

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA

MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

ZAHIRIDDIN MUHAMMAD BOBUR NOMIDAGI

ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI

FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

MATEMATIKA KAFEDRASI

Qo'lyozma xuquqida

SOLIJONOVA NIGORAXON

*“Akademik litsey va kasb-xunar kollejlari matematika kursida hosila va
uning tadbiqlarini o'rgatish”*

**5400100- matematika yo'nalishi bakalavr akademik darajasini olish
uchun yozilgan**

BITIRUV MALAKAVIY ISH

ILMIY RAHBAR:

dotsent. A. Axlimirzayev

Andijon-2015

Kirish

Bitiruv malakaviy ishning dolzarbligi. O`zbekiston respublikasining “Ta`lim to`g`risidagi” gi qonuni va “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” ning asosiy maqsadi respublikamizda ta`lim-tarbiya tizimini tubdan isloh qilish, milliy kadrlar tayyorlashning yangi tizimini barpo etish, yoshlarning ijodiy va intellektual qobiliyatlarini rivojlantirish, barkamol, yetuk va mukammal mutaxasislarni tayyorlashni nazarda tutadi.

Uzluksiz ta`lim tiziminining umumiy o`rta ta`lim va maxsus kasb-hunar ta`limi majburiy etib belgilanishi va bu ta`lim bosqichlarida o`rgatiladigan fanlar bo`yicha Davlat ta`lim standartlarining yaratilishi, ularning mazminini tubdan isloh qilishga olib keldi.

Jaxon andozalari talablariga javob beradigan, mukammal mutaxasislarni tayyorlashda uzluksiz ta`lim tizimining muhim bosqichlaridan bo`lgan umumta`lim maktablari, akademik litsey va kasb-hunar kollejlari bosqichlarida matematika fanidan egallangan bilim, ko`nikma va malakalar muhim ahamiyatga ega.

Umumiy o`rta ta`lim maktabi algebra kursida funksiyalar va ularni xossalari o`rganish asosiy mazmundor-uslubiy yo`nalishlardan birini tashkil etadi. Shuning uchun umumiy o`rta ta`lim maktabi algebra kursining, hamda o`rta maxsus, kasb-hunar ta`limi algebra va matematik analiz asoslari kursining katta qismini funksiyalar va ularning grafiklarini yasash va hossalari o`rganish egallaydi. Davlat ta`lim standartlari va o`quv dasturlariga asosan funksiyalar, ularning grafiklarini yasash va xossalari o`rganishga doir o`quv materiallarini o`rganishni ikkita bosqichga bo`lish mumkin.

Birinchi bosqich umumiy o`rta ta`lim maktabi algebra kursida amalga oshirilib, o`rganilayotgan funksiyalarning xossalari uning grafigiga asoslanib elementar usullar bilan keltirilib chiqariladi. Funksiyalarning xossalari o`quvchilar tomonidan ongli o`zlashtirilishini ta`minlash maqsadida, shuningdek ularni funksiya haqidagi dastlabki bilimlarga ega bo`layotganliklari uchun ko`rgazmalilikka katta e`tibor beriladi.

Ikkinchi bosqich akademik litseylar va kasb hunar kollejlari algebra va matematik analiz asoslari kursida amalga oshirilib, o'quvchilarda yetarli bilim, ko'nikma va malakalar tarkib toptirilganligini xisobga olgan holda o'rganilayotgan funksiyalar xossalari dastlab analitik usulda keltirilib chiqarilib, so'ngra ana shu xossalarga asoslangan holda ularning grafigi yasaladi. Bunda asosan hosila tushunchasidan foydalaniladi. Hosila tushunchasi matematikaning muhim fundamental tushunchalaridan biri hisoblanadi. Uni yordamida ko'plab fizik, mexanik, kimyoviy, biologik va iqtisodiy masalalarni yechish mumkin. Shu o'rinda amaliyotning bir qator masalalari hosila tushunchasidan foydalanib yechilishi va bir necha masalalarni yechish esa hosila tushunchasini kiritishga turtki bo'lganligini ta'kidlash mumkin. Umuman olganda hosila tushunchasini kiritilishiga tarixan 2 ta masala: to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanayotgan jismning ixtiyoriy paytdagi tezligini topish masalasi va egri chiziq bo'ylab harakatlanayotgan jismning ixtiyoriy nuqtasiga urinma o'tgazish masalasi turtki bo'lgan. Keyinchalik esa harakatlanayotgan jismning ixtiyoriy paytdagi tezligi va tezlanishini, kimyoviy reaksiyani ixtiyoriy paytdagi tezligini, o'tgazgichning ixtiyoriy ko'ndalang kesimidagi to'k kuchini, chizikli zichligini jismning issiqlik sig'imini va hakoza masalalarni yechish ham hosila tushunchasiga olib kelishini ko'rish mumkin. Bularning barchasi hosila tushunchasining qanchalik muhim tushuncha ekanligidan dalolat beradi.

Hosila tushunchasi kiritilgandan so'ng esa uni yordamida yana ko'plab masalalarni o'rganish mumkin. Jumladan, hosiladan taqribiy xisoblashlarda, geometrik va fizik masalalarni yechishda, ekstremal masalalarni yechishda, funksiyani to'la tekshirishda va grafiklarni yasashda foydalanish mumkin. Bularning barchasi tanlangan mavzuning **dolzarbligini** ifodalaydi.

O'rta maxsus kasb hunar ta'limi algebra va matematik analiz asoslari kursida hosila va uni bir qator tadbirlarini o'quv jarayonida qo'llash orqali o'quvchilarda matematik bilim, ko'nikma va malakalarni takomillashtirish bitiruv malakaviy ishning asosiy **maqsadidir**.

Bitiruv malakaviy ishning vazifalari:

-o`rta maxsus kasb hunar ta`limi algebra va matematik analiz asoslari kursida funksiyalarning hosilalari va uning tadbirlari bo`yicha o`quv materiallarini taxlil etish;

-mavzuga oid ilmiy-pedagogik va o`quv adabiyotlarini taxlil etish, o`quvchilarda funksiyaning hosilasi, uni tadbiqlarini yanada takomillashtirish maqsadida zarur mavzularni aniqlash va o`quv materiallarini yaratish.

Tadqiqot obyekti o`rta maxsus va kasb-hunar ta`limi algebra va matematik analiz asoslari kursida o`rganiladigan funksiyalarning hosilalari va ularni tadbiqlari bor bo`lgan mavzulari mazmunini aniqlash hamda matematika o`qituvchilariga uslubiy ko`rsatmalar berishdan iborat.

Tadqiqot predmeti akademik litsey va kasb hunar kollejlari algebra va matematik analiz asoslari kursida funksiyaning hosilasi va uning tadbiqlari bo`yicha o`quv materiallarini yoritishda qo`llaniladigan metodlar, shuningdek, bu mavzu bo`yicha o`quvchilarning mustaqil ishlarini tashkil etish hamda uzviylikni o`rnatishdan iborat.

Tadqiqotning metodologik asosi ta`lim to`risidagi O`zbekiston Respublikasi Qonuni “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” Prezident I. A. Karimovning “Yuksak manaviyat-yengilmas kuch” asari, vazirlar maxkamasining ta`lim sohasiga doir qarorlari, umumiy o`rta ta`lim va o`rta maxsus, kasb-hunar ta`limi matematika fani davlat standartlaridan iborat.

Bitiruv malakaviy ish asosida ishlab chiqilgan ilmiy- metodik tavsiyalar, akademik litseylar va kasb-hunar kollejlari matematika o`qituvchilari ish tajribasini boyitib, o`quvchilarning funksiyaning hosilasi va uni tadbiqlari bo`yicha ko`nikmalarini takomillashtirish uchun xizmat qiladi hamda ular bitiruv malakaviy ishning amaliy ahamiyatini bildiradi.

Bitiruv malakaviy ish kirish, 2 ta bob, 11 ta paragraf, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro`yhatidan tashkil topgan. Bitiruv malakaviy ishni tayyorlashda olingan natijalar amaliyot davrida qo`llanilgan va ulardan metodik qo`llanmalar yaratishda foydalanish mumkin.

I. BOB. HOSILA

§1. Hosila tushunchasiga olib keluvchi masalalar. Hosila tushunchasi.

Jism to'g'ri chiziqli harakat qilganda uning tezligini xisoblash.

Aytaylik jism to'g'ri chiziqli harakat qilayotgan bo'lsin. Ravshanki t vaqtning har bir paytiga o'tilgan s yo'lining belgisi, tayin qiymati mos kelib, s yo'l t vaqtning funksiyasi bo'ladi, ya'ni

$$S = f(t).$$

Ammo bu moslik turli harakatda turlichadir; bir jism tezroq harakatlansa, ikkinchi bir jism sekinroq harakatlanishi mumkin; bir jism bir xil vaqt oraliqlarida bir xil masofani bosib o'tsa, ikkinchi bir jism bir xil vaqt oraliqlarida turlicha masofani bosib o'tishi mumkin.

Harakatni xarakterlash uchun *tezlik* deb ataluvchi fizik miqdor kiritiladi.

O'tilgan yo'lining shu yo'lni o'tish uchun ketgan vaqtga nisbati jism harakatining *o'rtacha tezligi* deyiladi.

Agar $t_2 - t_1 = \Delta t$ vaqt oraliq'ida jism Δs yo'l o'tsa, u holda jism harakatining o'rtacha tezligi:

$$v_{orr} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Jism tekis harakat qilganda uning otgan $s(m)$ yoli

$$S = v \cdot t (m)$$

formula bilan ifodalanadi. Bu holda jism bir xil vaqt oraliqlarida bir xil masofa bosib o'tadi. Masalan, birinchi sekund davomida $s(1) = v(1) = v(m)$, birinchi sekunddan ikkinchi sekundgacha

$$S(2) - s(1) = 2v - v = v(m),$$

ikkinchi sekunddan uchinchi sekundgacha

$$S(3) - s(2) = 3v - 2v = v(m)$$

va hokazo yo'l bosib otadi.

Shu bilan birga jism tekis harakatining o'rtacha tezligi turlicha vaqt oraliqlarida bir xil, ya'ni ozgarmas boladi. Masalan, vaqtning turlicha $t_1=1s$, $t_2=2s$, $t_3=3s$ oraliqlarini olaylik ; vaqtning bu oraliqlarida o'rtacha tezlik:

$$v_{o'r} = \frac{s(t_1)}{t_1} = \frac{s(t_2)}{t_2} = \frac{s(t_3)}{t_3} = v = const$$

ya'ni o'zgarmas edi. Lekin boshqa bir harakatda, masalan, erkin tushayotgan jism harakatida o'rtacha tezlik ozgarmas bo'lmaydi. Erkin tushayotgan jismning o'tgan yo'li

$$S = \frac{gt^2}{2} (m)$$

formula bilan ifodalanadi.

Tushayotgan jism harakatning o'rtacha tezligi turlicha vaqt oraliqlarida turlicha boladi. Masalan, vaqtning turlicha $t_1=1c$, $t_2=2s$, $t_3=3s$ oraliqlarini olaylik. Vaqtning bu oraliqlarida o'rtacha tezliklar

$$\frac{s(1)}{1} = \frac{g}{2}, \quad \frac{s(2)}{2} = g, \quad \frac{s(3)}{3} = \frac{3}{2}g.$$

turlicha bo'ladi.

Shu bilan birga erkin tushayotgan jism bir xil vaqt oraliqlarida turlicha masofani bosib o'tadi. Masalan, birinchi sekundda

$$s(1) = \frac{g}{2} (m),$$

birinchi sekunddan ikkinchi sekundgacha

$$s(2) - s(1) = \frac{g}{2} (m),$$

ikkinchi sekunddan uchinchi sekundgacha

$$s_3 - s_2 = \frac{5}{2} (m).$$

ya'ni turlicha masofani bosib o'tadi.

O'rtacha tezligi o'zgarmas bo'lgan harakat tekis harakat deyiladi. O'rtacha tezligi turli vaqt oralig'ida turlicha bo'lgan harakat notekis harakat deyiladi.

Ravshanki, jism tekis harakat qilganda bir xil vaqt oraliqlarida bir xil masofani bosib o'tadi. Shuning uchun tekis harakatni harakterlashda uning

ixtiyoriy vaqt oralig'idagi o'rtacha tezligini hisoblash yetarlidir. Jism notekis harakat qilganda bir xil vaqt oraliqlarida turlicha masofani bosib o'tadi. Demak, jismning notekis harakatini harakterlash uchun uning biror vaqt oralig'idagi o'rtacha tezligini hisoblash yetarli bo'lmaydi.

Buning uchun yangi tushuncha – oniy tezlik yoki berilgan t paytdagi tezlik tushunchasini kiritish kerak bo'ladi. Bu tushunchaning ma'nosini misolda ko'raylik.

1-misol. $S(t) = t^2 + 1$ qonun bo'yicha to'g'ri chiziqli harakat qiluvchi jismning $t = 5s$ paytidagi tezligi aniqlansin .

Yechish. Vaqtning $t = 5s$ paytida o'tilgan yo'l $s(5) = 26$ bo'ladi.

Avval $\Delta t > 0$ vaqt oralig'ida jism harakatining o'rtacha tezligini topamiz. Δt vaqt ichida jismning o'tgan yo'li Δs bo'ladi. Vaqtning $t = 5 + \Delta t$ paytida o'tilgan yo'l:

$$s(5) + \Delta s = s(5 + \Delta t),$$

$$\Delta s = s(5 + \Delta t) - s(5) = (5 + \Delta t)^2 + 1 - (5^2 + 1) = 10 \Delta t + \Delta t^2 = (10 + \Delta t)\Delta t.$$

formulaga asosan:

$$v_{o'r} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(10 + \Delta t)\Delta t}{\Delta t} = 10 + \Delta t .$$

Endi Δt vaqt oralig'ini kichraytira borib $v_{o'r}$ tezlikni xisoblaylik. Masalan, $\Delta t = 1s$, $\Delta t = 0,5s$, $\Delta t = 0,2s$ va xokazo bo'lsin. U holda bu oraliqlarga mos kelgan $v_{o'r}$ ning qiymatlari $11 \frac{m}{s}$; $10 \frac{m}{s}$; $10,5 \frac{m}{s}$; $10,2 \frac{m}{s}$; va xokazo bo'ladi. Bu yerdan ko'rinadiki, Δt kichrayishi bilan o'rtacha tezlik $10 \frac{m}{s}$ ga intiladi ya'ni

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{o'r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (10 + \Delta t) = 10 .$$

Ana shu limitni qaralayotgan harakatning $t = 5s$ paytidagi tezligi (yoki oniy tezligi) deb qabul qilinadi.

