олдиндан аниқлаб бўлмайди, чунки у тўлалигича ҳисобга олишнинг имкони бўлмаган кўпгина тасодифий сабабларга боғлиқ. Шу маънода очколар сони тасодифий катта–ликдир; 1, 2, 3, 4, 5 ва 6 сонлари шу катталикнинг мумкин бўлган қийматларидир.

Тасодифий миқдор деб дастлаб маълум бўлмаган, олдиндан ҳисобга олиниши мумкин бўлмаган тасодифий сабабларга боғлиқ бўлган битта ва фақат битта мумкин бўлган қийматни тажриба натижасида қабул қиладиган катталикка айтилади.

1–мисол. Юзта чақалоқ ичида ўғил болалар сони 0, 1, 2, ... , 100 қийматларни қабул қилиши мумкин бўлган тасодифий миқ–дордир.

2–мисол. Замбаракдан отилган снаряднинг учиб ўтган масофаси тасодифий миқдордир. Бу миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари бирор $(a,\ b)$ оралиққа тегишлидир.

Тажрибалар натижасида элементар ҳодисалар рўй бергани учун тасодифий миқдор ва элементар ҳодиса тушунчаларини боғлаб, тасодифий миқдорнинг бошқа таърифини бериш мумкин.

Тасодифий миқдор деб Ω элементар ҳодисалар фазосида аниқланган $X = X(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ функцияга айтилади.

3–мисол. Иккита танга ташланганда чиққан герблар сони X 0, 1 ва 2 қийматларни қабул қилиши мумкин бўлган тасодифий миқдордир. Элементар ҳодисалар фазоси қуйидаги элементар ҳодисалардан иборат:

$$\omega_1 = \{ГГ\},\ \omega_2 = \{РГ\},\ \omega_3 = \{ГР\},\ \omega_4 = \{РР\}.$$

У ҳолда X қуйидаги қийматларни қабул қилади:

$$X(\omega_1) = X(ГГ) = 2, \quad X(\omega_2) = X(РГ) = 1,$$

$$X(\omega_3) = X(ГР) = 1, \quad X(\omega_4) = X(РР) = 0.$$

Тасодифий миқдорлар $X, Y, Z, \ldots$ бош лотин ҳарфлари, уларнинг мумкин бўлган қийматлари эса мос $x, y, z, \ldots$ кичик ҳарфлар билан белгиланади. Масалан, X тасодифий миқдор учта қийматга эга бўлиши мумкин бўлса, улар $x_1,\ x_2,\ x_3$ орқали белгиланади.

Дискрет (узлукли) тасодифий миқдор деб айрим, ажралган мумкин бўлган қийматларни маълум эҳтимолликлар билан қабул қилувчи тасодифий миқдорга айтилади. Дискрет тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларининг сони чекли ёки чексиз бўлиши мумкин. Бунга мисол сифатида 1–мисолдаги тасодифий миқдорни олиш мумкин.

Узлуксиз тасодифий миқдор деб бирор чекли ёки чексиз оралиқдаги барча қийматларни қабул қилиши мумкин бўлган тасодифий миқдорга айтилади. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларининг сони чексиздир. Бундай тасодифий миқдорга мисол сифатида 2–мисолдаги тасодифий миқдорни олиш мумкин.

Дискрет тасодифий миқдорнинг берилиши учун унинг мумкин бўлган қийматларини санаб чиқиш етарли эмас, яна уларнинг эҳтимолликларини ҳам кўрсатиш лозим. Иккинчи томондан, кўп масалаларда тасодифий миқдорларни элементар ҳодисаларнинг функциялари сифатида қарашнинг зарурати йўқ, фақат тасоди–фий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларининг эҳтимолликла–рини, яъни тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини билиш етарли.

Дискрет тасодифий миқдор эҳтимолликларининг тақсимот қонуни ёки соддагина *тақсимот қонуни* деб мумкин бўлган қийматлар билан уларнинг эҳтимолликлари орасидаги мосликка айтилади; уни жадвал, график ва формула кўринишда бериш мумкин.

Эҳтимолликлар тақсимот қонунининг турли усулларда берилишини мисолларда кўриб чиқайлик.

Дискрет тасодифий миқдор тақсимот қонунининг жадвал орқали берилишида жадвалнинг биринчи сатри мумкин бўлган қийматлардан, иккинчи сатри эса уларнинг эҳтимолликларидан тузилади. Жадвалнинг иккинчи сатридаги эҳтимолликларнинг йиғиндиси 1 га тенг бўлиши керак. 5.1–жадвалда 3–мисолдаги дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни берилган.

5.1 – ж а д в а л

x_i	0	1	2
p_i	1 / 4	1 / 2	1 / 4

4–мисол. Пул лотереясида 100 та билет чиқарилган. Битта 5000 сўмлик, бешта 1000 сўмлик ва ўнта 500 сўмлик ютуқ ўйналмоқда. Битта лотерея билети эгасининг мумкин бўлган ютуғидан иборат бўлган X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни топилсин.

Ечиш. X нинг мумкин бўлган қийматларини ёзамиз: $x_1 = 5000$, $x_2 = 1000$, $x_3 = 500$, $x_4 = 0$. Бу мумкин бўлган қиймат–ларнинг эҳтимолликлари қуйидагича: $p_1 = 0{,}01$, $p_2 = 0{,}05$, $p_3 = 0{,}1$, $p_4 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3) = 0{,}84$.

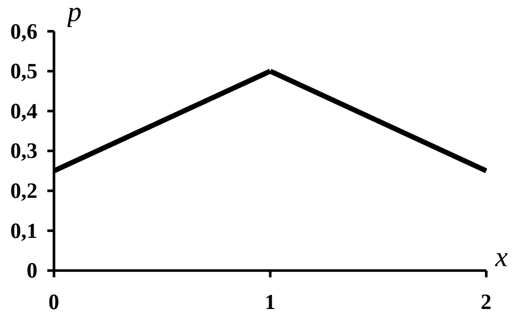
У ҳолда изланаётган тақсимот қонуни қуйидаги кўринишда

5.2 – ж а д в а л

x_i	0	500	1000	5000
p_i	0,84	0,1	0,05	0,01

Яққоллик учун дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини график кўринишда ҳам тасвирлаш мумкин, бунинг учун тўғри бурчакли координаталар системасида (x_i, p_i) нуқталар белгиланади, сўнгра улар кесмалар билан бирлаштирилади. Ҳосил бўлган шакл *тақсимот кўпбурчаги* деб аталади. 5.1–расмда 3–мисолдаги X тасодифий миқдорнинг тақсимот кўпбурчаги келтирилган.

Энди формулалар орқали берилган айрим дискрет тақсимотлар — биномиал, геометрик ва Пуассон тақсимотларини кўриб чиқайлик.



5.1 – расм.

n та боғлиқмас тажриба ўтказилаётган бўлиб, уларнинг ҳар бирида A ҳодиса рўй бериши (муваффақият)нинг эҳтимоллиги доимий ва p га тенг бўлсин (демак, рўй бермаслик (муваффақиятсизлик)нинг эҳтимоллиги q=1–p га тенг). X дискрет тасодифий миқдор сифатида A ҳодисанинг шу тажрибаларда рўй беришларининг сонини кўриб чиқайлик. X нинг мумкин бўлган қийматлари бундай: 0, 1, 2, ..., n. Бу мумкин бўлган қийматларнинг эҳтимолликлари (4.1) Бернулли формуласи бўйича топилади:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

бу ерда k= 0, 1, 2, ..., n.

Эҳтимолликларнинг биномиал тақсимоти деб Бернулли формуласи билан аниқланадиган эҳтимолликлар тақсимотига айтилади. Бернулли формуласининг ўнг томонини Ньютон биноми ёйилмасининг умумий ҳади сифатида қараш мумкин бўлгани учун бу тақсимот қонуни «биномиал» деб аталади:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^0 q^n.$$

$p + q = 1$ бўлгани учун тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари эҳтимолликларининг йиғиндиси 1 га тенг.

Шундай қилиб, биномиал тақсимот қонуни қуйидаги кўринишга эга

5.3 – ж а д в а л

x_i	n	$n-1$	...	k	...	0
p_i	p^n	$np^{n-1}q$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	q^n

Биномиал тақсимотга мисол сифатида 3–мисолдаги тасодифий миқдорнинг тақсимотини келтириш мумкин.

Фараз қилайлик, боғлиқмас тажрибалар ўтказилиб, уларнинг ҳар бирида *A* ҳодисанинг рўй бериши (муваффақият)нинг эҳтимоллиги *p* га ($0 < p < 1$), бинобарин, унинг рўй бермаслиги (муваффақиятсизлик)нинг эҳтимоллиги q=1–p га тенг бўлсин. Тажрибалар биринчи муваффақиятгача давом этади. Шундай қилиб, агар *A* ҳодиса k–тажрибада рўй берса, у ҳолда аввалги k – 1 та тажрибада у рўй бермайди.

Агар *X* орқали биринчи муваффақиятгача бўлган тажрибалар сонига тенг бўлган дискрет тасодифий миқдорни белгиласак, у ҳолда унинг мумкин бўлган қийматлари 1, 2, 3, ... натурал сонлардан иборат бўлади.

Фараз қилайлик, биринчи k – 1 та тажрибада *A* ҳодиса рўй бермасдан, k–тажрибада рўй берди. Бу «мураккаб ҳодисанинг» эҳтимоллиги, боғлиқмас ҳодисаларнинг эҳтимолликларини кўпайтириш ҳақидаги 3.3–теоремага асосан

$$P(X = k) = q^{k-1}p \qquad (5.1)$$

га тенг.

Эҳтимолликларнинг геометрик тақсимоти деб (5.1) формула билан аниқланадиган эҳтимолликлар тақсимотига айтилади, чунки бу формулада k = 1, 2, ... деб фараз қилсак, биринчи ҳади p га ва махражи q га ($0 < q < 1$) тенг бўлган геометрик прогрессияга эга бўламиз:

$$p,\ qp,\ q^2p,\ \ldots,\ q^{k-1}p,\ \ldots$$

Чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг йиғиндисини топсак, тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари эҳтимолликларининг йиғиндиси 1 га тенг эканлигини осон кўриш мумкин:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Шундай қилиб, геометрик тақсимот қонуни қуйидаги кўринишга эга:

5.4 – ж а д в а л

x_i	1	2	3	...	k	...
p_i	p	qp	q^2p	...	$q^{k-1}p$	...

5–мисол. Замбаракдан нишонга биринчи марта теккунча ўқ узилмоқда. Нишонга тегишнинг эҳтимоллиги $p = 0{,}6$ га тенг. Учинчи ўқ узишда нишонга тегишнинг эҳтимоллиги топилсин.

<u>Ечиш</u>. Шартга кўра $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, $k = 3$. Изланаётган эҳтимоллик (5.1) формулага асосан $P(X = 3) = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}096$ га тенг.

Ҳар бирида *A* ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги *p* га тенг бўлган n та боғлиқмас тажриба ўтказилсин. Бу тажрибаларда ҳодисанинг *k* марта рўй бериши эҳтимоллигини топиш учун Бернулли формуласидан фойдаланилади. Агар *n* катта бўлса, Лапласнинг локал теоремасидан фойдаланилади. Бироқ бу теорема ҳодисанинг эҳтимоллиги кичик ($p \le 0{,}1$) бўлганда катта хато беради.

Агар $n \to \infty$ да np кўпайтма доимий, аниқроғи $np = \lambda$ қийматини сақлайди деган шарт қўйсак, у ҳолда ҳар бирида ҳодисанинг эҳтимоллиги жуда кичик бўладиган жуда кўп сондаги синовларда ҳодисанинг роппа–роса *k* марта рўй бериши эҳтимоллиги қуйидаги формула бўйича топилади:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \qquad (5.2)$$

Бу формула оммавий (*n* жуда катта) ва кам рўй берадиган (*p* кичик) ҳодисалар эҳтимолликларининг *Пуассон* тақсимот қонунини ифодалайди. Пуассон тақсимоти учун махсус жадваллар мавжуд.

6–мисол. Завод базага 5000 та сифатли маҳсулот жўнатди. Маҳсулотнинг йўлда шикастланиш эҳтимоллиги 0,0002 га тенг. Базага 3 та яроқсиз маҳсулот келишининг эҳтимоллиги топилсин.

<u>Ечиш</u>. Шартга кўра $n = 5000$, $p = 0{,}0002$, $k = 3$. λ ни топамиз:

$$\lambda = np = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1.$$

Изланаётган эҳтимоллик (5.2) формула бўйича қуйидагига тенг:

$$P_{5000}(3) = \frac{1^3}{3!} \cdot e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}06.$$

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Тасодифий миқдор умумий ҳолда ва функциялар тилида қандай таърифланади?
2. Дискрет тасодифий миқдор нима?
3. Узлуксиз тасодифий миқдор нима?
4. Дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни ҳақида нимани биласиз?
5. Биномиал тақсимот қонуни ҳақида нимани биласиз?
6. Геометрик тақсимот қонунининг алоҳида хусусиятлари нималардан иборат?
7. Қайси ҳолларда Пуассон тақсимотидан фойдаланилади?

Таянч иборалар:

Тасодифий миқдор, дискрет тасодифий миқдор, узлуксиз тасодифий миқдор, дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни, тақсимот кўпбурчаги, биномиал тақсимот, геометрик тақсимот, Пуассон тақсимоти.

7–мавзу. Дискрет тасодифий миқдорларнинг сонли тавсифлари ва уларнинг хоссалари

Режа:

1. Дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси.
2. Математик кутилманинг хоссалари.
3. Дискрет тасодифий миқдор тарқоқлигининг сонли тавсифлари.
4. Дисперсиянинг хоссалари.
5. Дискрет тасодифий миқдорларнинг бошқа сонли тавсифлари.

Юқорида кўрганимиздек, тақсимот қонуни дискрет тасодифий миқдорни тўлиқ тавсифлайди. Бироқ кўпинча тақсимот қонуни номаълум бўлиб, тасодифий миқдорни йиғма ҳолда тасвирлайдиган сонлар билан чекланишга тўғри келади; бундай сонлар *тасодифий миқдорнинг сонли тавсифлари* деб аталади.

Муҳим сонли тавсифлар қаторига математик кутилма киради. Математик кутилма тақрибан тасодифий миқдорнинг ўртача қийматига тенг. Кўпгина масалаларни ечиш учун математик кутилмани билиш етарлидир.

Масалан, агар биринчи мерган урган очколарнинг математик кутилмаси иккинчи мерганникидан катта эканлиги маълум бўлса, у ҳолда биринчи мерган ўрта ҳисобда иккинчи мерганга нисбатан кўпроқ очко уради, бинобарин, у иккинчи мергандан яхшироқ отади.

X дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси деб унинг барча мумкин бўлган қийматлари билан уларнинг эҳтимолликлари кўпайтмалари йиғиндисига айтилади ва *M(X)* орқали белгиланади.

X тасодифий миқдор $x_1, x_2, \ldots, x_n$ қийматларни мос равишда $p_1, p_2, \ldots, p_n$ эҳтимолликлар билан қабул қилсин. У ҳолда *X* тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n \qquad (6.1)$$

тенглик билан аниқланади.

Агар *X* дискрет тасодифий миқдор чексиз кўп мумкин бўлган қийматларни қабул қилса, у ҳолда

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \,. \qquad (6.2)$$

1–мисол. *X* тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини билган ҳолда унинг математик кутилмаси топилсин

6.1 – ж а д в а л

x_i	3	5	2
p_i	0,1	0,6	0,3

Ечиш. Изланаётган математик кутилма (6.1) формулага асосан $M(X) = 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}3 = 3{,}9$ га тенг.

2–мисол. Агар *A* ҳодисанинг эҳтимоллиги *p* га тенг бўлса, битта тажрибада A ҳодисанинг рўй беришлар сонининг математик кутилмаси топилсин.

Ечиш. X тасодифий миқдор – A ҳодисанинг битта тажрибада рўй беришлар сони фақат иккита p эҳтимоллик билан $x_1 = 1$ (A ҳодиса рўй берди) ва $q = 1 - p$ эҳтимоллик билан $x_2 = 0$ (A ҳодиса рўй бермади) қийматни қабул қилиши мумкин. Изланаётган математик кутилма (6.1) формулага асосан $M(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$ га тенг.

Шундай қилиб, *ҳодисанинг битта тажрибада рўй беришлар сонининг математик кутилмаси шу ҳодиса эҳтимоллигига тенг*.

Энди математик кутилманинг хоссаларини келтирамиз.

6.1–хосса. *Ўзгармас миқдорнинг математик кутилмаси шу ўзгармаснинг ўзига тенг*:

$$M(C) = C.$$

Исбот. C ўзгармасни битта мумкин бўлган C қийматга эга бўлган ва уни $p = 1$ эҳтимоллик билан қабул қиладиган дискрет тасодифий миқдор сифатида қараймиз. Демак,

$$M(C) = C \cdot 1 = C.$$

6.2–хосса. *Ўзгармас кўпайтувчини математик кутилма белгисидан ташқарига чиқариш мумкин*:

$$M(CX) = CM(X).$$

Агар иккита тасодифий миқдордан бирининг тақсимот қонуни иккинчисининг қандай қиймат қабул қилганлигига боғлиқ бўлмаса, бу тасодифий миқдорлар *боғлиқмас* деб аталади.

Боғлиқмас X ва Y тасодифий миқдорларнинг кўпайтмаси *деб шундай XY тасодифий миқдорга айтиладики, унинг мумкин бўлган қийматлари X нинг мумкин бўлган ҳар бир қийматини Y нинг мумкин бўлган ҳар бир қийматига кўпайтирилганига тенг; XY кўпайтманинг мумкин бўлган қийматларининг эҳтимолликлари кўпайтувчиларнинг мумкин бўлган қийматларининг эҳтимолликлари кўпайтмасига тенг.*

6.3–хосса. *Иккита боғлиқмас тасодифий миқдор кўпайтмасининг математик кутилмаси уларнинг математик кутилмалари кўпайтмасига тенг*:

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y).$$

6.1–натижа. *Бир нечта боғлиқмас тасодифий миқдорлар кўпайтмасининг математик кутилмаси уларнинг математик кутилмалари кўпайтмасига тенг*.

3–мисол. Боғлиқмас X ва Y тасодифий миқдорлар қуйидаги тақсимот қонунлари орқали берилган:

6.2 – ж а д в а л

x_i	5	2	4
p_i	0,6	0,1	0,3

ва

6.3 – ж а д в а л

y_i	7	9
p_i	0,8	0,2

тилм

Ечиш. Берилган тасодифий миқдорларнинг ҳар бирининг математик кутилмасини топамиз:

$$M(X) = 5\cdot 0{,}6 + 2\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}3 = 4{,}4;$$

$$M(Y) = 7\cdot 0{,}8 + 9\cdot 0{,}2 = 7{,}4.$$

X ва Y тасодифий миқдорлар боғлиқмас, шунинг учун изланаётган математик кутилма қуйидагига тенг:

$$M(XY) = M(X)\cdot M(Y) = 4{,}4\cdot 7{,}4 = 32{,}56.$$

X ва Y тасодифий миқдорларнинг йиғиндиси деб шундай $X+Y$ тасодифий миқдорга айтиладики, унинг мумкин бўлган қийматлари X нинг мумкин бўлган ҳар бир қиймати билан Y нинг мумкин бўлган ҳар бир қиймати йиғиндиларига тенг; $X+Y$ нинг мумкин бўлган қийматларининг эҳтимолликлари боғлиқмас X ва Y тасодифий миқдорлар учун қўшилувчиларнинг эҳтимолликлари кўпайтмасига тенг; боғлиқ тасодифий миқдорлар учун эса қўшилувчилардан бирининг эҳтимоллиги билан иккинчисининг шартли эҳтимоллиги кўпайтмасига тенг.

6.4–хосса. Иккита тасодифий миқдор йиғиндисининг математик кутилмаси қўшилувчиларнинг математик кутилмалари йиғиндисига тенг:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y).$$

6.2–натижа. Бир нечта тасодифий миқдорлар йиғиндисининг математик кутилмаси қўшилувчиларнинг математик кутилмалари йиғиндисига тенг.

4–мисол. Иккита шашқолтош ташланганда тушиши мумкин бўлган очколар йиғиндисининг математик кутилмаси топилсин.

Ечиш. X орқали биринчи шашқолтошда ва Y орқали иккинчи шашқолтошда тушиши мумкин бўлган очколар сонини белгилаймиз. Бу миқдорларнинг мумкин бўлган қийматлари бир хил бўлиб, 1, 2, 3, 4, 5 ва 6 га тенг, чунончи бу қийматларнинг ҳар бирининг эҳтимоллиги 1/6 га тенг.

Биринчи шашқолтошда тушиши мумкин бўлган очколар со–нининг математик кутилмасини топамиз:

$$M(X) = 1\cdot \tfrac{1}{6} + 2\cdot \tfrac{1}{6} + 3\cdot \tfrac{1}{6} + 4\cdot \tfrac{1}{6} + 5\cdot \tfrac{1}{6} + 6\cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{7}{2}.$$

$M(Y) = \tfrac{7}{2}$ эканлиги ҳам равшан.

Изланаётган математик кутилма қуйидагига тенг:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y) = 7/2 + 7/2 = 7.$$

6.5–хосса. Ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги p ўзгармас бўлган n та боғлиқмас тажрибада бу ҳодисанинг рўй беришлари сонининг математик кутилмаси тажрибалар сонини битта синовда ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллигига кўпайтирилганига тенг:

$$M(X) = np.$$

5–мисол. Битта корхона текширилганда ҳужжат юритишдаги хатоларни аниқлаш эҳтимоллиги $p = 0{,}6$ га тенг. Агар 10 марта корхоналар текширилган бўлса, хатоларни аниқлашлар жами сонининг математик кутилмаси топилсин.

Ечиш. Ҳар бир текширишда хатоларни аниқлаш бошқа текширишлар натижасига боғлиқ эмас, шунинг учун қаралаётган ҳодисалар боғлиқмасдир, бинобарин, изланаётган математик кутилма қуйидагича:

$M(X) = np = 10 \cdot 0{,}6 = 6$ (марта хатоларни аниқлаш).

Айрим тасодифий миқдорлар бир хил математик кутилмаларга эга бўлсаларда, мумкин бўлган қийматлари ҳар хил бўлади. Масалан, қуйидаги тақсимот қонунлари билан берилган *X* ва *Y* дискрет тасодифий миқдорларни кўриб чиқайлик:

6.4 – ж а д в а л

x_i	–0,01	0,01
p_i	0,5	0,5

ва

6.5 – ж а д в а л

y_i	–100	100
p_i	0,5	0,5

Бу миқдорларнинг математик кутилмаларини топайлик:

$$M(X) = -0{,}01 \cdot 0{,}5 + 0{,}01 \cdot 0{,}5 = 0;$$

$$M(Y) = -100 \cdot 0{,}5 + 100 \cdot 0{,}5 = 0.$$

Бу ерда иккала миқдорнинг математик кутилмалари бир хил, мумкин бўлган қийматлари эса ҳар хил, бунда *X* нинг мумкин бўлган қийматлари унинг математик кутилмасига яқин, *Y* нинг мумкин бўлган қийматлари эса ўзининг математик кутилмасидан анча узоқ. Шундай қилиб, тасодифий миқдорнинг фақат математик кутилмасини билган ҳолда унинг қандай қийматлар қабул қилиши мумкинлиги ҳақида ҳам, бу қийматлар математик кутилма атрофида қандай сочилганлиги ҳақида ҳам бирор мулоҳаза юритиш мумкин эмас.

Бошқача қилиб айтганда, математик кутилма тасодифий миқдорни тўлиқ тавсифламайди. Шу сабабли математик кутилма билан бир қаторда бошқа сонли тавсифлар ҳам қаралади.

X – тасодифий миқдор ва *M(X)* унинг математик кутилмаси бўлсин. *Тасодифий миқдорнинг четланиши* деб $X - M(X)$ айирмага айтилади.

Амалиётда кўпинча тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларининг ўртача қиймати атрофида тарқоқлигини баҳолаш талаб қилинади. Масалан, артиллерияда отилган снарядлар уриб туширилиши лозим бўлган нишон атрофига қанчалик яқин тушишини билиш муҳимдир.

Дискрет тасодифий миқдорнинг дисперсияси (тарқоқлиги) деб тасодифий миқдорнинг ўзининг математик кутилмасидан четланиши квадратининг математик кутилмасига айтилади:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2. \qquad (6.3)$$

Дисперсияни ҳисоблаш учун кўпинча қуйидаги формуладан фойдаланиш қулай бўлади:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \qquad (6.4)$$

6–мисол. Қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган *X* тасодифий миқдорнинг дисперсияси топилсин:

6.6 – ж а д в а л

x_i	2	3	5
p_i	0,1	0,6	0,3

Ечиш. *M(X)* математик кутилма қуйидагига тенг:

$$M(X) = 2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}6 + 5\cdot 0{,}3 = 3{,}5.$$

X^2 тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни қуйидагича:

6.7 – ж а д в а л

x_i^2	4	9	25
p_i	0,1	0,6	0,3

$M(X^2)$ математик кутилма қуйидагича:

$$M(X^2) = 4\cdot 0{,}1 + 9\cdot 0{,}6 + 25\cdot 0{,}3 = 13{,}3.$$

Изланаётган дисперсия

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 13{,}3 - (3{,}5)^2 = 1{,}05 \text{ бўлади.}$$

Математик кутилма каби, дисперсия ҳам бир нечта хоссага эга.

6.6–хосса. *Ўзгармас миқдорнинг дисперсияси нолга тенг*:

$$D(C) = 0.$$

Исбот. Дисперсиянинг таърифига кўра

$$D(C) = M[C - M(C)]^2.$$

6.1–хоссадан фойдаланиб, $D(C) = M[C - C]^2 = M(0) = 0$ ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб,

$$D(C) = 0.$$

Ўзгармас миқдор доимо айнан бир хил қийматни сақлаши ва демак, тарқоқликка эга эмаслиги инобатга олинса, бу хосса ойдин бўлиб қолади.

