O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

ALISHER NAVOIY NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

Qo’lyozma huquqida

UDK: 517.946

ISMOILOV XURSHID ABDUROZIKOVICH

Algebraik integralga ega bo‘lgan differensial tenglamalar sistemasining limitik davrini o‘rganish

5A- 130101 – Differensial tenglamalar

Magistr akademik darajasini olish uchun yozilgan

DISSERTATSIYA

Ish ko’rib chiqildi va himoyaga ruxsat berildi.

“Differensial tenglamalar”	Ilmiy rahbar:
kafedrasi mudiri:	______dots. Ya. Muxtorov
________prof. A.Begmatov	

M.O’.

SAMARQAND – 2013 yil.

MUNDARIJA

KIRISH

Masalaning qo'yilishi. Ishda

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + bx + a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 \end{cases} \quad (0.3)$$

sistema analitik ko'rinishdagi integralga ega bo'lgan holda trayektoriyalari o'rganilgan.

Mavzuning dolzarbligi. Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi holida yechimning analitik ko'rinishda toppish mumkin. Chiziqli bo'lmagan sistemalar holida esa bu ifodalar shunchalik murakkab bo'lishi mumkinki, ularni bevosita tahlil etish murakkab masala bo'ladi. Shuning uchun tenglamalarning ko'rinishi bo'yicha differensial tenglamalar yechimlarini o'rganishga yordam beradigan nazariyani yaratish zaruriyati paydo bo'ldi. Bunday nazariya bo'lib analitik nazariya bilan bir qatorda differensial tenglamalarning sifat nazariyasi hisoblanadi.

Birinchi bo'lib ikkita differensial tenglamalar

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q\ (x, y) \end{cases} \quad (0.1)$$

sistemasining eng soda holi uchun sifat tadqiqot masalasi XIX - asirning oxirida A. Puankare [7] tomonidan qo'yilgan edi, keyinchalik Puankare tadqiqotlari I. Bendikson [3] tomonidan to'ldirildi va Dj.D.Birkgof [4] tomonida aniqlashtiradi. Differensial tenglamalar sifat nazariyasini masalalarida biri umuman olganda

$P(x, y)$, $Q\ (x, y)$- analitik funksiyalar bo'lganda fazoviy tekislikda (0.1) dinamik siistemaning traektoriyalar holatini o'rganishdan iborat.

Ishning maqsad va vazifalari.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + bx + a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 \end{cases} \quad (0.3)$$

differensial tenglamalar sistemasi qaralgan.. Mazkur ishda ikkita

$$x^3 + a_1x^2y + b_1xy^2 + g_1y^3 + a_2x^2 + b_2xy + g_2y^2$$

$$+b_3x + g_3y + d = 0 \quad (0.4)$$

$$mx + ny + p = 0 \quad (0.5)$$

Xususiy integralga ega bo‘gan shartda (0.3) sistemaning trayektoriyalari o‘rganilgan. Bundan tashqari

Ilmiy tadqiqot metodlari.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q\ (x,y)}{P(x,y)} \quad (0.2)$$

tenglama uchun

N.N.Bautin [1] va N.N.Serebryakov [8] lar to‘g‘ri chiziq ko‘rinishdagi ikkita algebraik integralga ega bo‘lganda traektoriyalarning holati to‘la o‘rganilgan. A.Cherkas [10] bunday tadqiqotni uchunchi tartibli egri chiziq ko‘rinishidagi xususiy integral mavjudligida (0.2) tenglama uchun bajargan.Yablonskiy A.I. [11] va Filiptsov V.F [9] lar xususiy integrali 4-tartibli algebraik egri chiziqlardan iborat bo‘lgan holda kvadratik differensial tenglamalar sistemasi o‘rganilgan.

Ishda shu usuldan foydalanib ma’lum integralga ega bo‘lgan differensial tenglamalar sistemasi to’la o’rganilgan.

Ishning ilmiy ahamiyati. Limitik davralarning sonini aniqlashda olingan natijalardan foydalanish mumkin.

Ishning amaliy ahamiyati. Differensial tenglamalar nazariyasi yo‘nalishi bo‘yicha tahsil olayotgan magistrlar uchun metodik qo‘llanma sifatida foydalanish mumkin.

Ishning tuzilishi. Magistrlik dissertatsiyasi kirish qismi, uchta bob, 10 ta paragraf, xulosa, 16 ta chizma va foydalanilgan adabiyotlar ro’yxatidan iborat.

Kirish qismida masalaning qo‘yilishi, dolzarbligi va olingan natijalar to‘g‘risida ma’lumot berilgan.

Birinchi bob turta paragrafdan iborat.

Birinchi paragrafda Uchinchi tartibli egri chiziq ko‘rinishidagi xususiy integralli differensial tenglama sistemasi tuzilgan.

Ikkinchi paragrafda To‘g‘ri chiziq ko‘rinishidagi xususiy integralga ega bo‘lgan kvadratik differensial tenglama sistemasi tuzilgan.

Uchinchi paragrafda esa yopiq trayektoriya atrofini o‘rganish. Oddiy va murakkab limitik davralar haqida ma’lumotlar keltirilgan.

Turtinchi paragrafda cheksizlikda integral egri chiziqlar holatini o‘rganish. Puankare sferasi haqidagi ma’lumotlar keltirilgan.

Ikkinchi bob ikkita paragrafdan tashkil topgan.

Birinchi paragrafda Chekli tekislikda koeffisentlari (1.35) formulalar bilan berilgan (1.1) sistemani tekshirilgan..

Ikkinchi paragrafda Tenglamalar sistemasini tekislikning cheksiz o‘zoqlashgan qismida tekshirish masalasi qaralgan.

Uchinchi bob turta paragrafdan tashkil topgan.

Birinchi paragrafda Berilgan integral egri chiziqqa ega bo‘lgan differensial tenglamalar sistemasini tuzilgan.

Ikkinchi paragrafda $x^2 + y^2 - 1 = 0$ integral egri chiziqqa ega bo‘lgan polinomial differensial tenglamalar sistemasini tuzish masalasi tuzilgan.

Uchinchi paragrafda Sistemani cheksizlikning chekli qismida tekshirish masalasi yechilgan.

Turtinchi paragrafda Sestemani cheksizlikda tekshirish masalasi yechilgan.

Olingan natijalarning qisqacha mazmuni.

Bu magistrlik dissertatsiyasining asosiy masalasi

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + bx + a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 \end{cases} \quad (1.1)$$

sistema uchun

$$F(x, y) \in x^3 + a_1x^2y + b_1xy^2 + g_1y^3 + a_2x^2 +$$

$$+b_2xy + g_2y^2 + b_3x + g_3y + d = 0 \quad (1.4)$$

ko‘rinishdagi integral egri chiziqqa ega bo‘lgan sistema tuzilgan. Koeffitsent shartlar aniqlangan.

$$mx + ny + p = 0 \quad (1.18)$$

ko‘rinishdagi yechimga ega bo‘lgan tenglamalar sistemasi tuzilgan. (1.1) va (1.2) teoremalar keltirilgan.

1.1-teorema. (1.1) sistema uning koeffisentlari (1.16), (1.17) munosabatlar bilan bog’langan va $c_1 = a_2 = 0$, $c_2 = 3b_1$ shartda koeffisentlari (1.15) formulalar bilan ifodalanuvchi (1.4) ko’rinishdagi xususiy integralga ega.

1.2-teorema. (1.1) sistema koeffisentlari (1.28) munosabat bilan bog’langan va $c_1 = a_2 = 0$, $c_2 = 3b_1$ shartda (1.26) , (1.27) koeffisentlari bilan ifodalanadigan (1.18) xususiy integralga ega.

(1.4) integral chiziqqa ega bo‘lgan tenglamalar sistemasining turta maxsus nuqtalar tekshirilgan. Bu nuqtqlar egar, tugun, egar va tugun. Xuddi shunday cheksizlikdagi holati o‘rganilgan.

$x^2 + y^2 - 1 = 0$ integralga ega bo‘lgan

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=1}^{3} a_{ij} x^i y^j \equiv P(x;y)$$

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=1}^{3} b_{ij} x^i y^j \equiv Q(x;y) \tag{1}$$

sistema tuzilgan. Bu holda sistema fazoning chekli qismida beshta maxsus nuqtalarga ega. Bular $\mathcal{A}, \mathcal{O}, \mathcal{B}, -$markazlar, $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ $-$egar. Cheksizlikda ham o‘rganilgan.

I-BOB. Berilgan integralga ega bo'lgan differensial tenglama sistemasini tuzish.

1.1 -§. Uchinchi tartibli egri chiziq ko'rinishidagi xususiy integralli differensial tenglama sistemasini tuzish.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + bx + a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + a_2x^2 + 2b_2xy + c_2y^2 \end{cases} \tag{1.1}$$

Differensial tenglamalar sistemasini qaraymiz. [10,s. 1752-1760] ga ko'ra agar o'ng qismlari $n -$ chi darajali polinomlar bo'lgan sistema

$$\sum_{k=0}^{n} F_k(x,y) = 0 \tag{1.2}$$

ko'rinishdagi xususiy integralga ega bo'lsa, u holda

$$\frac{\partial F}{\partial x}P + \frac{\partial F}{\partial y}Q = FL \tag{1.3}$$

tenglik bajariladi. Bu yerda $F_k(x,y) -$ x va y ning $k -$chi darajali bir jinsli polinomlari (1.2) xususiy integral

$$F(x,y) \in x^3 + a_1x^2y + b_1xy^2 + g_1y^3 + a_2x^2 +$$

$$+b_2xy + g_2y^2 + b_3x + g_3y + d = 0 \tag{1.4}$$

ko'rinishga ega bo'lsin. (1.1) sistemaning (1.4) integrali uchun (1.3) munosabat o'rinli, bu yerda $L(x,y)=fx+gy+k,\ f,g,k-$ o'zgarmaslar:

$(3x_2+2a_1xy+b_1y^2+2a_2x+b_2y+b_3)(ax+by+a_1x^2+2b_1xy+$
c1y2+a1x2+2b1xy+3g1y2+b2x+2g2y+g3cx+dy+a2x2+2b2xy+c2y2=
$(x_3+a_1x^2y+b_1xy^2+g_1y^3+a_2x^2+b_2xy+g_2y^2+b_3x+g_3y+d)(fx+$
$gy+k)$ (1.5)

(1.5) da o'ngda va chapdagi x^my^n ifodalarda birxil darajalar koeffisentlarni tenglashtirib (1.4) egri chiziq va (1.1) sistema koeffisentlari orasidagi qo'ydagi bog'lanishni olamiz.

$$3a_1+a_1a_2-f=0\,, \qquad (1.6_1)$$

$$(2a_1+2b_2-f)a_1+2a_2b_1-g+6b_1=0\,, \qquad (1.6_2)$$

$$2a_1c_1+(2b_1+2c_2-g)b_1+(6b_2-f)g_1=0\,, \qquad (1.6_3)$$

$$(4b_1+c_2-g)a_1+(a_1+4b_2-f)b_1+3a_2g_1+3c_1=0\,, \qquad (1.6_4)$$

$$c_1b_1+(3c_2-g)g_1=0\,; \qquad (1.6_5)$$

$$ca_1+(2a_1-f)a_2+a_2b_2-k+3a=0\,, \qquad (1.7_1)$$

$$(2a+d-k)a_1+2cb_1+(4b_1-g)a_2+$$

$$+(a_1+2b_2-f)b_2+2a_2g_2+3b=0 \qquad (1.7_2)$$

$$2ba_1+(a+2d-k)b_1+3cg_1+2c_1a_2+$$

$$(2b_1+c_2-g)b_2+(4b_2-f)g_2=0 \qquad (1.7_3)$$

$$bb_1+(3d-k)g_1+c_1b_2+(2c_2-g)g_2=0\,; \qquad (1.7_4)$$

$$(2a-k)a_2+cb_2+(a_1-f)b_3+a_2g_3=0\,, \qquad (1.8_1)$$

$$2ba_2+(a+d-k)b_2+2cg_2+(2b_1-g)b_3+(2b_2-f)g_3=0\,, \qquad (1.8_2)$$

$$bb_2+(2d-k)g_2+c_1b_3+(c_2-g)g_3=0\,; \qquad (1.8_3)$$

$$(a-k)b_3+cg_3-df=0\,, \qquad (1.9_1)$$

$$bb_3+(d-k)g_3-dg=0\,, \qquad (1.9_2)$$

$$dk=0. \qquad (1.9_3)$$

(1.4) egri chiziq va (1.1) sistema koeffisentlar haqiqiy va egri chiziq koordinata boshidan o'tmaydi deb faraz qilamiz, u holda $d=0$. (1.9_3) ga ko'ra bu holda $k=0$.

(1.1) sistemaning xususiy holini ya'ni $a_2=c_1=0$ deb (1.4) integral egri chiziq $a_1\,, b_1\,, g_1$ koeffisentlarni nolga aylanadi deb faraz qilamiz.

Bu farazlarda $(1.6_1)-(1.9_3)$ tenglamalar

$$3a_1-f=0\,, \qquad (1.10_1)$$

$$g+6b_1=0\,; \qquad (1.10_2)$$

$$(2a_1-g)a_2+3a=0\,, \qquad (1.11_1)$$

$$(4b_1-g)a_2+(a_1+2b_2-f)b_2+3b=0\,, \qquad (1.11_2)$$

$$(2b_1+c_2-g)b_2+(4b_2-f)g_2=0\,, \qquad (1.11_3)$$

$$(2c_2-g)g_2=0\,; \qquad (1.11_4)$$

$$2aa_2+cb_2+(a_1-f)b_3=0\,, \qquad (1.12_1)$$

$$2ba_2+(a+d)b_2+2cg_2+(2b_1-g)b_3+(2b_2-f)g_3=0\,, \qquad (1.12_2)$$

$$bb_2+2dg_2+(c_2-g)g_3=0\,; \qquad (1.12_3)$$

$$ab_3+cg_3-df=0\,, \qquad (1.13_1)$$

$$bb_3+dg_3-dg=0\,. \qquad (1.13_2)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. (1.10_1) va (1.10_2) shartlardan

$f = 2a_1$, $g = 6b_1$ ni olamiz. (1.11_4) shartdan $(2c_2 - g)g_2 = 0$ $g_2 \neq 0$ bo'lsin, u holda $2c_2 - g = 0$ va $g = 2c_2$ ikkinchi tomondan $g = 6b_1$, demak $c_2 = 3b_1$ $f = 2a_1$, $g = 6b_1$, $c_2 = 3b_1$ shartlarga ega bo'lib, $(1.11_1) - (1.11_3)$, (1.12_1), (1.12_3) va (1.13_1) munosabatlardan (1.4) egri chiziq koeffisentlarini (1.1) sistema koeffisentlari orqali ifodalalarini qo'ydagi ko'rinishda topamiz.

$$a_2 = \frac{3a}{a_1}, \quad b_2 = \frac{3(2ab_1 - ba_1)}{2a_1(b_2 - a_1)}, \ b_3 = \frac{12a^2(b_2 - a_1) + 3c(2ab_1 - ba_1)}{4a_1^2(b_2 - a_1)},$$

$$g_2 = \frac{3b_1(2ab_1 - ba_1)}{2a_1(b_2 - a_1)(4b_2 - 3a_1)}, \quad g_3 = \frac{(2ab_1 - ba_1)(4bb_2 - 3a_1b + 2ab_1)}{2a_1b_1(b_2 - a_1)(4b_2 - 3a_1)}, d =$$
$$\frac{12a^3b_1(b_2 - a_1)(4b_2 - 3a_1) + (2ab_1 - ba_1)[3acb_1(4b_2 - 3a_1) + 2ca_1(4bb_2 - 3ba_1 + 2db_1)]}{12a_1^3b_1(b_2 - a_1)(4b_2 - 3a_1)}$$

(1.15)

(1.12_2) va (1.13_2) tenglamalar olingan (1.15) ifodalari hisobga olganda

a , b , c , d , a_1 , b_1 , b_2 koeffisentlari bog'lovchi ikkita shartni beradi.

$(2ab_1 - ba_1)[3(32a_1b_1b_2 - 15a_1^2b_1 - 16b_1b_2^2)a + (8a_1b_2^2 - 18a_1^2b_2 +$
9a13b+24a1b12–b12b2c+16a1b1b2–15a12b1d=0 *(1.16)*

$(2ab_1 - ba_1)[12(7a_1b_1b_2 - 3a_1^2b_1 - 4b_1b_2^2)a^2 + 6(3a_1b_1^2 - 4b_1^2b_2)ac +$
3a12b1–4a1b1b2bc+24a12b2–3a13bd–8a1b12cd+4a12b1d2=0
(1.17)

shunday qilib, quydagi teorema isbotlandi:

1.1-teorema. (1.1) sistema uning koeffisentlari (1.16), (1.17) munosabatlar bilan bog'langan va $c_1 = a_2 = 0$, $c_2 = 3b_1$ shartda koeffisentlari (1.15) formulalar bilan ifodalanuvchi (1.4) ko'rinishdagi xususiy integralga ega.

