

**O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI XALQ TA'LIMI VAZIRLIGI**

**NAVOIY DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI**

Qo`lyozma huquqida

**Do`stov Said To`yboyevich**

**DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI MAPLE PAKETI YORDAMIDA  
SONLI YECHISH USULLARI**

**Mutaxassislik: 5A140102- informatika**

**Magistr**

**akademik darajasini olish uchun yozilgan**

**D I S S E R T A T S I Y A**

Ilmiy rahbar: f.-m.f.n.Sh.J.Xudoyorov

**Navoiy -2009**

## MUNDARIJA

<b>KIRISH</b>	3
<b>1-BOB. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISH USULLARI</b>	6
1.1 . Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar uchun Koshi masalasi	6
1.2. Birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechish usullari	6
1.3. Issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasini sonli yechish usullari	13
1.4. O`zgaruvchi koeffitsiyentli issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasini yechish	24
1.5. Ikki o`lchovli issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasini sonli yechish usuli	29
<b>II-BOB. DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI MAPLE PAKETI YORDAMIDA YECHISH USULLARI</b>	36
2.1. Differensial tenglamaning analitik va umumiy yechimi	36
2.2. Differensial tenglamalar sistemasi	44
2.3. Darajali qatorlar yordamida differensial tenglamaning taqribiy yechimini topish	47
2.4. Differensial tenglamaning sonli yechish	49
2.5. Differensial tenglama yechimining grafigini Detools paketi yordamida namoyish qilish.	53
2.6. Differensial tenglamalar sistemasining fazodagi rasmini chizish	55
2.7. Xususiy hosilali differensial tenglamalarni Maple da yechish usullari	58
2.8. Maple dasturining differensial tenglamalarni yechish uchun mo`ljallangan maxsus paketida ishlash	65
<b>XULOSA</b>	75
<b>FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR</b>	77

## KIRISH

**Tadqiqot mavzusining dolzarbligi.** Matematik modellar o`rganilayotgan jarayonning asosiy xususiyatlarini o`zida iloji boricha to`laroq, to`kisroq mujassam qilishi kerak. Bu esa ularning ilojsiz murakkablashuviga sabab bo`ladi. Bunday matematik modellarni ishlatish, ular asosida loyiha ko`rsatkichlarining xususiyatlarini tasvirlovchi yechim olish ham o`z navbatida murakkablashadi. Matematik modellarni tashkil qiluvchi algebraik, differensial, integral, integro-differensial va boshqa tenglamalarni yechish usullari yetarli darajada takomillashmagan. Ayrim maxsus kurslarda keltiriladigan aniq, analitik usullar faqat xususiy ko`rinishdagi, sodda tenglamalarning yechimini topish imkonini beradi, xolos. Sonli usullar esa umumiyroq, ancha murakkab tenglamalarning yechimlarini topishga imkon beradi.

Elektron hisoblash mashinalarining yaratilishi sonli usullar tatbiqiga keng istiqbol yaratdi. Ilgari analitik usullarda yechilmagan tenglamalarni kompyuterlarda sonli usullar bilan yechish imkoniyati yaratildi. Bu keyingi yillarda loyiha tashkilotlari tomonidan tuzilayotgan qurilish ob`ektlarining loyihalarida ham o`z aksini topmoqda.

Ushbu magistrlik ishida yuqori texnologiyalarga asoslangan texnik tizimlarni yangi avlodlarini yaratishdagi matematik modellashtirish usullari keng qo`llaniladi. So`nggi yillarda shaxsiy kompyuterlarda juda samarali joriy qilinayotgan komp'yuter algebra tizimlari muayyan tizimlarni tadqiq etish uchun amaliy dasturlar yaratishda yangicha texnologiyalarni qo`llash imkoniyatlarini ochib berdi.

Bu vositalar amaliy dasturiy ta`minot yaratishdagi masalaning matematik modelini keltirib chiqarish, hisoblash usullarini tanlash, hisoblash eksperimentlarini o`tkazish va natijalarni tahlil qilish jarayonini to`liq avtomatizatsiyalash imkonini beradi. Bu esa, amaliy dasturiy ta`minotni tashkil qilishning tamoyillarini va masalalarni kompyuterda yechishning an`anaviy texnologiya doirasida qo`llanilib kelgan usullarini tubdan o`zgartiradi.

### **Ilmiy tadqiqotning maqsad va vazifalari:**

Mazkur magistrlik dissertatsiyasida xususiy hosilali differensial tenglamalarning yechish usullari haqida fikr yuritilgan bo`lib ular quyidagi usullar hisoblanadi: aniq usullar, taqribiy usullar va sonli usullar.

Aniq usullar bilan asosan chiziqli xususiy hosilali tenglamalar sodda ko`rinishdagi chegaraviy va boshlang`ich shartlar berilganda yaxshi natijalar olish mumkin.

Taqribiy usullar ham umumiy ko`rinishda berilgan masalalarni yechishda bevosita ishlatilishi mumkin emas. Faqat xususiy hollardagina, masalaning ayrim xususiyatlaridan foydalanib uni soddalashtirib taqribiy yechimlar olinishi mumkin. Hozirgi kunda eng ko`p ishlatiluvchi usullar sonli usullardir.

Biz ushbu magistrlik ishida differensial tenglamalarni hozirgi kun matematikasi uchun eng ko`p qo`llaniladiga va qulay bo`lgan Maple dasturidan foydalangan holda sonli usullar yordamida yechishni maqsad qilib qo`ydik. Bunday tenglamalarni yechishda maple paketining imkoniyatlarini o`rganish va uni amaliy ahamiyatini ko`rsatish, bundan tashqari xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechish, ikki o`lchovli issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasini sonli yechish, differensial tenglamaning analitik va sonli yechimini Maple dasturi yordamida topish hamda xususiy hosilali differensial tenglamalarni Maple paketi yordamida yechish usullarini o`rganish bizning asosiy vazifamiz hisoblanadi.

### **Tadqiqotning amaliy ahamiyati:**

Ilmiy tadqiqot natijalaridan va bu magistrlik ishida ilgari surilgan g`oyalardan murakkab differensial va integral tenglamalarni sonli yechishda foydalanish mumkin. Chunki matematik model differensial tenglama bilan tasvirlangan bo`lsa, sonli usullar yordamida u chekli sondagi nuqtalarda aniqlangan ayirmali tenglamalar bilan almashtiriladi. Shuni ta`kidlab o`tish lozimki, Maple paketidan foydalanilganda juda murakkab ko`rinishdagi xususiy hosilali differensial tenglamalarni analitik va sonli yechish va bu yechimlarning

ikki o`lchamli va uch o`lchamli grafiklarini hosil qilib ularni tahlil qilish imkoniyatlari yaratiladi.

#### **Tadqiqotning ilmiy yangiligi:**

- Ikki o`lchovli issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasining sonli yechish usuli keltirilgan.
- Differensial tenglamalarni zamonaviy dasturlash tizimlaridan biri bo`lgan Maple dasturida tasvirlash va uning analitik yechimini topish keltirilgan.
- Maple paketi yordamida differensial tenglamalarni sonli yechish ko`rsatib o`tilgan va unga doir bir nechta misollar yechib ko`rsatilgan.
- Mapleda paketida darajali qatorlar yordamida differensial tenglamaning taqribiy yechimini topish usuli taqdim etilgan.
- Xususiy hosilali differensial tenglamalarni Maple yordamida yechish usullari ko`rsatib o`tilgan.

#### **Tadqiqot ob'yekti va predmeti:**

Matematikaning juda murakkab sohalari sanalgan differensial tenglamalar va matematik fizika tenglamalari fanlarida o`tilayotgan xususiy hosillali differensial tenglamalarni, issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasini va to`lqin tarqalish tenglamalarini o`rganish va ularni yechimini topishda zamonaviy axborot texnologiyalarni qo`llash tadqiqot ob'yekti sifatida qaralmoqda.

