O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O`RTA - MAXSUS TA`LIM VAZIRLIGI

ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI

FIZIKA – MATEMATIKA FAKULTETI

Matematika yo`nalishi 3-bosqich 1-guruh

talabasi Boltaboyeva Gulnozaning

"Funksiya va uning grafigi" mavzusida tayyorlagan

R E F E R A T

Ilmiy rahbar: katta o`qituvchi Qo`shaqov X

Andijon 2014

Mundarija

Kirish

Funksiya va uning grafigi mavzusidagi kurs ishimda funksiya, funksiyaning grafigi so`zlariga ma`lumot berib o`taman.

Funksiya – o`zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog`lanishni ifodalaydigan asosiy matematik va umumilliy tushunchalardan biri.

X, Y to`plamlarning tabiatiga bog`liq holda matematikaning turli bo`limlarida “funksiya” termini qator foydali sinonimlarga ega: moslik, akslantirish, akslanish, almashtirish, operator, funksional, va h. k.

Akslantirish – ulardan eng ko`p tarqalgani.

Funksiya amaliy tushunchalarga ega emas.

Funksiyaning grafigi – uni tasvirlash usullaridan biri. U bu funksiyani turlicha, ,masalan, gap bilan tasvirlash mumkin. Fizikadan ma`lumki, tekis harakatda o`tilgan yo`l harakatning boshlanish onidan ketgan vaqtga to`g`ri proporsional. Bu gap yo`lni vaqtning chiziqli funksiyasi sifatida ifodalaydi.

Funksiya tasvirining grafik usuli eng yaqqol usuldir. Funksiya grafigi – uning argumenti o`zaro borishida funksiyaning o`zgarish harakteri haqida yaxlit tasavvur beruvchi chiziq. $y=f(x)$ funksiya grafigi koordinata tekisligidagi (x, y) nuqtalar to`plamidir, bu yerda $x$ ga funksiyaning aniqlanish sohasidan mumkin bo`lgan barcha qiymatlar beriladi va ana shunday har bir x uchun $y=f(x)$ funksional bog`lanish y ordinata aniqlanadi.

Ko`p funksiyalarning grafiklari shu funksiyalarga monand nomga ega. Sinus funksiyasining grafigi sinusoida, tangens funksiyasining grafigi tangensoida, logarifmik funksiyalarning grafigi logarifmika deyiladi va h. k.

1-§. Funksiya ta`rifi, berilish usullari.

E to`plamni $F$ to`plamga akslantirish

$$f: \ E \to F$$

dan iboratdir.

Endi $E = F, \quad F = R$ deb olamiz. Unda har bir haqiqiy x songa biror haqiqiy y sonni mos qo`yuvchi

$$f: F \to R \qquad \left(x \xrightarrow{f} y \right)$$

akslantirishga kelamiz. Bu esa funksiya tushunchasiga olib keladi.

Funksiya tushunchasi o`quvchiga o`rta maktab matematika kursidan ma`lum. Shuni e`tiborga olib funksiya haqidagi dastlabki ma`lumotlarni qisqaroq bayon etishni lozim topdim.

Aytaylik, $X \subset R, \quad Y \subset R$ to`plamlar berilgan bo`lib, x va y o`zgaruvchilar mos ravishda shu to`plamlarda o`zgarsin: $x \in X$, $\quad y \in Y$.

1-ta`rif. Agar $X$ to`plamdagi har bir x songa biror f qoidaga ko`ra $Y$ to`plamdan bitta y son mos qo`yilgan bo`lsa, X to`plamda funksiya berilgan (aniqlangan) deyiladi va

$$f: x \to y \qquad yoki \qquad y = f(x)$$

kabi belgilanadi. Bunda X funksiyaning aniqlanish to`plami $Y$ funksiyaning o`zgarish to`plami deyiladi. $x$ erkli o`zgaruvchi yoki funksiya argumenti, y esa erksiz o`zgaruvchi yoki funksiya deyiladi.

