O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

Qo’l yozma huquqida

UDK 51:681:14

JABBOROV JAMOLIDDIN SINDAROVICH

NEFT VA GAZ QATLAMLARI PARAMETRLARINI TOPPISH BO`YICHA TESKARI NOKORREKT MASALALARNI YEHISH

5A130202-Amaliy matematika va axborot texnologiyalari
Magistr
Akademik darajasini olish uchun yozilgan dissertatsiya

Ilmiy rahbar: prof.B.Xo’jayorov

SAMARQAND 2014

K I R I S h

Mavzuning dolzarbligi. Neft va gaz qatlamlarining kollektorlik xususiyatlarini aniqlash usullarini yaratish va rivojlantirish yer osti gidrodinamikasining eng muhim masalalaridan hisoblanadi [1]. Konlarni ekspluatasiya qilish jarayonlari loyihalarini tuzish va tahlil qilish qatlamning o’rganilganlik darajasi bilan to’g’ridan to’g’ri bog’liq [1]. Mahsuldor qatlam haqida axborot olish usullarini ikki guruhga ajratish mumkin. To’g’ri usullar bevosita qatlam jinsi namunalari va qatlam mahsulotlarini o’rganuvchi usullardir, ularga kern bo’yicha qatlamning kollektorlik xususiyatlarini, qatlam suyuqligining fizik-ximik xususiyatlarini, kavernometr orqali o’rganish usullari kiradi. Qatlamning fizik xususiyatlarini boshqa parametrlar bilan bog’lab o’rganuvchi bilvosita usullarga quyidagilar kiradi: geofizik, termometrik, gidrodinamik. Bu usullarni qo’llab zahiralarni hisoblash, mahsuldor qatlamni ishlatish loyihalari va quduqlarni ishlatishning optimal texnologik rejimlarini o’rnatish uchun zarur bo’lgan parametrlarni baholashga imkon beradi.

Matematik fizika masalalari, xususan yer osti gidromexanikasi masalalari to’g’ri va teskari masalalarga bo’linadi. To’g’ri masala berilgan tenglama yoki tenglamalar sistemasi yechimlarini aniq boshlang’ich va chegaraviy shartlarda aniqlashdan iborat. Teskari masalalarning matematik qo’yilishi quyidagidan iborat: qaralayotgan masala yechimi haqida qo’shimcha axborotlardan foydalanib noma’lum funksiyani topish talab qilinadi. Noma’lum funksiya differensial tenglamaning koeffisiyenti, chegaraviy yoki boshlang’ich shartlar bo’lishi mumkin. Yer osti gidromexanikasi teskari masalalarining ajralib turadigan xususiyatlaridan biri qo’shimcha axborot ishlab-chiqarish eksperimenti imkoniyatlari bilan aniqlanishi bilan xarakterlanadi, real neft va gaz qatlamlarining matematik modellarini tadqiq etish bilan bog’liq. Bu teskari masalalarni yechishda ishlab chiqarish ma’lumotlarida xatolikning mavjud bo’lishligini hisobga olish zarur.

Ish elastiklik rejimida suyuqliklar sizishining teskari masalalarini sonli yechishga bag’ishlangan. Qo’shimcha ma’lumot sifatida vertikal quduqlarning gidrodinamik tadqiqlari natijalari qo’llaniladi. Bunday teskari masalalar Adamar bo’yicha nokorrekt masalalardir. Ular uchun yechimning boshlang’ich ma’lumotlardan uzluksiz bog’liqligi talabining buzilishi xosdir. Mumkin bo’lgan yechimlar sinfini aniq toraytirishda qandaydir qo’shimcha ma’lumotlarning miqdor yoki sifat xarakteri jihatdan o’zgartirib yer osti gidromexanikasi teskari masalalari shartli-korrekt masalaga aylanadi.

Qo’zg’aluvchi va ta’sirlanuvchi quduqdardagi qatlam va quduq tubi bosimlarini o’lchash bilan aloqador qatlam va quduqlarni tadqiq etuvchi gidrodinamik usullar bosim o’lchash usullari deb ataladi. Bosim o’lchash usullarini ikkita guruhga – sizishning stasionar va nostasionar rejimlariga ajratish mumkin. Sizishning stasionar rejimida vertikal quduqlarni tadqiq etish usullari tadqiq etilayotgan quduq tubida ko’p marta bosim o’zgarishiga asoslangan. Debit va unga mos bosim farqidan hosil qilingan bog’lanishlar bo’yicha indikatorli diagramma deb ataluvchi grafik quriladi. Bu grafik bo’yicha mahsuldorlik, gidroo’tkazuvchanlik kabi qatlam parametrlari aniqlanadi. Indikator diagrammani qurishda to’g’ri chiziqdan chetlanish bo’lishi mumkinligini ta’kidlab o’tamiz.

Mavjud gidrodinamik usullardan eng anig’i qatlam va quduqning sizish parametrlarini nostasionar rejim bo’yicha ularning ishlashi va o’zaro ta’sirini kuzatish oraqali aniqlovchi usullar hisoblanadi. Amaliyotda eng keng tarqalgan usul bosim tiklash (tushish) usuli hisoblanadi. Bu usul quduqni ishlatish yoki to’xtatishdan keyin bosim taqsimotining nostasionar jarayonlarni o’rganishga asoslangan. Bosim ko’tarilish (tushish) egri chiziqlarini qayta ishlovchi klassik usul egri chiziqlarni yarim logarifmik koordinatalarga almashtirishga asoslangan. Quduq manometri bilan o’lchangan quduq to’xtatilgandan keyin quduq tubi bosimi o’sishi egri chizig’ini bu koordinatalarda boshqatdan quriladi. Nazariy bu bog’lanish to’g’ri chiziqni tasvirlaydi. Shuni ta’kidlash kerakki, bosim o’zgarishi egri chizig’i ko’plab omillarga ta’sir qiladi: jumladan quduq to’xtatilishi bilan flyuid oqimining quduq tubiga davom etishi, yomonlashgan yoki yaxshilangan o'tkazuvchanlik quduq tubi sohasining mavjudligi, takomillashmagan quduq, to'xtatilgandan keyin quduq ishlashi rejimining buzilishi, neftning fizik xossalari va boshqalar. Yuqorida sanalgan omillar bosim tiklanish egri chizig'ini buzadi va ularning talqinini buzadi.

Ko'plab amaliy qiziq hollarda vertikal quduq ishlayotganda chekli ochiq qatlamda bosim o'zgarishi uzoq vaqt davomida logarifmik xarakterga ega bo'ladi.

Neft quduqlari va qatlamini tadqiq qilishning gidrodinamik usullari ishlab chiqarish ma'lumotlaridan quyidagi qatlam parametrlarini hosil qilish imkonini beradi: gidroo'tkazuvchanlik, bosim o'tkazuvchanlik, quduqning shartli harakat radiusi, qatlamning samarali qalinligi va h.k. Bu qatlamning gidrodinamik xarakteristikalari kompleksi neft va gaz zahiralarini hisoblashda, muqobil ishlatish sistemasini tanlash va asoslash uchun, bunadan tashqari kon holatini sanoat nazorati uchun qo'llanadi.

Nyeft va gaz qatlamlari paramyetrlarini topish nyeft va gaz qazib chiqarish jarayonlarini samarali tashkil etishda muhim ahamiyatga egadir. Bu masala matyematik fizikaning tyeskari, nokorryekt masalalariga kyeltiriladi. Bunday masalalarni yyechish juda murakkab, chunki yyechish yagonaligi va boshlang`ich qiymatlar bo`yicha turg`unligini ta'minlash hamisha ham mumkin emas. Ushbu ish natijalaridan nyeft va gaz qazib olish jarayonlarida nyeft va gaz qatlamlari paramyetrlarini topishda foydalanishi mumkin.

Ishning maqsad va vazifalari: Nyeft va gaz qatlamlari paramyetrlari topish bo`yicha tyeskari masalalar yetarlicha o`rganilmagan. Qatlamning elastik ryejimi uchun qatlam paramyetrlarini topish bo`yicha tyeskari masalalar dyeyarli o`rganilmagan. Ishda qatlam paramyetrlarini topish bo`yicha koeffitsiyent, chyegaraviy tyeskari masalalar qo`yiladi va ular sonli yechiladi. Yechim turg`unligini ta'minlaydigan samarali sonli yyechish algoritmlari yaratiladi.

Tadqiqot obekti va predmeti: Tadqiqot obyekti elastik xususiyatli bir jinsli suyuqlik bilan to'yingan g'ovak muhit. Tadqiqot predmeti –neft va gaz qatlamlarda suyuqliklarning elastik sizish jarayonlarini gidrodinamik tahlil qilish.

Tadqiqot uslubiyati va uslublari: neft va gaz qatlamlari uchun koeffitsiyentli va chegaraviy teskari masalalarni shartsiz optimizatsiya usullari, determenistik momentlar usuli, chekli ayirmalar usullaridan foydalanildi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy jixatdan yangiligi: Nyeft va gaz qatlamlari paramyetrlari topish bo`yicha tyeskari masalalar yetarlicha o`rganilmagan. Qatlamning elastik ryejimi uchun qatlam paramyetrlarini topish bo`yicha koeffitsiyentli, chyegaraviy tyeskari masalalar qo`yildi va ular sonli yechildi. Yechim turg`unligini ta'minlaydigan samarali sonli yyechish algoritmlari yaratiladi.

Tadqiqot natijalarini amaliy ahamiyati va tadbiqi: Parabolik tipdagi tyenglama uchun tyeskari masalalar qo`yish va yyechim turg`unligini ta'minlaydigan samarali sonli usullar tanlanadi. Ishda olingan natijalar asosida nyeft va gaz qazib olish jarayonida qatlam pamyetrlarini topishda foydalanish mumkin.

Ish tuzilishi va tarkibi: dissertasiya ishi kirish qismi, 3 ta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati va ilovadan iborat.

1-bob matematik fizikaning teskari masalariga bag`ishlangan. 1-paragrifda matematik fizikaning to'gri va teskari masalalari haqida tushunchalar keltirilgan. 2-paragrifda matematik fizikaning teskari masalalari taqribiy yechish usullari yoritilgan. 3-paragrifda retrospektiv teskari teskari masalar, ularni yechish usullari kabi tushunchalar keltirilgan. 4-paragrafda matematik fizikaning chegaraviy teskari masalalari haqida tushunchalar, ularni yechish usullari yetarlicha bayon etilgan. 5-paragrafda esa koeffitsiyentli teskari masalalar keltirilgan. Yuqorida ko'rsatilgan barcha teskari masalalar parobolik tipdagi issiqlik tarqalish tenglamasi misolida keltirilgan.

2-bob elastik rejimdagi suyuqliklar sizishining koeffitsiyentli teskari masalalari keltirilgan. 1-paragrafda elastik rejimda quduqlarni tadqiq etish usullari haqida ma'lumotlar keltirilgan. 2-paragrifda elastik rejimda teskari masalalarni yechishning gidroo'tkazuvchanlik, elastiklik sig'imi kabi qatlam parametrlarini aniqlash usullari keltirilgan. 3-paragrifda bosim o'tkazuvchanlik koeffitsiyentini identifikatsiya usuli orqali aniqlash masalasi yecilgan. 4-paragrifda deterministik momentlar usuli yordamida bosim o’tkazuvchanlik koeffitsiyentini topish uchun sodda formulalar keltib chiqarilgan.

3-bobda elastik sizish rejimi uchun chegaraviy teskari masalalar qaralgan. 1-3 paragraflarda chegaraviy teskari masalalarni yechishnig De Suza, Xenzell-Xenz kabi usullari keltirilgan. 4-paragrifda chiziqli elastiklik sizish rejimida bosim o`tkazuvchanlik tenglamasi uchun chegaraviy teskari masala yechilgan.

1-BOB. MATEMATIK FIZIKANING TESKARI MASALALARI

Matematik fizikaning teskari masalalari u yoki bu nuqtai nazaridan har xil ishlarda qaralgan. Asosiy e'tibor yechimning yagonaligi, bu masalalarning shartli koorekt sinfini ajratish muammosiga ajratiladi [1-3]. Xususiy hosilali tenglamalar uchun teskari masalalar taraqqiyoti eng ko'p issiqlik almashinuv muammolariga bag'ishlangan [4-7]. Issiыlik almashinuvi teskari masalalarining tasnifi O.M.Alifanov [8] tomonidan taklif qilingan. Nokorrekt masalalarni taqribiy yechish muammolariga ko'plab ishlar bag'ishlangan, ular orasidan ajratamiz [9,10]. Birinchi turdagi operator tenglamalar uchun nokorrekt masalalarni yechishning iterasion usullari [11,12] ishlarda tadqiq etiladi. Regulyarizasiya parametrini tanlashni asoslashning eng batafsil bayoni [13] da tasvirlangan. Matematik fizikaning nokorrekt masalalarini taqribiy yechishning kvazimurojat usulining har xil variantlari [14] da keltirilgan. Issiqlik almashinuvining koeffisiyentli teskari masalalari ushbu ishlarda [15-17] bayon etilgan.

1.1. Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun to'g'ri va teskari masalalar

Xar xil vaqtlarda muhit nuqtalarida temperatura taqsimoti xususiy hosilali tenglamalardan aniqlanadi (issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasidan). $T(x,y,z,t)$ temperatura maydonini bir qiymatli aniqlash uchun qo'shimcha (yopuvchi) munosabatlar keltiriladi, shunday qilib xususiy hosilali tenglamaning yechimi bir qancha ixtiyoriy funksiyalargacha aniqlik bilan topiladi. Bu ixtiyoriylikni yo'qotish uchun bir qancha qo'shimcha munosabatlar keltiriladi: bir qancha nuqtalarda yechimning o'zi, bir qancha yo'nalishlarda yechimdan olingan hosila va h.k. ma'lum bo'ladi.

Qandaydir tanlangan fazo sohasida temperatura maydonini hisoblash amalga oshiriladi. Oddiylik uchun issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi yechimi qidiriladigan o'zgarmas Ω hisoblash sohasi holi bilan chegaralanamiz.

Aniqlik uchun $t=0$ vaqt momentidan boshlab qandaydir $t=t_{\max}>0$ vaqt momentigacha issiqlik almashinuv jarayonini tadqiq etamiz. Shuning uchun issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi yechimi $Q=\{(x,y,z,t)|(x,y,z)\in\Omega,$ $0<t<t_{\max}\}$ silindrda izlanadi, ya'ni

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}T)+f, \quad (x,y,z,t)\in Q. \tag{1.1}$$

Bu tenglama fazo bo'yicha ham, vaqt bo'yicha ham xususiy hosilalarni o'z ichiga oladi. Shu sababli qo'shimcha munosabatlar Ω fazoviy soha va $(0,t_{\max})$ vaqt intervali nuqtalari to'plamida, ya'ni qandaydir Q silindr nuqtalari to'plamida berilishi kerak.

Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun odatda chegaraviy masalalar qo'yiladi. Q silindr yon sirtidagi shartlar fazoviy o'zgaruvchilar bo'yicha shartlarga mos keladi (Ω fazoviy soha chegarasida). Shu sababli bunday shartlar uchun chegaraviy shartlar terminini ishlatish jo'yalidir. Q ning pastki asosidagi shartlar boshlang'ich shartlarning qo'yilishiga mos keladi.

Eng murakkab shartlarni ham berish imkoni mavjud. Masalan, $t=0$ dagi boshlang'ich shartlar o'rniga Q silindrning boshqa kesimida qo'shimcha shartlarni berish mumkin, masalan qandaydir $t=t^*$ da. Boshqacha aytganda, qo'shimcha munosabatlar Q soha ichida yotgan nuqtalar to'plami bo'lishi mumkin. Bu yo'nalishdagi bir qancha imkoniyatlar issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun asosiy masalalar turi ajratilib muhokama qilinadi.

Odatda boshlang'ich vaqtda temperatura maydoni beriladi, ya'ni

$$T(x,y,z,0)=T^0(x,y,z), \quad (x,y,z)\in\Omega \tag{1.2}$$

(1.2) tipdagi shartning berilishi qandaydir fiksirlangan vaqt momentida amaliy modellashtirishda temperaturani to'g'ridan-to'g'ri o'lchashni o'tkazishni talab qiladi. Bunday o'lchashlar o'tkazish har doim ham mumkin emas. Shuning uchun boshqa yondashuvlarni qo'llash mumkin. Masalan, (1) tenglama uchun oxirgi vaqt momentida maqbul shartlar bo’lishi kerak, ya’ni (2) shart o’rniga quyidagi shart beriladi

$$T(x,y,z,t_{\max}) = T^m(x,y,z), \qquad (x,y,z)\in\Omega \tag{1.3}$$

Bu holda (1.3) shartlar bo’yicha oldingi $t < t_{\max}$ vaqt momentida issiqlik o’tkazuvchanlik tenglamasi asosida temperatura maydoni tiklanadi. Shunday qilib biz issiqlik o’tkazuvchanlik tenglamasi uchun retrospektiv masalani ta’riflab berdik.

Issiqlik o’tkazuvchanlik tenglamasi uchun chegaraviy shartlar orasidan asosiy birinchi, ikkinchi va uchinchi turdagi chegaraviy shartlar ajratiladi. Eng oddiy holat $\partial\Omega$ chegarada temperatura maydoni berilishi bilan xarakterlanadi (birinchi turdagi chegaraviy shartlar):

$$T(x,y,z,t) = g(x,y,z,t),\ (x,y,z)\in\Gamma \tag{1.4}$$

Bu yerda Γ — $\Omega : \Gamma = \{(x,y,z,t) | (x,y,z)\in\partial\Omega, 0 < t < t_{\max}\}$ yon sirt. (1.4) birinchi turdagi shartlar Dirixle shartlari ham deb ataladi.

Ikkinchi turdagi chegaraviy shartlar (Neyman shartlari) chegarada issiqlik oqimini berishga mos keladi. (1.1) issiqlik o’tkazuvchanlik tenglamasi uchun izotrop muhitda u quyidagi ko’rinishda yoziladi:

$$k\frac{\partial T}{\partial n} = q(x,y,z,t), \qquad (x,y,z,t)\in\Gamma \tag{1.5}$$

bunda $\partial/\partial n$ orqali Ω sohaning $\partial\Omega$ chegarasi tashqarisiga nisbatan normal belgilangan.

Issiqlik o’tkazuvchanlik tenglamasi uchun bir qancha asosiy masalalar sinfini ajratamiz. Avvalo biz boshlang’ich va chegaraviy shartlar berilishi bilan xarakterlanadigan chegaraviy masalalarni qaraymiz. Masalan, tenglama (1.2) boshlang’ich shart va birinchi tur (1.4) chegaraviy shart bilan to’ldiriluvchi (1.1) issiqlik o’tkazuvchanlik tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masala qo’yilgan bo’lishi mumkin.

Mustaqil obyekt tadqiq qilinayotgan, $\partial\Omega_1$ chegaraning qismida bir turdagi chegaraviy shartlar berilgan, chegaraning qolgan $\partial\Omega_2 (\partial\Omega_2 = \partial\Omega / \partial\Omega_1)$ qismida esa boshqa turdagi chegaraviy shartlar berilgan holni ajratish mumkin. Masalan, (1.1) tenglama uchun chegaraviy shartlar ushbu ko’rinishga ega bo’lishi mumkin:

$$T(x,y,z,t) = g(x,y,z,t),\ (x,y,z) \in \Gamma_1$$

$$k\frac{\partial T}{\partial n} = q(x,y,z,t), \qquad (x,y,z,t) \in \Gamma_2$$

Bu yerda $\Gamma_\alpha = \{(x,y,z,t) | (x,y,z) \in \partial\Omega_\alpha, 0 < t < t_{\max}\}$, $\alpha = 1,2$. Bunda biz aralash chegaraviy shartlarga, aralash chegaraviy masalaga ega bo’lamiz.

Yuqorida ta’kidlangan chegaraviy masalalar $\partial\Omega$ chegarada (Γ yon sirtda) va $t = 0$ da (boshlang’ich shartlar) qo’shimcha shartlar berilishi bilan xarakterlanadi. Bu xususiy hosilali tenglamalar nazariyasida yaxshi tadqiq qilingan issiqlik o’tkazuvchanlik tenglamasi uchun eng muhim masalalar sinfi hisoblanadi.

Qaralgan chegaraviy masalalar korrekt qo’yilgan (Adamar bo’yicha korrekt) masalalar sinfiga kiradi. Xususiy hosilali tenglamalar uchun masala korrekt qo’yilgan masala deb ataladi, agar quyidagi uchta shartlar bajarilsa:

1) masala yechimi mavjud;

2) bu yechim yagona;

3) yechim tenglama koeffisiyentlaridan va qo’shimcha shartlardan (chegaraviy va boshlang’ich shartlardan) uzluksiz bog’liq.

Agar bu shartlardan hyech bo’lmaganda bittasi buzilsa ham, u holda masala nokorrekt qo’yilgan masalalar sinfiga kiradi. Nokorrektlik asosan masalaning berilgan parametrlariga berilgan kichik qo’zg’alishlar bo’yicha yechim turg’unligi (3 shart) buzilishi bilan aloqador.

Chegaraviy masalalarni sabab-oqibat aloqadorligi nuqtai nazaridan talqin qilish chegaraviy maslani issiqlik o’tkazuvchanlik tenglamasi uchun to’g’ri masala sifatida qarashga imkon beradi. Sabab-oqibat aloqadorligi buzilishi ko’pincha teskari masalalarda ko’rinadi, chunki teskari masalalar nokorrekt qo’yilgan masalalar hisoblanadi.

Issiqlik o’tkazuvchanlik tenglamasi uchun teskari masalalar quidagilardan iborat, yopuvchi zaruriy (chegaraviy va boshlang’ich) shartlar to’la berilmagan yoki tenglamaning o’zi to’la aniqlanmagan (tenglamaning koeffisiyentlari, o’ng tarafi berilmagan, hisoblash sohasi aniqlanmagan) bo'ladi. Buning o'rniga yechim, tenglama, soha va h.k. haqida qandaydir qo'shimcha axborot ma'lum bo'ladi. Qo'shimcha axborot har xil ko'rinishda berilishi mumkin. Bu yo'nalishda bir qancha imkoniyatlar quyida qaraladi.

$t=0$ da berilgan (1.2) boshlang'ich shart o'rniga $t=t_{max}$ da (1.3) shart berilgandagi masala issiqlik o'tkazuvchanlik uchun oddiy teskari masalaga misol bo'ladi (issiqlik o'tkazuvchanlikning retrospektiv teskari masalasi, teskari vaqtli masala). Kerakli chegaraviy shartlar berilmagan holdagi issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun teskari masalalar muhim amaliy ahamiyatga ega. Masalan, chegaraning $\partial\Omega_1$ qismida ikkita shart berilgan, chegaraning $\partial\Omega_2$ qolgan qismida shart berilmagan bo'lsa, misol uchun chegaraviy shart chegraning bir qismida quyidagicha bo'lsin

$$T(x,y,z,t)=g(x,y,z,t), \qquad (x,y,z)\in\Gamma_1 \tag{1.6}$$

$$k\frac{\partial T}{\partial n}=q(x,y,z,t), \qquad (x,y,z,t)\in\Gamma_1 \tag{1.7}$$

Bunday holat qandaydir sababga ko'ra chegaraning $\partial\Omega_2$ qismida temperatura va issiqlik oqimini to'g'ridan to'g'ri o'lchash imkoni bo'lmaganda ro'y beradi.

1.2. Matematik fizikaning teskari masalalarini taqribiy yechish

1.2.1. Teskari masalarning asosiy sinflari

Biz xususiy hosilali tenglamalar uchun teskari masalalarning bir qator muhim tiplarini ajratamiz. Qulaylik uchun tasnifga mos masalalarni nostasionar issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun o'tkazamiz.