6.7–хосса. *Ўзгармас кўпайтувчини квадратга ошириб, дисперсия белгисидан ташқарига чиқариш мумкин*:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

6.8–хосса. *Иккита боғлиқмас тасодифий миқдор йиғиндисининг дисперсияси бу миқдорлар дисперсияларининг йиғиндисига тенг*:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

6.3–натижа. *Бир нечта боғлиқмас тасодифий миқдорлар йиғиндисининг дисперсияси бу миқдорлар дисперсияларининг йиғиндисига* *тенг.*

6.4–натижа. *Ўзгармас миқдор билан тасодифий миқдор йиғиндисининг дисперсияси тасодифий миқдорнинг дисперсиясига тенг:*

$$D(C+X)=D(X).$$

Исбот. C ва X миқдорлар ўзаро боғлиқмас, шунинг учун 6.8–хоссага асосан

$$D(C+X)=D(C)+D(X).$$

6.6–хоссага асосан $D(C)=0$. Демак,

$$D(C+X)=D(X).$$

X ва $X+C$ миқдорлар фақат саноқ боши билан фарқ қилиши ва демак, ўзларининг математик кутилмалари атрофида бир хил тарқоқликка эга эканлиги инобатга олинса, бу хосса ойдин бўлиб қолади.

6.9–хосса. *Иккита боғлиқмас тасодифий миқдор айирмасининг дисперсияси бу миқдорлар дисперсияларининг йиғиндисига тенг*:

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

Исбот. 6.8–хоссага асосан

$$D(X-Y)=D(X+(-Y))=D(X)+D(-Y).$$

6.7–хоссага асосан

$$D(X-Y)=D(X)+(-1)^2\cdot D(Y).$$

ёки

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

6.10–хосса. Ҳар бирида А ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги p ўзгармас бўлган n та боғлиқмас тажрибада бу ҳодисанинг рўй беришлари сонининг дисперсияси тажрибалар сонини битта тажрибада ҳодисанинг рўй бериш ва рўй бермаслик эҳтимолликларига кўпайтирилганига тенг:

$$D(X)=npq.$$

7–мисол. ДСИ томонидан ҳар бирида ҳужжат юритишдаги хатоларни аниқлаш эҳтимоллиги $p=0{,}6$ га тенг бўлган 10 марта корхоналарнинг текширувлари ўтказилмоқда. X тасодифий миқдор – бу текширувларда ҳужжат юритишдаги хатоларни аниқлашлар сонининг дисперсияси ҳисоблансин.

Ечиш. Шартга кўра, $n=10$, $p=0{,}6$. Ҳужжат юритишдаги хатоларни аниқламаслик эҳтимоллиги $q=1-0{,}6=0{,}4$ га тенг.

Изланаётган дисперсия $D(X)=npq=10\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4=2{,}4$ бўлади.

Тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларининг унинг ўртача қиймати атрофида тарқоқлигини баҳолаш учун ўртача квадратик четланиш ҳам хизмат қилади.

X тасодифий миқдорнинг ўртача квадратик четланиши деб дисперсиядан олинган квадрат илдизга айтилади:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \qquad (6.5)$$

8–мисол. X тасодифий миқдор қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган:

6.8 – ж а д в а л

x_i	2	3	10
p_i	0,1	0,4	0,5

$\sigma(X)$ ўртача квадратик четланиш топилсин.

Ечиш. *M(X)* математик кутилма қуйидагига тенг:

$$M(X)=2\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}4+10\cdot 0{,}5=6{,}4.$$

$M(X^2)$ математик кутилма қуйидагича:

$$M(X^2)=4\cdot 0{,}1+9\cdot 0{,}4+100\cdot 0{,}5=54.$$

Дисперсияни топамиз:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=54-(6{,}4)^2=13{,}04.$$

Изланаётган ўртача квадратик четланиш қуйидагига тенг:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{13{,}04}\approx 3{,}61.$$

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Тасодифий миқдорнинг сонли тавсифлари деб нимага айтилади ва уларнинг қандай турларини биласиз?
2. Математик кутилма нима ва у қандай аниқланади?
3. Ҳодисанинг битта тажрибада рўй беришлар сонининг математик кутилмаси нимага тенг ва у қандай топилади?
4. Математик кутилманинг 1– ва 2–хоссалари (6.1– ва 6.2–хоссалар) ҳақида нима биласиз?
5. Қандай тасодифий миқдорлар боғлиқмас дейилади ва боғлиқмас тасодифий миқдорларнинг кўпайтмаси нима бўлади?
6. Тасодифий миқдорларнинг йиғиндиси қандай аниқланади?
7. Математик кутилманинг 3– ва 4–хоссалари ҳамда уларнинг натижалари (6.3– ва 6.4–хоссалар, 6.1– ва 6.2–натижалар) ҳақида нима биласиз?
8. Тасодифий миқдорнинг математик кутилмадан ташқари бошқа сонли тавсифларини киритишнинг мақсадга мувофиқлиги нимада ва тасодифий миқдорнинг четланиши нима?
9. Дисперсия нима ва у қандай топилади?
10. Дисперсиянинг 1– ва 2–хоссалари (6.6– ва 6.7–хоссалар) ҳақида нима биласиз?
11. Дисперсиянинг 3–хоссаси ҳамда унинг натижалари (6.8–хосса, 6.3– ва 6.4–натижалар) ҳақида нима биласиз?
12. Дисперсиянинг 4–хоссаси (6.9–хосса) ҳақида нима биласиз?
13. n та боғлиқмас тажрибада A ҳодисанинг рўй беришлар сонининг математик кутилмаси ва дисперсияси нимага тенг (6.5– ва 6.10–

хоссалар)?

14. Ўртача квадратик четланиш нима ва у қандай аниқланади?

Таянч иборалар:

Тасодифий миқдорнинг сонли тавсифлари, математик кутилма, эркли тасодифий миқдорлар, эркли тасодифий миқдорларнинг кўпайтмаси, тасодифий миқдорларнинг йиғиндиси, тасодифий миқдорнинг четланиши, дисперсия, ўртача квадратик четланиш.

8–мавзу.Узлуксиз тасодифий миқдорларнинг тақсимот ва зичлик функциялари, уларнинг хоссалари

Режа:

1. Тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси.
2. Тақсимот функциясининг хоссалари.
3. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси.
4. Зичлик функциясининг хоссалари.

Дискрет тасодифий миқдор унинг барча мумкин бўлган қийматлари ва уларнинг эҳтимолликлари рўйхати билан берилиши мумкин. Бироқ бу усулни узлуксиз тасодифий миқдорлар учун қўллаб бўлмайди.

Масалан, мумкин бўлган қийматлари (a, b) интервални тўла–тўкис тўлдирувчи X тасодифий миқдорни кўриб чиқайлик. X нинг мумкин бўлган барча қийматлари рўйхатини тузиш мумкин эмаслиги равшан. Шунинг учун ихтиёрий типдаги тасодифий миқдорларни бериш мумкин бўладиган умумий усулни киритиш мақсадга мувофиқдир, бунинг учун тасодифий миқдор эҳтимолликларининг тақсимот функциялари киритилади.

x ҳақиқий сон бўлсин. X нинг x дан кичик қиймат қабул қилишидан иборат $X < x$ ҳодисанинг эҳтимоллигини $F(x)$ орқали белгилаймиз. Агар x ўзгарса, $F(x)$ ҳам ўзгаради, яъни $F(x)$ x нинг функциясидир.

X тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси деб тажриба натижасида X тасодифий миқдор x дан кичик қийматни қабул қилишининг эҳтимоллигини аниқловчи $F(x)$ функцияга айтилади, яъни

$$F(x) = P(X < x)\,. \qquad (7.1)$$

Бу тенгликни геометрик нуқтаи назардан бундай талқин қилиш мумкин: $F(x)$ — сон ўқида x нуқтадан чапда ётувчи нуқта билан тасвирланадиган қийматни тасодифий миқдор қабул қилишининг эҳтимоллиги.

Тақсимот функциясининг хоссаларини кўриб чиқайлик.

7.1–хосса. *Тақсимот функциясининг қийматлари* $[0, 1]$ *кесмага тегишли*:

$$0 \le F(x) \le 1. \qquad (7.2)$$

Исбот. Бу хосса тақсимот функциясининг эҳтимоллик сифатида таърифланишидан келиб чиқади: эҳтимоллик доимо 1 дан катта бўлмаган номанфий сондир.

7.2–хосса. $F(x)$ —*камаймайдиган функция, яъни*:

$$\text{агар } x_1 < x_2 \text{ бўлса, у ҳолда } F(x_1) \le F(x_2). \qquad (7.3)$$

7.1–натижа. *Тасодифий миқдорнинг* $(a,\ b)$ *интервалда ётувчи қийматни қабул қилиш эҳтимоллиги тақсимот функциясининг шу интервалдаги орттирмасига тенг:*

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a). \qquad (7.4)$$

1–мисол. X тасодифий миқдор қуйидаги тақсимот функцияси билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} x \le -1 & \text{да} \quad 0 \\ -1 < x \le 3 & \text{да} \quad x/4 + 1/4. \\ x > 3 & \text{да} \quad 1 \end{cases}$$

Тажриба натижасида X тасодифий миқдор $(0,\ 2)$ интервалга тегишли қийматни қабул қилишининг эҳтимоллиги топилсин:

$$P(0 < X < 2) = F(2) - F(0).$$

Ечиш. Шартга кўра (0, 2) интервалда $F(x) = x/4 + 1/4$ бўлгани учун $F(2) - F(0) = (2/4 + 1/4) - (0/4 + 1/4) = 1/2$ бўлади.
Демак, $P(0 < X < 2) = 1/2$.

7.2–натижа. *X узлуксиз тасодифий миқдорнинг аниқ бир қийматни қабул қилишининг эҳтимоллиги нолга тенг.*

7.3–хосса. *Агар тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари* $(a,\ b)$ *интервалга тегишли бўлса, у ҳолда*: 1) $x \le a$ *да* $F(x) = 0$; 2) $x \ge b$ *да* $F(x) = 1$.

Исбот. 1) $x_1 \le a$ бўлсин. У ҳолда $X < x_1$ ҳодиса мумкин бўлмаган ҳодисадир (чунки, шартга кўра, X миқдор x_1 дан кичик қийматларни қабул қилмайди), демак, унинг эҳтимоллиги нолга тенг.

2) $x_2 \ge b$ бўлсин. У ҳолда $X < x_2$ ҳодиса муқаррар ҳодисадир (чунки X нинг барча мумкин бўлган қийматлари x_2 дан кичик), демак, унинг эҳтимоллиги бирга тенг.

7.3–натижа. Агар узлуксиз тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари бутун х сонлар ўқида жойлашган бўлса, у ҳолда қуйидаги лимит муносабатлар ўринли:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1. \qquad (7.5)$$

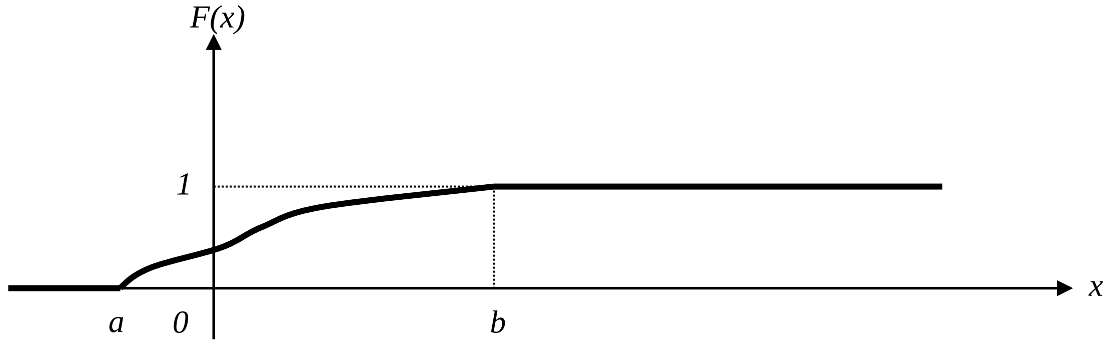
Узлуксиз тасодифий миқдор тақсимот функциясининг графиги 7.1–

хоссага асосан $y=0$, $y=1$ тўғри чизиқлар билан чегараланган соҳа ичида жойлашган.

7.2–хоссадан шу нарса келиб чиқадики, тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган барча қийматлари жойлашган $(a,\ b)$ интервалда x ўзгарувчи ўсганда, график ё юқорига қия, ё горизонтал кўринишда бўлади.

7.3–хоссага асосан $x \le a$ да графикнинг ординаталари нолга тенг; $x \ge b$ да эса графикнинг ординаталари бирга тенг.

Узлуксиз тасодифий миқдор тақсимот функциясининг графиги 7.1–расмда жойлашган.



7.1 – расм.

Дискрет тасодифий миқдор тақсимот функциясининг графиги поғона кўринишда бўлади.

2–мисол. X дискрет тасодифий миқдор қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган:

7.1 – ж а д в а л

x_i	1	4	8
p_i	0,3	0,1	0,6

тақсимот функцияси топилсин ва унинг графиги чизилсин.

Ечиш. Агар $x \le 1$ бўлса, у ҳолда 7.3–хоссага асосан $F(x)=0$.

Агар $1 < x \le 4$ бўлса, у ҳолда $F(x)=0{,}3$. Ҳақиқатан, X миқдор 1 қийматни 0,3 эҳтимоллик билан қабул қилиши мумкин.

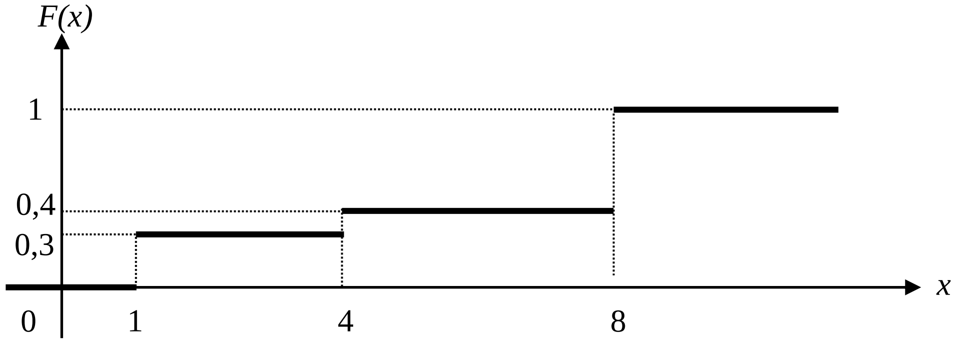
Агар $4 < x \le 8$ бўлса, у ҳолда $F(x)=0{,}4$. Ҳақиқатан, агар x_1 $4 < x_1 \le 8$ тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда $F(x_1)$ $X < x_1$ ҳодисанинг эҳтимоллигига тенг бўлиб, бу ҳодиса X миқдор 1 қийматни 0,3 эҳтимоллик билан ёки 4 қийматни 0,4 эҳтимоллик билан қабул қилганда амалга ошиши мумкин. Бу иккита ҳодиса биргаликда бўлмагани учун 3.1–теоремага асосан $X < x_1$ ҳодисанинг эҳтимоллиги эҳтимолликлар йиғиндисига тенг 0,3 + 0,1 = 0,4.

Агар $x > 8$ бўлса, у ҳолда 7.3–хоссага асосан $F(x)=1$.

Шундай қилиб, тақсимот функцияси аналитик кўринишда қуйидагича ёзилиши мумкин:

$$F(x)=\begin{cases} x\le 1 & да \quad 0 \\ 1<x\le 4 & да \quad 0{,}3 \\ 4<x\le 8 & да \quad 0{,}4 \\ x>8 & да \quad 1 \end{cases}.$$

Бу функциянинг графиги 7.2–расмда келтирилган.



7.2 – расм.

Узлуксиз тасодифий миқдорни зичлик функцияси деб аталувчи бошқа функциядан фойдаланган ҳолда ҳам бериш мумкин.

X узлуксиз тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси деб $f(x)$ функцияга — $F(x)$ тақсимот функциясидан олинган биринчи тартибли ҳосилага айтилади:

$$f(x)=F'(x). \qquad (7.6)$$

Бу ердан тақсимот функцияси зичлик функцияси учун бошланғич функция эканлиги келиб чиқади. Дискрет тасодифий миқдорнинг эҳтимолликлари тақсимотини тасвирлаш учун зичлик функциясидан фойдаланиб бўлмайди.

Зичлик функциясини билган ҳолда, узлуксиз тасодифий миқдор берилган интервалга тегишли қиймат қабул қилишининг эҳтимоллигини ҳисоблаш мумкин.

7.1–теорема. X узлуксиз тасодифий миқдор $(a,\ b)$ интервалга тегишли қиймат қабул қилишининг эҳтимоллиги зичлик функ–циясидан a дан b гача олинган аниқ интегралга тенг:

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (7.7)$$

Исбот. (7.4) формулага асосан

$$P(a\le X<b)=F(b)-F(a)$$

бўлади. Ньютон–Лейбниц формуласига асосан эса

$$F(b)-F(a)=\int_a^b F'(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

муносабат ўринли бўлади.

Шундай қилиб,

$$P(a \le X < b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

$P(a \le X < b) = P(a < X < b)$ бўлгани учун

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

ни ҳосил қиламиз.

3–мисол. X тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси берилган:

$$f(x) = \begin{cases} x \le 0 & \partial a \quad 0 \\ 0 < x \le 1 & \partial a \quad 2x. \\ x > 1 & \partial a \quad 0 \end{cases}$$

Тажриба натижасида X тасодифий миқдор (0,5; 1) интервалга тегишли қийматни қабул қилишининг эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. (7.7) формулага асосан изланаётган эҳтимоллик

$P(0{,}5 < X < 1) = \int_{0{,}5}^{1} 2x\,dx = x^2 \Big|_{0{,}5}^{1} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$ га тенг.

$f(x)$ зичлик функциясини билган ҳолда $F(x)$ тақсимот функциясини

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz \tag{7.8}$$

формула бўйича топиш мумкин

4–мисол. Берилган зичлик функцияси бўйича тақсимот функцияси топилсин:

$$f(x) = \begin{cases} x \le a & \partial a \quad 0 \\ a < x \le b & \partial a \quad 1/(b-a). \\ x > b & \partial a \quad 0 \end{cases}$$

Топилган функциянинг графиги ясалсин.

Ечиш. (7.8) формуладан фойдаланамиз. Агар $x \le a$ бўлса, у ҳолда $f(x) = 0$, демак, $F(x) = 0$. Агар $a < x \le b$ бўлса, у ҳолда $f(x) = 1/(b-a)$, демак,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{a} 0\,dz + \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dz = \frac{x-a}{b-a}.$$

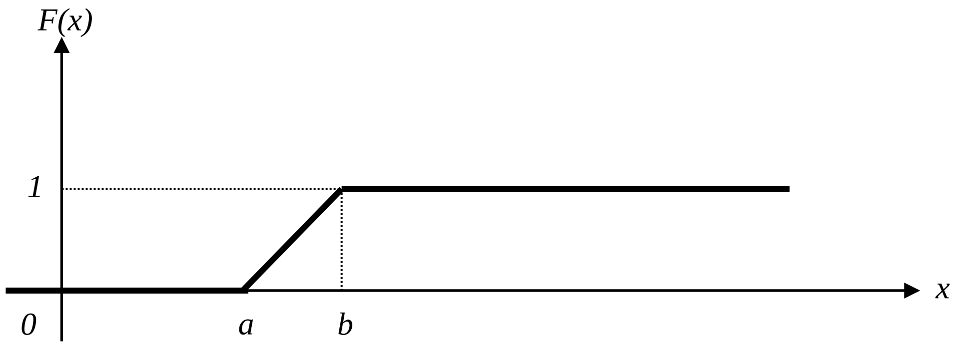
Агар $x > b$ бўлса, у ҳолда

$$F(x) = \int_{-\infty}^{a} 0\,dz + \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dz + \int_b^x 0\,dz = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Демак, изланаётган тақсимот функцияси қуйидаги кўринишга эга

$$F(x)=\begin{cases} x\le a & да \quad 0 \\ a<x\le b & да \quad (x-a)/(b-a). \\ x>b & да \quad 1 \end{cases}$$

Бу функциянинг графиги 7.3 расмда тасвирланган.



7.3 – расм.

Зичлик функциясининг иккита хоссасини келтирамиз.

7.4–хосса. *Зичлик функцияси – номанфий функция*:

$$f(x)\ge 0. \tag{7.9}$$

Исбот. Тақсимот функцияси – камаймайдиган функция, демак, унинг ҳосиласи $F'(x)=f(x)$ – номанфий функция.

7.5–хосса. *Зичлик функциясидан* $-\infty$ *дан* ∞ *гача олинган хосмас интеграл бирга тенг*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1. \tag{7.10}$$

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Нима учун ихтиёрий типдаги тасодифий миқдорларни бериш мумкин бўладиган умумий усулни киритиш мақсадга мувофиқ?
2. Тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси деб нимага айтилади?
3. Тақсимот функциясининг 1–хоссаси (7.1–хосса) ҳақида нима биласиз?
4. Тақсимот функциясининг 2–хоссаси ҳамда унинг натижалари (7.2–хосса, 7.1– ва 7.2–натижалар) ҳақида нима биласиз?
5. Тақсимот функциясининг 3–хоссаси ҳамда унинг натижаси (7.3–хосса ва 7.3–натижа) ҳақида нима биласиз?
6. Узлуксиз ва дискрет тасодифий миқдорлар тақсимот функцияларининг графиклари қандай хоссаларга эга?
7. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси деб нимага айтилади ва 7.1 теорема ҳақида нима биласиз?
8. Зичлик функциясини билган ҳолда тақсимот функциясини қандай топиш мумкин ва зичлик функциясининг хоссалари ҳақида нима биласиз (7.4– ва 7.5–хоссалар)?

Таянч иборалар:

Тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси, узлуксиз тасодифий миқдор тақсимот функциясининг графиги, дискрет тасодифий миқдор тақсимот функциясининг графиги, узлуксиз тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси.

9–мавзу.Узлуксиз тасодифий миқдорларнинг сонли тавсифлари. Узлуксиз тақсимотларнинг турлари

Режа:

1. Узлуксиз тасодифий миқдорларнинг сонли тавсифлари.
2. Нормал тақсимот.
3. Текис ва кўрсаткичли тақсимотлар.

Дискрет тасодифий миқдорлар каби узлуксиз тасодифий миқдорлар ҳам сонли тавсифларга эга. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси ва дисперсиясини кўриб чиқайлик.

X узлуксиз тасодифий миқдор $f(x)$ зичлик функцияси билан берилган бўлсин ва бу тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари $[a, b]$ кесмага тегишли бўлсин.

Мумкин бўлган қийматлари $[a, b]$ кесмага тегишли бўлган *X узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси* деб қуйидаги аниқ интегралга айтилади:

$$M(X) = \int_a^b x f(x)\,dx. \qquad (8.1)$$

Агар мумкин бўлган қийматлар бутун Ox сонли ўққа тегишли бўлса, у ҳолда математик кутилма қуйидаги кўринишга эга

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx. \qquad (8.2)$$

Мумкин бўлган қийматлари $[a, b]$ кесмага тегишли бўлган *X узлуксиз тасодифий миқдорнинг дисперсияси* деб қуйидаги аниқ интегралга айтилади:

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x)\,dx. \qquad (8.3)$$

Агар мумкин бўлган қийматлар бутун Ox сонли ўққа тегишли бўлса, у ҳолда дисперсия қуйидаги кўринишга эга

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)\,dx. \qquad (8.4)$$

Дисперсияни ҳисоблаш учун мос равишда

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)\,dx - [M(X)]^2 \qquad (8.5)$$

ва

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-[M(X)]^2 \qquad (8.6)$$

формулалар қулайроқ.

Дискрет тасодифий миқдорлар математик кутилмаси ва дисперсиясининг хоссалари узлуксиз тасодифий миқдорлар учун ҳам сақланади.

Узлуксиз тасодифий миқдорнинг ўртача квадратик четланиши дискрет тасодифий миқдор учун бўлгани каби қуйидаги тенглик билан аниқланади

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\,. \qquad (8.7)$$

1–мисол. Қуйидаги тақсимот функцияси билан берилган X тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси, дисперсияси ва ўртача квадратик четланиши топилсин:

$$F(x)=\begin{cases} x\le 0 & да \quad 0 \\ 0<x\le 1 & да \quad x \\ x>1 & да \quad 1 \end{cases}.$$

<u>Ечиш</u>. Зичлик функциясини топамиз:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} x\le 0 & да \quad 0 \\ 0<x\le 1 & да \quad 1 \\ x>1 & да \quad 0 \end{cases}.$$

Математик кутилмани (8.1) формула бўйича топамиз:

$$M(X)=\int_0^1 x\cdot 1\cdot dx = x^2/2 \,\Big|_0^1 = 1/2.$$

Дисперсияни (8.5) формула бўйича топамиз:

$$D(X)=\int_0^1 x^2\cdot 1\cdot dx-[1/2]^2 = x^3/3 \,\Big|_0^1 -1/4=1/12.$$

Ўртача квадратик четланишни (8.7) формула бўйича топамиз:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1/12}\approx 0{,}29.$$

Амалиётдан келиб чиқадиган масалаларни ҳал қилишда узлуксиз тасодифий миқдорларнинг турли тақсимотлари билан иш кўришга тўғри келади. Узлуксиз тасодифий миқдорларнинг зичлик функциялари *тақсимот қонунлари* ҳам деб аталади. Нормал, текис ва кўрсаткичли тақсимот қонунлари энг кўп учрайди.

a ва σ ($\sigma>0$) параметрли нормал тақсимот деб

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (8.8)$$

зичлик функцияси билан тасвирланадиган узлуксиз тасодифий миқдорнинг эҳтимолликлари тақсимотига айтилади.

Бу ердан кўриниб турибдики, нормал тақсимот иккита a ва σ параметрлар билан аниқланади. Нормал тақсимотни бериш учун бу параметрларни билиш кифоя.

Бу параметрларнинг эҳтимолий маъносини кўрайлик. Демак, $M(X)=a$, яъни *нормал тақсимотнинг математик кутилмаси* a *параметрга тенг*, *ва* $\sigma(X)=\sigma$, яъни *нормал тақсимотнинг ўртача квадратик четланиши* σ *параметрга тенг.*

Нормал тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}}dz \qquad (8.9)$$

кўринишда бўлади.