1.2 -§. To‘g‘ri chiziq ko’rinishdagi xususiy integralga ega bo‘lgan kvadratik ikki ulchovli statsionar sistemani tuzish.

(1.2) xususiy integral sifatida

$$mx + ny + p = 0 \tag{1.18}$$

birinchi tartibli egri chiziqqa ega bo’lgan (1.1) sistemani qaraymiz. (1.1) sistemada oldingi paragrafga kura

$$a_2 = c_1 = 0\,,\ c_2 = 3b_1 \tag{1.19}$$

(1.1) sistemaning (1.18) integrali uchun (1.19) ni hisobga olganda (1.3) munosabat o’rinli, bu yerda

$L(x, y) = ax + by + g\,,\quad a\,, b\,, g -$ o’zgarmaslar:

$$m(ax + by + a_1x^2 + 2b_1xy\,) + n(cx + dy + 2b_2xy + 3b_1y^2) =$$
$$(mx + ny + p)(ax + by + g) \tag{1.20}$$

(1.20) da $x^m y^n$ bir xil darajalar oldidagi koeffisentlarni tinglashtirib (1.18) egri chiziq va (1.1) sistema koeffisentlar orasida quyidagi bog’lanishni olamiz:

$$(a_1 - a)m = 0\ , \tag{1.21_1}$$

$$(2b_1 - b)m + (2b_2 - a)n = 0\,, \tag{1.21_2}$$

$$(3b_1 - b)n = 0\,; \tag{1.21_3}$$

$$(a - g)m + cn - pa = 0\,, \tag{1.22_1}$$

$$bm + (d - g)n - bp = 0\,, \tag{1.22_2}$$

$$pg = 0\,. \tag{1.22_3}$$

faraz qilaylik, egri chiziq koordinata boshidan o'tmasin, ya'ni $p \neq 0$. U holda (1.22_3) shartdan $g = 0$ ni olamiz. (1.22_1), (1.22_2) shartlar

$$am + cn - pa = 0\,, \tag{1.23_1}$$

$$bm + dn - bp = 0\,. \tag{1.23_2}$$

ko'rinishda yoziladi. (1.21_1) va (1.21_3) shartlardan

$$(a_1 - a)m = 0\,, \quad (3b_1 - b)n = 0\,.$$

ga ega bo'lamiz. $m \neq 0$ bo'lsin, u holda

$$a_1 - a = 0 \quad \text{va} \quad a = a_1 \tag{1.24}$$

$$3b_1 - b = 0 \quad \text{va} \quad b = 3b_1 \tag{1.25}$$

(1.24) va (1.25) ni hisobga olib, (1.21_2) shartdan m koeffisent iifodasini topamiz.

$$m = \frac{2b_2 - a_1}{b_1} n \tag{1.26}$$

(1.23_1) munosabat esa p koeffisent qiymatini beradi:

$$p = \frac{a(2b_2 - a_1) + cb_1}{a_1 b_1} n \tag{1.27}$$

(1.23_2) tenglikdan olingan (1.26) va (1.27) ifodalarni hisobga olib, (1.1) sistema koeffisentlariga shartni topamiz:

$$[3(a_1 b_1 - 2b_1 b_2)a + (2a_1 b_2 - a_1^2)b - 3b_1^2 c + a_1 b_1 d]n = 0 \tag{1.28}$$

Shunday qilib quyidagi teorema isbotlandi.

1.2-teorema. (1.1) sistema koeffisentlari (1.28) munosabat bilan bog'langan va $c_1 = a_2 = 0$, $c_2 = 3b_1$ shartda (1.26), (1.27) koeffisentlari bilan ifodalanadigan (1.18) xususiy integralga ega.

(1.3)   (1.1) sistemaning ikkita (1.4), (1.18) xususiy inyegrallari mavjudligining zarur va yetarli shartlari 1, 2-bo’limlarda (1.1) sistema uning koeffisentlari

$(2ab_1 - ba_1)[3(32a_1b_1b_2 - 15a_1^2b_1 - 16b_1b_2^2)a + (8a_1b_2^2 - 18a_1^2b_2 +$
9a13b+24a1b12–b12b2c+16a1b1b2–15a12b1d=0

$(2ab_1 - ba_1)[12(7a_1b_1b_2 - 3a_1^2b_1 - 4b_1b_2^2)a^2 + 6(3a_1b_1^2 - 4b_1^2b_2)ac +$
3a12b1–4a1b1b2bc+24a12b2–3a13bd–8a1b12cd+4a12b1d2=0

$[3(a_1b_1 - 2b_1b_2)a + (2a_1b_2 - a_1^2)b - 3b_1^2c + a_1b_1d]n = 0$

munosabatlar bilan bog’langan shartda uchinchi va birinchi tartibli egri chiziqlar ko’rinishda ikkita xususiy integralga ega ekanligiga ega bo’ldik.

Bunda $b_1 \neq 0\,, a_1 \neq 0\,, 2b_1a - ba_1 \neq 0$

Xususiy holni qaraymiz, ya’ni

$a_1 = \frac{1}{4}$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ lar deb qaraymiz.

Demak, birinchi munosabatlar

$$\frac{3}{4}a - \frac{1}{16}b - 3c + \frac{1}{4}d = 0 \qquad (1.30)$$

$$-\frac{45}{16}a + \frac{9}{64}b + 6c - \frac{15}{16}d = 0 \qquad (1.31)$$

$$-\frac{9}{4}a^2 + \frac{1}{4}d^2 + \frac{9}{2}ac + \frac{3}{16}bc - \frac{3}{32}bd - 2cd = 0 \qquad (1.32)$$

ko’rinishda yoziladi. (1.30) shartdan c koeffisentni ifodalaymiz

$$c = \frac{1}{4}a - \frac{1}{48}b + \frac{1}{12}d \qquad (1.33)$$

(1.33) ni (1.31) tenglikka qo’yib, d koeffisentni topamiz

$$d = \frac{1}{7}\left(-21a + \frac{1}{4}b\right) \qquad (1.34)$$

(1.32) shartdan (1.33) va (1.34) hisobga olib

$b = \frac{63}{8}a$ ni topamiz. (1.1) sistemaning koeffisentlari quyidagi formulalar bo'yicha aniqlanishini olamiz:

$$b = \frac{63}{8}a\,,$$

$$c = -\frac{9}{64}a\,,$$

$$d = -\frac{87}{32}a\,,$$

$$a_1 = \frac{1}{4}\,,\ b_1 = 1\,, a_2 = 0, c_1 = 0, b_2 = 0\,, c_2 = 3\,, b_1 = 3 \qquad (1.35)$$

(1.15), (1.26) va (1.27) tengliklar (1.35) formulalar o'rinli bo'lgan shartda (1.4) va (1.18) integrallar koeffisentlari uchun ifodalarni beradi:

$$a_2 = 12a\,,\ b_2 = -\frac{3}{4}a\,,\ g_2 = a\,,\ b_3 = \frac{6171}{128}a^2\,,\ g_3 = -\frac{121}{32}a^2\,,$$

$$d = \frac{33275}{512}a^3\,,\ m = -\frac{1}{4}n\,,\ p = -\frac{25}{16}an \qquad (1.36)$$

1.3-teorema. (1.1) sistema koeffisentlari parameterlari orqali (1.35) formulalar bilan ifodalanadi. Shartda (1.36) formulalar bilan aniqlangan koeffisentlarga ega (1.4) va (1.18) ko'rinishdagi xususiy integralga ega.

1.3 - §. Yopiq trayektoriya atrofini o‘rganish. Oddiy va murakkab limitik davralar.

Bu paragrfda yopiq trayektoriya atrofini biror sof nazariy tadqiqoti bayon etiladi. Bu tadqiqot sof nazariy xarakterga ega bo‘lsada, shunga qaramasdan yopiq tirayektoriyalarning qanday mumkin bo‘lgan xarakteri haqida juda foydali ma’lumotlarni beradi. Bu ma’lumotlar parametr o‘zgarganda limitik davralar xolatini tushunishi uchun birinchi darajali qiziqish uyg‘otadi.

$$L_0 - \quad \text{yopiq trayektoriya,}$$

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

τ davrli davriy bo‘lgan unga moskeluvchi qandaydir harakat bo‘lsin. Agar

$l - L_0$ trayektoriyaning qandaydir Q nuqtasidan o‘tkazilgan kontaktsiz yoy bo‘lsa, u holda bu yoyning Q nuqtaga yetarlicha yaqin qismida ketma - ketlik funksiyasi aniqlanadi. $s - l$ yoydagi parameter, $s_0 - L_0$ yopiq trayektoriyaga mos keluvchi bu parametrning qiymati va $\overline{s} = f(s) -$ ketma – ketlilik funksiyasi.

$$\psi(s) = f(s) - s$$

$$\psi(s_0) = 0$$

funksiyani kiritamiz. $\psi(s)$ ni $(s - s_0)$ darajalari bo‘yicha qatorga yoyamiz:

$$\psi(s) = \alpha_1(s - s_0) + \alpha_2(s - s_0)^2 + \ . \ . \ . \ ,$$

$$\alpha_1 = f'(s_0) - 1 \quad \alpha_i = \frac{f^i(s_0)}{i!}$$

Quyidagi hollar bo‘yicha mumkin:

1. $$f'(s_0) \neq 1$$

$\psi(s)$ funksiyaning s_0 ildizi ravshanki, ajralgan yopiq trayektoriya oddiy limitik sikl hisoblanadi.

$$f'(s_0) < 1, \quad \text{ya'ni} \quad \psi'(s_0) < 0,$$

bo‘lganda turg‘un,

$$f'(s_0) > 1, \quad \text{ya'ni} \quad \psi'(s_0) > 0,$$

bo‘lganda turg‘unmas bo‘ladi.

2. $$f'(s_0) = 1, \quad \text{ya'ni} \quad \psi'(s_0) = 0,$$

lekin $\psi(s)$ funksiya hosilalaridan hech bo‘lmaganda bittasi $s = s_0$ da nolga aylanmaydi, ya’ni shunday k mavjudki

$$\psi'(s_0) =. . .= \psi^{k-1}(s_0) = 0\,, \quad k!\,\alpha_k = \psi^k(s_0) \neq 0.$$

o‘rinli bo‘ladi.

Demak, biz

$$\psi(s) = (s - s_0)^k[\alpha_k + \alpha_{k+1}(s - s_0) + . . .].$$

ga ega bo‘lamiz. $\psi(s_0)$ funksiyaning s_0 ildizi 1 - holdagi kabi ajralgan.

L_0 yopiq traektoriya murakkab $k -$ karralli limitik sikl deb ataladi.

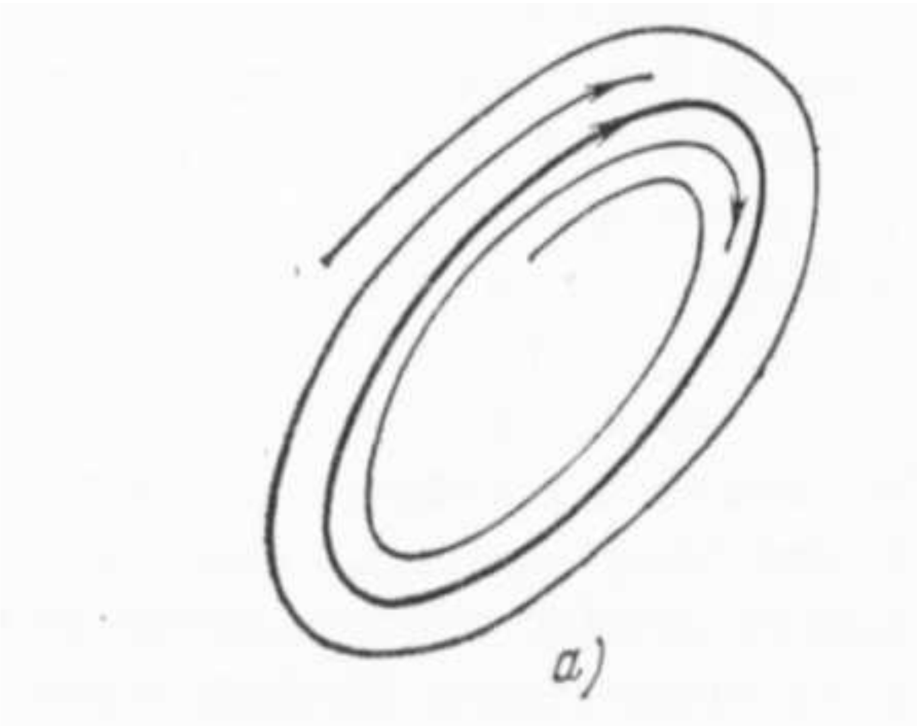
a) $k -$ toq. Faraz qilaylik

$$\psi^{(k)}(s_0) = k! \quad \alpha_k < 0 \quad \text{bo‘lsin. U holda}$$

$$s < s_0 \quad \text{da} \quad \psi(s_0) > 0, \quad \text{ya'ni} \quad f(s) > s$$

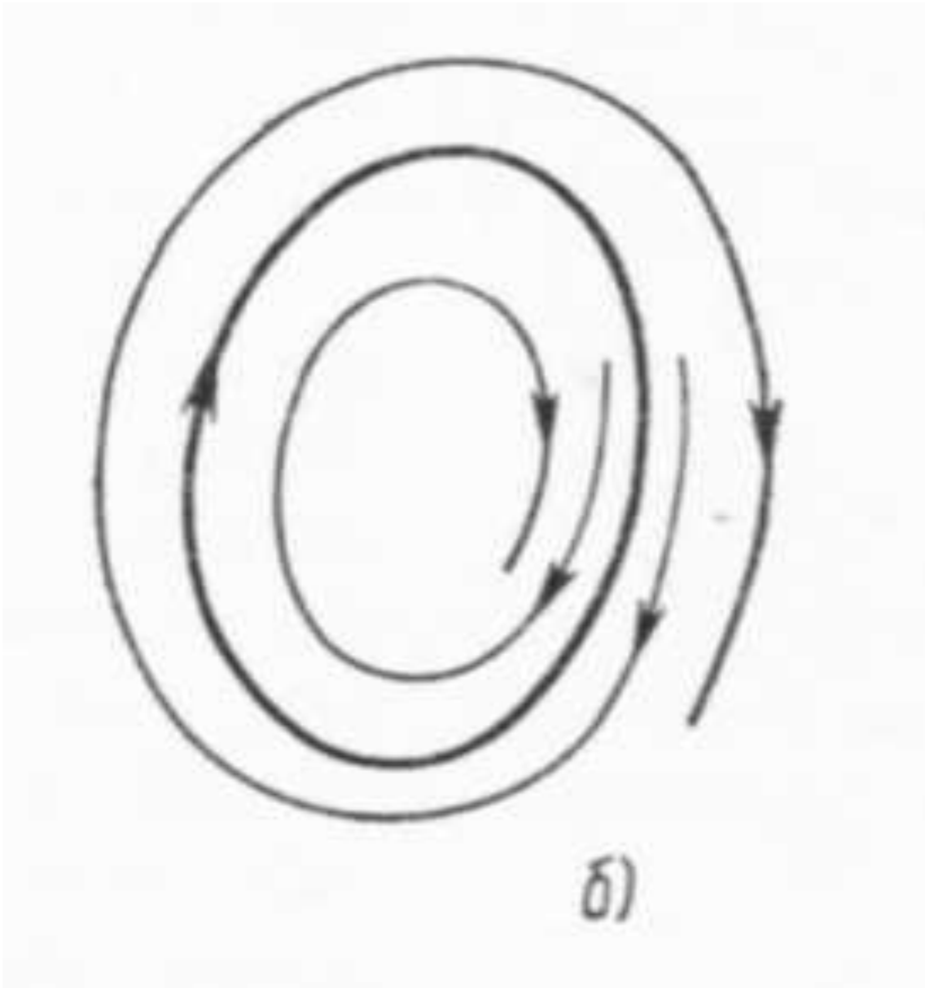
$$s > s_0 \quad \text{da} \quad \psi(s_0) < 0, \quad \text{ya'ni} \quad f(s) < s$$

Demak, keyingi har bir nuqta l kesmada oldingisiga qaraganda Q nuqtaga yaqin (unda yopiq L_0 yarim trayektoriya l kesmani kesib o‘tadi). Ketma - ketlik funksiya tuzilishiga ko‘ra keyingi nuqta oldingisidan katta bo‘lgan t qiymatga mos kelganligi uchun $L_0 -$ qaralayotgan kesma qismini l bilan kontaksiz kesib o‘tadigan yagona yopiq trayektoriya ekanligini hisobga olib, L dan farqli l kesmani Q nuqtaga etarlicha yaqin kesib o‘tadigan har qanday trayektoriya $t \to +\infty$ da L_0 limitik siklga intilishini oson ko‘rsatish mumkin. L_0 da limitik sikl turg‘un (toq-karrali) limitik sikldan iborat. $(1 - rasm)$



1 – rasm.