#### **Magistrlik dissertatsiyasining tuzilishi:**

Dissertatsiyaning umumiy hajmi 78 bet bo`lib, u kirish, ikkita bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro`yxatidan iborat.

# I-BOB. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISH USULLARI

## 1.1. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar uchun Koshi masalasi

Bizga birinchi tartibli differensial tenglama berilgan bo`lsin. Unga qo`yilgan Koshi masalasi quyidagicha bo`ladi:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1.1)$$

differensial tenglamaning  $[a, b]$  kesmada aniqlangan va

$$y(x_0) = y_0 \quad (1.2)$$

boshlang`ich shartlarni qanoatlantiruvchi taqribiy yechimi topilsin. Bu yerda  $f(x, y)$  funksiya :  $D = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$  to`g`ri to`rtburchakda aniqlangan bo`lib,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2| \quad (1.3)$$

$$\left| \frac{df}{dx} = \frac{df}{dx} + f \frac{df}{dx} \right| \leq M \quad (1.4)$$

shartlarni qanoatlantiradi,  $M = const, N = const$ .

## 1.2. Birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechish usullari

Birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamaga ko`chirish tenglamasi ham deyiladi. Buning sababi shundaki, bu tenglamalar muhitida har xil zarrachalarning ko`chishini, chayqalish va to`lqinlanishining muhiti bo`ylab tarqalishining matematik modeli sifatida qaraladi. Umumiy holda ko`chirish

tenglamalari murakkab tenglamalardan iborat bo`ladi. Lekin biz bu yerda birinchi tartibli xususiy hosilali tenglamalarni qarash bilan cheklanamiz.

Chiziqli ko`chirish tenglamasi ikki o`zgaruvchili  $u(t,x)$  funksiyaga nisbatan

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(t,x) \frac{\partial u}{\partial x} = f(t,x) \quad (1.5)$$

shaklda yoziladi.

Tenglamani chap tarafi  $u(t,x)$  funksiyaning  $t$  ga nisbatan burchak koeffitsiyenti  $\partial x / \partial t = a(t,x)$  bo`lgan yo`nalish bo`yicha

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + a(t,x) \frac{\partial u}{\partial x}$$

to`la hosilasidir. Shuning uchun (1.5) tenglama

$$\frac{du}{dt} = f(x,t), \quad (1.6)$$

$$\frac{dx}{dt} = a(x,t) \quad (1.7)$$

xarakteristik formada ham yozilishi mumkin.

(1.5) tenglama  $a(x,t)$  tezlik bilan harakatlanuvchi muhitning issiqlik yoki zarrachalarni bir o`lchovli ko`chirish jarayonining matematik modelidir. Muhitdagi manba yoki issiqlik yurituvchi nuqtalarning kuchlanishi  $f(x,t)$  funksiya bilan xarakterlanadi. Bu masalada (1.7) tenglamaning yechimi, ya`ni integral chiziqlari xarakteristikalar deyiladi. Agar  $a(x,t) = const$  bo`lsa, (1.7) tenglamaga binoan xarakteristikalar  $x - at = c = const$  to`g`ri chiziqlar oilasidan iborat bo`ladi. Ko`chirish tezligi  $a$  musbat bo`lsa, xarakteristikalar o`ng tarafga og`ma to`g`ri chiziqlar bo`ladi. (1.6) tenglama xarakteristikalarda  $u$  ga nisbatan oddiy differensial tenglama bo`ladi. Bu tenglamaning yechimi  $t = t_0$  da berilgan  $u = u_0$  boshlang`ich shart bilan aniqlanadi. Xususiy holda  $f(t,x) = 0$  bo`lsa, o`zgarmas  $u = const$  yechimni hosil qilamiz.

(1.5) tenglama  $x$  bo`yicha cheksiz sohada qaralsa, Koshi masalasi qo`yiladi.

Masalan,

$$\tau \geq \tau \geq 0, \quad \infty > \chi > -\infty$$

sohada

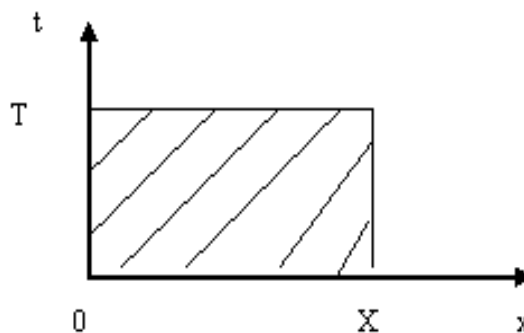
$$u(0, x) = \varphi(t) \tag{1.8}$$

sharti berilishi mumkin.

Xususiy holda  $a = const, f = 0$  bo'lganda Koshi masalasining yechimi  $u(t, x) = \varphi(x - at)$  shaklda yoziladi. Yechimni  $\exp i\omega(x - at)$  ko'rinishda ham yozish mumkin. Oxirgi yechim  $x$  o'qi bo'ylab o'zgarmas  $a$  tengsizlik bilan yuguruvchi monoxromatik to'lqinni ifodalaydi. Yuqoridagi  $\varphi(x - at)$  yechimga yuguruvchi to'lqin deyiladi.

Yechimning fazoviy profili yoki fazoviy taqsimoti deb  $t = t_1$  bo'lgandagi yechim  $u(t, x)$  ning  $(u, x)$  tekislikdagi grafigiga aylanadi. Agar  $a = const > 0, f = 0$  bo'lsa, fazoviy profil  $x$  o'qi bo'ylab o'z shaklini o'zgartirmaydi, o'zgarmas  $a$  tezlik bilan siljib boradi.

Chegaralangan sohalarida masala birmuncha boshqacha qo'yiladi. Masalan, tenglama  $G: \{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X\}$  sohada qaralayotgan bo'lsin. Boshlang'ich shart  $u(0, x) = \varphi(x)$  shaklida berilsin. Bundan  $\varphi(x)$  ma'lum funksiya (1-rasm).



1-rasm

Koshi masalasidan farqli ravishda endi  $[0, x]$  kesmaga kiruvchi massa (yoki issiqlik) miqdorini ko'rsatish kerak. Bu demak,  $x = 0$  yoki  $x = X$  chegaralarda xarakteristikalar sohaga kiruvchi nuqtalarda  $u(t, x)$  yechim berilishi kerak.

Masalan, agar  $a > 0$  bo'lsa  $u(t, x)$  funksiyani sohaning chap chegarasida berish kerak, ya'ni chegaraviy shart  $x = 0$  da berilishi kerak. Bu shart

$$u(t, 0) = \psi(t) \quad (1.9)$$

ko'rinishda yoziladi. Bunda  $\psi(t)$  funksiya ma'lum funksiyadir.