1-misol. $X = (-\infty, +\infty)$, $Y = (0, +\infty)$ bo`lib, f qoida

$$f: x \to y = x^2 + 1$$

bo`lsin. Bu holda har bir $x \in X$ ga bitta $x^2 + 1 \in Y$ mos qo`yilib,

$$y = x^2 + 1$$

funksiyaga ega bo`lamiz.

2-misol. Har bir ratsional songa 1 ni, har bir irratsional songa 0 ni mos qo`yish natijasida funksiya hosil bo`ladi. Odatda, bu Dirixle funksiyasi deyilib, u $D(x)$ kabi belgilanadi:

$$D(x)=\begin{cases}1 \ , \ \text{agar} \quad x \quad \textit{ratsional son bo`lsa,}\\ 0 \ , \ \text{agar} \quad x \quad \textit{irratsional son}\end{cases}$$

Shunday qilib, $y=f(x)$ funksiya uchta: X to`plam, $Y$ to`plam va har bir $x \in X$ ga bitta $y \in Y$ ni mos qo`yuvchi *f* qoidaning berilishi bilan aniqlanar ekan.

Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya $X \subset R$ to`plamda berilgan bo`lsin. $x_0 \in X$ nuqtaga mos keluvchi y_0 miqdor $y=f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi xususiy qiymati deyiladi va $f(x_0)=y_0$ kabi belgilanadi.

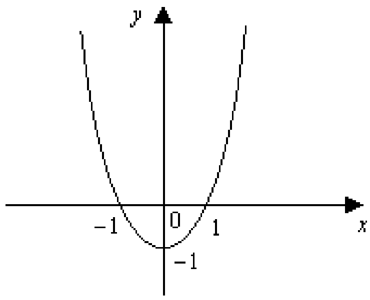
Tekislikda dekart koordinatalar sistemasini olamiz. Tekislikdagi *(x, f(x))* nuqtalardan iborat ushbu

$$\{(x, f(x))\}=\{(x, f(x)) \mid x \in X , f(x) \in Y\}$$

to`plam *y=f(x)* funksiyaning grafigi deyiladi. Masalan,

$$y=x^2-1 \quad (x \in X=[-2,2])$$

funksiyaning grafigi 1-chizmada tasvirlangan.



1-chizma.

Funksiya ta`rifidagi *f* qoida turlicha bo`lishi mumkin.

a) Ko`pincha *x* va *y* o`zgaruvchilar orasidagi bog`lanish formulalar yordamida ifodalanadi. Bu funksiyaning analitik usulda berilishi deyiladi.

Masalan,

$$y=\sqrt{1-x^2}$$

funksiya analitik usulda berilgan bo`lib, uning aniqlanish to`plami

$$X=\{x \in R \mid -1 \le x \le 1\}=[-1,1]$$

bo`ladi.

x va y o`zgaruvchilar orasidagi bog`lanish quyidagi formulalar yordamida berilgan bo`lsin:

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, \ agar \ \ x > 0 \ \ bo`lsa, \\ -1, \ agar \ \ x < 0 \ \ bo`lsa. \end{cases}$$

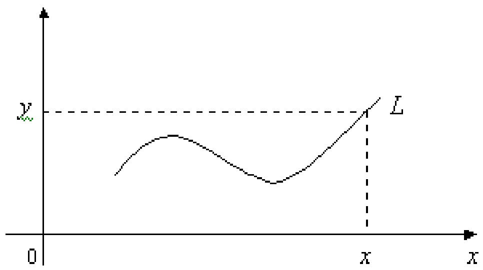
Bu funksiyaning aniqlanish to`plami $X = R \setminus \{0\}$ bo`lib, qiymatlar to`plami esa $Y = \{-1,1\}$ bo`ladi. Odatda bu funksiya $y = \sin x$ kabi belgilanadi.

b) Ba`zi hollarda $x \in X$, $y \in Y$ o`zgaruvchilar orasidagi bog`lanish jadval orqali bo`lishi mumkin. Masalan, kun davomida havo haroratini kuzatganimizda, t_1 vaqtda havo harorati T_1, t_2 vaqtda havo harorati T_2 va h.k. bo`lsin. Natijada quyidagi jadval hosil bo`ladi.