Agar $\psi^{(k)}(s_0) > 0$ bo‘lsa xuddi shunday l kesmani yetarlicha Q nuqtaga yaqin kesib o‘tuvchi har qanday trayektoriya $t \to -\infty$ da L_0 limitik siklga intilishini ko‘rsatish mumkin. L_0 limitik sikl turg‘unmas (toq-karrali) limitik sikl bo‘ladi.



2– rasm.

b) $k-$juft. U holda $s \neq s_0$ da $k!\,\alpha_k = \psi^k(s_0)$ ishorasiga bog‘liq ravishda yo $\psi(s) > 0$, ya’ni $f(s) > 0$ (agar $\psi^{(k)}(s_0) > 0$ bo‘lsa) yoki

$\psi(s) < 0$, ya’ni $f(s) < s$ (agar $\psi^{(k)}(s_0) < 0$ bo‘lsa).

$\psi^{(k)}(s_0) > 0$ bo‘lgan holda $s < s_0$ qiymatlarga mos keluvchi l kesma nuqtalaridan o‘tuvchi barcha trayektoriyalar $t \to +\infty$ da L_0 ga intiladi, $s > s_0$ qiymatlarga mos keluvchi l kesma nuqtalaridan o‘tuvchi barcha trayektoriyalar esa $t \to -\infty$ da L_0 ga intiladi va $\psi^{(k)}(s_0) < 0$ bo‘lganda aksincha

3 – rasm.

Ravshanki, qaralayotgan holda ($k -$ juft) L_0 limit sikl turg‘unmas.

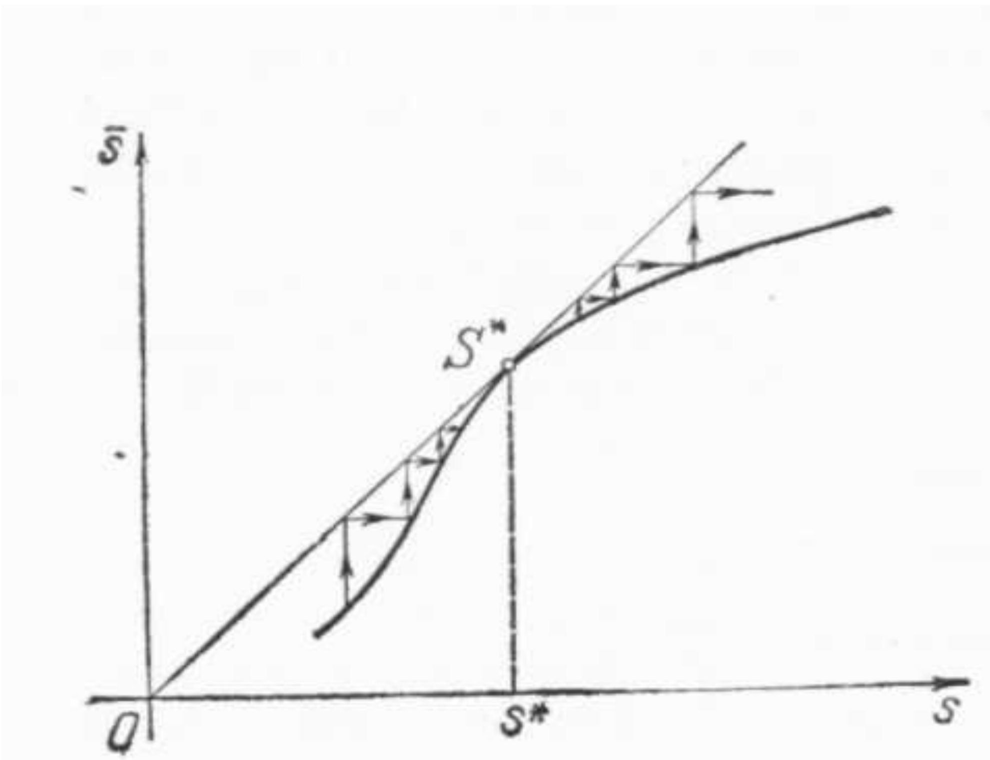
Lekin ko‘pincha bu tipdagi limit siklni $t \to -\infty$ da barcha yetarlicha yaqin trayektoriyalar intiladigan sikl uchun „ turg‘unmas “ atamasini saqlab turg‘un (juft – karrali) deb atashadi.

3. $\psi(s)$ funksiyaning barcha tartibli funksiyalari $s = s_0$ da nolga teng, ya’ni barcha i larda $\psi^{(i)}(s_0) = 0$. U holda $\psi(s) \equiv 0$, ya’ni ketma – ketlik funksiyasi

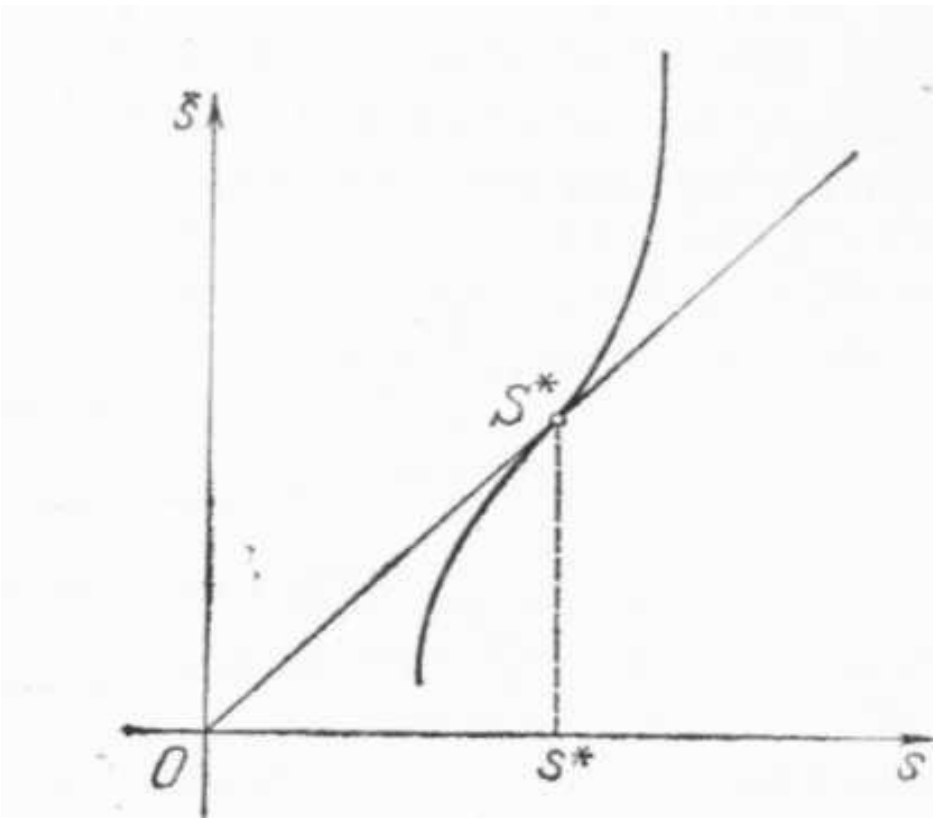
$$\bar{s} \equiv s$$

ko‘rinishga ega. Bu holda

L_0 ga yetarlicha yaqin nuqtalardan o‘tuvchi barcha trayektoriyalar yopiq (bu hol markaz holiga o‘xshash)



$4 - rasm.$



$5 - rasm$

4 va 5 – rasmlarda toq – karrali limitik sikl (2- rasm.) va juft karrali limitik sikl (1- rasm) holi uchun Lamerey diagrammalari berilgan.

Ketma – ketlik funksiyasini, xususan yopiq trayektoriya karraligi shartlari kontaktsiz yoyni ma’lum tanlash orqali amalga oshiriladi. Lekin bu shartlar kontaktsiz yoyning tanlanishiga va bu yoyda parametrning tanlanishiga bog‘liq emasligini ko‘rsatish mumkin (albatta qaralayotgan yoylar parametrik tenglamalari analitik funksiyalardan iborat bo‘lgan shartda).

Ketma – ketlik funksiyasini tadqiq qilishdan, bunda bu funksiya analitik funksiya ekanligidan foydalanilgan edi, ravshanki, o‘ng tomonlari analitik bo‘lgan sistemada:

1) Yopiq trayektoriyaga to‘planuvchi cheksiz ko‘p limit sikllar mavjud

bo‘lishi mumkin emas;

2) Tashqarida barcha trayektoriyalar yopiq bo‘lmagan, ichida (tashqarida) - yopiq bo‘lgan yopiq trayektoriya mavjud bo‘lishi mumkin emas, ya’ni masalan, 6- rasmda tasvirlangan hol bo‘lishi mumkin emas.

$6 - rasm$

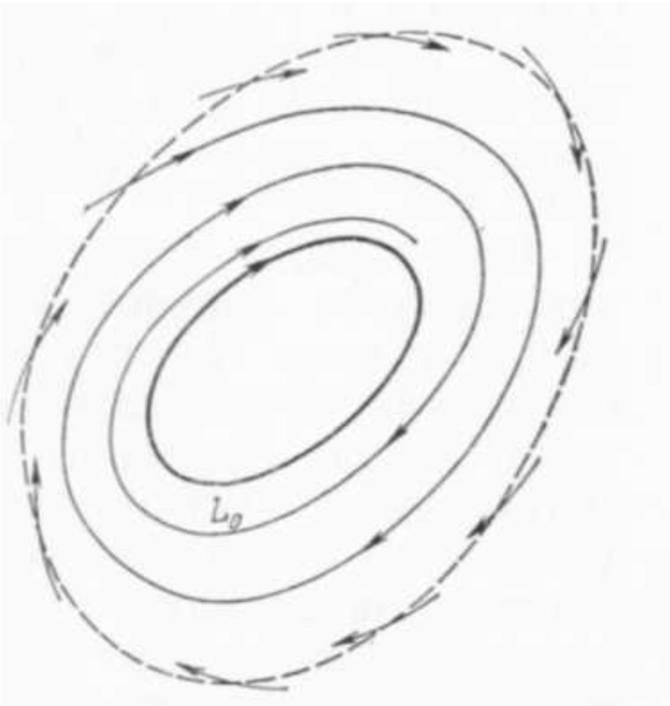
Ko‘rsatilgan xossalar quyidagi muloxaza ko‘rinishida bayon etilishi mumkin:

1- **Teorema.** Agar o‘ng tomonlari analitik funksiyalar bo‘lgan (A), sistemada yopiq traektoriya mavjud bo‘lsa, u holda u yo ajralgan bo‘ladi, yoki uning atrofidagi barcha traektoriyalar yopiq.

Qator holllarda juda foydali bo‘lgan yana bitta eslatmani bayon etamiz:

$L_0 -$ limitik sikl – turg‘un, turg‘unmas (oddiy yoki murakkab) yoki yarim turg‘un bo‘lsin. Uning ixtiyoriy yetarlicha kichik atrofida ya’ni na muvozanat holatini na undan farqli limit sikllarni o‘z ichiga olmagan ixtiyoriy bunday atrofda L_0 dan tashqarida (ichida L_0 ni o‘z ichiga oluvchi)

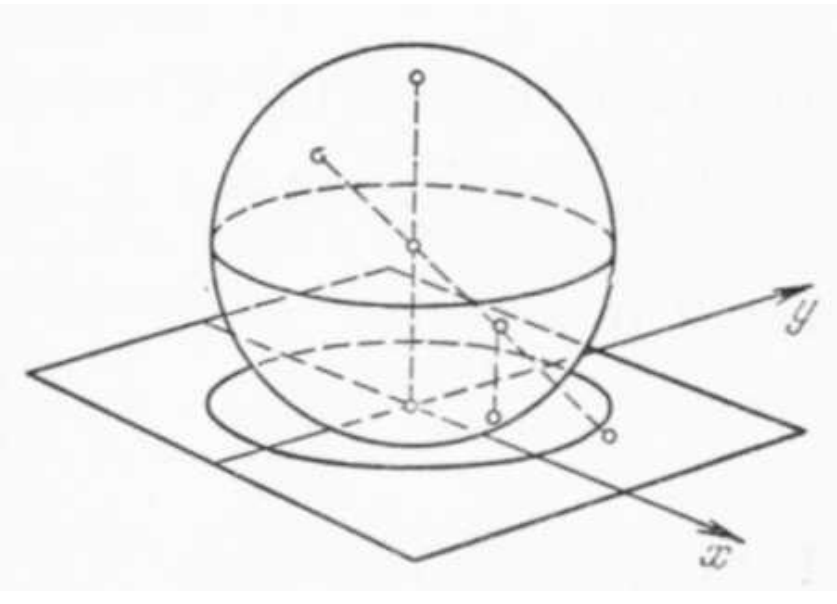
yotuvchi ham, L_0 ichida yotuvchi kontaktsiz sikllar hamma vaqt yasalishi mumkin.



$7 - rasm$

1.4 - §. Cheksizlikda integral egri chiziqlar holatini o‘rganish. Puankare sferasi.

Ko‘p hollarda yopiq traektoriyalar mavjudligi haqidagi masalani tadqiq etish uchun cheksizlikka uzoqlashganda trayektoriyalar holati haqidagi ma’lumotlar, ya’ni tekislikning ,, cheksiz uzoqlashgan “ qismlarini tadqiq etish juda foydali hisoblanadi. Dinamik sistemaning o‘ng qismlari – ko‘phadlar holida, buning uchun fazoviy tekislikka ,, Puankare sfera “ si deb ataluvchi, ya’ni x , y tekislikka koordinata boshida urunuvchi sferaga akslantirishdan foydalaniladi. x , y tekislikning har bir nuqtasiga sferaning sfera markazidan va tekislikning bu nuqtasidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqda yotuvchi sferaning ikki nuqtasi mos qo‘yiladi. Ekvatorga (x , y tekislikka parallel katta dira) tekislikning cheksiz uzoqlashgan nuqtalari akislantiriladi (8 – rasm).



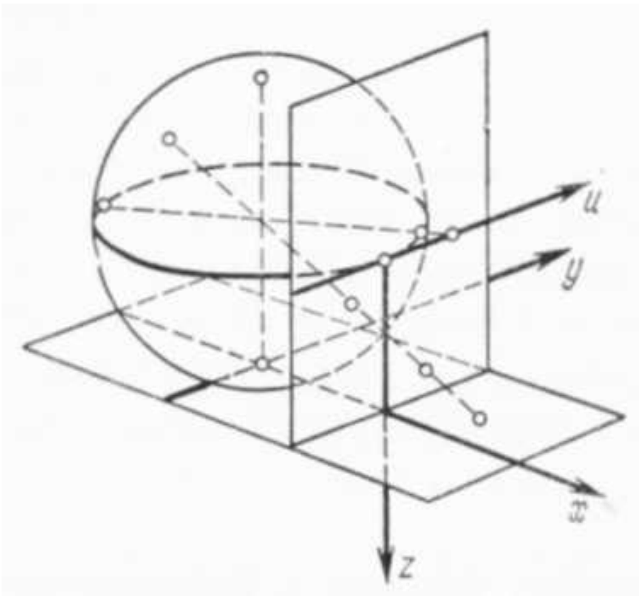
$8 - rasm$

Tekislikning integral egri chiziqlari buyich sferaning mos egri chiziqlariga o‘tadi, bunda egar, tugun va fokuslar o‘z ko‘rinishini saqlaydi.

Lekin sferada ekvatorida yotuvchi yangi maxsus nuqtalar paydo bo‘ladi. Ko‘pincha bunday maxsus nuqtalar yuqori tartibli bo‘ladi. Sferaga o‘rinma quyi urinish shar orthogonal proyeksiyasi butun $x\,,y$ tekislikni doira ichiga qulay yakuniy akislantirishni beradi.

(A) sistemada $P(x,y)$ va $Q(x,y)$ o‘ng qismlar - x va y bo‘yicha ko‘phadlar bo‘lsin.