Умумий нормал тақсимот деб ихтиёрий a ва σ ($\sigma>0$) параметрли нормал тақсимотга айтилади. *Стандарт* нормал тақсимот деб $a=0$ ва $\sigma=1$ параметрли нормал тақсимотга айтилади.

Стандарт нормал тақсимотнинг зичлик функцияси

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (8.10)$$

кўринишда эканлигини кўриш осон. Бу функция бизга 4–мавзуда учраган. Унинг қийматлари адабиётлардаги махсус жадвалларда келтирилган.

Ихтиёрий a ва σ параметрли нормал тасодифий миқдорнинг (α,β) интервалга тегишли қиймат қабул қилишининг эҳтимоллигини $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ Лаплас функциясидан фойдаланиб топиш мумкин. Ҳақиқатан, 7.1–теоремага асосан

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

эканлигини кўрамиз.

Янги $z=(x-a)/\sigma$ ўзгарувчи киритамиз. Бу ердан $x=\sigma z+a$, $dx=\sigma dz$ эканлиги келиб чиқади. Интеграллашнинг янги чегараларини топамиз. Агар $x=\alpha$ бўлса, у ҳолда $z=(\alpha-a)/\sigma$ бўлади; агар $x=\beta$ бўлса, у ҳолда $z=(\beta-a)/\sigma$ бўлади.

Шундай қилиб,

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{(\alpha-a)/\sigma}^{(\beta-a)/\sigma}e^{-\frac{z^2}{2}}(\sigma dz)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(\alpha-a)/\sigma}^{0}e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{(\beta-a)/\sigma}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(\beta-a)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(\alpha-a)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

бўлади.

$\Phi(x)$ функциядан фойдаланиб, пировардида

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \qquad (8.11)$$

ни оламиз.

Хусусан, X стандарт нормал тасодифий миқдорнинг $(0,\ x)$ интервалга тегишли қиймат қабул қилишининг эҳтимоллиги

$$P(0 < X < x) = \Phi(x) \qquad (8.12)$$

га тенг, чунки бу ҳолда $a = 0$ ва $\sigma = 1$.

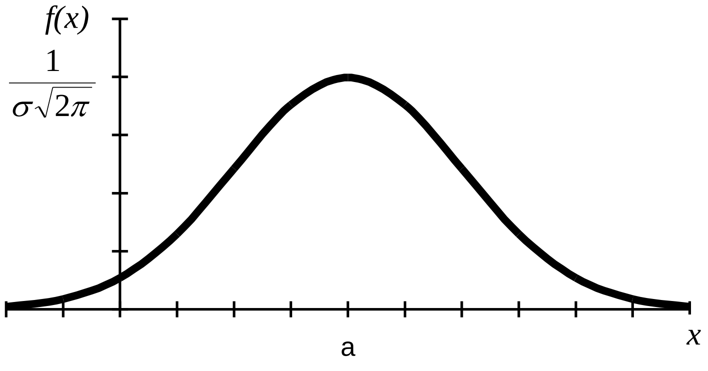
2–мисол. X тасодифий миқдор нормал қонун бўйича тақсимланган. Бу миқдорнинг математик кутилмаси ва ўртача квадратик четланиши мос равишда 30 ва 10 га тенг. X нинг $(10,\ 50)$ интервалга тегишли қиймат қабул қилишининг эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш. (8.11) формуладан фойдаланамиз. Шартга кўра $\alpha = 10$, $\beta = 50$, $a = 30$, $\sigma = 10$, демак,

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = 2\Phi(2).$$

Жадвалдан $\Phi(2) = 0{,}4772$ ни топамиз. Бу ердан изланаётган эҳтимоллик $P(10 < X < 50) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544$ га тенг эканлиги келиб чиқади.

Нормал тақсимот зичлик функциясининг графиги *нормал эгри чизиқ* (*Гаусс эгри чизиғи*) деб аталади. Бу график 8.1–расмда тасвирланган.



8.1 – расм.

$[a, b]$ *кесмадаги текис тақсимот* деб зичлик функцияси

$$f(x) = \begin{cases} x \le a & \text{да} \quad 0 \\ a < x \le b & \text{да} \quad 1/(b-a) \\ x > b & \text{да} \quad 0 \end{cases} \qquad (8.13)$$

кўринишда бўлган, барча мумкин бўлган қийматлари ушбу кес–мага тегишли бўлган X тасодифий миқдорнинг эҳтимолликлари тақсимотига айтилади.

$[a, b]$ да текис тақсимланган тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси

$$F(x)=\begin{cases} x\le a & да \quad 0 \\ a<x\le b & да \quad (x-a)/(b-a) \\ x>b & да \quad 1 \end{cases} \qquad (8.14)$$

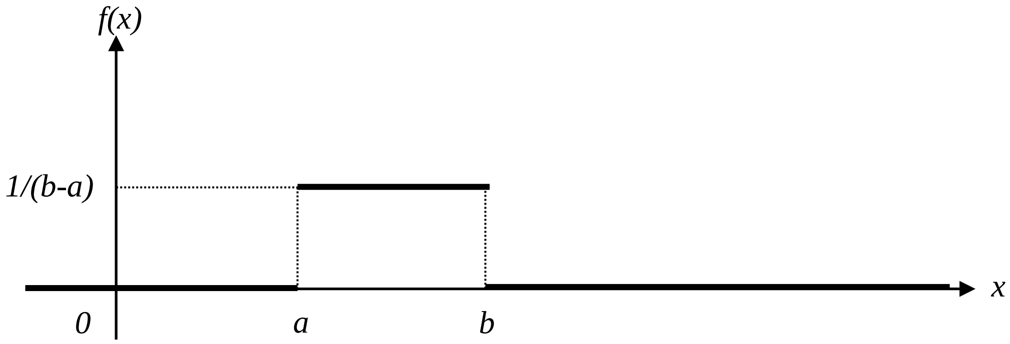
кўринишга эга.

Текис тақсимотнинг зичлик функцияси графиги 8.2–расмда, тақсимот функцияси графиги эса 7.3–расмда келтирилган.

Текис тақсимланган тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси ва дисперсиясини ҳисоблаймиз. (8.1) формулага асосан

$$M(X)=\int_a^b x\,f(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx=\frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$$

ни оламиз.



8.2 – расм.

Сўнгра, (8.5) формулага асосан

$$D(X)=\int_a^b x^2\,f(x)\,dx-[M(X)]^2=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx-\left[\frac{a+b}{2}\right]^2=$$

$$=\frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b-\left[\frac{a+b}{2}\right]^2=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

эканлиги келиб чиқади.

Энди $[a, b]$ да текис тақсимланган X узлуксиз тасодифий миқдорнинг $[a, b]$ нинг ичида ётган $(c,\ d)$ интервалга тегишли қиймат қабул қилишининг эҳтимоллигини топамиз.

7.1–теорема ва (8.13) формуладан фойдаланиб,

$$P(c<X<d)=\int_c^d f(x)\,dx=\int_c^d \frac{1}{b-a}\,dx=\frac{1}{b-a}\int_c^d 1\cdot dx=\frac{d-c}{b-a}$$

ни ёки

$$P(c<X<d)=\frac{d-c}{b-a} \qquad (8.15)$$

ни оламиз.

Кўрсаткичли (экспоненциал) тақсимот деб

$$f(x)=\begin{cases} x<0 & да & 0 \\ x\ge 0 & да & \lambda e^{-\lambda x} \end{cases} \qquad (8.16)$$

зичлик функцияси билан тасвирланадиган X узлуксиз тасодифий миқдорнинг эҳтимолликлари тақсимотига айтилади, бу ерда λ – ўзгармас мусбат катталик.

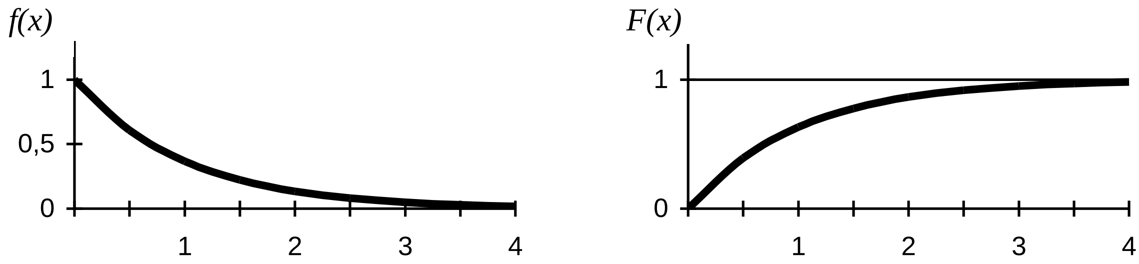
Таърифдан кўриниб турибдики, кўрсаткичли тақсимот битта λ параметр билан аниқланади. Кўрсаткичли қонуннинг тақсимот функциясини топамиз:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz=\int_{-\infty}^{0} 0\,dz+\lambda\int_{0}^{x} e^{-\lambda z}\,dz=1-e^{-\lambda x}.$$

Демак,

$$F(x)=\begin{cases} x<0 & да & 0 \\ x\ge 0 & да & 1-e^{-\lambda x} \end{cases}. \qquad (8.17)$$

Кўрсаткичли қонуннинг зичлик ва тақсимот функциялари–нинг графиклари 8.3–расмда тасвирланган.



8.3 – расм.

(8.17) формуладаги кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган X узлуксиз тасодифий миқдорнинг (a,b) интервалга тегишли қиймат қабул қилишининг эҳтимоллигини топамиз. (7.4) формуладан фойдаланиб,

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)=1-e^{-\lambda b}-(1-e^{-\lambda a})$$

ни ёки

$$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b} \qquad (8.18)$$

ни оламиз.

3–мисол. X узлуксиз тасодифий миқдор

$$f(x)=\begin{cases} x<0 & да & 0 \\ x\ge 0 & да & 2e^{-2x} \end{cases}$$

кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган. Тажриба натижасида X тасодифий миқдор $(0,3;\ 1)$ интервалга тегишли қиймат қабул қилишининг эҳтимоллиги топилсин.

<u>Ечиш</u>. Шартга кўра $\lambda = 2$. (8.18) формуладан фойдаланамиз:

$$P(0,3 < X < 1) = e^{-(2\cdot 0,3)} - e^{-(2\cdot 1)} = e^{-0,6} - e^{-2} \approx 0,548 - 0,135 \approx 0,41$$

Кўрсаткичли тақсимот параметрининг эҳтимолий маъносини кўрайлик. *Кўрсаткичли тақсимотнинг математик кутилмаси ва ўртача квадратик четланиши* λ *параметрнинг тескари қийматига тенг, яъни* $M(X) = 1/\lambda$ *ва* $\sigma(X) = 1/\lambda$.

4–мисол. X узлуксиз тасодифий миқдор

$$f(x) = \begin{cases} x < 0 & да \quad 0 \\ x \geq 0 & да \quad 5e^{-5x} \end{cases}$$

кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган. X тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси, ўртача квадратик четланиши ва дисперсияси топилсин.

<u>Ечиш</u>. Шартга кўра $\lambda = 5$. Демак,

$$M(X) = \sigma(X) = 1/\lambda = 1/5 = 0,2;$$

$$D(X) = [\sigma(X)]^2 = 1/\lambda^2 = 1/5^2 = 0,04.$$

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси нима?
2. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг дисперсияси нима ва у қандай ҳисобланади?
3. Нормал тақсимот деб нимага айтилади?
4. Нормал тақсимот параметрларининг эҳтимолий маъноси қанақа?
5. Умумий ва стандарт нормал тақсимотлар нима, уларнинг зичлик ва тақсимот функциялари қанақа?
6. Нормал тасодифий миқдорнинг берилган интервалдаги қийматни қабул қилиши эҳтимоллиги қандай топилади?
7. Текис тақсимот деб нимага айтилади?
8. Текис тақсимланган тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси ва дисперсияси қандай ҳисобланади?
9. Текис тақсимланган тасодифий миқдорнинг берилган интервалдаги қийматни қабул қилиши эҳтимоллиги қандай топилади?
10. Кўрсаткичли тақсимот деб нимага айтилади?
11. Кўрсаткичли тасодифий миқдорнинг берилган интервалдаги қийматни қабул қилиши эҳтимоллиги қандай топилади?
12. Кўрсаткичли тақсимот параметрининг эҳтимолий маъноси қанақа?

Таянч иборалар:

Узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси, узлуксиз тасодифий миқдорнинг дисперсияси, тақсимот қонуни, нормал тақсимот, умумий нормал тақсимот, стандарт нормал тақсимот, нормал тасодифий миқдорнинг берилган интервалдаги қийматни қабул қилиши эҳтимоллиги, нормал эгри чизиқ (Гаусс эгри чизиғи), текис тақсимот, текис тақсимланган тасодифий миқдорнинг берилган интервалдаги қийматни қабул қилиши эҳтимоллиги, кўрсаткичли тақсимот, кўрсаткичли тасодифий миқдорнинг берилган интервалдаги қийматни қабул қилиши эҳтимоллиги.

10–мавзу. Катта сонлар қонуни ва унинг амалий аҳамияти. Марказий лимит теорема ҳақида тушунча

Режа:

1. Катта сонлар қонуни.
2. Марказий лимит теорема.

Аввалги мавзуларда кўрганимиздек, тасодифий миқдор синов натижасида мумкин бўлган қийматлардан қайси бирини қабул қилишини аввалдан ишонч билан айтиб бўлмайди, чунки бу ҳисобга олиб бўлмайдиган кўпгина тасодифий сабабларга боғлиқ бўлади. Бироқ баъзи–бир нисбатан кенгроқ шартлар остида етарлича катта сондаги тасодифий миқдорлар йиғиндисининг тасодифийлик характери деярли йўқолар ва у қонуниятга айланиб қолар экан.

Амалиёт учун жуда кўп тасодифий сабабларнинг биргаликдаги таъсири тасодифга деярли боғлиқ бўлмайдиган натижага олиб келадиган шартларни билиш жуда катта аҳамиятга эга, чунки бу ҳодисаларнинг қандай ривожланишини олдиндан кўра билишга имкон беради. Ана шу шартлар умумий ном билан *катта сонлар қонуни* деб юритиладиган теоремаларда кўрсатилади. Улар жумла–сига Чебышев и Бернулли теоремалари мансуб.

Катта сонлар қонунига мансуб теоремалар n та тасодифий миқдор ўрта арифметик қийматининг бу миқдорлар математик кутилмаларининг ўрта арифметик қийматига яқинлашишининг шартларини белгилайди.

Дастлаб юқорида тилга олинган теоремаларнинг исботлари таянадиган Чебышев тенгсизлигини келтирамиз.

Агар тасодифий миқдор дисперсияси маълум бўлса, у ҳолда унинг ёрдамида бу миқдор ўзининг математик кутилмасидан берилган катталикка четланишининг эҳтимоллигини баҳолаш мумкин, бу баҳолаш фақат дисперсияга боғлиқ бўлади. Эҳтимолликнинг баҳосини *П.Л.Чебышев тенгсизлиги* беради:

$$P(|X-M(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2},\quad \varepsilon>0. \qquad (9.1)$$

Бу тенгсизликдан натижа сифатида

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2},\quad \varepsilon>0 \qquad (9.2)$$

тенгсизликни олиш мумкин.

1–мисол. X тасодифий миқдор ўзининг математик кутилмасидан шу миқдор ўрта квадратик четланишининг уч бараваридан ошувчи катталикка четланишининг эҳтимоллиги баҳолансин.

Ечиш. Шартга кўра $\varepsilon=3\sigma(X)$. $D(X)=[\sigma(X)]^2$ эканлигини ҳисобга олиб, (9.1) формуладан $P(|X-M(X)|\geq 3\sigma(X))\leq \frac{D(X)}{9[\sigma(X)]^2}=\frac{1}{9}$ ни оламиз.

9.1–теорема (Чебышевнинг катта сонлар қонуни). $X_1,\ X_2,\ldots X_n,\ldots$ *боғлиқмас тасодифий миқдорлар кетма–кетлиги бўлиб, уларнинг дисперсиялари юқоридан бир хил с сони билан чегараланган бўлсин:* $D(X_i)\leq c$, $i=1,2,\ldots$. *У ҳолда ихтиёрий* $\varepsilon>0$ *учун*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right|<\varepsilon\right)=1 \qquad (9.3)$$

муносабат ўринли.

Бу теоремадан бир хил эҳтимолликлар тақсимотига эга эркли тасодифий миқдорларнинг ўрта арифметиги учун катта сонлар қонунининг ўринли эканлиги келиб чиқади.

9.1–натижа. $X_1,X_2,\ldots X_n,\ldots$ *бир хил а математик кутилмага эга боғлиқмас тасодифий миқдорлар кетма–кетлиги бўлиб, уларнинг дисперсиялари юқоридан бир хил с сони билан чегараланган бўлсин:* $D(X_i)\leq c$, $i=1,2,\ldots$. *У ҳолда ихтиёрий* $\varepsilon>0$ *учун*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-a\right|<\varepsilon\right)=1 \qquad (9.4)$$

муносабат ўринли.

Бир хил математик кутилмага эга боғлиқмас тасодифий миқдорлар учун катта сонлар қонуни боғлиқмас тажрибалар кетма–кетлигида тасодифий миқдорлар ўрта арифметик қийматининг бу тасодифий миқдорларнинг умумий математик кутилмасига яқинлашишини акс эттиради.

Шундай қилиб, *етарлича катта сондаги* (дисперсиялари бир текисда чегараланган) *боғлиқмас тасодифий миқдорларнинг ўрта арифметик қиймати тасодифийлик хусусиятини йўқотади*. Бу шундай изоҳланади: ҳар бир миқдорнинг ўзининг математик кутилмасидан четланиши ҳам мусбат, ҳам манфий бўлиши мумкин, бироқ ўрта арифметик қийматда улар ўзаро йўқолиб кетади.

Катта сонлар қонуни кўпгина амалий татбиқларга эга. Ҳақиқий қиймати *а* га тенг бўлган қандайдир катталик *n* марта боғлиқмас равишда ўлчансин. Ҳар бир ўлчашнинг натижаси X_i тасодифий миқдор бўлади. Агар ўлчашлар тизимли хатоларсиз амалга оширилса, у ҳолда X_i тасодифий миқдорларнинг математик кутилмасини ўлчанаётган катталикнинг ҳақиқий қийматига тенг деб ҳисоблаш мумкин, $M(X_i)=a$, $i=1,2,\ldots$. Ўлчашлар натижаларининг дисперсиясини кўпинча қандайдир *с* сони билан чегараланган деб ҳисоблаш мумкин.

У ҳолда ўлчашларнинг тасодифий натижалари 9.1–теореманинг шартларини қаноатлантиради ва демак, катта сондаги ўлчашларда *n* та ўлчашнинг ўрта арифметик қиймати ўлчанаётган *а* катталикнинг ҳақиқий қийматидан амалда кўп фарқ қила олмайди. Бу ҳолат ўлчанаётган катталикнинг ҳақиқий қиймати сифатида ўлчашларнинг ўрта арифметик қиймати олинишини асослайди.

Боғлиқмас тажрибалардаги мувафаққиятларнинг нисбий частотаси учун қуйидаги теорема ўринли.

9.2–теорема (Бернуллининг катта сонлар қонуни). *Агар n та боғлиқмас тажрибаларнинг ҳар бирида A ҳодиса рўй беришининг эҳтимоллиги p ўзгармас бўлса, у ҳолда бу тажрибалардаги муваффақиятлар сони m учун ихтиёрий* $\varepsilon > 0$ *да*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad (9.5)$$

муносабат ўринли.

$X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ боғлиқмас, бир хил тақсимланган тасодифий миқ–дорлар кетма–кетлигини кўриб чиқайлик. $M(X_i) = a$, $D(X_i) = \sigma^2$, $i = 1, 2, \ldots$ бўлсин. Тасодифий миқдорларнинг марказлаштирилган ва нормалаштирилган Y_n, $n = 1, 2, \ldots$, йиғиндилари кетма–кетлигини тузамиз:

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}}. \qquad (9.6)$$

Марказий лимит теоремасига асосан, $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонунларига қўйилган анча умумий шартлар остида тасодифий миқдорларнинг марказлаштирилган ва нормалаштирилган Y_n йиғиндилари тақсимот функцияларининг кетма–кетлиги $n \to \infty$ да ихтиёрий x учун стандарт нормал тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясига яқинлашади.

9.3–теорема (марказий лимит теорема). $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ *боғлиқмас, бир хил тақсимланган, чекли* $D(X_i) = \sigma^2$ *дисперсияга эга бўлган тасодифий миқдорлар кетма–кетлиги бўлиб,* $M(X_i) = a$, $i = 1, 2, \ldots$ *бўлсин. У ҳолда ихтиёрий* x $(-\infty < x < \infty)$ *учун*

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \qquad (9.7)$$

муносабат ўринли.

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Умумий ном билан катта сонлар қонуни деб юритиладиган теоремаларда нима ҳақида сўз юритилади?
2. Чебышев тенгсизлиги ҳақида нима биласиз?
3. Чебышевнинг катта сонлар қонуни нимани таъкидлайди?
4. Катта сонлар қонунининг моҳияти нимада ва унинг амалий аҳамияти қандай?

5. Бернуллининг катта сонлар қонуни нимани таъкидлайди?
6. Марказий лимит теоремада нима ҳақида сўз юритилади?

Таянч иборалар:

Катта сонлар қонуни, Чебышев тенгсизлиги, эркли тасодифий миқдорлар кетма–кетлиги, тасодифий миқдорларнинг марказлаштирилган ва нормалаштирилган йиғиндиси, марказий лимит теорема.

11–мавзу. Математик статистиканинг предмети ва асосий масалалари. Танланма

Режа:

1. Математик статистиканинг вазифалари (масалалари).
2. Бош ва танланма тўпламлар.
3. Танланмаларнинг типлари, танлаш усуллари.

Математик статистикани қўллашдан асосий мақсад оммавий ҳодисалар ва жараёнлар ҳақида уларни кузатиш ёки экспериментлар натижасида олинган маълумотлар асосида хулосалар ҳосил қилишдан иборат. Бу статистик хулосалар алоҳида тажрибаларга тегишли бўлмасдан, балки тадқиқ қилинаётган ҳодисани келтириб чиқарувчи шарт–шароитларнинг доимий эканлиги фаразидаги шу ҳодисанинг умумий тавсифлари (эҳтимолликлари, тақсимот қонунлари ва уларнинг параметрлари, математик кутилмалари ва ҳ.к.) ҳақидаги даъволардан иборат.

Оммавий тасодифий ҳодисалар бўйсунадиган қонуниятларни аниқлаш статистик маълумотларни – кузатиш натижаларини эҳтимоллар назарияси услублари билан ўрганишга асосланади.

Математик статистиканинг биринчи вазифаси (масаласи) – кузатишлар ёки махсус ўтказилган экспериментлар натижасида олинган статистик маълумотларни тўплаш ва гуруҳлаш усулларини кўрсатиш.

Математик статистиканинг иккинчи вазифаси (масаласи):

а) ҳодисанинг номаълум эҳтимоллигини баҳолаш; номаълум тақсимот функциясини баҳолаш; кўриниши маълум бўлган тақсимотнинг параметрларини баҳолаш; тасодифий миқдорнинг бошқа битта ёки бир нечта тасодифий миқдорларга боғлиқлигини баҳолаш ва ҳ.к.;

б) номаълум тақсимотнинг кўриниши ҳақидаги ёки кўриниши маълум бўлган тақсимот параметрларининг катталиги ҳақидаги статистик гипотезаларни текшириш каби тадқиқот мақсадларига боғлиқ равишда статистик маълумотларни таҳлил қилиш усулларини ишлаб чиқишдан иборат.

Демак, *математик статистиканинг предмети илмий ва амалий хулосалар ҳосил қилиш мақсадида статистик маълумотларни тўплаш ва қайта ишлаш усулларини яратишдан иборат*.

Математик статистика эҳтимоллар назариясига таянади ва унинг мақсади — бош тўплам тавсифларини танланма маълумотлари асосида баҳолаш.

Агар бир жинсли объектлар тўпламини бу объектларни тавсифловчи бирор белгига нисбатан ўрганиш талаб этилса, у ҳолда ялпи текшириш ўтказиш, яъни тўпламнинг ҳар бир объектини ушбу белгига нисбатан текшириш табиий бўлади. Бироқ, амалда, ялпи текширишни ўтказиш у ёки бу сабабларга кўра кўпинча мумкин бўлмайди. Бундай ҳолларда бутун тўпламдан чекли сондаги объектлар тасодифий равишда танланади ва улар ўрганилади.

Танланма тўплам, ёки оддий қилиб, *танланма* деб тасодифий равишда танлаб олинган объектлар тўпламига айтилади. *Бош тўплам* деб танланма ажратиладиган объектлар тўпламига айтилади. Масалан, агар Солиқ академиясининг барча талабалари бош тўплам бўлса, у ҳолда бирор гуруҳ талабалари танланма тўплам бўлади.

Тўплам (танланма ёки бош тўплам)нинг *ҳажми* деб бу тўпламдаги объектлар сонига айтилади. Масалан, агар 1000 та деталдан текширув учун 100 та деталь танлаб олинган бўлса, у ҳолда бош тўплам ҳажми $N=1000$, танланма ҳажми эса $n=100$ бўлади.

Танланмани тузишда икки хил йўл тутиш мумкин: объект танланиб, унинг устида кузатиш ўтказилганидан сўнг, у бош тўпламга қайтарилиш ёки қайтарилмаслиги мумкин. Шунга боғлиқ равишда танламалар такрор ва нотакрор танламаларга ажратилади.

Такрор танланма деб шундай танланмага айтиладики, бунда танлаб олинган объект (кейингисини олишдан олдин) бош тўпламга қайтарилади. *Нотакрор* танланма деб танлаб олинган объект яна бош тўпламга қайтарилмайдиган танланмага айтилади.

Танланмадаги маълумотлар бўйича бош тўпламнинг бизни қизиқтираётган белгиси ҳақида етарлича ишонч билан фикр юритиш учун танланманинг объектлари уни тўғри тавсифлаши зарур. Бошқача айтганда, танланма бош тўпламнинг мутаносибликларини тўғри тавсифлаши керак, яъни танланма *репрезентатив* (*тўлақонли тавсифловчи*) бўлиши лозим.