$t -$ vaqt	t_1	t_2	t_3	...	t_n
$T -$ harorat	T_1	T_2	T_3	...	T_n

Bu jadval t vaqt bilan havo harorati T orasidagi bog`lanishni ifodalaydi, bunda $t$-argument, $T$ esa $t$ ning funksiyasi bo`ladi.

v) x va y o`zgaruvchilar orasidagi bog`lanish tekislikda biror egri chiziq orqali ham ifodalanishi mumkin (2-chizma).



2-chizma.

Masalan, 2-chizmada tasvirlangan L egri chiziq berilgan bo`lsin. Aytaylik, $[a,b]$ segmentdagi har bir nuqtadan o`tkazilgan perpendikulyar L chiziqni faqat bitta nuqtada kessin. $\forall x \in [a,b]$ nuqtadan perpendikulyar chiqarib, uning L

chiziq bilan kesishish nuqtasini topamiz. Olingan x nuqtaga kesishish nuqtasining ordinatasi y ni mos qo`yamiz. Natijada har bir $x \in [a,b]$ ga bitta $y$ mos qo`yilib, funksiya hosil bo`ladi. Bunda $x$ bilan $y$ orasidagi bog`lanishni berilgan L egri chiziq bajaradi.

Aytaylik, $f_1(x)$ funksiya $X_1 \subset R$ to`plamda, $f_2(x)$ funksiya esa $X_2 \subset R$ to`plamda aniqlangan bo`lsin.

Agar

1) $X_1 = X_2$

2) $\forall x \in X_1$ da $f_1(x) = f_2(x)$

bo`lsa, $f_1(x)$ hamda $f_2(x)$ funksiyalar o`zaro teng deyiladi va $f_1(x) = f_2(x)$ kabi belgilanadi.

2-§.Elementar funksiyalar

Butun ratsional funksiyalar.

Ushbu

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

ko`rinishdagi funksiya butun ratsional funksiya deyiladi. Bunda $a_0, a_1, \ldots, a_n -$ o`zgarmas sonlar, $n \in N$. Bu funksiya $R = (-\infty, \ +\infty)$ da aniqlangan.

Butun ratsional funksiyaning ba`zi xususiy hollari:

a) Chiziqli funksiya. Bu funksiya

$$y=ax+b \qquad (a\neq 0)$$

ko`rinishga ega, bunda *a, b* o`zgarmas sonlar.

Chiziqli funksiya $(-\infty, \ +\infty)$ da aniqlangan *a*>0, bo`lganda o`suvchi, *a*<0 bo`lganda kamayuvchi: grafigi tekislikdagi to`g`ri chiziqdan iborat.

b) Kvadrat funksiya. Bu funksiya

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

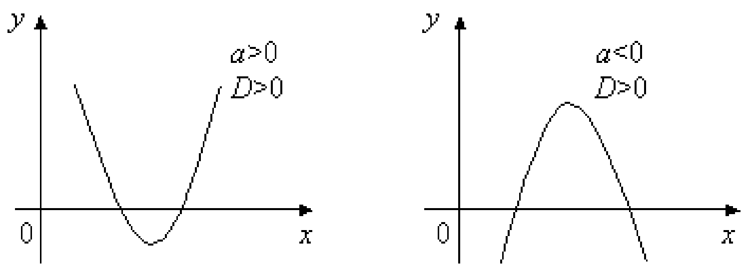
ko`rinishga ega, bunda *a, b, c* – o`zgarmas sonlar.

Kvadrat funksiya *R* da aniqlangan bo`lib, uning grafigi parabolani ifodalaydi.