Ko'chirish tenglamasini yechish uchun to'r usuli (chekli ayirmalar usuli) ishlatilganda, tenglama, boshlang'ich va chegaraviy shartlar to'r funksiyalari yordamida yoziladi. Quyida  $a = const$  bo'lgandagi

$$\frac{du}{dt} + a \frac{du}{dx} = f(t, x) \quad (1.10)$$

ko'chirish tenglamasini (1.8) va (1.9) shartlarda qaraymiz. Cheksiz sohada (1.10), (1.8) Koshi masalasini to'r masalasi bilan almashtiramiz. Sohada  $x_i = ih, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  va  $t_j = j\tau, j = 0, 1, 2, \dots$  tugun nuqtalari bilan aniqlangan to'g'ri burchakli to'r kiritamiz. (1.10) tenglamada hosilalarni  $(i, j)$  nuqtada chekli ayirmalar bilan almashtiramiz:

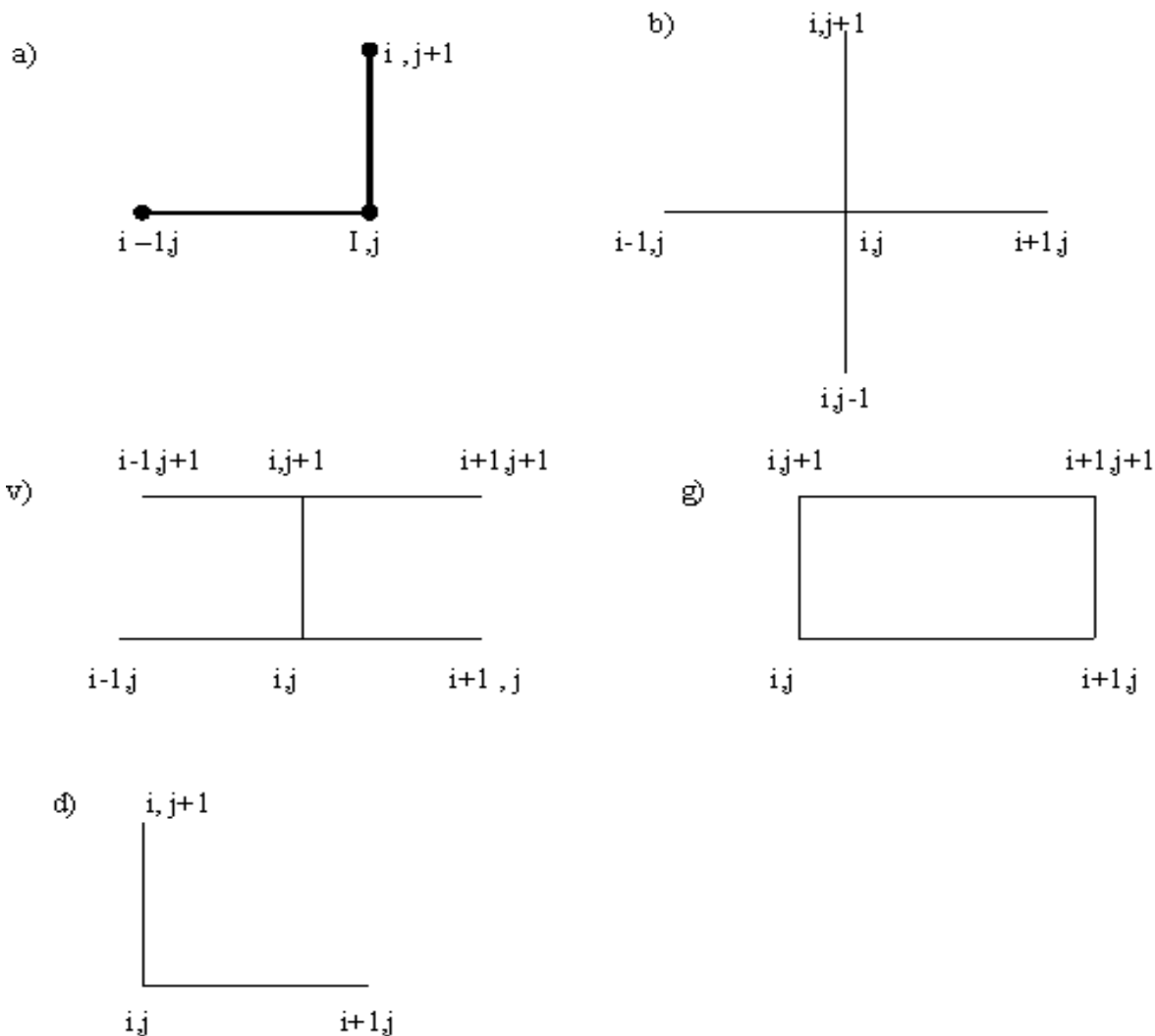
$$\frac{du}{dt} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + o(\tau), \quad \frac{du}{dx} = \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h} + o(h)$$

Bu almashtirishga mos keluvchi shablon 2-a rasmda ko'rsatilgan.

Bulardan foydalanib (1.10) tenglamani

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + a \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h} = f_i^j \quad (1.11)$$

deb yozamiz. Bunda  $f_i^j = f(t_j, x_i)$



2-rasm

boshlang'ich shart (1.8) ni to'rt formasida yozamiz:

$$u_i^0 = \varphi_i = \varphi(ih), i = 0; \pm 1; \pm 2; \dots \quad (1.12)$$

Agar (1.12) chekli ayirmali tenglamani  $u_i^{j+1}$  ga nisbatan yechsak,

$$u_i^{j+1} = \lambda u_{i-1}^j + (1 - \lambda) u_i^j + \tau f_i^j,$$

$$\lambda = \frac{a\tau}{h}; i = 0; \pm 1, \pm 2, \dots, j = 0, 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

chekli ayirmali sxemani hosil qilamiz. (1.10) tenglamaning aniq yechimi  $u(t, x)$  uchun

$$\frac{u(t, x) - u(t, x - h)}{h} = \frac{du}{dx} - \frac{h}{2} \frac{d^2u(t, x^*)}{dx^2}$$

$$\frac{u(t + \tau, x) - u(t, x)}{\tau} = \frac{du}{dt} + \frac{\tau}{2} \frac{d^2 u(t^*, x)}{dt^2} \quad (1.14)$$

formula o`rinli. Bunda  $t^* \in [t, t + \tau]$ ,  $x^* \in [x - h, x]$ .

Tafovut funksiyasi  $R_h = f_h - L_h u$  ga teng bo`ladi va  $L_h$  chekli ayirmali operator (1.11) ga ko`ra

$$L_h(\bullet) = \frac{(\bullet)_i^{j+1} - (\bullet)_i^j}{\tau} + a \frac{(\bullet)_i^j - (\bullet)_{i-1}^j}{h}$$

bo`ladi. Demak, (1.14) ni hisobga olsak, tafovut uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$R_h = f_i^j - \frac{\tau}{2} \cdot \frac{d^2 u(t^*, x)}{dt^2} + \frac{ah}{2} \cdot \frac{d^2 u(t, x^*)}{dx^2}. \quad (1.15)$$

(1.15) dan ko`rinib turibdiki, (1.11) chekli ayirmali sxema  $\tau$  va  $h$  bo`yicha birinchi tartib bilan (1.10) tenglamani approksimatsiyalar ekan, ya`ni approksimatsiya aniqligi  $O(\tau + h)$  bo`ladi.

Endi (1.11) yoki (1.13) chekli ayirmali sxemaning yaqinlashishini tekshiramiz. (1.13) sxemada  $\lambda \leq 1$  bo`lsin.  $\omega = u - u_h$  to`r funksiya

$$\frac{\omega_i^{j+1} - \omega_i^j}{\tau} + \frac{\omega_i^j - \omega_{i-1}^j}{h} = R_i^j \quad (1.16)$$

tenglamani qanoatlantiradi. Bunda  $R_i^j$  (1.15) formula bilan aniqlangan  $R_h$  tafovut funksiyasidir. Boshlang`ich shart  $\omega_i^0 = 0$  bo`ladi. (1.16) dan

$$\omega_i^{j+1} = (1 - \lambda)\omega_i^j + \lambda\omega_{i-1}^j + \tau R_i^j \quad (1.17)$$

kelib chiqadi.

Quyidagi

$$\|\omega^j\| = \sup_i \omega_i^j \approx \sup_{i,j} \|\omega^j\|, \|a\| = \sup_{i,j} |R_i^j|$$

belgilashlar kiritib, (1.17) tenglamadan

$$|\omega_i^{j+1}| \leq (1 - \lambda)|\omega_i^j| + \lambda|\omega_{i-1}^j| + \tau|R_i^j| \leq \|\omega^j\| + \tau\|a\|$$

va demak,

$$\|\omega^{j+1}\| \leq \|\omega^j\| + \tau\|a\|$$

hosil qilamiz

Oxirgi tengsizlikda  $j = 0, 1, 2, \dots, i-1$  deb  $\|\omega^i\| \leq \tau \|a\|$  ga va  $L\tau \leq T$  ekanligidan  $\|\omega\| \leq T \cdot O(h)$  ga ega bo'lamiz. Bu esa yechimni yaqinlashini ko'rsatadi. Yaqinlashish tartibi  $h$  ga teng.