$x=\frac{1}{z}$, $y=\frac{u}{z}$ almashtirish y o‘qi „ uchlari “ ga mos keluvchi nuqtalardan tashqari, Puankare sferasi ekvatorida yotuvchi maxsus nuqtalarni o‘rganishga imkon beradi. z va u to‘g‘ri burchakli dekart koordinatalari bo‘lib xizmat qilgan tekislikni qurish mumkin: bu $x\,,y$ tekislikka perpendikulyar sferaga urinma tekislik bo‘ladi. u o‘qi ekvator tekisligida yotuvchi to‘g‘ri chiziq bo‘ladi (y o‘qiga parallel). Bunday ikkita tekislik o‘tkazish mumkin. z va u o‘qlar yo‘nalishlari urnini tekislikning joylashishiga bog‘liq bo‘ladi.



$9-rasm$

y o‘qi uchlarini tadqiq etish uchun $x=\frac{v}{z}$, $y=\frac{1}{z}$ deb olish lozim. Bu holda $z\,,\,\tau$ tekislik x o‘qiga parallel joylashadi.

$$x=\frac{1}{z}\ ,\quad y=\frac{u}{z}$$

almashtirish (A) sistemani

$$\frac{dz}{dt} = -P\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) z^2 ,$$

$$\frac{du}{dz} = Q\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) z - P\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) uz \qquad (1)$$

sistemaga yoki

$$\frac{du}{dz} = -\frac{\frac{Q(1/z, u/z)}{P(1/z, u/z)} - u}{z}$$

tenglamaga olib keladi. Agar (1) sistemada o‘ng qismlari umumiy maxrajga keltirsak, u holda biz ravshanki

$$\frac{dz}{dt} = \frac{P^*(z,u)}{z^n}, \qquad \frac{du}{dt} = \frac{Q^*(z,u)}{z^n} \qquad (2)$$

sistemani olamiz ($n - P(x, y)$ va $Q(x, y)$ ko‘phadlarning eng katta darajasi).

Yangi

$$\frac{dt}{z^n} = d\tau$$

parametrni kiritib (2) sistemani

$$\frac{dz}{d\tau} = P^*\,(z, u), \qquad \frac{du}{d\tau} = Q^*(z, u)$$

ko‘rinishida $(P^*\,(z, u)$ va $Q^*(z, u)$, ravshanki, - ko‘phadlar) yoki

$$\frac{du}{dz} = \frac{Q^*(z,u)}{P^*(z,u)}$$

bitta tenglama shaklida ifodalay olamiz. Maxsus nuqtalar (ekvatorida)

$$P^*(0, u) = 0\,, \quad Q^*(0, u) = 0 \qquad (3)$$

tenglamalardan yoki

$$z = 0\,, \qquad \frac{Q(1/z,u/z)}{P(1/z,u/z)} - u = 0 \qquad (4)$$

tenglamalardan topiladiki (bu tenglamalardan ikkinchisi $z = 0$ da qo‘shimcha aniqlanadi). Agar tenglamalarning ikkinchisi aynan qanoatlantirmasa, u holda Puankare sferasi ekvatori integral egri chiziqdan iborat. Agar $P(x, y)$, $Q(x, y) -$ bir xil darajali kuphadlar bo‘lsa, u holda ekvatordan maxsus nuqtalar koordinatalari

$$Q_n(1, u) - uP_n(1, u) = 0$$

tenglama ildizlari sifatida topiladi, bu yerda Q_n va $P_n - Q$ va P lardagi eng yo‘qori darajali hadlari har bir ildiz diametrikal qarama – qarshi joylashgan ekvatordagi ikkita maxsus nuqtaga mos keladi.

Ekvatordagi ixtiyoriy sodda maxsus nuqta yo tugun yo egar bo‘ladi.

Puankare alomati. Agar Q va P bir xil darajali bo‘lsa, u holda oddiy $z = 0$, $u = u_0$ maxsus nuqtaegar bo‘ladi, agar u $u_0 - \varepsilon$ dan $u_0 + \varepsilon$ gacha o‘zgarganda

$$\frac{Q_n(1,u)}{P_n(1,u)} - u$$

ifoda manfiy qiymatlardan musbat qiymatlarga o‘tsa va tugun bo‘ladi, agar ko‘rsatilgan ifoda musbat qiymatlardan manfiy qiymatlarga o‘tsa.

II-BOB. Tekislikda sistema trayektoriyalarini tekshirish

2.1 - §. Chekli tekislikda koeffisentlari (1.35) formulalar bilan berilgan (1.1) sistemani tekshirish.

Koeffisentlari (1.35) formulalar bilan aniqlanuvchi (1.1) sistema

berilgan bo'lsin. (1.4) , (1.18) integral egri chiziqlar (1.36) formulalarga ko'ra

$$x^3 + 12ax^2 - \frac{3}{4}axy + ay^2 + \frac{6171}{128}a^2x - \frac{121}{32}a^2y + \frac{33275}{512}a^3 = 0 \qquad (2.2)$$

$$-\frac{1}{4}nx + ny - \frac{25}{16}an = 0 \qquad (2.3)$$

ko'rinishga ega.

(2.1) sistemaning muvozanat holatini topamiz. Sistemaning o'ng qismlarini nolga tenglab va x o'zgaruvchini chiqarib, muvozanat holatlari ordinatalarini aniqlash uchun quydagi tenglamani olamiz:

$$8192y^4 - 11776ay^3 + 5480a^2y^2 - 825a^3y = 0 \qquad (2.4)$$

(2.4) dan

$$y_0 = 0\,,\ y_1 = \frac{5}{8}a\,,\ y_2 = \frac{15}{32}a\,,\ y_3 = \frac{11}{32}a \qquad (2.5)$$

ni olamiz. Sokinlik nuqtalari absissalari

$$x_0 = 0\,,\ x_1 = -\frac{15}{4}a\,,\ x_2 = -\frac{35}{8}a\,,\ x_3 = -\frac{33}{8}a \qquad (2.6)$$

ko'rinishga ega. (2.5) va (2.6) ga ko'ra (2.1) sistema

$$O(0,0),\ A(-\frac{15}{4}a, \frac{5}{8}a),\ B(-\frac{35}{8}a, \frac{15}{32}a),\ C(-\frac{33}{8}a, \frac{11}{32}a)$$

to’rtta muvozanat holatiga ega. O , A , B , C muvozanat holatlar atroflarida trayektoriyalar holatini tadqiq etamiz.

1. $O(0,0)$ nuqtani tadqiq etamiz $O(0,0)$ nuqtada xarakteristik tenglamani tuzamiz [10,s. 1760-1765]

$$\begin{cases} P(x,y) = ax + \frac{63}{8}ay + \frac{1}{4}x^2 + 2xy \\ Q(x,y) = -\frac{9}{64}ax - \frac{87}{32}ay + 3y^2 \end{cases}$$

$$P_x'(x,y) = a + \frac{1}{2}x + 2y$$

bundan

$$P_y' = \frac{63}{8}a + 2x ,$$

$$Q_x'(x,y) = -\frac{9}{64}a ,$$

$$Q_x'(x,y) = -\frac{87}{32}a + 6y \qquad (2.7)$$

Demak, xarakteristik tenglama

$$\begin{vmatrix} P_x' - \lambda & P_y' \\ Q_x' & Q_y' - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a - \lambda & \frac{63}{8}a \\ -\frac{9}{64}a & -\frac{87}{32}a - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{55}{32}a\lambda - \frac{825}{512}a^2 = 0$$

ko’rinishni oladi. (2.1) sistemaning $O(0,0)$ nuqta uchun xarateristik sonlari

$$\lambda_{1,2} = -\frac{55 \pm \sqrt{385}}{64}a$$

lardan iborat.

λ_1, λ_2 ildizlar - haqiqiy, turli ishorali, a parametrga bog'liq emas. Demak $O(0,0)$ nuqtq - egar.

2. $A(-\frac{15}{4}a, \frac{5}{8}a)$ nuqtani tadqiq etamiz.

A nuqtada xarakteristik tenglamani tuzamiz. (2.7) tengliklarga ko'ra xarakteristik tenglama

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{8}a - \lambda & \frac{3}{8}a \\ -\frac{9}{64}a & \frac{33}{32}a - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{45}{32}a\lambda + \frac{225}{512}a^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{45a \pm \sqrt{225a^2}}{64} = \frac{45a \pm 15a}{64}$$

Ko'rinishni oladi, ya'ni

$$\lambda_1 = \frac{15}{32}a, \quad \lambda_2 = \frac{15}{16}a$$

λ_1, λ_2 ildizlar – haqiqiy, bir xil ishorali, a parametrga bog'liq emas. Agar $a < 0$ bo'lsa, $A(-\frac{15}{4}a, \frac{5}{8}a)$ nuqta – turg'un, agar $a > 0$ bo'lsa $A(-\frac{15}{4}a, \frac{5}{8}a)$ nuqta noturg'un tugun.

3. $B\left(-\frac{35}{8}a, \frac{15}{32}a\right)$ nuqtqni tadqiq etamiz.

(2.7) tenglikni qo'llab, B nuqtada xarakteristik tenglamani tuzamiz

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{4}a - \lambda & -\frac{7}{8}a \\ -\frac{9}{64}a & \frac{3}{32}a - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{5}{32}a\lambda - \frac{75}{512}a^2 = 0$$

λ_1, λ_2 ildizlar – haqiqiy va bir xil ishorali. Demak, $B\left(-\frac{35}{8}a, \frac{15}{32}a\right)$ nuqta – ixtiyoriy a parametrda egar.

4. $C(-\frac{33}{8}a, \frac{11}{32}a)$ nuqtani tadqiq etamiz.

(2.7) ifodani hisobga olib nuqtada xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} -\frac{3}{8}a - \lambda & -\frac{3}{8}a \\ -\frac{9}{64}a & -\frac{21}{32}a - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{33}{32}a\lambda + \frac{99}{512}a^2 = 0$$

(2.1) sistemaning $C(-\frac{33}{8}a, \frac{11}{32}a)$ nuqtasi uchun xarakteristik sonlar

$$\lambda_{1,2} = \frac{-33 \pm 3\sqrt{33}}{64}a$$

lar bo'ladi. λ_1 , λ_2 ildizlar – xaqiqiy va bir xil ishorali. Demak $C(-\frac{33}{8}a, \frac{11}{32}a)$ nuqta – agar $a > 0$ bo'lsa turg'un tugun, $a < 0$ bo'lsa noturgun tugun.

2.2- §. Tenglamalar sistemasini tekislikning cheksiz o'zoqlashgan qismida tekshirish.

Yopiq trayektoriyalar mavjudligi haqidagi masalani tadqiq etishuchun cheksizlikka uzoqlashganda trayektoriyalar holati haqidagi ma'lumotlar ya'ni tekislikning cheksiz uzoqlashgan qismlarini tadqiq etishjuda muhimhisoblanadi.

Buning uchun Puankare almashtirishidan [7] foydalanamiz

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{u}{z} \tag{2.8}$$

u Puankare sferasi ekvatorida OY o'qi uchlaridan tashqarida joylashgan maxsus nuqtalarini o'rganishga imkon beradi.

$$\dot{z} = -\frac{1}{x^2}\dot{x} = \frac{z^2(-az - \frac{63}{8}auz - \frac{1}{4} - 2u)}{z^2}$$

$$\dot{u} = -\frac{y}{x^2}\dot{x} + \frac{1}{x}\dot{y} = \frac{u^2 - \frac{1}{4}u - \frac{63}{8}au^2z - \frac{119}{32}auz}{z^2}$$

ga ega bo'lamiz. Demak, (2.8) almashtirish (1.1) sistemani

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \frac{z(-az - \frac{63}{8}auz - \frac{1}{4} - 2u)}{z} \\ \frac{du}{dt} = \frac{u^2 - \frac{1}{4}u - \frac{63}{8}au^2z - \frac{9}{64}az - \frac{119}{32}auz}{z} \end{cases} \tag{2.9}$$

sistemaga o'tkazadi. Yangi $t = 2\tau$ vaqt kiritamiz. (2.9) sistema

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = z\left(-az - \frac{63}{8}auz - \frac{1}{4} - 2u\right) \\ \frac{du}{d\tau} = u^2 - \frac{1}{4}u - \frac{63}{8}au^2z - \frac{9}{64}az - \frac{119}{32}auz \end{cases} \tag{2.10}$$

ko'rinishni oladi. u o'qida cheksiz uzoqlashgan nuqtalarni, ya'ni $z = 0$ da organamiz.

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = 0 \\ \frac{du}{d\tau} = u^2 - \frac{1}{4}u \end{cases} \tag{2.11}$$

ni olamiz. (2.11) sistemaning ikkinchi tenglamasini nolga tenglab

$$u_0 = 0\,, \qquad u_1 = \frac{1}{4}$$

ni olamiz. Shunday qilib muvozanat holatlari bo'lib ikkita $N_1(0{,}0), N_2(0, \frac{1}{4})$ hisoblanadi.

$N_1\,, N_2$ nuqtalar xarakterik tadqiq etamiz.

1. $N_1(0{,}0)$ nuqtani tadqiq etamiz.

(2.10) sistemaning N_1 nuqtada xarakteristik tenglamasini tuzamiz.

$$P'_z = -2az - \frac{63}{4}auz - 2u - \frac{1}{4}\,,$$

$$P'_u = -\frac{63}{8}az^2 - 2z\,,$$

$$Q'_z = -\frac{63}{8}au^2 - \frac{9}{64}a - \frac{119}{32}au\,, \tag{2.12}$$

$$Q'_u = 2u - \frac{1}{4} - \frac{63}{4}auz - \frac{119}{32}az$$

(2.12) ifodalarga ko'ra xarakteristik tenglama olamiz.

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{4} - \lambda & 0 \\ -\frac{9}{64}a & -\frac{1}{4} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Bundan $\lambda_1 = -\frac{1}{4}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$

larni olamiz. $\lambda_1, \lambda_2 -$ haqiqiy va bir xil ishorali. Demak $N_1(0{,}0)$ nuqta – turg'un tugun.

2. $N_2(0,\frac{1}{4})$ nuqtani tadqiq etamiz.

(2.12) ifodani hisobga olib N_2 nuqtada xarakteristik tenglamani tuzamiz.

$$\begin{vmatrix} -\frac{3}{4}-\lambda & 0 \\ -\frac{25}{16}a & \frac{1}{4}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(-\frac{3}{4}-\lambda\right)\left(\frac{1}{4}-\lambda\right) = 0$$

mos ravishda xarakteristiksonlar $\lambda_1 = -\frac{3}{4}$, $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ larga teng bo'ladi. $\lambda_1, \lambda_2 -$ ildizlar haqiqiy, turli ishorali. Demak, $N_2(0,\frac{1}{4})$ nuqta – egar.

OY o'qi oxirida tekislikning cheksiz uzoqlashgan qismini

$$x = \frac{\nu}{z}, \quad y = \frac{1}{z}$$

[7] almashtirish yordamida tadqiq etamiz. Bu almashtirish (2.1) sistemani

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \frac{z(\frac{9}{64}a\nu z+\frac{87}{32}az-3)}{z} \\ \frac{d\nu}{dt} = \frac{\frac{1}{4}\nu^2-\nu+\frac{9}{64}a\nu^2 z+\frac{63}{8}az+\frac{119}{32}a\nu z}{z} \end{cases} \tag{2.14}$$

sistemaga o'tkazadi. $t = 2\tau$ yangi vaqt kiritamiz, u holda (2.14) sistema

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = z\left(\frac{9}{64}a\nu z + \frac{87}{32}az - 3\right) \\ \frac{d\nu}{d\tau} = \frac{1}{4}\nu^2 - \nu + \frac{9}{64}a\nu^2 z + \frac{63}{8}az + \frac{119}{32}a\nu z \end{cases} \tag{2.15}$$

ko'rinishni oladi. $z = 0$ da

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = 0 \\ \frac{d\nu}{d\tau} = \frac{1}{4}\nu^2 - \nu \end{cases} \tag{2.16}$$

ni olamiz. (2.16) sistemaning ikkinchi tenglamasini nolga tenglab

$$\nu_1 = 0\,, \qquad \nu_2 = 4$$

ni olamiz. OY o'qi uchlarida muvozanat holatlarni tadqiq etish uchun faqat $N_3(0,0)$ nuqtani tadqiq etish zarur. (2.16) sistemani N_3 nuqtada xarakteristik tenglamasini tuzamiz.