Jismning t paytidagi v tezligi (yoki oniy tezligi) Δt vaqt oralig'idagi $v_{o'r}$ tezlikning Δt nolga intilgandagi limitiga aytiladi:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{o'r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} .$$

2-misol. Jism $s = 2t^2 - 3t + 1$ qonun bo'yicha to'g'ri chizqli harakat qiladi. Harakatning: a) $t = 2s$; b) $t = ts$ paytidagi tezligi toplisin.

Yechish: a) $t = 1s$ vaqtga $\Delta t > 0$ orttirma beramiz, u holda yo'l ham Δs orttirma olib,

$$s + \Delta s = 2(1 + \Delta t)^2 - 3(1 + \Delta t) + 1$$

bo'ladi. Bundan Δt vaqt ichida o'tilgan Δs yo'lni topamiz:

$$\begin{aligned} \Delta s &= 2(1 + \Delta t)^2 - 3(1 + \Delta t) + 1 - (2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1) = \Delta t + 2\Delta t^2 = \\ &= \Delta t(1 + 2\Delta t) \end{aligned}$$

Δt vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlikni topamiz:

$$v_{o'r} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(1 + 2\Delta t)\Delta t}{\Delta t} = 1 + 2\Delta t .$$

Endi Δt ni nolga intilib, limitga o'tamiz; u holda

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{o'r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 + 2\Delta t) = 1$$

Demak, $v(1) = 1$.

b) Endi shunga o'xshash amallarni bajarib, vaqtning ixtiyoriy paytidagi tezlikni topamiz.

t vaqtga Δt orttirma beramiz, u holda s yo'l ham Δs orttirma oladi:

$$s + \Delta s = 2(t + \Delta t)^2 - 3(t + \Delta t) + 1 .$$

Δt vaqt ichida o'tilgan Δs yo'lni topamiz:

$$\Delta s = 2(t + \Delta t)^2 - 3(t + \Delta t) + 1 - (2t^2 - 3t + 1) = (4t + 2\Delta t - 3)\Delta t .$$

Δt vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlikni topamiz:

$$v_{o'r} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(4t + 2\Delta t - 3)\Delta t}{\Delta t} = 4t - 3 + 2\Delta t .$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{o'r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (4t - 3 + 2\Delta t) = 4t - 3 .$$

Demak, $v(t) = 4t - 3$.

Aytaylik, jism umumiy holda $s = f(t)$ qonun bo'yicha to'g'ri chizqli harakat qilganda, vaqtning ixtiyoriy t paytidagi tezligini topish talab qilinsin.

Bu holda ham yuqoridagiga o'xshash amallar bajarib, t paytdagi tezlikni topamiz.

Buning uchun: 1) t vaqtga $\Delta t > 0$ orttirma beramiz, u holda yo'l ham Δs orttirma oladi:

$$s + \Delta s = f(t + \Delta t);$$

2) Δs ni topamiz:

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t);$$

3) Δt vaqt ichidagi, ya'ni $[t; t + \Delta t]$ kesmadagi $v_{o'r}$ o'rtacha tezlikni topamiz:

$$v_{o'r} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t};$$

4) v tezlikni topamiz.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Bu bilan qo'yilgan masala yechildi.

2. Sterjenning chiziqli zichligini xisoblash

Sterjen berilgan bo'lsin. Sterjenning xar bir l uzunligiga m massa mos kelib, sterjenning m massasi l uzunligining funksiyasi bo'ladi. Ya'ni $m = f(l)$, l uzunlikka bog'liq holda sterjen massasining o'zgarish tezligini xarakterlash uchun fizikada chiziqli zichlik deb ataluvchi kattalik kiritiladi.

Sterjenning o'rtacha chiziqli zichligi deb sterjen massasining uning uzunligiga nisbatiga aytiladi. Agar sterjen bir jinsli bo'lsa, uning o'rtacha chiziqli zichligi hamma nuqtalarida bir xil, ya'ni o'zgarmas bo'ladi. Agar sterjen bir jinsli bo'lmasa, o'rtacha chiziqli zichlik sterjenning turli uchastkalarida turlicha bo'ladi. Shu sababli o'rtacha chiziqli zichlik sterjen massasining o'zgarish tezligini to'la xarakterlay olmaydi.

Shuning uchun bir jinsli bo'lmagan sterjenlar uchun berilgan nuqtadagi chiziqli zichlik tushunchasi kiritiladi.

Sterjenning l nuqtadagi $\delta(l)$ chiziqli zichligi deb Δm massa orttirmasining Δl uzunlik orttirmasiga nisbatining $\Delta l \rightarrow 0$ dagi limitiga aytiladi:

$$\delta(l) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \delta_{or}(l) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta l} .$$

Chiziqli zichlik sterjen massasining uning uzunligiga bog'liq holda o'zgarish tezligini xarakterlaydi.

Misol: Bir jinsli bo'lmagan $|OM| = 35 \text{ sm}$ uzunlikdagi ingichka sterjenda massa (gramm bilan xisoblanadi)

$$m = 2l^2 + 3l$$

qonun bo'yicha taqsimlangan, bu yerda l O nuqtadan xisoblagandagi sterjen uzunligining qismidir. 1) Butun sterjenning o'rtacha chiziqli zichligi topilsin.

2) O nuqtadan 5 sm masofada yotuvchi nuqtadagi chiziqli zichlik topilsin.

Yechish: 1) Sterjen uzunligi $l = 35 \text{ sm}$ bo'lgani uchun uning massasi $m = 2 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 = 2555$. Endi sterjenning o'rtacha chiziqli zichligini topamiz

$$v_{or} = \frac{m}{l} = \frac{2555}{35} = 73 .$$

2) $l = 5 \text{ sm}$ ga Δl orttirma berib, $[5; 5 + \Delta l]$ kesmani xosil qilamiz. U holda m massa ham Δm orttirma qabul qilib,

$$m + \Delta m = 2(5 + \Delta l)^2 + 3(5 + \Delta l)$$

bo'ladi. Bundan $[5; 5 + \Delta l]$ kesmadagi Δm massani topamiz:

$$\begin{aligned} \Delta m &= 2(5 + \Delta l)^2 + 3(5 + \Delta l) - (2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5) = 23\Delta l + 2\Delta l^2 = \\ &= (23 + \Delta l)\Delta l. \end{aligned}$$

O'rtacha chiziqli zichlikni topamiz:

$$\delta_{or} = \frac{\Delta m}{\Delta l} = \frac{(23 + 2\Delta l)\Delta l}{\Delta l} = 23 + 2\Delta l .$$

$l = 5 \text{ sm}$ nuqtadagi chiziqli zichlikni hisoblaymiz:

$$\delta(5) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \delta_{or} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} (23 + 2\Delta l) = 23 .$$

Bir jinsli bo'lmagan sterjenda massa umumiy holda $m = f(l)$ qonun bo'yicha taqsimlanganda, uning ixtiyoriy l nuqtasidagi chiziqli zichlikni topish talab qilinsin.

Buning uchun: 1) l ga Δl orttirma beramiz, u holda m massa ham Δm orttirma oladi:

$$m + \Delta m = f(l + \Delta l);$$

2) Δm ni topamiz:

$$\Delta m = f(l + \Delta l) - f(l);$$

3) $\delta_{o'r}$ chiziqli zichlikni topamiz:

$$\delta_{o'r} = \frac{\Delta m}{\Delta l} = \frac{f(l + \Delta l) - f(l)}{\Delta l};$$

4) $\delta(l)$ chiziqli zichlikni topamiz:

$$\delta(l) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \delta_{o'r} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{f(l + \Delta l) - f(l)}{\Delta l}.$$

3. Jisimning issiqlik sig'imini xisoblash

θ temperaturaning (C – graduslarda) xar bir qiymatiga, W issiqlik miqdorining belgisi qiyamati mos kelib, W issiqlik miqdori θ temperaturaning funksiyasi bo'ladi, ya'ni $W=f(\theta)$.

θ temperaturaga bog'liq holda W issiqlik miqdorining o'zgarish tezligini xarakterlash uchun fizikada issiqlik sig'imi deb ataluvchi kattalik kiritiladi.

O'rtacha, issiqlik sig'imi deb W issiqlik miqdorining temperaturaga nisbatiga aytiladi. Umuman aytganda, o'rtacha issiqlik sig'imi issiqlik miqdorining o'zgarish tezligini to'la xarakterlay olmaydi. Shuning uchun berilgan θ temperaturadagi issiqlik sig'imi tushunchasi kiritiladi.

Jisimning θ temperaturadagi issiqlik sig'imi deb ΔW issiqlik miqdori orttirmasining $\Delta \theta$ temperatura orttirmasiga nisbatining $\Delta \theta \rightarrow 0$ dagi limitiga aytiladi:

$$C = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} C_{orr} = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta \theta}$$

Aytaylik, jism θ^0 dan θ^0 gacha isitilganda sarf bo'lgan issiqlik miqdori $W=f(\theta)$ qonuni bo'yicha o'zgarsin va ixtiyoriy θ temperaturadagi issiqlik sig'imini topish talab qilinsin.

Buning uchun ; 1) θ temperaturada biror $\Delta\theta$ ortirma beramiz. U holda W ham ΔW ortirma oladi:

$$W + \Delta W = f(\theta + \Delta\theta);$$

2) ΔW ni topamiz:

$$\Delta W = f(\theta + \Delta\theta) - f(\theta);$$

3) jismni θ dan $(\theta+\Delta\theta)$ gacha isitgandagi o'rtacha issiqlik sig'imini topamiz:

$$C_{orr} = \frac{\Delta W}{\Delta\theta} = \frac{f(\theta + \Delta\theta) - f(\theta)}{\Delta\theta};$$

4) C issiqlik sig'imini topish uchun limitga o'tamiz:

$$C = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} C_{ur} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{f(\theta + \Delta\theta) - f(\theta)}{\Delta\theta}.$$

§2. Funksiyani o'zgarish tezligi va hosila tushunchasi.

Yuqorida berilgan masalalarga e'tibor qilsak ularni yechishda ko'pgina umumiylik borligini ko'ramiz.

Birinchiidan, ko'rilgan masalalarning har birida t, l, θ argumentlarning biror qiymatlari to'plamida aniqlangan.

$$s = f(t); \quad m = f(t), \quad w = (\theta).$$

funksiyalar bilan ish ko'rdik. Ikkinchida, bu masalalarning xar birida funksiyaning o'zgarish tezligini topdik. Uchunchidan, o'zgaruvchilarning manosidagi tafovutga axamiyat bermasdan, funksiyalarning o'zgarish tezligini topishda bajarilgan amallarni solishtirib qarajak, uchala masalada xar bir xil amallar bajarilganini ko'ramiz, yani funksiya orttirmasini argument orttirmasiga bo'ldik va bu nisbatning argument orttirmasi no'lga intilgandagi limitini xisobladik.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad \delta(l) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta l}, \quad C = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta \theta}.$$

Ko'rib o'tilgan masalalardagi funksiyalar o'zgarishining o'rtacha va oniy tezligi tushunchalariga o'xshash ixtiyotiy $y = f(x)$ funksiyaning xam o'rtacha va oniy o'zgarish tezligini tariflaymiz.

$y = f(x)$ funksiyaning.

$$[x_0; x] = [x_0; x_0 + \Delta x].$$

kesmadagi o'rtacha o'zgarish tezligi deb funksiya orttirmasi bilan argument orttirmasining

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

nisbatiga aytiladi.

O'rtacha tezlikning argument orttirmasi nolga intilgandagi limiti

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

funksiyaning x_0 qtadagi o'zgarish tezligi (oniy tezligi) deyiladi.

Texnikada ko'p masalalar mos funksiyalarning o'zgarish tezligini hisoblash bilan yechiladi. Masalan, aylanayotgan jismning burchak tezligini hisoblash, jism tezligini o'zgarish tezligini hisoblash qizitilayotgan jism kengayishining chiziqli koeffitsientini hisoblash, vaqtning berilgan paytida himiyaviy reaksiya tezligini hisoblash va hokazo kabi masalalarni yechish mos funksiyalarning o'zgarish tezligini topishni talab qiladi. Fan va texnikada funksiyalarning o'zgarish tezligini hisoblashga yoki boshqacha aytganda, funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi limitini hisoblashga keltiriladigan masalalarning ko'pligidan bunday limitni ixtiyoriy funksiya uchun ajratib olib, uning asosiy xossalarini o'rganish zarur bo'ladi. Bunday limit funksiyaning hosilasi deyiladi.

Ta'rif. $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deb $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi Δy orttirmasining argument Δx orttirmasiga nisbatining Δx nolga intilgandagi limitiga aytiladi va $y'(x_0)$ bilan belgilanadi:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

Bu yerda Δx orttirma musbat ham, manfiy ham bo'lishi mumkin. Δx orttirma nolga ixtiyoriy ravishda intilganda $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ mavjud bo'lishi kerak.

Misol. $y = x^2$ funksiyaning $x = 1$ nuqtadagi hosilasi topilsin.

Yechish. 1) $x = 1$ qiymatga Δx orttirma beramiz, u vaqtda funksiya ham Δy orttirma qabul qiladi:

$$y(1) + \Delta y = (1 + \Delta x)^2 \text{ bu yerda } y(1) = 1.$$

2) Δy ni topamiz:

$$\Delta y = (1 + \Delta x)^2 - y(1) = 2\Delta x + \Delta x^2.$$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni topamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + \Delta x.$$

4) Bu nisbatning limitini, ya'ni hosilasini hisoblaymiz:

$$y'(1) = f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2.$$

Endi yuqorida ko'rib o'tilgan masalalarda funksiylarning hosilalarini topdik deb ayta olamiz.

Masalan, to'g'ri chizikli harakatda v tezlik $s(t)$ yo'lning t vaqt bo'yicha hosilasidir: $v = s'(t)$.