Агар бош тўплам барча объектларининг танланмага тушиш эҳтимолликлари бир хил деган фаразда танланманинг ҳар бир объекти бош тўпламдан тасодифий равишда танланган бўлса, у ҳолда катта сонлар қонунига асосан танланма репрезентатив бўлади деб таъкидлаш мумкин.

Агар бош тўпламнинг ҳажми етарлича катта бўлиб, танланма эса бу тўпламнинг унча катта бўлмаган қисмини ташкил қилса, у ҳолда такрор ва нотакрор танланмалар орасидаги фарқ йўқолиб боради; чексиз бош тўплам қаралиб, танланма чекли ҳажмга эга бўлган лимит ҳолда бу фарқ йўқолади.

Амалиётда танлашнинг турли усуллари қўлланилади. Бош тўпламни қисмларга ажратишни талаб қилмайдиган танлаш мавжуд, масалан, оддий қайтарилмайдиган тасодифий танлаш ва оддий қайтариладиган тасодифий танлаш, шунингдек, бош тўплам қисмларга ажратилгандан кейин амалга ошириладиган танлаш (типик танлаш, механик танлаш, серияли танлаш) ҳам қўлланилади.

Бутун бош тўпламдан объектлар битталаб олинадиган танлаш *оддий тасодифий* танлаш деб аталади. Агар танланган объектлар кейинги танловда қатнашиши учун бош тўпламга қайтарилса, бундай танлаш оддий қайтариладиган тасодифий танлаш, акс ҳолда эса оддий қайтарилмайдиган тасодифий танлаш бўлади. Масалан, агар бирор ҳудуд бўйича ўртача ойлик иш ҳақини аниқлаш талаб этилган бўлса, оддий қайтарилмайдиган тасодифий танлаш қўлланилади, чунки айни бир одамнинг иш ҳақи фақат бир марта ҳисобга олинади. Агар бирор тумандаги турли комиссияларнинг жинси, ёши, ижтимоий ҳолати, маълумоти бўйича таркибини аниқлаш талаб этилган бўлса, танлаш оддий қайтариладиган тасодифий танлаш бўлади, чунки айни бир одам ҳар хил комиссияларда иштирок этиши мумкин, бинобарин, танланмага бир неча марта тушиши мумкин.

Объектлар бутун бош тўпламдан эмас, балки унинг ҳар бир типга тегишли қисмларидан олинса, бундай танлаш *типик танлаш* деб аталади. Масалан, агар деталлар бир нечта станокда тайёрланаётган бўлса, у ҳолда танлаш ҳамма станокларда тайёрланган барча деталлар тўпламидан эмас, балки ҳар бир станок маҳсулотидан алоҳида амалга оширилади. Типик танлашдан текширилаётган белги бош тўпламнинг турли типларга тегишли қисмла–рида сезиларли даражада ўзгариб турганда фойдаланилади.

Бош тўплам танланмага нечта объект кириши лозим бўлса, катталиги тахминан бир хил бўлган шунча группага механик равишда ажратилиб, ҳар бир группадан эса айни битта номерли объект танланса, бундай танлаш *механик танлаш* деб аталади. Масалан, агар станокда тайёрланган деталларнинг 20% ини танлаб олиш лозим бўлса, у ҳолда ҳар бешинчи деталь танланади; агар деталларнинг 5% ини танлаб олиш талаб этилган бўлса, у ҳолда ҳар йигирманчи деталь танланади ва ҳ.к. Механик танлаш баъзан танланманинг репрезентативлигини таъминламаслиги мумкин.

Серияли танлаш деб шундай танлашга айтиладики, бунда объектлар бош тўпламдан битталаб эмас, балки «серия»лаб олинади ва улар ялписига текширилади. Масалан, агар маҳсулотлар катта гуруҳдаги автомат дастгоҳлар ёрдамида тайёрланаётган бўлса, у ҳолда фақат бир нечта дастгоҳнинг маҳсулоти ялписига текширилади. Серияли танлашдан текширилаётган белги турли сери–яларда унча ўзгармаган ҳолда фойдаланилади.

Амалиётда кўпинча комбинацияли (аралаш) танлаш қўлланилади, бунда юқорида кўрсатилиб ўтилган усуллардан биргаликда фойдаланилади.

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Математик статистиканинг олдида қандай вазифа (масала)лар туради?
2. Математик статистикани қўллашдан мақсад нима ва унинг предмети нимадан иборат?
3. Танланма тўплам (танланма), бош тўплам, тўплам ҳажми нима?
4. Такрор танланма, нотакрор танланма ва репрезентатив танланма деб нимага айтилади?
5. Оддий тасодифий танлаш ва типик танлаш нимадан иборат?
6. Механик танлаш ва серияли танлаш нимадан иборат?

Таянч иборалар:

Математик статистика, баҳо, статистик гипотезаларни текшириш, статистик маълумотларни тўплаш ва қайта ишлаш, танланма тўплам, танланма, бош тўплам, тўплам ҳажми, такрор танланма, нотакрор танланма, репрезентатив танланма, оддий қайтарилмайдиган тасодифий танлаш, оддий қайтариладиган тасодифий танлаш, типик танлаш, механик танлаш, серияли танлаш, комбинацияли танлаш.

12–мавзу.Танланманинг статистик тақсимоти. Эмпирик тақсимот функцияси. Полигон ва гистограмма

Режа:

1.Танланманинг статистик тақсимоти.

2.Эмпирик тақсимот функцияси.

3.Полигон ва гистограмма.

Бош тўпламдан танланма олинган бўлсин. Бунда x_1 қиймат n_1 марта, x_2 қиймат n_2 марта, ... , x_k қиймат эса n_k марта кузатилган бўлсин ва ҳ.к.; $\sum n_i = n$ танланманинг ҳажми бўлсин.

Кузатилган x_i қийматлар *варианталар*, варианталарнинг ўсиб бориш тартибида ёзилган кетма–кетлиги *вариациявий қатор* деб аталади. n_i кузатишлар сонлари *частоталар*, уларнинг танланма ҳажмига $n_i/n = W_i$ нисбатлари *нисбий частоталар* дейилади.

Танланманинг статистик тақсимоти деб варианталар ва уларга мос частоталар ёки нисбий частоталар рўйхатига айтилади. Статистик тақсимотни оралиқлар ва уларга мос частоталарнинг кетма–кетлиги кўринишида ҳам бериш мумкин. Бу ҳолда оралиққа мос частота сифатида шу оралиққа тушган частоталар йиғиндиси қабул қилинади. Бунда частоталар йиғиндиси танланма ҳажмига, нисбий частоталар йиғиндиси эса бирга тенг бўлиши керак.

Тақсимот дейилганда эҳтимоллар назариясида тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари ва уларнинг эҳтимолликлари орасидаги мослик, математик статистикада эса кузатилаётган варианталар ва уларнинг частоталари (нисбий частоталари) орасидаги мослик тушунилади.

1–мисол. Ҳажми $n = 20$ бўлган танланманинг частоталари тақсимоти берилган:

11.1 – ж а д в а л

x_i	3	5	10
n_i	7	8	5

нисбий частоталар тақсимоти ёзилсин.

Ечиш. Частоталарни танланма ҳажмига бўлиб, нисбий час–тоталарни топамиз:

$$W_1 = 7/20 = 0{,}35, \quad W_2 = 8/20 = 0{,}4, \quad W_3 = 5/20 = 0{,}25.$$

Нисбий частоталар тақсимотини ёзамиз:

11.2 – ж а д в а л

x_i	3	5	10
W_i	0,35	0,4	0,25

Н а з о р а т: 0,35 + 0,4 + 0,25 = 1.

X миқдорий белги частоталарининг статистик тақсимоти маълум бўлсин. n_x орқали белгининг x дан кичик қийматлари кузатилган кузатишлар сонини, n орқали эса кузатишларнинг умумий сони (танланма ҳажми)ни белгилаймиз. $X < x$ ҳодисанинг нисбий частотаси n_x / n га тенг. x ўзгарганда нисбий частота ҳам ўзгаради, яъни n_x / n нисбий частота x нинг функциясидир.

Эмпирик тақсимот функцияси (танланманинг тақсимот функцияси) деб x нинг ҳар бир қиймати учун $X < x$ ҳодисанинг нисбий частотасини аниқлайдиган $\overline{F}_n(x)$ функцияга айтилади, яъни

$$\overline{F}_n(x) = n_x / n, \qquad (11.1)$$

бу ерда n_x – x дан кичик варианталар сони; n – танланма ҳажми.

$\overline{F}_n(x)$ функция эмпирик (тажриба) йўли билан топилгани учун эмпирик функция деб аталади.

Танланманинг эмпирик тақсимот функциясидан фарқли равишда бош тўпламнинг $F(x)$ тақсимот функцияси *назарий тақсимот функцияси* деб аталади. Эмпирик ва назарий функциялар орасидаги фарқ шундан иборатки, $F(x)$ назарий функция $X < x$ ҳодисанинг эҳтимоллигини аниқлайди, $\overline{F}_n(x)$ эмпирик функция эса айнан шу ҳодисанинг нисбий частотасини аниқлайди.

Бернуллининг катта сонлар қонуни (9.2– теорема)дан келиб чиқадики, катта n ларда $X < x$ ҳодисанинг нисбий частотаси, яъни $\overline{F}_n(x)$ ва айнан шу ҳодисанинг $F(x)$ эҳтимоллиги бир–биридан қуйидаги маънода кам фарқ қилади:

$$\text{ихтиёрий } \varepsilon > 0 \text{ да } \lim_{n \to \infty} P\left(\left|F(x) - \overline{F}_n(x)\right| < \varepsilon\right) = 1 \text{ бўлади.} \quad (11.2)$$

Иккинчи томондан, $\overline{F}_n(x)$ функциянинг таърифидан у $F(x)$ нинг барча хоссаларига эга эканлиги келиб чиқади:

1) эмпирик функциянинг қийматлари $[0,\ 1]$ кесмага тегишли;

2) $\overline{F}_n(x)$ — камаймайдиган функция;

3) агар x_1 энг кичик варианта бўлса, у ҳолда $x \le x_1$ да $\overline{F}_n(x) = 0$ бўлади; агар x_k энг катта варианта бўлса, у ҳолда $x > x_k$ да $\overline{F}_n(x) = 1$ бўлади.

Бу ердан танланманинг эмпирик тақсимот функциясидан бош тўпламнинг назарий тақсимот функциясини тақрибан тасвирлаш учун фойдаланишнинг мақсадга мувофиқ эканлиги келиб чиқади. Бошқача қилиб айтганда, танланманинг эмпирик тақсимот функцияси бош тўпламнинг назарий тақсимот функциясини баҳолаш учун хизмат қилади.

2–мисол. Танланманинг қуйида берилган тақсимоти бўйича эмпирик тақсимот функцияси тузилсин:

11.3 – ж а д в а л

x_i	1	4	8
n_i	9	3	18

Ечиш. Танланманинг ҳажмини топамиз: $9+3+18=30$. Энг кичик варианта 1 га тенг, демак

$$x \le 1 \text{ да } \overline{F}_n(x)=0 \text{ бўлади.}$$

$X<4$ қиймат, яъни $x_1=1$ қиймат 9 марта кузатилди, демак

$$1<x\le 4 \text{ да } \overline{F}_n(x)=9/30=0{,}3 \text{ бўлади.}$$

$X<8$ қиймат, яъни $x_1=1$ ва $x_2=4$ қийматлар $9+3=12$ марта кузатилди, демак

$$4<x\le 8 \text{ да } \overline{F}_n(x)=12/30=0{,}4 \text{ бўлади.}$$

Энг катта варианта 8 га тенг бўлгани учун

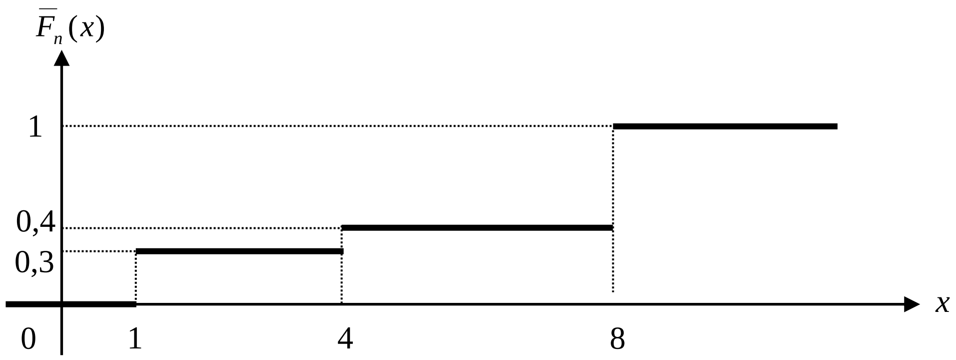
$$x>8 \text{ да } \overline{F}_n(x)=1 \text{ бўлади.}$$

Изланаётган эмпирик функция

$$\overline{F}_n(x)=\begin{cases} x\le 1 & \textit{да} \quad 0 \\ 1<x\le 4 & \textit{да} \quad 0{,}3 \\ 4<x\le 8 & \textit{да} \quad 0{,}4 \\ x>8 & \textit{да} \quad 1 \end{cases}$$

бўлади.

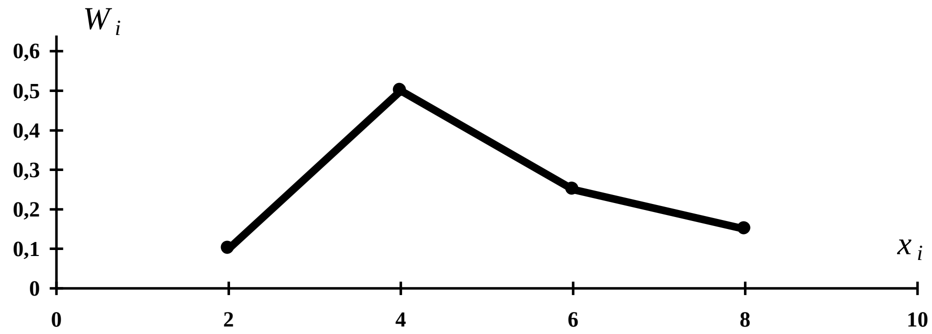
Бу функциянинг графиги 11.1–расмда тасвирланган.



11.1 – расм.

Статистик тақсимотни график усулда турли йўллар билан, хусусан полигон ва гистограмма кўринишида тасвирлаш мумкин.

Частоталар полигони деб кесмалари $(x_1;\ n_1)$, $(x_2;\ n_2)$, ... , $(x_k;\ n_k)$ нуқталарни туташтирувчи синиқ чизиққа айтилади. Полигонни ясаш учун абсциссалар ўқида x_i варианталар, ординаталар ўқида эса уларга мос n_i частоталар қўйиб чиқилади. Сўнгра $(x_i;\ n_i)$ нуқталар тўғри чизиқ кесмалари билан туташтирилиб, частоталар полигони ҳосил қилинади.



11.2 – расм.

Нисбий частоталар полигони деб кесмалари $(x_1;\ W_1)$, $(x_2;\ W_2)$, ... , $(x_k;\ W_k)$ нуқталарни туташтирувчи синиқ чизиққа айтилади. Нисбий частоталар полигони частоталар полигонига ўхшаш усулда ясалади. 11.2–расмда қуйидаги тақсимотнинг нис–бий частоталар полигони тасвирланган:

11.4 – ж а д в а л

x_i	2	4	6	8
W_i	0,1	0,5	0,25	0,15

Узлуксиз белги бўлган ҳолда гистограмма ясаш мақсадга мувофиқдир, бунинг учун белгининг барча кузатилаётган қийматларини ўз ичига олган оралиқ узунлиги h га тенг бўлган бир нечта қисм оралиқларга бўлинади ва ҳар бир қисм оралиқ учун i нчи оралиққа тушган варианталар частоталарининг йиғиндиси n_i топилади.

Частоталар гистограммаси деб асослари h узунликдаги қисм оралиқлардан иборат бўлган, баландликлари эса n_i/h нисбатга тенг бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат поғонасимон шаклга айтилади. Частоталар гистограммасини ясаш учун абсциссалар ўқида қисм оралиқлар ажратилади, уларнинг устида эса абсциссалар ўқига параллел ҳолда n_i/h масофада кесмалар ўтказилади.

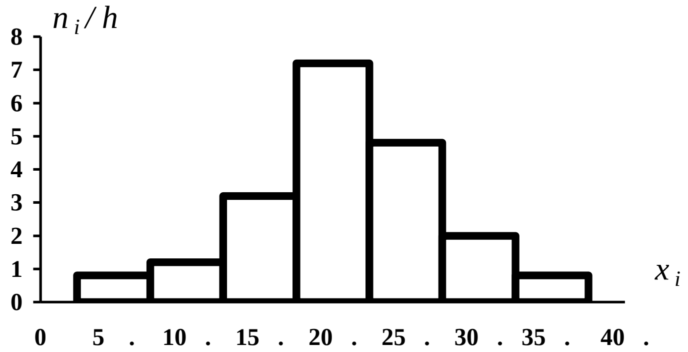
i нчи қисм тўртбурчакнинг юзи i нчи оралиқ варианталари частоталарининг йиғиндиси $hn_i/h = n_i$ га тенг; бинобарин, *частоталар гистограммасининг юзи барча частоталар йиғиндисига, яъни танланма ҳажмига тенг*.

11.5 – ж а д в а л

h = 5 узунликдаги қисм оралиқ	Қисм оралиқ варианталари частоталарининг	Частота зичлиги n_i/h

	йиғиндиси n_i	
5 — 10	4	0,8
10 — 15	6	1,2
15 — 20	16	3,2
20 — 25	36	7,2
25 — 30	24	4,8
30 — 35	10	2,0
35 — 40	4	0,8

11.3–расмда 11.5–жадвалда берилган тақсимотнинг частоталар гистограммаси тасвирланган.



11.3 – расм.

Нисбий частоталар гистограммаси деб асослари h узунликдаги қисм оралиқлардан иборат бўлган, баландликлари эса W_i/h нисбатга тенг бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат поғонасимон шаклга айтилади. Нисбий частоталар гистограммаси частоталар гистограммасига ўхшаш усулда ясалади.

i нчи қисм тўртбурчакнинг юзи i нчи оралиқ варианталари нисбий частоталарининг йиғиндиси $hW_i/h = W_i$ га тенг; бинобарин, *нисбий частоталар гистограммасининг юзи барча нисбий частоталар йиғиндисига, яъни бирга тенг*.

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Варианталар, вариациявий қатор, частоталар ва нисбий частоталар деб нимага айтилади?
2. Танланманинг статистик тақсимоти нима ва у қандай берилади, эҳтимоллар назариясидаги тақсимот билан математик статистикадаги тақсимот орасидаги фарқ нимада?
3. Эмпирик тақсимот функцияси ва назарий тақсимот функцияси нима?
4. Эмпирик тақсимот функцияси қандай хоссаларга эга?

5. Танланманинг эмпирик тақсимот функциясидан бош тўпламнинг назарий тақсимот функциясини баҳолаш учун фойдаланишнинг мақсадга мувофиқ эканлиги нимада?
6. Частоталар полигони ва нисбий частоталар полигони деб нимага айтилади ҳамда улар қандай ясалади?
7. Частоталар гистограммаси нима, у қандай ясалади ва частоталар гистограммасининг юзи нимага тенг?
8. Нисбий частоталар гистограммаси нима, у қандай ясалади ва нисбий частоталар гистограммасининг юзи нимага тенг?

Таянч иборалар:

Варианта, вариациявий қатор, частота, нисбий частота, танланманинг статистик тақсимоти, эмпирик тақсимот функцияси, назарий тақсимот функцияси, частоталар полигони, нисбий частоталар полигони, частоталар гистограммаси, частоталар гистограммасининг юзи, нисбий частоталар гистограммаси, нисбий частоталар гистограммасининг юзи.

13–мавзу. Статистик баҳо. Статистик баҳога қўйиладиган талаблар. Танланма ўртача ва танланма дисперсия

Режа:

1. Тақсимот параметрларининг статистик баҳолари.
2. Силжимаган, эффектив ва асосли баҳолар.
3. Бош ўртача қиймат ва ўртача танланма қиймат.
4. Бош дисперсия ва танланма дисперсиялар.

Статистик баҳолаш назарияси масаланинг қўйилиши нуқтаи назаридан параметрик ва нопараметрик ҳолларга бўлинади.

Агар бош тўпламнинг миқдорий белгисини ўрганиш талаб этилган бўлса, бу белгининг тақсимотини аниқлайдиган параметрларни баҳолаш масаласи юзага келади. Масалан, ўрганилаётган белги бош тўпламда нормал тақсимланганлиги олдиндан маълум бўлса, у ҳолда математик кутилмани ва ўртача квадратик четла–нишни баҳолаш (тақрибий ҳисоблаш) зарур, чунки бу икки пара–метр нормал тақсимотни тўлиқ аниқлайди.

Одатда танламадаги маълумотларгина, масалан, миқдорий белгининг ўзаро боғлиқмас деб фараз қилинувчи n та кузатув натижасида олинган x_1, x_2, ... , x_n қийматлари ихтиёрда бўлади. Баҳоланаётган белги худди шу маълумотлар орқали ифодаланади. x_1, x_2, ... , x_n ларни боғлиқмас X_1, X_2,... , X_n тасодифий миқдорлар деб қараб, назарий тақсимот номаълум параметрининг статистик баҳосини топиш кузатилаётган тасодифий миқдорларнинг баҳоланаётган параметр тақрибий қийматини берувчи функциясини топишга тенг кучлидир дейиш мумкин. Масалан, нормал тақсимот–нинг математик кутилмасини баҳолаш учун белгининг кузатиладиган қийматларининг ўрта арифметик қиймати бўладиган $\bar{X} = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n$ функция хизмат қилади.

Шундай қилиб, назарий тақсимот *номаълум* θ *параметрининг статистик баҳоси* деб кузатиладиган тасодифий миқдорларнинг маълум статистик маънода шу параметр ҳақиқий қийматига яқин $\overline{\theta} = \overline{\theta}(n) = \overline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ функциясига айтилади.

Статистик баҳонинг баҳоланаётган параметр ҳақиқий қийматига яқинлигини аниқлайдиган энг муҳим хоссалари силжимаганлик, асослилик ва эффективлик хоссаларидир.

$\overline{\theta}$ назарий тақсимотнинг номаълум θ параметрининг статистик баҳоси бўлсин. Бош тўпламдан кўп мароталаб n ҳажмли танланмалар олиб, умуман олганда, бир–биридан фарқ қилувчи $\overline{\theta}_1$, $\overline{\theta}_2$, ... , $\overline{\theta}_k$ баҳоларни олиш мумкин. Шундай қилиб, $\overline{\theta}$ баҳони тасодифий миқдор сифатида, $\overline{\theta}_1$, $\overline{\theta}_2$, ... , $\overline{\theta}_k$ сонларни эса унинг мумкин бўлган қийматлари сифатида қараш мумкин.

Агар $\overline{\theta}$ баҳо θ нинг тақрибий қийматини ортиғи билан берса, у ҳолда танланмадаги маълумотлар бўйича топилган ҳар бир $\overline{\theta}_i$ $(i = 1,2,\ldots,k)$ сон θ нинг ҳақиқий қийматидан катта бўлади. Бу ҳолда $\overline{\theta}$ тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси (ўртача қиймати) ҳам θ дан катта, яъни $M(\overline{\theta}) > \theta$ бўлиши равшан. Агар $\overline{\theta}$ баҳони ками билан берса, у ҳолда $M(\overline{\theta}) < \theta$ бўлиши муқаррар.

Бу ердан математик кутилмаси баҳоланаётган параметрга тенг бўлмаган статистик баҳодан фойдаланиш ўлчашлар натижаларини тайинли битта томонга бузиб кўрсатувчи тасодифий бўлмаган хатолар бўлмиш тизимли хатоларга олиб келиши кўриниб турибди. Шу сабабга кўра, $\overline{\theta}$ баҳо математик кутилмасининг ба–ҳоланаётган параметрга тенглиги $\overline{\theta}$ нинг баъзи қийматлари θ дан катта, бошқалари эса кичик эканлиги туфайли хатоларни йўқотмаса ҳам, лекин тизимли хатоларга йўл қўйилмаслигини кафолатлайди, чунки ҳар хил ишорали хатолар деярли тенг миқдорда учрайди.

Агар $\overline{\theta}$ статистик баҳонинг математик кутилмаси баҳоланаётган θ параметрга ихтиёрий ҳажмдаги танланмада тенг, яъни

$$M(\overline{\theta}) = \theta \qquad (12.1)$$

бўлса, бундай баҳо *силжимаган баҳо* деб аталади.

Силжиган баҳо деб математик кутилмаси баҳоланаётган параметрга тенг бўлмаган баҳога айтилади.

Бироқ силжимаган баҳо баҳоланаётган параметрга яхши яқинлашишни ҳар доим ҳам беравермайди. Ҳақиқатан, $\overline{\theta}$ нинг мумкин бўлган қийматлари унинг ўрта қиймати атрофида анча тарқоқ бўлиши, яъни $D(\overline{\theta})$ дисперсия анчагина катта бўлиши мумкин. Бундай ҳолда битта танланма маълумотлари бўйича топилган баҳо $\overline{\theta}$ нинг ўрта қийматидан ва демак, баҳоланаётган θ параметрнинг ўзидан ҳам анча узоқлашган бўлиши мумкин. Агар $D(\overline{\theta})$ дисперсиянинг кичик бўлиши талаб этилса, у ҳолда катта хатога йўл қўйишнинг имконияти йўқ бўлади.

Агар статистик баҳо танланманинг берилган n ҳажмида энг кичик мумкин бўлган дисперсияга эга бўлса, у ҳолда бундай баҳо *эффектив баҳо* деб аталади.

Агар $\overline{\theta}$ статистик баҳо баҳоланаётган θ параметрга эҳтимоллик бўйича яқинлашса, яъни ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун

$$n \to \infty \text{ да } P\left(\left|\overline{\theta}(n) - \theta\right| \le \varepsilon\right) \to 1 \qquad (12.2)$$

бўлса, у ҳолда бундай баҳо *асосли баҳо* деб аталади. Масалан, агар силжимаган баҳонинг дисперсияси $n \to \infty$ да нолга интилса, у ҳолда бундай баҳо асосли баҳо ҳам бўлади.