Ravshanki,

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Parabolaning tekislikda joylashishi *a* hamda $D = b^2 - 4ac$ larning ishorasiga bog`liq bo`ladi. Masalan, *a*>0, *D*>0 va *a*<0, *D*<0 bo`lganda uning grafigi 3-chizmada tasvirlangan parabolalar ko`rinishida bo`ladi.



3-chizma.

Kasr ratsional funksiyalar. Ushbu

$$y=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m}$$

ko`rinishdagi funksiya kasr ratsional funksiya deyiladi. Bunda $a_0,\ a_1,\ldots,a_n$ va $b_0,\ b_1,\ \ldots,b_m$ lar o`zgarmas sonlar $n\in N$, $m\in N$. Bu funksiya

$$X=(-\infty,\ +\infty)\ \backslash\ \{x|b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m=0\}$$

to`plamda aniqlangan.

Kasr ratsional funksiyaning ba`zi xususiy hollari:

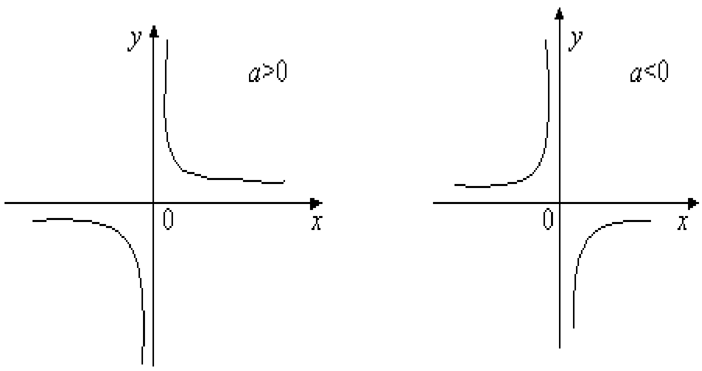
a) Teskari proportsional bog`lanish. U

$$y=\frac{a}{x}\qquad (x\neq 0\quad a=const)$$

ko`rinishga ega. Bu funksiya

$$X=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)=R\setminus\{0\}$$

to`plamda aniqlangan, toq funksiya, $a$ ning ishorasiga qarab funksiya $(-\infty,\ 0)$ va $(0,\ +\infty)$ oraliqlarning har birida kamayuvchi yoki o`suvchi bo`ladi (4-chizma).



4-chizma

b) Kasr chiziqli funksiya. U ushbu

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

ko`rinishga ega. Bu funksiya

$$X=R\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}\qquad (c\neq 0)$$

to`plamda aniqlangan:

Ravshanki,

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{x+\frac{d}{c}}+\frac{a}{c}.$$

Demak,

$$y=\frac{\alpha}{x+\beta}+\gamma,\quad \left(\alpha=\frac{bc-ad}{c^2},\ \ \beta=\frac{d}{c},\ \ \gamma=\frac{a}{c}\right).$$

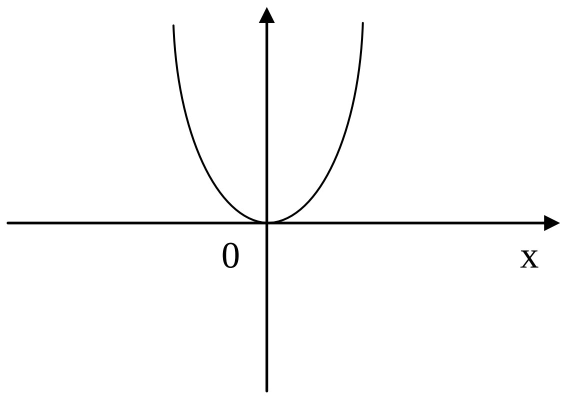
Uning grafigini $y=\frac{a}{x}$ funksiya grafigi yordamida chizish mumkin.

Darajali funksiya. Ushbu

$$y=x^a,\qquad (x\geq 0)$$

ko`rinishdagi funksiya darajali funksiya deyiladi.