Bir jinsli bo'lmagan sterjenning δ chizikli zichligi $m(l)$ massaning l uzunlik bo'yicha hosilasidir: $\delta = m'(l)$.

C issiqlik sig'imi $\mathcal{W}(\Theta)$ issiqlik miqdorining Θ temperatura bo'yicha hosilasidir: $C = \mathcal{W}'(\Theta)$.

$y = f(x)$ funksiyaning v o'zgarish tezligi $y = f(x)$ funksiyaning x bo'yicha hosilasidir: $v = f'(x)$.

Agar $y = f(x)$ funksiya biror kesmaning har bir nuqtasida hosilaga ega bo'lsa, u holda bu hosila shu kesmada aniqlangan funksiya bo'ladi. Bu funksiya $f'(x)$ bilan belgilanadi.

Hosilaning ta'rifiga ko'ra, funksiyaning ixtiyoriy x nuqtadagi hosilasini topish uchun quyidagi algoritmni ko'rsatish mumkin.

$y = f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi hosilasini topish uchun:

1) x ga Δx orttirma beriladi, u holda $y = f(x)$ funksiya ham Δy orttirma qabul qiladi va

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

bo'ladi.

2) funksiyaning Δy orttirmasi topiladi:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

3) funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbati topiladi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

4) bu nisbatning Δx nolga intilgandagi limiti, topiladi

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

§3. Hosilaning geometrik ma'nosi

Hosilaning geometrik tarzda talqin qilish egri chiziqqa urinma tushunchasi bilan bog'liqdir.

Aytaylik $y = f(x)$ uzluksiz funksiya berilgan bo'lib uning grafigi 1-chizmadagidek bo'lsin.

Nuqtada egri chiziqqa urunma tushunchasini eslaylik. Aytaylik M nuqtaning absissasi x_0 . Egri chiziqda $x_0 + \Delta x$ absissali M_1 nuqta olib, M va M_1 nuqtalar orqali to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq qaralayotgan egri chiziqqa kesuvchi bo'ladi. Chizmadan ko'rinadiki kesuvchining k_1 burchak koeffitsienti

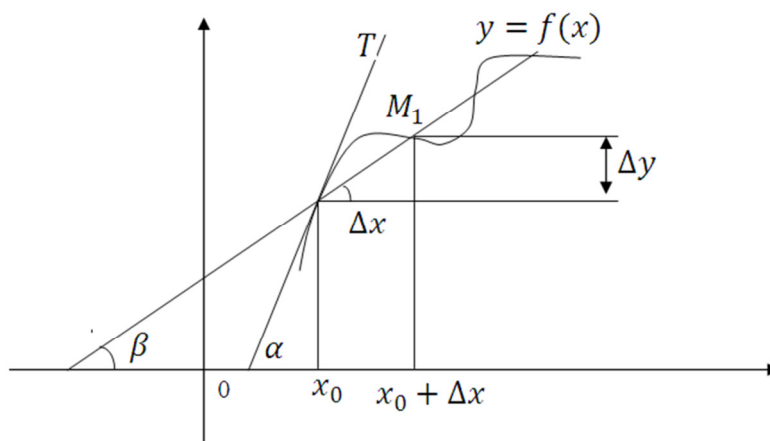
$$k_1 = \operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ga teng.

Endi Δx nolga intilsin ($\Delta x \rightarrow 0$), yani M_1 nuqtaning absissasi M nuqtaning absissasiga intilsin deylik, bu esa o'z navbatida M_1 nuqtaning egri chiziq bo'ylab M nuqtaga intilishini bildiradi.

Agar $\Delta x \rightarrow 0$ da $\beta \rightarrow \alpha$ bo'lib kesuvchi (MT) limitik xolatni egallashga intilsa, u holda (MT) ni egri chiziqqa $M(x_0; y_0)$ nuqtada urunma deyiladi.

Tarif. Egri chiziqqa uning M nuqtasida o'tkazilgan urunma deb M_1 nuqta egri chiziq bo'ylab



1-chizma

undagi M nuqtaga intilgandagi $(M; M_1)$ kesuvchining (MT) limitik holatiga aytiladi.

Urunma to'g'ri chizqdan iborat bo'lgani uchun uning tenglamasi

$$y = kx + b$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda k –burchak koefitsient bo'lib, u urinmaning burchak koefitsienti deyiladi, ya'ni $k = tg\alpha$.

Urunmaning ta'rifidan va $y = tgx$ ($x \neq \frac{\pi}{2}$) funksiyaning uzluksizligidan foydalanib, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} tg\beta = tg\alpha$, ya'ni

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_1$$

ga ega bo'lamiz.

Hosiladan foydalanib, egri chiziqning berilgan nuqtasidagi k ning qiymatini topish mumkin.

1-teorema. $y = f(x)$ egri chiziqning $M(x_0; y_0)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning k burchak koeffitsienti $y = f(x)$ funksiya hosilasining $x = x_0$ nuqtadagi qiymatiga teng:

$$k = f'(x_0) \quad (2)$$

Isbot. (1) tenglikka asosan

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_1.$$

1-chizmadan ko'rinadiki, $k_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Demak, $k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Bu bilan teorema isbot bo'ldi.

Agar funksiya biror nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda bu nuqtada uning grafigiga urinma mavjud bo'ladi. Shu bilan birga bu nuqtadagi hosilaning qiymati urinmaning burchak koeffitsientiga teng bo'ladi. Hosilaning geometrik ma'nosi ana shundan iborat.

2-teorema. $y = f(x)$ egri chiziqning $M(x_0; y_0)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinmasining tenglamasi

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad (3)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $y_0 = f(x_0)$.

Isbot. Urinma tenglamasini topish uchun to'g'ri chiziqning $y = kx + b$ tenglamasidagi k va b larni aniqlash kerak. (2) ga asosan:

$$k = f'(x_0).$$

b ni topish uchun urinmaning $M(x_0; y_0)$ nuqta orqali o'tishidan foydalanamiz. Bu esa $M(x_0; y_0)$ nuqtaning koordinatalari to'g'ri chiziq tenglamasini qanoatlantirishi kerakligini bildiradi, ya'ni

$$y_0 = kx_0 + b.$$

Bundan: $b = y_0 - kx_0 = y_0 - f'(x_0)x_0$.

k va b ning topilgan qiymatlarini to'g'ri chiziq tenglamasiga qo'ysak, egri chiziqning $M(x_0; y_0)$ nuqtasidan o'tuvchi urinma tenglamasi hosil bo'ladi:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

1-misol. $y = 2x^2 - 2$ parabolaning absissalari mos ravishda $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ $x_3 = 0$ bo'lgan nuqtalariga o'tkazilgan urinmalarning burchak koeffitsientlari topilsin.

Yechish. $y = 2x^2 - 2$ funksiyaning hosilasini topamiz.

1) x ga Δx orttirma beramiz:

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^2 - 2;$$

$$2) \Delta y = 2(x + \Delta x)^2 - 2 - (2x^2 - 2) = 4x\Delta x + 2\Delta x^2;$$

$$3) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4x\Delta x + 2\Delta x^2}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x;$$

$$4) y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x + 2\Delta x) = 4x.$$

Demak, $y = 2x^2 - 2$ funksiyaning hosilasi: $y' = 4x$. $x = 1$ bo'lganda urinmaning burchak koeffitsienti: $k = y'(1) = 4 \cdot 1 = 4$; $x = -2$ da esa $k = y'(-2) = 4 \cdot (-2) = -8$; $x = 0$ nuqtada $k = y'(0) = 4 \cdot 0 = 0$.

§4. Hosilaga ega bo'lgan funksiyaning uzluksizligi.

Teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya biror x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lsa, bu funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

$$\text{Berilgan: } y = f(x), \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

$$\text{Isbot qilish kerak: } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

$$\text{Isbot: } \Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \text{ bo'lgani uchun}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Bundan x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lgan funksiyaning shu nuqtada uzluksiz bo'lishi kelib chiqadi.

Natija. Agar $y = f(x)$ funksiya biror x_0 nuqtada uzlukli bo'lsa, u funksiya shu nuqtada hosilaga ega bo'lmaydi.

Agar $y = f(x)$ funksiya biror oraliqning har bir nuqtasida hosilaga ega bo'lsa, isbot qilingan teorema asosan u funksiya shu oraliqda uzluksiz bo'ladi.

Lekin funksiya biror x_0 nuqtada uzluksiz bo'lgani bilan shu nuqtada hosilaga ega bo'lmasligi ham mumkin. Shuning uchun funksiyaning biror nuqtada uzluksiz bo'lishi shu nuqtada hosilaning mavjud bo'lishi uchun zaruriy shart, biroq yetarli shart emas. Masalan, ushbu

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{agar } x \leq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 2x, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiyani tekshiraylik. Bu funksiya x ning hamma qiymatlarida uzluksizdir. Uning $x = 0$ nuqtadagi hosilasini izlaylik. Bu yerda $f(0) = 0$.

$$\Delta x > 0 \text{ bo'lganda } f(0 + \Delta x) = 2\Delta x;$$

$$\Delta x < 0 \text{ bo'lganda } f(0 + \Delta x) = \Delta x^2.$$

$\Delta x > 0$ bo'lganda

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2.$$

$\Delta x < 0$ bo'lganda esa

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0.$$

Shunday qilib, $\Delta x < 0$ va $\Delta x > 0$ bo'lib, $\Delta x \rightarrow 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning limiti turlicha bo'ladi. Bu esa Δx ortirma nolga ixtiyoriy usul bilan, ya'ni ham musbat, ham manfiy bolib intilganda, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ limiti mavjud emasligini bildiradi. Boshqacha aytganda, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning $x = 0$ nuqtadagi chap limiti

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

va o'ng limiti

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$$

bo'lib, ular bir-biriga teng bo'lmagani uchun $x = 0$ nuqtada $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ limiti mavjud bo'lmaydi. Demak, berilgan funksiya $x = 0$ nuqtada hosilaga ega bo'lmaydi, lekin funksiya $x = 0$ nuqtada uzkuksiz bo'ladi.

§5. Hosilani xisoblash qoidalari. Asosiy elementlar fuksiyalarni hosilalari

$u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar bitta oraliqda aniqlangan funksiyalar bo'lsin.

1-teorema. *Ikki funksiya yig'indisining hosilasi shu funksiyalar hosilalarining yig'indisiga teng, ya'ni*

$$[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x).$$

Berilgan: $y(x) = u(x) + v(x)$, $u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$, $v'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$.

Isbot qilish kerak: $y'(x) = [u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$.

Isbot. Hosilani topish qoidasi bo'yicha $y'(x)$ hosilani topamiz:

1) x ga Δx orttirma beramiz, u holda y, u, v lar ham $\Delta y, \Delta u, \Delta v$ orttirmalar qabul qiladi:

$$y + \Delta y = y(x + \Delta x) = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x),$$

$$u(x) + \Delta u = u(x + \Delta x),$$

$$v(x) + \Delta v = v(x + \Delta x);$$

2) $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - [u(x) + v(x)] = u(x) + \Delta u + v(x) + \Delta v - u(x) - v(x) = \Delta u + \Delta v;$

$$3) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x};$$

$$4) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) + v'(x).$$

Demak, $y'(x) = [u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$.

Bu teoremani har qanday chekli sondagi qo'shiluvchilar uchun to'g'ri ekanini matematik induksiya metodi bilan isbot qilish mumkin:

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n)' = u_1' + u_2' + u_3' + \dots + u_n'.$$

2-teorema. Ikki funksiya ayirmasining hosilasi shu funksiyalar hosilalarining ayirmasiga teng, ya'ni

$$[u(x) - v(x)]' = u'(x) - v'(x).$$

Bu teorema avvalgi teoremaga o'xshash isbotlanadi.

1-misol. a) $y = x + \sin x$; b) $y = x^2 + \cos x + 2$ funksiyalarning hosilalari topilsin.

Yechish. a) $u(x) = x$; $v(x) = \sin x$ deb belgilaymiz. U holda $u'(x) = 1$; $v'(x) = \cos x$.

1-teoremaga asosan

$$y'(x) = (x)' + (\sin x)' = 1 + \cos x.$$

b) $(x^2)' = 2x$; $(\cos x)' = -\sin x$; $(2)' = 0$ bo'lgani uchun birinchi va ikkinchi teoremalarga asosan

$$y'(x) = (x^2)' - (\cos x)' + (2)' = 2x + \sin x.$$

2-misol. $y = x^2 - x + 5$ egri chiziqning absissasi $x = -1$ bo'lgan nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning k burchak koeffitsienti topilsin.

Yechish. Urinmaning burchak koeffitsienti $k = y'(1)$. k ning bu qiymatini hisoblash uchun oldin $y'(x)$ ni topamiz. Isbotlangan teoremalarga asosan $y'(x) = 2x - 1$; $y'(-1) = -3$. Demak, $k = -3$.

Teorema. u' va v' hosilalarga ega bo'lgan ikkita u va v funksiyalar ko'paytmasining hosilasi

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

formula bilan hisoblanadi.

Bu formula *Leybnits formulasi* deyiladi.

Berilgan: $y = u(x) \cdot v(x)$,

$$u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

$$v'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Isbot qilish kerak: $y' = u'v + uv'$.

Isbot. 1) x ga Δx orttirma beramiz, u, v lar ham $\Delta y, \Delta u, \Delta v$ orttirmalar qabul qiladi:

$$y + \Delta y = y(x + \Delta x) = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x),$$

$$u(x) + \Delta u = u(x + \Delta x),$$

$$v(x) + \Delta v = v(x + \Delta x);$$

$$\begin{aligned} 2) \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) = \\ &= [u(x) + \Delta u] \cdot [v(x) + \Delta v] - u(x) \cdot v(x) = u(x) \cdot v(x) + v(x)\Delta u + \\ &+ u(x)\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v - u(x) \cdot v(x) = u(x)\Delta v + v(x)\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v; \end{aligned}$$

$$3) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x)\Delta v + v(x)\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} = u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v;$$

$$\begin{aligned} 4) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v \right) = u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \\ &+ v \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \\ &+ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = uv' + vu' + u' \cdot 0 = u'v + uv'. \end{aligned}$$

Bu yerda $v(x)$ funksiya x nuqtada hosilaga ega bo'lgani uchun x nuqtada uzluksiz bo'lib, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$ bo'ladi.

$$\text{Demak, } y' = (u \cdot v)' = u'v + uv'.$$

Natija. O'zgarmas ko'paytuvchini hosila belgisidan tashqariga chiqarish mumkin: $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$.