Бош тўплам X миқдорий белгига нисбатан ўрганилаётган бўлсин.

$\bar{x}_Б$ *бош ўртача қиймат* деб бош тўплам белгиси қийматларининг ўрта арифметик қийматига айтилади.

Агар N ҳажмли бош тўплам белгисининг барча x_1, x_2, ... , x_N қийматлари турлича бўлса, у ҳолда бош ўртача қиймат

$$\bar{x}_Б = (x_1 + x_2 + \ldots + x_N)/N \qquad (12.3)$$

га тенг бўлади.

Белгининг x_1, x_2, ... , x_k қийматлари мос равишда N_1, N_2, ... , N_k частоталарга эга ва бунда $N_1 + N_2 + \ldots + N_k = N$ бўлган тақдирда эса бош ўртача қиймат

$$\bar{x}_Б = (x_1 N_1 + x_2 N_2 + \ldots + x_k N_k)/N \qquad (12.4)$$

га тенг бўлади.

Агар бош тўпламнинг текширилаётган X белгиси тасодифий миқдор деб қаралса ҳамда (12.3) ва (12.4) формулалар (6.1) ва (6.2) формулалар билан солиштирилса, у ҳолда белгининг математик кутилмаси шу белгининг бош ўртача қийматига тенг деган хулосага келиш мумкин:

$$\bar{x}_Б = M(X). \qquad (12.5)$$

Энди бош тўпламни X миқдорий белгига нисбатан ўрганиш учун n ҳажмли танланма олинган бўлсин.

$\bar{x}_Т$ *ўртача танланма қиймат* деб танланма тўплам белгисининг кузатилаётган қийматларининг ўрта арифметик қийматига айтилади.

Агар n ҳажмли танланма белгисининг барча x_1, x_2, ... , x_n қийматлари турлича бўлса, у ҳолда ўртача танланма қиймат

$$\bar{x}_Т = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n \qquad (12.6)$$

га тенг бўлади.

Белгининг x_1, x_2, ... , x_k қийматлари мос равишда n_1, n_2, ... , n_k частоталарга эга ва бунда $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ бўлган тақдирда эса ўртача танланма қиймат

$$\bar{x}_Т = (x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k)/n \qquad (12.7)$$

га ёки

$$\bar{x}_Т = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i n_i\right)\Big/ n \qquad (12.8)$$

тенг бўлади.

Ўртача танланма қиймат бош ўртача қийматнинг силжимаган баҳоси экан деган фикрга ишонч ҳосил қилайлик, яъни $\bar{x}_T$ нинг математик кутилмаси $\bar{x}_Б$ га тенг эканлигини кўрсатамиз. $\bar{x}_T$ ни тасодифий миқдор ва x_1, x_2, ... , x_n ларни боғлиқмас, бир хил тақсимланган тасодифий миқдорлар сифатида қараймиз. Бу тасодифий миқдорлар бир хил тақсимланган бўлгани учун улар бир хил сонли тавсифларга, хусусан, бош тўплам X белгисининг матема–тик кутилмасига тенг бўлган бир хил математик кутилмага эга.

Шунга асосан, 6.2–хоссадан, 6.2–натижадан ҳамда (12.5) ва (12.6) формулалардан фойдаланиб,

$$M(\bar{x}_T) = \bar{x}_Б \qquad (12.9)$$

ни оламиз.

9.1–натижадан фойдаланиб, ўртача танланма қиймат бош ўртача қийматнинг асосли баҳоси ҳам эканлигини осонгина кўрсатиш мумкин.

Бош ва танланма тўпламлар миқдорий белгилари қийматларининг ўзларининг ўртача қийматлари атрофидаги тарқоқлигини тавсифлаш учун жамланма тавсифлар – мос равишда бош ва танланма дисперсиялар ҳамда ўртача квадратик четланишлар ки–ритилади.

$D_Б$ *бош дисперсия* деб бош тўплам белгиси қийматларининг уларнинг ўртача қиймати $\bar{x}_Б$ дан четланишлари квадратларининг ўрта арифметик қийматига айтилади.

Агар N ҳажмли бош тўплам белгисининг барча x_1, x_2, ... , x_N қийматлари турлича бўлса, у ҳолда бош дисперсия

$$D_Б = \left(\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}_Б)^2 \right) \Big/ N \qquad (12.10)$$

га тенг бўлади.

Белгининг x_1, x_2, ... , x_k қийматлари мос равишда N_1, N_2, ... , N_k частоталарга эга ва бунда $N_1 + N_2 + \ldots + N_k = N$ бўлган тақдирда эса бош дисперсия

$$D_Б = \left(\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_Б)^2 N_i \right) \Big/ N \qquad (12.11)$$

га тенг бўлади.

Бош ўртача квадратик четланиш деб бош дисперсиядан олинган квадрат илдизга айтилади:

$$\sigma_Б = \sqrt{D_Б}\,. \qquad (12.12)$$

1–мисол. Бош тўплам

12.1 – ж а д в а л

x_i	2	4	5	6
N_i	8	9	10	3

тақсимот жадвали билан берилган. Бош дисперсия ва бош ўртача квадратик четланиш топилсин.

Ечиш. Бош ўртача қийматни топамиз:

$$\bar{x}_Б = \frac{2\cdot 8 + 4\cdot 9 + 5\cdot 10 + 6\cdot 3}{8+9+10+3} = \frac{120}{30} = 4 .$$

Бош дисперсияни топамиз:

$$D_Б = \frac{(2-4)^2\cdot 8 + (4-4)^2\cdot 9 + (5-4)^2\cdot 10 + (6-4)^2\cdot 3}{30} = \frac{54}{30} = 1{,}8 .$$

Бош ўртача квадратик четланишни топамиз:

$$\sigma_Б = \sqrt{D_Б} = \sqrt{1{,}8} \approx 1{,}34 .$$

D_T *танланма дисперсия* деб танланма тўплам белгисининг кузатиладиган қийматларининг уларнинг ўртача қиймати $\bar{x}_T$ дан четланишлари квадратларининг ўрта арифметик қийматига айти–лади.

Агар n ҳажмли танланма белгисининг барча x_1, x_2, ... , x_n қийматлари турлича бўлса, у ҳолда танланма дисперсия

$$D_T = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}_T\right)^2\right)\Big/ n \qquad (12.13)$$

га тенг бўлади.

Белгининг x_1, x_2, ... , x_k қийматлари мос равишда n_1, n_2, ... , n_k частоталарга эга ва бунда $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ бўлган тақдир–да эса танланма дисперсия

$$D_T = \left(\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \bar{x}_T\right)^2 n_i\right)\Big/ n \qquad (12.14)$$

тенг бўлади.

Танланма ўртача квадратик четланиш деб танланма дис–персиядан олинган квадрат илдизга айтилади:

$$\sigma_T = \sqrt{D_T} . \qquad (12.15)$$

2–мисол. Танланма тўплам

12.2 – ж а д в а л

x_i	1	2	3	4
N_i	20	15	10	5

тақсимот жадвали билан берилган. Танланма дисперсия ва танланма ўртача квадратик четланиш топилсин.

Ечиш. Ўртача танланма қийматни топамиз:

$$\bar{x}_T = \frac{1\cdot 20 + 2\cdot 15 + 3\cdot 10 + 4\cdot 5}{20+15+10+5} = \frac{100}{50} = 2 .$$

Танланма дисперсияни топамиз:

$$D_B = \frac{(1-2)^2\cdot 20 + (2-2)^2\cdot 15 + (3-2)^2\cdot 10 + (4-2)^2\cdot 5}{50} = \frac{50}{50} = 1.$$

Танланма ўртача квадратик четланишни топамиз:

$$\sigma_T = \sqrt{D_T} = \sqrt{1} = 1.$$

Дисперсияларни

$$D_Б = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)\Big/ N - \left(\bar{x}_Б\right)^2, \qquad (12.16)$$

$$D_Б = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 N_i\right)\Big/ N - \left(\bar{x}_Б\right)^2, \qquad (12.17)$$

$$D_T = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\Big/ n - \left(\bar{x}_T\right)^2 \qquad (12.18)$$

ва

$$D_T = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i\right)\Big/ n - \left(\bar{x}_T\right)^2 \qquad (12.19)$$

формулалардан фойдаланиб ҳисоблаш қулайроқ бўлади.

Энди танланмадаги маълумотлар бўйича номаълум $D_Г$ бош дисперсияни баҳолаш талаб этилган бўлсин. D_T танланма дисперсия $D_Г$ нинг силжиган баҳоси бўлади, чунки

$$M\left(D_T\right) = \frac{n-1}{n} D_Б\,. \qquad (12.20)$$

Бош дисперсиянинг баҳоси сифатида D_B ни $n/(n-1)$ касрга кўпайтириш натижасида ҳосил қилинган s^2 *тузатилган дисперсия* олинган тақдирда эса у бош дисперсиянинг силжимаган баҳоси бўлади. Ҳақиқатан, (12.20) ни ҳисобга олган ҳолда

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_T = \frac{n}{n-1}\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-\bar{x}_T\right)^2 n_i\right)}{n} = \left(\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-\bar{x}_T\right)^2 n_i\right)\Big/(n-1) \qquad (12.21)$$

ва

$$M\left(s^2\right) = M\left(\frac{n}{n-1} D_B\right) = \frac{n}{n-1} M\left(D_B\right) = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n} D_Г = D_Г \qquad (12.22)$$

ларни ҳосил қиламиз.

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Номаълум параметрнинг статистик баҳоси деб нимага айтила–ди ва у қандай муҳим хоссаларга эга бўлиши мумкин?
2. Силжимаган баҳо нима ва унинг киритилиши нима билан асосланади?

3. Эффектив баҳо нима ва унинг киритилишининг зарурияти нимада?
4. Силжиган баҳо ва асосли баҳо деб нимага айтилади?
5. Бош ўртача қиймат нима ва у қайси формулалар бўйича ҳисобланади?
6. Ўртача танланма қиймат деб нимага айтилади ва у қайси формулалар бўйича ҳисобланади?
7. Ўртача танланма қиймат бош ўртача қийматнинг қандай баҳоси бўлади?
8. Бош дисперсия нима ва у қайси формулалар бўйича ҳисобланади?
9. Танланма дисперсия деб нимага айтилади ва у қайси формулалар бўйича ҳисобланади?
10. Бош ўртача квадратик четланиш ва танланма ўртача квадратик четланиш нима, улар ҳамда бош ва танланма дисперсиялар нима учун киритилади?
11. Дисперсияларни қайси формулалар бўйича ҳисоблаш қулайроқ?
12. Нима бош дисперсиянинг силжимаган баҳоси бўлади?

Таянч иборалар:

Номаълум параметрнинг статистик баҳоси, силжимаган баҳо, силжиган баҳо, эффектив баҳо, асосли баҳо, бош ўртача қиймат, ўртача танланма қиймат, бош дисперсия, бош ўртача квадратик четланиш, танланма дисперсия, танланма ўртача квадратик четланиш, тузатилган дисперсия.

14–мавзу. Интервалли баҳолар. Ишончлилик интервали. Нормал тақсимотнинг номаълум параметрлари учун ишончлилик интерваллари

Режа:

1. Баҳонинг аниқлиги, ишончлилик, ишончлилик интервали.
2. Нормал тақсимотнинг ўртача квадратик четланиши маълум бўлганда математик кутилмасини баҳолаш учун ишончлилик интервали.
3. Нормал тақсимотнинг ўртача квадратик четланиши номаълум бўлганда математик кутилмасини баҳолаш учун ишончлилик интервали.
4. Нормал тақсимотнинг ўртача квадратик четланишини баҳолаш учун ишончлилик интервали.

Параметрларни баҳолашнинг иккита усули мавжуд: нуқтавий ва интервалли. Нуқтавий усуллар фақат атрофида баҳоланаётган номаълум параметр жойлашган нуқтани кўрсатади. Интервалли усуллар ёрдамида параметрнинг номаълум қиймати маълум бир эҳтимоллик билан ётадиган интервални топиш мумкин.

Нуқтавий баҳо деб битта сон билан аниқланадиган баҳога айтилади. Танланманинг ҳажми кичик бўлган ҳолда нуқтавий баҳо баҳоланаётган параметрдан анча фарқ қилиши, яъни қўпол хатоларга олиб келиши мумкин. Шу сабабга кўра танланма ҳажми унча катта бўлмаганда интервалли баҳолардан фойдаланиш лозим.

Интервалли баҳо деб иккита сон – интервалнинг учлари билан аниқланадиган баҳога айтилади. Интервалли баҳолар баҳоларнинг аниқлиги ва ишончлилигини баҳолашга имкон беради.

Танланма маълумотлари бўйича топилган $\overline{\theta}$ статистик тавсиф номаълум θ параметрнинг баҳоси бўлиб хизмат қилсин. Агар $\delta > 0$ ва $\left|\theta - \overline{\theta}\right| < \delta$ бўлса, у ҳолда δ қанчалик кичик бўлса, $\overline{\theta}$ баҳо θ параметрни шунчалик аниқ тавсифлайди. *Баҳонинг аниқлиги* δ мусбат сон билан тавсифланади.

Бироқ $\overline{\theta}$ баҳо $\left|\theta - \overline{\theta}\right| < \delta$ тенсизликни қаноатлантиради деб қатъий даъво қилиш мумкин эмас. Статистик усуллар фақат бу тенгсизлик амалга ошадиган эҳтимоллик ҳақидагина гапиришга имкон беради.

θ нинг $\overline{\theta}$ бўйича баҳоланишининг *ишончлилиги (ишончлилик эҳтимоллиги)* деб $\left|\theta - \overline{\theta}\right| < \delta$ тенгсизлик амалга ошадиган γ эҳтимолликка айтилади, яъни

$$P\left(\left|\theta - \overline{\theta}\right| < \delta\right) = \gamma \qquad (13.1)$$

бўлади. γ сифатида бир сонига яқин бўлган сон олинади.

$\left|\theta - \overline{\theta}\right| < \delta$ тенгсизликдан

$$\overline{\theta} - \delta < \theta < \overline{\theta} + \delta \qquad (13.2)$$

қўш тенгсизликни осонгина олиш мумкин. У ҳолда (13.1) муносабат

$$P\left(\overline{\theta} - \delta < \theta < \overline{\theta} + \delta\right) = \gamma \qquad (13.3)$$

кўринишни олади. Бу муносабат қуйидагини билдиради: $(\overline{\theta} - \delta,\ \overline{\theta} + \delta)$ интервал номаълум θ параметрни ўз ичига олиши (қоплаши)нинг эҳтимоллиги γ га тенг.

$(\overline{\theta} - \delta,\ \overline{\theta} + \delta)$ интервал номаълум θ параметрни берилган γ ишончлилик билан қопловчи *ишончлилик интервали* деб аталади.

Бош тўпламнинг X миқдорий белгиси нормал тақсимланган бўлиб, бу тақсимотнинг σ ўртача квадратик четланиши м а ъ л у м бўлсин. Номаълум a математик кутилмани $\bar{x}$ ўртача танланма қиймат бўйича баҳолаш талаб қилинади. Ўз олдимизга a параметрни γ ишончлилик билан қопловчи ишончлилик интервалларини топиш вазифасини қўямиз.

$\bar{x}$ ўртача танланма қийматни $\overline{X}$ тасодифий миқдор сифатида ($\bar{x}$ танланмадан танланмага ўтганда ўзгаради), белгининг $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ танланма қийматларини эса бир хил тақсимланган $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ тасодифий миқдорлар сифатида (бу сонлар ҳам танланма–дан танланмага ўтганда ўзгаради) қараймиз. Бу миқдорлардан ҳар бирининг математик кутилмаси a га ва ўртача квадратик четла–ниши σ га тенг.

У ҳолда, 6.2–хоссадан, 6.2–натижадан ҳамда (12.6) формуладан фойдаланиб, $\overline{X}$ тақсимотининг параметрлари

$$M(\overline{X}) = a, \qquad \sigma(\overline{X}) = \sigma/\sqrt{n} \qquad (13.4)$$

эканлигини кўрамиз.

$$P\left(\left|\overline{X} - a\right| < \delta\right) = \gamma \qquad (13.5)$$

муносабат бажарилишини талаб қиламиз, бу ерда γ — берилган ишончлилик.

X ни $\bar{X}$ билан ва σ ни $\sigma(\bar{X})=\sigma/\sqrt{n}$ билан алмаштирган ҳолда (8.11) формуладан фойдаланиб,

$$P\left(\left|\bar{X}-a\right|<\delta\right)=2\Phi(\delta\sqrt{n}/\sigma)=2\Phi(t) \qquad (13.6)$$

муносабатни олиш қийин эмас, бу ерда $t=\delta\sqrt{n}/\sigma$.

Охирги тенгликдан $\delta=t\sigma/\sqrt{n}$ ни топиб,

$$P\left(\left|\bar{X}-a\right|<t\sigma/\sqrt{n}\right)=2\Phi(t) \qquad (13.7)$$

ни ёзиш мумкин.

Умумийлик учун ўртача танланма қийматни яна $\bar{x}$ орқали белгилаб, (13.5) – (13.7) муносабатлардан

$$\Phi(t)=\gamma/2 \qquad (13.8)$$

ва

$$P\left(\bar{x}-t\sigma/\sqrt{n}<a<\bar{x}+t\sigma/\sqrt{n}\right)=\gamma \qquad (13.9)$$

муносабатларни оламиз.

Демак, $(\bar{x}-t\sigma/\sqrt{n},\ \ \bar{x}+t\sigma/\sqrt{n})$ ишончлилик интервали номаълум a параметрни қоплашини γ ишончлилик билан даъво қилиш мумкин, бунда баҳонинг аниқлиги $\delta=t\sigma/\sqrt{n}$ га тенг, t сони эса (13.8) тенгликдан Лаплас функциясининг жадвали бўйи–ча аниқланади.

1–мисол. X тасодифий миқдор $\sigma=3$ ўртача квадратик четланиши маълум бўлган нормал тақсимотга эга. Агар танланма ҳажми $n=36$ бўлиб, баҳонинг $\gamma=0{,}95$ ишончлилиги берилган бўлса, номаълум a математик кутилмани $\bar{x}$ ўртача танланма қиймат бўйича баҳолаш учун ишончлилик интервали топилсин.

Ечиш. t ни топамиз. (13.8) муносабатдан $\Phi(t)=0{,}475$ ни оламиз ва Лаплас функциясининг жадвалидан $t=1{,}96$ ни топамиз.

Баҳонинг аниқлигини топамиз:

$$\delta=t\sigma/\sqrt{n}=(1{,}96\cdot 3)/\sqrt{36}=0{,}98\,.$$

Ишончлилик интервали $(\bar{x}-0{,}98;\ \bar{x}+0{,}98)$ бўлади. Масалан, агар $\bar{x}=4{,}1$ бўлса, у ҳолда ишончлилик интервали қуйидаги ишончлилик чегараларига эга бўлади:

$$\bar{x}-0{,}98=4{,}1-0{,}98=3{,}12\,; \quad \bar{x}+0{,}98=4{,}1+0{,}98=5{,}08\,.$$

Бу ёғига бизга «хи квадрат» ва Стьюдент тақсимотлари керак бўлади.

X_i $(i=1,2,\ldots,n)$ лар нормал боғлиқмас тасодифий миқдорлар бўлиб, улардан ҳар бирининг математик кутилмаси нолга, ўртача квадратик четланиши эса бирга тенг бўлсин. У ҳолда бу миқдорлар квадратларининг $\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ йиғиндиси эркинлик даражалари $k=n$ та бўлган χ^2 («хи квадрат») *қонуни бўйича тақсимланган*.

Бу тақсимотнинг зичлик функцияси

$$f(x)=\begin{cases} x\le 0 \quad да & 0 \\ x>0 \quad да & \dfrac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}e^{-x/2}x^{(k/2)-1} \end{cases} \qquad (13.10)$$

кўринишга эга, бу ерда $\Gamma(x)=\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ — гамма–функция.

Бу ердан «хи квадрат» тақсимоти битта параметр – эркинлик даражалари сони $k=n$ билан аниқланиши кўриниб туради.

Сўнгра, Z нормал тасодифий миқдор бўлиб, $M(Z)=0$ ва $\sigma(Z)=1$ бўлсин, V эса Z га боғлиқ бўлмаган, эркинлик даражалари $k=n$ та бўлган χ^2 қонуни бўйича тақсимланган тасодифий миқдор бўлсин. У ҳолда

$$T=\frac{Z}{\sqrt{V/k}} \qquad (13.11)$$

тасодифий миқдор t *–тақсимот* ёки эркинлик даражалари $k=n$ та бўлган *Стьюдент тақсимоти* деб аталувчи тақсимотга эга бўлади.

Энди бош тўпламнинг нормал тақсимланган X миқдорий белгисининг номаълум a математик кутилмасини бу тақсимотнинг σ ўртача квадратик четланиши н о м а ъ л у м бўлганда $\bar{x}$ ўртача танланма қиймат бўйича баҳолаш талаб қилинсин. Ўз олдимизга a параметрни γ ишончлилик билан қопловчи ишончлилик интервал–ларини топиш вазифасини қўямиз.

Эркинлик даражалари $k=n-1$ та бўлган Стьюдент тақсимотига эга бўлган

$$T=\frac{\bar{X}-a}{s/\sqrt{n}} \qquad (13.12)$$

тасодифий миқдорни кўриб чиқайлик. Бу ерда $\bar{X}$ — танланма ўртача қиймат, s — «тузатилган» ўртача квадратик четланиш, n — танланма ҳажми.

Бу тасодифий миқдор тақсимотининг зичлик функцияси

$$S(t,n)=B_n\left[1+\frac{t^2}{n-1}\right]^{-n/2} \qquad (13.13)$$

га тенг, бунда $B_n=\dfrac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma((n-1)/2)}$. Бу ердан (13.12) тасодифий миқдорнинг тақсимоти n параметр – танланма ҳажми билан аниқланиши ва номаълум a ва σ параметрларга боғлиқ эмаслиги кўриниб турибди.

$S(t,n)$ функция t бўйича жуфт бўлгани учун

$$\left|\frac{\bar{X}-a}{s/\sqrt{n}}\right|<t_\gamma \qquad (13.14)$$

тенгсизлик рўй беришининг эҳтимоллиги 7.1–теоремага асосан

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-a}{s/\sqrt{n}}\right|<t_\gamma\right)=2\int_0^{t_\gamma}S(t,n)\,dt=\gamma \qquad (13.15)$$

формуладан аниқланади. (13.14) тенгсизликни унга тенг кучли бўлган қўш тенгсизлик билан алмаштириб,

$$P\left(\bar{x}-t_\gamma\, s/\sqrt{n}<a<\bar{x}+t_\gamma\, s/\sqrt{n}\right)=\gamma \qquad (13.16)$$

муносабатни оламиз.

Шундай қилиб, Стьюдент тақсимотидан фойдаланиб, номаълум a параметрни γ ишончлилик билан қопловчи $(\bar{x}-t_\gamma\, s/\sqrt{n},\ \ \bar{x}+t_\gamma\, s/\sqrt{n})$ ишончлилик интервалини топдик. Махсус жадвалдан берилган n ва γ бўйича t_γ ни топиш мумкин.

2–мисол. Бош тўпламнинг X миқдорий белгиси нормал тақсимланган. $n=16$ ҳажмли танланма бўйича $\bar{x}=20{,}2$ ўртача танланма қиймат ва $s=0{,}8$ «тузатилган» ўртача квадратик четланиш топилган. Номаълум a математик кутилма $\gamma=0{,}95$ ишончлилик билан ишончлилик интервали ёрдамида баҳолансин.

Ечиш. t_γ ни топамиз. Жадвалдан фойдаланиб, $\gamma=0{,}95$ ва $n=16$ бўйича $t_\gamma=2{,}13$ ни топамиз.

Ишончлилик чегараларини топамиз:

$$\bar{x}-t_\gamma\, s/\sqrt{n}=20{,}2-2{,}13\cdot 0{,}8/\sqrt{16}=19{,}774,$$

$$\bar{x}-t_\gamma\, s/\sqrt{n}=20{,}2-2{,}13\cdot 0{,}8/\sqrt{16}=19{,}774.$$

Демак, 0,95 ишончлилик билан номаълум a параметр $19{,}774<a<20{,}626$ ишончлилик интервалининг ичида жойлашган.

Бош тўпламнинг X миқдорий белгиси нормал тақсимланган бўлсин. Номаълум σ бош ўртача квадратик четланишни s «тузатилган» ўртача квадратик четланиш бўйича баҳолаш талаб қилина–ди. Ўз олдимизга σ параметрни γ ишончлилик билан қопловчи ишончлилик интервалларини топиш вазифасини қўямиз.

$$P\left(|\sigma-s|<\delta\right)=\gamma \qquad (13.17)$$

муносабат ёки унга тенг кучли бўлган

$$P\left(s-\delta<\sigma<s+\delta\right)=\gamma \qquad (13.18)$$

муносабат бажарилишини талаб қиламиз, бу ерда γ – берилган ишончлилик.

$\delta/s=q$ деб олиб,

$$s-\delta<\sigma<s+\delta \qquad (13.19)$$

қўш тенгсизликдан

$$s(1-q)<\sigma<s(1+q) \qquad (13.20)$$

тенгсизликни оламиз.

σ параметрни қопловчи ишончлилик интервалини топиш учун фақат

q ни топиш қолди. Шу мақсадда

$$\chi = (s/\sigma)\sqrt{n-1} \qquad (13.21)$$

тасодифий миқдорни қараймиз, бу ерда n — танланма ҳажми (бу тасодифий миқдор $s^2(n-1)/\sigma^2$ тасодифий миқдор эркинлик даражалари $n-1$ та бўлган χ^2 қонуни бўйича тақсимланган бўлгани учун χ орқали белгиланган).

χ тасодифий миқдор тақсимотининг зичлик функцияси

$$R(\chi, n) = \frac{\chi^{n-2} e^{-\chi^2/2}}{2^{(n-3)/2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \qquad (13.22)$$

кўринишга эга. Бу тақсимот баҳоланаётган σ параметрга боғлиқ бўлмасдан, фақат танланма ҳажми n га боғлиқ бўлади.