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 \\ \frac{63}{8}a & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-3-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

mos xarakteristik sonlar

$$\lambda_1 = -3\,, \qquad \lambda_2 = -1$$

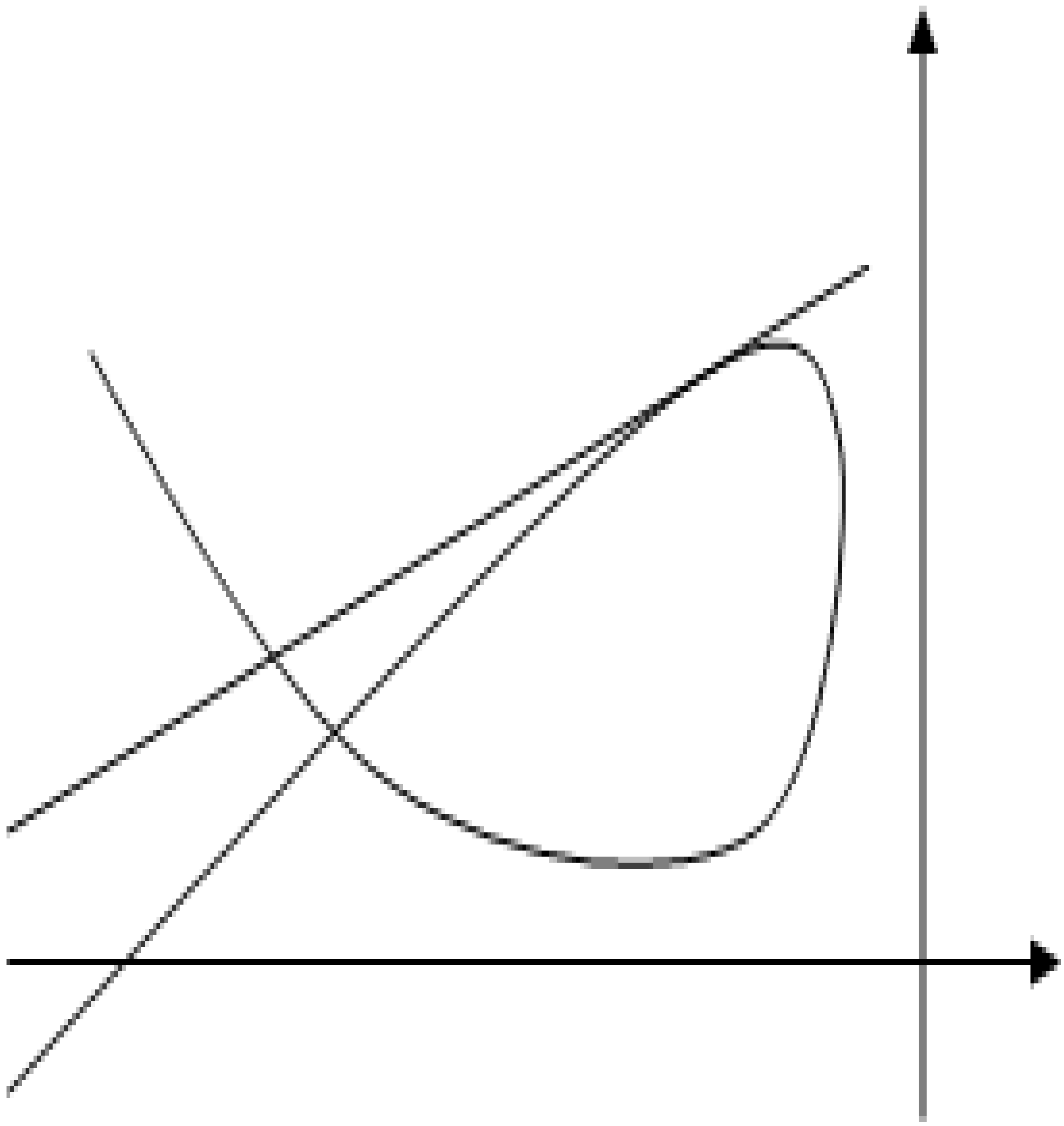
lardan iborat. $\lambda_1, \lambda_2 -$ ildizlar haqiqiy, bir xil ishorali. Demak, $N_3(0,0)$ - turg'un tugun. Endi (2.1) sistemaning muvozanat holat taqsimanitini 1-jadvalko'rinishida beramiz.

a	O	A	B	C	∞		
					N1	N2	N3
(-∞;0)	c	У+	c	У-	У+	c	У+
(0;+∞)	c	У-	c	У+	У+	c	У+

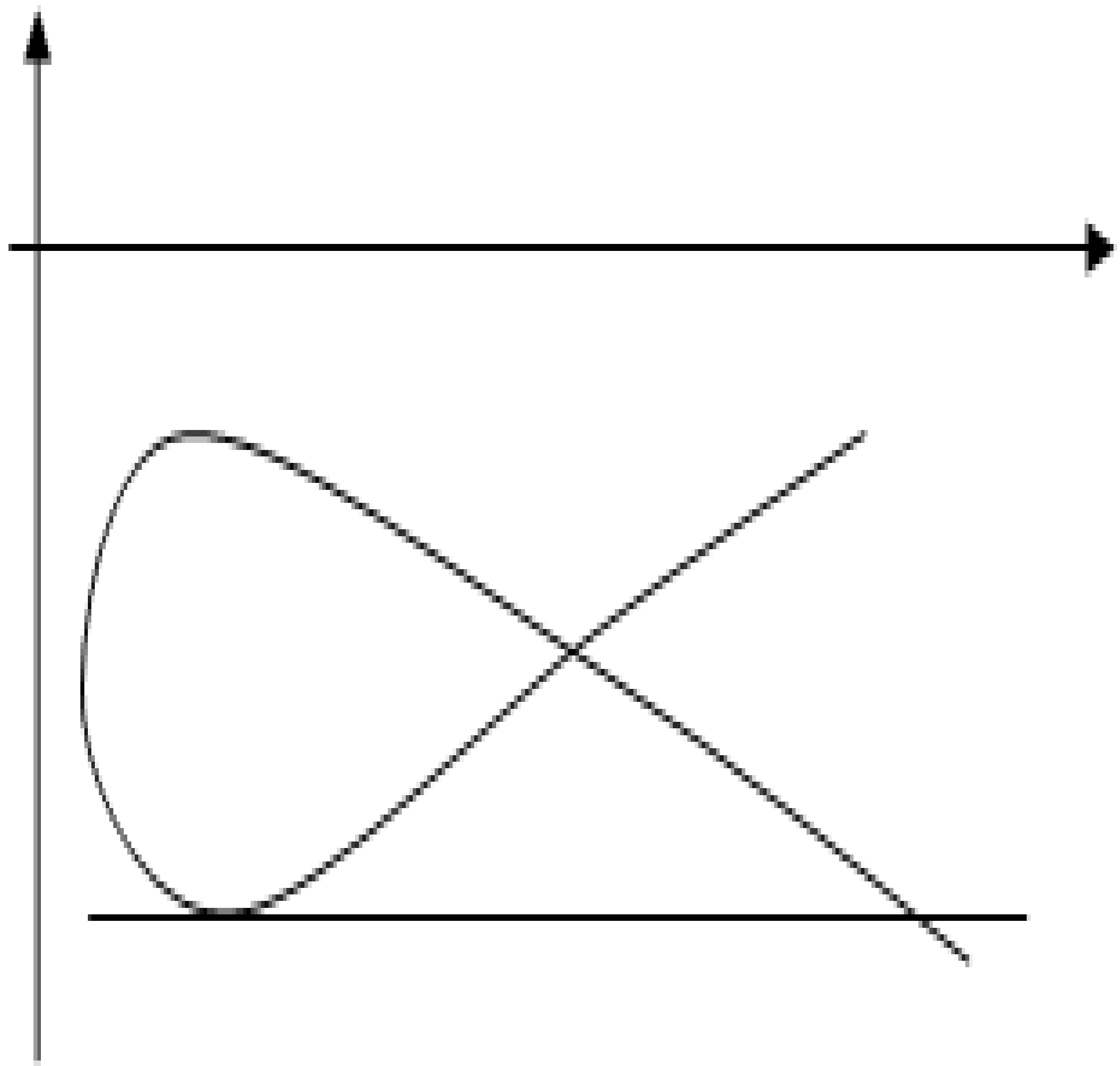
10-Jadval.

Eslatma. $c\,, y^+\,, y^- -$lar orqali mos ravishda egar, turg'un tugun, noturg'un tugunlar belgilangan $(1.4), (1.18)$ egri chiziqlar olati va ularga nisbatan $a > 0$ va $a < 0$ da muvozanat holatlarning joylashishi mos ravishda $1(a,b)$ rasmlarda tasvirlangan.

11-Rasm. a) $(a > 0)$



11-Rasm. b) $(a < 0)$



III- BOB. Berilgan integral egri chiziqqa ega bo‘lgan differensial tenglamalar sistemalarini tuzish.

3.1-§ Berilgan integral egri chiziqqa ega bo‘lgan differensial tenglamalar sistemalarini tuzish.

$$\dot{x} = Q(x;y), \qquad \dot{y} = P(x;y) \tag{1}$$

sistema uchun

$$W(x;y) = 0 \tag{2}$$

egri chiziq integral chiziq bo‘lsin. Ya’ni (1) sistema

$$x = x(t), \quad y = y(t) \tag{3}$$

yechimga ega bo‘lib, uning uchun

$$W(x(t), y(t)) \equiv 0 \tag{4}$$

shart bajariladi. Bundan (3) funksiyalar uchun yoki (2) shartda

$$\frac{\partial W}{\partial x} Q + \frac{\partial W}{\partial y} P = 0 \tag{5}$$

o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

$$\frac{\partial W}{\partial x} Q + \frac{\partial W}{\partial y} P \equiv \mathcal{F}(w, x, y) \tag{6}$$

deb bilgilash kiritamiz. Bu yerdan

$$\mathcal{F}(0, x, y) = 0 \tag{7}$$

ni hosil qilamiz.

Demak, agar biz (1) sistema (2) integral egri chiziqqa ega bo‘lishini hohlasak, u holda (7) shartni qanoatlantiruvchi $\mathcal{F}$ - ixtiyoriy funksiyani o‘z ichiga olgan (6) tenglikni qanoatlantiruvchi Q va P larni topishimiz kerak. Bundan tashqari, masalan, Q ni

$$Q(x;y) = \mathcal{F}_1(w,x,y) - \frac{\partial W}{\partial y}\mathcal{M}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \quad (8)$$

ko‘rinishda olish mumkin. Bu yerda $\mathcal{F}_1$ (7)- xossaga ega bo‘lgan funksiya $\mathcal{M}(x;y)$ - ixtiyoriy (8) dagi Q ni (6) ga quyib

$$P = \frac{\mathcal{F} - \mathcal{F}_1\frac{\partial W}{\partial x}}{\frac{\partial W}{\partial y}} + \frac{\partial W}{\partial x}\mathcal{M}$$

ni topamiz. Bu yerda birinchi qo‘shiluvchi (7) xossaga ega. Shuning uchun

$$P = \mathcal{F}_2(w,x,y) - \frac{\partial w}{\partial y}\mathcal{M}(x;y), \;\; \mathcal{F}_2(0;x,y) = 0$$

deb yozish mumkin.

1-Teorema. (1) sistema(2) integral egri chiziqqa ega bulishi uchun u

$$\dot{x} = \mathcal{F}_1(w,x,y) - \frac{\partial w}{\partial y}\mathcal{M}(x;y)$$

$$\dot{y} = \mathcal{F}_2(w,x,y) + \frac{\partial w}{\partial x}\mathcal{M}(x;) \quad (9)$$

ko‘rinishga ega bo‘lishi zarur va yetarli. Bu yerda $\mathcal{F}_1$ va $\mathcal{F}_2$ lar (7) xossaga ega. $\mathcal{M}(x;y)$ -ixtiyoriy funksiya. $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{M}$ va W funksiyalarni (1) sistemaning (2) ko‘rinishdagi yechimi mavjudligi shartini qanoatlantiruvchi funksiyalar.

Bu yerda W differensiallanuvchi funksiya. Masalan, (2) egri chiziq nuqtalari atrofida P va Q lardan uzluksiz hosilalarining mavjudligini talab qilish yetarli. Agar biz (2) egri chiziq uchun qo‘shimcha xossalarini talab qilsak, u holda mos ravishda P va Q uchun ba’zi qo‘shimcha shartlarning bajarilishini talab qilishga to‘g‘ri keladi.

Masalan. Agar (2) egri chiziqning (x_0, y_0) nuqtasida $\mathcal{M}(x_0, y_0) = 0$ ga ega bo‘lsak, u holda (x_0, y_0) nuqta (1) sistemaning muvozanzt nuqtasi bo‘ladi. Berilgan integral egri chiziqlar to‘plami yoki parametrik shakilda berilgan

$$W(x, y, t) = 0, \quad W_2(x, y, t) = 0$$

egri chiziq uchun (1) ko‘rinishdagi sistemani tuzish mumkin. Shuningdek bu masalalarni n ta tenglamalar sistemasi uchun yechish mumkin, bundan tashqari berilgan integral sirtlarga ega tenglamalar sistemalarini tuzish mumkin.

3.2.§ $x^2 + y^2 - 1 = 0$ integral egri chiziqqa ega bo‘lgan polinomial differensial tenglamalar sistemasini tuzish.

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=1}^{3} a_{ij}x^i y^j \equiv P(x;y)$$

$$(1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=1}^{3} b_{ij}x^i y^j \equiv Q(x;y)$$

Sistema berilgan bo‘lsin, bu yerda P, Q haqiqiy koeffisientli funksiyalar.

Bu sistemalar uchun

$W = x^2 + y^2 - 1 = 0$ aylana (2) sistemaning trayiktoriyasidan iborat bo‘lsin.

$$W_x' P + W_y' Q \equiv W\mathcal{M} \qquad (2)$$

Ayniyatni qaraymiz, bu yerda $\mathcal{M}$ biror ikkinchi darajali ko‘phad.

$$2x(a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3) + 2y(b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3) = (x^2 + y^2 - 1)(Ax^2 + Bxy + Cy^2)$$

kelib chiqadi. Birhadlar bir xil darajalarni koeffisentlarini tenglashtirish natijasida

$$
\begin{array}{l|l}
x^2 & 2a_{10} = -A \\
xy & 2a_{10} + 2b_{10} = -B \\
y^2 & 2b_{01} = -C \\
x^3 & 2a_{20} = 0 \\
x^2y & 2a_{11} + 2b_{20} = 0 \\
xy^2 & 2a_{02} + 2b_{11} = 0 \\
y^3 & 2b_{02} = 0 \\
x' & 2a_{30} = A \\
x^3y & 2a_{21} + 2b_{30} = B \\
x^2y^2 & 2a_{12} + 2b_{21} = 0 \\
xy^3 & 2a_{03} + 2b_{30} = B \\
y^4 & 2b_{03} = C
\end{array}
$$

ni hosil qilamiz. Bundan

$$a_{30} = -a_{10}\,, \qquad b_{30} = -(a_{01} + a_{21} + b_{10})\,, \qquad a_{20} = 0,$$

$$b_{21} = -(a_{10} + a_{12} + b_{01}), \qquad b_{12} = -(a_{01} + a_{03} + b_{10}),$$

$$b_{03} = -b_{01}, \qquad b_{20} = -a_{02}, \qquad b_{02} = 0 \qquad\qquad (3)$$

ni topamiz. (3) shartlar bajarilganda (1) sistema

$$\frac{dx}{dt} = a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{02}y^2 - a_{10}x^3 + a_{21}x^2y +$$

$$+a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 \equiv \overline{P}(x, y)$$

(4)

$$\frac{dy}{dt} = b_{10}x + b_{01}y - a_{11}x^2 - a_{02}xy - (a_{01} + a_{21} + b_{10})x^3$$
$$- (a_{10} + a_{12} + b_{01})x^2y - (a_{01} + a_{03} + b_{10})xy^2 - b_{01}y^3$$
$$\equiv \overline{Q}(x, y)$$

ko‘rinishga keladi.