Quyidagi qattiq jism kesimi issiqlik holati

$$\partial\Omega=\{x\mid x=(x_1,x_2), \qquad 0<x_\alpha<l_\alpha, \alpha=1,2\}$$

ushbu tenglama bilan yoziladi

$$c(x)\frac{\partial u}{\partial t}+Lu=f(x,t), \quad x\in\Omega, \qquad 0<t\le T, \tag{1.8}$$

bunda

$$Lu \equiv -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \qquad x \in \Omega, \tag{1.9}$$

Chegarada aralash chegaraviy shartlar berilgan deb hisoblaymiz. Aytaylik

$$\gamma = \{x \mid x \in \partial\Omega, x_2 = l_2\},$$

$\Gamma = \partial\Omega / \gamma$ bo'lsin. Γ da birinchi tur, γ da esa ikkinchi tur shartlar berilsin:

$$u(x,t) = g(x,t), \quad x \in \Gamma, \tag{1.10}$$

$$k\frac{\partial u}{\partial n} = q(x,t), \qquad x \in \gamma, \ 0 < t \le T. \tag{1.11}$$

(1.8) tenglamani quyidagi boshlang'ich shartlar bilan to'ldiramiz

$$u(x,0) = u^0(x), \qquad x \in \Omega. \tag{1.12}$$

Yuqorida ifodalangan (1.8)-(1.12) masala issiqlik almashinuvning *to'g'ri masalasidir*. U Ω hisoblash sohasi, (1.8), (1.9) tenglamalar, (1.10), (1.11) chegaraviy va (1.12) boshlang'ich shartlar bilan xarakterlanadi. Bu masala korrekt, ya'ni masala yechimi mos sinflarda mavjud, yagona va berilgan ma'lumotlardan (boshlang'ich va chegaraviy shartlar, tenglama koeffisiyentlari va h.k.) uzluksiz bog'liq.

Issiqlik almashinuvning *teskari masalalari* deganda (qo'yilgan (1.8)-(1.12) to'g'ri masalaga munosabati bo'yicha) tabiiy ravishda to'g'ri masalalar uchun zarur ma'lumotlar berilmagan bo'ladi, ularning o'rniga esa qandaydir qo'shimcha shartlar beriladi. Yuqorida keltrilganlarga mos ravishda teskari masalalar sinfini ifodalash mumkin. Bu masalalar tasnifi yetishmayotgan shartlar bilan bog'liq.

Oldin (1.12) boshlang'ich shartlar yetishmayotgan teskari masalalarni ajratib olamiz. Bunday masalaga *issiqlik almashinuvning retrospektiv teskari masalasi* misol bo'lib xizmat qiladi. Bunda boshlang'ich holat o'rniga oxirgi vaqt momentida holat ma'lum bo'ladi. Bu holda yechim (1.8), (1.9) tenglamalar, (1.10), (1.11) chegaraviy shartlar va quyidagi shartdan aniqlanadi

$$u(x,T) = u^T(x), \quad x \in \Omega. \tag{1.13}$$

$t = T$ vaqt momentida temperatura maydoni o'lchashlari bo'yicha avvalgi vaqt momentlarida temperatura maydonini tiklash zarur.

(1.8)-(1.11), (1.13) retrospektiv masala $\theta = T - t$ almashtirish yordami bilan teskari vaqtli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun chegaraviy masalaga keltiriladi $(u = u(x,\theta))$:

$$-c(x)\frac{\partial u}{\partial \theta} + Lu = f(x, T - \theta), \quad x \in \Omega, \quad 0 < \theta \le T \tag{1.14}$$

(1.14) tenglama uchun mos chegaraviy shartlar ((1.10), (1.11) ga qarang) keltiriladi. (1.13) dan quyidagi boshlang'ich shartni hosil qilamiz

$$u(x,0) = u^T(x), \qquad x \in \Omega. \tag{1.15}$$

(1.13) qo'shimcha shartlar o'rniga (oxirgi vaqt momentida temperatura o'lchanadi) yetishmayotgan (1.12) boshlang'ich shartlarni qandaydir darajada o'rnini to'ldiruvchi boshqa shartlar berilishi mumkin.

Zaruriy chegaraviy shartlarning mavjud emasligi issiqlik almashinuvining chegaraviy teskari masalalariga ega bo'lamiz. Bunday teskari masalalar amaliy tadqiqotlarda juda katta ahamiyatga ega. Masalan, (1.8)-(1.12) to'g'ri masalaga chegaraning γ qismida chegaraviy shartlar noma'lum bo'lgan chegaraviy teskari masala oldinga chegaraviy teskari masala oldinga chiqadi. Buning o'rniga sohaning ichki nuqtalarida qo'shimcha temperatura o'lchashlari o'tkaziladi. Aytaylik, masalan,

$$\gamma_\bullet = \{x \mid x \in \partial\Omega, x_2 = x_2^\bullet, 0 \le x_2^\bullet < l_2\},$$

va $\gamma_\bullet$ da quyidagi shart beriladi

$$u(x,t) = g_\bullet(x,t), \quad x \in \gamma_\bullet, \qquad 0 < t \le T \tag{1.16}$$

(1.8), (1.9), (1.11), (1.12), (1.16) teskari masalada qo'shimcha shartlar bo'yicha yechim butun soha bo'ylab yechim tiklanadi, shu bilan birga γ da issiqlik oqimi (yetishmayotgan (1.10) chegaraviy shart) ham tiklanadi. Chegaraviy teskari masalalar boshqacha qo'yilishda ham ifodalanadi. (1.16) da $x_2^\bullet = 0$ bo'lishi mumkinligini ta'kidlaymiz, ya'ni chegaraning $\gamma_\bullet \subset \Gamma$ qismida temperatura , yoki oqim beriladi.

Biz zaruriy boshlang'ich yoki chegaraviy shartlar mavjud bo'lmagan, ammo (1.8), (1.9) issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi berilgan teskari masalalarga misollar keltirdik. Issiqlik almashinuvining koeffisiyentli teskari masalalari tipik teskari masalalardan hisoblanadi. Bunda tenglamaning o'zi aniq berilmaydi – uning qandaydir koeffisiyenti, o'ng tarafi berilmaydi. Avval chegaraviy va boshlang'ich shartlarni identifikasiya qilish haqida gap ketgan bo'lsa, endi jarayon modelining o'zi, tenglamaning o'zi identifikasiya qilish haqida so'z boradi. (1.8)-(1.12) ga muvofiq issiqlik sig'imi ($c(x)$), issiqlik o'tkazuvchanlik ($k(x)$) koeffisiyentlari, manbalar (o'ng taraf $f(x,t)$) noma'lum bo'ladi. Qo'shimcha axborot (1.13), (1.16) tipdagi temperatura o'lchashlaridan iborat bo'lishimumkin. Masalan, $k(x)$ ni (1.8)-(1.12) va (1.13) shartlardan tiklash talab qilinadi.

Keltirilgan issiqlik almashinuvining teskari masalalar (retrospektiv, chegaraviy, koeffisiyentli) sinfi turli tumanligiga ta'sir qilmaydi. Biz faqat issiqlik almashinuvining asosiy, tayanch teskari masalalarini ajratdik.

1.2.2. Nokorrekt masalalarni taqribiy yechishning asosiy yondashuvlari

Matematik fizikaning teskari masalalari, qoida bo'yicha, klassik ma'noda nokorrekt masalalar sinfiga kiradi. Xususan, nokorrektlik kiruvchi ma'lumotlar o'zgina o'zgarishi bilan teskari masala yechimining noturg'unligi bilan xarakterlanadi. Matematik fizika teskari masalalarining mumkin bo'lgan yechimlari sinfini toraytirish bilan ular korrekt masalaga aylanadi (shartli korrekt, A.N.Tixonov bo'yichaa korrekt).

Hozirgi kunda nokorrekt masalalar nazariyasi katta rivojlanishga erishdi. Nokorrekt masalalarni yechishning turg'un usullarining bir qancha umumiy rivojlanish yo'nalishlari haqida to'xtalamiz.

Nokorrekt masalalar, odatda, birinchi jinsli chiziqli operator tenglamalarga nisbatan qo'llaniladi

$$Au = f, \tag{1.17}$$

masalan, χ gilbert fazosida (soddalik uchun, $u \in \chi, f \in \chi,$ ya'ni $A: \chi \to \chi$). Faraz qilaylik, (1.17) tenglamaning o'ng tomoni quyidagi xatolik bilan berilgan bo'lsin:

$$\| f_b - f \| \le \delta \tag{1.18}$$

Unga qandaydir taqribiy yechim mos keladi, uni u_α bilan belgilaymiz, bunda $\alpha = \alpha(\partial)$.

Yey sootvetstvuyet nekotoroye priblijennoye resheniye, kotoroye oboznachim u_α, prichem $\alpha = \alpha(\partial)$. (1.17), (1.18) masala nokorrektligi, masalan, A^{-1} operator χ fazoning ayrim joyida aniqlanmagan bo'lgan holdabo'lishi mumkin.

(1.17), (1.18) masalani taqribiy yechish uchun ko'proq variatsion usullardan foydalaniladi. A.N.Tixonovning regulyarizatsiya usulida quyidagi silliqlovchi funksional kiritiladi:

$$J_\alpha(v) = \| Av - f_b \|^2 + \alpha \| v \|^2 \tag{1.19}$$

(1.17), (1.18) masalaning taqribiy yechimi bu funksionalning ekstremalidan iborat, ya'ni

$$J_\alpha(u_\alpha) = \min_{v \in \chi} J_\alpha(v) \tag{1.20}$$

(1.19) da $\alpha > 0$ - regulyarizatsiya parametri, uning qiymati o'ng tomon xatoligi δ bilan mos keladi.

(1.18), (1.19) ektremal masala o'rniga unga mos Eyler tenglamasini yechish mumkin. Bu holda taqribiy yechim quyidagi simmetriklashtirilgan tenglamani yechish orqali topiladi

$$A^\bullet A u_\alpha + \alpha u_\alpha = A^\bullet f_\delta. \tag{1.21}$$

(1.17) nokorrekt masaladan, (1.21) korrekt masalaga o'tish o'z-o'ziga qo'shma $A^\bullet A$ operator hisobidan amalga oshiriladi. (1.17) ni chapdan $A^\bullet$ ga ko'paytirib va uning natijasida αE qo'zg'alish operatori, bu yerda E - ayniy operator. $A^\bullet = A \ge 0$ bo'lganda operator o'zining qo'zg'alishi bilan cheklanish mumkin:

$$A u_\alpha + \alpha u_\alpha = f_\delta \tag{1.22}$$

(1.22) masala soddalashgan regulyarizatsiya algoritmdan foydalanishga mos keladi. Shunday qilib, notug'un maslalarni yechishning ikkinchi turdagi taqribiy yechish usullari berilgan yoki o’zgartirilgan operatorga qo’zg’alish berish bilan xarakterlanadi.

Oxirgi vaqtlarda nokorrekt masalalarni yechishning iteratsion usullariga katta e’tibor qaratilmoqda. (1.17) tenglama uchun ikki qatlamli iteratsion usul quyidagi ko’rinishda:

$$B\frac{u_{k+1}-u_k}{\tau_{k+1}}+Au_k = f_\delta, \quad k=0,1,\ldots,n(\delta). \tag{1.23}$$

Bu yerda $B:\chi\to\chi$ va B^{-1} lar mavjud, masalan oddiy holda $B=E$. (1.17), (1.18) masalani taqribiy yechish uchun (1.23) tipdagi iteratsion usullarda regulyarizatsiya effekti o’ng tomon xatoligi δ va iteratsiyalar soni $n(\delta)$ ning mosligi hisobidan kuzatiladi. Bu yerda regulyarizatsiya parametric sifatida iteratsiyalar soni keladi.

Iteratsion usullar simmetriklashtirilgan masalalarga ham qo’llanilishi mumkin, ya’ni taqribiy yechim uchun (16) o’rniga quyidagi ishlatiladi

$$B\frac{u_{k+1}-u_k}{\tau_{k+1}}+A^{\bullet}Au_k = A^{\bullet}f_\delta, \qquad k=0,1,\ldots,n(\delta). \tag{1.24}$$

Kontekstga bog’liq ravishda (1.24) iteratsion usul quyidagi funksionalni minimizatsiyalash variatsion masalasining iteratsion usuli sifatida ham talqin etilishi mumkin

$$J(v)=\|A-f_\alpha\|^2.$$

Matematik fizika tenglamalari uchun nokorrekt masala taqribiy yechimining o’ziga xos xususiyatlarini qarashdan oldin regulyarizatsiya parametrini tanlash juda muhim masala ekanligini ta’kidlab o’tamiz.

1.2.3. Regulyarizatsiya parametrini tanlash

Nokorrekt masala taqribiy yechish usullari nazariyasida regulyarizatsiya parametrini tanlash masalasiga katta e’tibor qaratiladi. Eng keng tarqalganlar: regulyarizatsiya parametrini tafovut funktsiyasi bo’yicha tanlash, umumlashgan tafovut, kvazioptimal tanlash va h.k. (1.17), (1.18) masalada (1.19), (1.20) variatsion usullarni yoki (1.21) qo'zg'alish tenglamasiga mos $\alpha = \alpha(\delta)$.

α regulyarizatsiya parametri kiruvchi ma'lumotlar xatoligidan bog'liq bo'lib, xatolik qanchalik kichik bo'lsa parametr shunchalik kichkina olinadi.

Tafovut bo'yicha regulyarizatsiya parametrini tanlashda aniqlovchi tenglama sifatida quyidagi tenglikdan foydalaniladi

$$\|Au_\alpha - f_b\| = \delta. \tag{1.25}$$

Regulyarizatsiya parametrini bunday tanlanishining isboti, ya'ni u_α, $\alpha = \alpha(\delta)$ taqribiy yechimning $\delta \to 0$ da (1.17) tenglamaning aniq yechimiga yaqinlashishi juda ko'plab sinfdagi masalalar uchun berilgan. Biz faqat regulyarizatsiya parametri bunday tanlanganda hisoblash jarayonini tashkil qilishning o'ziga xos tomonlariga to'xtalib otamiz.

Tafovutning regulyarizatsiya parametri α dan qandaydir bog'liq, bu bog'liqlikni quyidagicha belgilaymiz

$$\varphi(\alpha) = \|Au_\alpha - f_\delta\|,$$

u holda, regulyarizatsiya parametrini toppish (1.25) tafovut prinsipiga mos keladi va quyidagi tenglama yechimidan iborat

$$\varphi(\alpha) = \delta. \tag{1.26}$$

Yetarlicha umumiy shartlarda $\varphi(\alpha)$ kamaymaydigan funksiya va (1.26) tenglama yechimga ega.

(1.26) tenglamani taqribiy yechish uchun turli hisoblash protseduralaridan foydalaniladi. Masalan, quyidagi ketma-ketlik beriladi

$$\alpha_k = \alpha_0 q^k, \; q > 0, \tag{1.27}$$

Bu yerda hisoblash $k = 0$ dan boshlanadi va (19) tenglik yetarli aniqlikda bajariladigan qandaydir $k = K$ gacha davom etadi. Bunday aniqlashda regulyarizatsiya parametri $K + 1$ marta tafovutni hisoblashni talab etadi ((1.19), (1.20) tipdagi variatsion masala yoki (1.21) Eyler tenglamasini yechish).

(1.26) tenglamaning taqribiy yechimini toppish uchun nisbatan tezroq yaqinlashadigan iteratsion usullardan ham foydalanish mumkin. $\tilde{\varphi}(\beta)=\varphi(1/\beta)$ funksiyaning kamayuvchi va qavariq funksiya ekanligi aniqlangan. Shuning uchun

$$\tilde{\varphi}(\beta)=\delta$$

tenglamani yechishda Nyuton iteratsion usulidan foydalanish mumkin, u holda

$$\beta_{k+1}=\beta_k-\frac{\tilde{\varphi}(\beta_k)}{\tilde{\varphi}'(\beta_k)}.$$

Bu usul dastlabki yaqinlashishning ixtiyoriy $\beta_0>0$ qiymatida yaqinlashadi. $\tilde{\varphi}(\beta)$ funksiya hosilasini hisoblamaslik uchun kesuvchilariteratsion usulidan foydalanish mumkin, u xolda

$$\beta_{k+1}=\beta_k-\frac{\beta_k-\beta_{k-1}}{\tilde{\varphi}(\beta_k)-\tilde{\varphi}(\beta_{k-1})}\tilde{\varphi}(\beta_k).$$

Bunday iteratsion protseduralardan foydalanish α regulyarizatsiya parametrini toppish uchun ishlatiladigan hisoblashlarni kamaytiradi.

Kiruvchi ma’lumotlar xatoligi ma’lum bo’lmaganligi, boshqarish qiyinligi tufayli yaxshi aprobiratsiyalangan va nazariy jihatdan ishlab chiqilgan tafovut usulini ishlatish qiyin. Shuning uchun, hisoblash amaliyotida regulyarizatsiya parametrini topishning ikkinchi usuli – regulyarizatsiya paramtrini kvazioptimal qiymati usulidan foydalaniladi. Bunday tanlov δ xatolik darajasidan to’g’ridan-to’g’ri bog’lanmagan. Quyidagini minimizatsiyalovchi $\alpha>0$ qiymat tanlanadi

$$\psi(\alpha)=\left\|\alpha\frac{du_\alpha}{d\alpha}\right\|.$$

Kvazioptimal qiymatni toppish uchun ko’pincha (1.27) ketma-ketlik ishlatiladi. Regulyarizatsiya parametrining bunday qiymatlarida $\psi(\alpha)$ ning minimumini toppish lozim

$$\tilde{\varphi}(\alpha_{k+1})=\left\|u_{\alpha_{k+1}}-u_{\alpha_k}\right\|.$$

Bunda ikkitaqo’shni iteratsiyalardagi taqribiy yechimlar farqi normasini baholash yetarli.

Regulyarizatsiya parametrini tanlashning boshqa usullari ham mavjud.

1.2.4. Matematik fizika teskari masalalarini yechishning variatsion usullari

Xususiy hosilali tenglamalar uchun teskari masalalrni taqribiy yechish usullarining o'ziga xosliklariga to'xtalamiz, bunday masalalarga issiqlik almashinuvining teskari masalalari ham kiradi. Bunday masalalrni yechishning birinchi umumiy yondashuvi (1.17), (1.18) masalani yechish uchun ishlatilgan (1.19), (1.20) variatsion usulga o'xshash.

Tabiiyki, tafovut funksionali qo'shimcha o'lchovlar bilan to'ldiriladi. Masalan, (1.8)-(1.11) issiqlik o'tkazuvchanlikning retrospektiv teskari masalalarida, (1.13) vaqtning oxirgi qiymatida haroratni qo'shimcha o'lchashdir. Shuning uchun tafovut funksionali quyidagi ifoda bilan aniqlanadi

$$\left\| u(x,T) - u^T(x) \right\|^2,$$

bu yerda $\|\cdot\|$ — $\chi = L_2(\Omega)$ fazodagi norma. Bu yerda haroratning dastlabki taqsimlanishi izlanmoqda, ya'ni

$$u(x,0) = v(x), \qquad x \in \Omega \tag{1.28}$$

A.N.Tixonov funksionalini ((1.19) ga qarang) quyidagi ko'rinishda tuzamiz

$$J_\alpha(v) = \left\| u(x,T;v) - u^T(x) \right\|^2 + \alpha \|v\|^2. \tag{1.29}$$

Teskari masala yechimi deganda $w(x)$ funksiyani tusinamiz, bunda

$$J_\alpha(w) = \min_{v \in H} J_\alpha(v) \tag{1.30}$$

(1.8)-(1.11), (1.28)-(1.30) teskari retrospektiv masalaning variatsion qo'yilishi issiqlik jarayonini optimal boshqarish masalasi sifatida qaralishi mumkin. Biz boshlang'ich boshqaruv ((1.28) shart) va oxirgi nazorat ((1.29) funksional) masalasiga egamiz.

α regulyarizatsiya parametri tafovut prinsipi asosida quyidagi shartdan topilishi mumkin

$$\left\| u(x,T;w_\alpha) - u^T(x) \right\| = \delta$$

bu yerda δ — vaqtning oxirgi momentida berilgan tempetratura xatoligi.

(1.8)-(1.11), (1.28)-(1.30) variatsion masalani berilgan δ regulyarizatsiya parametri aosida yechish uchun boshqaruv masalalarida ishlatiladigan sonly usullardan foydalaniladi. Xususan, gradiyentli usullardan ham foydalanish mumkin.

1.2.5. Chegaraviy masalalrning qo'zg'alishi

Teskari masalalrni yechishning ikkinchi umumiy yondashuvi berilgan tenglama va qo'shimcha shartlarga qo'zg'alish berishdan iborat.

(1.21) va (1.22) ko'rinishdagi qo'zg'atilgan masalalar berilgan teskari masalaning u yoki bu variatsion forkulirovkasi bilan bog'liq bo'lmasligi ham mumkin. Qo'zg'alish shunday beriladiki, natijada hosil bo'lgan yangi masala korrekt bo'lishi lozim, xususan, kiruvchi ma'lumotlardan uzluksiz bog'liq bo'lishi lozim.

Xususiy hosilali tenglamalar uchun nokorrekt masalalarda berilgan tenglama, chegaraviy va boshlang'ich shartlar qo'zg'atilishi mumkin. Bundan tashqari qo'zg'alish parametri bir nechta bo'lishi ham mumkin. Mumkin bo'lgan yondashuvlarni yana (1.8)-(1.11), (1.13) retrospektiv teskari masala misolida qarab chiqamiz.

Kvazimurojaat usulida berilgan tenglama qo'zg'atiladi. Qo'zg'atilgan masala yechimini $u_\alpha(x,t)$ bilan belgilaymiz va uni quyidagi tenglama yechimidan aniqlaymiz

$$c(x)\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + Lu_\alpha - \alpha L^2 u_\alpha = f(x,t), \quad x \in \Omega, \qquad 0 < t \le T \qquad (1.31)$$

mos chegaraviy shartlar va (1.13) shartlardan foydalanamiz. (1.31) tenglama (1.13) korrekt bo'lgan to'rtinchi tartibli parabolic tenglama. Boshqa turdagi kvazimurojaatdan ham foydalanish mumkin.

(1.13) o'rniga quyidagi nolokal shartdan foydalanamiz

$$u_{\alpha 0}(x,T) + \alpha u_\alpha(x,0) = u^T(x), \quad x \in \Omega,$$

Teskari masala taqribiy yechimini topishda quyidagi savollar qaraladi. Birinchi navbatda taqribiy yechim toppish uchun masala korrekt qo'yilgan bo'lishi lozim, ya'ni yechim yagona va kiruvchi ma'lumotlardan uzluksiz bog'liq bo'lishi lozim. Ikkinchi savol taqribiy yechimning aniq yechimga yaqinlashishida. Xususan, bu regulyarizatsiya parametrini tanlash usulini ko'rsatishni talab qiladi.

1.3. Issiqlik almashinuvi maslasining retrospektiv teskari masalasi

1.3.1. Shartli korrektlik

Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun retrospektiv teskari masala taqribiy yechimini toppish uchun mumkin bo'lgan bir nechta yondashuvlarni qarab chiqamiz. Operator formulirovkalarni soddalashtirish maqsadida, odatdagidek bir tipli, birjinsli chegaraviy shartlarni qaraymiz.

Retrospektiv masalani biz xuddi teskari vaqtli masala kabi qaraymiz. Shuning uchun Ω to'rtburchakda issiqlik holati quyidagi tenglama bilan qaraladi

$$c(x)\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = 0, \qquad x \in \Omega, \qquad 0 < t \le T, \tag{1.32}$$

bu yerda (izotrop muhit)

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{2} L_\alpha u, \qquad L_\alpha u = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right). \tag{1.33}$$

(1.32), (1.33) tenglamalar uchun chegaraviy shartlarni sodda ko'rinishda olamiz

$$u(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \qquad 0 < t \le T. \tag{1.34}$$

Retrospektiv masalalarda vaqtning oxirgi momentida o'lchangan harorat qiymatlari teskari vaqtli (1.32) tenglama uchun boshlang'ich shartlarni berish bilan mos keladi

$$u(x,0) = u^\alpha(x), \qquad x \in \Omega \tag{1.35}$$

(1.32)-(1.35) retrospektiv teskari masala boshlang'ich shartlarning kichik qo'zg'alishiga nisbatan noturg'unligi bilan xarakterlanadi. Lekin yechim sinflarining ma’lum toraytirilsa turg’unlikni kuzatish mumkin (xususan, yechim nomanfiy bo’lgan holda).