Bu funksiyaning aniqlanish to`plami $a$ ga bog`liq. Darajali funksiya a>0, bo`lganda $(0,\ +\infty)$ da o`suvchi, a<0 bo`lganda kamayuvchi bo`ladi. $y=x^a$ funksiya grafigi tekislikning (0,0) va (1,1) nuqtalaridan o`tadi.



$$y=x^{2m},\quad m\in N$$

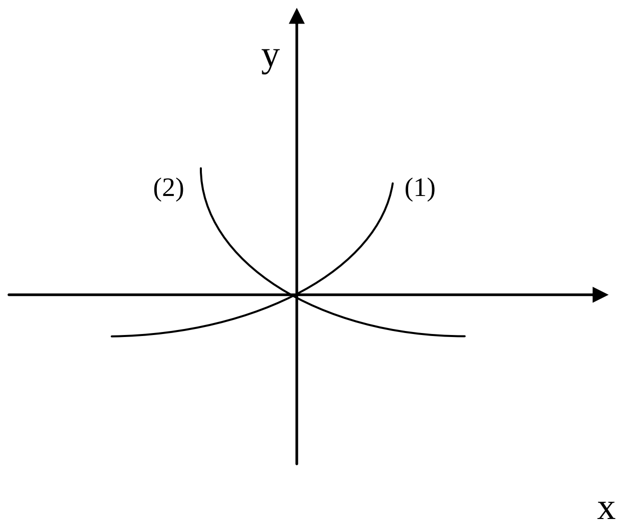
Ko`rsatkichli funksiya. Ushbu

$$y=a^x$$

ko`rinishdagi funksiya ko`rsatkichli funksiya deyiladi. Bunda $a\in R,\ a>0$, $a\neq 1$. Ko`rsatkichli funksiya $(-\infty,\ +\infty)$ aniqlangan, $\forall x\in R$ da $a^x>0$; $a>1$ bo`lganda o`suvchi; 0<$a$<1 bo`lganda kamayuvchi bo`ladi.

Xususan, a=e bo`lsa, matematikada muhim rol o`ynaydigan $y=e^x$ funksiya hosil bo`ladi.

Ko`rsatkichli funksiyaning grafigi $Ox$ o`qidan yuqorida joylashgan va tekislikning (0,1) nuqtasidan o`tadi.



$$y = a^x, \quad (1)\quad a > 1;$$
$$(2)\quad 0 < a < 1.$$

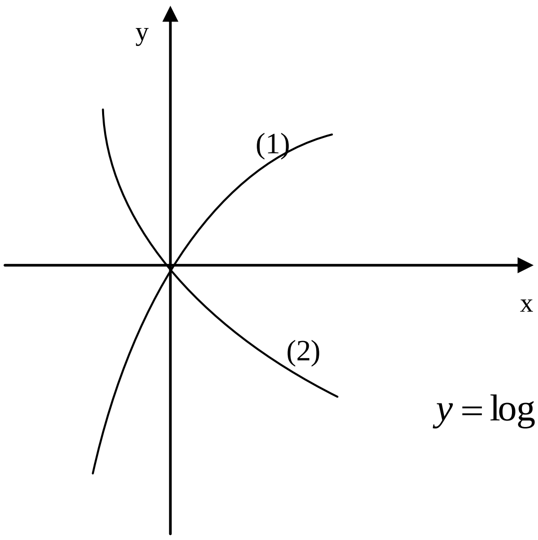
Logarifmik funksiya. Ushbu

$$y = \log_a x$$

ko`rinishdagi funksiya logarifmik funksiya deyiladi. Bunda $a > 0$, $a \neq 1$. Logarifmik funksiya $(0, +\infty)$ da aniqlangan, $y = a^x$ funksiyaga nisbatan teskari; $a$>1 bo`lganda o`suvchi, 0<$a$<1 bo`lganda kamayuvchi bo`ladi.