Ko'chirish tenglamasini boshqacha shaklda ham approksimatsiya qilish mumkin. Masalan (1.10) tenglamadagi hosilalar "but" shablon asosida approksimatsiya qilinsa (2-b rasm),

$$\frac{u_i^{j+1} - u_j^{i-1}}{2\tau} + \frac{u_{i+1}^j - u_{j-1}^i}{2h} = f_i^j \quad (1.18)$$

to'r tenglamasi hosil bo'ladi.

Markaziy ayirmalar uchun

$$\frac{u(t+\tau, x) - u(t-r, x)}{2\tau} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \dots \quad \frac{u(t+h) - u(t-h)}{2h} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \dots$$

formulalardan ko'rinadiki, (1.18) chekli ayirmali tenglama (1.10) tenglamani  $\tau$  va  $h$  ga nisbati ikkinchi tartib bilan approksimatsiyalaydi.

(1.18) tenglamada to'r funksiyaning uchta  $j-1, j, j+1$  qatlamlaridagi qiymatlari qatnashadi. Shuning uchun bu tenglamaga uch qatlamli tenglama deyiladi. (1.11) va (1.13) tenglamalarning ikki qatlamli ekanligini ko'rish qiyin emas.

Ko'chirish tenglamasida 2-v rasmda ko'rsatilgan shablon asosida hosilalarni approksimatsiyalayab

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + \frac{a}{2} \left[ \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{2h} + \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} \right] = f_i^j \quad (1.19)$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamaning approksimatsiya xatoligi  $O(\tau + h^2)$  bo'ladi.

Agar hosilalar 2-g rasmdagi shablon asosida approksimatsiya qilinsa

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i+1}^j}{\tau} \right] + \frac{a}{2} \left[ \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h} + \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{h} \right] \quad (1.20)$$

tenglamaga kelinadi. Bu tenglamaning approksimatsiya xatoligi  $O(\tau^2 + h^2)$  dir.

To`r tenglamasida belgilangan  $i$  uchun to`r funksiyaning eng yuqori qatlamiga faqat bitta qiymati qatnasha, to`r approksimatsiyasi oshkor, aks holda oshkormas deyiladi. Yuqorida qaralgan chekli ayirmali tenglamalarning (1.13), (1.17) lari oshkor, (1.19), (1.20) lari esa oshkormas sxemalarga mos keladi. Oshkormas sxemalar ishlatilganda, chekli ayirmali tenglamalar algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriladi.

Ko`chirish tenglamasini 2-d rasmdagi shablon orasida approksimatsiya qilinsa,  $\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + a \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h} = f_i^j$  to`r tenglamasini olamiz. Lekin bu tenglama uchun (1.12) shart asosida qo`yilgan Koshi masalasida yechim yaqinlashuvchi bo`lmaydi. Chunki bu sxema turg`un emas.

Ko`chirish tenglamasini approksimatsiyalash uchun boshqa shablonlar ham ishlatiladi. Lekin har bir chekli ayirmali sxemani ishlatishdan oldin uning approksimatsiya xatoligini va turg`unligini aniqlash kerak. Aks holda har xil yaroqsiz yechimlar olinishi mumkun.

### 1.3. Issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasini sonli yechish usullari

Endi biz differensial tenglamalarni yechishga doir aniq misolni ko`rib chiqamiz. Bizga misol sifatida oldindan ma`lum bo`lgan issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasi berilgan bo`lsin.

$$\frac{dT}{dt} = a\Delta T, a = \frac{\lambda}{pc} \quad (2.1)$$

Bu tenglamani manbalari bor hol uchun quyidagicha yozishimiz mumkin

$$\frac{dT}{dt} = a \frac{d^2T}{dx^2} + f(x,t). \quad (2.2)$$

Bu yerda  $f(x,t)$  funksiyalar issiqlik manbaining kuchini ifodalaydi.

Boshlang`ich va chegaraviy shartlar

$$T(x,0) = \varphi(x), \quad (2.3)$$

$$T(0,t) = \psi_1(t), T(l,t) = \psi_2(t) \quad (2.4)$$

ko`rinishda beriladi. Bunda  $\varphi(x)$ ,  $\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t)$  funksiyalar berilgan funksiyalardir. Bu funksiyalar ma'lum sillqlik shartlarini (o'zlarining va turli tartibdagi hosilalarining uzluksizligi) bajarilganda (2.2)-(2.4) masalaning  $T(x,t)$  yechimi mavjud va yagona bo'ladi. Shu bilan birga  $T(x,t)$  yechimning o'zi ham  $x$  va  $t$  o'zgaruvchilar bo'yicha yetarli tartibli hosilalarga ega deb faraz qilamiz. Boshlang'ich va chegaraviy funksiyalar o'zaro muvofiqlashgan bo'lishi kerak, ya'ni

$$T(0,0) = \varphi(0) = \psi_1(0),$$

$$T(l,0) = \varphi(l) = \psi_2(0)$$

shartlar bajarilishi kerak. Umuman olganda, bu shartlar bajarilmaganda ham (2.2) tenglama yechimga ega.

Yuqorida ko`rilgani singari (2.2) tenglamaning  $T(x,t)$  yechimi aniqlangan  $\{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq \tau\}$  sohada to`r kiritamiz, masalan,

$$\omega_h = \{x_i = ih, i = 1, 2, \dots, I, Ih = l\},$$

$$\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, 2, \dots, \tau, \tau h = t\}$$

to`rni  $x$  va  $t$  o'zgaruvchilar bo'yicha kiritish mumkin. Bu ikkala to`rdan  $\omega = \omega_h \times \omega_\tau$  ikki o'lchamli to`r aniqlanadi. Uning tugun nuqtalari

$$(x_i, t_j), i = \overline{0, I}; j = \overline{0, J}$$

nuqtalardan iboratdir. Bu to`rning

$$\{0 \leq i \leq I, j = 0\}, \{i = 0, 0 \leq j \leq J\}, \{i = I, 0 \leq j \leq J\}h$$

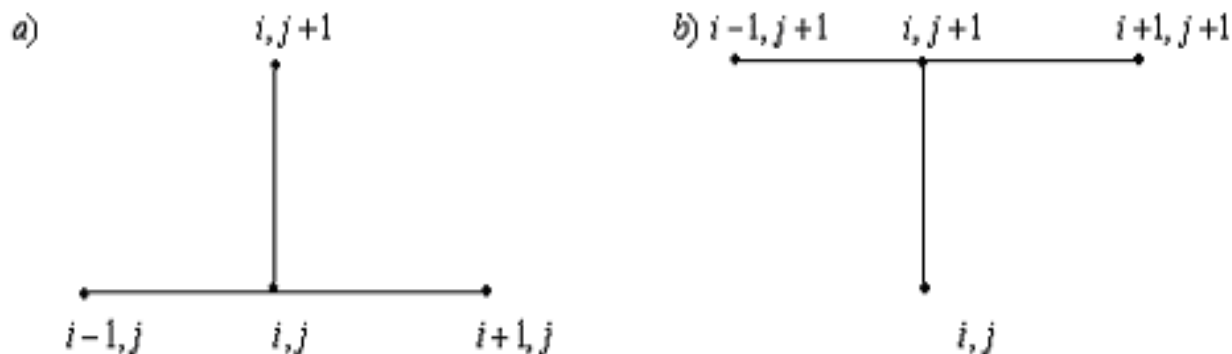
tugunlari chegaraviy tugunlar, boshqa tugunlar esa ichki tugunlardan iborat bo'ladi.  $h$  va  $\tau$  qiymatlar  $\omega$  to`rning  $x$  va  $t$  bo'yicha qadamlari deyiladi. Tugun nuqtalarda  $T(x,t)$  yechimning qiymatlari  $T(x_i, t_j)$  bo'ladi.