(13.20) тенгсизликдан

$$\frac{1}{s(1+q)} < \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{s(1-q)} \qquad (13.23)$$

тенгсизликни олиш мумкин. Бу тенгсизликнинг ҳамма ҳадларини $s\sqrt{n-1}$ га кўпайтириб,

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \frac{s\sqrt{n-1}}{\sigma} < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}$$

ни ёки

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q} \qquad (13.24)$$

ни оламиз.

7.1–теоремадан фойдаланиб, шу тенгсизлик, бинобарин, унга тенг кучли бўлган (13.20) тенгсизлик рўй беришининг эҳтимоллиги

$$\int_{\sqrt{n-1}/(1+q)}^{\sqrt{n-1}/(1-q)} R(\chi, n)d\chi = \gamma \qquad (13.25)$$

га тенг эканлигини кўрамиз. Шу тенгламадан берилган n ва γ бўйича q ни топиш мумкин. Бироқ амалиётда q махсус жадвалдан топилади.

s ни танланма бўйича ҳисоблаб ва q ни жадвал бўйича топиб, номаълум σ параметрни берилган γ ишончлилик билан қопловчи изланаётган $(s(1-q),\quad s(1+q))$ ишончлилик интервалини оламиз.

3–мисол. Бош тўпламнинг X миқдорий белгиси нормал тақсимланган. $n = 25$ ҳажмли танланма бўйича $s = 0{,}8$ «тузатилган» ўртача квадратик четланиш топилган. σ бош ўртача квадратик четланишни $\gamma = 0{,}95$ ишончлилик билан қопловчи ишончлилик интервали топилсин.

<u>Ечиш</u>. Махсус жадвалдан берилган $\gamma = 0{,}95$ ва $n = 25$ бўйича $q = 0{,}32$ ни топамиз.

Изланаётган ишончлилик интервалини топамиз:

$$0{,}8(1-0{,}32) < \sigma < 0{,}8(1+0{,}32)$$

ёки

$$0{,}544 < \sigma < 1{,}056 .$$

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Параметрларни баҳолашнинг қандай усуллари ва улар билан боғлиқ қайси баҳоларни биласиз?
2. Баҳонинг аниқлиги ва ишончлилик (ишончлилик эҳтимоллиги) нима?
3. Ишончлилик интервали деб нимага айтилади?
4. Нормал тақсимотнинг ўртача квадратик четланиши маълум бўлганда математик кутилмасини баҳолаш учун ишончлилик интервали қандай топилади?
5. «хи квадрат» ва Стьюдент тақсимотлари ҳақида нима биласиз?
6. Нормал тақсимотнинг ўртача квадратик четланиши номаълум бўлганда математик кутилмасини баҳолаш учун ишончлилик интервали қандай топилади?
7. Нормал тақсимотнинг ўртача квадратик четланишини баҳолаш учун ишончлилик интервали қандай топилади?

Таянч иборалар:

Нуқтавий баҳо, интервалли баҳо, баҳонинг аниқлиги, ишончлилик (ишончлилик эҳтимоллиги), ишончлилик интервали, нормал тақсимотнинг ўртача квадратик четланиши маълум бўлганда математик кутилмасини баҳолаш учун ишончлилик интервали, «хи квадрат» тақсимоти, Стьюдент тақсимоти, нормал тақсимотнинг ўртача квадратик четланиши номаълум бўлганда математик кутилмасини баҳолаш учун ишончлилик интервали, нормал тақсимотнинг ўртача квадратик четланишини баҳолаш учун ишончли–лик интервали.

15–мавзу.
Корреляциявий ва регрессиявий таҳлил элементлари

Режа:

1. Тасодифий миқдорлар орасидаги боғлиқлик турлари.
2. Шартли ўртача қийматлар ва регрессия танланма тенгламалари.
3. Регрессия танланма тенгламасини гуруҳланмаган маълумотлар бўйича топиш.
4. Корреляциявий жадвал.
5. Регрессия танланма тенгламасини гуруҳланган маълумотлар бўйича топиш.

Корреляциявий таҳлил ва регрессиявий таҳлил математик статистиканинг ёндош бўлимлари бўлиб, танланма маълумотлари бўйича тасодифий миқдорларнинг статистик боғлиқлигини ўрганиш учун мўлжалланган. Иккита тасодифий миқдор ё функционал, ё статистик боғлиқлик билан боғланган ёхуд боғлиқмас бўлиши мумкин.

Агар X тасодифий миқдорнинг ҳар бир мумкин бўлган қийматига Y тасодифий миқдорнинг битта мумкин бўлган қиймати мос келса, у ҳолда Y X *тасодифий аргументнинг функцияси* деб аталади:

$$Y = \varphi(X),$$

X ва Y тасодифий миқдорлар орасидаги боғлиқлик эса *функционал боғлиқлик* деб аталади.

Қатъий функционал боғлиқлик жуда кам ҳолларда мавжуд бўлади, чунки иккала тасодифий миқдор ҳам ёки уларнинг биттаси тасодифий омилларнинг таъсирига ҳам учрайди ва уларнинг ичида иккала миқдор учун умумий бўлганлари, яъни ҳам X га, ҳам Y га таъсир ўтказувчи омиллар ҳам бўлиши мумкин. Бу ҳолда статистик боғлиқлик вужудга келади. Битта тасодифий миқ–дорнинг ўзгариши бошқасининг тақсимоти ўзгаришига олиб ке–ладиган боғлиқлик *статистик боғлиқлик* деб аталади. Статистик боғлиқликнинг хусусий ҳоли корреляциявий боғлиқликдир.

Агар статистик боғлиқлик қаралаётган тасодифий миқдорлардан бирининг ўзгаришидан иккинчи тасодифий миқдор ўрта қиймати ўзгаришининг келиб чиқишида намоён бўлса, у ҳолда бундай статистик боғлиқлик *корреляциявий боғлиқлик* деб аталади.

X тасодифий миқдор билан функционал равишда эмас, балки корреляциявий ҳолда боғланган Y тасодифий миқдорга мисол келтирамиз. Y дон ҳосили, X эса ўғитлар миқдори бўлсин. Майдони бир хил бўлган ер участкаларидан тенг миқдорларда ўғит солинганда ҳар хил миқдорда ҳосил олинади, яъни Y миқдор X миқдорнинг функцияси бўлмайди. Бу ҳолат ёғингарчилик, ҳаво ҳарорати ва бошқа тасодифий омилларнинг таъсири билан тушунтирилади. Иккинчи томондан, ўртача ҳосил ўғитлар миқдорининг функцияси бўлади, яъни Y миқдор X миқдор билан корреляциявий боғлиқлик орқали боғланган.

$\bar{y}_x$ *шартли ўртача қиймат* деб Y нинг $X = x$ қийматга мос кузатилган қийматларининг ўрта арифметик қийматига айтилади. Масалан, агар $x_1 = 2$ да Y миқдор $y_1 = 5$, $y_2 = 6$, $y_3 = 10$ қийматларни қабул қилса, у ҳолда шартли ўртача қиймат $\bar{y}_{x_1} = (5 + 6 + 10)/3 = 7$ га тенг бўлади.

$\bar{x}_y$ *шартли ўртача қиймат* деб X нинг $Y = y$ қийматга мос кузатилган қийматларининг ўрта арифметик қийматига айтилади.

Таърифдан кўриниб турибдики, $\bar{y}_x$ шартли ўртача қиймат x нинг функцияси бўлади; бу функцияни $\bar{f}(x)$ орқали белгилаб,

$$\bar{y}_x = \bar{f}(x) \qquad (14.1)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенглама *Y нинг X га регрессия танланма тенгламаси* деб аталади; $\bar{f}(x)$ функция *Y нинг X га танланма регрессияси*, унинг графиги эса *Y нинг X га регрессия танланма чизиғи* деб аталади.

Шунга ўхшаш

$$\bar{x}_y = \bar{\varphi}(y) \qquad (14.2)$$

тенглама *X нинг Y га регрессия танланма тенгламаси* деб аталади; $\bar{\varphi}(y)$ функция *X нинг Y га танланма регрессияси*, унинг графиги эса *X нинг Y га регрессия танланма чизиғи* деб аталади.

Юқорида зикр этилганлар билан боғлиқ равишда корреляция назариясининг иккита масаласи вужудга келади. Биринчиси — $\bar{f}(x)$ ва $\bar{\varphi}(y)$ функцияларнинг кўриниши маълум бўлган шартда параметрларини кузатиш маълумотлари бўйича топиш. Иккинчиси — X ва Y тасодифий миқдорлар орасидаги боғлиқликнинг кучи (зичлиги)ни баҳолаш ҳамда бу миқдорлар орасидаги корреляциявий боғлиқликнинг мавжудлигини аниқлаш.

(X, Y) миқдорий белгилар тизими ўрганилаётган бўлсин. n та боғлиқмас тажриба натижасида n та (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... , (x_n, y_n) сонлар жуфтлиги олинди.

Кузатиш маълумотлари бўйича регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламасини топайлик. Аниқлик учун Y нинг X га регрессиясининг

$$\bar{y}_x = kx + b \qquad (14.3)$$

тенгламасини излаймиз.

X белгининг ҳар хил x қийматлари ва Y белгининг уларга мос y қийматлари бир мартадан кузатилгани учун маълумотларни гуруҳлашга зарурат йўқ. Шунингдек, шартли ўртача қиймат тушунчасидан фойдаланишга ҳам ҳожат йўқ, шунинг учун (14.3) тенгламани

$$y = kx + b \qquad (14.4)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг бурчак коэффициенти *танланма регрессия коэффициенти* деб аталади ва ρ_{yx} орқали белгиланади. Бинобарин, Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг қидирилаётган (14.4) тенгламасини

$$y = \rho_{yx} x + b \qquad (14.5)$$

кўринишда излаш лозим.

Шундай ρ_{yx} ва b параметрларни топиш керакки, уларда кузатиш маълумотлари бўйича ясалган (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... , (x_n, y_n) нуқталар xOy текисликда (14.5) тўғри чизиққа иложи борича яқинроқ ётсин.

Буни амалга ошириш учун *энг кичик квадратлар усулидан* фойдаланамиз. Бу усулдан фойдаланганда $Y_i - y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ четланишлар квадратларининг йиғиндиси минимал бўлиши керак, бу ерда Y_i – кузатилаётган x_i қийматга мос ҳамда (14.5) тенглама бў–йича ҳисобланган ордината, y_i эса – x_i га мос кузатилаётган ордината. Ҳар бир четланиш изланаётган параметрларга боғлиқ бўлгани учун четланишлар квадратларининг йиғиндиси ҳам шу параметрларнинг

$$F(\rho, b) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - y_i)^2 \qquad (14.6)$$

ёки

$$F(\rho, b) = \sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + b - y_i)^2 \qquad (14.7)$$

функцияси бўлади.

Минимумни топиш учун мос хусусий ҳосилаларни нолга тенглаймиз:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \rho} = 2\sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + b - y_i)\, x_i = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} (\rho x_i + b - y_i) = 0 \end{cases}. \qquad (14.8)$$

Бу иккита чизиқли тенгламалар системасини ρ ва b га нисбатан ечиб, изланаётган параметрларни топамиз:

$$\rho_{yx} = \left(n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \right) \Bigg/ \left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \right); \; (14.9)$$

$$b = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right) \Bigg/ \left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \right). \; (14.10)$$

Худди шунга ўхшаш равишда X нинг Y га регрессия тўғри чизиғининг

$$\bar{x}_y = \rho_{xy} y + c \qquad (14.11)$$

танланма тенгламасини топиш мумкин, бу ерда ρ_{xy} – X нинг Y га танланма регрессия коэффициенти.

14.1 – ж а д в а л

x_i	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
y_i	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

1–мисол. Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламаси $n=5$ та кузатиш маълумотлари (14.1–жадвал) бўйича топилсин.

Ечиш. Қуйидаги ҳисоблаш жадвалини тузамиз:

14.2 – жадвал

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1,00	1,25	1,00	1,250
1,50	1,40	2,25	2,100
3,00	1,50	9,00	4,500
4,50	1,75	20,25	7,875
5,00	2,25	25,00	11,250
$\sum_{i=1}^{n} x_i = 15$	$\sum_{i=1}^{n} y_i = 8{,}15$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 57{,}50$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 26{,}975$

Изланаётган параметрларни (14.9) ва (14.10) муносабатлар–дан топамиз:

$$\rho_{yx} = (5\cdot 26{,}975 - 15\cdot 8{,}15)/(5\cdot 57{,}5 - 15^2) = 0{,}202\ ;$$

$$b = (57{,}5\cdot 8{,}15 - 15\cdot 26{,}975)/(5\cdot 57{,}5 - 15^2) = 1{,}024\ .$$

Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг қидирилаётган тенгламасини топамиз:

$$y = 0{,}202\ x + 1{,}024\ .$$

Кузатишлар сони катта бўлганда x нинг айни бир қиймати n_x марта, y нинг айни бир қиймати n_y марта учраши, айни бир $(x,\ y)$ сонлар жуфтлиги n_{xy} марта кузатилиши мумкин. Шу са–бабли кузатиш маълумотларини гуруҳлаш лозим, бунинг учун n_x, n_y, n_{xy} частоталар ҳисобланади. Ҳамма гуруҳланган маълу–мотлар *корреляциявий жадвал* деб аталувчи жадвал (масалан, 14.3–жадвал) кўринишда ёзилади.

14.3 – жадвал

Y	X				n_y
	10	20	30	40	
0,4	5	—	7	14	26
0,6	—	2	6	4	12
0,8	3	19	—	—	22
n_x	8	21	13	18	$n=60$

14.3–корреляциявий жадвалнинг биринчи сатрида X белгининг кузатилаётган (10; 20; 30; 40) қийматлари, биринчи устунида эса Y белгининг кузатилаётган (0,4; 0,6; 0,8) қийматлари кўрсатилган. Сатрлар ва устунларнинг кесишмаларида белгиларнинг кузатилаётган қийматлар жуфтликларининг n_{xy} частоталари жойлашган.

Сўнгги устунда сатрлардаги частоталарнинг йиғиндилари, сўнгги сатрда эса устунлардаги частоталарнинг йиғиндилари ёзилган. Жадвалнинг пастки ўнг бурчагида жойлашган катакда барча частоталарнинг йиғиндиси, яъни жами кузатишлар сони n жойлаштирилган. $\sum n_x = \sum n_y = n$ эканлиги равшан.

Энди Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламаси параметрларини олинган маълумотларнинг сони катта (амалда изланаётган параметрларни қониқарли даражада баҳолаш учун камида 50 та кузатиш ўтказилиши керак), улар орасида такрорланадиганлари бор ҳамда бу маълумотлар корреляциявий жадвал кўринишда гуруҳланган бўлган ҳолда аниқлаймиз.

(14.8) системадан

$$\begin{cases} \rho_{yx}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \rho_{yx}\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \qquad (14.12)$$

системани олиш мумкин.

Соддалик учун $\sum x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sum y = \sum_{i=1}^{n} y_i$, $\sum x^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\sum xy = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ белгилашларни киритиб ҳамда $\bar{x} = \sum x / n$, $\bar{y} = \sum y / n$, $\overline{x^2} = \sum x^2 / n$ ва (x, y) сонлар жуфтлиги n_{xy} марта кузатилган деган фаразда $\sum xy = \sum n_{xy} xy$ муносабатлардан фойдаланиб, (14.12) дан

$$\begin{cases} n\overline{x^2}\rho_{yx} + n\bar{x}b = \sum n_{xy} xy \\ \bar{x}\rho_{yx} + b = \bar{y} \end{cases} \qquad (14.13)$$

ни оламиз.

(14.13) системанинг иккинчи тенгламасини $b = \bar{y} - \bar{x}\rho_{yx}$ кўринишга келтириб ва шу тенгликнинг ўнг томонини $\bar{y}_x = \rho_{yx} x + b$ тенгламага қўйиб,

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{yx}(x - \bar{x}) \qquad (14.14)$$

муносабатни оламиз.

(12.15) ва (12.19) муносабатларни ҳисобга олган ҳолда, (14.13) системадан ρ_{yx} танланма регрессия коэффициентини топамиз:

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\left(\overline{x^2} - (\bar{x})^2\right)} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x^2}.$$

Бу тенгликнинг иккала тарафини $\tilde{\sigma}_x / \tilde{\sigma}_y$ касрга кўпайтирамиз:

$$\rho_{yx} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_y} = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y}. \qquad (14.15)$$

(14.15) тенгликнинг ўнг тарафини r_T орқали белгилаймиз:

$$r_T = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y}. \qquad (14.16)$$

У ҳолда (14.15) дан

$$\rho_{yx} = r_T \cdot \frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x} \qquad (14.17)$$

ни оламиз. Ушбу тенгликнинг ўнг тарафини (14.14) га қўйиб, Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламасини пировардида

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_T \frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x}(x - \bar{x}) \qquad (14.18)$$

кўринишда оламиз.

Худди шунга ўхшаш равишда X нинг Y га регрессия тўғри чизиғининг

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_T \frac{\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_y}(y - \bar{y}) \qquad (14.19)$$

танланма тенгламасини топиш мумкин.

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Корреляциявий ва регрессиявий таҳлил нимани ўрганади, тасодифий миқдорлар қандай боғланган бўлиши мумкин, тасодифий аргументнинг функцияси ва функционал боғлиқлик ни–мани англатади?
2. Статистик боғлиқлик ва корреляциявий боғлиқлик ҳақида нима биласиз?
3. Шартли ўртача қиймат, регрессия танланма тенгламаси, танланма регрессия, регрессия танланма чизиғи нима ва корреляция назариясининг қайси иккита масаласини биласиз?
4. Регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламаси гуруҳланмаган маълумотлар бўйича қандай кўринишда изланади ва танланма регрессия коэффициенти нима?
5. Энг кичик квадратлар усулининг моҳияти нимада ва унинг ёрдамида регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламаси қандай топилади?
6. Корреляциявий жадвал ҳақида нима биласиз?
7. Регрессия тўғри чизиғи танланма тенгламасининг параметрлари гуруҳланган маълумотлар бўйича қандай топилади?

Таянч иборалар:

Корреляциявий таҳлил, регрессиявий таҳлил, тасодифий аргументнинг функцияси, функционал боғлиқлик, статистик боғлиқлик, корреляциявий боғлиқлик, шартли ўртача қиймат, регрессия танланма тенгламаси, танланма регрессия, регрессия танланма чизиғи, корреляция назариясининг иккита масаласи, гуруҳланмаган маълумотлар бўйича регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламаси, танланма регрессия коэффициенти, энг кичик квад–ратлар усули, корреляциявий жадвал, гуруҳланган маълумотлар бўйича регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламаси.

16–мавзу. Танланма корреляция коэффициенти ва унинг хоссалари

Режа:

1. Корреляциявий момент ва корреляция коэффициенти.
2. Танланма корреляция коэффициенти.
3. Танланма корреляциявий нисбат.
4. Танланма корреляциявий нисбатнинг хоссалари.

X ва Y тасодифий миқдорларнинг μ_{xy} *корреляциявий моменти* деб шу тасодифий миқдорлар четланишлари кўпайтмасининг математик кутилмасига айтилади:

$$\mu_{xy} = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\}. \qquad (15.1)$$

Бу ердан осонгина

$$\mu_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y) \qquad (15.2)$$

муносабатни олиш мумкин.

X ва Y тасодифий миқдорларнинг r_{xy} *корреляция коэффициенти* деб корреляциявий моментнинг шу тасодифий миқдорлар ўртача квадратик четланишларининг кўпайтмасига нисбатига ай–тилади:

$$r_{xy} = \mu_{xy} / (\sigma_x \sigma_y). \qquad (15.3)$$

(15.2) муносабатдан боғлиқмас тасодифий миқдорларнинг корреляциявий моменти ва демак, корреляция коэффициенти нолга тенг эканлиги келиб чиқади.

Агар иккита X ва Y тасодифий миқдорларнинг корреляция коэффициенти нолдан фарқли бўлса, улар *корреляцияланган* деб аталади; агар иккита X ва Y тасодифий миқдорларнинг корреляция коэффициенти нолга тенг бўлса, улар *корреляцияланмаган* деб аталади.

Юқорида айтилганлардан боғлиқмас тасодифий миқдорлар доимо корреляцияланмаганлиги, иккита корреляцияланган тасодифий миқдорлар эса боғлиқ ҳам эканлиги келиб чиқади. Ҳақиқатан, агар корреляцияланган тасодифий миқдорлар боғлиқмас деб фараз қилсак, у ҳолда улар учун $\mu_{xy} = 0$ муносабат бажарилиши керак, бу эса корреляцияланган тасодифий миқдорлар учун доимо $\mu_{xy} \neq 0$ муносабат бажарилишига зиддир.

Иккинчи томондан, иккита боғлиқ тасодифий миқдорлар корреляцияланган ҳам, корреляцияланмаган ҳам бўлиши мумкин; корреляцияланмаган тасодифий миқдорлар боғлиқ ҳам, боғлиқмас ҳам бўлиши мумкин.

Агар X ва Y тасодифий миқдорлар боғлиқмас бўлса, у ҳолда корреляция коэффициенти $r_{xy}=0$ бўлади; агар $r_{xy}=\pm 1$ бўлса, у ҳолда X ва Y тасодифий миқдорлар чизиқли функционал боғлиқлик билан боғланган бўлади. Бу ердан корреляция коэффициенти X ва Y орасидаги чизиқли боғлиқликнинг кучи (зичлиги)ни ўлчаши келиб чиқади.

$$r_T=\frac{\sum n_{xy}xy-n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x\tilde{\sigma}_y} \qquad (15.4)$$

тенглик билан аниқланувчи r_T катталик *танланма корреляция коэффициенти* деб аталади. Бу ерда x ва y – X ва Y белгиларнинг варианталари (кузатилган қийматлари); n_{xy} – (x, y) варианталар жуфтлигининг частотаси; n – танланма ҳажми (барча частоталар йиғиндиси); $\tilde{\sigma}_x$, $\tilde{\sigma}_y$ – танланма ўртача квадратик четланишлар; $\bar{x}$, $\bar{y}$ – ўртача танланма қийматлар.

r_T танланма корреляция коэффициенти бош тўпламнинг r_{xy} корреляция коэффициентининг баҳоси бўлади. Шунинг учун ундан X ва Y катталиклар — миқдорий белгилар орасидаги чизиқли боғлиқликни ўлчаш учун ҳам фойдаланиш мумкин.

15.1 – ж а д в а л

Y	X						n_y
	10	20	30	40	50	60	
15	5	7	—	—	—	—	12
25	—	20	23	—	—	—	43
35	—	—	30	47	2	—	79
45	—	—	10	11	20	6	47
55	—	—	—	9	7	3	19
n_x	5	27	63	67	29	9	$n=200$

1–мисол. Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг танланма тенгламаси 15.1–корреляциявий жадвал маълумотлари бўйича топилсин.

Ечиш. Аввал танланма корреляция коэффициентини (15.4) формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$\bar{x}=(10\cdot 5+20\cdot 27+30\cdot 63+40\cdot 67+50\cdot 29+60\cdot 9)/200=35{,}75\ ;$$

$$\bar{y}=(15\cdot 12+25\cdot 43+35\cdot 79+45\cdot 47+55\cdot 19)/200=35{,}9\ ;$$

$$\overline{x^2}=(100\cdot 5+400\cdot 27+900\cdot 63+1600\cdot 67+2500\cdot 29+3600\cdot 9)/200=1400{,}5;$$

$$\overline{y^2}=(225\cdot 12+625\cdot 43+1225\cdot 79+2025\cdot 47+3025\cdot 19)/200=1395\ ;$$

$$\tilde{\sigma}_x=\sqrt{\overline{x^2}-(\bar{x})^2}=\sqrt{1400{,}5-1278{,}0625}\approx 11{,}07\,;$$

$$\tilde{\sigma}_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2} = \sqrt{1395 - 1288{,}81} \approx 10{,}30;$$

$$\sum n_{xy} xy = 5 \cdot 10 \cdot 15 + 7 \cdot 20 \cdot 15 + 20 \cdot 20 \cdot 25 + 23 \cdot 30 \cdot 25 + 30 \cdot 30 \cdot 35 +$$
$$+ 47 \cdot 40 \cdot 35 + 2 \cdot 50 \cdot 35 + 10 \cdot 30 \cdot 45 + 11 \cdot 40 \cdot 45 + 20 \cdot 50 \cdot 45 +$$
$$+ 6 \cdot 60 \cdot 45 + 9 \cdot 40 \cdot 55 + 7 \cdot 50 \cdot 55 + 3 \cdot 60 \cdot 55 = 274350;$$

$$r_T = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y} = \frac{274350 - 200 \cdot 35{,}75 \cdot 35{,}9}{200 \cdot 11{,}07 \cdot 10{,}3} \approx 0{,}775 .$$

Энди топилган қийматларни (14.18) формулага қўямиз ва Y нинг X га регрессия тўғри чизиғининг

$$\bar{y}_x - 35{,}9 = 0{,}775 \cdot \frac{10{,}30}{11{,}07}(x - 35{,}75)$$

ёки пировардида

$$\bar{y}_x = 0{,}721\, x + 10{,}12$$

танланма тенгламасини оламиз.

Агар танланма етарлича катта ҳажмга эга ва бош тўпламни яхши тасвирласа (репрезентатив бўлса), у ҳолда белгилар орасидаги чизиқли боғлиқликнинг зичлиги ҳақида танланма маълумотлари бўйича олинган хулоса маълум даражада бош тўпламга ҳам қўлланилиши мумкин. Масалан, нормал тақсимланган бош тўпламнинг $r_Б$ корреляция коэффициентини ($n \geq 50$ да) баҳолаш учун

$$r_T - 3\frac{1 - r_T^2}{\sqrt{n}} \leq r_Б \leq r_T + 3\frac{1 + r_T^2}{\sqrt{n}}$$

формуладан фойдаланиш мумкин.

Шундай қилиб, танланма корреляция коэффициенти танланмадаги белгилар орасидаги чизиқли корреляциявий боғлиқликнинг зичлигини баҳолаш учун хизмат қилади. Чизиқли бўлмаган корреляциявий боғлиқликнинг зичлигини баҳолаш учун танланма корреляциявий нисбат тушунчаси киритилади.