Natijada $w(x; y) = 0$ yechimga ega bo‘lgan uchinchi darajali differensial tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. $w(x; y) = x^2 + y^2 - 1$ funksiya (4) sistemaning integrallovchi ko‘paytuvchisi bo‘lishini talab etamiz. U holda

$$W_x'\overline{P} + W_y'Q \equiv -W(\overline{P}_x' + \overline{Q}_y') \tag{5}$$

ayniyatdan

$$2x(a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{02}y^2 - a_{10}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3)$$
$$+ 2y(b_{10}x + b_{01}y - a_{11}x^2 - a_{02}xy - (a_{01} + a_{21} + b_{10})x^3$$
$$- (a_{10} + a_{12} + b_{01})x^2y - (a_{01} + a_{03} + b_{10})x^2y - b_{01}y^3)$$
$$= (-1 - x^2 - y^2)(a_{10} + a_{11}y - 3a_{10}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2$$
$$+ b_{01} - a_{02}x - (a_{10} + a_{12} + b_{01})x^2 - 2(a_{01} + a_{03} + b_{10})xy$$
$$- 3b_{01}y^2)$$

ga ega bo‘lamiz. Birhadlar bir xil darajalari koeffisintlarni tenglashtirib

x^0	$0 = a_{10} + b_{01}$
x^1	$0 = -a_{02}$
y^1	$0 = a_{11}$
x^2	$2a_{10} = -3a_{10} - a_{10} - (a_{10} + a_{12} + b_{01}) - b_{01}$
y^2	$2b_{01} = -a_{10} + a_{12} - b_{01} - 3b_{01}$
xy	$2a_{01} + 2b_{10} = 2a_{21} - 2(a_{01} + a_{03} + b_{10})$
x^3	$0 = a_{02}$
x^2y	$2a_{11} - 2a_{11} = -a_{11}$
xy^2	$2a_{02} - 2a_{02} = a_{02}$
y^3	$0 = -a_{11}$
x^4	$-2a_{10} = 3a_{10} - (a_{10} + a_{12} + b_{01})$
x^3y	$2a_{21} - 2(a_{01} + a_{21} + b_{10}) = -2a_{21} - 2(a_{01} + a_{03} + b_{10})$
x^2y^2	$2a_{12} - 2(a_{10} + a_{12} + b_{01}) = -a_{12} + 3b_{01} + 3a_{10} + (a_{10} + a_{12} + b_{01})$
xy^3	$-2(a_{01} + a_{03} + b_{10}) + 2a_{03} = -2a_{21} - 2(a_{01} + a_{03} + b_{10})$
y^4	$-2b_{01} = -a_{12} + 3b_{01}$

tengliklarni hosil qilamiz. Bundan

$a_{10} + b_{01} = 0$, $a_{02} = 0$, $a_{11} = 0$, $6a_{10} + 2a_{01} = -a_{12}$, $4a_{10} = -a_{12}$,

$4a_{01} + 4b_{01} = 2a_{21} - 2a_{03}$, $3a_{10} - a_{12} = 0$, $-2a_{21} - 2a_{03} = 0$,

$6a_{10} + 6b_{01} = 0$, $2a_{03} = -2a_{21}$, $5b_{01} - a_{12} = 0$.

$a_{10} = -b_{01}$, $a_{11} = 0$, $a_{02} = 0$, $a_{12} = 5b_{01}$, $a_{03} = -a_{21}$,
$a_{21} = a_{03} + 2(a_{01} + b_{10})$, $a_{01} + b_{10} = 0$, $a_{21} = 0$. (6)

ga ega bo‘lamiz. a_{01} va b_{10} ixtiyoriy parametrlar bo‘lgani uchun ularni

$$a_{01} + b_{10} = 0 \tag{7}$$

tenglik bajariladigan qilib tanlaymiz. (6) shartda ma’lumki (4) sistema holatlar fazosining chekli qismida faqat markaz va egarlar tipidagi muvozanat nuqtalarga ega bo‘lishi mumkin.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\overline{Q}(x;y)}{\overline{P}(x;y)}$$

tenglamani umumiy integralini topamiz. Tenglamani

$$\overline{Q}(x;y)dx - \overline{P}(x;y)dx = 0$$

Simmetirik ko‘rinishda yozib olamiz va $W(x;y) = x^2 + y^2 - 1$ tenglamaning integrallovchi ko‘paytuvchisi bo‘lgani sababli u

$$(x^2 + y^2 - 1)\overline{Q}(x;y)dx - (x^2 + y^2 - 1)\overline{P}(x;y)dx = 0$$

shakilda bo‘ladi. hosil bo‘lgan tenglama

to‘liq differensialli tenglama. (6) va (7) larni hisobga olsak bu tenglama

$(x^2 + y^2 - 1)(b_{10}x + b_{01}y - a_{03}x^3 - a_{03}xy^2 - b^{01}y^3)dx - (x^2 + y^2 - 1)(-b_{01}x - b_{10}y + b_{01}x^3 + a_{03}x^2y + a_{03}y^3)dy = 0$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. To‘liq differensial sharti bajarilishini tekshiramiz.

$Q_1(x;y) = (x^2+y^2-1)(b_{10}x + b_{01}y - a_{03}x^3 - a_{03}xy^2 - b_{01}y^3)$

$P_1(x;y) = -(x^2+y^2-1)(-b_{01}x - b_{10}y + b_{01}x^3 + a_{03}x^2y + a_{03}y^3)$

$$\frac{\partial Q_1}{dy} = 2y(b_{01}x + b_{01}y - a_{03}x^3 - a_{03}xy^2 - b_{01}y^3) + (x^2+y^2-1)\times$$

$$\times\,(b_{01} - 2a_{03}xy - 3b_{01}y^2)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = -2x(-b_{01}x - b_{10}y + b_{01}x^3 + a_{03}x^2y + a_{03}y^3) -$$

$$-(x^2+y^2-1)(-b_{01} + 3b_{01}x^2 + 2a_{03}xy)$$

Umumiy integralni topish uchun aniqlanish sohasida $(0;0)$ nuqtani tanlaymiz va integrallab topamiz.

$$\int_0^x P_1(x;y)dx + \int_0^y Q_1(0;y)dy = C$$

$$\int_0^x (x^2+y^2-1)(b_{01}x + b_{01}y + a_{03}x^3 - a_{03}xy^2 - b_{01}y^3)dx -$$

$$-\int_0^y (y^2-1)(b_{10}y + a_{03}y^3)dy = C \qquad (8)$$

va natijada

$$-b_{01}xy(x^2+y^2-1) - \frac{a_{01}}{4}(x^2+y^2)(x^2+y^2-2) = C \qquad (8)$$

Umumiy integralga ega bo‘lamiz. a_{03} dan tashqari (4) ning barcha koeffesentlarini tayinlaymiz. U holda a_{21} bu parametrning bifurkatsiya qiymati bo‘ladi, chunki $a_{03} = a_{21}$ da sistema konservativ.

a_{03} ning a_{21} qiymatdan ortish yoki kamayishida (2) ga ko‘ra sistemaning konservativligini buzadi.

3.3-§ Sistemani tekislikning chekli qismida tekshirish.

$\delta_0 > 0 -$ shunday yetarlicha kichik son bo‘lsinki

$$(a_{21} + \delta_0)\tau^2 + 6b_{01}\tau + a_{21} = 0$$

tenglama haqiqiy ildizlarga ega bo‘lmasin va

$|6b_{01} \pm 2a_{21}| \geq \delta_0$, tengsizlik o‘rinli bo‘lsin. δ_0 ning bunday tanlanishi keyingi mulohazalardan aniq bo‘ladi. $a_{03} = a_{21} + \delta$ deb olamiz, bu yerda $|\delta| < \delta_0$.

(6), (7) shartlarni hisobga olganda (4) sistemani

$$\frac{dx}{dt} = b_{01}x(x^2 + y^2 - 1) + y(a_{01} + a_{21}x^2 + 4b_{01}xy + (a_{21} + \delta)y^2) \equiv \overline{P}(x;y)$$

(9)

$$\frac{dy}{dt} = -b_{01}y(x^2 + y^2 - 1) - x(a_{01} + a_{21}x^2 + 4b_{01}xy + (a_{21} + \delta)y^2) \equiv \overline{Q}(x;y)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Bu sistemani tekshirish uchun quydagi shartlarni qo‘yamiz.

1. $(0;0)$ maxsus nuqta xaraktiristik tenglamasi sof mavhum ildizlarga ega.

2. $(0;0)$ dan farqli maxsus nuqtalar $\mathfrak{T}: x^2 + y^2 - 1 = 0,$ yopiq trayektoriya ustida ham, ichida ham yotmaydi.

U holda

$$a_{01}^2 - b_{01}^2 > 0 \tag{10}$$

tengsizlik bajarilishi kerak. (2) ayniyatga ko‘ra (9) sistemaning $\mathfrak{T}$ ga tegishli bo‘lmagan maxsus nuqtalari $\mathcal{M} \equiv 2b_{01}(x^2 - y^2) = 0$ egri

chiziqda joylashgan.

(9) sistemaning $\mathfrak{T}: x^2 + y^2 = 1$ egri chiziqqa tegishli bo‘lmagan muvozanat holatlarini topamiz. Malumki bu nuqtalar $2b_{01}(x^2 - y^2) = 0$ egri chiziqda joylashgan. Shunday qilib, (9) sistemaning maxsus nuqtalari

$$\begin{cases} b_{01}x(x^2 + y^2 - 1) + y(a_{01} + a_{21}x^2 + 4b_{01}xy + (a_{21} + \delta)y^2) = 0 \\ -b_{01}y(x^2 + y^2 - 1) - x(a_{01} + a_{21}x^2 + 4b_{01}xy + (a_{21} + \delta)y^2) = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

algebraik tenglamalar sistemasining yechimlari bo‘ladi. Bu sistemani ikki sistemaga ajratamiz.

$$\begin{cases} b_{01}x(x^2 + y^2 - 1) + y(a_{01} + a_{21}x^2 + 4b_{01}xy + (a_{21} + \delta)y^2) = 0 \\ -b_{01}y(x^2 + y^2 - 1) - x(a_{01} + a_{21}x^2 + 4b_{01}xy + (a_{21} + \delta)y^2) = 0 \\ x = y \end{cases}$$

va

$$\begin{cases} b_{01}x(x^2 + y^2 - 1) + y(a_{01} + a_{21}x^2 + 4b_{01}xy + (a_{21} + \delta)y^2) = 0 \\ -b_{01}y(x^2 + y^2 - 1) - x(a_{01} + a_{21}x^2 + 4b_{01}xy + (a_{21} + \delta)y^2) = 0 \\ x = -y \end{cases}$$

$a_{01} > 0$, $b_{01} > 0$; holni qaraymiz:

Sistemani yechib:

$$b_{01}x(2x^2 - 1) + x(a_{01} + a_{21}x^2 + 4b_{01}x^2 + (a_{21} + \delta)x^2 = 0$$

$$x[b_{01}(2x^2 - 1) + a_{01} + (a_{21} + 4b_{01} + a_{21} + \delta)x^2] = 0$$

$$-b_{01} + a_{01} + (2a_{21} + 6b_{01} + \delta)x^2 = 0, \quad x = 0$$

$$x^2 = \frac{b_{01} - a_{01}}{2a_{21} + 6b_{01} - \delta} \qquad x = \pm\sqrt{\frac{b_{01} - a_{01}}{2a_{21} + 6b_{01} + \delta}}$$

larni topamiz va natijada quydagi nuqtalarni topamiz: $(0; 0)$

$$\mathcal{A}\left(\sqrt{\frac{b_{01}-a_{01}}{2a_{21}+6b_{01}+\delta}};\sqrt{\frac{b_{01}-a_{01}}{6b_{01}+2a_{21}+\delta}}\right),$$

$$\mathcal{B}\left(-\sqrt{\frac{b_{01}-a_{01}}{6b_{01}+2a_{21}+\delta}};-\sqrt{\frac{b_{01}-a_{01}}{6b_{01}+2a_{21}+\delta}}\right),$$

$$\mathcal{C}\left(\sqrt{\frac{a_{01}+b_{01}}{6b_{01}-2a_{21}-\delta}};-\sqrt{\frac{a_{01}+b_{01}}{6b_{01}-2a_{21}-\delta}}\right),$$

$$\mathcal{D}\left(-\sqrt{\frac{a_{01}+b_{01}}{6b_{01}-2a_{21}-\delta}};\sqrt{\frac{a_{01}+b_{01}}{6b_{01}-2a_{21}-\delta}}\right).$$

murakkab bulmagan hisoblashlar yo‘li muvozanat nuqtalari $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D},\notin \mathcal{Z}$ va agar $a_{01}+a_{21}\neq 0$ bo‘lsa, $\mathcal{Z}'$ egri chiziq bilan chegaralangan sohadan tashqarida yotadi.

$$b_{01}\epsilon \left]-\frac{a_{01}+2a_{21}+\delta}{5};-\frac{a_{01}+2a_{21}+\delta}{5}\right[\cap\left]\frac{2a_{21}+\delta}{6};-\frac{2a_{21}+\delta}{6}\right[\cap \left]-\frac{\sqrt{(a_{01}+a_{21}+\delta)(a_{21}+\delta)}}{2};\frac{\sqrt{(a_{01}+a_{21}+\delta)(a_{21}+\delta)}}{2}\right[\equiv \Phi \qquad (12)$$

Φ to‘plam bo‘sh emas.

Masalan, $a_{01}=8,\quad a_{21}=-\frac{1}{2},$ bo‘lsa, u holda

$$\Phi=\left]\frac{-1+\delta}{6};\frac{1-\delta}{6}\right[$$

1- Eslatma. Agar $a_{01} < 0,\ b_{01} < 0$ bo‘lsa, (12) oraliqlarning chetki qiymatlarini o‘rni almashadi.

2- Eslatma. Agar $a_{01} > 0,\ b_{01} > 0$ bo‘lsa, u holda $2a_{21} + \delta < 0$, chunki aks holda $\mathcal{A},\ \mathcal{B},\ \mathcal{C},\ \mathcal{D}$ - maxsus nuqtalar bo‘lmaydi.

3- Eslatma. Agar (10), (12) shartlar tanlansa, u holda $a_{01} >,\ b_{01} > 0$ shartlarda $a_{01} + a_{21} > 0$ tengsizlikga ega bo‘lamiz.

4- Eslatma. (10) va (12) shartlardan $3b_{01} + a_{21} < 0$ kelib chiqadi.

1-Lemma. (9) differensial tenglamalar sistemasi cheksiz uzoqlashgan nuqtalarga ega bo‘lmaydi, agar (10), (12) va $a_{01} > 0,\ b_{01} > 0$ shartlar o‘rinli bo‘lsa.

$\delta = 0$ da bu tasdiqning o‘rinliligi Puankare sferasi ekvatorli maxsus nuqtalari.

$$\mathcal{Z} = 0,\ (1 + \tau^2)(a_{21}\tau^2 + 6b_{01}\tau + a_{21}) = 0 \qquad (13)$$

sistemani qanoatlantirishidan kelib chiqadi, u 4- eslatmaga ko‘ra birgalikda emas. Agar $\delta \neq 0$ bo‘lsa, u holda cheksizlikdagi maxsus nuqtalar

$$z = 0, \quad (a_{21} + \delta)\tau^2 + 6b_{01}\tau + a_{21} = 0$$

sistemani qanoatlantiradi, bu ham 4- eslatmaga ko‘ra birgalikda emas.

(9) sistemaning trayektoriyalari holatini $\delta = 0$ da qaraymiz. Buning uchun $x = 0,\ y = 0$ tog‘ri chiziqlardagi fazoviy tezligi komponinti ishoralarini qaraymiz.

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=0} = y(a_{01} + a_{21}y^2), \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=0} = b_{01}y(1 - y^2)$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{y=0} = b_{01}x(x^2 - 1), \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=0} = -x(a_{01} + a_{21}x^2) \qquad (14)$$

3- eslatmadan va (14) munosabatlardan

$$\left(0;\pm\sqrt{-\frac{a_{01}}{a_{21}}}\right);\ \left(\left(\pm\sqrt{-\frac{a_{01}}{a_{21}}}\ ;0\right)\right)$$

nuqtalarda (9) sistemaning trayektoriyalari vertukal (gorizantal) urunmaga ega, va koordinata o‘qlarida vektor maydoni 1- rasimda tasvirlangan. 1-lemma, 1- rasimni va qaralayotgan holda sistema fazoviy tekislikning chekli qismida faqat markaz va egar tipidagi muvozanat nuqtalarga ega ekanligini hisobga olib $\mathcal{A},\mathcal{O},\mathcal{B},-$markazlar, $\mathcal{C},\mathcal{D}-$egar nuqtalar tipida bo‘lishini aniqlaymiz.

Fazoviy tasvir 2- rasimda keltirilgan.

3.4-§ Sistemani cheksizlikda tekshirish.

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{u}{z}$$

Puankare almashtirishini qo‘llab

$$\tilde{Q}(\frac{1}{z}; \frac{u}{z}) \not\equiv u\tilde{P}\left(\frac{1}{z}; \frac{u}{z}\right)$$

ekanligini ko‘rsatish mumkin. [1] ga ko‘ra Puankare sferasining $z = 0$ ekvatori sistemaning integral chizig‘idan iborat bo‘ladi. Endi (9) sistemani barcha parametrlarni ma’lum deb qabul qilamiz va sistemaning birinchi (ikkinchi) tenglamasi o‘ng qismiga

$$\varphi(x) = \beta x - \beta x^3 ;$$

$$(\psi(x) = -\beta x^2 y)$$

funksiyalarni qo‘shamiz, bu yerda $\beta -$yetarlicha kichik haqiqiy son, uning tanlanishini keying mulohazalarda aniqlashtiramiz.

Natijada (6), $(7), (10), (12)$ shartlarni qanoatlantiruvchi (4) sistema uchun a_{10} ni $a_{10}^* = -b_{10}$ bifurkatsion qiymatga bo‘lgan parameter sifatida qaraymiz.