Haqiqatdan ham, teoremani $k \cdot f(x)$ ga ($k = \text{const}$) tadbiiq qilsak:

$$[k \cdot f(x)]' = (k)' \cdot f(x) + k[f(x)]' = 0 \cdot f(x) + k \cdot f'(x) = k \cdot f'(x).$$

Misol. Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin:

$$\text{a) } y = (2x + 1)(3x - 1); \text{ b) } y = x \cos x; \text{ s) } y = (x + 2)^3; \text{ d) } y = \frac{x}{10}.$$

$$\begin{aligned} \text{Yechish. a) } y' &= [(2x + 1)(3x - 1)]' = (2x + 1)'(3x - 1) + \\ &+ (2x + 1)(3x - 1)' = 12x + 1; \end{aligned}$$

$$\text{b) } y' = (x \cos x)' = (x)' \cos x + x(\cos x)' = \cos x - x \sin x;$$

Teorema. Agar x nuqtada u va v funksiyalar u' va v' hosilalarga ega va $v(x) \neq 0$ bo'lsa, bu nuqtada shu funksiyalar bo'linmasining hosilasi mavjud va bu hosila

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

formula bilan hisoblanadi.

$$\text{Berilgan: } y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}, \quad v(x) \neq 0, u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}, v'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

$$\text{Isbot qilish kerak: } y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Isbot. 1) x ga Δx ortirma beramiz:

$$y + \Delta y = y(x + \Delta x) = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)},$$

$$u(x) + \Delta u = u(x + \Delta x), \quad v(x) + \Delta v = v(x + \Delta x);$$

$$\begin{aligned} 2) \Delta y &= y(x + \Delta x) - y(x) = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x) + \Delta u}{v(x) + \Delta v} - \frac{u(x)}{v(x)} = \\ &= \frac{v(x)\Delta u - u(x)\Delta v}{v^2(x) + v(x)\Delta v}; \end{aligned}$$

$$3) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x) + v(x)\Delta v};$$

$$\begin{aligned} 4) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2(x) + v(x)\Delta v} = \frac{v(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v^2(x) + v(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v} = \\ &= \frac{u'v - uv'}{v^2}. \end{aligned}$$

$v(x)$ funksiya x nuqtada v' hosilaga ega bo'lgani uchun bu funksiya x nuqtada uzluksiz bo'lib, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$ bo'ladi.

$$\text{Demak, } y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

1-misol. $y = \frac{3}{x^2}$ funksiyaning y' hosilasi topilsin.

$$\text{Yechish. } y' = \left(\frac{3}{x^2}\right)' = \frac{(3)'x^2 - 3(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{0 \cdot x^2 - 3 \cdot 2x}{x^4} = -\frac{6}{x^3}.$$

2-misol. $y = \frac{1}{x} \cdot y' - ?$

$$\text{Yechish. } y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{(1)' \cdot x - 1 \cdot (x)'}{(x)^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Teorema. $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ darajali funksiyaning hosilasi x ning barcha qiymatlarida n ko'rsatkichning x^{n-1} darajada ko'paytirilganiga teng, ya'ni

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}. \quad (1)$$

Isbot. $n = 1$ da $f(x) = x$. Endi $n > 1$ deb olaylik. Isbotni matematik induksiya yordamida amalga oshiramiz. $n = 2$ bo'lganda $f(x) = x^2$ funksiyaning hosilasi

$$f'(x) = (x^2)' = 2x$$

bo'lishini ko'rgan edik. Demak, $n = 2$ bo'lganda (1) formula o'rinli. Agar (1) formula birdan katta ixtiyoriy $n = k$ natural son uchun to'g'ri bo'lsa, u $n = k + 1$ uchun ham to'g'ri bo'lishini ko'rsatamiz. Haqiqatan, ko'paytmaning hosilasini topish (yoki ko'paytmani differensiallash) qoidasiga ko'ra:

$$\begin{aligned} (x^{k+1})' &= (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k (x)' = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = \\ &= k \cdot x^k + x^k = (k + 1)x^k. \end{aligned}$$

Bundan matematik induksiya prinsipiga asosan (1) formula barcha $n > 1$ bo'lgan natural sonlar uchun x ning hamma qiymatlarida o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Bu teoremdan va hosilalarni hisoblashning (differensiallashning) ilgari chiqarilgan qoidalaridan ko'phadning hamma nuqtalarda differensiallanuvchi funksiya ekani kelib chiqadi.

Haqiqatan,

$$\begin{aligned} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n)' &= (a_0 x^n)' + (a_1 x^{n-1})' + \\ &+ (a_2 x^{n-2})' + \dots + (a_{n-1} x)' + (a_n)' = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \\ &+ (n-2) a_2 x^{n-3} + \dots + a_{n-1}. \end{aligned}$$

1-misol. $f(x) = x^{11}$ funksiya hosilasi $f'(x) = 11x^{10}$.

2-misol. $y = \frac{1}{2}x^{10} - \frac{3}{4}x^4 + 2x - 3$ bo'lsa,

$$y' = \frac{1}{2} \cdot 10x^9 - \frac{3}{4} \cdot 4x^3 + 2 = 5x^9 - 3x^3 + 2$$

Teorema. n butun daraja bo'lganda

$$f(x) = x^n$$

darajali funksiyaning hosilasi $n \geq 2$ da barcha x lar uchun, $n \leq 1$ da barcha $x \neq 0$ lar uchun n ko'rsatkich bilan x^{n-1} daraja ko'paytirilganiga teng, ya'ni

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}. \quad (1)$$

Isbot. $n > 1$ bo'lganda barcha x lar uchun (1) formulaning o'rinli bo'lishi yuqorida isbotlangan. Demak, $n \geq 2$ uchun (1) formula o'rinli.

Agar $n = 1$ va $x \neq 0$ bo'lsa,

$$(x)' = 1 = 1 \cdot x^{1-1}$$

bo'ladi. Bundan teorema $n = 1$ uchun ham o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Agar n butun manfiy son bo'lsa, $n = -m$ bo'lib, m natural sondan iboratdir. Bo'linmaning hosilasi haqidagi teoremani qo'llab, $x \neq 0$ da shuni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} (x^n)' &= (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{(1')x^m - 1(x^m)'}{(x^m)^2} = \frac{0 \cdot x^m - x^{m-1}}{x^{2m}} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = \\ &= -mx^{m-1-2m} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Shu bilan teorema isbotlandi.

Masalan, $x \neq 0$ bo'lganda, $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2}$.

Kasr-ratsional funksiyaning ikki kophadning nisbati shaklida tasvirlash mumkin bo'lgani uchun isbotlangan teoremadan muhim xulosaga kelib chiqadi:

Kasr-ratsional funksiya o'zining aniqlanish sohasida hosilaga ega bo'ladi.

1-misol. $(x^{-3})' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$.

2-misol. $\left(5x^6 - \frac{3}{x^4}\right)' = (5x^6)' - \left(\frac{3}{x^4}\right)' = 30x^5 + \frac{12}{x^5}$.

$y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x, y = \operatorname{sec} x, y = \operatorname{cosec} x$ funksiyalarning hosilalarini topish uchun avval ularni mos ravishda sinus va kosinuslar orqali ushbu

1) $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$; 2) $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$; 3) $\operatorname{sec} x = \frac{1}{\cos x}$; 4) $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$.

ko'rinishda ifodalab, ularning aniqlanish sohasini e'tiborga olib, so'ngra bo'linmaning hosilasini topish qoidasidan foydalanamiz.

$$1. \quad y = \operatorname{tg}x; \quad y' = (\operatorname{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \quad \text{Demak, } (\operatorname{tg}x)' = \sec^2 x.$$

$$2. \quad y = \operatorname{ctg}x; \quad y' = (\operatorname{ctg}x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{(\sin x)^2} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x. \quad \text{Demak, } (\operatorname{ctg}x)' = \operatorname{cosec}^2 x.$$

$$3. \quad y = \sec x; \quad y' = (\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{(1)' \cos x - 1 \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \operatorname{tg}x \cdot \sec x.$$

Demak, $(\sec x)' = \operatorname{tg}x \cdot \sec x$.

$$4. \quad y = \operatorname{cosec}x; \quad y' = (\operatorname{cosec}x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{(1)' \sin x - 1 \cdot (\sin x)'}{(\sin x)^2} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} = \operatorname{ctg}x \cdot \operatorname{cosec}x.$$

Demak, $(\operatorname{cosec}x)' = \operatorname{ctg}x \cdot \operatorname{cosec}x$.

$$1\text{-misol. } y = 3\sin x - 2\operatorname{tg}x + \lg 5. \quad y' = ?$$

$$\text{Yechish. } y' = (3\sin x)' - (2\operatorname{tg}x)' + (\lg 5)' = 3\cos x - \frac{2}{\cos^2 x}.$$

$$2\text{-misol. } y = \frac{1}{2}\sec x - 3\operatorname{cosec}x + \sin 10. \quad y' = ?$$

$$\text{Yechish. } y' = \left(\frac{1}{2}\sec x\right)' - (3\operatorname{cosec}x)' + (\sin 10)' = \frac{1}{2}\operatorname{tg}x \sec x + 3\operatorname{ctg}x \operatorname{cosec}x.$$

Asosiy funksiyalar hosilalarini jadval ko'rinishida yozaylik:

$$1. \quad y = c \quad (c = \text{const}), \quad y' = 0.$$

$$2. \quad y = x^n \quad (n\text{-butin son}), \quad y' = nx^{n-1}.$$

$$3. \quad y = \sqrt{x}, \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$4. \quad y = \sin x, \quad y' = \cos x.$$

$$5. \quad y = \cos x, \quad y' = -\sin x.$$

$$6. \quad y = \operatorname{tg}x, \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$7. \quad y = \operatorname{ctg}x, \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

- | | |
|----------------------------------|--|
| 8. $y = \sec x,$ | $y' = \operatorname{tg} x \cdot \sec x .$ |
| 9. $y = \operatorname{cosec} x,$ | $y' = \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x .$ |
| 10. $y = u(x) + v(x),$ | $y' = u' + v' .$ |
| 11. $y = u(x) - v(x),$ | $y' = u' - v' .$ |
| 12. $y = u(x) \cdot v(x),$ | $y' = u'v + uv' .$ |
| 13. $y = \frac{u(x)}{v(x)},$ | $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} .$ |

Bu jadval yordamida turli funksiyalarning hosilalari topiladi.

§6. Murakkab va teskari funksiyalarni hosilalari

$y = f[g(x)]$ murakkab funksiyani qaraymiz. Bu yerda $u = g(x)$ oraliqdagi argument bo'lib, x esa asosiy argumentdir. y murakkab funksiyani hosil qilishda ikkita u va x argument ishtirok etganligi uchun qaysi argument bo'yicha hosila olinganligi quyidagicha belgilanadi: $y(x)$ funksiyaning x bo'yicha hosilasi

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} ;$$

$y(u)$ funksiyaning u bo'yicha, $u(x)$ funksiyaning x bo'yicha hosilasi mos ravishda

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u \quad \text{va} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x .$$

Teorema. Agar: 1) $u = g(x)$ funksiya biror x_0 nuqtada $u'_x = g'(x_0)$ hosilaga ega; 2) $y = f(u)$ funksiya esa tegishli $u_0 = g(x_0)$ nuqtada $y'_u = f'(u_0)$ hosilaga ega bo'lsa, $y = f[g(x)]$ murakkab funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega va bu hosila $f(u)$ va $g(x)$ funksiyalar hosilalarining ko'paytmasiga tengdir:

$$[f(g(x))]' = f'_u(g(x_0)) \cdot g'(x_0) = f'_u(u_0) \cdot u'_x(x_0)$$

yoki qisqacha

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x .$$

Isbot. Teoremaning shartiga asosan

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u.$$

Shuning uchun $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ nisbatning o'zi y' limit bilan α cheksiz kichikning yig'indisiga teng bo'ladi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha, \quad (1)$$

Bu yerda α kattalik Δu ga bog'liq bolib, u bilan birga nolga intiladi. (1) dan

$$\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha \Delta u. \quad (2)$$

(2) ni hadma-had Δx ga bo'lsak:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x}. \quad (3)$$

Agar Δx nolga intilsa, u holda Δu ham nolga intiladi, shu bilan birga Δu bilan bog'langan α kattalik ham nolga intiladi. (3) da Δx ni nolga intiltirib limitga o'tsak:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x + 0 \cdot u'_x = y'_u \cdot u'_x. \quad (4)$$

Quyidagi murakkab funksiyalarning hosilalari topilsin:

1-misol. $y = (3 - 5x + x^2)^{100}$.

Yechish. $y = u^{100}$, $u = 3 - 5x + x^2$. (4) formulaga asosan

$$y'_x = (u^{100})'_u \cdot (3 - 5x + x^2)' = 100(3 - 5x + x^2)^{99}(2x - 5).$$

2-misol. $y = (2 + 5x)^n, n \in \mathbb{N}$.

Yechish. $y = u^n$, $u = 2 + 5x$;

$$y'_x = (u^n)'_u \cdot (2 + 5x)' = nu^{n-1} \cdot 5 = 5n(2 + 5x)^{n-1}.$$

Teorema. Agar 1) $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada chekli va noldan farqli $f'(x_0)$ hosilaga ega; 2) bu funksiya uchun $y_0 = f(x_0)$ nuqtada $x = g(y)$ uzluksiz teskari funksiya mavjud bo'lsa, u holda $x = g(y)$ teskari funksiya uchun $y_0 = f(x_0)$ nuqtada $\frac{1}{f'(x_0)}$ ga teng $g'(y_0)$ hosila mavjud bo'ladi, ya'ni

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{yoki} \quad g'(y_0) = \frac{1}{f'[g(y_0)]},$$

yoki

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Isbot. y_0 ga ixtiyoriy Δy orttirma beramiz, u vaqtda $x = g(y)$ funksiya ham Δx orttirmaga ega bo'ladi: $x = g(y)$ funksiya uzluksiz bo'lgani uchun $\Delta y \rightarrow 0$ da $\Delta x \rightarrow 0$ bo'lishini ta'kidlab, ushbuga ega bo'lamiz:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Bundan limitga o'tsak, o'ng tomonidagi maxraj $f'(x) \neq 0$ limitga intiladi. Demak, chap tomon uchun $\frac{1}{f'(x_0)}$ qiymatga teng limit mavjud. Bu esa $g'(y_0)$ hosiladan iboratdir. Shunday qilib, sodda

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

formulaga ega bo'lamiz.