(1.32)-(1.35) masalada yangi o’zgaruvchi kiritib uni qaytadan yozamiz

$v(x,t) = c^{1/2}(x)u(x,t).$

(1.32) tenglamadan quyidagiga kelamiz

$$\frac{\partial u}{\Im t} - Lv = 0, \qquad x \in \Omega, \qquad 0 < t \le T, \tag{1.36}$$

bu yerda $L = c^{-1/2}(x)Lc^{-1/2}(x).$

L operator kiruvchi L operator kabi o’z-o’ziga qo’shma va musbat aniqlangan. (1.34), (1.35) dan quyidagiga ega bo’lamiz

$$u(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \qquad 0 < t \le T, \tag{1.37}$$

$$v(x,0) = v^0(x), \qquad x \in \partial\Omega, \tag{1.38}$$

(1.36)-(1.38) masala yechimi uchun $L_2(\Omega)$ da baho olamiz. Quyidagicha belgilash kiritamiz

$$\Phi(t) = \|v\|^2 = (v,v) = \int_\Omega v^2(x,t)dx. \tag{1.39}$$

(1.36) ni hisobga olib bevosita differinsiallash yordamida quyudagini hosil qilamiz

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 2\left(v, \frac{\partial v}{\partial t}\right) = 2(v, Lv). \tag{1.40}$$

L ning o’z-o’ziga qo’shma operator ekanligini hisobgaolib, takroriy differinsiallashdan quyidagini hosil qilamiz

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = 4\left(Lv, \frac{\partial v}{\partial t}\right) = 4\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2. \tag{1.41}$$

(1.39)-(1.41) dan va Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan

$$\Phi\frac{d^2\Phi}{dt^2} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2 = 4\left[\|v\|^2\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2 - \left(v, \frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right] \ge 0. \tag{1.42}$$

(1.42) tengsizlik quyidagi tengsizlikka teng kuchli

$$\frac{d^2}{dt^2}\ln\Phi(t)\geq 0, \tag{1.43}$$

Ya'ni, $u(x,0)=v(x),$ funsiya qavariq. (1.43) dan

$$\ln\Phi(t)\leq\frac{t}{T}\ln\Phi(T)+\left(1-\frac{t}{T}\right)\ln\Phi(0).$$

Bundan quyidagini hosil qilamiz

$$\Phi(t)\leq(\Phi(T))^{t/T}(\Phi(0))^{1-t/T}.$$

(1.39) ni hisobga olsak (1.36) tenglama yechimi uchun (1.37) shart bilan izlanayotgan baholashni hosil qilamiz:

$$\|v(x,t)\|\leq\|v(x,T)\|^{t/T}\|v(x,o)\|^{1-t/T}$$

Dastlabki (1)-(4) masala uchun keltirilgan baholash quiydagicha

$$\|u(x,t)\|_c\leq\|u(x,T)\|_c^{t/T}\|u(x,0)\|_c^{1-t/T}. \tag{1.44}$$

Bu yerda $\|\cdot\|_c$ quyidagicha aniqlangan

$$\|u(x,t)\|_c^2=(cu,u)=\int_\Omega c(x)u^2(x,t)dx.$$

Faraz qilaylik endi (1)-(4) retrospektiv teskari masla yechimini $\|.\|_c$ norma bo'yicha cheklangan sinfda qaraylik, ya'ni

$$\|u(x,t)\|_c\leq M. \tag{1.45}$$

(1.45) aprior cheklashlar sinfiga (1.44) dan quyidagini hosil qilamiz

$$\|u(x,t)\|_c\leq M^{t/T}\|u^0(x)\|_c^{1-t/T}. \tag{1.46}$$

Bu (1.32)-(1.35) masala yechimi chegaralangan sinfda $0<t<T$ da boshlang'ich ma'lumotlardan uzluksiz bog'liqligini ifodalaydi. (1.45) ko'rinishdagi cheklov amaliy masalalarni yecishda prinsipial qarshiliklar keltirib chiqarmaydi, (1.45) tengsizlikdagi M ning qiymati boshqa masala.

1.3.2. Kvazimurozaat usuli

Kvazimurozaat usulida dastlabki tenglama qo’zg’atiladi. Taqribiy yechimni $u_\alpha(x,t)$ bilan belgilaymiz va uni quyidagi to’rtinchi tartibli parabolic tenglamadan topamiz

$$c(x)\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} - Lu_\alpha + \alpha L^2 u_\alpha = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \le T, \tag{1.47}$$

bu yerda $\alpha > 0$ — regulyarizatsiya parametri (qo’zg’alish). Bu tenglamani quyidagi chegaraviy shartlar bilan to’ldiramiz

$$u_\alpha(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 < t \le T, \tag{1.48}$$

$$Lu_\alpha(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 < t \le T, \tag{1.49}$$

Boshlang’ich shart ham berilgan

$$u_\alpha(x,0) = u^0(x), \quad x \in \Omega. \tag{1.50}$$

(1.47)-(1.50) qo’zg’atilgan masala yechimi turg’unligini ko’rsatamiz. Hosil qilingan oddiy aprior baholash uchun (16) tenglamani $u_\alpha(x,t)$ ga ko’paytiramiz va Ω sohada integrallaymiz. Bu quyidagi tenglikka olib keladi

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\alpha\|_c^2 + \alpha\|Lu_\alpha\|^2 = (Lu_\alpha, u_\alpha), \tag{1.51}$$

O’ng tomonni baholash uchun quyidagi baholashda foydalanamiz

$$(Lu_\alpha, u_\alpha) \le \alpha\|Lu_\alpha\|^2 + \frac{1}{4\alpha}\|u\|^2.$$

Bundan tashqari,

$$\|u_\alpha\|_c^2 \ge c_0\|u_\alpha\|^2, \quad c_0 = \min_{x\in\Omega} c(x)$$

Bu (20) dan quyidagi baholashni hosil qiladi

$$\frac{d}{dt}\|u_\alpha\|_c^2 \le \frac{1}{2\alpha c_0}\|u_\alpha\|_c^2 \tag{1.52}$$

Gronuolla lemmasiga asosan (1.52) dan (1.47)-(1.50) masala yechimining boshlang’ich ma’lulotlardan turg’unligini hosil qilamiz:

$$\|u_\alpha(x,t)\|_c \le c^{t/(4\alpha c_0)}\|u^0(x)\|_c. \tag{1.53}$$

Kvazimurijjat usulini ko'rishning ikkinchi usuli psevdoparabolik tenglamaga o'tish bilan bog'liq. (1.32)-(1.35) retrospektiv teskari masala taqribiy yechimini quyidagi tenglamadan aniqlaymiz

$$c(x)\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} - Lu_\alpha + \alpha L\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = 0, \quad x \in \Omega, \qquad 0 < t \le T \tag{1.54}$$

va (1.48), (1.50) shartlar. Unga mos turg'unlik bahosini hosil qilamiz.

L ning o'z-o'ziga qo'shmaligi va musbat aniqlanganligini hisobga olgan holda $\|\cdot\|_\alpha$ normani quyidagicha aniqlaymiz

$$\|u\|_\alpha^2 = (cu,u) + \alpha(Lu,u).$$

(1.54) tengalamani $u_\alpha$ga ko'paytiramiz va Ω bo'yicha integrallaymiz. Bundan quyidagi tenglikni hosil qilamiz

$$\|u_\alpha\|_{\bullet}\frac{d}{dt}\|u_\alpha\|_{\bullet} = (Lu_\alpha, u_\alpha). \tag{1.55}$$

(1.55) ning o'ng tomoni uchun quyidagi baholash o'rinli

$$(Lu_\alpha, u_\alpha) \le \alpha^{-1}\|u_\alpha\|_{\bullet} \tag{1.56}$$

(1.56) ni hisobga olsak (1.55) dan quyidagini hosil qilamiz

$$\frac{d}{dt}\|u_\alpha\|_{\bullet} = \alpha^{-1}\|u_\alpha\|_{\bullet}$$

Bundan quyidagi baholashga kelamiz

$$\|u_\alpha(x,t)\|_\alpha \le e^{t/\alpha}\|u^0(x)\|_{\bullet}, \tag{1.57}$$

bu esa (1.48), (1.50), (1.54) qo'zg'atilgan masalaning boshlang'ich shartlar bo'yicha turg'unligini ifodalaydi.

1.4. Nostatsionar chegaraviy teskari masala

1.4.1. Masalaning qo'yilishi

Endi chegaraviy teskari maslani nostatsionar hol uchun qaraymiz. Birjinsli jismning Ω to'g'ri kesimdagi issiqlik holatini quyidagi tenglama bilan ifodalaymiz

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = 0, \quad x \in \Omega, \qquad 0 < t \le T. \tag{1.58}$$

To’g’ridan-to’g’ri o’lchash imkoniyati mumkin bo’lmagan chegara sohasini quyidagicha belgilaymiz

$\gamma = \{x \mid x \in \partial\Omega,\ x_2 = l_2\}.$

Faraz qilaylik $\partial\Omega \setminus \gamma = \Gamma + \gamma_\bullet$, bunda

$\gamma_\bullet = \{x \mid x \in \partial\Omega,\ x_2 = 0\},$

Chegara sohasi uchun $\partial\Omega = \Gamma + \gamma + \gamma_\bullet$ Yana faraz qilamizki, $\partial\Omega \setminus \gamma$ chegara sohasi teploizolatsiyalangan:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \qquad x \in \Gamma + \gamma_\bullet, \quad 0 < t \le T, \tag{1.59}$$

qo'shimcha harorat o’lchashlari $\gamma_\bullet$ da berilgan

$$u(x,t) = g(x,t), \qquad x \in \gamma_\bullet, \qquad 0 < t \le T, \tag{1.60}$$

Bundan tashqari haroratning dastlabki taqsimoti ham berilgan:

$$u(x,0) = u^0(x), \qquad x \in \Omega. \tag{1.61}$$

(1.58)-(1.61) chegaraviy teskari masalalarda vaqt t va x_2 fazoviy o’zgaruvchi evolyutsion o’zgaruvchilar bo’ladi. Bu ikkita turli pozitsiyalardan turg’un hisoblash algoritmlarini tuzish imkoniyatini beradi.

1.4.2. Kvazimurojaat usuli

(1.58)-(1.61) chegaraviy teskari masalaning operator yozuvidan foydalanish uchun $u(x,t)$ noma’lum funksiyadan (1.60) birjinslimas chegaraviy shartlar asosida $\gamma_\bullet$ birjinsli chegaraviy shartlar asosida yangi $w(x,t)$ noma’lum funksiyaga o’tamiz. Faraz qilaylik

$$u(x,t) = w(x,t) + g(x,t),\ x \in \Omega, \qquad 0 < t \le T, \tag{1.62}$$

bu yerda $g(x,t)$ $\gamma_\bullet$ bilan butun sohada berilgan

$$\frac{\partial g}{\partial n} = 0, \qquad x \in \Gamma + \gamma_\bullet, \quad 0 < t \le T, \tag{1.63}$$

(1.62), (1.63) ga asosan (1.58)-(1.61) dan $w(x,t)$ noma’lum uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} = f(x,t), \quad x \in \Omega, \qquad\qquad 0 < t \le T, \tag{1.64}$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0, \qquad x \in \Gamma + \gamma_\bullet, \quad 0 < t \le T, \tag{1.65}$$

$$w(x,t) = 0, \quad x \in \gamma_\bullet, \qquad 0 < t \le T, \tag{1.66}$$

$$w(x,0) = w^0(x), \qquad x \in \Omega. \tag{1.67}$$

Yetarlicha silliq $w(x,t)$ funksiya uchun (1.65), (1.66) birjinsli chegarviy shartlarni qanoatlantiruvchi funkisiyalar sinfida quyidagi operator munosabatni aniqlaymiz

$$Lw = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial\ w}{\partial x_\alpha^2}, \qquad x \in \Omega, \tag{1.68}$$

U holda qayta tuzilgan (1.64)-(1.67) chegaraviy teskari masala quyidagicha yoziladi

$$\frac{\partial w}{\partial t} + Lw = f(x,t),\ x \in \Omega, \qquad\qquad 0 < t \le T, \tag{1.69}$$

U (1.67) boshlang'ich shart bilan to'ldiriladi. (1.67)-(1.69) masala nokorretligi yechimning boshlang'ich shartlar ozgina o'zgarishiga noturg'unligi bilan izohlanadi.

Nokorrekt masala taqribiy yechimini topish uchun tabiiyki kvazimurojaat usulidan foydalaniladi. Qaralayotgan teskari masalaning o'ziga xosligi shundaki, L operator o'z-o'ziga qo'shma ham emas, ishorasi ham aniqlanmagan. Taqribiy yechimni $w_\alpha(x,t)$ bilan belgilaymiz va uni quyidagi tenglamadan aniqlaymiz

$$\frac{\partial w_\alpha}{\partial t} + \alpha L^* L w_\alpha + L w_\alpha = f(x,t), \tag{1.70}$$

bu yerda $\alpha > 0$ — qo'zg'alish parametri (regulyarizatsiya parametri). Bu tenglama uchun quyidagi boshlang'ich shartdan foydalaniladi

$$w_\alpha(x,0) = w^0(x), \quad x \in \Omega. \tag{1.71}$$

$\chi = L_2(\Omega)$ ga qo'shma $\mathcal{L}$ operator ($(Lw, \upsilon) = (w, L^\bullet \upsilon)$) (1.65), (1.66), (1.68) ga asosan quyidagi ifoda bilan aniqlanadi

$$L^{\bullet}\upsilon=-\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2}, \quad 0<t\le T, \tag{1.72}$$

Bunda

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial n}=0, \qquad x\in\Gamma+\gamma_{\bullet}, \quad 0<t\le T, \tag{1.73}$$

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial n}=0, \qquad \upsilon(x,t)=0, \quad x\in\gamma, \quad 0<t\le T, \tag{1.74}$$

eslatib o'tamizki,

$\gamma=\{x\,|\,x\in\partial\Omega, x_2=l_2\}.$

(1.70), (1.71) kvazimurojaat usuli to'rtinchi tartibli parabolik tenglamadan taqribiy yechimni topishga mos keladi. $w_\alpha(x,t)$ taqribiy yechimning boshlang'ich shartlar va o'ng tomon bo'yicha turg'unligini ko'rsatamiz. Buning uchun (1.70) tenglamani $w_\alpha(x,t)$ ga ko'paytiramiz va Ω sohada integrallaymiz. Bu quyidagi tenglamaga olib keladi

$$\|w_\alpha\|\frac{d}{dt}\|w_\alpha\|+\alpha\|Lw_\alpha\|^2=-(Lw_\alpha,w_\alpha)+(f,w_\alpha)$$

O'ng tomondagi ko'paytuvchini baholash uchun

$$-(Lw_\alpha,w_\alpha)\le\alpha\|Lw_\alpha\|^2+\frac{1}{4\alpha}\|w_\alpha\|^2, \quad (f,w_\alpha)\le\|f\|\cdot\|w_\alpha\|.$$

Bu quyidagi tengsizlikni beradi

$$\frac{d}{dt}\|w_\alpha\|\le\frac{1}{4\alpha}\|w_\alpha\|+\|f\|. \tag{1.75}$$

Gronuolla lemmasiga asosan (1.71), (1.75) dan quyidagi baholashni hosil qilamiz

$$\|w(x,t)\|\le e^{t/4\alpha}\left(\|u^0(x)\|+\int_0^t\|f(x,\tau)\|d\tau\right). \tag{1.76}$$

Xuddi shunday, (1.70), (1.71) masala yechimi boshlang'ich shartlar va o'ng tomon bo'yicha turg'un

1.4.3. Fazoviy o'zgaruvchi bo'yich davomi

Endi (1.58)-(1.61) masalani fazoviy o’zgaruvchi bo’yich davomi bilan qaraymiz, u vaqt bo’yicha o’zgaruvchi sifatida keladi. Quyida soddalik uchun boshlang’ich shart nolga teng deb hisoblaymiz

(1.58)-(1.61) chegaraviy teskari masalada o’zgaruvchilarni almashtiramiz x_2 ni t ga, t ni x_2 ga, T ni l_2 va h.k. Noma’lum yechim uchun quyidagi belgilashdan foydalanamiz $w(x_1, x_2, t) = u(x_1, t_2, x_2)$

(1.58) issiqlik o’tkazuvchanlik tenglamazi quyidagi ko’rinishni oladi

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0, \ x \in \Omega, \quad 0 < t \le T. \qquad (1.77)$$

(1.59)-(1.61) chegaraviy va birjinsli shartlar (22) o’zgartirilgan tenglama uchun quyidagicha beriladi

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}(x,t) = 0, \qquad x_1 = 0, L_1, \qquad (1.78)$$

$$w(x,t) = 0, \quad x_2 = 0 \qquad (1.79)$$

ikkita boshlang’ich shartlar (qarang(1.59), (1.60))

$$w(x,0) = w^0(x), \quad x \in \Omega, \qquad (1.80)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \qquad (1.81)$$

Faraz qilaylik

$$L_1 w = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \qquad (1.82)$$

(1.78) shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to’plamida. Xuddi shunday operatorni ham aniqlaymiz

$$L_2 w = \frac{\partial w}{\partial x_2} \qquad (1.83)$$

(1.79) chegaraviy shartlar bilan.

(1.82), (1.83) ni hisobga olsak (22)-(26) masala quyidagi tenglama bilan yoziladi

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - L_1 w - L_2 w = 0, \qquad x \in \Omega, \qquad 0 < t \le T. \tag{1.84}$$

(1.84) tenglama (1.80), (1.81) boshlang'ich shartlar bilan to'ldiriladi. Ta'kidlash lozimki, bu masalaning $L_1 = L_1^* \ge 0$ operatori $\chi = L_2(\Omega)$ da berilgan va L_2 - o'z-o'ziga qo'shma.

Bu yerda ham (1.70), (1.71), (1.80) masala kabi kvazimurojaat usulidan foydalanamiz.

(1.84) tenglama uchun Koshi masalasi taqribiy yechimi uchun (1.70), (1.71) asosida tuzilgan kvazimurojaat usuli variantini qarymiz. Buning uchun yechimni quyidagi tenglamadan topamiz

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 w_\alpha}{\partial t^2} - L_1 w_\alpha - L_2 w_\alpha + \alpha L_1^2 w_\alpha + \alpha L_1^* L_2 w_\alpha = 0, \\ x \in \Omega, 0 < t \le T.\end{gathered} \tag{1.85}$$

Bu tenglama quyidagi boshlang'ich shartlar bilan to'ldiriladi

$$w_\alpha(x,0) = w^0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.86}$$

$$\frac{\partial w_\alpha}{\partial t}(x,0) = 0, \tag{1.87}$$

(1.85)-(1.87) qo'zg'atilgan masala uchun quyidagi apriot baho o'rinli

$$\left\| \frac{\partial w_\alpha}{\partial t}(x,t) \right\|^2 + \alpha \| L_1 w_\alpha(x,t) \|^2 + \alpha \| L_2 w_\alpha(x,t) \|^2 \le$$

$$\le exp\left\{ 2\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1/2} t \right\} (\alpha \| L_1 w^0(x) \|^2 + \alpha \| L_2 w^0(x) \|^2). \tag{1.88}$$

(1.85) tenglamani $\chi = L_2(\Omega)$ da $\partial w_\alpha / \partial t$ ga skalyar ko'paytiramiz va quyidagini hosil qilamiz

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\| \frac{\partial w_\alpha}{\partial t} \right\|^2 + \alpha \| L_1 w_\alpha \|^2 + \alpha \| L_2 w_\alpha \|^2 \right) =$$

$$= \left(L_1 w_\alpha, \frac{\partial w_\alpha}{\partial t} \right) + \left(L_2 w_\alpha, \frac{\partial w_\alpha}{\partial t} \right) + \left(L_2 w_\alpha, \frac{\partial w_\alpha}{\partial t} \right). \tag{1.89}$$

(1.89) ning o'ng tomonidagi ko'paytuvchi uchun

$$\left(L_\beta w_\alpha, \frac{\partial w_\alpha}{\partial t}\right) = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial w_\alpha}{\partial t}\right\|^2 + \alpha\left\|L_\beta w_\alpha\right\|^2\right), \qquad \beta = 1,2. \tag{1.90}$$

(1.90), (1.89) da (1.86), (1.87) boshlang'ich shartlarni hisobga olsak (1.88) baholashga olib keladi.

(1.80), (1.81), (1.84) masala taqribiy yechimi uchun kvazimurojaat usulini qo'llashning ikkinchi variant quyidagi tenglama va (1.86), (1.87) boshlang'ich shartlardan foydalanishga asoslangan

$$\frac{\partial^2 w_\alpha}{\partial t^2} - L_1 w_\alpha + L_2 w_\alpha + \alpha L_1^2 \frac{\partial w_\alpha}{\partial t} + \alpha L_2 L_2^* \frac{\partial w_\alpha}{\partial t}, \tag{1.91}$$

(1.86), (1.87), (1.91) tenglama turg'unligini tekshirishda (1.91) tenglamani birinchi tartibli tenglamalar sistemasi shaklida o'zgartirish qulay.

$U = \{w_1, w_2\}$ vektorni va χ^2 fazoni $\chi : \chi^2 = \chi \oplus \chi.$ fazolarning yig'indisi shaklida aniqlaymiz. χ^2 da qo'shish koordinata bo'yicha olib boriladi, skalyar ko'paytma esa quyidagicha aniqlanadi: $(U,V) = (w_1, \upsilon_1) + (w_2, \upsilon_2).$ $w_1 = w_\alpha,$ $w_2 = \frac{\partial w_\alpha}{\partial t}$ ni aniqlaymiz va (1.91) tenglamani birinchi tartibli tenglamalar sistemasi ko'rinishida aniqlaymiz $(U_\alpha = \{w_1, w_2\})$:

$$\frac{\partial U_\alpha}{\partial t} + pU_\alpha = 0, \tag{1.92}$$

bu yerda

$$\rho = \begin{bmatrix} 0 & -E \\ -(L_1 + L_2) & \alpha(L_1^2 + L_2 L_2^*) \end{bmatrix} \tag{1.93}$$

(1.92) tenglama boshlang'ich shartlar bilan to'ldiriladi

$$U_\alpha(x,0) = U^0 = \{w^0, 0\}. \tag{1.94}$$

Aytilgan belgilashlar asosida

$$\|U_\alpha\|^2 = \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 = \|w_\alpha\|^2 + \left\|\frac{\partial w_\alpha}{\partial t}\right\|^2.$$

(1.92)-(1.94) masala uchun quyidagi aprior baholash o'rinli

$$\|U_\alpha(x,t)\|^2 = e^{(1+1/\alpha)t}\|U_\alpha(x,0)\|^2 \ . \tag{1.95}$$

(1.93) ni hisobga olsak quyidagiga ega bo'lamiz

$$\|U_\alpha\|^2 = \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 = \|w_\alpha\|^2 + \left\|\frac{\partial w_\alpha}{\partial t}\right\|^2.$$

(1.92) ni U_α ga skalyar ko'paytirib, quyidagiga ega bo'lamiz

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|w_1\|^2 + \|w_2\|^2) + \alpha\|L_1 w_2\|^2 + \alpha\|L_2^* w_2\|^2 =$$

$$= (L_1 w_1, w_2) + (L_2 w_1, w_2) + (w_1, w_2). \tag{1.96}$$

O'ng tomon uchun quyidagi baholashni ishlatamiz

$$(L_\beta w_1, w_2) \le \alpha\|L_\beta^* w_2\|^2 + \frac{1}{4\alpha}\|w_1\|^2, \qquad \beta = 1,2,$$

$$(w_1, w_2) \le \varepsilon\|w_2\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|w_1\|^2.$$

$\varepsilon = 1/2$ ni tanlaymiz va (1.96) ga qo'yib, (1.95) baholashga kelamiz.