(9) dan yuqorida ko‘rsatilgan qo‘shimchalar yordamida olingan sistemani $(9')$ nomirlaymiz.

2–lemma. Agar $(10), (12)$ shartlar bajarilsa va $(0; 0)$ – $(9')$ sistemaning oddiy turg‘un (noturg‘un) fokusi bo‘lsa, u holda $\mathfrak{T}$ - trayektoriya oddiy noturg‘un (turg‘un) limitik sikildan iborat.

Haqiqatdan, $(10), (12)$ shartlarga ko‘ra $\mathfrak{T}$ ichida yagona muvozanat holati Agar $\beta < 0$ $(\beta > 0)$ bo‘lsa $(0; 0)$ - turg‘un (turg‘unmas) fokus tipidagi muvozanat xolati bo‘ladi. Bundan tashqari $\mathfrak{T}$ da maxsus nuqtalar yo‘q va $\mathfrak{T}$ ning xarakteristik ko‘rsatkichi.

$$h = \frac{1}{T}\int_0^T \left(P'_x + Q'_y\right)dt = -3\beta > 0(< 0)$$

shuning uchun $\mathfrak{T}$- noturg‘un (turg‘un) limitik siklni tashkil etadi.

3–lemma. $(7), (10), (12),\ b_{01} > 0\,, a_{01} > 0\,,\ \ 0 < \delta < \delta_0$ shartlar bajarilgan bo‘lsin.

U holda $\mathfrak{T}$ aylana (9) sistemaning yarimturg‘un limitik sikli bo‘ladi.

$\mathcal{A}$ va $\mathcal{B}$ maxsus nuqtalar oddiy fokus tipidagi maxsus nuqtalardan iborat, ularning har biri atrofida hech bo‘lmaganda bitta noturg‘un limitik sikl mavjud.

Isbot. Koordinatalar sistemasini buramiz:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'; \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \tag{15}$$

Natijada (x, y o‘zgaruvchilar belgilashlarini o‘zgartirmasdan)

$$\frac{dx}{dt} = -y\Big\{(x^2 + y^2 - 1)b_{01} - (a_{01} + a_{21}(x^2 + y^2) + 2b_{01}(x^2 - y^2)$$
$$+\frac{\delta}{2}(x + y)^2)\Big\} = \hat{P}(x; y)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x\Big\{(x^2 + y^2 - 1)b_{01} + (a_{01} + a_{21}(x^2 + y^2) + 2b_{01}(x^2 + y^2) +$$
$$\delta 2x+y2)\equiv Qx;y \qquad (16)$$

sistemaga ega bo‘lamiz.

Bundan ko‘rish mumkinki

$$\hat{P}(-x; -y) = -\hat{P}(x; y), \quad \hat{Q}(-x; -y) = -\hat{Q}(x; y)$$

ya’ni (16) sistemaning fazoviy tasviri koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik.

Bundan yana $\delta = 0$ da (9) sistemaning vektorlar maydoni $y = \pm x$ to‘g‘ri chiziqlarga nisbatan simmetrikligi kelib chiqadi va 2- rasm buni to‘la tasdiqlaydi.

Endi (16) sistema trayektoriyalariga urinmalar og‘ish burchaklari tangenislarini absissalar o‘qiga nisbatan simmetrik nuqtalarda taqqoslaymiz.

$$\hat{P}(x;-y) = y\{(x^2+y^2-1)b_{01} - (a_{01} + a_{21}(x^2+y^2) +$$

$$+2b_{01}(x^2-y^2) + \frac{\delta}{2}(x-y)^2)\Big\}$$

$$\hat{Q}(x;-y) = -x\{(x^2+y^2-1)b_{01} + (a_{01} + a_{21}(x^2+y^2)$$

$$+2b_{01}(x^2-y^2) + \frac{\delta}{2}(x-y)^2)\Big\} \qquad (17)$$

(15) dan ko‘rinadiki

$$\left|\hat{P}(x;-y)\right| > \left|\hat{P}(x;y)\right|,$$

$$\left|\hat{Q}(x;-y)\right| < \left|\hat{Q}(x;y)\right|, \qquad (x>0; y>0)$$

va demak

$$\left|\frac{\hat{Q}(x;-y)}{\hat{P}(x;-y)}\right| < \left|\frac{\hat{Q}(x;y)}{\hat{P}(x;y)}\right| \qquad (18)$$

(16) sistema vector maydonining koordinata boshiga nisbatan simmetrikligidan va (18) dan $\mathcal{D}$ va $\mathcal{C}$ egarlar α −separatrisalari aylanaga intilishi va $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ egar ω -separatrisalaridan pastda (yuqorida) joylashgani kelib chiqadi. (3-rasm). Bundan tashqari, koordinata boshi murakkab turg‘un fokus bo‘ladi, chunki [2]

$$\alpha_3 = -\frac{b_{01}\delta\pi}{2a_{01}\sqrt{a_{01}^2 - b_{01}^2}} < 0 \qquad [2]$$

$(10), (12)$ shartlarga ko‘ra $\mathfrak{T}$ da maxsus nuqtalar yo‘q va bu aylana faqat yarim turg‘un limitik sikl bo‘lishi mumkin. Yana (9) uchun

$$\sigma(x;y)) \equiv \tilde{P}_x'(x,y) + \tilde{Q}_y'(x,y) = -2b_{01}x^2 + 2b_{01}y^2 - 2\delta xy$$

ekanligini takidlaymiz. $\mathcal{A}$ va $\mathcal{B}$ muvozanat holatlari $y = x$, to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lgani uchun, $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{B}) = -2\delta xy < 0$ ya’ni $\mathcal{A}$ va $\mathcal{B}$ turg‘un fokuslar. 1- lemmani va (9) sistemaning trayekyoriyalari joylashishini e’tiborga olsak $\ell_{\mathcal{D}}$ va τ_c $w-$ separatrissalar $\mathcal{A}$ turgun fokusdan o‘raladi.

Xalqa prinsipiga ko‘ra $\mathcal{A}$ ni hech bo‘lmaganda bitta turg‘unmas limitik sikl o‘raydi. Xuddi shunday m_c va S_D $w-$ separatrissalar $\mathcal{B}$ turg‘un fokusdan o‘raladi va demak uni hech bo‘lmaganda bitta turg‘unmas limitik sikl o‘raydi. Lemma isbotlandi.

Shunday qilib, biz “ markaz “ tipidagi muvozanat holatidan limitik sikl paydo bo‘lish holiga duch keldik. $(9')$ sistemaning koordinata boshini o‘rab turuvchi limitik sikllari haqidagi teorimani bayon etishdan oldin bizga kerak bo‘ladigan [2] bifurkatsiya nazariyasidan ba’zi ma’lumotlarni keltiramiz.

$k - (9)$ sitemaning murakkab limitik sikl karraligi bo‘lsin. U holda

[2] - teorima ko‘ra:

Teotima -[2] [1] (murakkab limitik davradan limitik davralar paydo bo‘lishi haqidagi teorima)

Agar

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y) \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x,y) \qquad (A)$$

$N > 1$ sinfli yoki dinamik sistema bo‘lib $\mathfrak{T}_0$ - uning k karrali $(2 \leq k < N)$

Murakkab limitik davrasi bo‘lsa, u holda

1) Shunday $\varepsilon_0 > 0$ va $\delta_0 > 0$ mavjudki harqanday (A) sistemaga k ranggacha δ_0 yaqin bo‘lgan

$$\frac{dx}{dt} = P + \lambda\mu Q\,, \quad \frac{dy}{dt} = \mu P + Q \qquad (\overline{A})$$

harqanday sistema $U_{\varepsilon_0}(L_0)$ sohada k dan ortmaydigan yopiq trayektoriyaga ega bo‘ladi;

2) Harqanday musbat $\varepsilon < \varepsilon_0$ va $\delta < \delta_0$ uchun (A) sistemaga k ranggacha δ yaqin N sinfli (yoki analitik) $(\overline{A})$ sistema mavjudki bu sistema $U_{\varepsilon_0}(L_0)$ sohada $k -$ ta yopiq trayektoriyaga ega bo‘ladi.

bu yerda $\mu = tg\alpha$ maydonni α burchakka burish.

Shunday $\varepsilon_0 > 0\,, \beta_0 > 0$ sonlar mavjudki, (9) sistemaga k ranga yaqin ixtiyoriy β_0 $\mathcal{U}_{\varepsilon_0}(z)$ atrofida k tadan ko‘p bo‘lmagan yopiq trayektoriyalarga ega bo‘ladi. Demak, $\varepsilon_0 > 0$ bo‘lsin $\beta_0 > 0$ -teorimaning birinchi sharti bilan aniqlanuvchi sonlar. U holda shunday $\varepsilon\,, \beta_1$ sonlar topiladiki, bu yerda

$$0 < \varepsilon \le \varepsilon_0\,,\ 0 < \beta_1 \le \beta_0 \qquad (19)$$

lar shunday shundayki , sistema 2 rangacha (*9*) sistemaga $\beta_1 -$yaqin, $\mathcal{U}_\varepsilon(z)$ da aniq ikkita ajralgan yopiq trayektoriyalarga ega bo‘ladi [*2*].

[*2*] ga ko‘ra, (*9*) sistemaning (*0*; *0*) murakkab fokusning $\mathcal{T}$ bilan kontaksiz sikl bilan chegaralangan yetarlicha kichik atrofi mavjud. Ravshanki, a_{10} parametrning bifurkatsion qiymat orqali o‘tishadi. (*0*; *0*) murakkab fokus oddiyga aylanadi.

$\beta_2 > 0$ shunday kichik tanlaymizki, (*9*$'$) sistema uchun $\mathcal{T}$ kontaksiz bo‘lsin. Buyerda $|\beta| < \beta_2$

2- teorema. (*4*) dinamik sistema (7), (10), (12),

$$a_{11} = a_{02} = 0\,,$$

$$a_{12} = 5b_{01}\,, \quad a_{03} = a_{21} + \delta$$

$$b_{01} > 0\,, \;\; a_{01} > 0\,, a_{10} = -b_{01} + \beta\,,$$

shartlarni qanoatlantirsin, bu yerda $0 < \beta \leq min\{\beta_1, \beta_2\}$ u holda $(0; 0)$ koordinata boshini hech bo‘lmaganda ikkita (uchta) $(9^{'})$ ning limitik sikli o‘rab turadi, agar $-\delta_0 < \delta < 0$ $(0 < \delta < \delta_0)$ bo‘lsa. Bu teoremaning musbat δ larda o‘rinliligi 2 va 3-lemmalardan kelib chiqadi. Lekin $\delta > 0$ da 3- lemma isbotidagi kabi o‘xshash mulohazalar yuritib, z −urin turg‘un limitik sikl ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

z ga tashqi tomondan $t \to -\infty$, da trayektoriyalar asimptotik yaqinlashadi, ichki tomondan esa $t \to +\infty$, da yaqinlashadi, chunki

$$\alpha_3 = -\frac{b_{01}\delta\pi}{2a_{01}\sqrt{a_{01}^2 - b_{01}^2}} > 0$$

[*2*] ga ko‘ra $\mathcal{T}$ egri chiziq bilan chegaralangan sohada $(0; 0)$ atrofida limitik sikl paydo bo‘lmaydi, lekin u $\mathcal{U}_\varepsilon(z)$ da tashqi tomonidan murakkab z limitik qismdan paydo bo‘ladi. Bu sikl noturg‘un bo‘lad.

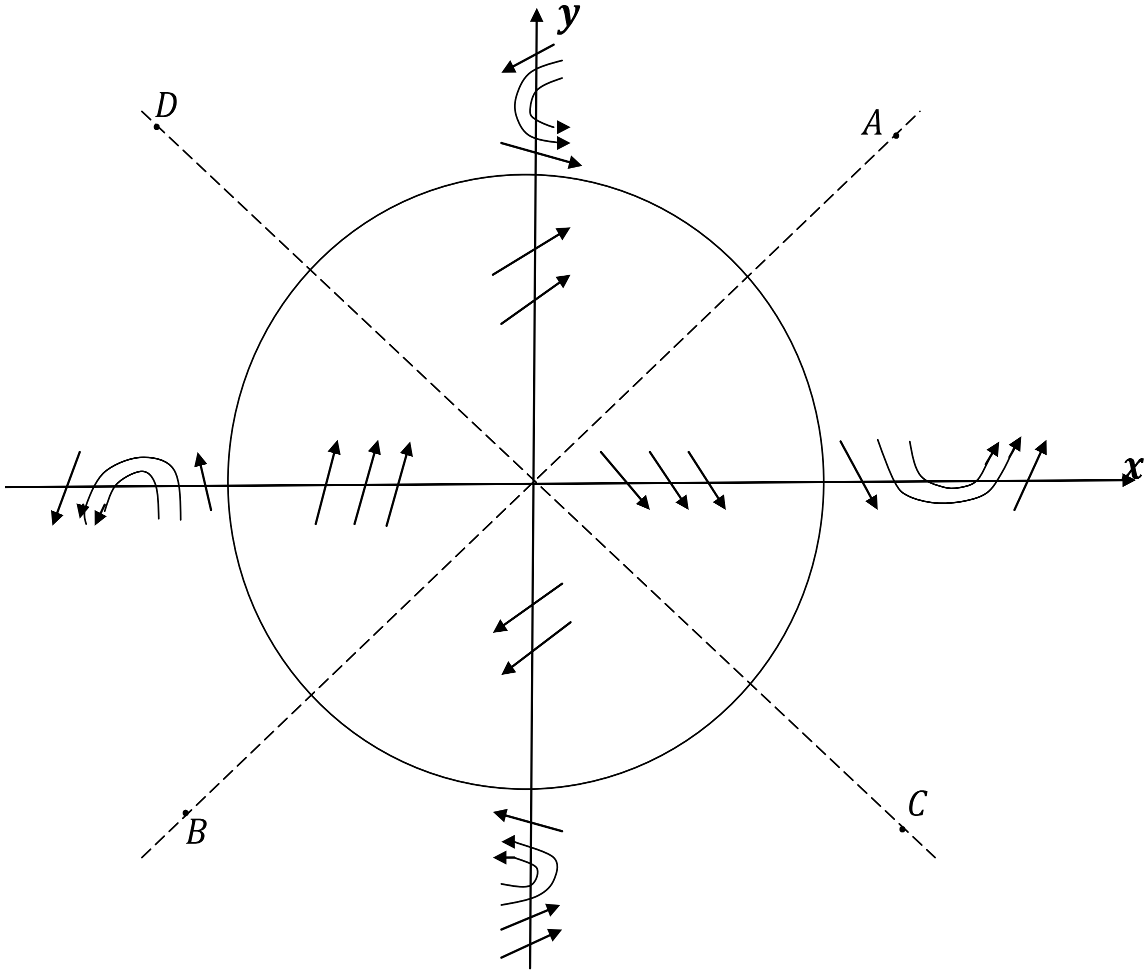
Teorema isbotlandi.