Logarifmik funksiyaning grafigi Oy o`qining o`ng tomonida joylashgan va tekislikning (0,1) nuqtasidan o`tadi.

y



$$y = \log_a x. \quad (1) \quad a > 1;$$
$$(2) \quad 0 < a < 1.$$

6. Trigonometrik funksiyalar. Ushbu

$$y=\sin x,\ \ y=\cos x,\ \ y=tgx,\ \ y=\sec x,\ \ y=\operatorname{cosec} x$$

funksiyalar trigonometrik funksiyalar deyiladi.

$y=\sin x$, $y=\cos x$ funksiyalar R=(-∞,+∞) da aniqlangan, 2π davrli funksiyalar $\forall x \in R$ da

$$-1 \le \sin x \le 1,\ \ -1 \le \cos x \le 1$$

bo`ladi. Ushbu

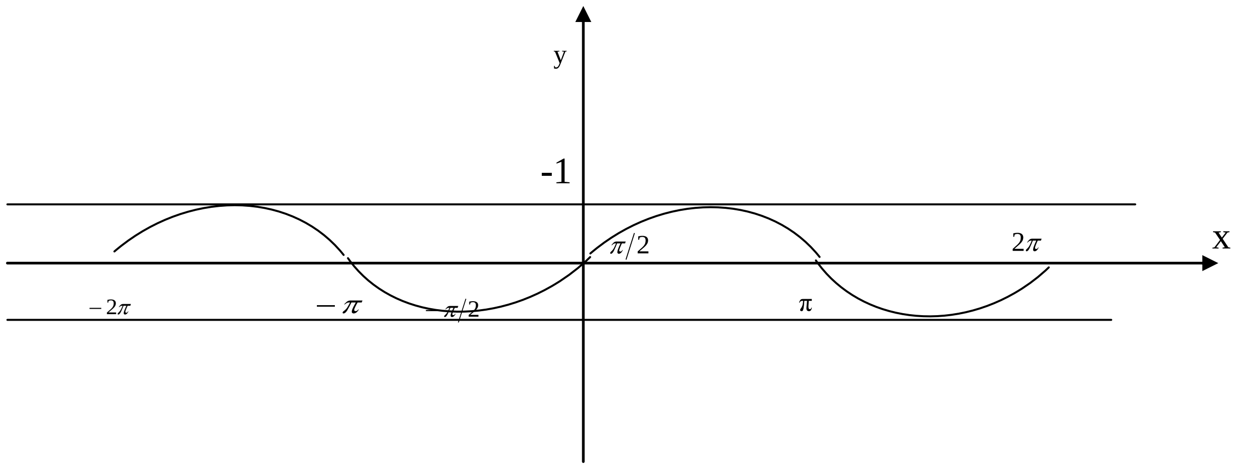
$$y=tgx$$

funksiya

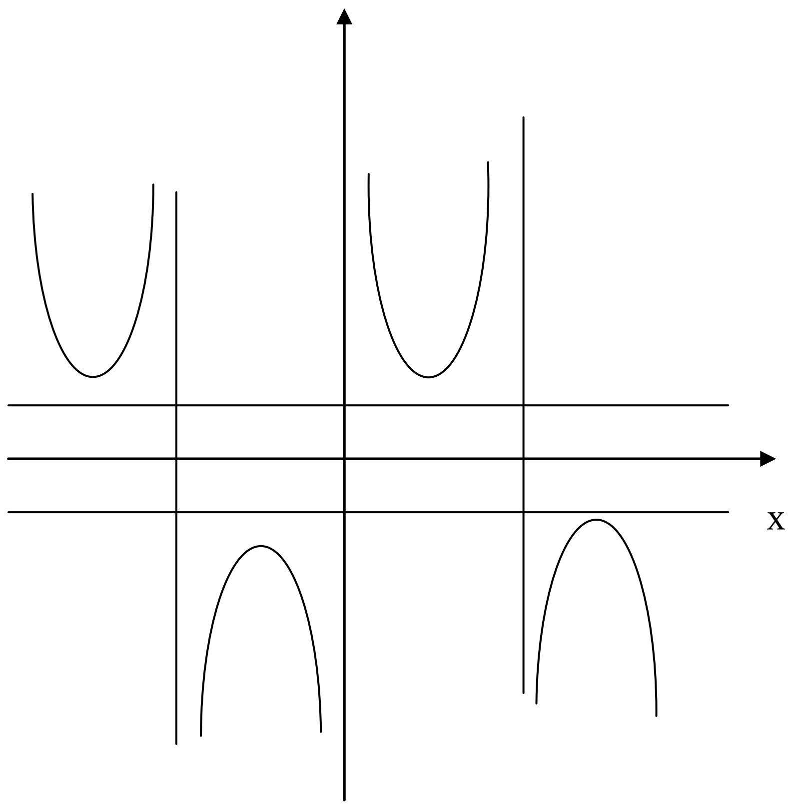
$$X = R \setminus \left\{ x \in R \mid x = (2k+1)\frac{\pi}{2};\ \ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \right\}$$