(1.95) dan quyidagi baholashga kelamiz

$$\|w_\alpha(x,t)\|^2 + \left\|\frac{\partial}{\partial t} w_\alpha(x,t)\right\|^2 \le e^{(1+1/\alpha)t}\|w^0(x)\|^2$$

Bu (1.86), (1.87), (1.91) qo'zg'atilgan masalaning boshlang'ich shartlarga nisbatan turg'unligini ifodalaydi.

1.5. Issiqlik almashinuvining koeffisiyentli teskari masalalari

1.5.1. Model masala

Issiqlik almashinuvi teskari masalalarining muhim sinfini koeffisiyentli teskari masalalar tashkil etadi. Odatiy masalalardan biri bu – noma'lum issiqlik sig'imi va issiqlik o'tkazuvchanlik koeffisiyentlarini sohaning ichki qismlarida haroratni qo'shimcha o'lchash yordamida aniqlash masalasidir. Bunday identifikatsiya masalasi chiziqlimas bo'lib, yechim yagonaligi masalasini hal qilishga to'g'ri keladi. Xususan, issiqlik o'lchashlarni bajarishda issiqlik yuklanishlarini maxsus tashkil etishga to'g'ri keladi. Bu savolni batafsil o'rganmasdan, faqat soda mulohazalar bilan cheklanamiz.

Noma'lum $c(u)$ va $k(u)$ bog'liklarni topishda, o'z-o'zidan o'lchashlarni shunday tashkil etish kerakki, soha ichida harorat qandaydir boshlang'ich qiymatdan boshlab monoton o'sishi (yoki kamayishi) lozim. Bu holda u funksiyaning qiymatlar sohasi o'sadi, shu bilan birga vaqtning har bir keyingi momentida $c(u)$ va $k(u)$ noma'lum funksional bog'liqliklarni tiklashga ham umid qilish mumkin.

Model koeffisiyentli teskari masalani quyidagicha qo'yamiz. To'g'ri to'rtburchakli Ω sohada qattiq jismning haroratdan bog'liq bo'lgan issiqlik xossalari quyidagi tenglama bilan ifodalanadi

$$c(u)\frac{\partial u}{\partial t} + L(k)u = 0, \qquad x \in \Omega, \qquad 0 < t \le T, \tag{1.97}$$

bu yerda (izotrop muhit)

$$L(k)\upsilon = \sum_{\beta=1}^{2} L_\beta(k)\upsilon, \qquad L_\beta(k)\upsilon = -\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(k(u)\frac{\partial \upsilon}{\partial x_\beta}\right). \tag{1.98}$$

(1.97), (1.98) tenglamalar uchun ikkinchi jinsli chegaraviy shartlarni qaraymiz:

$$k(u)\frac{\partial u}{\partial n} = q(x,t), \quad x \in \Omega, \qquad 0 < t \le T, \tag{1.99}$$

bunda $q(x,t) = 0.$ Boshlang'ich shartni quyidagicha olamiz

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{1.100}$$

Chegaraviy va boshlang'ich shartlarni shunday berilsa jism ichida harorat monoton o'sadi.

(1.97)-(1.99) da $c(u)$ issiqlik sig'imi va $k(u)$ issilik o'tkazuvchanlik koeffitsiyentlari noma'lum. Ularni aniqlash uchun jism ichida tanlangan bir qancha x^m, $m = 1,2,\ldots,M$ nuqtalarda olingan qo'shimcha o'lchash natijalaridan foydalaniladi

$$u(x^m,t) = g_m(t), \quad m = 1,2,\ldots,M. \tag{1.101}$$

$\{c(u), k(u), u(x,t)\}$ funksiyalarni (1.97)-(1.101) shartlar bo'yicha tiklash masalasi qo'yiladi (issiqlik almashinuvining koeffisiyentli teskari masalasi).

(1.97)-(1.101) teskari masalaning o'ziga xosligi shundaki, vaqtga bog'liq funksiya $g_m(t)$, $m = 1,2,..M$ (haroratni qo'shimcha o'lchash) yordamida $c(u), k(u)$ funsional bog'lanishlarni tiklash lozim. Bundan tashqari bu masala, retrospektiv va chegaraviy teskari masalalardan farqli ravishda chiziqlimasdir.

1.5.2. Parametrli identifikatsiyalash

Masalaning yuqori darajada qiyinligini hisobga olgan holda teskari masalalarning asosiy yondashuvlarini faqat issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti noma'lum bo'lgan hol uchun qaraymiz, ya'ni (1.97)-(1.101) da $c(u)$ issiqlik sig'imi koeffitsiyenti berilgan deb hisoblaymiz. Umumiy holda $c(u)$ va $k(u)$ lar noma'lum bo'lgan holga o'tish faqat texnik qiyinchiliklar tug'diradi.

(1.97)-(1.101) koeffitsiyentli teskari masalaning yechimiga yaqinlashishning an'anaviy yonfashuvi parametrli identifikatsiyalashdir. Chekli $\eta_\beta(u)$, $\beta = 1,2,\dots,K$ bazis tanlanadi va issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti quyidagi ko'rinishda izlanadi

$$k(u) = \sum_{\beta=1}^{K} k_\beta \eta_\beta(u). \tag{1.102}$$

Shuning uchun masala yoyilma koeffitsiyentlari k_β, $\beta = 1,2,\dots,K$ larni topishga keltiriladi. Shunga mos chekli o'lchamdagi optimizatsiya masalasini qo'yamiz. Quyidagi funksionalni qaraymiz

$$J_\alpha = \sum_{m=1}^{N} \int_0^T \left(u(x^m, t) - g_m(t)\right)^2 dt + \alpha \sum_{\beta=1}^{K} k_\beta^2 . \tag{1.103}$$

k_β, $\beta = 1,2,\dots,K$ larni aniqlash (1.103) funksional minimumidan (1.97)-(1.100), (1.102) larni hisobga olgan holda toppish masalasi qo'yiladi.

(1.102) yoyilma koeffitsiyentlari M funksiyaning $J_\alpha = J_\alpha(k_1, k_2, \dots, k_K)$ o'zgaruvchilarga nisbatan minimum shartidan topiladi:

$$\frac{\partial J_\alpha}{\partial k_\beta} = 0, \qquad \beta = 1,2,\ldots,K. \tag{1.104}$$

(1.104) dan

$$\frac{\partial J_\alpha}{\partial k_\beta} = 2\sum_{m=1}^{M}\int_0^T \left(u(x^m,t) - g_m(t)\right)\frac{\partial u}{\partial k_\beta}(x^m,t)dt + 2k_\beta \tag{1.105}$$

Bu hosilani hisoblash uchun dastlab $\upsilon(x,t) = \partial u/\partial k_\beta$ funksional uchun masala qo'yiladi. Bunda quyidagini hisobga olamiz

$$\frac{\partial k}{\partial k_\beta} = \eta_\beta(u),$$

bevosita (1) tenglamadan quyidagiga ega bo'lamiz

$$c(u)\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\upsilon + L(k)\upsilon + L\left(\frac{dk}{du}\upsilon + \eta_\beta(u)\right)u = 0$$
$$x \in \Omega, 0 < t \le T, \tag{1.106}$$

bunda dk/du hosila berilgan k_β, $\beta = 1,2,\ldots,K$ parametrlar bo'yicha hisoblanadi.

(1.99) chegaraviy shartdan

$$k(u)\frac{\partial \upsilon}{du} + \left(\frac{dk}{du}\upsilon + \eta_\beta(u)\right)\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \qquad 0 < t \le T, \tag{1.107}$$

(1.100) boshlang'ich shartdan esa

$$\upsilon(x,0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{1.108}$$

Qo'shma holat masalasini olish uchun, har doimgiday, (10) tenglamani qandaydir $\rho(x,t)$ funksiyaga ko'paytiramiz qilamiz va Ω sohada, vaqt bo'yicha 0 dan T gacha integrallaymiz.

Faraz qilaylik

$$\rho(x,T) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1.109}$$

u holda integrallab quyidagiga ega bo'lamiz

$$-\int_\Omega\int_0^T \upsilon c(u)\frac{\partial \rho}{\partial t}dxdt + \int_\Omega\int_0^T \rho\left[L(k)\upsilon + L\left(\frac{\partial k}{\partial u}\upsilon\right)u\right]dxdt =$$

$$=-\int_{\Omega}\int_0^T \rho L\big(\eta_\beta(u)\big)u\,dxdt. \qquad (1.110)$$

$\rho(x,t)$ uchun quyidagi chegaraviy shart bajariladi deb hisoblaymiz

$$k(u)\frac{\partial\rho}{\partial n}=0,\ x\in\partial\Omega,\quad 0<t\le T. \qquad (1.111)$$

U holda (1.110) da (1.98) va (1.107) hisobga olib quyidagiga ega bo'lamiz

$$-\int_{\Omega}\int_0^T \upsilon c(u)\frac{\partial\rho}{\partial t}dxdt+\int_{\Omega}\int_0^T \upsilon kL(1)\rho dxdt=$$

$$=-\sum_{\gamma=1}^{2}\int_{\Omega}\int_0^T \eta_\beta(u)\frac{\partial u}{\partial x_\gamma}\frac{\partial\rho}{\partial x_\gamma}dxdt, \qquad (1.112)$$

(1.98) belgilashni ham hisobga olsak

$$L(1)\upsilon=-\sum_{\beta=1}^{2}\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x_\beta^2}$$

bu esa Laplas operatorining o'zi.

(1.105) ni e'tiborga olgan holda, tenglamadan qo'shma holatni aniqlaymiz

$$-c(u)\frac{\partial\rho}{\partial t}+kL(1)\rho+\sum_{m=1}^{M}\delta\big(x-x^m\big)\big(u(x,t)-g_m(t)\big)$$
$$x\in\Omega, 0<t\le T, \qquad (1.113)$$

bu yerda $\delta(x)$ — δ-funksiya. U holda (1.113) dan quyidagiga ega bo'lamiz

$$\sum_{m=1}^{M}\int_0^T\big(u(x^m,t)-g_m(t)\big)\upsilon(x^m,t)dt=\sum_{\gamma=1}^{2}\int_{\Omega}\int_0^T \eta_\beta(u)\frac{\partial u}{\partial x_\gamma}\frac{\partial\rho}{\partial x_\gamma}dxdt.$$

(1.105) dan izlanayotgan hosila uchun quyidagiga ega bo'lamiz

$$\frac{\partial J_\alpha}{\partial k_\beta}=2\sum_{\gamma=1}^{2}\int_{\Omega}\int_0^T \eta_\beta(u)\frac{\partial u}{\partial x_\gamma}\frac{\partial\rho}{\partial x_\gamma}dxdt+2k_{\beta.}, \qquad (1.114)$$

Xuddi shunday, hosilani k_β, $\beta=1,2,\dots,K$ koeffitsiyentlar bo'yicha alohida hisoblash uchun dastlab (1.97)-(1.100) masala $u(x,t)$, ga nisbatan yechiladi, keyin $\rho(x,t)$ qo'shma holat (1.109), (1.111), (1.113) masala yechimi sifatida aniqlanadi, keyin alohida hosila (1.114) bo'yicha hisoblanadi. Iteratsion jarayonni keying qadamlari ham odatiy ko'rinishda tashkil etiladi.

Endi, issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyent berilgan hol uchun issiqlik sigimi koeffitsiyentini aniqlash aniqlash masalasini qaraqmiz. Faraz qilaylik, endi

$$c(u)=\sum_{\beta=1}^{K}\chi_\beta\eta_\beta(u). \tag{1.115}$$

bo'lsin.

Tabiiyki quyidagi funksionalni qaraymiz

$$J_\alpha=\sum_{m=1}^{M}\int_0^T\left(u(x^m,t)-g_m(t)\right)^2dt+\alpha\sum_{\beta=1}^{K}\chi_\beta^2. \tag{1.116}$$

χ_β, $\beta=1,2,\ldots,K$ koeffitsiyentlarni toppish uchun quyidagi tenglama ichlatiladi

$$\frac{\partial J_\alpha}{\partial\chi_\beta}=0,\qquad \beta=1,2,\ldots,K.$$

(1.103) dan

$$\frac{\partial J_\alpha}{\partial\chi_\beta}=2\sum_{m=1}^{M}\int_0^T\left(u(x^m,t)-g_m(t)\right)\frac{\partial u}{\partial\chi_\beta}(x^m,t)dt+2\chi_\beta. \tag{1.117}$$

Quyidagini hisobga olsak

$$\frac{\partial c}{\partial\chi_\beta}=\eta_\beta(u),$$

(1.97) tenglamadan $\upsilon(x,t)=\partial u/\partial\chi_\beta$ uchun quyidagiga ega bo'lamiz

$$c(u)\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\eta_\beta(u)\frac{\partial u}{\partial t}+L(k)\upsilon+L\left(\frac{d(k)}{du}\upsilon\right)u=0,$$
$$x\in\Omega,0<t\le T. \tag{1.118}$$

(1.99) dan

$$k(u)\frac{\partial\upsilon}{\partial n}+\frac{dk}{du}\frac{\partial u}{\partial n}\upsilon=0,\quad x\in\partial\Omega,\qquad 0<t\le T, \tag{1.119}$$

(1.100) boshlang'ich shart esa (1.108) ni beradi.

(1.109) va (1.111) bajarilsa (1.118), (1.119) dan quyidagiga ega bo'lamiz

$$-\int_\Omega\int_0^T\upsilon\frac{\partial}{\partial t}(c(u)p)dxdt-\sum_{\gamma=1}^{2}\int_\Omega\int_0^T\upsilon k(u)\frac{\partial^2p}{\partial x_\gamma^2}dxdt=-\int_\Omega\int_0^T\eta_\beta(u)\frac{\partial u}{\partial t}pdxdt. \tag{1.120}$$

(1.120) ga asosan $\rho(x,t)$ ni quyidagi tenglamadan aniqlaymiz

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(c(u)p\right)-\sum_{\gamma=1}^{2}k(u)\frac{\partial^2 p}{\partial x_\gamma^2}+\sum_{m=1}^{M}\delta\left(x-x^m\right)\left(u(x,t)-g_m(t)\right)=0, \qquad (1.121)$$
$$\mathrm{x}\in\Omega,\ 0<t\leq T.$$

U holda hosila uchun quyidagiga ega bo'lamiz

$$\frac{\partial \mathrm{J}_\alpha}{\partial\chi_\beta}=2\int_\Omega\int_0^T\eta_\beta(u)\frac{\partial u}{\partial t}dxdt+2\chi_\beta\,.$$

Bu yerda ham hosilani hisoblash uchun (1.121) tenglama va (1.109), (1.111) shartlar yechimidan qo'shma holatni aniqlash yetarli.

Umumiy holda ikkala $c(u),k(u)$ koeffitsiyentlarni (6), (19) ga asosan parametrli identikikatsiya qilish uchun ikkita qo'shma masalani yechish talab etiladi. Ayirmali masalaga o'tishda minimizatsialanayotgan funsional approksimatsiyasini tanlashda aosiy va qo'shma msala uchun tuzilgan ayirmali sxemalarni moslashtirishga to'g'ri keladi.

1.5.3. Qadamli identifikatsiyalash

Yuqorida issiqlik sig'imi va issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyentlarini vaqtning barcha momentlarida berilgan barcha qo'shimcha ma'lumotlardan foydalangan holda aniqlash masalasini qisqacha ko'rib chiqdik. Bu global identifikatsiyalash deyiladi.

Nostatsionar masalalarning u yechimdan bog'liq bo'lgan chiziqlimas koeffitsiyentlarini idendifikatsiya qilishda tabiiy ravishda koeffitsiyent ketma-ket aniqlanadigan yondashuvdan foydalaniladi. Bu holda vqatning t' dan t'' gacha bo'lgan momentidagi qo'shimcha shartlar u' va u'' yechimlarning yangi o'zgarish oralig'I uchun ishlatiladi. Bunday algortim tabiiyki ketma-ket deb nomlanadi. Uni amalga oshirish uchun vaqt bo'yicha diskretizatsiyadan foydalaniladi, shuning uchun bu yondashuvda koeffitsiyentni aniqlash bilan bog'liq hisoblashlarni tashkil etish vaqtning bir qatlamidan ikkinchi qatlamiga o'tish orqali amalga oshiriladi (qadamli identifikatsiyalash).

(1.97)-(1.101) masalada issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyentini aniqlashga batafsil to'xtalamiz (issiqlik sig'imi koeffitsiyenti $c(u)$ ma'um deb faraz qilamiz). Vaqt bo'yicha o'zgarmas $\tau > 0$ qadam bilan to'r kiritamiz va (1.97)-(1.101) ga mos differensial-ayirmali masalani hosil qilamiz. (1.97) tenglama approksimatsiyasida taqribiy $y_n(x)$ yechimni toppish uchun oddiy oshkormas sxemadan foydalanamiz:

$$c(y_{n+1})\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + L(k(y_{n+1}))y_{n+1} = 0, \quad x \in \Omega, n = 0,1,,\ldots \tag{1.122}$$

Bu tenglamaga chegaraviy va boshlang'ich shartlar qo'shiladi

$$k(y_{n+1})\frac{\partial y_{n+1}}{\partial n} = q(x,t), \quad x \in \partial\Omega, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{1.123}$$

$$y_0(x) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{1.124}$$

Faraz qilaylik

$$0 < \tilde{y}_1 < \tilde{y}_2 < \ldots < \tilde{y}_{n-1} < \tilde{y}_n < \tilde{y}_{n+1} < \ldots,$$

bu yerda $\tilde{y}_n = \max\limits_{x\in\Omega} y_n(x)$, ya'ni, har bir vaqt oralig'ida yechim maksimal qiymatining monotonligi faraz qilinayapti. Bunga mos chegaraviy shart yuqorida qaralgan edi.

Noma'lum issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti $k(u)$ ni qadamli toppish algotritmlaridan biri (issiqlik sig'imi koeffitsiyenti $c(u)$ ni toppish ham xuddi shunday) quyidagicha. $y < \tilde{y}_n$ da $k(y)$ koeffitsiyenti aniqlangan va $k_n(y)$ ga deb hisoblaymiz. Xususan, (1.97)-(1.101) masalani yechishda ko'pincha $k(0)$ ma'lum deb hisoblanadi. Yechimning yangi $\tilde{y}_n \le y \le \tilde{y}_{n+1}$ ($\tilde{y}_{n+1}$ qiymatning o'zi ham noma'lum) o'zgarish oralig'ida $k(y)$ koeffitsiyentni r - tartibli splayn ko'rinishida izlaymiz. Aytilganlarni hisobga olsak quyidagiga ega bo'lamiz

$$k_{n+1}(y) = k_{n+1}(\tilde{y}_n) + \frac{d}{dy}k_{n+1}(\tilde{y}_n)(y - \tilde{y}_n) + \ldots +$$

$$\frac{d^{r-1}}{dy^{r-1}}k_{n+1}(\tilde{y}_n)\frac{1}{(r-1)!}(y - \tilde{y})^{r-1} + \frac{a_{n+1}}{r!}(y - \tilde{y}_n)^r, \quad \tilde{y}_n \le y \le \tilde{y}_{n+1}. \tag{1.125}$$

(1.125) da a_{n+1} — noma'lum koeffitsiyent

$$\frac{d^s}{dy^s}k_{n+1}(\tilde{y}_n)=\frac{d^s}{dy^s}k_n(\tilde{y}_n)$$

esa $0\le s\le r-1$ da berilgan. Hisoblashlarni boshlash uchun $n=0$ da bu qiymatlarni berish lozim. Soddalik uchun bo'lakli-chiziqli identifikatsiya (birinchi tatibli splayn) holi bilan cheklanamiz, u holda (1.125) quyidagicha bo'ladi

$$k_{n+1}(y)=k_{n+1}(\tilde{y}_n)+a_{n+1}(y-\tilde{y}_n),\qquad \tilde{y}_n\le y\le \tilde{y}_{n+1}. \tag{1.126}$$

Bunday taqribiy yechimni topishda qo'shimcha ma'lumot ((1.101) shart) har bir vaqt qatlami $n=1,2,\ldots$ da faqat bitta a_{n+1} shartni aniqlasjha foydalaniladi. Bu maqsadda tabiiyki quyidagi funksionaldan foydalaniladi

$$J_\alpha(a_{n+1})=\sum_{m=1}^{M}(y_{n+1}(x^m)-g_m(t_{n+1}))^2+\alpha a_{n+1}^2. \tag{1.127}$$

(1.125) shartdan aniqlanadigan $k(y)=k_{n+1}(y)$ koeffitsiyentli (1.122)-(1.124) ektremal masala oddiy gradiyent usuli bilan yechilishi mumkin. Quyidagi belgilash kiritamiz

$$\upsilon_{n+1}=\frac{dy_{n+1}}{da_{n+1}}$$

bevosita (1.126) dan quiydagini hosil qilamiz

$$\frac{dJ_\alpha(a_{n+1})}{da_{n+1}}=2\sum_{m=1}^{M}(y_{n+1}(x^m)-g_m(t_{n+1}))\upsilon_{n+1}+2\alpha a_{n+1}. \tag{1.128}$$

(1.122) dan υ_{n+1} uchun oddiy bo'lakli-chiziqli approksimatsiya holi (1.126) dan quyidagi tenglmani hosil qilamiz

$$c(y_{n+1})\frac{\upsilon_{n+1}}{\tau}+\frac{dc}{du}(y_{n+1})\frac{y_{n+1}}{\tau}\upsilon_{n+1}+L(k_{n+1}(y_{n+1}))\upsilon_{n+1}+$$

$$+L(y_{n+1}-\tilde{y}_n+a_{n+1}\upsilon_{n+1})y_{n+1}=0,\quad x\in\Omega,\quad n=0,1,\ldots. \tag{1.129}$$

(1.123) dan chegaraviy shartlarni olamiz

$$k(y_{n+1})\frac{\partial\upsilon_{n+1}}{\partial n}+(y_{n+1}-\tilde{y}_n+a_{n+1}\upsilon_{n+1})\frac{\partial y_{n+1}}{\partial n}=0,$$
$$x\in\partial\Omega,\qquad n=0,1,\ldots. \tag{1.130}$$

(1.129), (1.130) dan (1.128) ni hisobga olgan holda $p_{n+1}(x)$ qo'shma holat uchun quyidai masalani hosil qilamiz

$$c(y_{n+1})\frac{p_{n+1}}{\tau}+\frac{dc}{du}(y_{n+1})\frac{y_{n+1}}{\tau}p_{n+1}+k_{n+1}(y_{n+1})L(1)p_{n+1}-$$

$$\sum_{m=1}^{M}\delta(x-x^m)(y_{n+1}(x)-g_m(t_{n+1}))=0,\quad x\in\Omega, \tag{1.131}$$

$$k(y_{n+1})\frac{\partial p_{n+1}}{\partial n}=0,\quad x\in\partial\Omega,\quad n=0,1,\dots \tag{1.132}$$

(1.128) ni hisobga olsak quyidagiga ega bo'lamiz

$$\frac{dJ_\alpha(a_{n+1})}{da_{n+1}}=2\sum_\gamma\int_\Omega(y_{n+1}-\tilde{y}_n)\frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_\gamma}\frac{\partial p_{n+1}}{\partial x_\gamma}dx+2\alpha a_{n+1}.$$

Shunday qilib, har bir vaqt qatlamida (1.122), (1.123) va (1.131), (1.132) elleptik chegaraviy masala yechiladi. Noma'lum a_{n+1} parametrni aniqlash uchun gradiyent protseduralardan foydalaniladi.