(2.2) tenglamani approksimatsiya qilish uchun

$$(x_{i-1}, t_j)(x_i, t_j)(x_{i+1}, t_j)(x_i, t_{j+1})$$

nuqtalardan tashkil topgan shablonni ishlataylik (3-a rasm). Bu shablonda  $\frac{dT}{dt}$  va

$\frac{d^2T}{dx^2}$  hosilalarni



3-rasm

chekli ayirma bilan almashtiramiz. To`r funksiyasining  $(x_i, t_j)$  nuqtadagi qiymatini  $T_i^j$  deb belgilaymiz. Manba funksiyasi  $(x_i, t_j)$  uchun har xil approksimattsiyalar ishlatilishi mumkin. Bunday approksimattsiyalardan eng soddasi  $f_i^j = f(x_i, t_j)$  ko`rinishda olinadi.

Boshqacharoq ko`rinishda

$$\frac{1}{h} \int_{x_i-1/2}^{x_i+1/2} f(x, t_j) dx, \frac{1}{h\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_i-1/2}^{x_i+1/2} f(x, t) dx$$

approksimattsiyalar ishlatilishi mumkin.

$$\text{Natijada} \quad \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} = a \frac{T_{i-1}^j - 2T_i^j + T_{i+1}^j}{h^2} + f_i^j \quad (2.5)$$

to`r tenglamasini olamiz.

Boshlang`ich shart (2.3) ga ko`ra

$$T_i^0 = \varphi_i = \varphi(x_i), i = 0, I \quad (2.6)$$

kabi approksimattsiyalanadi.

Chegaraviy shartlar esa

$$T_0^i = \psi_{1j} = \psi_1(t_j), T_i^j = \psi_{2j} = \psi_2(t_j) \quad (2.7)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, J$$

ko`rinishni oladi.

Agar chegaraviy shartlar

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = q_1(t), \quad \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=b} = q_2(t)$$

ko`rinishda berilgan bo`lsa (ikkinchi tur chegaraviy shartlar), ularni approksimatsiyalash uchun bir taraflama hosilalardan foydalanaolamiz:

$$\frac{T_x^j - T_x^j}{h} = q_{1j} = q_1(t_j), \quad \frac{T_x^j - T_{x-1}^j}{h} = q_{2j} = q_2(t_j) \quad (2.8)$$

Issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasining turli approksimatsiyalari mavjud. Har xil shablonlarni ishlatib turli chekli ayirmali sxemalarni hosil qilish mumkin. Masalan,

(2.2) tenglamadagi  $\frac{dT}{dt}$  va  $\frac{d^2T}{dx^2}$  hosilalarni 3-b rasmdagi «T» shablonga binoan

approksimatsiyalasaq,

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} = a \frac{T_{i-1}^{j+1} - 2T_i^{j+1} + T_{i+1}^{j+1}}{h^2} + f_i^j \quad (2.9)$$

to`r tenglamasini hosil qilamiz.

Olingan (2.5) va (2.9) tenglamalar (2.6) va (2.7) yoki (2.8) shartlar bilan birgalikda ixtiyoriy  $j$  uchun  $I + 1$  va  $T_i^j$  noma'lum qatnashgan  $I + 1$  ta algebraik tenglamalar sistemasidan iboratdir. Har bir o`zgarmas  $j$  dagi barcha tugun nuqtalarda–qatlamlarda shunday tenglamalar sistemasi hosil qilinadi. Nolinchi qatlamdagi yechim  $T_j^0$  boshlang`ich shart bilan berilgan, ya'ni (2.6) shart  $T_i^0$  larni to`liq aniqlaydi.

(2.5) tenglamada  $j$  qatlamdagi  $T_i^j = 0, 1, \dots, I$  yechimlar topilgan bo`lsa,  $j + 1$  qatlamdagi  $T_i^{j+1}$  yechimlar

$$T_i^{j+1} = \lambda T_{i-1}^j + (1 - 2\lambda) T_i^j + \lambda T_{i+1}^j + \tau f_i^j,$$

$$\lambda = \frac{a\tau}{h^2}, i = 1, 2, \dots, I - 1 \quad (2.10)$$

formula asosida topiladi. Chekli nuqtalarda yechim

$$T_0^{j+1} = \psi_1(t_{j+1}), T_x^{j+1} = \psi_2(t_{j+1})$$

kabi topiladi. (2.10) formulada  $j + 1$  qatlamdagi yechim  $j$  qatlamdagi yechimlar orqali aniq, oshkor shaklda ifodalangan. Shuning uchun bunday sxemalarga oshkor sxemalar deyiladi. Masalan, birinchi qatlamdagi yechim

$$T_i^1 = \lambda T_{i-1}^1 + (1 - 2\lambda)T_i^1 + \lambda T_{i+1}^1 + \tau f_i^0 \quad (2.11)$$

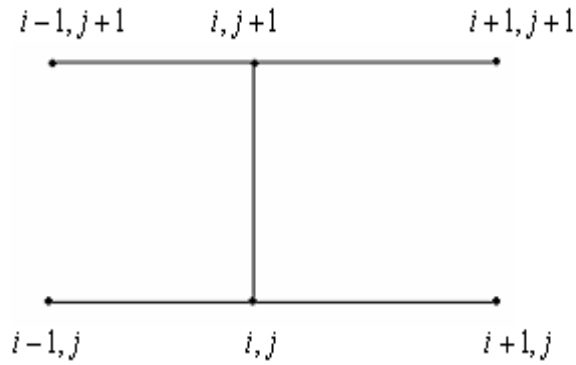
ko`rinishda yoziladi. Lekin, (2.6) boshlang`ich shartni e`tiborga olib, (2.11) ni

$$T_i^1 = \lambda \varphi_{i-1} + (1 - 2\lambda)\varphi_i + \lambda \varphi_{i+1} + \tau f_i^0 \\ i = 1, 2, \dots, I - 1$$

kabi yozamiz. Bunda ko`rinib turibdiki, birinchi qatlamdagi yechimlar nolinci qatlamdagi yechimlar orqali oshkor ifodalanadi. Xuddi shuningdek, (2.10) asosida ikkinchi qatlamdagi yechimlar birinchi, uchinchi qatlamdagi yechimlar ikkinchi qatlamdagi yechimlar orqali ifodalanadi va hokazo. Demak, (2.10) tenglama ikkita qo`shni qatlamdagi yechimlarni o`zaro bog`laydi. Chetki nuqtalarda  $T_0^1 = \psi_1(t_1), T_1^1 = \psi_2(t_1)$  ga egamiz.

Agar chekli ayirmali sxemada ikkita qo`shni qatlamdagi yechimlar ishtirok etsa, bunday sxemalarga ikki qatlamli sxemalar deyiladi. Yuqorida aytilganiga binoan (2.10) sxemaning ikki qatlamligini ko`rish qiyin emas.

(2.8) tenglamadan farqli ravishda (2.9) tenglamada har bir qatlamning uchta nuqtasidagi yechimlar qatnashadi va bu yechimlarni oldingi qatlamdagi yechimlar orqali birdaniga, bevosita oshkor ko`rinishda ifodalab bo`lmaydi. Shuning uchun bunday sxemalarga oshkormas sxemalar deyiladi. Bunda (2.9) sxema har bir tenglamasida uchtdan nomalum qatnashgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasidan iborat bo`ladi.