Y нинг X га *танланма корреляциявий нисбати* деб

$$\eta_{yx} = \sigma_{\bar{y}_x} / \tilde{\sigma}_y \qquad (15.5)$$

нисбатга айтилади. Бу ерда

$$\sigma_{\bar{y}_x} = \sqrt{\left(\sum n_x (\bar{y}_x - \bar{y})^2\right) / n};$$
$$\tilde{\sigma}_y = \sqrt{\left(\sum n_y (y - \bar{y})^2\right) / n},$$

бўлиб, бунда n — танланма ҳажми (барча частоталар йиғиндиси); n_x – X белгининг x қиймати частотаси; n_y – Y белгининг y қиймати частотаси; $\bar{y}$ – Y белгининг умумий ўртача қиймати; $\bar{y}_x$ – Y белгининг шартли ўртача қиймати.

Худди шунга ўхшаш равишда X нинг Y га

$$\eta_{xy} = \sigma_{\bar{x}_y} / \tilde{\sigma}_x \qquad (15.6)$$

танланма корреляциявий нисбати аниқланади.

2–мисол. Қуйидаги корреляциявий жадвал маълумотлари бўйича η_{yx} топилсин:

15.2 – ж а д в а л

Y	X			n_y
	10	20	30	
15	4	28	6	38
25	6	—	6	12
n_x	10	28	12	$n = 50$
$\bar{y}_x$	21	15	20	

Ечиш. Аввал $\bar{y}$, $\tilde{\sigma}_y$ ва $\sigma_{\bar{y}_x}$ ни топамиз:

$$\bar{y} = (38 \cdot 15 + 12 \cdot 25)/50 = 17{,}4\,;$$

$$\tilde{\sigma}_y = \sqrt{[38 \cdot (15 - 17{,}4)^2 + 12 \cdot (25 - 17{,}4)^2]/50} \approx 4{,}27\,;$$

$$\sigma_{\bar{y}_x} = \sqrt{[10 \cdot (21 - 17{,}4)^2 + 28 \cdot (15 - 17{,}4)^2 + 12 \cdot (20 - 17{,}4)^2]/50} \approx 2{,}73$$

Энди шу қийматларнинг барчасини (15.5) формулага қўямиз ва η_{yx} ни топамиз:

$$\eta_{yx} = \sigma_{\bar{y}_x} / \tilde{\sigma}_y \approx 2{,}73/4{,}27 \approx 0{,}64\,.$$

Танланма корреляциявий нисбатнинг хоссаларини санаб ўтамиз.

15.1–хосса. *Танланма корреляциявий нисбат*

$$0 \le \eta_{yx} \le 1$$

қўш тенгсизликни қаноатлантиради.

15.2–хосса. *Агар* $\eta_{yx} = 0$ *бўлса, у ҳолда* Y *белги* X *белги билан корреляциявий боғлиқлик орқали боғланмаган.*

15.3–хосса. *Агар* $\eta_{yx} = 1$ *бўлса, у ҳолда* Y *белги* X *белги билан функционал боғлиқлик орқали боғланган.*

15.4–хосса. *Танланма корреляциявий нисбат танланма корреляция коэффициентининг абсолют қийматидан кичик эмас*: $\eta_{yx} \ge |r_T|$.

15.5–хосса. *Агар танланма корреляциявий нисбат танланма корреляция коэффициентининг абсолют қийматига тенг бўлса, у ҳолда аниқ чизиқли корреляциявий боғлиқлик ўринли бўлади.*

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Корреляциявий момент деб нима аталади ва корреляция коэффициенти деб нима аталади?

2. Корреляцияланган ва корреляцияланмаган тасодифий миқдорлар нима ҳамда тасодифий миқдорларнинг боғлиқлиги ва корреляцияланганлиги тушунчалари орасидаги боғланиш қандай?
3. Танланма корреляция коэффициенти ҳақида нима биласиз?
4. Танланма корреляциявий нисбат нима ва у нимага хизмат қилади?
5. Танланма корреляциявий нисбатнинг қайси хоссаларини биласиз?

Таянч иборалар:

Корреляциявий момент, корреляция коэффициенти, корреляцияланган тасодифий миқдорлар, корреляцияланмаган тасодифий миқдорлар, танланма корреляция коэффициенти, танланма корреляциявий нисбат.

17–мавзу. Статистик гипотезалар ва уларнинг таснифи. Статистик мезон

Режа:

1. Статистик гипотезалар ва уларнинг таснифи. Биринчи ва иккинчи тур хатолар.
2. Статистик мезон. Критик соҳа ва критик нуқталар.
3. Критик соҳаларни топиш. Мезон қуввати.
4. Иккита нормал бош тўпламнинг дисперсияларини таққослаш.
5. Иккита нормал бош тўпламнинг ўртача қийматларини таққослаш.

Бош тўпламнинг тақсимот қонунини аниқлаш талаб этилган бўлсин ва уни A деб атаймиз. Агар тақсимот қонуни номаълум, лекин у тайин кўринишга эга деб тахмин қилишга асос бор бўлса, у ҳолда бош тўплам A қонун бўйича тақсимланган деган гипотеза таклиф этилади. Шундай қилиб, ушбу гипотезада тахмин қилинаётган тақсимотнинг кўриниши ҳақида гап боради.

Тақсимот қонуни маълум, унинг параметрлари эса номаълум бўлган ҳол бўлиши мумкин. Агар номаълум Θ параметр тайин Θ_0 қийматга тенг деб тахмин қилишга асос бор бўлса, у ҳолда $\Theta = \Theta_0$ эканлиги ҳақидаги гипотеза таклиф этилади. Шундай қилиб, ушбу гипотезада маълум тақсимот параметрининг тахмин қилинаётган катталиги ҳақида гап боради.

Статистик гипотеза деб номаълум тақсимотнинг кўриниши ҳақидаги гипотезага ёки маълум тақсимотларнинг параметрлари ҳақидаги гипотезага айтилади. Масалан, қуйидаги гипотезалар статистик гипотезалар бўлади:

1) бош тўплам Пуассон қонуни бўйича тақсимланган;
2) иккита нормал тўпламнинг дисперсиялари ўзаро тенг.

Биринчи гипотезада номаълум тақсимотнинг кўриниши ҳақида, иккинчисида иккита маълум тақсимотнинг параметрлари ҳақида тахмин қилинган.

Нолинчи (асосий) гипотеза деб таклиф этилган H_0 гипотезага айтилади.

Конкурент (муқобил) гипотеза деб нолинчи гипотезага зид бўлган H_1

гипотезага айтилади.

Масалан, агар нолинчи гипотеза нормал тақсимотнинг мате–матик кутилмаси a 10 га тенг деган тахминдан иборат бўлса, у ҳолда конкурент гипотеза $a \neq 10$ деган тахминдан иборат бўлиши мумкин; яъни $H_0 : a = 10$; $H_1 : a \neq 10$.

Оддий гипотеза деб фақат битта тахминни ўз ичига олган гипотезага айтилади. Масалан, нормал тақсимотнинг (σ маълум) математик кутилмаси 3 га тенглигидан иборат H_0 гипотеза оддий гипотезадир.

Мураккаб гипотеза деб чекли ёки чексиз сондаги оддий гипотезалардан иборат гипотезага айтилади. Масалан, $\lambda > 5$ эканлигидан иборат бўлган мураккаб H гипотеза $H_i : \lambda = b_i$ кўринишдаги оддий гипотезаларнинг чексиз тўпламидан иборат, бу ерда b_i – 5 дан катта ихтиёрий сон.

Таклиф этилган гипотеза тўғри ёки нотўғри бўлиши мумкин, шунинг учун бу гипотезани (статистик усуллар билан амалга ошириладиган) *статистик текшириш* зарурати туғилади. Гипотезани статистик текшириш натижасида хатоларга йўл қўйилиши мумкин.

Биринчи тур хато тўғри гипотеза рад этилишидан иборат.

Иккинчи тур хато нотўғри гипотеза қабул қилинишидан иборат.

Нолинчи гипотезани текшириш учун аниқ ёки тақрибий тақсимоти маълум бўлган махсус танланган тасодифий миқдор ишлатилади. Бу тасодифий миқдор K орқали белгиланади ва *статистик мезон* (ёки оддийгина *мезон*) деб аталади.

Статистик мезонга мисол келтирамиз. Агар иккита нормал бош тўпламлар дисперсияларининг тенглиги ҳақидаги гипотеза текширилаётган бўлса, у ҳолда K мезон сифатида тузатилган танланма дисперсияларнинг

$$F = s_1^2 / s_2^2$$

нисбати қабул қилинади.

$K_{кузат}$ *кузатиладиган қиймат* деб мезоннинг танланмалар бўйича ҳисобланган қийматига айтилади. Масалан, агар иккита танланма бўйича $s_1^2 = 20$ ва $s_2^2 = 5$ тузатилган танланма дисперсиялар топилган бўлса, у ҳолда F мезоннинг кузатиладиган қиймати

$$F_{кузат} = s_1^2 / s_2^2 = 20/5 = 4$$

га тенг.

Тайинли мезон танланганидан сўнг унинг мумкин бўлган барча қийматлари тўплами иккита кесишмайдиган қисм тўпламларга ажратилади: улардан бири мезоннинг нолинчи гипотеза рад этиладиган қийматларини, иккинчиси эса бу гипотеза қабул қилинадиган қийматларини ўз ичига олади.

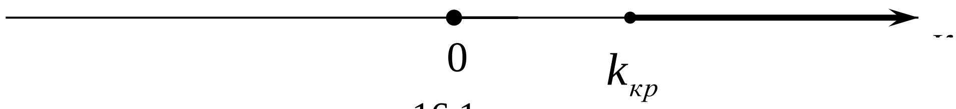
Критик соҳа деб мезоннинг нолинчи гипотеза рад этиладиган қийматлари тўпламига айтилади.

Гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси (жоиз қийматлар соҳаси) деб мезоннинг нолинчи гипотеза қабул қилинадиган қийматлари тўпламига айтилади.

k мезон бир ўлчовли тасодифий миқдор бўлгани учун унинг мумкин бўлган барча қийматлари бирор интервалга тегишли бўлади. Шунинг учун критик соҳа ҳам, гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси ҳам интерваллардан иборат бўлади ва демак, уларни ажратиб турадиган нуқталар мавжуд.

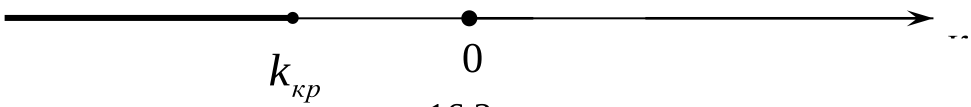
$k_{кр}$ *критик нуқталар* (чегаралар) деб критик соҳани гипотезанинг қабул қилиниш соҳасидан ажратиб турадиган нуқталарга айтилади.

Ўнг томонлама критик соҳа деб $K > k_{кр}$ тенгсизлик билан аниқланадиган критик соҳага айтилади, бу ерда $k_{кр}$ — мусбат сон (16.1–расм).



16.1 – расм.

Чап томонлама критик соҳа деб $K < k_{кр}$ тенгсизлик билан аниқланадиган критик соҳага айтилади, бу ерда $k_{кр}$ — манфий сон (16.2–расм).

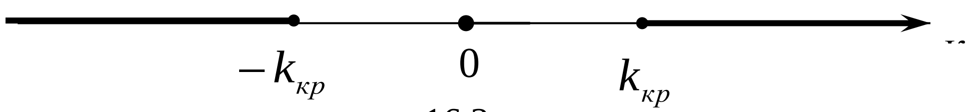


16.2 – расм.

Бир томонлама критик соҳа деб ўнг томонлама ёки чап томонлама критик соҳага айтилади.

Икки томонлама критик соҳа деб $K < k_1,\ K > k_2$ тенгсизликлар билан аниқланадиган критик соҳага айтилади, бу ерда $k_2 > k_1$.

Хусусан, агар критик нуқталар нолга нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда икки томонлама критик соҳа ($k_{кр} > 0$ деган фаразда) $K < -k_{кр}$, $K > k_{кр}$тенгсизликлар билан ёки уларга тенг кучли $|K| > k_{кр}$ тенгсизлик билан аниқланади (16.3–расм).



16.3 – расм.

Критик соҳани топиш учун критик нуқта (нуқталар)ни топиш етарли. Бундай нуқтани топиш учун эса етарлича кичик эҳтимоллик – *қийматдорлик даражаси* α берилади. Сўнгра нолинчи гипотеза ўринли эканлиги шартида K мезон критик соҳадан қийматлар қабул қилишининг эҳтимоллиги қабул қилинган қийматдорлик даражасига тенг бўлади деган талабдан келиб чи–

қиб $k_{кр}$ критик нуқта изланади.

Масалан, ўнг томонлама критик соҳа учун

$$P(K > k_{кр}) = \alpha \qquad (16.1)$$

муносабат, чап томонлама критик соҳа учун

$$P(K < k_{кр}) = \alpha \qquad (16.2)$$

муносабат, икки томонлама критик соҳа учун эса

$$P(K < k_1) + P(K > k_2) = \alpha \qquad (16.3)$$

муносабат бажарилиши керак.

Ҳар бир мезон учун тегишли жадваллар мавжуд бўлиб, улар бўйича (16.1) – (16.3) кўринишдаги талабларни қаноатлантирувчи критик нуқта топилади.

Агар мезон тақсимоти нолга нисбатан симметрик бўлса ҳамда нолга нисбатан симметрик $-k_{кр}$ ва $k_{кр}$ ($k_{кр} > 0$) нуқталарни танлаш учун асос бўлса, у ҳолда $P(K < -k_{кр}) = P(K > k_{кр})$ бўлади. Шу муносабатни ҳисобга олиб, (16.3) дан икки томонлама критик соҳа учун

$$P(K > k_{кр}) = \alpha/2 \qquad (16.4)$$

муносабатни оламиз.

Мезон қуввати деб конкурент гипотеза ўринли эканлиги шартида мезоннинг критик соҳага тушиши эҳтимоллигига айтилади. Бошқача айтганда, мезон қуввати конкурент гипотеза ўринли бўлганда нолинчи гипотеза рад этилишининг эҳтимоллигидир.

Гипотезани текшириш учун тайинли қийматдорлик даражаси қабул қилинган ва танланма тайин ҳажмга эга бўлсин. Агар β иккинчи тур хатонинг, яъни «нолинчи гипотеза қабул қилинган, аслида эса конкурент гипотеза ўринли эди» ҳодисасининг эҳтимоллиги бўлса, у ҳолда мезон қуввати $1-\beta$ га тенг.

$1-\beta$ қувват ортиб борсин; демак, иккинчи тур хатога йўл қўйишнинг эҳтимоллиги β камайиб боради. Бинобарин, қувват қанчалик катта бўлса, иккинчи тур хатонинг эҳтимоллиги шунчалик кичик бўлади.

Шундай қилиб, агар қийматдорлик даражаси танлаб олинган бўлса, у ҳолда критик соҳани мезон қуввати максимал бўладиган қилиб қуриш лозим. Бу иккинчи тур хатосини минималлашти–ришга имкон беради.

Бу ёғига бизга Фишер – Снедекор тақсимоти керак бўлади.

Агар U ва V лар эркинлик даражалари k_1 ва k_2 та бўлган χ^2 қонуни бўйича тақсимланган боғлиқмас тасодифий миқдорлар бўлса, у ҳолда

$$F = \frac{U/k_1}{V/k_2} \qquad (16.5)$$

катталик эркинлик даражалари k_1 ва k_2 та бўлган *Фишер – Снедекорнинг* F *тақсимоти* деб аталувчи тақсимотга эга бўлади.

Бу тақсимотнинг зичлик функцияси

$$f(x)=\begin{cases} x\le 0 \quad да & 0 \\ x>0 \quad да & C_0\dfrac{x^{(k_1-2)/2}}{(k_2+k_1x)^{(k_1+k_2)/2}} \end{cases},$$

кўринишда бўлади, бу ерда

$$C_0=\frac{\Gamma\left(\dfrac{k_1+k_2}{2}\right)k_1^{k_1/2}k_2^{k_2/2}}{\Gamma(k_1/2)\Gamma(k_2/2)}.$$

F тақсимот иккита параметр — эркинлик даражалари сонлари k_1 ва k_2 билан аниқланади.

X ва Y бош тўпламлар нормал тақсимланган бўлсин. Бу тўпламлардан олинган, ҳажмлари мос равишда n_1 ва n_2 га тенг бўлган боғлиқмас танланмалар бўйича s_X^2 ва s_Y^2 тузатилган танланма дисперсиялар топилган. Берилган α қийматдорлик даражасида тузатилган дисперсиялар бўйича кўрилаётган тўпламларнинг бош дисперсиялари ўзаро тенг эканлигидан иборат бўлган нолинчи гипотезани текшириш талаб қилинади:

$$H_0: D(X)=D(Y). \qquad (16.6)$$

Тузатилган дисперсиялар бош дисперсияларнинг силжимаган баҳолари, яъни

$$M(s_X^2)=D(X),\quad M(s_Y^2)=D(Y)$$

эканлигини ҳисобга олиб, нолинчи гипотезани

$$H_0: M(s_X^2)=M(s_Y^2) \qquad (16.7)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Амалиётда дисперсияларни таққослаш масаласи асбобларнинг, ускуналарнинг, ўлчаш усулларининг ўзининг ва ҳоказоларнинг аниқлигини таққослаш талаб этилганда юзага келади. Равшанки, ўлчаш натижаларининг энг кам тарқоқлигини, яъни энг кичик дисперсияни таъминлайдиган асбоб, ускуна ва усул маъқулроқдир.

Бош дисперсияларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш мезони сифатида тузатилган дисперсияларнинг каттароғининг кичикроғига нисбати, яъни

$$F=s_{кат}^2 \big/ s_{кич}^2 \qquad (16.8)$$

тасодифий миқдор қабул қилинади.

F катталик нолинчи гипотеза ўринли деган шартда эркинлик даражалари $k_1=n_1-1$ ва $k_2=n_2-1$ та бўлган Фишер – Снедекор тақсимотига эга, бу ерда n_1 ҳажмли танланма бўйича каттароқ тузатилган дисперсия ҳисобланган, n_2 ҳажмли танланма бўйича кичикроқ тузатилган дисперсия ҳисобланган.

Критик соҳа конкурент гипотезанинг кўринишига боғлиқ равишда қурилади.

Биринчи ҳол. Нолинчи гипотеза $H_0: D(X) = D(Y)$. Конкурент гипотеза $H_1: D(X) > D(Y)$.

Бу ҳолда ўнг томонлама критик соҳа нолинчи гипотеза ўринли деган тахминда F мезоннинг соҳага тушиш эҳтимоллиги қабул қилинган қийматдорлик даражасига тенг бўлиши талабига асосланиб қурилади:

$$P(F > F_{кр}(\alpha; k_1; k_2)) = \alpha. \qquad (16.9)$$

$F_{кр}(\alpha; k_1; k_2)$ критик нуқта Фишер – Снедекор тақсимотининг критик нуқталари жадвали бўйича топилади.

1–қоида. Берилган қийматдорлик даражасида нормал тўпламлар бош дисперсияларининг тенглиги ҳақидаги $H_0: D(X) = D(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: D(X) > D(Y)$ бўлганда текшириш учун тузатилган дисперсияларнинг каттароғининг ки–чикроғига нисбати, яъни

$$F_{кузат} = s^2_{кат} / s^2_{кич} \qquad (16.10)$$

ни ҳисоблаш керак ва Фишер – Снедекор тақсимотининг критик нуқталари жадвали, берилган α қийматдорлик даражаси ҳамда эркинлик даражалари сонлари k_1 ва k_2 бўйича $F_{кр}(\alpha; k_1; k_2)$ критик нуқтани топиш керак (k_1 — каттароқ тузатилган дисперсиянинг эркинлик даражалари сони).

Агар $F_{кузат} < F_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. Агар $F_{кузат} > F_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

1–мисол. X ва Y нормал бош тўпламлардан олинган иккита $n_1 = 12$ ва $n_2 = 15$ ҳажмли боғлиқмас танланмалар бўйича $s^2_X = 11{,}41$ ва $s^2_Y = 6{,}52$ тузатилган танланма дисперсиялар топилган. 0,05 қийматдорлик даражасида бош дисперсияларнинг тенглиги ҳақидаги $H_0: D(X) = D(Y)$ нолинчи гипотеза конкурент гипотеза $H_1: D(X) > D(Y)$ бўлганда текширилсин.

Ечиш. Тузатилган дисперсияларнинг каттароғининг кичикроғига нисбатини топамиз:

$$F_{кузат} = 11{,}41 / 6{,}52 = 1{,}75.$$

Конкурент гипотеза $D(X) > D(Y)$ кўринишда, шунинг учун критик соҳа ўнг томонлама бўлади.

Фишер – Снедекор тақсимотининг критик нуқталари жадвали, $\alpha = 0{,}05$ қийматдорлик даражаси ҳамда эркинлик даражалари сонлари $k_1 = 12 - 1 = 11$ ва $k_2 = n_2 - 1$ бўйича $F_{кр}(0{,}05;\ 11;\ 14) = 2{,}56$ критик нуқтани топамиз.

$F_{кузат} < F_{кр}$ бўлгани учун бош дисперсияларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Иккинчи ҳол. Нолинчи гипотеза $H_0: D(X) = D(Y)$. Конкурент гипотеза $H_1: D(X) \neq D(Y)$.

Бу ҳолда икки томонлама критик соҳа нолинчи гипотеза ўринли деган тахминда F мезоннинг соҳага тушиш эҳтимоллиги қабул қилинган α қийматдорлик даражасига тенг бўлиши талабига асосланиб қурилади.

Мезоннинг энг катта қуввати (конкурент гипотеза ўринли бўлганда мезоннинг критик соҳага тушиш эҳтимоллиги)га мезоннинг критик соҳанинг ҳар бир интервалига тушиш эҳтимоллиги $\alpha/2$ га тенг бўлганда эришилади.

Агар F_1 орқали критик соҳанинг чап чегараси ва F_2 орқали ўнг чегараси белгиланса, у ҳолда

$$P(F < F_1) = \alpha/2, \quad P(F > F_2) = \alpha/2 \qquad (16.11)$$

муносабатлар ўринли бўлиши керак.

Конкурент гипотеза $H_1: D(X) \neq D(Y)$ бўлганда F мезоннинг икки томонлама критик соҳага қабул қилинган α қийматдорлик даражасига тенг бўлган эҳтимоллик билан тушишини таъминлаш учун $F_2 = F_{кр}(\alpha/2; k_1; k_2)$ критик нуқтани топиш етарли.

2–қоида. Берилган қийматдорлик даражасида нормал тўпламлар бош дисперсияларининг тенглиги ҳақидаги $H_0: D(X) = D(Y)$ нолинчи гипотезани конкурент гипотеза $H_1: D(X) \neq D(Y)$ бўлганда текшириш учун тузатилган дисперсияларнинг каттароғининг кичикроғига нисбати, яъни (16.10) ни ҳисоблаш керак ва Фишер – Снедекор тақсимотининг критик нуқталари жадвали, берилган $\alpha/2$ (берилгандан икки маротаба кичик) қийматдорлик даражаси ҳамда эркинлик даражалари сонлари k_1 ва k_2 бўйича $F_{кр}(\alpha/2; k_1; k_2)$ критик нуқтани топиш керак ($\boldsymbol{k_1}$ – каттароқ тузатилган дисперсиянинг эркинлик даражалари сони).

Агар $F_{кузат} < F_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. Агар $F_{кузат} > F_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

2–мисол. X ва Y нормал бош тўпламлардан олинган иккита $n_1 = 10$ ва $n_2 = 18$ ҳажмли боғлиқмас танланмалар бўйича $s_X^2 = 1{,}23$ ва $s_Y^2 = 0{,}41$ тузатилган танланма дисперсиялар топилган. 0,1 қий–матдорлик даражасида бош дисперсияларнинг тенглиги ҳақидаги $H_0: D(X) = D(Y)$ нолинчи гипотеза конкурент гипотеза $H_1:\ D(X) \neq D(Y)$ бўлганда текширилсин.

Ечиш. Тузатилган дисперсияларнинг каттароғининг кичикроғига нисбатини топамиз:

$$F_{кузат} = 1{,}23/0{,}41 = 3.$$

Конкурент гипотеза $D(X) \neq D(Y)$ кўринишда, шунинг учун критик соҳа икки томонлама бўлади.

Фишер – Снедекор тақсимотининг критик нуқталари жадвали, берилгандан икки маротаба кичик қийматдорлик даражаси, яъни $\alpha/2 = 0{,}05$ ҳамда эркинлик даражалари сонлари $k_1 = 10 - 1 = 9$ ва $k_2 = 18 - 1 = 17$ бўйича $F_{кр}(0{,}05;\ 9;\ 17) = 2{,}50$ критик нуқтани топамиз.

$F_{кузат} > F_{кр}$ бўлгани учун бош дисперсияларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотеза рад этилади.

X ва Y бош тўпламлар нормал тақсимланган, уларнинг дисперсиялари маълум бўлсин. Бу тўпламлардан олинган, ҳажмлари мос равишда n ва m га тенг бўлган боғлиқмас танланмалар бўйича $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ ўртача танланма қийматлар топилган. Берилган α қийматдорлик даражасида ўртача танланма қийматлар бўйича кўрилаётган тўпламларнинг бош ўртача қийматлари (математик кутилмалари) ўзаро тенг эканлигидан иборат бўлган нолинчи гипотезани текшириш талаб қилинади:

$$H_0 : M(X) = M(Y). \qquad (16.12)$$

Ўртача танланма қийматлар бош ўртача қийматларнинг силжимаган баҳолари, яъни

$$M(\bar{x}) = M(X), \quad M(\bar{y}) = M(Y)$$

эканлигини ҳисобга олиб, нолинчи гипотезани

$$H_0 : M(\bar{x}) = M(\bar{y}) \qquad (16.13)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бош ўртача қийматларнинг тенглиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш мезони сифатида нормаланган

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}} \qquad (16.14)$$

нормал тасодифий миқдор қабул қилинади.

Критик соҳа конкурент гипотезанинг кўринишига боғлиқ равишда қурилади.