Xuddi shuday usulda umumiyroq bo'lgan hol: issiqlik sig'imi va issiqlik o'tkazuvchanliki koeffitsiyentlarini qadamli tiklash holi ham qaraladi. (1.122)-(1.124) differensial-ayirmali masalani diskretizatsiya qilishda ham prinsipial o'zgarishlar bo'lmaydi. (1.122) sxema o'rnida tejamkor sxemalardan ham foydalanish mumkin.

1.5.4. Soddalashtirilgan iteratsiyon usul

Issiqli o'tkazuvchanlik koeffitsiyentini (a_{n+1} parametrni) tiklash uchun soddaroq (gradiyentli bo'lmagan) prodsedurani tashkil qlish mumkinligini ta'kidlab o'tamiz. (1.126) ni hisobga olib quyidagini qo'yamiz

$$k(y)=b_1(y)+a_{n+1}b_2(y),\quad 0\le y\le\tilde{y}_{n+1}, \tag{1.133}$$

bu yerda $b_\beta(y),\ \beta=1,2$ — berilgan funksiyalar, masalan,

$$b_2(y)=\begin{cases}0, & 0\le y\le\tilde{y}_n\\ y-\tilde{y}_n, & \tilde{y}_n<y\le\tilde{y}_{n+1}.\end{cases}$$

a_{n+1} parametrga s- iteratsiyadagi iteratsion yaqinlashishni θ^s bilan, unga mos haroratni υ^s bilan belgilaymiz.

θ^{s+1} va υ^{s+1} ni quiydagi tenglamadan aniqlaymiz

$$c(y_{n+1})\frac{\upsilon^{s+1}-y_n}{\tau}+L(b_1(\upsilon^s))\upsilon^{s+1}+\theta^{s+1}L(b_2(\upsilon^s))\upsilon^s=0, \quad x\in\Omega, \quad n=0,1,\ldots \tag{1.134}$$

chegaraviy shartlarni esa

$$b_1(\upsilon^s)\frac{\partial\upsilon^{s+1}}{\partial n}+\theta^{s+1}b_2(\upsilon^s)\frac{\partial\upsilon^s}{\partial n}=q(x,t), \quad x\in\Omega, \quad n=0,1,\ldots\ . \tag{1.135}$$

(1.134), (1.135) dan foydalanish (1.122), (1.123) chiziqlimas chegaraviy masalaning oddiy chiziqlilashtirilgan holiga mos keladi. θ^{s+1} ni aniqlash uchun quyidagi funksional ishlatiladi

$$J_\alpha(\theta^{s+1})=\sum_{m=1}^{M}(\upsilon^{s+1}(x^m)-g_m(t_{n+1}))^2. \tag{1.136}$$

(1.134)-(1.136) masala yechimini quyidagi ko’rinishda izlash qulay

$\upsilon^{s+1}(x)=w^{s+1}(x)+\theta^{s+1}z^{s+1}(x).$

Faraz qilaylik, $w^{s+1}(x)$ quyidagi tenglamani qanoatlantirsin

$$c(y_{n+1})\frac{w^{s+1}-y_n}{\tau}+L(b_1(\upsilon^s))w^{s+1}=0, \quad x\in\Omega, \quad n=0,1,\ldots \tag{1.137}$$

Chegaraviy shartlardan

$$b_1(\upsilon^s)\frac{\partial w^{s+1}}{\partial n}=q(x,t_{n+1}), \quad x\in\partial\Omega, \quad n=0,1,\ldots\ . \tag{1.138}$$

$z^{s+1}(x)$ funksiya uchun (1.134), (1.137) dan quyidagi tenglamani olamiz

$$c(y_{n+1})\frac{\upsilon^{s+1}-y_n}{\tau}+L(b_1(\upsilon^s))\upsilon^{s+1}+\theta^{s+1}L(b_2(\upsilon^s))\upsilon^s=0, \quad x\in\Omega, \quad n=0,1,\ldots, \tag{1.139}$$

qaysiki (qarang (1.135), (1.138)) quyidagi shartlar bilan to’ldiriladi

$$b_1(\upsilon^s)\frac{\partial z^{s+1}}{\partial n}+b_2(\upsilon^s)\frac{\partial\upsilon^s}{\partial n}=0, \quad x\in\partial\Omega, \quad n=0,1,\ldots. \tag{1.140}$$

θ^{s+1} uchun (1.136) dan quyidagini hosil qilamiz

$$\theta^{s+1} = -\frac{\sum_{m=1}^{M}(w^{s+1}(x^m) - g_m(t_{n+1}))z^{s+1}(x^m)}{\sum_{m=1}^{M}(z^{s+1})^2 + \alpha} \tag{1.141}$$

Shunday qilib, masalani iteratsion yechish ikkita (1.138), (1.139) va (1.139), (1.140) masalalarni yechish va (1.141) formuladan foydalanishga asoslangan. Ta'riflanagn iteratsion jarayon oddiy strukturaga ega va iteratsiya parametrini tanlash jarayoniga bog'liq emas.

2-BOB. ELASTIKLIK REJIMIDA SUYUQLIKLAR SIZISHINING KOEFFISIYENTLI TESKARI MASALALARI

2.1. Yer osti gidromexanikasining teskari masalalari

Bosim tiklanishi grafiklarini almashtirishga asoslangan quduqlar va qatlamlarni tadqiq etuvchi gidrodinamik usullar quyidagi monografiyalarda batafsil va yaxshi bayon etilgan [18, 19, 20, 21]. Bu usullarning taraqqiyotiga K.S.Basniyev, G.I.Barenblatt, S.N.Buzinov, A.X.Mirzajanzada, V.N.Nikolayevskiy, I.A.Charныy, E.B.Chekalyuk, V.N.Щyelkachev, D.Xorner, M.Masket, S.Miller, I.Uorren, R.Rut va boshqalar katta hissa qo'shishgan.

Sizish jarayonini yorituvchi tenglama uchun qo'yilgan teskari masala real neft konining qandaydir matematik modelini ifodalaydi. Shuning uchun quyidagi qo'yilgan teskari masala tabiiy hisoblanadi: berilgan matematik modellardan real neft qatlami haqidagi berilgan ma'lumotlarga mos keluvchilari ajratib olinadi. Bunday ma'lumotlar sifatida odatda ishlab chiqarish ma'lumotlari asosida tuzilgan quduq tubi bosimi, quduqlarning debiti va taqribiy gidroo'tkazuvchanlik maydoni kabilar oldinga chiqadi.

Teskari masala yechimi ma'lum quduq tubi bosimi va debiti qiymatlaridan tuzilgan qandaydir minimumga erishuvchi funksional funksiya sifatida beriladi. Bu funksional sifatida odatda kuzatiluvchi va hisoblanuvchi quduq tubi bosimi qiymatlari orasidagi tafovut olinadi:

$$Z = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{n_i} \left[P_i^H(t_j) - P_i^B(t_j) \right]^2 ,$$

bunda $P_i^H(t_j)$, $P_i^B(t_j)$ – kuzatiluvchi va hisoblanuvchi i- quduqning t_j vaqt momentiga mos quduq tubi bosimlari.

Har xil bir fazali sizishning teskari masalalarning qo'yilishi va yechilishi [22-25] ishlarda berilgan. Ikki fazali sizishning teskari masalalari bo'yicha obzor [26] monografiyada keltirilgan.

Elastik sizish rejimi har xil qo'yilgan koeffisiyentli teskari masalalar [27-33] ishlarda qaralgan. Elastik-plastik sizish rejimi uchun koeffisiyentli teskari masalalar [34-39] qaralgan.

2.2. Elastiklik rejimida quduqni tadqiq etish ma'lumotlari bo'yicha qatlamning sizish-hajmiy parametrlarini baholash

Quduq tubi bosimi o'zgarishini o'lchash nostasionar jarayonlarni o'rganishga asoslangan qatlam va quduqlarni tadqiq etuvchi usullar elastiklik rejimi nazariyasi bilan bog'liq. Quduqni ishlatish yoki to'xtatishdan keyin uning tubida va atrofidagi quduqlarda (elastik rejimi doirasida) uzoq davom etuvchi bosim taqsimoti jarayonlari vujudga keladi. Quduq manometrlari yordami bilan bosim ko'tarilishi yoki tushishini yozib olish va vaqt o'tishi bilan quduq tubi bosimi o'zgarishi grafigini yasash mumkin. Shubhasiz qatlamning sizish xususiyatlari quduq tubi bosimi o'zgarishi grafigiga ta'sir qiladi.

2.2.1. Teskari masalaning qo'yilishi

$\sigma(r)$ gidroo'tkazuvchanlik, β° elastiklik sig'imi va p_k qatlam bosimi koeffisiyentlari quyidagi funksionalning minimumidan aniqlanadi:

$$J(\sigma,\beta^*,p_k)=\int_0^T[\phi(t)-p(r_c,t)]^2\,dt\,, \qquad (2.1)$$

bunda $\phi(t)$ – quduq tubi bosimining kuzatilgan qiymatlari, $p(r_c,t)$ – nostasionar sizish jarayoni tenglamasi quyidagi tenglama bilan yoziladi

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma(r)r\frac{\partial p}{\partial r}\right)=H\beta^*\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad 0<t\le T, \quad r_c<r<R_k\,. \qquad (2.2)$$

Boshlang'ich va chegaraviy shartlar esa quyidagicha

$$p(r,0)=\varphi(r) \qquad (2.3)$$

$$2\pi\left(\sigma(r)r\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r-r_c}=q(t), \tag{2.4}$$

$$p(R_k,t)=p_k, \tag{2.5}$$

bunda $\beta^*=\beta_0+m\beta_ж$, β_c va $\beta_ж$ – mos ravishda g'ovak muhit va suyuqlikning siqiluvchanligi, m – g'ovaklik, H – qatlam qalinligi, R_k – ta'minlash konturi radiusi, r_c – quduq radiusi, $q(t)$ – quduq debiti, $\varphi(r)$ qatlamda boshlang'ich bosim taqsimoti.

2.2.2. Teskari masala yechimi

(2.2)-(2.5) shartlar bajarilganda (2.1) minimizasiya masalasi Lagranj funksionali yordami bilan shartsiz minimizasiya masalasiga keltiriladi:

$$G\left(\sigma,\beta^*,p_k\right)=J\left(\sigma,\beta^*,p_k\right)+ \\ +2\pi\int_0^T\int_{r_c}^{R_k}\psi\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma(r)r\frac{\partial p}{\partial r}\right)-H\beta^*\frac{\partial p}{\partial t}\right]rdrdt, \tag{2.6}$$

bunda $\psi(r,t)$ –Lagranj ko'paytuvchisi. Lagranj funksionali stasioarligining zaruriy sharti uning birinchi variasiyasi nolga teng bo'ladi.

Faraz qilaylik $\sigma(r)$, β^* va p_k mos ravishda qandaydir $\delta\sigma$, $\delta\beta^*$ va δp_k variasiyaga ega bo'lsin. U holda p bosim qandaydir δp kattalikka o'zgaradi. Lagranj funksionali variasiyasini quyidagicha tasvirlaymiz

$$\delta G=\delta J+2\pi\int_0^T\int_{r_c}^{R_k}\psi\left\{-H\,\delta\beta^*\frac{\partial p}{\partial t}-H\,\beta^*\frac{\partial\delta p}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\sigma(r)r\frac{\partial p}{\partial r}\right]+\right. \\ \left.+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\sigma(r)r\frac{\partial\delta p}{\partial r}\right]\right\}rdrdt. \tag{2.7}$$

Aytaylik $\sigma(r)$, β^* va p_k lar qandaydir $\delta\sigma(r)$, $\delta\beta^*$ variasiya hosil qilsin. U holda $p(r,t)$ bosim qandaydir δp kattalikka o'zgaradi. (2.2)-(2.5) ga ko'ra δp quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$H\beta^*\frac{\partial\delta p}{\partial t}+H\delta\beta^*\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma(r)r\frac{\partial\delta p}{\partial r}+\delta\sigma(r)r\frac{\partial p}{\partial r}\right), \tag{2.8}$$

$$\delta p(r,0)=0, \tag{2.9}$$

$$\delta p(R_k,t)=0, \tag{2.10}$$

$$\left(\sigma(r)r\frac{\partial\delta p}{\partial r}+\delta\sigma(r)r\frac{\partial p}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=r_c}=0 \tag{2.11}$$

Bo'laklab integrallash formulasi yordamida (2.7) quyidagi ko'rinishga keladi

$$\delta G=-2\pi H\beta^*\int_{r_c}^{R_k}\psi\delta p\big|_{t=T}dr+2\pi H\beta^*\int_{r_c}^{R_k}\psi\delta p\big|_{t=0}dr+$$
$$+2\pi\int_0^T\int_{r_c}^{R_k}\left(H\beta^*\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma(r)r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right)\delta prdrdt+$$
$$+2\pi\int_0^T\psi\left(\sigma(r)r\frac{\partial\delta p}{\partial r}+\delta\sigma(r)r\frac{\partial p}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=R_k}dt-$$
$$-2\pi\int_0^T\psi\left(\sigma(r)r\frac{\partial\delta p}{\partial r}+\delta\sigma(r)r\frac{\partial p}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=r_c}dt+$$
$$+\int_0^T\delta p\left(2\pi\left(\sigma(r)r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=r_c}-2(\phi(t)-p(r_c,t))\right)dt-$$
$$+2\pi H\int_0^T\int_{r_c}^{R_k}\delta\beta^*\psi\frac{\partial p}{\partial t}rdrdt-2\pi\int_0^T\int_{r_c}^{R_k}\delta\sigma(r)\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial p}{\partial r}rdrdt-$$
$$-2\pi\int_0^T\delta p_k\left(\sigma(r)r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=R_k}dt. \tag{2.12}$$

Lagranj funksionali stasionarlik $\delta G(\sigma,\beta^*,p_k)=0$ shartidan (2.8)-(2.12) larni hisobga olgan holda funksional gradiyenti komponentalari uchun quyidagi ifodalarni hosil qilamiz

$$J'_\sigma=-2\pi\int_0^T\int_{r_c}^{R_k}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial p}{\partial r}rdrdt\ ,$$

$$J'_{\beta^*}=-2\pi H\int_0^T\int_{r_c}^{R_k}\psi\frac{\partial p}{\partial t}rdrdt,$$

$$J'_{p_k} = -2\pi \int_0^T \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{r=R_k} dt, \qquad (2.13)$$

bunda $\psi(r,t)$ – quyidagi mos qo'shma masalaning yechimi:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma(r) r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = -H\beta^* \frac{\partial \psi}{\partial t}, \; r_c < r < R_k, \; 0 \le t < T, \qquad (2.14)$$

$$\psi(r,T) = 0, \qquad (2.15)$$

$$\pi \left(\sigma(r) r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{r=r_c} = [\phi(t) - p(r_c, t)], \qquad (2.16)$$

$$\psi(R_k, t) = 0. \qquad (2.17)$$

(2.1) funksional minimumi uchun iterasion jarayon gradiyent usullar asosida quyidagicha tuziladi [17]:

$$\gamma_{n+1} = -\gamma_n - \alpha_n J'_n, \qquad (2.18)$$

bunda $\gamma = [\sigma, \beta^*, p_k]^T$, $J'_n = [J'_\sigma, J'_\beta, J'_{p_k}]^T$, α_n – tushish qadami, n – iterasiya nomeri.

(2.18) iterasion jarayonni to'xtatish kriteriysi bo'lib quyidagi tengsizlikning bajarilishi xizmat qiladi

$$|J(\gamma_{n+1}) - J(\gamma_n)| < \varepsilon,$$

bunda ε – berilgan musbat son.

2.2.3. To'r masala

(2.2)-(2.5) va (2.14)-(2.17) masalalarni sonli yechish uchun chekli ayirmalar usulini qo'llaymiz. Yechim sohasi quduqqa tomon quyuqlanuvchi notekis to'r bilan qoplanadi. Bunday to'r koordinatalar sistemasini quyidagicha almashtirish yordami bilan tuziladi [40]

$$u = \ln r. \qquad (2.19)$$

$\Omega = \{\ln r_c = u_c < u < U_k = \ln R_k, \; 0 < t \le T\}$ sohada ushbu to'r tugunlarini kiritamiz

$$\overline{w}_h = \{u_i, \; u_2 < \ldots < u_N = U_k, \; u_i = u_1 + ih, \; h = (u_N - u_1)/(N-1)\},$$

$$\overline{w}_\tau = \{t_i,\ 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T,\ t_n - t_{n-1} = \tau_n\}$$

va to'r funksiyani $p_i^n = p(u_i, t_n)$ deb kiritamiz.

(2.2)-(2.5) masalani approksimasiyalovchi ayirmali sxemani tuzishda ayirmali to'rning alohida yacheykalari uchun saqlanish (balans) qonunlariga asoslangan integral-interpolyasion usul qo'llanadi [43]. Natijada hosil qilingan bir jinsli sxema ushbu ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\frac{1}{h}\left[\sigma_{i+1}\frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{h} - \sigma\frac{p_i^n - p_{i-1}^n}{h}\right] = e^{2u_i}\beta^* H\,\frac{p_i^n - p_i^{n-1}}{\tau_n},$$

$$\sigma_i = \left(\frac{1}{h}\int_{u_{i-1}}^{u_i}\frac{du}{\sigma(u)}\right)^{-1},\quad i = \overline{2, N-1},\quad n = \overline{1, M},$$

$$p_i^0 = \varphi_i,\ i = \overline{1, N},$$

$$2\pi H\sigma_1\,\frac{p_2^n - p_1^n}{h} = q_n,\quad n = \overline{1, M}$$

$$p_N^n = p_k,\ n = \overline{1, M}.$$

(2.1) funksional quyidagi ko'rinishda yoziladi

$$J = \sum_{n=1}^{M}\tau_n(\phi^n - p_1^n)^2,$$

bu yerda p_1^n – $i = 1$ $(u_1 = \ln r_c)$ da ayirmali chegaraviy masala yechimi, $\phi^n = \phi(t_n)$.

Funksiya gradiyentlari (2.13) quyidagi tarzda hisoblanadi:

$$J'_\sigma = -2\pi\sum_{n=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\theta_i^n\tau_n h,$$

$$J'_{\beta^*} = -2\pi\sum_{n=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\phi_i^n\,\frac{p_i^n - p_i^{n-1}}{\tau_n}\,\tau_n h,$$

$$J'_{pk} = -2\pi\sum_{n=1}^{M}\sigma_{N-1}\,\frac{\phi_N^n - \phi_{N-1}^n}{h}\,\tau_n;$$

bu yerda $\theta_i^n = \frac{p_i^n - p_{i-1}^n}{h}\cdot\frac{\psi_i^n - \psi_{i-1}^n}{h}$, p_i^n – ayirmali chegaraviy masala yechimi, ψ_i^n – to'r funksiya quyidagi ayirmali chegaraviy masala yechimi hisoblanadi:

$$\frac{1}{h}\left[\frac{\phi_{i+1}^{n}-\phi_{i}^{n}}{h}-\sigma_i\frac{\phi_{i}^{n}-\phi_{i-1}^{n}}{h}\right]=e^{2u_i}H\beta^*\frac{\phi_{i}^{n}-\phi_{i-1}^{n+1}}{\tau_{n+1}},$$

$$i=\overline{1,N-1},\ n=\overline{M-1,0},\ \phi_i^M=0,\ n=\overline{1,N},$$

$$\pi\sigma_1\frac{\phi_2^n-\phi_1^n}{h}=(\phi^{n+1}-p_1^{n+1}),\ n=\overline{M-1},\ 0,$$

$$\phi_N^n=0,\qquad n=\overline{M-1,0}$$

Hosil qilingan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi progonka usuli yechiladi. To'g'ri masaladan farqli ravishda qo'shma masala vaqt bo'yicha teskari yo'nalishda yechiladi.

2.3. Elastiklik sizish rejimida bosim o'tkazuvchanlik koeffi-siyentini identifikasiyalash usuli bilan aniqlash

G'ovak muhitda bir o'lchamli hol uchun suyuqlikning elastiklik sizish tenglamasi ushbu ko'rinishga ega [21]

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\chi\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \tag{2.20}$$

χ bosim o'tkazuvchanlik koeffisiyentni identifikasiya usuli [50] orqali topish masalasini qaraymiz. Aytaylik $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – xarakterli nuqtalari va ularda qatlam bosimi tushishi o'zgarishi ro'y beradigan ma'lum $z_j(t)$, $1\le j\le n,\ 0\le t\le T$ funksiyalari bo'lsin.

χ parametrni quyidagi funksional minimumi shartidan izlaymiz

$$J(\chi)=\sum_{j=1}^{n}\int_0^T\left[p(x_j,\xi)-z_j(\xi)\right]^2 d\xi. \tag{2.21}$$

(2.21) funksionalning stasionarlik sharti quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$\frac{dJ(\chi)}{d\chi}=2\sum_{j=1}^{n}\int_0^T\left[p(x_j,\xi)-z_j(\xi)\right]w(x_j,\xi)d\xi=0, \tag{2.22}$$

bu yerda $w=\partial p/\partial\chi$.

χ^m atrofida p funksiyani ikkinchi tartibli hadgacha aniqlikda qatorga yoyamiz

$$\overset{m+1}{p}(x,\,t) \approx \overset{m}{p}(x,\,t) + \left(\chi^{m+1} - \chi^m\right)\overset{m}{w}(x,\,t). \tag{2.23}$$

(2.23) yoyilmani (2.22) ga p ning o'rniga qo'yamiz, bundan χ^{m+1} parametrga nisbatan chiziqli munosabatni hosil qilamiz:

$$2\sum_j \int_0^T \left[\overset{m}{p}(x_j,\xi) + \left(\chi^{m+1} - \chi^m\right)\overset{m}{w}(x_j,\xi) - z_j(\xi)\right]\overset{m}{w}(x_j,\xi)d\xi = 0,$$

agar $\overset{m}{p}(x,t)$ va $\overset{m}{w}(x,t)$ funksiyalar ma'lum bo'lsa, u holda yuqoridagi munosabatdan keyingi χ^{m+1} yaqinlashishni oson hisoblash mumkin:

$$\chi^{m+1} = \frac{\sum_j \int_0^T \left[\chi^m\,\overset{m}{w}(x_j,\xi) - \overset{m}{p}(x_j,\xi) + z_j(\xi)\right]\overset{m}{w}(x_j,\xi)d\xi}{\sum_j \int_0^T \overset{m}{w}{}^2(x_j,\xi)d\xi}. \tag{2.24}$$

$\overset{m}{w}(x,t)$ funksiya uchun tenglama tuzishda (2.20) tenglamani quyi iterasion qatlam yechimiga nisbatan chiziqlashtiramiz

$$\frac{\partial \overset{m+1}{p}}{\partial t} = \chi^m \frac{\partial^2 \overset{m}{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overset{m}{p}}{\partial x^2}\delta\chi + \chi^m\left(\frac{\partial^2 \overset{m+1}{p}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \overset{m}{p}}{\partial x^2}\right), \qquad \delta\chi = \chi^{m+1} - \chi^m. \tag{2.25}$$

(2.25) tenglamaga (2.23) yoyilmani qo'yib va $\delta\chi$ koeffisiyentlarni nolga tenglab, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\frac{\partial \overset{m}{p}}{\partial t} = \chi^m \frac{\partial^2 \overset{m}{p}}{\partial x^2}; \qquad \frac{\partial \overset{m}{w}}{\partial t} = \chi^m \frac{\partial^2 \overset{m}{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overset{m}{p}}{\partial x^2}. \tag{2.26}$$

(2.26) tenglamalarni χ^m ning berilgan qiymatida ma'lum sonli usullardan biri bilan ketma-ket yechish mumkin. w funksiya uchun chegaraviy va boshlang'ich shartlar p funksiyani χ parametr bo'yicha differensiallab hosil qilinadi.