II. BOB. HOSILANING BA'ZI TADBIQLARI

§1. Ildizlarni tadrijiy hisoblash.

Hosilaning ta'rifiga asosan $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0). \quad (1)$$

$\Delta x \rightarrow 0$ da $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ nisbatning limiti $f'(x_0)$ hosilaga teng bo'lgani uchun $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ nisbatning o'zi esa $f'(x_0)$ hosila bilan α cheksiz kichikning yig'indisiga teng, ya'ni

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha \quad (2)$$

bo'ladi. Bu yerda $\Delta x \rightarrow 0$ da α ham nolga intiladi. (2) dan:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x. \quad (3)$$

$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ bo'lgani uchun bu ayirma Δx ning funksiyasi bo'ladi. $\alpha \cdot \Delta x$ miqdor ham Δx ning funksiyasi bo'lgani uchun uni $R(\Delta x)$ deb belgilasak, (3) tenglik quyidagicha yoziladi:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + R(\Delta x). \quad (4)$$

Bundan

$$R(\Delta x) = \Delta f(x_0) - f'(x_0)\Delta x. \quad (5)$$

Bu yerda

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{R(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \quad (6)$$

Xaqiqatan ham,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{R(\Delta x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0) - f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right] = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Bu holda, ya'ni (6) tenglik o'rinli bo'lganda, $R(\Delta x)$ funksiya Δx ga nisbatan cheksiz kichik deyiladi.

Agar $y = f(x)$ funksiya uchun (4) va (6) tengliklar bajarilsa, (4) tenglikdagi birinchi $f'(x_0)\Delta x$ qo'shiluvchini funksiya orttirmasining bosh qismi, $R(\Delta x)$

qoldiqni (ya'ni ikkinchi qo'shiluvchini) esa Δx ga nisbatan cheksiz kichik deyiladi. Shunday qilib, (2) va (4) tengliklardan Δx ning yetarlicha kichik qiymatlari uchun

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \approx f'(x_0)$$

bo'lishi va demak,

$$\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \quad (7)$$

ekani kelib chiqadi. (7) formulani quyidagicha ham yozish mumkin:

$$f(x) \approx \Delta f(x_0) - f'(x_0)\Delta x \quad (7')$$

(7) va (7') formulalar sodda taqribiy hisoblashlar uchun asosiy formula hisoblanadi.

x ning qiymati noldan yetarlicha kichik farq qilganda $\sqrt[n]{x+1}$ ni taqribiy hisoblash uchun formula chiqaramiz.

Buning uchun

$$f(x) = \sqrt[n]{x+1}, \quad x_0 = 0$$

deb faraz qilamiz. U holda

$$\Delta x = x - x_0 = x, \quad f(x_0) = f(0) = 1;$$

$$f'(x) = \frac{1}{n}(1+x)^{-\frac{1}{n}-1}, \quad f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{n}$$

bo'lgani uchun (7) formulaga asosan x ning nolga yetarlicha yaqin qiymatlarida

$$\sqrt[n]{x+1} \approx 1 + \frac{1}{n}x \quad (8)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Endi $\sqrt[n]{a^n+x}$ ($a > 0$) ni taqribiy hisoblash masalasini ko'raylik. (8) taqribiy tenglikdan foydalanib,

$$\sqrt[n]{a^n+x} = a \sqrt[n]{1 + \frac{x}{a^n}} \approx a \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{x}{a^n} \right) = a + \frac{x}{na^{n-1}}.$$

ya'ni

$$\sqrt[n]{a^n+x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}} \quad (9)$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu yerda $|x|$ ning qiymati a^n dan yetarlicha kichik deb faraz qilinadi.

Xususiy holda, (9) formulada $n = 2$ desak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\sqrt[n]{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a}, \quad (10)$$

1-misol. $\sqrt{5}$ hisoblansin.

Yechish. (10) formulani qo'llasak,

$$\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1} = 2 + \frac{1}{2 \cdot 2} = 2,25.$$

2-misol. $\sqrt{34}$ hisoblansin.

$$\text{Yechish. } \sqrt{34} = \sqrt{6^2 - 2} = \sqrt{6^2 + (-2)} \approx 6 + \frac{-2}{2 \cdot 6} \approx 5,833.$$

3-misol. $\sqrt{120}$ hisoblansin.

$$\text{Yechish. } \sqrt{120} = \sqrt{11^2 - 1} \approx 11 - \frac{1}{22} \approx 10,955$$

Endi ushbu

$$\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0} \Delta x \quad (x_0 \neq 0) \quad (11)$$

taqribiy formulani isbot qilamiz.

Buning uchun

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

funksiyani qaraymiz. Bu yerda

$$f(x_0) = \sqrt[n]{x_0},$$

$$f(x_0 + \Delta x) = \sqrt[n]{x_0 + \Delta x},$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{n} x_0^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0} \quad (x_0 \neq 0).$$

(7) formulaga asosan

$$\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[n]{x_0} \approx \frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0} \Delta x$$

yoki

$$\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0} \Delta x$$

bo'lib, (11) formula hosil bo'ladi.

1-misol. $\sqrt{4,01}$ hisoblansin.

$$Yechish. \sqrt{4,01} = \sqrt{4 + 0,01} \approx \sqrt{4} + \frac{\sqrt{4}}{2 \cdot 2^2} \cdot 0,01 = 2,0025.$$

2-misol. $\sqrt[3]{27,03}$ hisoblansin.

$$Yechish. \sqrt[3]{27,03} = \sqrt[3]{27 + 0,03} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{\sqrt[3]{27}}{3 \cdot 27} \cdot 0,03 = 3,0011.$$

§2. Urinma tenglamasini tuzish.

I bobni §3-da $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda $y = f(x)$ egri chiziqning x_0 absissali nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti

$$k = f'(x_0) \quad (1)$$

bo'lishini hamda shu $y = f(x)$ egri chiziqning x_0 absissali nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasi

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad (2)$$

bo'lishini ko'rgan edik.

$y = f(x)$ egri chiziqning $x = x_0$ nuqtasidagi urinmaning k burchak koeffitsienti esa urinma bilan Ox o'qining orasidagi musbat yo'nalishi bo'yicha olingan α burchakning tangensiga teng:

$$k = tg\alpha.$$

1-misol. $f(x) = x^2 + 1$ parabolaning $M(1; 2)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasi topilsin.

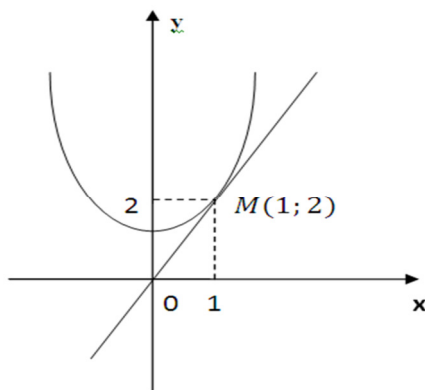
Yechish. Avval urinmaning burchak koeffitsientini topamiz. Buning uchun $f(x) = x^2 + 1$ funksiya dan hosila olamiz:

$$f'(x) = 2x.$$

(1) formulaga asosan $x_0 = 1$ nuqtada urinmaning burchak koeffitsienti

$$k = f'(x_0) = f'(1) = 2.$$

(2) tenglamaga muvofiq $f(x) = x^2 + 1$ funksiya grafigiga $M(1; 2)$ nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasi $y - 2 = 2(x - 1)$, ya'ni $y = 2x$ bo'ladi (1-chizma).



1-chizma

§3. Hosila yordamida tezlik va tezlanishni topish.

Jism $x(t)$ harakat qonuni bo'yicha to'g'ri chiziqli harakat qilganda $x(t)$ funksiyaning t vaqt bo'yicha hosilasi

$$v(t) = x'(t)$$

jisimning t paytdagi tezligidan iborat bo'lishi bizga ma'lumdir. $v(t)$ tezlikning t vaqt bo'yicha hosilasi

$$a(t) = v'(t) = x''(t)$$

jisimning t paytdagi tezlanishi bo'ladi.

Aytaylik, jism

$$x(t) = pt^2 + qt + r \quad (1)$$

qonuni bo'yicha harakatlanayotgan bo'lsin. U vaqtda jisimning t paytdagi tezligi:

$$v(t) = x'(t) = 2pt + q \quad (2)$$

tezlanishi esa:

$$a(t) = v'(t) = x''(t) = 2p \quad (3)$$

(3) dan ko'rinadiki. (1) qonun bo'yicha harakatlanayotgan jism tezlanishi o'zgarimas bo'ladi.

Agar $p > 0$ bo'lsa, harakat tekis tezlanuvchan, $p < 0$ bo'lsa, tekis sekinlanuvchan bo'ladi.

Aytaylik, jism biror qo'zg'almas o'q atrofida $\varphi = \varphi(t)$ qonun bo'yicha aylanma harakat qilayotgan bo'lsin. Aylanma harakatning $\omega(t)$ burchak tezligi deb $\varphi = \varphi(t)$ (rad) burchakning t vaqt davomida o'zgarish tezligiga aytiladi. $\omega(t)$ burchak tezlik $\varphi = \varphi(t)$ (rad) burchakdan t vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng:

$$\omega(t) = \varphi'(t).$$

Aylanma harakatning $\varepsilon(t)$ burchak tezlanishi deb $\omega(t)$ burchak tezlikning t vaqt davomida o'zgarish tezligiga aytiladi. $\varepsilon(t)$ burchak tezlanish $\omega(t)$ burchak tezlanishdan t vaqt bo'yicha olingan hosilasiga teng:

$$\varepsilon(t) = \omega'(t).$$

1-misol. Jismning qo'zg'almas o'q atrofida

$$\varphi(t) = 3t^2 - 4t + 2 \text{ (rad)}$$

qonuni bo'yicha aylanadi. Jisimning ixtiyoriy t momentidagi va $t = 4$ s dagi $\omega(t)$ burchak tezligi va burchak tezlanishini toping.

Yechish. Vaqtning ixtiyoriy t momrntidagi $\omega(t)$ burchak tezligi:

$$\omega(t) = \varphi'(t) = 6t + 4;$$

burchak tezlanishi: $\varepsilon(t) = \omega'(t) = 6$.

$t = 4$ s momentidagi burchak tezligi:

$$\omega(4) = \varphi'(4) = 20.$$

2-misol. Aylanib turgan maxovik to'rmizlangandan boshlab $t(s)$ da $\varphi(t) = 4t - 0.3t^2$ (rad) qonun bilan $\varphi(t)$ burchakka buriladi.

1) Maxovikning $t = 2$ s dagi burchak tezligi $\varphi(t)$ ni toping.

2) Vaqtning qanday momentida maxovik to'xtaydi?

Yechish. 1) Ixtiyoriy t momentdagi maxovikning $\omega(t)$ burchak tezligi:

$$\omega(t) = \varphi'(t) = 4 - 0.3 \cdot 2t = 4 - 0.6t;$$

$t = 2s$ momentdagi burchak tezligi:

$$\omega(2) = 2.8 \frac{\text{rad}}{\text{s}};$$

3) $\omega(t) = 0$ deb, t vaqtni topamiz:

$$4 - 0.6t = 0,$$

$$0.6t = 4,$$

$$t = \frac{4}{0.6} = 6\frac{2}{3}.$$

4. Hosilaning funksiyalarni tekshirishga tadbiri

1. Funksiyaning o'sishi va kamayishi

Funksiya hosilasini bilish funksiya haqida xulosa chiqarish imkoniyatini beradi.

Quyida biz funksiyaning hosilasi bo'yicha uning o'suvchi yoki kamayuvchi bo'lishi haqida fikr yuritish mumkinligini ko'rsatamiz. $f(x)$ funksiya grafigiga x_0 nuqtada o'tkazilgan urinma bilan Ox o'qning musbat yo'nalishi orasidagi burchak o'tkir bo'lsa, bu burchakning tangensi musbat, ya'ni x_0 nuqtada funksiyaning $f'(x_0)$ hosilasi musbat ($f'(x_0) > 0$) bo'ladi. $f(x)$ funksiya grafigiga x_0 nuqtada o'tkazilgan urinma bilan Ox o'qning musbat yo'nalishi orasidagi burchak o'tmas bo'lsa, burchak tangensi manfiy, ya'ni x_0 nuqtada funksiyaning $f'(x_0)$ hosilasi manfiy ($f'(x_0) < 0$) bo'ladi. $y = f(x)$ funksiya grafigiga x_0 nuqtada o'tkazilgan urinma bilan Ox o'qning musbat yo'nalishi orasidagi burchak nolga teng bo'lsa, u holda bu burchakning tangensi nolga teng, ya'ni x_0 nuqtada funksiyaning $f'(x_0)$ hosilasi nolga teng ($f'(x_0) = 0$) bo'ladi.

1-teorema. Agar $f'(x_0) > 0$ bo'lsa, shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $[x_0; x_0 + \delta]$ oraliqdagi barcha x lar uchun $f(x) < f(x_0)$ bo'ladi va $[x_0 - \delta; x_0]$ oraliqdagi barcha x lar uchun $f(x) > f(x_0)$ bo'ladi.

Boshqacha aytganda, agar $f'(x_0) > 0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'sadi

$$\text{Isbot. } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

bo'lganidan limitning ta'rifiga ko'ra $\varepsilon = f'(x_0) > 0$ soni uchun shunday $\delta > 0$ son mavjudki, $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ oraliqqa tegishli barcha $x \neq x_0$ lar uchun

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < f'(x_0)$$

tengsizlik bajariladi. Bundan

$$-\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) < f'(x_0),$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) > f'(x_0)$$

yoki

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad (1)$$

ekani kelib chiqadi.

$[x_0; x_0 + \delta]$ oraliqdagi barcha x lar uchun $x - x_0 > 0$ bo'lgani uchun (1) tengsizlikdan $f(x) > f(x_0)$ bo'lishi kelib chiqadi.