to`plamda aniqlangan π davrli funksiya, *ctgx, secx, cosecx* funksiyalar *sinx, cosx, tgx*lar orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$ctgx = \frac{1}{tgx},\quad \sec x = \frac{1}{\cos x},\quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$



$$y = \sin x$$



$$y = \operatorname{cosec} x$$

Giperbolik funksiyalar. Ko`rsatkichli $y = e^x$ funk-tsiya yordamida tuzilgan ushbu

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

funksiyalar giperbolik (mos ravishda giperbolik sinus, giperbolik kosinus, giperbolik tangens, giperbolik katangens) funksiyalar deyiladi va ular quyidagicha

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad cthx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

belgilanadi.

8. Teskari trigonometrik funksiyalar. Ma`lumki, *y=sinx* funksiya *R* da aniqlangan va uning qiymatlari to`plami

$$Y_f = [-1,\ 1]$$

bo`ladi.

Agar $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ bo`lsa, u holda $X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ va $Y_f = [-1,\ 1]$

to`plamlarning elementlari o`zaro bir qiymatli moslikda bo`ladi.

y=sinx funksiyaga nisbatan teskari funksiya

$$y = arcsinx$$

kabi belgilanadi.

Shunga o`xshash $y = \cos x,\ \ y = tgx,\ \ y = ctgx$ funksiyalarga nisbatan teskari funksiyalar mos ravishda

$$y = \arccos x,\ \ y = arctgx,\ \ y = arcctgx,$$

kabi belgilanadi.

Ushbu $y = arc\sin x$, $y = arc\cos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$ funksiyalar teskari trigonometrik funksiyalar deyiladi.

Xulosa

Men bu kurs ishimda funksiya ta`rifi , berilish usullari, elementar funksiyalar, funksiya grafigi va funksiya grafiklari ustida amallar tushunchalari to`g`risida alohida ma`lumot berganman.

Funksiya 3 xil ko`rinishda beriladi:analitik,jadval va grafik holatda. Mening kurs ishim funksiya va uning grafigi bo`lganligi sababli funksiya grafigiga alohida urg`u berdim.Funksiya grafiklarini tasvirlashim uchun men elementar funksiyalardan foydalandim.Masalan, butun ratsional funksiyalar, kasr ratsional funksiyalar, darajali funksiya, ko`rsatkichli funksiya, logorifmik funksiyalar, trigonometrik funksiyalar, giperbolik funksiyalar,teskari trigonometrik funksiyalar.Bu funsiyalar grafiklarini ko`rsatib berish uchun shu funksiyalarga oid misollardan fodalandim.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. A. Gaziyev, I. Israilov, M. Yaxshiboyev “Funksiyalar va grafiklar” “Voris - Nashriyot” Toshkent – 2006.

2. Sa`dullayev.A, Mansurov.H, Xudoyberganov.G “Matematik analizdan misol va masalalar to`plami” I qism – T. “O`zbekiston” 1993y

3. Tolipov.A “Elementar funksiyalar” –T “O`qituvchi” 1992y

4. S. I. Novosyolov. “Algebra va elementar funksiyalar” – T. “O`zDav o`quvped nashr”. 1959y