Yuqorida bayon etilgan usulning sonli amalga oshirilishini (2.20) tenglamada χ parametrni aniqlash misolida [0, L] chekli qatlamda quyidagi boshlang'ich va chegaraviy shartlarda qaraymiz

$$p(x,0) = p_0, \; p(0,t) = p_c, \; p(L,t) = p_0, \quad p_0, p_c = const. \qquad (2.27)$$

Avval (2.20) tenglamani (2.27) shartlar bilan χ ning aniq qiymatida sonli yechamiz va x_j, $j = \overline{1,n}$ nuqtalarda yechimni aniqlaymiz. Keyin "o'lchov ma'lumotlari" sifatida $z(x_j, t_k) = p(x_j, t_k)$ ni qo'llaymiz, bunda t_k – diskret vaqt. Bu vaqt keyinchalik ayirmali masalani yechish uchun qo'llangan to'r qatlami vaqtidan tanlab olinadi. $z(x_j, t_k)$ kattaliklar har xil t_k lar uchun beshta $x_j = 5, 10, 15, 20, 25$ m nuqtalarda hisoblanadi. (2.26) sistemaning birinchi tenglamasi ham (2.26) shartlar bilan yechiladi, ikkinchi tenglamasi esa quyidagi shartlar bilan yechiladi:

$$w(x,0) = 0, \; w(0,t) = 0, \; w(L,t) = 0. \qquad (2.28)$$

χ ni topish algoritmi quyidagi tarzda quriladi: a) qandaydir χ^0 boshlang'ich qiymat beriladi ($m = 0$ deb olamiz); b) (2.26) tenglamalar sistemasi (2.27), (2.28) shartlar bilan yechiladi, $\overset{m}{p}$ va $\overset{m}{w}$ funksiyalar hisoblanadi; v) (2.21) va (2.24) hisoblanadi; g) $\chi = \chi^{m+1}$ ni qo'yib yetarli aniqlikka qadar b), v) bosqichlar takrorlanadi.

Iterasion jarayonni to'xtatish kriteriysi sifatida quyidagi tengsizliklardan biri yoki ularning majmui qo'llanilishi mumkin

$$\left| \overset{m+1}{p} - \overset{m}{p} \right| < \varepsilon_1, \; \left| a_1^{m+1} - a_1^m \right| < \varepsilon_2, \; \left| J\left(a_1^{m+1}\right) - J\left(a_1^m\right) \right| < \varepsilon_3.$$

(2.26) tenglamalar sistemasini chekli ayirmalar usuli bilan yechamiz [41]. $D\{0 \le x \le L, \; 0 \le t < T\}$ sohada $\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_k), \; i = \overline{0,I}, \; k = \overline{0,K}, \; x_i = ih, \; t_k = k\tau, \; h = L/I, \; \tau = T/K\}$ to'rni kiritamiz. (2.26) tenglamalar sistemasini $\omega_{h\tau}$ to'rda oshkormas chekli ayirmali sxema bilan $O(\tau + h^2)$ aniqlikda approksimasiyalaymiz, unda (2.26) ushbu ko'rinishga keladi

$$\frac{p_i^{k+1}-p_i^k}{\tau}=a_1^m\frac{p_{i+1}^{k+1}-p_i^{k+1}+p_{i-1}^{k+1}}{h^2},$$

$$\frac{w_i^{k+1}-w_i^k}{\tau}=a_1^m\frac{w_{i+1}^{k+1}-w_i^{k+1}+w_{i-1}^{k+1}}{h^2}+\frac{p_{i+1}^{k+1}-p_i^{k+1}+p_{i-1}^{k+1}}{h^2},$$

yoki

$$Ap_{i-1}^{k+1}-Bp_i^{k+1}+Cp_{i+1}^{k+1}=-P_i, \tag{2.29}$$

$$A_1w_{i-1}^{k+1}-B_1w_i^{k+1}+C_1w_{i+1}^{k+1}=-W_i-\gamma_1R_i,\quad i=1,2,\ldots,I-1, \tag{2.30}$$

bu yerda

$$A=A_1=\gamma,\ B=B_1=1+2\gamma,\quad C=C_1=\gamma,\ \gamma=\frac{a_1^m\tau}{h^2},\ \gamma_1=\frac{\tau}{h^2},$$

$$P_i=p_i^k,\quad W_i=w_i^k,\ R_i=p_{i+1}^{k+1}-2p_i^{k+1}+p_{i-1}^{k+1}.$$

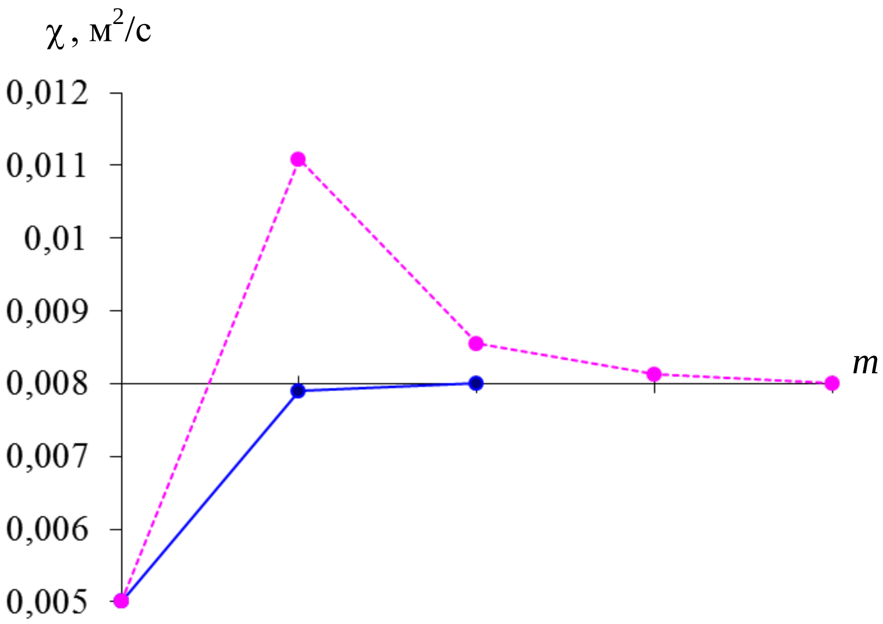
(2.27), (2.28) boshlang’ich va chegaraviy shartlar quyidagicha approksimasiyalanadi:

$$p_i^0=p_0,\quad p_0^{k+1}=p_c,\quad p_I^{k+1}=p_0, \tag{2.31}$$

$$w_i^0=0,\quad w_0^{k+1}=0,\quad w_I^{k+1}=0. \tag{2.32}$$

(2.29), (2.30) tenglamalarni (2.31), (2.32) shartlar bilan progonka usulini qo’llab yechamiz [41].

$[0;L]$ kesmani x o’qida 300 intervalga, $[0;T]$ vaqt intervalini esa 1000 intervalga bo’lamiz. «O’lchash ma’lumotlari» 5×10 «koordinata-vaqt» nuqtalarida berilgan parametrlari asosida (2.20) tenglamaning to’r yechimi asosida tayyorlanadi. Berilgan parametrlarning qiymatlari esa quyidagicha: p_0=25 MPa, p_c=15 MPa, χ=0,08 m^2/s; $L=30$ m, $T=2000$ s. Nolinchi yaqinlashish sifatida χ^0=0.05 m^2/s berilganda χ koeffisiyentni identifikasiyalash bo’yicha hisoblash natijalari 1-rasmda tasvirlangan. Natijalar tahlilining ko’rsatishicha χ koeffisiyent muvozanat nuqtasi atrofida amalda uch iterasiyada tiklanadi (1-rasm). Agar berilgan ma’lumotlar 2×10 «koordinata-vaqt» nuqtalrida berilsa koeffisiyent muvozanat nuqtasiga 5 iterasiyada erishadi (1-rasm). Shunday qilib, berilgan ma’lumotlar sifatida qo’llangan koordinatalar bo’yicha o’lchashlar miqdorining kamayishi iterasiyalar sonining oshishiga olib keladi.



1-rasm. χ koeffisiyent qiymatini tiklash. Nuqtalar miqdori x_j 5 ga (——•) va 2 ga (•- · - ·•) teng hol.

2.4. Elastiklik sizish rejimi parametrlarini deterministik momentlar usuli bilan aniqlash

Endi (2.1) tenglama parametrini deterministik momentlar usuli bo’yicha topamiz. Bu usulni qo’llashning asosiy afzalligi model parametrlarini jarayonni xarakterlaydigan momentlar orasidagi sodda munosabatlar tarzida ifodalaydi, bu jarayonning to’la yechimi va model parametrlariga munosabatlariga nisbatan ancha oddiydir. Bundan tashqari bir qator modellarda analitik yechim olish imkoniyati mavjud emas, u holda momentlarni [42] nisbatan sodda analitik ifodalar bilan aniqlash mumkin. Usulni qo’llash sxemasi quyidagicha: avval Laplas almashtirishi tasvirlari bo’yicha gidrodinamik masala yechimi topiladi. Keyin Laplas almashtirishi xossalarini qo’llab, (2.20) tenglamaga kiruvchi parametrlardan bog'liq to'g'ri masala yechimidan bog'liq momentlarni analitik ko'rinishda yozish imkonini beradi. Oxirgi bog'lanishlardan noma'lum koeffisiyentlar aniqlanadi.

(2.20) tenglamani chekli [0, L] qatlamda (2.27) boshlang'ich va chegaraviy shartlar bilan qaraymiz. Bulardan tashqari yana ushbu qo'shimcha shartga ham egamiz

$$p(x_1, t) = \tilde{p}_1(t), \quad x_1 \in [0, L]. \tag{2.33}$$

Masala χ bosim o'tkazuvchanlik koeffisiyentini aniqlash bilan yakunlanadi.

Laplas almashtirishi bo'yicha tasvirga o'tamiz

$$\bar{p}(x, s) = \int_0^\infty \exp(-st) p(x, t) dt$$

(2.20) tenglama va (2.27), (2.33) dan quyidagini hosil qilamiz

$$\frac{d^2 \bar{p}}{dx^2} - \frac{s}{\chi} \bar{p} = -\frac{p_0}{\chi}, \tag{2.34}$$

$$\bar{p}(0, s) = \frac{p_c}{s}, \quad \bar{p}(L, s) = \frac{p_0}{s}, \tag{2.35}$$

$$\bar{p}(x_1, s) = \bar{\tilde{p}}_1(s). \tag{2.36}$$

(2.34), (2.35) masala yechimini

$$\bar{p}(x, s) = \frac{(p_c - p_0) sh[(L - x)k_1] + p_0\, sh(k_1 L)}{s\, sh(k_1 L)},$$

(2.36) ni quyidagi ko'rinishda yozamiz

$$\frac{p_{st}}{s} + \Delta\bar{p}_1(s) = \bar{\tilde{p}}_1(s),$$

bunda $\Delta\bar{p}_1(s) = \bar{p}(x_1, s) - \frac{p_{st}}{s}$, yuqoridagi munosabatdan quyidagini hosil qilamiz

$$\frac{p_{st}}{s} + \Delta\bar{p}_1(s) = \frac{(p_c - p_0) sh[(L - x_1)k_1] + p_0\, sh(k_1 L)}{s\, sh(k_1 L)}, \quad k_1 = \sqrt{\frac{s}{\chi}}. \tag{2.37}$$

(2.37) ning har bir hadini s bo'yicha darajali qatorga yoyamiz. Buning uchun $sh\,x$ funksiyani darajali qatorga yoyilmasidan va quyidagi qatordan foydalanamiz

$$\Delta\bar{p}_1(s) = \Delta p_{10} - s\Delta p_{11} + \frac{s^2}{2}\Delta p_{12} - \ldots,$$

bunda $\Delta p_{1l} = \int_0^\infty t^l \Delta p_1(t)dt, \quad l = 0,1,\ldots$.

Natijada quyidagiga egabo'lamiz

$$\left(L + \frac{L^3}{3!}k_1^2 + \ldots\right)\left(p_{st} + s\Delta p_{10} - s^2\Delta p_{11} + \ldots\right) =$$
$$= \left[\left(p_c - p_0\right)\left(L - x_1\right) + p_0 L\right] + \left[\frac{\left(p_c - p_0\right)\left(L - x_1\right)^3}{3!} + \frac{p_0 L^3}{3!}\right]k_1^2 + \ldots. \quad (2.38)$$

(2.38) da 1, $s,\ldots$ oldidagi koeffisiyentlarni tenglab p_{st} va χ larni aniqlash uchun munosabatlar hosil qilamiz. Buning uchun ikkita shunday munosabatlar yetarli

$$p_{st}L = p_c L + \left(p_0 - p_c\right)x_1, \quad 6L\chi\Delta p_{10} = \left(p_c - p_0\right)\left(L - x_1\right)^3 + \left(p_0 - p_{st}\right)L^3,$$

ulardan quyidagiga ega bo'lamiz

$$\chi = \frac{\left(p_c - p_0\right)\left(L - x_1\right)^3 + \left(p_0 - p_{st}\right)L^3}{6L\Delta p_{10}}, \quad (2.39)$$

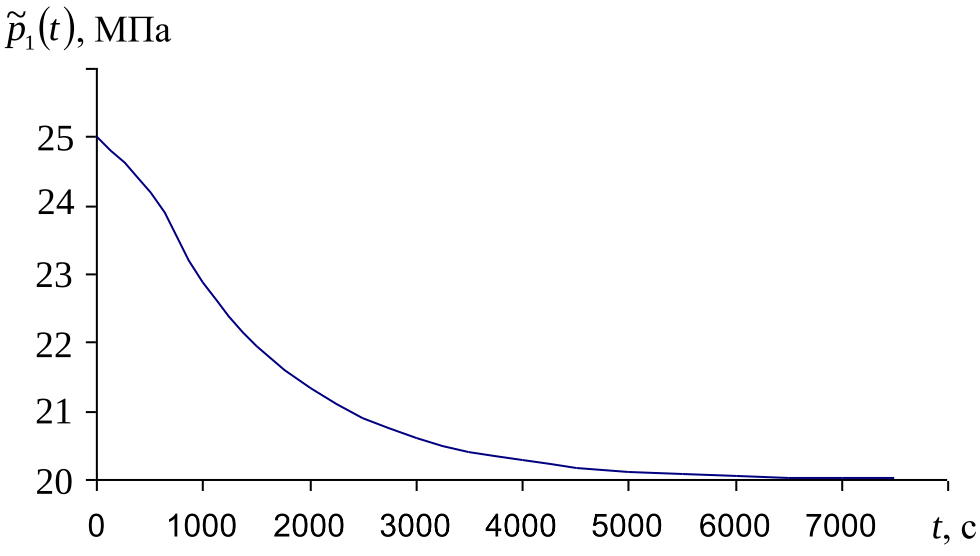
bu yerda $p_{st} = p_c + \dfrac{p_0 - p_c}{L}x_1, \quad \Delta p_{10} = \int_0^\infty \Delta p_1(t)dt = \int_0^\infty \left(\tilde{p}_1(t) - p_{st}\right)dt$.

(2.33) da $\tilde{p}_1(t)$ funksiya $\chi = 0{,}08$ m²/s da to'g'ri masalaning yechimidan aniqlanadi va 2-rasmda tasvirlangan. (2.39) bo'yicha hisoblash natijalari 1-jadvalda keltirilgan. Hisoblash natijalarining ko'rsatishicha χ ning hisoblangan qiymati to'g'ri masala yechimidagi berilgan qiymat bilan deyarli ustmag'ust tushadi.

Shunday qilib, deterministik momentlar usuli masalaning noma'lum parametrlarni, yuqorida qaralgan holda tenglama koeffisiyentini aniqlash uchun sodda formulalarni topish imkonini beradi. Hisoblashlarning ko'rsatishicha (2.39) bo'yicha aniqlangan χ berilgan qo'zg'atilgan $\tilde{p}_1(t)$ funksiya bo'yicha turg'undir. Ammo deterministik momentlar usulini faqat chiziqli masalalarga qo'llay olamiz. Bu esa keng sinfdagi nochiziqli muhim, qiziqarli masalalarga ushbu usulni qo'llashni cheklaydi. Keng qo'llash imkoniyatlari nuqtai nazaridan identifikasiya usuli deterministik momentlar usuliga nisbatan afzaldir.

1-jadval. χ koeffisiyentni hisoblash uchun berilgan parametrlar

x_1, m	L, m	p_0, MPa	p_c, MPa	Δp_{10}, MPa·s	Berilgan qiymat χ, m^2/s	Hisoblangan qiymat χ, m^2/s
10	30	25	15	15631.8926	0,08	0,07996



2-rasm. $\tilde{p}_1(t)$ funksiya grafigi.

3-BOB. ELASTIKLIK REJIMIDA SUYUQLIKLAR SIZISHINING CHEGARAVIY TESKARI MASALALARI

3.1. Chegaraviy teskari masalalarni yechishning De Suza usuli

O'zgarmas fizik xarakteristikalarga ega issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasini qaraymiz

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}. \qquad (3.1)$$

De Suza [51] (3.1) tenglamani ayirmali approksimasiya qilish uchun sof oshkormas sxemani qo'llagan. Vaqt bo'yicha hosila chap ayirmaga, fazoviy koordinata bo'yicha hosila markaziy ayirmaga almashtiriladi:

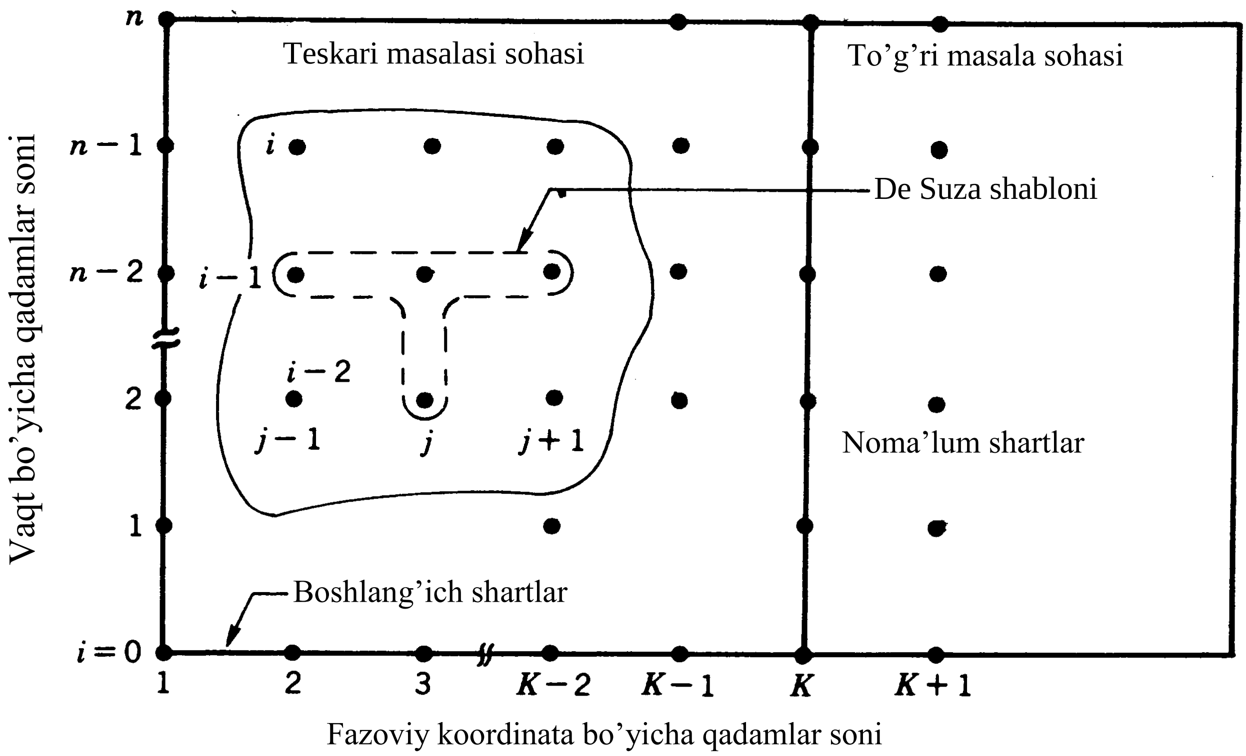
$$\frac{T_{j-1}^{i} - 2T_{j}^{i} - T_{j+1}^{i}}{\Delta x^2} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{T_{j}^{i} - T_{j}^{i-1}}{\Delta t}\right) \qquad (3.2)$$

(3.2) tenglamani T_{j-1}^{i} ga nisbatan yechib quyidagini hosila qilamiz

$$T_{j-1}^{i} = \left(2 - \frac{1}{p}\right)T_{j}^{i} - T_{j+1}^{i}\frac{1}{p}T_{j}^{i-1} \qquad \begin{cases} j = K, K-1,\ldots,2, \\ i = 1,2,\ldots,n, \end{cases} \qquad (3.3)$$

bu yerda $p = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}$. 3-rasmda ko'rsatilgan fazo-vaqt ayirmali to'rda hisoblash algoritmi $j = K$ tugundan boshlandi va $i = 1,2,\ldots,n$ lar uchun hisoblash ketma-ket hosil qilinadi. Shunday qilib temperatura qiymati K va $K+1$ fazoviy tugunlarga mos ayirmali to'rning ikkita to'g'ri chizig'ida ma'lum bo'ladi, ammo to'g'ri masalalar uchun sof oshkormas sxemadan (3.3) tenglama hosil qilishiga qaramasdan oshkor munosabat hosil qiladi. Barcha $K-1$ chiziq bo'yicha temperaturani hisoblashdan keyin ushbu jarayon $K-1$, $K-2,\ldots,1$ lar uchun takrorlanadi. Issiqlik oqimi zichligini sirtda hisoblash uchun tenglama har bir tugun uchun chekli-ayirmali tenglamadan hosil qilinadi. Qizdirilayotgan sirt joylashgan 1 tugun uchun t_i vaqt momentida quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$q^i + k\frac{T_2^i - T_1^i}{\Delta x^2} = pc\frac{\Delta x}{2}\frac{T_1^i - T_1^{i-1}}{\Delta t} \quad (3.4)$$



3-rasm. Marsh usullari uchun fazo-vaqt to’rida koordinata bo’yicha siljish

3.2. Chegaraviy teskari masalalarni yechishning Veber va Reyno-Branzye usullari

Veber [52] ushbu ko’rinishdagi o’zgarmas xususiyatli quyidagi giperbolik ko’rinishdagi issiqlik o’tkazuvchanlik tenglamasini tahlil qilgan

$$\gamma^{-2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (3.5)$$

bu yerda $\gamma -$ normal issiqlik to’lqini tezligi. Vaqt bo’yicha ham koordinata bo’yicha ham markaziy ayirmalarni qo’llab quyidagi tenglamaga kelamiz

$$\frac{\gamma^{-2}}{\Delta t^2}\left(T_j^{i-1} - 2T_j^i + T_j^{i+1}\right) + \frac{1}{2\Delta t}\left(T_j^{i+1} - T_j^{i-1}\right) = \frac{\alpha}{\Delta x^2}\left(T_{j+1}^i - 2T_j^i + T_{j-1}^i\right) \quad (3.6)$$

(3.6) tenglamani T_{j-1}^{i} ga nisbatan yechib, quyidagini hosil qilamiz

$$T_{j-1}^{i} = -\left(\frac{1}{2p} - \sigma\right)T_{j}^{i-1} + 2(1-\sigma)T_{j}^{i} + \left(\frac{1}{2p} + \sigma\right)T_{j}^{i+1} - T_{j+1}^{i}, \tag{3.7}$$

$$p = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^{2}}, \quad \sigma \equiv \frac{\gamma^{-2}}{\alpha}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^{2} \tag{3.8}$$

Bu algoritm oshkor ko'rinishga ega. $j = K$ tugunda va $i = 2,3,\ldots,n-1$ vaqt momentlarida hisoblash mumkin. Shunday qilib T_{K}^{n+1} kattalik aniqlanmaydi, u holda $i = n$ ni qo'llash mumkin emas. Bunday fazoviy-vaqt to'ri 4-rasmda keltirilgan. Agar M vaqt momentida sirt temperaturasini bilish talab qilinsa, u holda temperatura o'lchashlarini $i = M + K$ momentga qadar o'tkazish kerak ekanligi kelib chiqadi. (3.7) algoritm K keyingi vaqt qadami bo'yicha qo'llash bilan xarakterlanadi. Agar yanada mukammal to'r qo'llansa, u holda qo'llaniladigan vaqt bo'yicha qadamlar soni o'sadi.