$-\delta_0 < \delta < 0$ da $\mathcal{A}$ va $\mathcal{B}$ maxsus nuqtalar turg‘un fokuslar bo‘lib, turg‘un limitik sikllar bilan o‘ralgan. Buni $0 < \delta < \delta_0$ holga o‘xshash ko‘rsatish mumkin. (*9*) vektor maydonining kichik deformatsiyalash yordamida turg‘un (noturg‘un) sikl atrofida osha turg‘unlikdagi sikl mavjud bo‘lgan vektor maydonni olish mumkin. Shunday qilib,

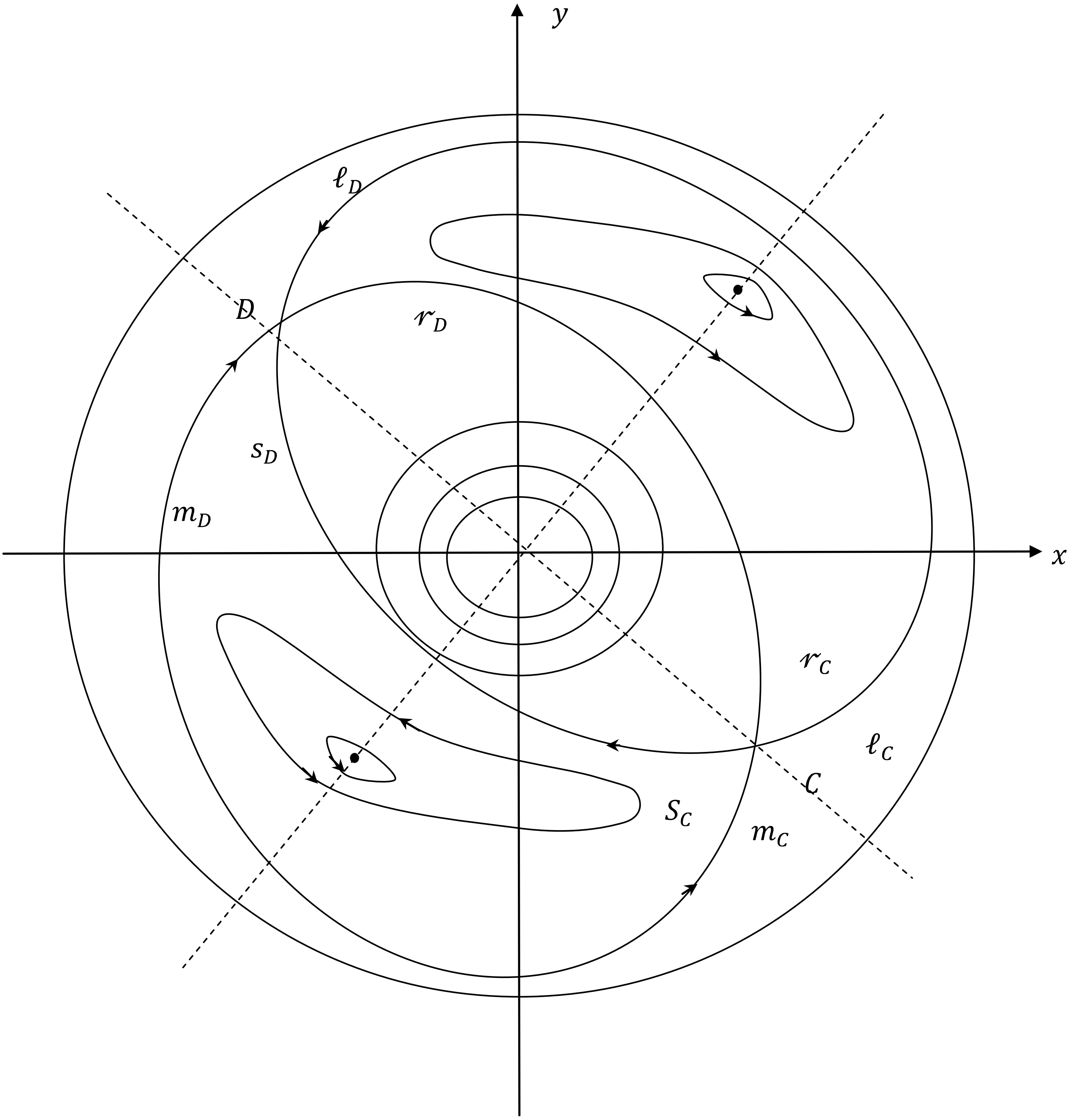
1-teorema shartlarida yetarlicha kichik $\beta > 0$ da $(9^{'})$ sistema yoki juft sondagi (kam deganda to‘rtta), yoki toq sondagi (kam deganda beshta) limitik siklga ega. Bu hollarning har birida fazoviy ko‘rinish bir qiymatli quriladi. *4.(5)* -rasm

$$0 < \delta < \delta_0 \; (-\delta_0 < \delta < 0)$$

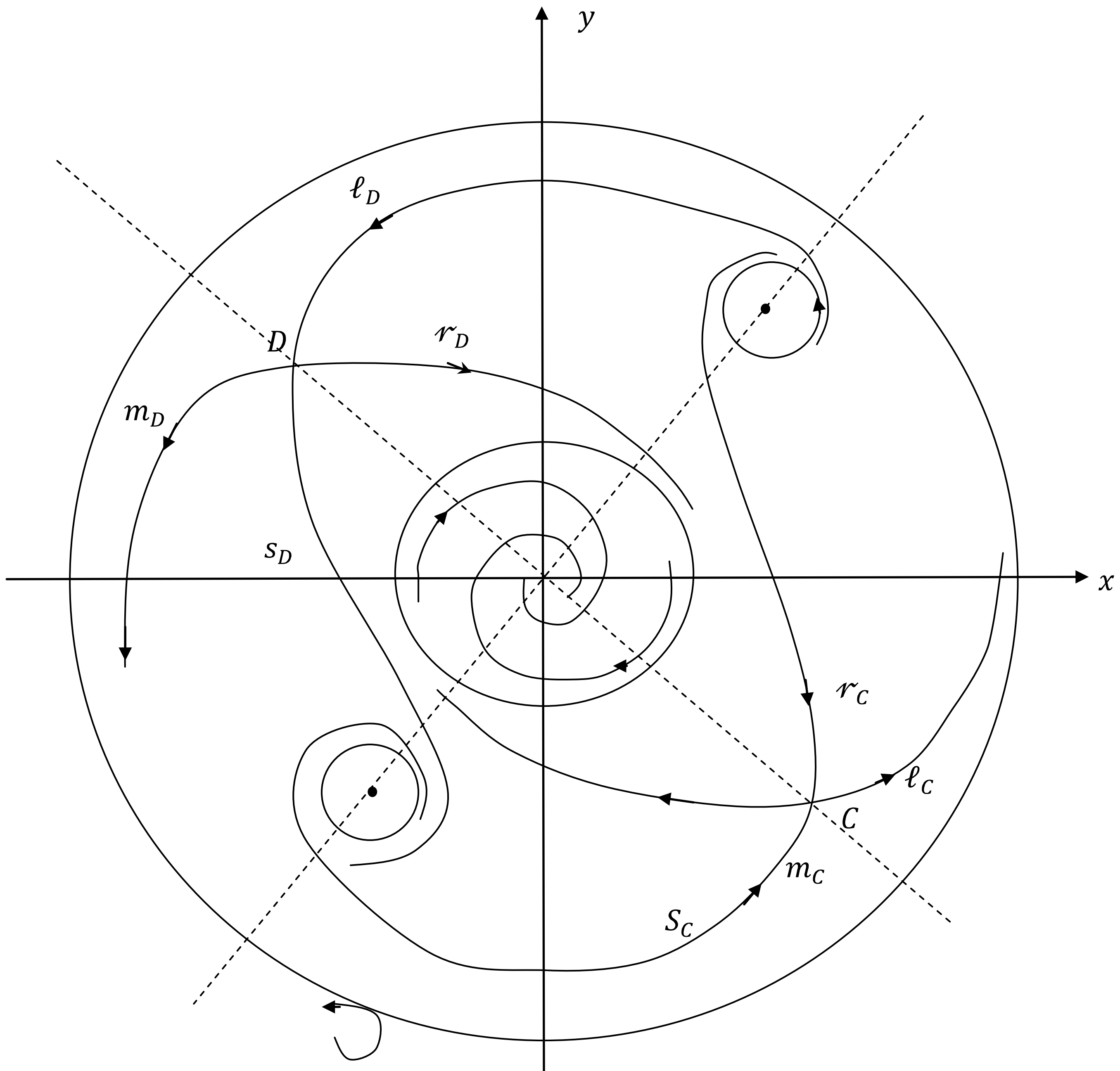
holga mos keladi.



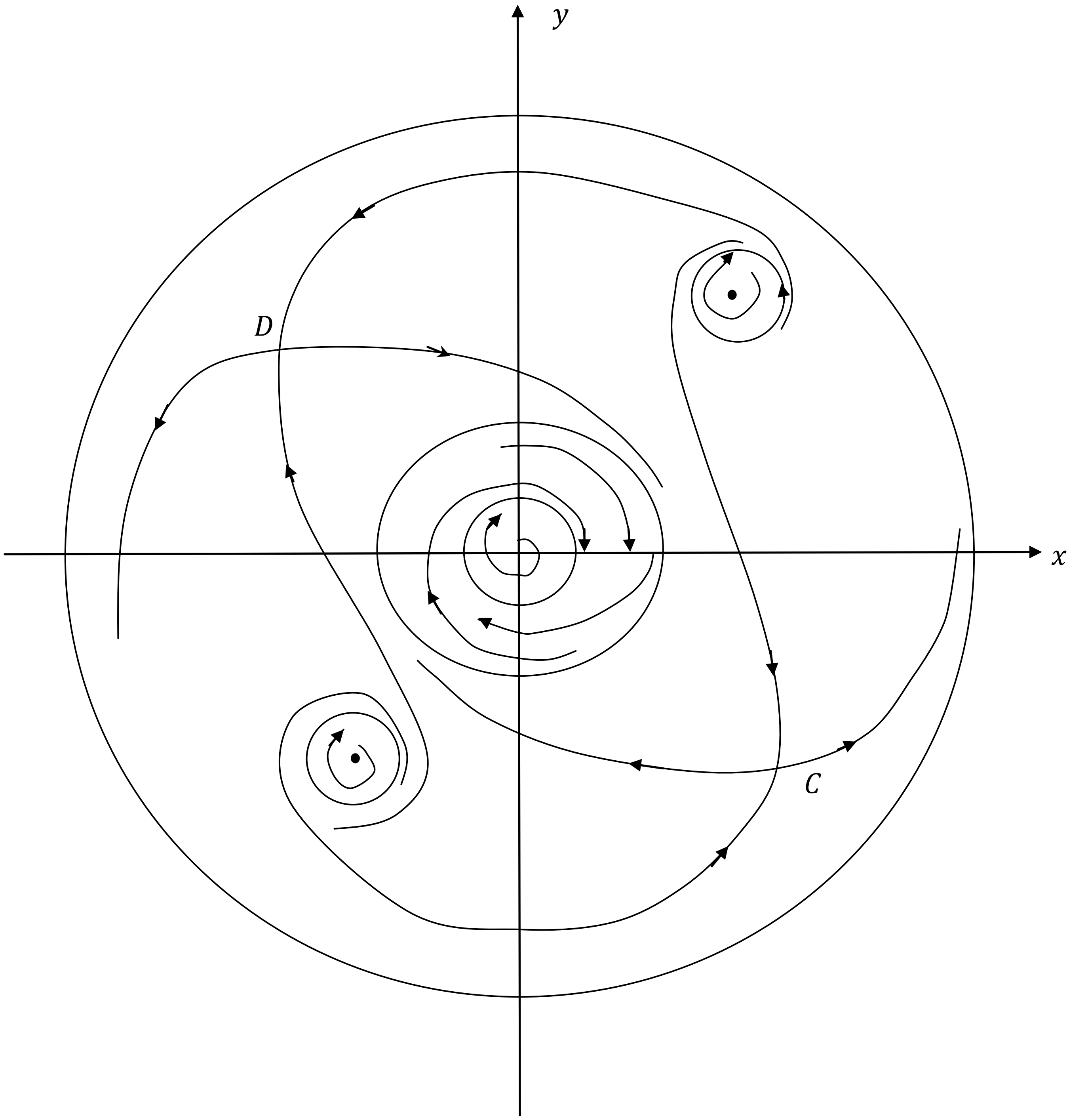
12 − rasm



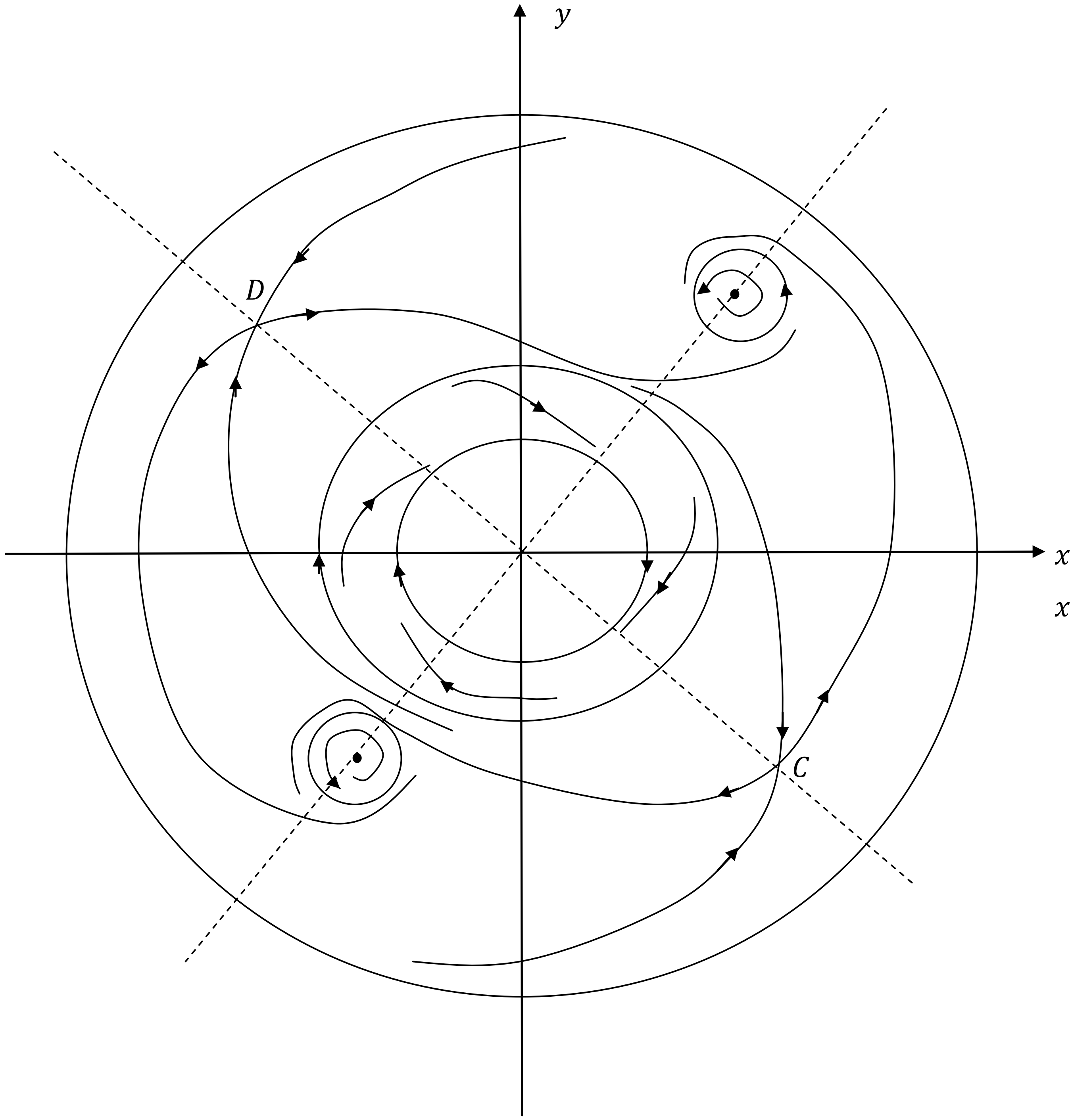
13-rasm



14-rasm



15-rasm



16-rasm

XULOSA

Bu bitiruv malakaviy ishda uchinchi va birinchi tartibli egri chiziqlar ko’rinishida, ikkita xususiy integralga ega kvadratik ikki ulchovli statsionar sistema qurilgan. Bunda egri chiziqlar koeffisientlari sistemaning ixtiyoriy parametrik orqali ifodalanadi. Olingan sistemaning sifat tadqiqoti o’tkazilgan, uchta muvozanat holati topilgan, ulardan uchtasi A, B, C lar integral egri chiziqlarga tegishli. Tekislikning cheksiz uzoqlashgan qismi tadqiq etildi, limitik sikllar yo’qligi isbotlandi, egarlar separatrisalar holati aniqlanadi va umuman sistema trayektoriyalari holatining sifat tasviri yasaldi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.

[1] Баутин Н.Н. О числе предельных циклов, появляющихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокуса или центра // Матем. сб.- 1952.- Т.30,№1.- 458 с.

[2] Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.-М.: Наука, 1976.- 274 с.

[3] Бендиксон И. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями.- УМН, 1941.- Вып. 9.- 643 с.

[4] Биркгоф Дж.Д. Динамические системы. М.-Л.: Гостехиздат, 1941.- 340 с.

[5] Воробьев А.П. К вопросу о циклах вокруг особой точки типа "узел" // ДАН БССР.- 1960.- Т.4,№9.- 720 с.

[6] Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую.- ПММ.- 1952.- Т.16, Вып. 6.- с.659-670.

[7] Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями.- М.-Л.: ГИТТЛ, 1947.- 839 с.

[8] Серебрякова Н.Н. Качественное исследование одной системы дифференциальных уравнений теории колебаний.- ПММ.- 1963 Т.27, Вып.1.- 230 с.

[9] Филипцов В.Ф. К вопросу алгебраических интегралов одной системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.- 1973.- Т.9,№3.- 256

[10] Черкас Л.А. Об алгебраических решениях уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, где P и Q – многочлены второй степени // ДАН БССР.- 1963.- Т.7,№11.- 950 с.

[11] Яблонский А.И. Алгебраические интегралы одной системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.- 1970.- Т.6,№10.- с. 1752-1760.