$[x_0 - \delta; x_0]$ oraliqdagi barcha x lar uchun $x - x_0 < 0$ bo'lgani sababli (1) tengsizlikdan $f(x) < f(x_0)$ bo'lishi kelib chiqadi. Shu bilan teorema isbot bo'ldi.

2-teorema. Agar $f'(x_0) < 0$ bo'lsa, shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $[x_0; x_0 + \delta]$ oraliqdagi barcha x lar uchun $f(x) < f(x_0)$ bo'ladi va $[x_0 - \delta; x_0]$ oraliqdagi barcha x lar uchun $f(x) > f(x_0)$ bo'ladi.

Boshqacha aytganda, agar $f'(x_0) < 0$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada kamayadi.

Isbot. $p(x) = -f(x)$ funksiyani qaraymiz.

Teoremaning shartiga ko'ra $p'(x_0) = -f'(x_0) > 0$ bo'lgani uchun 1-teoremaga asosan $p(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'sadi. Demak, shunday $\delta > 0$

son topiladiki, $[x_0; x_0 + \delta]$ oraliqdagi barcha x lar uchun $p(x) > p(x_0)$, ya'ni $-f(x) > -f(x_0)$ yoki $f(x) > f(x_0)$ tengsizlik bajariladi. $[x_0 - \delta; x_0]$ oraliqdagi barcha x lar uchun $p(x) < p(x_0)$, ya'ni $-f(x) < -f(x_0)$ yoki $f(x) < f(x_0)$ bo'ladi. Shu bilan ikkinchi teorema isbot bo'ldi.

Funksiyaning o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishining yetarli sharti quyidagi teoremada ifodalanadi.

3-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya X oraliqning har bir nuqtasida musbat (manfiy) hosilaga ega bo'lsa, u hoolda $f(x)$ funksiya shu X oraliqda o'sadi (kamayadi).*

Bu teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

1-misol. $y = x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ funksiyaning hosilasi

$$y' = (2n + 1)x^{2n}$$

bo'lib, bu hosila koordinata boshidan ($x = 0$) tashqari hamma joyda musbatdir. Shuning uchun $y = x^{2n+1}$ funksiya hamma joyda o'suvchi bo'ladi.

2-misol. $y = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$ funksiyaning hosilasi

$$y' = 2nx^{2n-1}$$

bo'lib, $x < 0$ da $y' < 0$ va $x > 0$, da $y' > 0$. Shuning uchun $y = x^{2n}$ funksiya koordinata boshidan chapda kamayuvchi, koordinata boshidan o'ngda esa o'suvchi bo'ladi.

Funksiya biror intervalda o'suvchi bo'lib, boshqa bir intervalda esa kamayuvchi bo'lishi mumkin. Funksiya o'suvchi yoki kamayuvchi bo'lgan intervallarni funksiyaning monoton o'zgarish intervallari deyiladi.

Masalan, $f(x) = x^3$ funksiya o'zining aniqlanish sohasida bir xil monoton o'zgarish oralig'iga ega bo'ladi, ya'ni bu funksiya \mathbb{R} da faqat o'suvchi bo'ladi.

1-misol. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ funksiyaning monoton o'zgarish intervallari topilsin.

Yechish. 1-usul. Berilgan funksiyaning hosilasini topamiz:

$$y' = x^2 - 4x + 3.$$

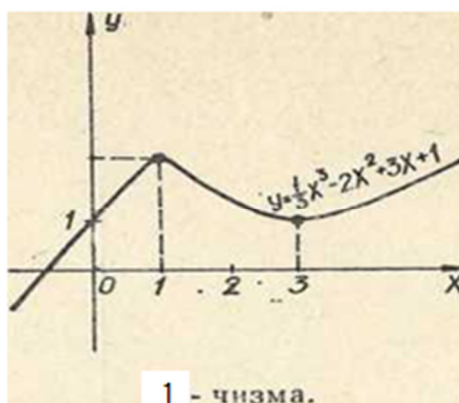
Bu hosila x ning hamma qiymatlarida uzluksiz. Hosila 0 ga aylanuvchi nuqtalarni topamiz. Buning uchun tenglamani yechamiz:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

$$\text{Demak, } y' = (x - 1)(x - 3).$$

y'	+	-	+
y	O'sadi	kamayadi	O'sadi

Son to'g'ri chizig'ini $(-\infty; 1)$, $[1;3)$, $[3;+\infty)$ intervallarga ajratamiz. Har bir intervalda hosila uzluksiz bo'lgani uchun uni ishorasi o'zgarmaydi. Xar bir intervaldagi hosilaning ishorasini aniqlab, quyidagicha jadval tuzamiz:



2-usul. Avval funksiyaning o'sish intervallarini topamiz. Buning uchun hosila qaysi oraliqlarda musbat bo'lishini bilish kerak.

$$y' = x^2 - 4x + 3 > 0$$

yoki

$$(x - 1)(x - 3) > 0.$$

tengsizlikni yechamiz. Natijada hosilaning $[-\infty; 1]$ va $[3;+\infty]$ intervallarda musbat bo'lishi kelib chiqadi. Shu tengsizlikning o'zidan hosila $[1;3]$ intervalda manfiy bo'lishini topamiz. Demak funksiya bu intervalda kamayadi funksiya grafigi 1-chizmada ko'rsatilgan.

2-misol. $y = \frac{3}{3-x}$ funksiyaning monoton o'zgarish intervallari topilsin.

$$\text{Yechish. } y' = \frac{2}{(3-x)^2}$$

Funksiyaning hosilasi $x = 3$ nuqtada uzulishiga ega bo'lib, x ning boshqa hamma qiymatlarida hosila uzliksiz bo'ladi.

Son to'g'ri chizig'ni $[-\infty; 3]$ av $[3; +\infty]$ intervallarga ajratamiz. Bu intervallarning har birida hosila uzluksiz va o'z ishorasini o'zgartirmaydi. Har bir intervalda hosilaning ishorasini aniqlab, quyidagi jadvalga ega bo'lamiz:

X	$[-\infty; 3]$	$[3; +\infty]$
y'	+	+
Y	o'sadi	o'sadi

Funksiyaning maksimum va minimumlari

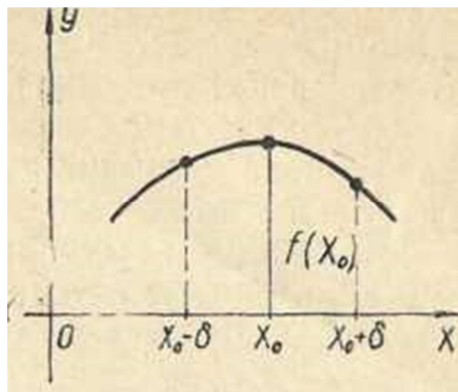
Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan x_0 nuqtaning shunday $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ ($\delta > 0$) atrofini topish mumkin bo'lsaki, bu atrofdagi barcha $x \neq x_0$ lar uchun

$$f(x) > f(x_0)$$

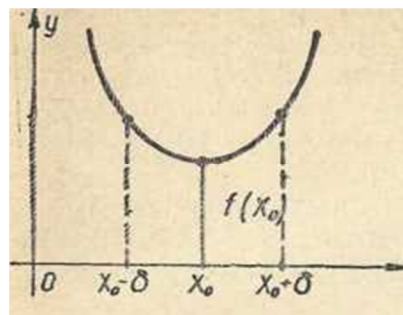
Tlengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega deyiladi.

x_0 nuqtani $f(x)$ funksiyaning *minimum nuqtasi*, $f(x_0)$ qiymat esa $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi *minimum qiymati* deyiladi (1-chizma).

Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan x_0 nuqtaning shunday $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ ($\delta > 0$) atrofini topish mumkin bo'lsaki, bu atrofdagi barcha $x \neq x_0$ lar uchun $-f(x) < f(x_0)$



1-chizma



2-chizma

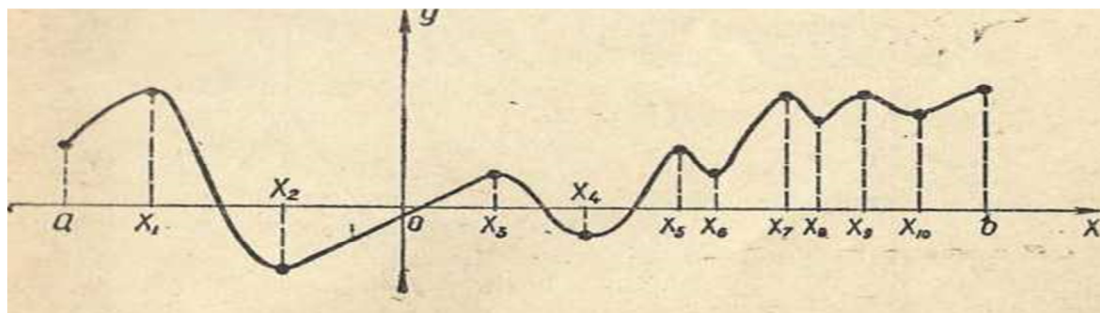
tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega deyiladi.

x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning *maksimum nuqtasi*, $f(x_0)$ qiymat esa $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi *maksimum qiymati* deyiladi (1-chizma).

Shuni ta'kidlab o'tamizki, maksimum (minimum) ta'rifida funksiya x_0 nuqtaning ikkala tomonida aniqlangan deb faraz qilinadi. „Maksimum“ va „minimum“ lotincha so'zlar bo'lib, eng katta va eng kichik degan ma'noni bildiradi.

Biz yuritayotgan muhokamada maksimum va minimum terminlari orqali x_0 nuqtaning yetarli kichik atrofida $f(x)$ funksiyaning o'zgarishi harakterlanadi.

Shuning uchun 2-chizmada ko'rsatilganidek, bitta funksiyaning o'zi bir necha maksimum va minimumlarga ega bo'lishi, shu bilan birga funksiya minimumi shu funksiyaning maksimumidan katta bo'lishi mumkin. Shu sababli maksimum va minimum terminlarini funksiyaning aniqlanish sohasidagi uning eng katta va eng



3-chizma

kichik qiymatlari tushunchasi bilan bir xil deb qarash mumkin emasdir. 1-chizmadagi funksiya uchun x_1, x_3, x_5, x_7, x_9 nuqtalarda funksiya maksimumga, $x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}$ nuqtalarda esa funksiya minimumga ega, shu bilan birga funksiyaning x_{10} nuqtadagi minimumi x_3 nuqtadagi maksimumidan kattadir.

Funksiyaning maksimum va minimum nuqtalari shu funksiyaning *ekstremum nuqtalari* deyiladi. Funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlari funksiyaning *ekstremumlari* deyiladi.

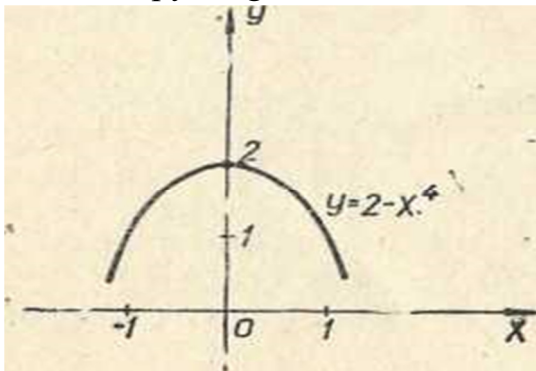
1-misol. $f(x) = 2 - x^4$ funksiya $x=0$ nuqtada maksimumga erishadi. Bu yerda $f(0) = 2$ va $x \neq 0$ lar uchun

$$f(x) - f(0) = (2 - x^4) - 2 = -x^4 < 0.$$

Demak, $x = 0$ nuqtaning ixtiyoriy atrofida

$$f(0) > f(x)$$

tengsizlik bajariladi (4-chizma). Shuning uchun funksiya $x = 0$ nuqtada $f(0) = 2$ maksimum qiymatga erishadi.



4-chizma

2-misol. $f(x) = 2 - 2|x|$ funksiya $x = 0$ nuqtada maksimumga ega.

Bu yerda $f(0) = 2$ va $x \neq 0$ lar uchun

$$f(x) - f(0) = 2 - 2|x| - 2 = -2|x| < 0.$$

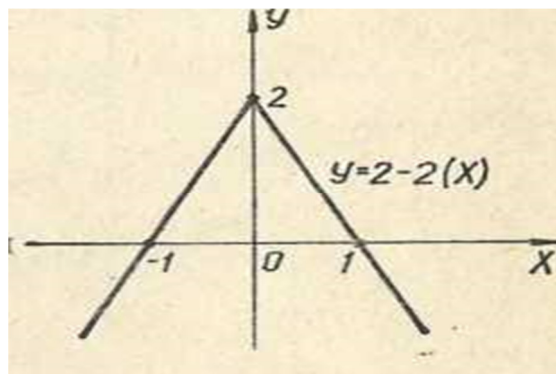
Demak, $x=0$ nuqtaning ixtiyoriy atrofida

$$f(0) > f(x)$$

tengsizlik bajariladi (5-chizma). Shuning uchun funksiya $x = 0$ nuqtada $f(0)=2$ ga teng maksimum qiymatga erishadi.

Funksiyalarning maksimum va minimumlari nazariyasi hosila tushunchasi yordami bilan to'liq asoslanadi. Hosila tushunchasi asosida funksiyaning ekstremumi mavjud bo'lishi uchun zarur va yetarli shartlarni topa olamiz.

Ferma teoremasi. Agar x_0 nuqta $f(x)$ funksiya uchun ekstremum nuqta bo'lib, bu nuqtada hosila mavjud bo'lsa, bu hosila nolga teng bo'ladi, ya'ni $f'(x_0) = 0$.



Isbot. Aniqliq uchun x_0 nuqtani maksimum nuqta deb hisoblaymiz va teoremani teskarisini faraz qilish yo'li bilan isbotlaymiz.

$f'(x_0) \neq 0$ bo'lsin. Unda ikki hol bo'lishi mumkin:

$$f'(x_0) > 0 \text{ va } f'(x_0) < 0$$

1. $f'(x_0) > 0$ bo'lsin. Mazkur paragrafnig 1-punktidagi 1-teoremaga ko'ra shunday $\delta > 0$ son mavjudki, $[x_0; x_0 + \delta]$ intervaldagi barcha x lar uchun $f(x) > f(x_0)$ tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlik x_0 ning maksimum nuqta bo'lishiga zidlik qiladi. Bundan $f'(x_0) > 0$ tengsizlikning noto'g'ri ekani kelib chiqadi.