Veber σ parametrni kichik qilib tanlash zarurligini ko'rsatadi, ammo qay darajada kichikligini aytmaydi. Aslida $\sigma = 0$ da hisoblash olib boriladi.

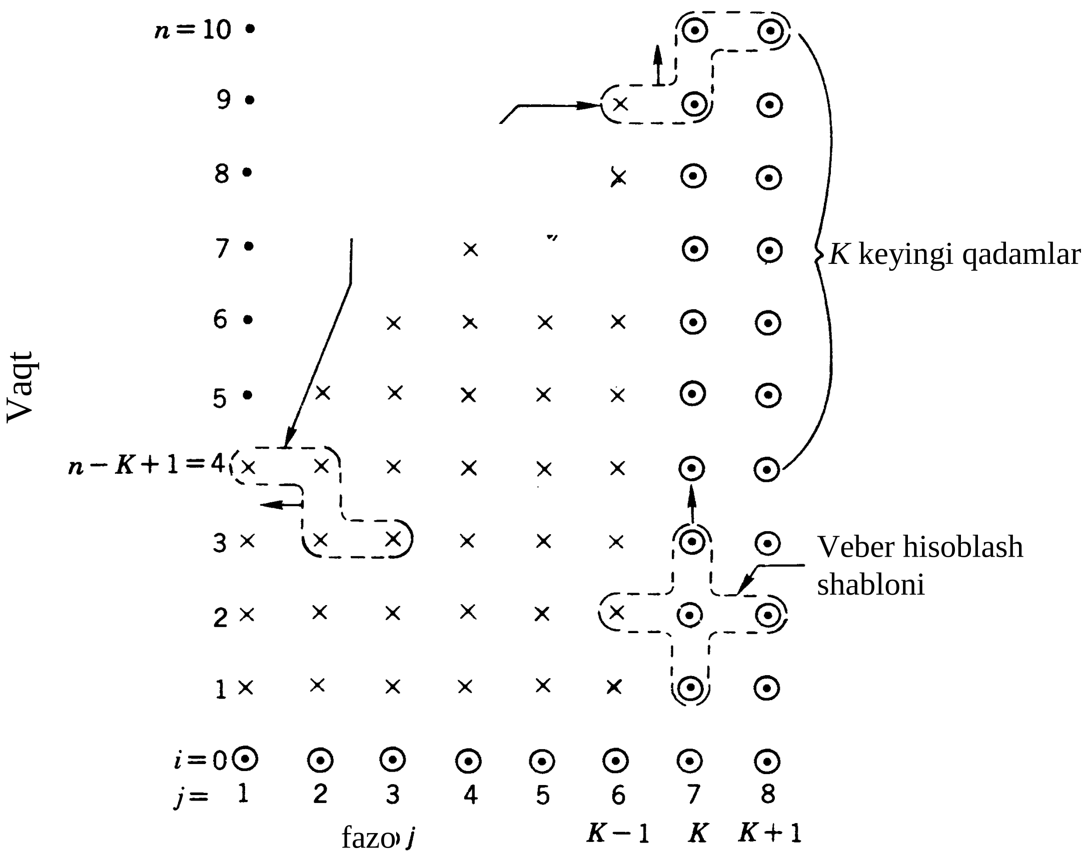
Reyno-Branzye usuli [53, 54] o'z ichiga ikki qadamli siljish algoritmni kiritadi. Birinchi qadamda siljish koordinata bo'yicha ro'y beradi, keyin esa vaqt bo'yicha qadam siljishi ro'y beradi. Oxirgi natija berilgan ikki qadamning o'rtalanganligidan hosil qilinadi. Koordinata bo'yicha siljish uchun issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi ayirmali approksimasiyasi quyidagi ko'rinishda yoziladi.

$$pc\frac{\Delta x}{\Delta t}\left(\tilde{T}_{j}^{i+1} - \tilde{T}_{j}^{i}\right) = -\frac{k}{\Delta x}\left(\tilde{T}_{j}^{i} - \tilde{T}_{j}^{i}\right) + \frac{k}{\Delta x}\left(\tilde{T}_{j+1}^{i+1} - \tilde{T}_{j}^{i+1}\right). \tag{3.9}$$

(oshkor) (oshkormas)

Bu yerda aralash oshkor/oshkormas approksimasiya qo'llanilgan. (3.9) tenglamani $\tilde{T}_{j-1}^{i}$ ga nisbatan yechib quyidagini hosil qilamiz

$$\tilde{T}_{j-1}^{i} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)\tilde{T}_{j}^{i} + \left(1 + \frac{1}{p}\right)\tilde{T}_{j}^{i+1} - \tilde{T}_{j+1}^{i+1}. \tag{3.10}$$



4-rasm. Veber usuli uchun fazo-vaqt to'ri

$\tilde{T}^{i}_{j-1}$ ga nisbatan oshkor algoritm $j = K$ tugun bilan boshlanadi, buning uchun $i = 2,3,\ldots,n-1$ larda hisoblashlar o'tkaziladi. Umumiy holda i maksimal qiymati Veber algoritmidagidek $n + j - K$ ga teng bo'ladi (bu 4-ramda to'liq ko'rsatilgan).

Algoritmning ikkinchi qismi issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi qusidagi ko'rinishda approksimasiyalanadi

$$pc\frac{\Delta x}{\Delta t}\left(\tilde{T}^{i+1}_{j} - \tilde{T}^{i}_{j}\right) = -\frac{k}{\Delta x}\left(\tilde{T}^{i+1}_{j} - \tilde{T}^{i+1}_{j-1}\right) + \frac{k}{\Delta x}\left(\tilde{T}^{i}_{j+1} - \tilde{T}^{i}_{j}\right). \qquad (3.11)$$

(oshkor) (oshkormas)

Bu yerda ham aralash oshkor/oshkormas approksimasiya qo'llaniladi. (3.11) tenglamani $\tilde{\tilde{T}}^{i+1}_{j-1}$ ga nisbatan quyidagini hosil qilamiz

$$\tilde{\tilde{T}}^{i+1}_{j-1} = \left(1 + \frac{1}{p}\right)\tilde{\tilde{T}}^{i+1}_{j} + \left(1 - \frac{1}{p}\right)\tilde{\tilde{T}}^{i}_{j} - \tilde{\tilde{T}}^{i}_{j+1} \qquad (3.12)$$

Vaqt bo’yicha siljish algoritmi $\tilde{\tilde{T}}_{j-1}^{i+1}$ ga nisbatan oshkordir. $i=1$ dan boshlab, koordinat bo’yicha qadamlar sonini aniqlovchi j indeks $K-1, K-2, \dots, 1$ qiymatlar qabul qiladi. Algoritmning keyingi qadami avvalgi ikki qadam natijalarining o’rtachalashtirishidan iborat:

$$T_j^i = \frac{1}{2}\left(\tilde{T}_j^i + \tilde{T}_j^i\right). \qquad (3.13)$$

Algoritm Rayno-Branzye vaqt bo’yicha siljish sodir bo’lishiga qaramasdan, ikki qadam bo’yicha umumiy effekt Veber algoritmdagidek (4-rasmda shablon ko’rsatilgan), ammo Veber usuli bilan taqqoslaganda hatto xatoliklarga nisbatan kam sezgir. Vaqt bo’yicha keyingi qadamlar soni (K) fazoviy to’r tugunlari soniga teng.

Reyno-Branzye usulida yana temperaturaning teplofizik xususiyatlari ham o’rganiladi.

3.3. Xenzel-Xillz usuli

Xenzel-Xillz [55] issiqlik o’tkazuvchanlik tenglamasini quyidagi ikki juft birinchi tartibli tenglama ko’rinishida yozadi:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \qquad (3.14a)$$

$$q = -k\frac{\partial T}{\partial x}, \qquad (3.14b)$$

Bundan keyin ularning har biri alohida chekli-ayirmali ko’rinishda tasvirlanadi va ikkita $T(x,t)$, $q(x,t)$ noma’lum funksiyalar qaraladi. Bunday yondashuvning mumkin bo’lgan afzalliklarini [55] ishdan topish mumkin. Bunday usulning bir qator asosiy xususiyatlarini (3.14) birlashgan tenglamalar ko’rinishini tahlil qilib tushunish mumkin. Xoch ayirmali sxema deb ataluvchi sxema qo’llangan:

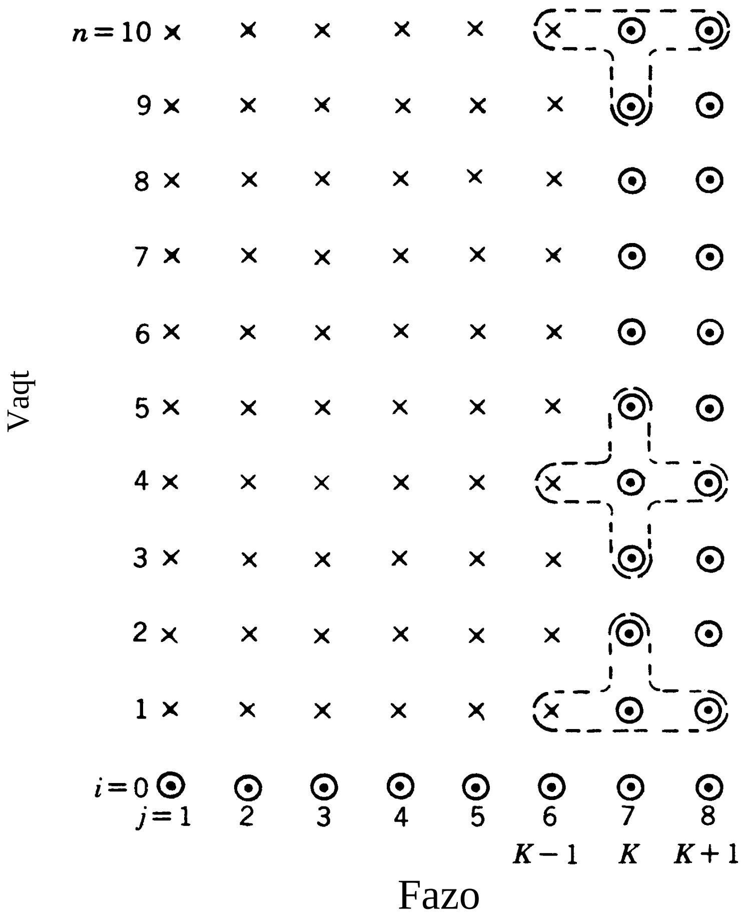
$$\frac{\Delta x}{2\Delta t}\left(T_j^{i+1} - T_j^{i-1}\right) = \frac{\alpha}{\Delta x}\left(T_{j+1}^i - 2T_{j+1}^i + T_{j-1}^i\right) \qquad (3.15)$$

Rixtmayer va Morton [56] yuqorida qaralgan ayirmali sxema to’g’ri masalalar uchun har doim turg’unmas ekanligini ko’rsatishiga qaramasdan, u teskari masalalar uchun qo’llash foydali bo’lishi mumkin. Agar (3.15) tenglamani T_{j-1}^{i} ga nisbatan yechsak, u holda quyidagini hosil qilamiz

$$T_{j-1}^{i} = -\frac{1}{2p}T_{j}^{i-1} + 2T_{j}^{i} + \frac{1}{2p}T_{j}^{i+1} - T_{j+1}^{i} \; . \tag{3.16}$$

(3.16) tenglama uchun hisoblash shabloni 5-rasmda ko’rsatilgan. Yuqorida yoritilgan algoritm oshkor va Veber algoritmiga $\sigma = 0$ da o’xshaydi. (3.16) tenglama $i = 1$ da to’g’ri bo’lishiga qaramasdan, Xenzel va Xillz [55] (3.15) tenglamada vaqt bo’yicha markaziy ayirmani o’ng ayirmaga almashtirdi:

$$\frac{\Delta x}{2\Delta t}\left(T_{j}^{2} - T_{j}^{1}\right) = \frac{\alpha}{\Delta x}\left(T_{j=1}^{1} - 2T_{j}^{1} + \frac{1}{p}T_{j}^{2}\right). \tag{3.17}$$



5-rasm. Xillz va Xenzel usuli uchun fazo-vaqt to’ri

T_{j-1}^{i} uchun yechim quyidagi ko’rinishga ega

$$T_{j-1}^{i}=\left(2-\frac{1}{p}\right)T_{j}^{1}-T_{j+1}^{i}+\frac{1}{p}T_{j}^{2} \quad . \tag{3.18}$$

(3.18) tenglama uchun hisoblash shabloni 5-rasmda ko’rsatilgan.

(3.18) tenglamani $i=n$ da qo’llab bo’lmaydi. Uning o’rniga quyidagi approksimasiya qo’llaniladi

$$pc\frac{\Delta x}{\Delta t}\left(T_{j}^{n}-T_{j}^{n-1}\right)=\frac{k}{\Delta x}\left(T_{j-1}^{n}-2T_{j}^{n}+T_{j+1}^{n}\right) \tag{3.19}$$

T_{j-1}^{n} uchun yechim quyidagi ko’rinishda yoziladi

$$T_{j-1}^{n}=\left(2+\frac{1}{p}\right)T_{j}^{n-1}-T_{j+1}^{n}, \tag{3.20}$$

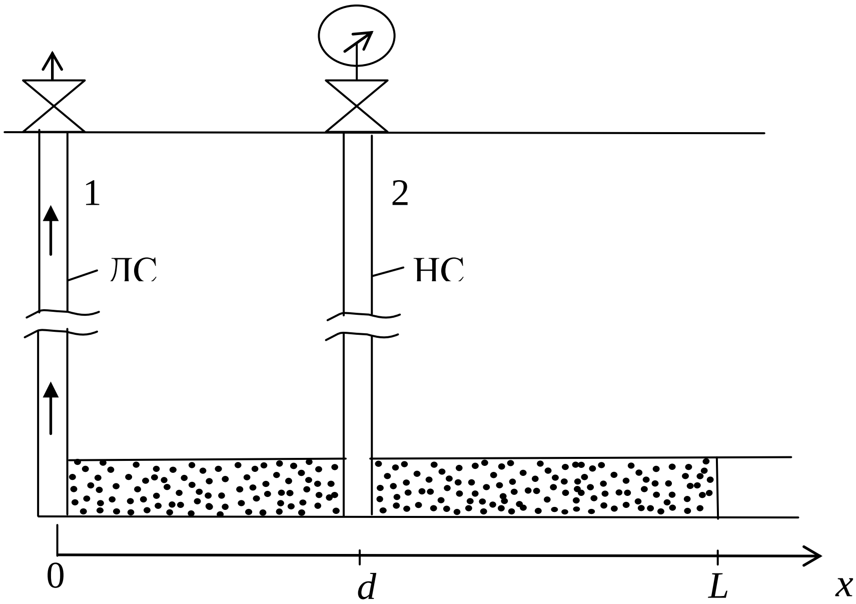
va De Suza usulidagi tenglama bilan mos tushadi. (3.20) tenglama uchun hisoblash shabloni ham 5-rasmda ko’rsatilgan.

3.4. Elastik rejimda neft sizishining chegaraviy teskari masalasini yechishning ba’zi sonli usullari

Bu paragrafda [57] elastik rejimda neft sizishining chegaraviy teskari masalasini marsh [5] usullarini qo’llab yechilgan. Neft sizishining eastik nazariyasi [21] da bayon etilgan.

G’ovak muhit $[0,\infty)$ bir jinsli obyektdan iborat bo’lsin va $x=\infty$ da chegaraviy shart ma’lum bo’lsin. $x=d$, $d\in(0,\infty)$ nuqtada neft bosimi qiymatlari berilgan, ya’ni $f(t)$ – «berilgan ma’lumotlar» va g’ovak muhitda boshlang’ich $p(x,0)=p_0$ bosim taqsimoti berilgan. $x=0$ nuqtada suyuqlik bosimini topish talab qilinadi. Masalaning bunday qo’yilishi kuzatuv qudug’idagi olingan ma’lumotlar asosida neft qazib oluvchi quduqdagi parametrlarni aniqlash kabi talqin qilish mumkin (6-rasm). Masala kuzatuv qudug’idagi ($x=d$) o’lchangan bosim asosida $(0,d)$ sohada va qazib oluvchi quduqda $(x=0)$ bosim maydonini aniqlashga keltiriladi.

Teskari masala quyidagi tarzda qo'yiladi. Bosim o'tkazuvchanlik tenglamasi



6-rasm. Qazib oluvchi (1) va kuzatuv (2) qudug'i (ДС, НС).

berilgan

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\chi\frac{\partial^2 p}{\partial x^2},\qquad t\in[0,t_m], \tag{3.21}$$

va qo'shimcha shartlar

$$p(x,0)=p_0, \tag{3.22}$$

$$p(d,t)=f(t),\quad t\in[0,t_m], \tag{3.23}$$

$$p(\infty,t)=p_0,\quad t\in[0,t_m], \tag{3.24}$$

bunda p – joriy bosim, MPa, t – vaqt, s, x – koordinata, χ – bosim o'tkazuvchanlik koeffisiyenti.

Qazib oluvchi quduqda $(x=0)$ suyuqlik bosimini topish talab qilinadi.

Teskari masalani yechish uchun kerakli (3.23) dagi $f(t)$ qo'shimcha ma'lumotlarni tayyorlab olishda, avval (3.21) tenglama uchun $[0,\infty)$ da to'g'ri masalani yechamiz. Bu holda chegaraviy shart quyidagi ko'rinishga ega

$$w(0,t) = w_0 = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{x=0}, \quad w_0 = \text{const}, \quad t \in [0, t_m], \tag{3.25}$$

bunda w – sizish tezligi, k – qatlam o'tkazuvchanligi, μ – suyuqlik qovushqoqligi.

(3.21), (3.22), (3.24), (3.25) to'g'ri masalani yechish uchun chekli ayirmalar usulini qo'llaymiz. $D = D_1 \cup D_2 = \{0 \le x \le d,\ 0 \le t \le t_m\} \cup \{d \le x < \infty,\ 0 \le t \le t_m\}$ sohada $w_{h\tau} = \{(x_{i,} t_j), x_i = ih,\ t_j = j\tau,\ h = L/I,\ \tau = t_m/J,\ n+1,\ldots,I, \quad j = 0,1,\ldots,J\}$ to'rni kiritamiz, bu yerda L – qatlamning qandaydir xarakterli uzunligi, unda qo'zg'atilgan soha $x = L$ ga qadar yetib bormaydi. $(x_{i,} t_j)$ nuqtaga mos to'r yechimni p_i^j orqali belgilaymiz.

(3.21) tenglama $w_{h\tau}$ to'rda $O(\tau + h^2)$ aniqlikda oshkormas chekli ayirmali sxema bilan approksimasiyalanadi va quyidagi algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriladi

$$Ap_{i-1}^{j+1} - Cp_i^{j+1} + Bp_{i+1}^{j+1} = -p_i^j, \quad i = 1,2,\ldots,I-1, \tag{3.26}$$

bu yerda $A = \frac{\chi\tau}{h^2}, \quad B = \frac{\chi\tau}{h^2}, \quad C = 1 + 2\frac{\chi\tau}{h^2}$

(3.22), (3.24), (3.25) shartlarni approksimasiyalaymiz

$$p_i^0 = p_0, \tag{3.27}$$

$$w_0 = -\frac{k}{\mu}\frac{p_1^{j+1} - p_0^{j+1}}{h}, \tag{3.28}$$

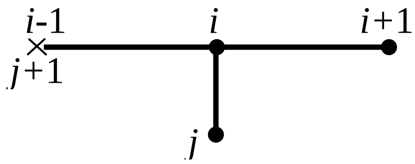
$$p_I^{j+1} = p_0. \tag{3.29}$$

(3.26) sistema (3.27) - (3.29) shartlarda progonka usuli bilan yechiladi [41].

Teskari masala uchun qo'shimcha ma'lumotlar sifatida d nuqtada $f(t_j) = p_n^j$ bosim qiymatlari qabul qilinadi. Berilgan ma'lumotlarga, ya'ni $f(t)$ funksiyaga xatolik berishni quyidagi tarzda modellashtiramiz

$$f^{\delta}(t) = f(t) + 2\delta\left(\sigma(t) - \frac{1}{2}\right), \tag{3.30}$$

bu yerda δ – xatolik, $\sigma(t)$ – $[0,1]$ kesmada tekis taqsimlangan tasodifiy miqdordir.



7-rasм. ● – bosim qiymatlarinig to'rdagi ma'lum qiymatlari; x – bosimning tugundagi noma'lum qiymatlari

Endi (3.21), (3.23), (3.24) to'g'ri masalani $f(t) = f^{\delta}(t)$ bilan yechamiz. p_1^{j+1} ni D_2 sohada bilgan holda D_1 sohaga davom ettirish mumkin. Buning uchun har xil siljuvchi marsh usullarini qo'llash mumkin [5].

D_1 sohada sof oshkormas ayirmali sxemali De Suza sxemasini qo'llanadi [51] (7-rasm). U holda (3.21) tenglamaga qo'llab p_{i-1}^{j+1} ga nisbatan quyidagini hosil qilamiz

$$p_{i-1}^{j+1} = \left(2 + \frac{h^2}{\chi\tau_1}\right) p_i^{j+1} - p_{i+1}^{j+1} - \frac{h^2}{\chi\tau_1} p_i^j ,$$
$$i = n, n-1, \ldots, 1, \quad \tau_1 = j_1\tau, \quad j_1 = 1, 2, \ldots . \tag{3.31}$$

p_0^{j+1} qiymatlar bizga izlanayotgan chegaraviy shartni beradi.