<u>Биринчи ҳол.</u> Нолинчи гипотеза $H_0 : M(X) = M(Y)$. Конкурент гипотеза $H_1 : M(X) \neq M(Y)$.

Бу ҳолда икки томонлама критик соҳа нолинчи гипотеза ўринли деган тахминда Z мезоннинг соҳага тушиш эҳтимоллиги қабул қилинган α қийматдорлик даражасига тенг бўлиши талабига асосланиб қурилади.

Z нинг тақсимоти нолга нисбатан симметрик бўлгани учун критик нуқталар нолга нисбатан симметрикдир, яъни агар $z_{кр}$ орқали ўнг критик нуқта белгиланса, у ҳолда $-z_{кр}$ чап критик нуқта бўлади.

Мезоннинг энг катта қуввати (конкурент гипотеза ўринли бўлганда мезоннинг критик соҳага тушиш эҳтимоллиги)га мезоннинг критик соҳанинг ҳар бир интервалига тушиш эҳтимоллиги $\alpha/2$ га тенг бўлганда эришилади:

$$P(Z < -z_{кр}) = \alpha/2, \quad P(Z > z_{кр}) = \alpha/2. \qquad (16.15)$$

Икки томонлама критик соҳанинг ўнг чегараси $z_{кр}$ ни топиш учун Лаплас функциясининг $(1-\alpha)/2$ га тенг қийматига мос келувчи аргументининг қийматини топиш кифоя:

$$\Phi(z_{кр}) = (1-\alpha)/2. \qquad (16.16)$$

Мезоннинг кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланган қийматини $Z_{кузат}$ орқали белгилаймиз.

Агар $|Z_{кузат}| < z_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $|Z_{кузат}| > z_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

<u>Иккинчи ҳол.</u> Нолинчи гипотеза $H_0: M(X) = M(Y)$. Конкурент гипотеза $H_1: M(X) > M(Y)$.

Бу ҳолда ўнг томонлама критик соҳа нолинчи гипотеза ўринли деган тахминда Z мезоннинг соҳага тушиш эҳтимоллиги қабул қилинган қийматдорлик даражасига тенг бўлиши талабига асосланиб қурилади:

$$P(Z > z_{кр}) = \alpha. \qquad (16.17)$$

Ўнг томонлама критик соҳанинг чегараси $z_{кр}$ ни топиш учун Лаплас функциясининг $(1-2\alpha)/2$ га тенг қийматига мос келувчи аргументининг қийматини топиш кифоя:

$$\Phi(z_{кр}) = (1-2\alpha)/2. \qquad (16.18)$$

Мезоннинг кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланган қийматини $Z_{кузат}$ орқали белгилаймиз.

Агар $Z_{кузат} < z_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $Z_{кузат} > z_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Статистик гипотеза деганда нимани тушунасиз? Мисоллар келтиринг.
2. Нолинчи (асосий), конкурент (муқобил), оддий, мураккаб гипотезалар нима?
3. Биринчи ва иккинчи тур хатолар нимадан иборат, статистик мезон деб нимага айтилади?
4. Мезоннинг кузатиладиган қиймати, критик соҳа, гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси (жоиз қийматлар соҳаси) деб нимага айтилади?
5. Критик нуқталар (чегаралар), ўнг томонлама, чап томонлама, бир томонлама, икки томонлама критик соҳалар нима?
6. Қийматдорлик даражаси деб нимага айтилади ва критик соҳа қандай топилади?
7. Мезон қуввати нима ва у иккинчи тур хато билан қандай боғланган?

8. Фишер – Снедекор тақсимоти ҳақида нима биласиз?
9. Иккита нормал бош тўпламнинг дисперсиялари биринчи ҳолда қандай таққосланади?
10. Иккита нормал бош тўпламнинг дисперсиялари иккинчи ҳолда қандай таққосланади?
11. Иккита нормал бош тўпламнинг ўртача қийматлари биринчи ҳолда қандай таққосланади?
12. Иккита нормал бош тўпламнинг ўртача қийматлари иккинчи ҳолда қандай таққосланади?

Таянч иборалар:

Статистик гипотеза, нолинчи (асосий) гипотеза, конкурент (муқобил) гипотеза, оддий гипотеза, мураккаб гипотеза, биринчи тур хато, иккинчи тур хато, статистик мезон, мезоннинг кузатиладиган қиймати, критик соҳа, гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси (жоиз қийматлар соҳаси), критик нуқталар (чегаралар), ўнг томонлама критик соҳа, чап томонлама критик соҳа, бир томонлама критик соҳа, икки томонлама критик соҳа, қийматдорлик даражаси, мезон қуввати, Фишер – Снедекор тақсимоти, эркинлик даражалари.

18–мавзу. Мувофиқлик мезонлари

Режа:

1. Бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш.
2. Пирсоннинг мувофиқлик мезони.
3. Нормал тақсимотнинг назарий частоталарини ҳисоблаш услубиёти.

Агар бош тўплам тақсимот қонуни номаълум бўлиб, лекин у тайин кўринишга эга (уни *А* деб атаймиз) деб тахмин қилишга асос бор бўлса, у ҳолда бош тўплам *А* қонун бўйича тақсимланган деган нолинчи гипотеза текширилади.

Номаълум тақсимотнинг тахмин қилинаётган қонуни ҳақидаги гипотезани текшириш тақсимот параметрлари ҳақидаги гипотезани текшириш каби, яъни махсус танланган тасодифий миқдор – мувофиқлик мезони ёрдамида бажарилади.

Мувофиқлик мезони деб номаълум тақсимотнинг тахмин қилинаётган қонуни ҳақидаги гипотезани текшириш мезонига айтилади.

Мувофиқлик мезонларидан бири бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги гипотезани текшириш учун К.Пирсоннинг χ^2 («хи квадрат») мезонидир (бу мезонни бошқа тақсимотлар учун ҳам қўллаш мумкин). Бу мезонни қўллаш учун эмпирик (кузатиладиган) ва назарий (нормал тақсимланган деган тахминда ҳисобланган) частоталарни таққослаймиз.

Одатда эмпирик ва назарий частоталар фарқ қилади. Масалан:

эмп. частоталар . .	6	13	38	74	106	85	30	10	4

наз. частоталар . . . 3 14 42 82 99 76 37 11 2

Эмпирик ва назарий частоталарнинг фарқи тасодифий (муҳим эмас) бўлиши ҳамда ё кузатишларнинг сони камлиги, ё уларни гуруҳлаш усули, ё бошқа сабаблар билан тушунтирилиши мумкин. Иккинчи томондан, частоталарнинг фарқи тасодифий эмас (муҳим) бўлиши ҳамда назарий частоталар бош тўпламнинг нормал тақсим–ланганлиги ҳақидаги нотўғри гипотезадан келиб чиқиб ҳисоблан–ганлиги билан тушунтирилиши мумкин.

Пирсон мезони эмпирик ва назарий частоталарнинг фарқи тасодифийми деган саволга жавоб беради. Тўғри, ҳар қандай бошқа мезон каби у гипотезанинг ўринли эканлигини исботламайди, балки фақат қабул қилинган қийматдорлик даражасида гипотезанинг кузатиш маълумотлари билан мувофиқ келиши ёки келмаслигини аниқлайди.

n ҳажмли танланма бўйича

варианталар	x_i	x_1	x_2	. . .	x_s
эмп. частоталар . .	n_i	n_1	n_2	. . .	n_s

эмпирик тақсимот ҳосил қилинган бўлсин.

Айтайлик, бош тўплам нормал тақсимланган деган тахминда n_i' назарий частоталар ҳисобланган бўлсин. α қийматдорлик даражасида бош тўпламнинг нормал тақсимланганлиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш талаб қилинсин.

Нолинчи гипотезани текшириш мезони сифатида

$$\chi^2 = \sum (n_i - n_i')^2 \big/ n_i' \qquad (17.1)$$

тасодифий миқдор олинади. Бу миқдор турли тажрибаларда ҳар хил, олдиндан маълум бўлмаган қийматлар қабул қилади. Равшанки, эмпирик ва назарий частоталар қанчалик кам фарқ қилса, (17.1) мезоннинг катталиги шунчалик кичик бўлади ва демак, у маълум даражада эмпирик ва назарий тақсимотларнинг яқинли–гини тавсифлайди.

$n \to \infty$ да (17.1) тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни бош тўплам қайси тақсимот қонунига бўйсунишидан қатъий назар эркинлик даражалари k та бўлган χ^2 тақсимот қонунига ин–тилади.

Эркинлик даражалари сони $k = s - 1 - r$ тенгликдан топилади, бу ерда s – танланмадаги гуруҳлар (қисм оралиқлар) сони; r – тахмин қилинаётган тақсимотнинг танланма маълумотлари бўйича баҳоланган параметрлари сони.

Хусусан, агар тахмин қилинаётган тақсимот нормал бўлса, у ҳолда иккита параметр (математик кутилма ва ўртача квадратик четланиш) баҳоланади, шунинг учун $r = 2$ ва эркинлик даражалари сони $k = s - 1 - r = s - 1 - 2 = s - 3$ га тенг.

Агар бош тўплам Пуассон қонуни бўйича тақсимланган деб тахмин қилинса, у ҳолда битта λ параметр баҳоланади, шунинг учун $r = 1$ ва

$k = s - 2$ бўлади.

Ўнг томонлама критик соҳани нолинчи гипотеза ўринли деган тахминда мезоннинг соҳага тушиш эҳтимоллиги қабул қилинган қийматдорлик даражасига тенг бўлиши талабига асосланиб қурамиз:

$$P(\chi > \chi^2_{кр}(\alpha; k)) = \alpha. \qquad (17.2)$$

Шундай қилиб, ўнг томонлама критик соҳа $\chi > \chi^2_{кр}(\alpha; k)$ тенгсизлик билан, нолинчи гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси эса $\chi < \chi^2_{кр}(\alpha; k)$ тенгсизлик билан аниқланади.

Қоида. Берилган қийматдорлик даражасида бош тўплам нормал тақсимланганлиги ҳақидаги H_0 нолинчи гипотезани текшириш учун аввал назарий частоталарни, сўнгра мезоннинг

$$\chi^2_{кузат} = \sum (n_i - n_i')^2 / n_i' \qquad (17.3)$$

кузатилаётган қийматини ҳисоблаш керак ва χ^2 тақсимотининг критик нуқталари жадвали, берилган α қийматдорлик даражаси ҳамда эркинлик даражалари сони $k = s - 3$ бўйича $\chi^2_{кр}(\alpha; k)$ критик нуқтани топиш керак.

Агар $\chi^2_{кузат} < \chi^2_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ. Агар $\chi^2_{кузат} > \chi^2_{кр}$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

Пирсоннинг мувофиқлик мезонининг моҳияти эмпирик ва назарий частоталарни таққослашдан иборат. Эмпирик частоталар тажрибадан топилиши равшан. Бош тўплам нормал тақсимланган деб тахмин қилинганда назарий частоталарни қандай топиш мумкин? Бу масалани қуйидаги усул билан ечиш мумкин.

1. X нинг кузатилаётган қийматлари оралиғининг ҳаммаси (n ҳажмли танланма) бир хил узунликдаги s та $(x_i,\ x_{i+1})$ қисм оралиқларга бўлинади. Сўнгра қисм оралиқларнинг $x_i^* = (x_i + \ + x_{i+1})/2$ ўрталари топилади; x_i^* вариантанинг n_i частотаси сифатида i нчи оралиққа тушган варианталар сони қабул қилинади. Натижада бир–биридан тенг узоқликда турган варианталар ва уларга мос частоталар кетма–кетлиги ҳосил қилинади:

x_i^*	x_1^*	x_2^*	$\cdots$	x_s^*
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_s

Бунда $\sum n_i = n$.

2. $\overline{x^*}$ ўртача танланма қиймат ва σ^* танланма ўртача квадратик четланиш ҳисобланади.

3. X тасодифий миқдор нормаланади, яъни $Z = (X - \overline{x^*}) / \ /\sigma^*$ миқдорга ўтилади ва $(z_i,\ z_{i+1})$ интервалларнинг учлари ҳисобланади:

$$z_i = (x_i - \overline{x^*}) \big/ \sigma^*, \quad z_{i+1} = (x_{i+1} - \overline{x^*}) \big/ \sigma^*,$$

бунда Z нинг энг кичик қиймати, яъни $z_1\ -\infty$ га тенг, энг катта қиймати, яъни z_s эса ∞ га тенг деб олинади.

4. X нинг $(x_i,\ x_{i+1})$ интервалларга тушишининг p_i назарий эҳтимолликлари

$$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$$

тенглик бўйича ҳисобланади ($\Phi(z)$ — Лаплас функцияси) ва, ниҳоят, қидирилаётган $n_i' = np_i$ назарий частоталар топилади.

Такрорлаш ва назорат учун саволлар:

1. Мувофиқлик мезони деб нимага айтилади ва Пирсон мезони қандай қўлланилади?
2. Эмпирик ва назарий частоталар қайси сабабларга кўра фарқланади?
3. Бош тўплам нормал тақсимланганлиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш мезони сифатида қандай тасодифий миқдор қабул қилинади ва унинг қайси хоссаларини биласиз?
4. Бош тўплам нормал тақсимланганлиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш қоидасининг моҳияти нимада?
5. Назарий частоталар қайси усул билан топилади?

Таянч иборалар:

Мувофиқлик мезони, Пирсон мезони, эмпирик частота, назарий частота, бош тўплам нормал тақсимланганлиги ҳақидаги нолинчи гипотезани текшириш қоидаси.

ГЛОССАРИЙ

АКСИОМА – бирор математик назария яратишда бошланғич факт (асос) деб қараладиган ва исботсиз қабул килинадиган жумла. Грек. αξιωμα– ҳурматга сазовор бўлган жумла, ҳурмат, эҳтиром, обрў.

АСИМПТОТА –эгри чизиқнинг нуқтаси чексиз узоқлашганда у бирор тўғри чизиққа ҳар қанча якин бўлиб яқинлашса, бу тўғри чизиқ эгри чизиқнинг асимптотаси дейидади.

БЕРНУЛЛИ ҚОНУНИ – бу қонунга муофиқ синов жуда кўп такрорланганда воқеа юз беришининг нисбий (частотаси) сони бу воқеанинг синов юз беришининг эҳтимолига жуда яқин бўлишини ишончга яқин эҳтимол билан тасдиқлаш мумкин.

БЕРНУЛЛИ СХЕМАСИ УЧУН КАТТА СОНЛАР ҚОНУНИ – қуйидаги $\lim\limits_{n\to\infty} p\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\xi\right\}=2\lim\limits_{n\to\infty}\varphi\left(\xi\sqrt{\frac{n}{m}}\right)=1$ формулага Бернулли схемаси учун катта сонлар қонуни ёки Бернулли теоремаси дейилади.

БИНОМ – иккиҳад деган ибора билан бир хил маънони англатади. Бу термин латинча *bi*… — икки деган сўз билан грекча nomos – соҳа, қисм, ҳад деган сўзлардан ҳосил бўлган.

БУТУН СОНЛАР – $\pm n$ кўринишдаги сонлар, бу ерда n – натурал сон.

ГОМЕОМОРФИЗМ (ёки топологик изоморфизм) — иккита топологик фазонинг ўзаро бир қийматли ва ўзаро узлуксиз акслантирилиши.

ДЕДУКЦИЯ – фикр юритиш (исбот қилиш) методи бўлиб, бунда умумийликдан хусусийликка ўтилади.

ДИСКРЕТ ФАЗО – элементар ҳодисалар фазоси чекли ёки саноқлаи миқдордаги элементар ҳодисадан иборат бўлиб, у элементар ходисалар дискрет фазоси дейилади.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ – функция орттирмасининг чизиқли бош қисми.

ИСБОТ— бирор тасдик (мулоҳаза, фикр, теорема) нинг ҳақиқат ёки нотўғри эканлигини аниклашга имкон берадиган фикр юритиш.

ИТЕРАЦИЯ – бирор математик амални бир неча марта қўллаш натижаси.

ИЧКИ НУҚТА–шу нуқтани ўз ичига олган бирор оралиқ билан бирга тўпламга тегишли бўлган нуқта.

ҚИСМ ТЎПЛАМ – Агар A тўпламнинг ҳар бир элементи B тўпламнинг элементи бўлса, у ҳолда A тўплам B тўпламнинг қисм тўплами дейилади.

КОМБИНАТОРИКА – элементар математиканинг бўлими бўлиб, бунда чекли тўпламлар учун элементларнинг комбинация, ўринлаштириш, ўрин алмаштириш каби ҳар хил бирлашмалари, шуниннгдек барча бу бирлашмаларнинг такрорий турлари ва шунга ўхшаш тушунчалар ўрганилади.

КОНТИНУУМ – $0\le x\le 1$ кесмадаги сонларнинг L тўпламининг қуввати номи. Лат. continuum – узлуксизлик.

КОШИ – БУНЯКОВСКИЙ ТЕНГСИЗЛИГИ – иккинчи тартибли моментга эга бўлган ихтиёрий ξ ва η тасодифий миқдорлар учун $M|\xi \cdot \eta| \le \sqrt{M\xi^2} \cdot \sqrt{M\eta^2}$

КОШИ ТАҚСИМОТИ – зичлиги функцияси $p(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ кўринишда бўлади.

ЛЕММА – бир ёки бир неча теоремани исботлаш учун ишлатилдиган ёрдамчи жумла. Грек. λημμα – пора, фойда, кирим, наф.

МАРКОВ ЗАНЖИРЛАРИ –тасодифий синовларнинг шундай кетма-кетлигига айтиладики, бу кетма-кетликда кейинги синов натижаларининг эҳтимолликлари фақат бевосита ўзидан олдинги синов натижасига боғлиқ бўлади.

МАРКОВ ТЕНГСИЗЛИГИ – бирор кесмада кўпҳад қиймати маълум бўлганда кўпҳаднинг ҳосиласи қийматини баҳолайдиган тенгсизлик.

МАРКОВ ТЕОРЕМАСИ – агар $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n, ...$ тасодифий миқдорлар учун $n \to \infty$ да $\dfrac{1}{n^2} \cdot D\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) \to 0$ бўлса, $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n, ...$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги катта сонлар қонунига бўйсунади.

МАСОФА – бирор фазо нуқталариннинг ҳар қандай тартибланган жуфтига мос қилиб қўйиладган манфий бўлмаган сон.

МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА – эксперимент натижаларини ишлаб чиқишнинг умумий усуллари ҳақидаги фан.

МИНУС – горизонтал чизиқ шаклидаги математик ишора бўлиб, айириш амалини ёки манфий белгилашда қўлланилади. Лат. minus – камроқ.

МУСБАТ СОНЛАР – сонлар ўқида соноқ бошидан, яъни ноль нуқтадан ўнг томонда жойлашган ҳақиқий сонлар.

НОРМА – соннинг абсолют қийматига векторнинг узунлигини мос қўяди.

ПАРАДОКС – бизнинг турмуш ва психик сабабиятларимизга кўра нотўғри бўлиб туйиладиган даъво (хулоса).

ПАРАМЕТР – формула ва ифодаларда қатнашадиган масалада қиймати ўзгармас бўлиб, бошқа масалада қийматларини ўзгартирадиган миқдор. Грек. παραμτρου – ўлчаб чиқувчи.

ПЛЮС – қўшиш амалини ва мусбат миқдорларни белгилаш учун киритилган + ишорадир. Лат. plus **–** катта.

ПРОЦЕНТ – бу сонниг юздан бир қисми.

РАДИАН – узунлиги радиусга тенг бўлган айлана ёйига тиралувчи марказий бурчак.

РАДИКАЛ (ёки илдиз) – бирор a сондао $n-$даражали илдиз чиқариш амалини иодаловчи $\sqrt[n]{\ }$ математик ишора. Лат. radix – илдиз.

РАДИУС – айлан (сфера)нинг ҳар қандай нуқтасини маркази билан туташтирувчи кесма.

РАЦИОНАЛ СОНЛАР – мусбат ва манфий барча бутун сонлар, каср сонлар ва нол сони.

СКАЛЯР – қиймати фақат бир ҳақиқий сон билан характерланиб ёки бошқа характеристикаси ҳисобга олинмайдиган миқдор.

СОФИЗМ – атайлаб чиқарилган нотўғри хулоса, бирор жумланинг нотўғри исботи.

СТИРЛИНГ ФОРМУЛАСИ – анализнинг машхур формулаларидан: $n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot e^{\theta_n}$ бу ерда $|\theta_n| \le \frac{1}{12n}$

ТАНЛАШ МЕТОДИ – статистик кузатишлар усули бўлиб, бунда бирор тўпламнинг умумий характеристикаларини аниқлаш учун тўпламнинг ҳамма бирликлари (ҳадлари) эмас, балки фақат уларнинг тасодифий танлашда олинган бир қисми текширилади.

ТАСОДИФИЙ МИҚДОР – ҳолатга қараб ўзининг бирор қийматига эга бўладиган миқдор.

ТАСОДИФИЙ ҲОДИСА – рўй бериши гумон бўлган воқеа.

ТАШҚИ НУҚТА– шу нуқтани ўз ичига олган бирор интервал билан биргаликда тўпламга тегишли бўлмаган нуқта.

ТАЪРИФ – шу тушунчанинг мазмунини, моҳиятини очиб беришдир.

ТЕНГЛАМА – битта ёки бир неча ҳарфлар номаълум деб ҳисобланадиган тенгликдир.

ТЕНГЛИК – =ишораси билан бириктирилган ифода.

ТЕНГСИЗЛИК – >, < тенгсизлик ишоралари билан бирлаштирилган иккита алгебраик ифода.

ТЕОРЕМА – тўғри ёки нотўғри эканлиги исбот этиш йўли билан аниқланадиган математик жумла. Грек. τεορεμα – томоша.

ТЕСКАРИ ТЕОРЕМА – берилган теореманинг шарти хулоса, хулосаси эса шарт бўлган теорема.

ТЎПЛАМ – математиканинг муҳим тушунчаларидан бири. Бу тушунча аксиоматик ҳолда киритилади ва ҳеч қандай элементар тушунчалар орқали таърифланиши мумкин эмас.

ТЎПЛАМЛАР НАЗАРИЯСИ – математиканинг бир бўлими бўлиб, тўпламларни уларнинг конкрет табиатига боғламасдан ўрганади.

ТЎПЛАМНИНГ ЮҚОРИ ЧЕГАРАСИ – бу тўпламни юқоридан чегараловчи сонларнинг энг кичиги.

УМУМЛАШГАН БЕРНУЛЛИ ФОРМУЛА – фараз қилайлик, боғлиқмас n та тажриба ўтказилаётган бўлиб, хар бир тажрибада s та $A_1, A_2, ... A_s$ ходисалардан бирортаси рўй берсин. Хар бир тажрибада $A_1, A_2, ... A_s$ ходисаларнинг рўй бериш эхтимоллари мос равишда $p_1, p_2, ... p_s$ бўлсин. A_1 ходисанинг m_1 марта, A_2 ходисанинг m_2 марта ва хакоза. A_s ходисанинг m_s марта рўй бериш эҳтимоли $P_n(m_1, m_2, .., m_s)$ қуйидаги формула билан аниқланади: $P_n(m_1, m_2, .., m_s) = \frac{n!}{m_1! m_2! ... m_s!} p_1^{m1} p_2^{m2} ... p_s^{ms}$

ЎЗГАРИШ СОҲАСИ – функциянинг қийматлари тўплами бўлиб, бу қийматлар функциянинг аниқланиш соҳасидан олинган аргумент қийматларига мос келади.

ЎЗГАРМАС МИҚДОР – мазкур жараёнда ўз қийматини ўзгартирмадиган миқдор.

ФАКТОРИАЛ – 1 дан тайин бир n натурал сонгача бўлган барча натурал сонларнинг кўпайтмаси. Инглизча factor –кўпайтувчи сўзидан келиб чиққан.

ФОРМУЛА – бирор даъвони (жумла, фикр) англатувчи ҳар қандай символик ёзув. Лат. formula –образ, кўринишни билдирадиган forma сўзининг кичрайтирилган шакли.

ФУНКЦИЯЛАР НАЗАРИЯСИ –математик анализнинг бир бўлими бўлиб, унда ҳақиқий ўзгарувчили функцияларнинг умумий хоссалари ўрганилади.

ФУНКЦИЯНИНГ АРГУМЕНТИ – эркли ўзгарувчи миқдор.

ҲОДИСА – эҳтимолнинг назариясининг асосий тушунчаларидан бири бўлиб, у бирор тажрибанинг натижаси сифатида қаралади. Одатда ҳодисалар 3 хил бўлади.

ШАШҚОЛТОШ – бир жинсли материалдан ясалган ва 1 дан 6 гача номерланган кубик.

ЭКСТРЕМУМ – максимум ва минимум терминларнинг умумий номи. Лат. extremum – четки қиймат.

ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАР –кўпҳадлар, рационал функциялар, кўрсаткичли, даражали, логарифмик ва тригонометрик функциялар, шунингдек айтиб ўтилган функциялардан тўрт арифметик амал ва чекли марта қўлланилган суперпозициялар ёрдамида ҳосил қилинадиган функцияларни ўз ичига олган функциялар синфи

ЭНГ КАТТА ЭҲТИМОЛЛИК – $P_n(m)$ эҳтимолнинг энг катта қийматга эришиши. Бу эҳтимол иккта $m_0 = np - q$ ва $m_0' = np - q + 1$ қийматларда энг катта эҳтимолга эришади.

ЭҲТИМОЛ ИНТЕГРАЛИ – қуйидаги кўринишдаги интеграл: $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$. Эҳтимол интеграли элементар функциялар орқали ифода қилинмайди. Бу интеграл эҳтимоллар назариясида нормал тақсимот қонунига бўйсунувчи тасодифий миқдорнинг берилган интервалга тушиш эҳтимолини текширишда қўлланнилади. Эҳтимол интеграли Лаплас функцияси ҳам дейилади.

ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИ – тасодифий ҳодисаларнинг қонуниятларини ўрганадиган математик фан.

ЭҲТИМОЛЛИК – чексиз кўп марта такрорланиши мумкин бўлган воқеалар мажмуида бирор тайинли воқеа юз бериши имкониятининг сонли характеристикаси.