2. $f'(x_0) < 0$ bo'lsin. U holda 1-punktning 2-teoremasigako'ra shunday $\delta > 0$ son mavjudki, $[x_0 - \delta; x_0]$ intervaldagi barcha x lar uchun $f(x) > f(x_0)$ tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlik x_0 ning maksimum nuqta bo'lishiga zidlik qiladi. Bundan $f'(x_0) < 0$ tengsizlikning noto'g'ri ekani kelib chiqadi.

Shunday qilib, funksiyaning maksimum nuqtasida $f'(x_0)$ hosila noldan katta ham, noldan kichik ham bo'la olmaydi. Demak, $f'(x_0) = 0$.

x_0 nuqta minimum nuqta bo'lgan hol xam huddi shunday tekshirib chiqiladi.

$f'(x_0) = 0$ bo'lishi shu nuqtada $y = f(x)$ funksiya grafigiga o'tkazilgan urinmaning Ox o'qqa parallel ekanini bildiradi.

Demak, ekstremum nuqtalarda hosila mavjud bo'lsa, bu nuqtalarda hosila nolga teng.

Ferma teoremasi ekstremum mavjud bo'lishining zaruriy shartidir.

Boshqacha aytganda, biror x_0 nuqtada funksiya hosilasi nolga teng, ya'ni

$$f'(x_0) = 0$$

bo'lishi shu x_0 nuqtada ekstremumning mavjud bo'lishi uchun zaruriy shartdir.

$f'(x_0) = 0$ bo'lgan nuqtalar funksiyaning *kritik nuqtalari* deyiladi.

Biroq har bir kritik nuqtada funksiya ekstremumga erishavermaydi. Masalan, $f(x) = x^3$ funksiya uchun $f'(0) = 0$. Ammo bu nuqtada funksiya ekstremumga ega emas. $f(x) = x^3$ funksiya hamma vaqt o'suvchi.

Shuning uchun ham biror nuqtada funksiya hosilasining nolga teng bo'lishi shu nuqtada funksiya ekstremumi mavjud bo'lishining faqat zaruriy shartidir.

Biz hosila nolga teng bo'lgan nuqtalarni, ya'ni kritik nuqtalarni qarab chiqdik. Endi hosila mavjud bo'lmagan nuqtalarni qaraymiz. Bu nuqtalarda ham funksiyaning ekstremumi mavjud bo'lishi yoki mavjud bo'lmasligi mumkin.

1- misol. $f(x) = |x| + \frac{3}{2}x$ funksiyaning $x = 0$ nuqtada tekshiraylik.

Bu funksiya $x = 0$ nuqtada hosilaga ega emas. Buni ko'rsatish uchun berilgan funksiyaning

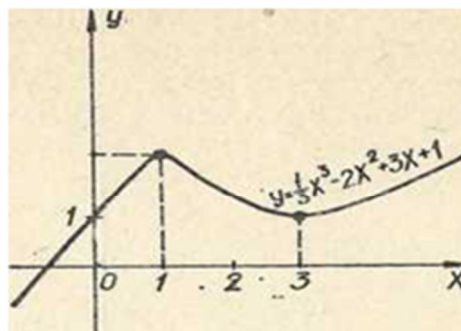
$$|x| = f(x) - \frac{3}{2}x$$

ko'rinishda yozamiz. Agar $f(x)$ funksiya $x = 0$ nuqtada hosilaga ega deb faraz qilinsa, u holda $f(x) - \frac{3}{2}x$ ham $x = 0$ nuqtada hosilaga ega bo'ladi. Lekin $|x|$ funksiya $x = 0$ nuqtada hosilaga ega emas. Shuning uchun bu ziddiyat $f(x) - \frac{3}{2}x$ funksiyaning $x = 0$ nuqtada hosilaga ega emasligini isbotlaydi.

Shunday qilib, berilgan funksiya $x = 0$ nuqtada hosilaga ega emas, shu bilan birga $x = 0$ nuqtada ekstremumga ham ega emasdir.

Demak, funksiya faqat kritik nuqtalarda yoki hosila mavjud bo'lmagan nuqtalardagina ekstremumga ega bo'lishi mumkin.

Bu holat funksiya ekstremumini mavjud bo'lishi uchun yetarli shartlarni izlashga undaydi.



6-chizma

1-teorema. $y = f(x)$ funksiya biror $(a; b)$ intervalning, har bir nuqtasida hosilaga ega va bu intervalning x_0 nuqtasi funksiyaning kritik nuqtasi bo'lsin. Agar x_0 nuqtaning biror $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ atrofida x_0 nuqtaning chap tomonida

hosila musbat, x_0 nuqtaning o'ng tomonida esa hosila manfiy bo'lsa, x_0 nuqtada funksiya maksimumga ega bo'ladi.

Bu teorema qisqacha quyidagicha ifodalanadi:

Agar $f(x)$ hosila x_0 kritik nuqtadan o'tishda ishorasini plyusdan minusga o'zgartirsa, funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo'ladi.

Isbot. Funksiya $(a; b)$ intervalning har bir nuqtasida hosilaga ega bo'lgani uchun funksiya bu intervalda uzluksiz bo'ladi. $(x_0 - \delta; x_0)$ intervalda $f'(x)$ hosila musbat, $(x_0; x_0 + \delta)$ intervalda esa $f'(x)$ hosila manfiy bo'lgani uchun bu holda $(x_0 - \delta; x_0)$ intervalda funksiya o'sadi. Shuning uchun $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ bo'lganda $f(x) < f(x_0)$. $(x_0; x_0 + \delta)$ intervalda $f'(x) < 0$ bo'lib, $f(x)$ funksiya kamayuvchi bo'ladi. Shuning uchun $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ bo'lganda $f(x_0) > f(x)$ (6- chizma).

Shunday qilib, x_0 nuqtaning $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ atrofida $f(x_0) > f(x)$ tengsizlik bajariladi.

Demak, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo'ladi.

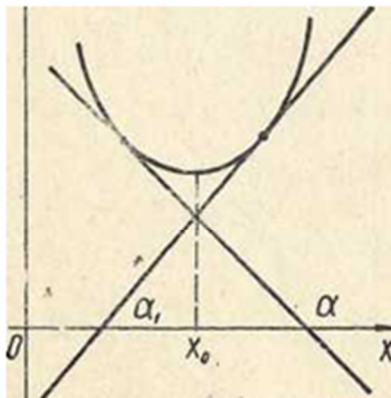
2. teorema. *$y = f(x)$ funksiya biror $(a; b)$ intervalning har bir nuqtasida hosilaga ega va bu intervalning x_0 nuqtasi funksiyaning kritik nuqtasi bo'lsin. Agar x_0 nuqtaning biror $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ atrofida x_0 nuqtaning chap tomonida hosila manfiy x_0 nuqtaning o'ng tomonida hosila musbat bo'lsa, x_0 nuqtada funksiya minimumga ega bo'ladi.*

Bu teorema qisqacha quyidagicha ifodalanadi:

Agar $f(x)$ hosila x_0 kritik nuqtadan o'tishda ishorasini minusdan plyusga o'zgartirsa, funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo'ladi.

Isbot. $(x_0 - \delta; x_0)$ intervalda $f'(x)$ hosila manfiy bo'lgani uchun bu intervalda funksiya kamayuvchi bo'ladi. Shuning uchun $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ bo'lganda $f(x) > f(x_0)$. $(x_0; x_0 + \delta)$ intervalda $f'(x) > 0$ bo'lgani uchun bu intervalda funksiya o'suvchi bo'ladi. Shuning uchun $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ bo'lganda $f(x) > f(x_0)$ bo'ladi.

3. teorema. Agar x_0 kritik nuqtaning biror Shunday qilib, x_0 nuqtaning $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ atrofida $f(x) > f(x_0)$ tengsizlik bajariladi. Demak, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo'ladi.



7-chizma.

atrofida funksiya hosilasi x_0 nuqtaning chap va o'ng tomonida bir xil ishoraga ega bo'lsa, funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lmaydi.

Isbot. x_0 nuqtaning $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ atrofida $f(x)$ funksiyaning hosilasi x_0 nuqtaning chap va o'ng tomonida bir xil ishoraga, masalan, plus ishoraga ega bo'lsin (7-chizma). U holda olingan intervalda funksiya hamma vaqt o'suvchi bo'ladi. Shuning uchun nuqtada funksiya ekstremumga ega bo'lmaydi.

Agar $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ atrofida funksiyaning hosilasi x_0 nuqtaning chap va o'ng tomonida manfiy ishoraga ega bo'lsa, olingan intervalda funksiya hamma vaqt kamayuvchi bo'ladi. Shuning uchun x_0 nuqtada funksiya ekstremumga ega bo'lmaydi.

Yuqorida isbot qilingan teoremlardan $y = f(x)$ funksiyaning ekstremumini topish uchun quyidagi qoida kelib chiqadi:

1. $y = f(x)$ funksiyaning hosilasi topiladi.
2. Topilgan $f(x)$ hosilani nolga tenglab, tenglamaning ildizlari, ya'ni kritik nuqtalar topiladi.
3. $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi ichida yotuvchi, hosila mavjud bo'lmagan nuqtalar topiladi, (Bu nuqtada funksiyaning o'zi uzluksiz bo'lishi talab qilinadi.)

4. Kritik nuqtalarning va hosila mavjud bo'lmagan nuqtalarning chap va o'ng tomonlarida $f'(x)$ hosila ishorasi aniqlanadi.

Aytaylik, x_0 nuqta kritik nuqta yoki hosila mavjud bo'lmagan nuqtabo'lsin. Agar $x < x_0$ bo'lganda $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) bo'lsa va hosila x_0 nuqtaning o'ng tomonida, ya'ni $x > x_0$ bo'lganda $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) bo'lsa, x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya maksimumga (minimumga) ega bo'ladi. Agar $x < x_0$ va $x > x_0$ bo'lganda $f'(x) > 0$ bo'lsa yoki $f'(x) < 0$ bo'lsa, x_0 nuqtada funksiya ekstremumga ega bo'lmaydi.

Quyidagi funksiyalarning ekstremumlari topilsin.

1-misol. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 1$.

Yechish. 1. Hosilani topamiz: $f'(x) = 2x^2 - 2x - 4$.

2. Hosilani nolga tenglab, tenglamaning ildizlarini topamiz.

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \quad \text{yoki} \quad x^2 - x - 2 = 0,$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 2.$$

Demak, kritik nuqtalar: $x_1 = -1$; $x_2 = 2$.

3. Hosila mavjud bo'lmagan nuqtalar yo'q. Berilgan funksiya hosilasi hamma joyda aniqlangan va uzliksiz.

4. Sonlar o'qini nuqtalar yordamida uchta

$$(-\infty; -1), [-1; 2) \text{ va } [2; +\infty)$$

intenvallarga ajratamiz:

5. Endi -1 nuqtadan chapdagi, ya'ni $(-\infty; -1)$, intenvaldagi nuqtani masalan, -2 nuqtani olamiz. Bu nuqtada $f'(-2) = 8 > 0$ demak, -1 nuqtaning chap tomonida hosila musbat.

Endi -1 nuqtaning o'ng tomonida yotuvchi, ya'ni $[-1; 2)$ intevalni yotuvchi nuqtani, masalan, 0 nuqtani olamiz. Bu nuqtada $f'(0) = -4 < 0$. Demak $[-1; 2)$ intevalda hosila manfiy.

Shunday qilib, hosila $x = -1$ kritik nuqtaning chap tomonida musbat. O'ng tomonida esa, ya'ni $[-1; 2)$ intevalda manfiy bo'ladi. Shuning uchun $x = -1$ nuqtada funksiya maksimumga ega bo'lib, maksimum qiymati

$$f_{max}(-1) = 3\frac{1}{3}$$

Endi $x = 2$ kritik nuqtaga o'tamiz.

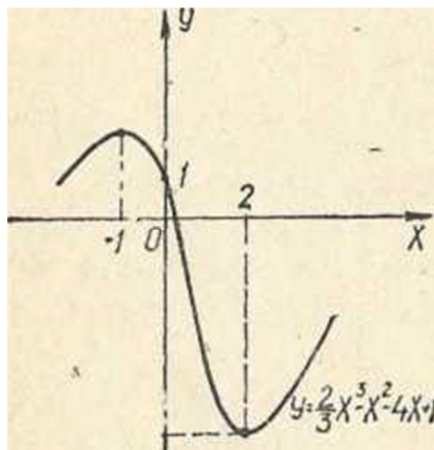
6. 2 nuqtaning chap tomonidagi $[-1; 2)$ intervalda hosilaning manfiy bo'lishini ko'rdik. 2 nuqtaning o'ng tomonidagi nuqtani ya'ni $[2; +\infty)$ intervaldagi nuqtani olamiz, masalan, 3 nuqtani olaylik $f'(3) = 8 > 0$. Demak $x = 2$ nuqtaning o'ng tomonida hosila musbat. Shuning uchun 2 nuqtada funksiya minimumga ega bo'lib, uning qiymati:

$$f_{min}(2) = -5\frac{2}{3}$$

7. Olingan natijani jadval ko'rinishida yozamiz.

x	$(-\infty; -1)$	$x = -1$	$[-1; 2)$	$x = 2$	$[2; +\infty)$
$f(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	o'sadi	$f(-1) = 3\frac{1}{3}$ maksimum	kamayadi	$f(2) = -5\frac{2}{3}$ minimum	o'sadi

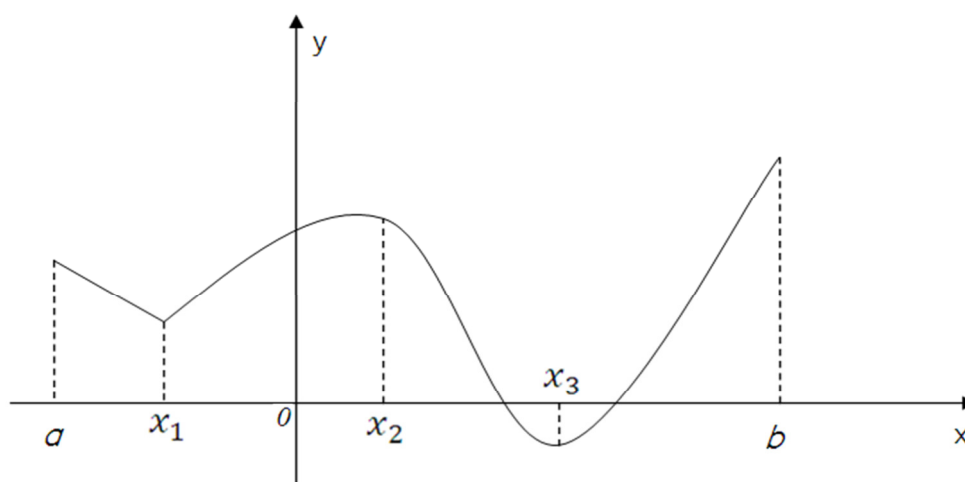
Funksiya grafigi quyidagi chizmada tasvirlangan



§5. Funksiyalarning eng katta va eng kichik qiymatlari.