4-rasm

Shu usul bilan boshqa shakldagi shablonlarni ishlatib, turli chekli ayirmali sxemalarni olishimiz mumkin. Jumladan, 4-rasmdagi shablonni ishlatsak,

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} = a \left[ \frac{T_{i-1}^j - 2T_i^j + T_{i+1}^j}{h^2} + \frac{T_{i-1}^{j+1} - 2T_i^{j+1} + T_{i+1}^{j+1}}{h^2} \right] + f_i^j \quad (2.12)$$

to`r tenglamasiga ega bo`lamiz.

Keltirib o`tilgan chekli ayirmali sxemalarning approksimattsiya xatoligini topamiz. Quyidagi

$$\frac{T(t + \tau, x) - T(t, x)}{\tau} = \frac{dT}{dt} + \frac{\tau}{2} \frac{d^2T}{dt^2} + \dots$$

$$\frac{T(t, x + h) - 2T(t, x) + T(t, x - h)}{h^2} = \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{h^2}{12} \frac{d^4T}{dx^4} + \dots$$

formulalardan foydalansak, (2.5) sxema uchun

$$R_{\tau, h} \approx \frac{1}{2} \tau \frac{d^2T}{dt^2} - \frac{ah^2}{12} \frac{d^4T}{dx^4}$$

tafovutga ega bo`lamiz.

Demak, (2.5) to`r tenglamasining approksimattsiya xatoligi  $O(\tau + h^2)$  bo`ladi. Agar vaqt bo`yicha qadam  $x$  bo`yicha qadam kvadratiga proporsional deyilsa, ya`ni  $\tau = rh^2, r = const$  bo`lsa, approksimattsiya xatoligi  $O(h^2)$  bo`ladi. Boshlang`ich shart (2.6) approksimattsiya bilan almashtiriladi. Bu approksimattsiya aniq bo`lib, unda xatolikka yo`l qo`yilmaydi. Xuddi shu fikrni (2.7) approksimattsiyalar to`g`risida ham gapirish mumkin. Lekin chegaraviy shartlar ikkinchi tipda berilsa, (2.8) approksimattsiyalarning xatoligi  $O(h)$  bo`ladi.

Demak (2.5), (2.6), (2.8) chekli ayirmali sxemaning umumiy approksimattsiya xatoligi  $O(h + \tau)$  bo`ladi. Oxirgi masalaning approksimattsiya xatoligi  $h$  qadam bo`yicha oshirilishi mumkin. Buning uchun ixtiyoriy  $u(x)$  funksiya uchun o`rinli

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + O(h^3)$$

$$u(x+2h) = u(x) + 2hu'(x) + 2h^2u''(x) + O(h^3)$$

yoyilmalar asosida chiqariladigan

$$u'(x) = \frac{-u(x+2h) + 4u(x+h) - 3u(x)}{2h} + O(h^2)$$

formuladan foydalanamiz. Unda (2.8) o`rniga

$$\frac{-T_2^j + 4T_1^j - 3T_0^j}{2h} = q_{1,j}, \frac{T_{l-2}^j + 4T_{l-1}^j - 3T_l^j}{2h} = q_{2,j} \quad (2.13)$$

approksimattsiyalarga ega bo`lamiz. Endi (2.5), (2.6), (2.13) chekli approksimattsiya xatoligi  $O(\tau + h^2)$  bo`ladi. Bu masalada ham yuqoridagidek  $\tau = rh^2$ ,  $r = const$  deyilsa,  $O(h^2)$  xatolikni olamiz. Approksimattsiya xatoligi to`g`risida (2.5) sxema uchun aytilgan fikrlar (2.9) sxema uchun ham o`rinli.

Endi qaralgan chekli ayirmali sxemalarning turg`unligini tekshiramiz. Avval (2.5) oshkor sxemani qaraylik. Boshlang`ich va chegaraviy funksiyalar nollardan iborat bo`lsin. Tenglamadagi manba quvvati funksiyasi esa noldan farqli bo`lsin. Tenglama yechimining shu funksiya o`zgarishiga turg`unligini tekshiramiz. Bu yordamchi masalaning yechimi  $v_i^j$  to`r funksiyasi deb qaralsa, yuqoridagi shartlarga binoan

$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} = a \frac{v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j}{h^2} + f_i^j, \quad (2.14)$$

$$v_i^j = 0, v_0^j = 0, v_l^j = 0 \quad (2.15)$$

masalani hosil qilamiz. (2.14) tenglamadan (2.10) ko`rinishdagi

$$v_i^{j+1} = \lambda v_i^j + (1 - 2\lambda)v_i^j + \lambda v_{i+1}^j + \tau f_i^j, \quad (2.16)$$

$$\lambda = \frac{a\tau}{h^2}$$

yuqori qatlamdagi yechimga nisbatan yechilgan tenglamaga kelamiz.

Agar  $\lambda \leq \frac{1}{2}$  (2.17) deb faraz qilsak,

$$\lambda + |1 - 2\lambda| + \lambda = \lambda + 1 - 2\lambda + \lambda = 1$$

tenglikni olamiz. Bundan biz to`r yechimini baholash uchun foydalanamiz. (2.16)

tenglamadan:

$$\max_{0 \leq i \leq l} |v_i^{j+1}| = \max_{1 \leq i \leq l-1} |\lambda v_{i-1}^j + (1 - 2\lambda)v_i^j + \lambda v_{i+1}^j + \tau f_i^j| \leq \max_{0 \leq i \leq l} |v_i^j| + \tau \max_{0 \leq i \leq l} |f_i^j| \quad (2.18)$$

Agar (2.18) tengsizlikda  $j = 0$  desak,  $\max_{0 \leq i \leq l} |v_i^j| \leq \tau f^*$  tengsizlikni hosil qilamiz.

Bunda  $f^*$  qiymat  $f$  funksiyaning to`rdagi maksimal qiymati, ya`ni  $f^* = \max_{0 \leq i \leq l} |f_i^j|$

Endi (2.18) da  $j = 1$  deb, xuddi yuqoridagi kabi

$\max_{0 \leq i \leq l} |v_i^2| \leq \max_{1 \leq i \leq l} |v_i^1| + \tau f^* \leq 2\tau f^*$  tengsizlikni keltirib chiqaramiz.

Umuman, bu jarayonni davom ettirib,

$$v^* \leq J\tau f^* \quad (2.19)$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bunda  $v^* = \max_{i,j} |v_i^j|$

(2.19) tengsizlik (2.14), (2.15) masalaning  $f$  manba quvvati funksiyasiga nisbatan turg`unligini ko`rsatadi. Agar (2.17) shart bajarilmasa, ya`ni  $\lambda > \frac{1}{2}$  bo`lsa, oshkor chekli ayirmali sxema turg`un bo`lmaydi. Demak, issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasini yechishda ishlatilgan oshkor sxema shartli turg`undir. (2.17)

turg`unlik sharti  $\lambda = \frac{a\tau}{h^2} < \frac{1}{2}$  vaqt bo`yicha qadam uzunligi  $\tau$  ni yetarlicha kichik

qilib tanlab olinsa bajariladigan yoki  $x$  bo`yicha qadam katta bo`lishi kerak. Vaqt bo`yicha qadamning kichrayishi tufayli oshkor sxemada juda ko`p zich qatlamlarda yechim topilishi kerak bo`ladi. Bu esa hisoblashlarni juda ko`paytirib yuboradi.  $h$  qadamning kattalashishi esa approksimatsiya xatoligini va natijada yechim aniqligini yomonlashtiradi. Demal, oshkor sxemalar yangi qatlamdagi yechimlarni

bevosita hisoblash imkoniyatiga ega bo`lish bilan birga qadam uzunliklariga qo`yiladigan shartlar tufayli ma'lum kamchiliklarga egadirlar.