[55] da xoch ayirmali sxema qo'llaniladi

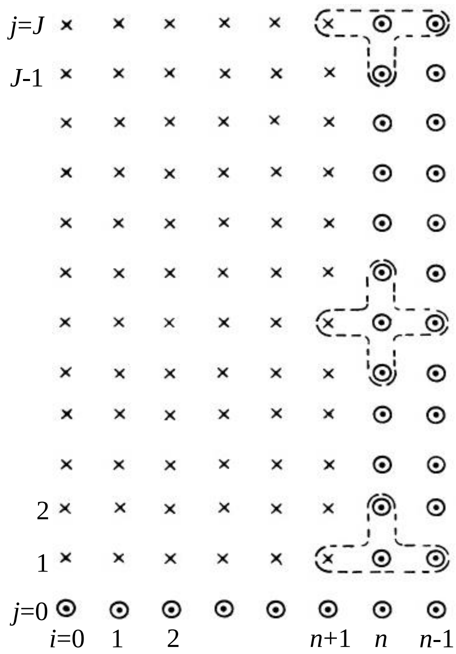
$$p_{i-1}^{j} = -\frac{h^2}{2\chi\tau_1} p_i^{j-1} + 2p_i^j + \frac{h^2}{2\chi\tau_1} p_i^{j+1} - p_{i+1}^j . \tag{3.32}$$

(3.32) tenglama uchun hisoblash shabloni 8-rasmda ko'rsatilgan. Bu ayirmali sxema to'g'ri masalalar uchun noturg'un, ammo teskari masalalar uchun u foydali bo'lishi mumkin [5]. (3.32) tenglama $j = 1$ da o'rinli bo'lsa ham Xenzel va Xellz [55] vaqt bo'yicha markaziy ayirmali hosilani o'ng ayirmali hosilaga almashtirdi. U holda p_{i-1}^1 uchun u quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$p_{i-1}^{1} = \left(2 - \frac{h^2}{\chi\tau_1}\right) p_i^1 - p_{i+1}^1 + \frac{h^2}{\chi\tau_1} p_i^2 . \tag{3.33}$$

(3.33) tenglamani $j = J$ da qo'llab bo'lmaydi. $j = J$ da Xenzel va Xellz [55] De Suza usuli shablonini qo'llagan (7-rasm). U holda p_{i-1}^J uchun yechim ushbu ko'rinishda yoziladi

$$p_{i-1}^{J} = \left(2 + \frac{h^2}{\chi\tau_1}\right) p_i^{J} - \frac{h^2}{\chi\tau_1} p_i^{J-1} - p_{i+1}^{J}. \tag{3.34}$$

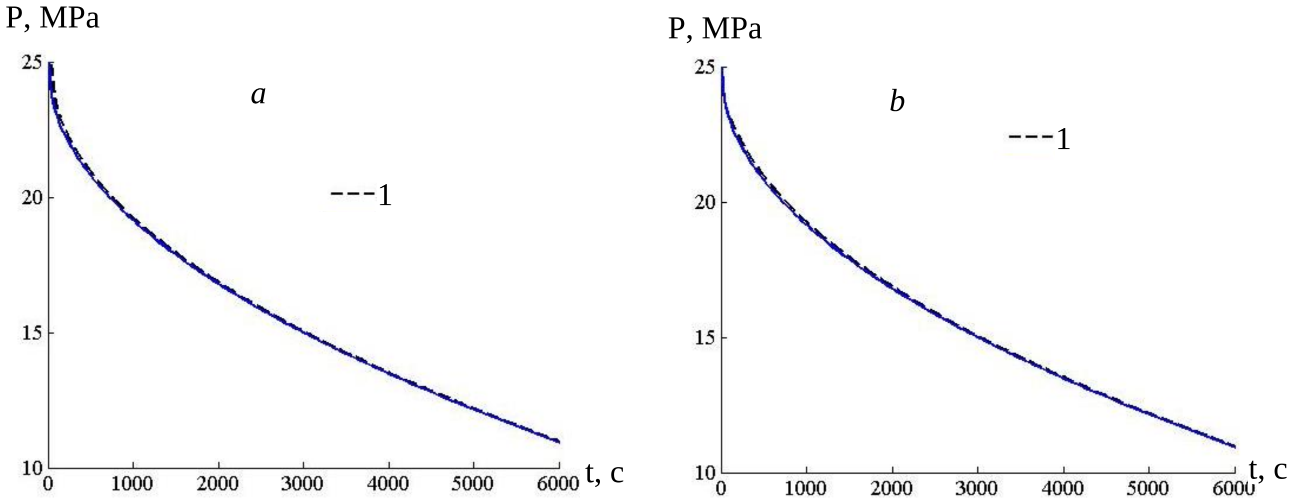


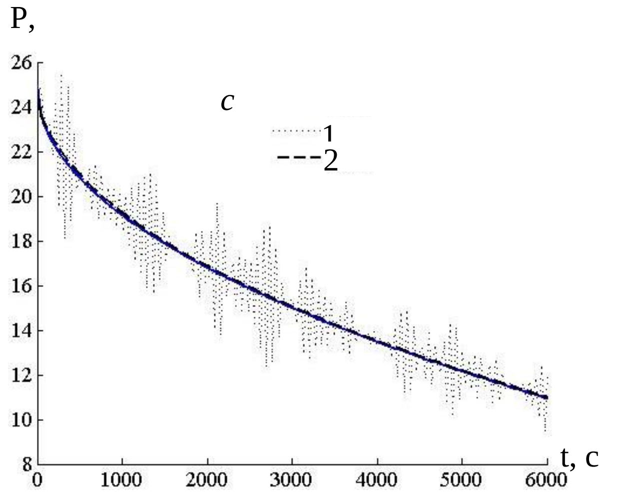
8-rasm. Xillz va Xenzel usuli uchun fazo-vaqt to'ri

Hisoblashlarda ushbu ma'lumotlar qo'llandi: $k = 1 \cdot 10^{-12}$ m^2, $\chi = 0{,}1$ m^2/s, $w_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-4}$ m/s, $p_0 = 25$ MPa, $\mu = 5 \cdot 10^{-9}$ Pa·s.

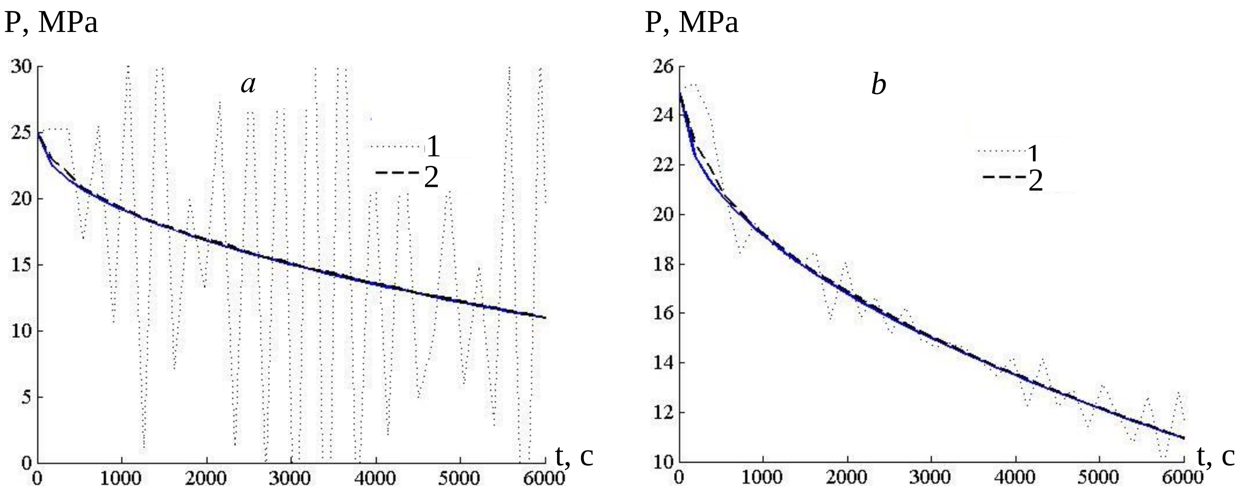
Hisoblash natijalari 9-11 rasmlarda qo'shimcha ma'lumotlarning har xil xatoliklar darajasi bilan ko'rsatilgan. $\delta = 0$ da hosil qilingan egri chiziqlar nisbatan turg'un xarakterga ega (9*a*-rasm). $x = d$ masofaning oshishi bilan De Suza usulida turg'unmas yechimlar paydo bo'lishi Xillz-Xenzel usuliga nisbatan tezroq paydo bo'ladi (9*v*-rasm). Yechim turg'unmasligini yo'qotish maqsadida qadam bo'yicha regulyarizasiya usulini qo'llaymiz, u esa ossillyasiyalari yetarlicha kamaygan shartli turg'un yechimni beradi.

10-rasmda qo'shimcha ma'lumotlar qo'zg'atilgan holdagi qiymatlari bo'yicha natijalar tasvirlangan. Ammo De Suza usulida qo'shimcha ma'lumotlar qo'zg'atilganligi noturg'un yechimlarga olib keladi (10*a*-rasm), ammo Xenzel-Xenz usulida bir vaqtda qadamli regulyarizasiya usuli va ma'lumotlarni silliqlashtirish qo'llansa yetarlicha shartli turg'un yechim olinadi. 11-rasmda qo'zg'atilish darajasi oshirib borilib natijalar olingan va bunda qadamliregulyarizasiya usuli va ma'lumotlarni silliqlashtirish qo'llangan. Bu natijalardan ko'rinicha (9-11 rasmlar) Xenzel-Xenz usuli De Suza usuliga nisbatan ancha afzalliklarga ega ekan va ancha shartli turg'un yechimlar olish imkonini berar ekan.

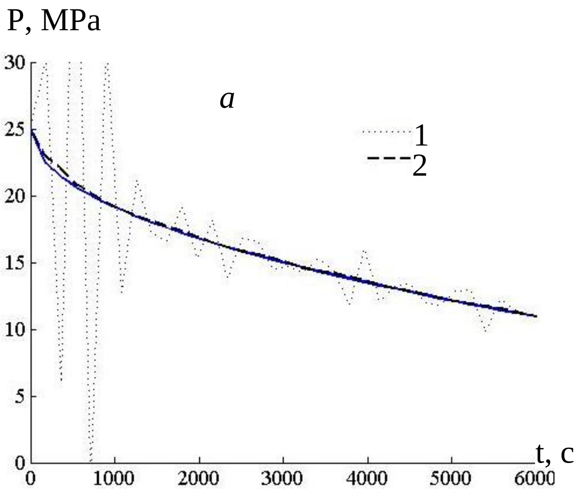


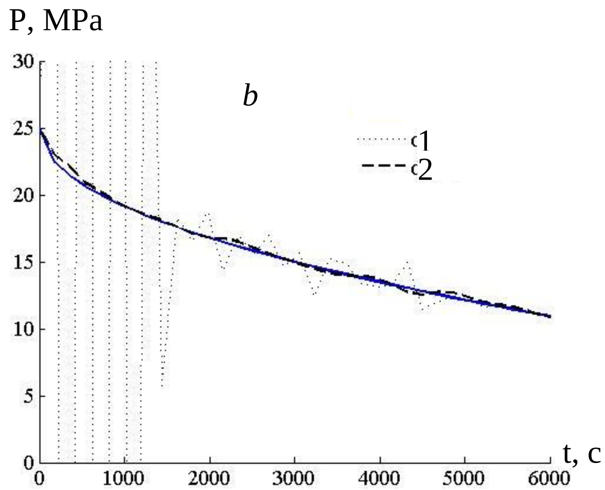


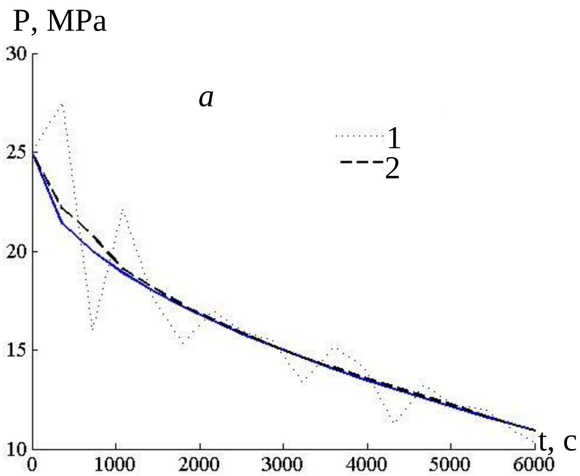
9-rasm. δ=0 da teskari masala yechimlari (tutash chiziq – haqiqiy yechim): a) De Suza usuli, 1 – *d*=40 m dagi yechim; b) Xenzell-Xenz usuli, 1 – *d*=40 m dagi yechim; c) De Suza va Xenzell-Xenz usullaridagi yechim *d*=48 m da, 1 – De Suza usulidagi yechim, 2 - Xenzell-Xenz usulidgi yechim



10-rasm. Qo'zg'atilgan berilgan ma'lumotlar uchun teskari masala yechimi natijalari $\tau_1=5\tau$, $\delta=0{,}0001$ da (tutash chiziq – haqiqiy yechim): a) silliqlashtirilmagan qo'shimcha ma'lumotlar, 1 – De Suza usuli yechimi, 2 – Xenzel-Xenz usuli yechimi; b) silliqlashtirilgan qo'shimcha ma'lumotlar, 1 – De Suza usuli yechimi, 2 – Xenzel-Xenz usuli yechimi;







11-rasm. Qo’zg’atilgan qo’shimcha qiymatlar uchun teskari masala yechimi natijalari *d*=40 m da, 1 – De Suza usulidagi yechim, 2 – Xenzell-Xenz usulidagi yechim (tutash egri chiziq – haqiqiy yechim): a) δ=0,001, τ_1=5τ; b) δ=0,01, τ_1=5τ; c) δ=0,01, τ_1=10τ;

Xulosa

1. Matematik fizikaning to’g’ri va teskari masalalari o’rganildi. Parabolik tipldagi issiqlik tarqalish tenglamasi misolida koeffitsiyentli, chegaraviy va retrospektiv (evolyutsion) teskari masalalarning qo’yilishi ko’rsatildi. Yuqorida ta’kidlangan teskari masalalarni chekli ayirmalar usuli bilan sonli yechish ko’rsatildi. Teskari masalalar haqida to’liq ma’lumotlar keltirildi.

2. Qatlamlarda suyuqliklar sizishining elastiklik rejimida koeffitsiyentli teskari masalalar yechildi. Koeffitsiyentli teskari masalalar yechimidan gidroo’tkazuvchanlik, elastiklik sig’imi, bosim o’tkazuvchanlik koeffitsiyentlari kabi qatlamning asosiy parametrlari aniqlandi. Bu parametrlarni aniqlash uchun koeffitsiyentli teskari masala yechimi Lagranj funksionali statsionarlik shartlaridan foydalanuvchi shartsiz optimizatsiya masalasi yechimiga keltirildi. Identifikatsiya usulidan foydalanib bosim o’tkazuvchanlik koeffitsiyenti aniqlandi. Determenistik momentlar usulidan foydalanib noma’lum koeffitsiyentlarni aniqlash uchun sodda formulalar keltirib chiqarildi.

3. Elastiklik rejimi uchun chegaraviy teskari masala marsh usullarini (De Suza va Xillz-Xenzel usullari) qo’llab yechildi. Qo’shimcha ma’lumotlar o’lchanadigan nuqta va chegara orasidagi masofa uzoqlashishi bilan yechim turg’unligi buzilishi ko’rsatildi. Turg’unlikni ta’minlash uchun,ya’ni yechimostsillyatsiyasini kamaytirish maqsadida qadam bo’yicha regulyarizatsiya usuli qo’llandi. Bundan tashqari shartli turg’un yechimni olish uchun qo’shimcha ma’lumotlar silliqlashtirildi. Qo’shimcha ma’lumotlar Matlabning splayn funktsiyasi bo’lgan spaps yordamida silliqlashtirildi. Natijalar tahlilining ko’rsatishicha Xillz-Xenzel usuli De Suza usuliga nisbatan bir qator afzalliklarga ega ekan.

Adabiyotlar ro`yhati

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. –М., Наука, 1980. – 288 с.
2. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. – М.: Наука, 1984.
3. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
4. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.
5. Beck J.V., Blackwell B., St. Clair C.R., Jr. Inverse Heat Conduction. I11-posed Problems. A Wiley-Interscience Publication, New York, 1985, 308 p.
6. Коздоба Л.А., Круковский П.Г. Методы решения обратных задач теплопереноса. Киев, Наукова думка, 1982.
7. Hao D. Methods for inverse heat conduction problems. – Peter Lang pub. Inc. 1998. – 249 p.
8. Алифанов О.М. Идентификации процессов теплообмена летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1979. – 216 с
9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1986. -288 с.
10. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М.: Наука, 1978.
11. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итерационные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988.
12. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. – М.: Наука, 1986.
13. Морозов В.А. Методы регуляризации неустойчивых задач. – М.: Изд-во МГУ, 1987.
14. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970. – 336 с.

15. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач. – М.: ЛКИ, 2009. – 480 с.
16. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. –М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
17. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988.
18. Бузинов С.Н., Умрихин И.Д. Гидродинамические методы исследования скважин и пластов. – М.: Недра, 1973. – 246 с.
19. Гриценко А.И., Алиев З.С. и др. Руководство по исследованию скважин. – М.: Наука, 1995. – 523 с.
20. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. – 339 с.
21. Щелкачев В.Н. Основы и приложения теории неустановившейся фильтрации: Монография: В 2 ч. — М.: Нефть и газ, 1995.Ч. 1. – 586 с., Ч. 2. – 493 с.
22. Голубев Г.В., Данилаев П.Г., Тумашев Г.Г. Определение гидропроводности неоднородных нефтяных пластов нелокальными методами. Казань, КГУ, 1978. – 176 с.
23. Данилаев П.Г. Коэффициентные обратные задачи для уравнений параболического типа и их приложения. – Казань: Изд-во Казанского математического общества, изд-во УНИПРЕСС, 1998. – 127 с.
24. Мирзаджанзаде А.Х., Хасанов М.М., Бахтизин Р.Н. Этюды о моделировании сложных систем нефтедобычи. Нелинейность, неравновестность, неоднородность. – Уфа: Гилем, 1999. – 464 с.
25. Kravaris G., Seinfeld J.H. Identification of parameters in distributed parameter system by regularization. // SIAM J. Control and Optimization. – 1985. – V.23. №2. – P. 217-241.
26. Sun N.-Z. Inverse problems in Groundwater modeling. Kluwer Acad. Norwell. Mass. – 1994. – 337 p.

27. Хайруллин М.Х., Хисамов Р.С., Шамсиев М.Н., Фархуллин Р.Г. Интерпретация результатов гидродинамических исследований скважин методами регуляризации. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. – 172 с.
28. Басниев К.С., Хайруллин М.Х., Садовников Р.В., Шамсиев М.Н., Морозов П.Е. Исследование горизонтальных газовых скважин при неустановившейся фильтрации // Газовая промышленность. – 2001. №1. – С. 41-43.
29. Басниев К.С., Хайруллин М.Х., Шамсиев М.Н., Садовников Р.В., Гайнетдинов Р.Р. Интерпретация результатов газогидродинамических исследований вертикальных скважин на основе теории некорректных задач // Газовая промышленность. – 2001. №3. – С. 41-42.
30. Морозов П.Е., Садовников Р.В., Шамсиев М.Н., Хайруллин М.Х. Оценивание фильтрационных параметров пласта по данным нестационарного притока жидкости к вертикальным скважинам // ИФЖ. – 2003. – Т.76. №6. – С. 142-146.
31. Муслимов Р.Х., Хайруллин М.Х., Шамсиев М.Н., Гайнетдинов Р.Р., Фархуллин Р.Г. Интерпретация кривой восстановления давления на основе теории регуляризации // Нефтяное хозяйство. – 1999. №11. – С. 19-20.
32. Хайруллин М.Х., Шамсиев М.Н., Садовников Р.В. Численные алгоритмы решения обратных задач подземной гидромеханики // Математическое моделирование. – 1998. – Т. 10. №7. – С. 101-110.
33. Khairullin M., Shamsiev M., Sadovnikov R. Identification of filtration parameters of the fractured porous medium. Proceeding of Saint-Venant Symposium “Multiple scale analysis and coupled physical systems”. Paris? 1997. – P. 591-595.
34. Б. Х. Хужаёров, Холияров Э. Ч., Бурнашев Р. Ф. Задача идентификации параметров при упруго-пластическом режиме фильтрации // ДАН РУз. №2, 2005. С. 32-35.

35. Хужаёров Б. Х., Холияров Э. Ч., Шодмонов И. Э. Об одной обратной задаче упруго-пластической фильтрации жидкости в пористой среде // Материалы Международной научно-технической конференции «Современные проблемы и перспективы механики». Ташкент. 17-18.05.2006. С. 167-169.
36. Холияров Э. Ч., Рахимов М. Н. Обратная задача упруго-пластической фильтрации жидкости в пористой среде // Сборник тезисов Международной конференции молодых ученых посвященный 1000 летию академии Маъмуна Харезма. Ташкент, 2006. С. 30-31.
37. Хужаёров Б. Х., Холияров Э. Ч. Определение параметров глубоких нефтяных пластов при упруго-пластическом режиме // «Проблемы разработки нефтегазоконденсатных месторождений и пути их решения». Материалы Республиканской научно-практической конференции. Ташкент. 18-19.10.2006. С. 59-64.
38. Хужаёров Б. Х., Холияров Э. Ч. Обратные задачи упругопластической фильтрации жидкости в пористой среде // ИФЖ. 2007. Т. 80. № 3. С. 86 – 93.
39. Хужаёров Б.Х., Холияров Э.Ч., Умаров Т.И. Определение параметров пласта при упруго-пластическом режиме фильтрации // «Актуальные вопросы механики и математики». Труды КНИИРП Сам. отд. АН РУз. Вып. 3. - Самарканд, 2007. С. 114-121.
40. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. – М.: Недра, 1982. – 407 с.
41. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
42. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. М.: Мир, 1973.
43. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Панкратон Б.М. Решение нелинейной обратной задачи теплопроводности. // Тепломассообмен-V. Минск: ИТМО АН БССР. 1976. Т. 9. С. 94-103.

44. Холияров Э.Ч., Эломов Ф.З. Об одной обратной граничной задаче при упругом режиме фильтрации // Международная научно-техническая конференция «Современные проблемы механики» (23-24 сентябрь). – Ташкент, 2009. С. 201-203.
45. Хужаёров Б.Х., Холияров Э.Ч., Эломов Ф.З. Граничная обратная задача при упругом режиме фильтрации однородной жидкости в пористой среде // Сборник материалов IV-международной конференции «Проблемы развития инженерных коммуникаций» 17-21.05.2010. г. Самарканд. С. 48-50.
46. Хужаёров Б.Х., Холияров Э.Ч., Эломов Ф.З., Нурматов Г. Обратная задача по восстановлению граничных условий при фильтрации жидкости в пористой среде // Сборник материалов Республиканской научной конференции «Проблемы современной математики» 22-23.04.2011. г. Карши. С. 547-550.
47. Щелкачев В.Н. Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде // Докл. АН СССР. Т. 52. № 2. 1946. С. 103-106.
48. Щелкачев В.Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. – М.: Гостоптехиздат, 1959.
49. Хужаёров Б.Х., Холияров Э.Ч., Эломов Ф.З. Решение обратных граничных задач для нелинейно-упругого режима фильтрации жидкости // Сборник материалов Республиканской научно-технической конференции «Современное состояние и перспективы развития информационных технологий» 5-6.09.2011. г. Ташкент. С. 280-285.
50. Бабе Г. Д., Бондарев Э. А., Воеводин А. Ф., Каниболотский М. А. Идентификация моделей гидравлики. Новосибирск: Наука, 1980.
51. D` Souza, N., Numerical Solution of One – Dimen Sional Inverse Transient Heat Conduction by Finite Difference method, ASME Paper No. 75- WA|HT-81, presented at Winter annual Meeting, Houston, TX, Nov. 30-Dec. 4, 1975.
52. Weber C.F. Analysis and Solution of the Ill-Posed Inverse Heat Conduction Problem, Int. J. Heat Mass Transfer, 24(11), 1783-1792 (1981).

53. Raynaud M. Determination du Flux Surfacique Traversant Une Paroi Soumise a Un Incendie au Moyen D’Une Methods D’Inversion, Laboratoire D’Aerothermique Groupe ‘Echanges Thermiques’ Universite Pierre et Marie Curie, Paris, France, August 1983.
54. Raynaud M. And Bransier J. A New Finite Difference Method for Non Linear Inverse Heat Conduction Problem, to be published in Numerical Heat Trdnsfer.
55. Hills, R. G. and Hensel, E. C., SMICC, the Space Marching Inverse Conduction Code, SAN 84-1563, Sandia National Laboratory, Albuquerque, NM, 1985.
56. Рихтмайер Р.Д., Мортон К.У. Разностные методы решения краевых задач. – М.: Мир, 1972.
57. Холияров Э.Ч., Жабборов Ж.С. Методы решения граничной обратной задачи при упругом режиме фильтрации нефти // Тезисы докладов VIII Казахстанско-Российской международной научно-практической конференции “Математическое моделирование в научно-технологических и экологических проблемах нефтегазовой отрасли”. Атырау, 2014 (20-21 июня 2014 г.). С. 129.
58. Мэтьюз Джон Г., Финк Куртис Д. Численные методы. Использование MATLAB. – М.: Издательский дом "Вильяме", 2001. – 720 с.
59. Дьяконов В. П., Круглов В. В. Математические пакеты расширения MATLAB: Специальный справочник. – СПб.: ПИТЕР, 2001. – 480 с.
60. Кетков Ю. Л., Кетков А. Ю., Шульц М. М. MATLAB 7: программирование, численные методы. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.
61. Дьяконов В. П. MATLAB 7.*/R2006/R2007: Самоучитель. – М.: ДМК Пресс, 2008. – 768 с.