Hozirga qadar biz funksiyaning berilgan nuqtadagi maksimum va minimumlari haqidagi, ya'ni berilgan nuqtaning yetarlicha kichik atrofidagi funksiyaning eng katta va kichik qiymatlari haqidagi masalani qarab chiqdik.

Endi funksiyaning biror $[a; b]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topish haqidagi masalani qaraymiz. $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiyaning grafigi 1-chizmada ko'rsatilgan. Berilgan funksiya x_2 nuqtada maksimumga ega, x_1 va x_3 nuqtalarda esa minimumga ega. Funksiya $[a; b]$ kesmada eng kichik qiymatiga x_3 nuqtada erishib, bu nuqtadagi funksiyaning minimum qiymati $[a; b]$ kesmadagi



1-chizma.

funksiyaning minimum qiymatlaridan eng kichigidir. Funksiya o'zining eng katta qiymatiga kesmaning o'ng chetidagi b nuqtada erishadi, bu nuqtada funksiya ekstremumga ega emas, chunki funksiya b nuqtadan o'ngda aniqlanmagan. Shunday qilib, $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun quyidagi qoida kelib chiqadi.

1. $f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesma ichida yotuvchi barcha kritik nuqtalari va hosilasi mavjud bo'lmagan nuqtalari topiladi.

2. Bu nuqtalarda funksiyaning qiymatlari topiladi.

3. $[a; b]$ kesmaning chetki nuqtalaridagi funksiyaning qiymatlari topiladi.

Funksiyaning topilgan bu qiymatlari ichida eng kattasi funksiyaning $[a; b]$

kesmadagi eng katta qiymati bo'lib, ular ichida eng kichigi esa funksiyaning $[a; b]$ kesmadagi eng kichik qiymati bo'ladi.

1 – misol. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ funksiyaning $[0; 2]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari topilsin.

Yechish. 1. Berilgan funksiyaning hosilasini topamiz:

$$f'(x) = 2x - 2$$

2. Kritik nuqtalarni topamiz:

$$2x - 2 = 0, \quad x = 1.$$

Demak, kritik nuqta birgina bo'lib, $[0; 2]$ kesma ichida yotadi.

3. $x = 1$ kritik nuqtadagi funksiya qiymatini topamiz :

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 2$$

4. $[0; 2]$ kesmaning chetlaridagi funksiya qiymatlarini topamiz:

$$f(0) = 3, \quad f(2) = 3.$$

Funksiyaning topilgan qiymatlari ichida eng kattasi $f(0) = f(2) = 3$ va eng kichigi $f(1) = 2$ bo'ladi. Shuning uchun berilgan funksiyaning $[0; 2]$ kesmadagi eng katta qiymati 3 ga, eng kichik qiymati esa 2 ga teng bo'ladi. Bu qisqacha quyidagicha yoziladi:

$$\max_{[0;2]} f(x) = f(2) = 3,$$

$$\min_{[0;2]} f(x) = f(1) = 2.$$

2-misol. Perimetri $2p$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklar ichidan yuzi eng katta bo'lganini toping.

Yechish. Biz tekshiradigan funksiya to'g'ri to'rtburchakning yuzidan iborat bo'ladi. Bu funksiya $S = xy$ ko'rinishida bo'ladi. Masalaning shartiga asosan $2x + 2y = 2p$ yoki $x + y = p$. Bu yerda y ni x orqali ifodalab, uning bu qiymatini S ga qo'yamiz: $S = x \cdot (p - x)$.

Bundan:

$$S(x) = px - x^2.$$

Bu yerda $0 \leq x \leq p$ ekani ravshan. Shunday qilib,

$$S(x) = px - x^2$$

funksiyaning $[0; p]$ kesmadagi eng katta qiymatini topish talab qilinadi.

1. Funksiyaning hosilasini topamiz:

$$S'(x) = p - 2x.$$

2. Kritik nuqtalarni topamiz:

$$p - 2x = 0,$$

$$x = \frac{p}{2}.$$

3. $x = \frac{p}{2}$ kritik nuqtadagi funksiyaning qiymatini topamiz:

$$S\left(\frac{p}{2}\right) = p \cdot \frac{p}{2} - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}$$

4. $[0; p]$ kesmaning chetlaridagi funksiyaning qiymatlarini topamiz:

$$S(0) = 0,$$

$$S(p) = 0.$$

Demak, funksiyaning $[0; p]$ kesmadagi eng katta qiymati $S\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{p^2}{4}$ bo'ladi.

Endi y ni topamiz:

$$y = p - x = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}, \text{ ya'ni } x = y.$$

Shunday qilib, izlanayotgan to'g'ri to'rtburchak tomoni $\frac{p}{2}$ dan iborat bo'lgan kvadrat bo'ladi.

3-misol. Jism $s(t) = -t^3 + 9t^2 + 24t - s$ qonun bo'yicha to'g'ri chiziqli harakat qiladi, bunda $s(t)$ — yo'l (metr hisobida) va t vaqt (sekund hisobida). Vaqtning qanday paytida jism harakatining tezligi eng katta bo'ladi va tezlikning miqdori qancha bo'ladi?

Yechish. Jism harakatining tezligi yo'ldan vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng:

$$v(t) = s'(t) = -3t^2 + 18t + 24 \text{ yoki } v(t) = -3t^2 + 18t + 24. \quad (1)$$

Shunday qilib, berilgan masalani yechish (1) funksiyaning ekstremiumini tekshirish masalasiga keltirildi.

1. (1) funksiya dan hosila olamiz. $v'(t) = -6t + 18$

2. Kritik nuqtalarni topamiz:

$$-6t + 18 = 0, \quad t = 3$$

Demak, (1) funksiya birgina kritik nuqtaga ega.

3. Endi $t = 3$ nuqtaning chap va o'ng tomonidagi hosila ishorasini aniqlaymiz:

$$t < 3 \text{ bo'lganda } v'(3) > 0,$$

$$t > 3 \text{ bo'lganda } v'(3) < 0.$$

Shunday qilib, hosila $t = 3$ nuqtadan o'tishda oz ishorasini plusdan minusga o'zgartiradi. Shuning uchun $t = 3s$ bo'lganda jismning tezligi maksimum, ya'ni eng katta bo'ladi va $t = 3$ paytidagi eng katta tezlikning miqdori $v(3) = -3 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 + 24 = 51 \frac{m}{s}$ bo'ladi.

4-misol. Berilgan V hajmga ega bo'lgan barcha silindrlar ichidan to'la sirti eng kichik bo'lganini toping.

Yechish: Silindrning hajmi: $V = \pi R^2 H$, bundan $H = \frac{V}{\pi R^2}$; to'la sirti:

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{V}{\pi R^2},$$

$$S(R) = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}. \quad (3)$$

Shunday qilib, qo'yilgan masalani yechish (3) funksiyani tekshirishga keltiriladi.

1. (3) funksiyaning hosilasini topamiz:

$$S'(R) = 4\pi R - \frac{2V}{R^2}.$$

2. Kritik nuqtalarini topamiz:

$$4\pi R - \frac{2V}{R^2} = 0, \quad 4\pi R^3 - 2V = 0,$$

$$2\pi R^3 - V = 0, \quad R^3 = \frac{V}{2\pi}, \quad R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

3. $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ atrofida hosilaning ishorasini aniqlaymiz. Buning uchun

hosilani quyidagicha yozamiz:

$$S'(R) = \frac{4\pi R^3}{R^2} = \frac{4\pi \left(R^3 - \frac{V}{2\pi} \right)}{R^2} =$$

$$= \frac{4\pi \left(R - \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \right) \cdot \left(R^2 + R \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} + \sqrt[3]{\frac{V^2}{2\pi^2}} \right)}{R^2} .$$

$$R < \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \text{ bo'lganda } S'(R) < 0 ,$$

$$R > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \text{ bo'lganda } S'(R) > 0 .$$

bo'lib, hosila o'z ishorasini minusdan plyusga o'zgartiradi. Shuning uchun

$R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ da funksiya minimumga ega bo'ladi. Silindrning radiusi: $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$;

balandligi:

$$H = \frac{V}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}} = \frac{V^3 \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}{\pi \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}} = \frac{V \cdot R}{\pi \cdot \frac{V}{2\pi}} = 2R .$$

Demak, silindrning balandligi asos radiusining ikkilanganiga teng bo'lganda V hajmli silindrning to'la sirti eng kichik bo'ladi.

XULOSA

Ushbu bitiruv malakaviy ishda hosila tushunchasi matematik analizning muhim, fundamental tushunchalaridan biri ekanligi ta'kidlanib uni kiritilishiga amaliyotning bir qator masalalarini jism to'g'ri chiziqli harakat qilganda uning tezligini hisoblash, sterjenning chiziqli zichligini hisoblash, jismning issiqlik sig'imini hisoblash masalalarini yechish turtki bo'lganligi yoritilgan.

Hosila tushunchasi muhim tadbirlarga ega ekanligi bois, eng bitiruv malakaviy ishda hosila, tushunchasi, uni hisoblash qoidalari, uning geometrik va mehanik ma'nolari yoritilgan. Bundan tashqari unda differentsialuvchanlik va uzluksizlik orasidagi bog'liqlik ham yoritilgan. Unda asosiy elementlar funksiyalar, murakkab funksiyalar va teskari funksiyalarni hosilalarini topish formulalari keltirilgan.

Bitiruv malakaviy ishning yakunida esa hosilaning taqribiy hisoblashlarda, geometrik masalalarda, fizik masalalarni yechishga, funksiyalarni tekshirishga hamda funksiyalarning eng katta va eng kichik qiymatlarini topishga tadbirlari yetarlicha masalalar yordamida bayon qilingan.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. I.A.Karimov “Yuksak ma’naviyat – yengilmas kuch” Toshkent 2009 y.
2. I.A.Karimov “Barkamol avlod - O’zbekiston taraqqiyotining poydevori” Toshkent 1998 y.
3. I.A.Karimov “O’zbekiston XXI asrga intilmoqda” Toshkent 2000 y.
4. O’zbekiston Respublikasining “Ta’lim to’g’risida”gi qonuni. Kadrlar tayyorlash milliy dasturi. T.:SHarq. 1997.
5. Alimov SH.A., Xolmuxamedov O.R., Mirzaahmedov M.A. “Algebra–7”. T.: “O’qituvchi” – 2009.
6. Alimov SH.A., Xolmuxamedov O.R., Mirzaahmedov M.A. “Algebra–8”. T.: “O’qituvchi” – 2010.
7. Alimov SH.A., Xolmuxamedov O.R., Mirzaahmedov M.A. “Algebra–9”. T.: “O’qituvchi” – 2010.
8. A.U.Abduxamidov, X.A.Nasimov, U.M.Nosirov, J.X.Xusanov. Algebra va matematik analiz asoslari. 1-qism. “O’qituvchi”. T.: 2008.
9. A.U.Abduxamidov, X.A.Nasimov, U.M.Nosirov, J.X.Xusanov. Algebra va matematik analiz asoslari. 2-qism. “O’qituvchi”. T.: 2010.
10. Farberman B. L. Ilgor pedagogik texnologiyalar. T.: Fan. 2000
11. Ishmuxamedov R.J. Innovatsion texnologiyalar yordamida ta’lim samaradorligini oshirish yo’llari. TDPU. T.: 2004 .
12. J.G.Yo’ldoshev, S. A. Usmonov. Pedagogik texnologiya asoslari. T.O’kituvchi. 2004.
13. Mamedov K. va b. Pedagogik texnologiyalar va pedagogik maxorat. T.2003
14. Farberman. B. L. Oliy o’quv yurtlarida o’qitishning zamonaviy usullari.T. 2002.
15. A.B.Норин и другие. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. М., 2005.
16. А.Н.Пурукин. Математика. М., 2004.
17. С.И.Новоселов. Обратные тригонометрические функции. М., 1950.
18. В.С.Крамор. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. М., 1990.
19. А.Ахлимурзаев. Математика. I-qism. Andijon, 2005.
20. Davlat test markazi axborotnomalari. 1996-2003 yillar.

MUNDARILA

Kirish.....	2
I-BOB. AKADEMIK LITSEY VA KASB-HUNAR KOLLEJLARI MATEMATIKA KURSIDA HOSILA VA UNI O`RGANISH USLUBLARI.	
§1. Hosila tushunchasiga olib keluvchi masalalar. Hosila tushunchasi.	5
§2. Funksiyani o`zgarish tezligi va hosila tushunchasi.....	12
§3. Hosilaning geometrik ma`nosi.....	15
§4. Hosilaga ega bo`lgan funktsiyaning uzluksizligi.....	18
§5. Hosilani hisoblash qoidalari. Asosiy elementar fuksiyalarining hosilalari.....	20
§6. Murakkab va teskari funktsiyalarni hosilalari.....	27
II-BOB. HOSILANING BA`ZI TADBIQLARI	
§1. Ildizlarni taqribiy hisoblash.....	30
§2. Urinma tenglamasini tuzish.....	33
§3. Hosila yordamida tezlik va tezlanishni topish.....	34
§4. Hosilaning funktsiyalarni tekshirishga tadbiqu.....	36
§5. Funktsiyalarning eng katta va eng kichik qiymatlari.	49
Xulosa.....	54
Foydalanilgan adabiyotlar.....	55