Oshkormas sxemaning turg`unligini tekshirish uchun yana yordamchi masalaga murojaat qilamiz. Avvalgidek boshlang`ich va chegaraviy funksiyalar nolga teng, ya'ni bu shartlar bir jinsli bo`lsin. Yordamchi  $v_i^j$  to`r funksiyasi

$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} = a \frac{v_{i+1}^{j+1} - 2v_i^{j+1} + v_{i-1}^{j+1}}{h^2} + f_i^j \quad (2.20)$$

tenglamani qanoatlantiradi. Bunda

$$\lambda v_{i-1}^{j+1} - (1 + 2\lambda)v_i^{j+1} + \lambda v_{i+1}^{j+1} = -v_i^j - \tau f_i^j \quad (2.21)$$

cizikli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemaning har birida to`r funksiyasining uchta noma'lum qiymatlari qatnashadi. Sistema noma'lumlari koeffitsiyentlaridan tuzilgan matritsa uch diagonallidir. Shuning uchun (2.21) sistemani progonka usuli bilan yechish qulaydir. Progonka usulining turg`unlik sharti bu sistema uchun  $1 + 2\lambda > \lambda + \lambda$  ko`rinishda bo`lib, u ixtiyoriy  $\lambda$  larda bajariladi. Demak,  $\lambda$  ning qiymati qanday bo`lishidan qat'iy nazar, (2.20) chekli ayirmali sxema hamma vaqt turg`un bo`ladi. Shuning uchun, issiqlik tenglamasini yechish uchun ishlatiladigan "T" shablon asosida qurilgan oshkor chekli ayirmali sxema shartsiz turg`un deyiladi. Bundan ko`rinib turibdiki, oshkormas sxemalar chizikli algebraik tenglamalar sistemasini yechish masalasiga keltirilishi tufayli yechimni bevosita topish imkoniyatini bermasa ham, hisob-kitob ishlari birmuncha ko`p bo`lishiga qaramasdan ularning shartsiz turg`un ekanligi oshkor sxemalarga nisbatan afzallikka ega ekanligidan dalolat beradi. Shu tufayli oshkormas sxemalar oshkor sxemalarga nisbatan ko`proq ishlatiladi.

Yuqorida qaralgan yechimni baholash yordamida turg`unlikni ko`rsatish usulini hamma masalalarda ham qo`llab bo`lmaydi. Turg`unlikni ko`rsatishni umumiy usullari ham bor. Lekin bu usullarni ham keng doirada berilgan chekli ayirmali sxemalarning turg`unligini ko`rsatish uchun universal tarzda qo`llash qiyin. Shunday usullardan biri bilan qisqacha tanishib o`tamiz.

*FUR'YE USULI* (garmonik toyilishlar usuli). Issiqlik tenglamasini yechimini

$$T(x,t) = \exp(\mu t) \exp(i\omega x) \quad (2.22)$$

ko`rinishda izlaymiz. Bunda yuqoridagidan farqli ravishda  $i$  mavhum birlik, ya'ni  $i = \sqrt{-1}$ . Buni bir jinsli issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasi

$$\frac{dT}{dt} = a \frac{d^2T}{dx^2} \quad (2.23)$$

ga qo`ysak,  $\mu = -\omega^2$  bo`lishi kerakligi kelib chiqadi.

Yuqorida kiritilgan to`rda (2.22) yechim

$$T_m^n = k^n \exp(i\omega mh) \quad (2.24)$$

ko`rinishda bo`ladi. Bunda  $k = \exp(\mu\tau)$  (2.24) ni (2.23) tenglama uchun tuzilgan

$$\frac{T_m^{n+1} - T_m^n}{\tau} = a \frac{T_{m+1}^n - 2T_m^n + T_{m-1}^n}{h^2} \text{ oshkor sxemaga qo`ysak,}$$

$$\frac{k^{n+1} \exp(i\omega mh) - k^n \exp(i\omega mh)}{\tau} = a \frac{k^n \exp[i\omega mh(m+1)] - 2k^n \exp(i\omega mh) + k^n \exp[i\omega mh(m-1)]}{h^2}$$

tenglamani hosil qilamiz. Uni  $k^n \exp(i\omega mh)$  ga bo`lsak,

$$\frac{k-1}{\tau} = \frac{a}{h^2} [\exp(i\omega h) + \exp(-i\omega h) - 2] \text{ ga va bundan}$$

$$k = 1 + \lambda [\exp(i\omega h) + \exp(-i\omega h) - 2] = 1 + 2\lambda(\cos \omega h - 1) = 1 - 4\lambda \sin^2 \frac{\omega h}{2} \quad (2.25)$$

ga ega bo`lamiz.

(2.24) shakldagi garmonik toyilishlarni chegaralangan bo`lishi uchun Neyman sharti deb ataluvchi quyidagi

$$|k| \leq 1 + c\lambda, c + const \quad (2.26)$$

shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

(2.25) tenglikdan (2.26) ga binoan turg`unlik sharti  $\lambda \leq \frac{1}{2}$  ekanligini

topamiz. Agar  $\lambda > \frac{1}{2}$  bo`lsa, sxema turg`un bo`lmaydi.

Endi (2.23) tenglamaga mos keluvchi

$$\frac{T_m^{n+1} - T_m^n}{\tau} = a \frac{T_{m+1}^{n+1} - 2T_m^{n+1} + T_{m-1}^{n+1}}{h^2} \quad (2.27)$$

oshkormas sxema uchun ham yuqorida ko`rsatilgan ishlarni bajarib,

$k = (1 + 4\lambda \sin^2 \frac{\omega h}{2})^{-1}$  ni topamiz. Bunda  $\lambda$  ning ixtiyoriy qiymatida  $|k| < 1$  va

oshkormas sxemaning shartsiz turg`unligi kelib chiqadi.

Endi 4-rasmda ko`rsatilgan shablon asosida

$$\frac{T_m^{n+1} - T_m^n}{\tau} = 0,5a \left[ \frac{T_{m+1}^n - 2T_m^n + T_{m-1}^n}{h^2} + \frac{T_{m+1}^{n+1} - 2T_m^{n+1} + T_{m-1}^{n+1}}{h^2} \right] = 0$$

ko`rinishda approksimattsiyalab,

$$k = \left( 1 - 2\lambda \sin^2 \frac{\omega h}{2} \right) \cdot \left( 1 + 2\lambda \sin^2 \frac{\omega h}{2} \right)^{-1}$$

ni topamiz. Bunda esa ixtiyoriy  $\lambda$  larda Neyman sharti bajarilishini ko`rishimiz mumkin. Demak, bu sxema ham (2.27) oshkormas sxema kabi shartsiz turg`un bo`ladi.

Chekli ayirmali sxema berilgan differensial tenglamani approksimattsiyalasa va turg`un bo`lsa, chekli ayirmali yechim aniq yechimga yaqinlashadi. Shuning uchun (2.5) oshkor sxemaning yechimi  $\lambda \leq \frac{1}{2}$  bo`lganda  $O(\tau + h^2)$  tezlik bilan yaqinlashadi, oshkormas sxemaning yechimi esa  $\lambda$  ning barcha qiymatlarida xuddi shunday tezlik bilan yaqinlashadi deb xulosa chiqarishimiz mumkin.

Ayrim hollarda oshkor va oshkormas sxemalar birgalikda ishlatilishi mumkin. Bunga (2.23) tenglama uchun tuzilgan

$$\frac{T_n^{j+1} - T_i^j}{\tau} = \theta a \frac{T_{i+1}^{j+1} - 2T_i^{j+1} + T_{i-1}^{j+1}}{h^2} + (1 - \theta) a \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2} = 0 \quad (2.28)$$

chekli ayirmali sxema misol bo`ladi. Bunda  $0 \leq \theta \leq 1$ . Agar  $\theta = 0$  bo`lsa, (2.28) oshkormas sxemalarga aylanadi. Agar  $\theta = 1/2$  bo`lsa, aralash sxema hosil bo`lib, unga *KRANK–NIKOLSON* sxemasi deyiladi.

#### 1.4. O`zgaruvchi koeffitsiyentli issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasini yechish

Agar devor va boshqa to`siqlar har xil materiallar qorishmasidan iborat bo`lsa, issiqlik o`tkazuvchanlik koeffitsiyenti  $x$  va  $t$  qiymatlarga bog`liq o`zgaruvchi miqdor bo`ladi. Shu bilan jism zichligi ham  $x$  va  $t$  bo`yicha o`zgaruvchi miqdor bo`lishi mumkin. Bu holda issiqlik o`zgaruvchanlik tenglamasi

$$cp(x,t)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x,t)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + Q(x,t), \quad (3.1)$$

$$0 \leq x \leq \ell, \quad 0 \leq t \leq \bar{t}$$

ko`rinishida yoziladi. Bunda  $\rho(x,t)$ ,  $\lambda(x,t)$ ,  $Q(x,t)$  lar

$$0 < c_1 \leq \lambda(x,t) \leq c_2, \quad \rho(x,t) \geq c_3 > 0,$$

$$c_1, c_2, c_3 = const$$

shartlarni qanoatlantiruvchi ma'lum silliqlikka ega funksiyalardir.

Boshlang`ich va chegaraviy shartlar odatdagidek yoziladi:

$$T(x, 0) = \varphi(x), \quad T(0, t) = \varphi_1(t), \quad T(\ell, t) = \varphi_2(t) \quad (3.2)$$

bu yerda ham  $\varphi(x)$ ,  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$  lar berilgan funksiyalar.

(3.1) tenglamadagi  $LT = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x,t)\frac{\partial T}{\partial x}\right)$  differensial operatorni qaraymiz.

Vaqt bo`yicha o`zgaruvchi  $t$  ni o`zgarmas deb qaraylik. Unda ixtiyoriy  $t$  uchun qaralayotgan sohada to`r kiritib, **LT** operatorni

$$L_h T = \frac{1}{h} \left[ b(x_{i+1}, t) \frac{T_{i+1} - T_i}{h} - b(x_i, t) \frac{T_i - T_{i-1}}{h} \right] \quad (3.3)$$

ko`rinishda appoksimatsiyalaymiz. Bunda  $b = b(x, t)$  deb funksiya kiritilgan to`rda aniqlangan funksiya va  $T_i$  deb ixtiyoriy  $j$  lar uchun aniqlangan  $T_i^j$  to`r funksiyalari tushuniladi. Endi (3.3) appoksimatsiya  $h$  bo`yicha ikkinchi tartibga ega bo`lishi uchun  $b(x, t)$  funksiya qanday tanlanishi kerakligini aniqlaymiz. Quyidagi

$$\frac{T(x+h, t) - T(x, t)}{h} = T'(x, t) + \frac{h}{2}T''(x, t) + \frac{h^2}{6}T'''(x, t) + O(h^3),$$

$$\frac{T(x-h, t) - T(x, t)}{h} = T'(x, t) - \frac{h}{2}T''(x, t) + \frac{h^2}{6}T'''(x, t) + O(h^3)$$

yoyilmalarni  $x = x_i$  nuqtada aniqlab, (3.3) ga qo`ysak (shtrixlar  $x$  bo`yicha hosilalarni bildiradi),

$$L_h T = \frac{b(x_{i+1}, t) - b(x_i, t)}{h} T'(x_i, t) + \frac{b(x_{i+1}, t) + b(x_i, t)}{2} T''(x_i, t) + \frac{h \cdot [b(x_{i+1}, t) - b(x_i, t)]}{6} T'''(x_i, t) + O(h^2)$$

ni topamiz. Yana  $LT = (\lambda T')' = \lambda T'' + \lambda' T'$  ekanligini hisobga olsak,

$$L_h T - LT = \left( \frac{b_{i+1} - b_i}{h} - \lambda'_i \right) T'_i + \left( \frac{b_{i+1} + b_i}{2} - \lambda''_i \right) T''_i + \frac{h}{6} (b_{i+1} - b_i) T'''_i + O(h^2) \quad (3.4)$$

formulaga ega bo`lamiz. Bunda

$$b_{i+1} = b(x_{i+1}, t), \quad b_i = b(x_i, t),$$

$$\lambda'_i = \frac{\partial \lambda(x_i, t)}{\partial x}, \quad T'_i = \frac{\partial T(x_i, t)}{\partial x},$$

$$T''_i = \frac{\partial^2 T(x_i, t)}{\partial x^2}, \quad T'''_i = \frac{\partial^3 T(x_i, t)}{\partial x^3}$$

belgilashlar ishlatilgan. (3.4) tafovut  $O(h^2)$  aniqlikka ega bo`lishi uchun

$$\frac{b_{i+1} - b_i}{h} = \lambda'_i + O(h^2), \quad \frac{b_{i+1} + b_i}{2} = \lambda''_i + O(h^2) \quad (3.5)$$

shartlarining bajarilishi yetarli.

Quyidagi

$$b_i = \frac{\lambda(x_i, t) + \lambda(x_{i-1}, t)}{2}, \quad b_i = \lambda(x_i - 0,5h, t),$$

$$b_i = \frac{2\lambda(x_{i-1}, t)\lambda(x_i, t)}{\lambda(x_{i-1}, t) + \lambda(x_i, t)}, \quad b_i = \sqrt{\lambda(x_i, t)\lambda(x_{i-1}, t)}$$

funksiyalar uchun (3.5) shartlarining bajarilishini tekshirish qiyin emas.

(3.1) tenglamani chekli ayirmali tenglama bilan almashtiramiz. Bunda har xil chekli ayirmali sxemalarni qo'llash mumkin. Masalan, 3-a rasmdagi shablon asosida approksimatsiya ishlatilsa,

$$c\rho(x_i, t_j) \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} = \frac{1}{h} \left[ b(x_{i+1}, t_j) \frac{T_{i+1}^j - T_i^j}{h} - b(x_i, t_j) \frac{T_i^j - T_{i-1}^j}{h} \right] + \quad (3.6)$$

$$+ Q(x_i, t_j), \quad i = 1, 2, \dots, I - 1, \quad j = 0, 1, \dots, J - 1$$

to'rt tenglamasini va

$$T_i^0 = \varphi(x_i), T_0^j = \psi_1(t_j), T_1^j = \psi_2(t_j) \quad (3.7)$$

boshlang'ich va chegaraviy shartlarni hosil qilamiz.

(3.6) tenglamaning turg'unligini tekshiramiz. Buning uchun o'zgaruvchi koeffitsiyentli tenglamalarning turg'unligini tekshirishda ishlatiladigan "qotirilgan koeffitsiyentlar" prinsipini ishlatamiz. Bu prinsip o'zgaruvchi koeffitsiyentlarning  $x$  va  $t$  argumentlariga o'zgarmas qiymatlar berib masalani o'zgarmas koeffitsiyentli masalaga keltirishga asoslangan. Masalan,

$$\rho(x_i, t_j) = \rho = const, \quad b(x_i, t_j) = b = const, \quad Q(x_i, t_j) = 0$$

bo'lsa, (3.6) tenglamadan

$$c\rho \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} = \frac{b}{h^2} (T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j) \quad (3.8)$$

ni hosil qilamiz. Biz bu tenglama bilan ilgari ishlagan edik. Uning turg'unlik sharti

$$\frac{\tau b}{c\rho} \leq \frac{h^2}{2} \quad (3.9)$$

tengsizlik bilan aniqlanar edi.

Qotirilgan koeffitsiyentlar prinsipida (3.9) tengsizlik barcha  $(x_i, t)$  nuqtalarda bajarilsa, ya'ni

$$\frac{\tau b(x_i, t_j)}{c\rho(x_i, t_j)} \leq \frac{h^2}{2} \quad (3.10)$$

bo'lsa, (3.10) tenglama turg'un deb qaraladi.

Agar  $0 < c_1 \leq b(x_i, t_j) \leq c_2$ ,  $\rho(x_i, t_j) \geq c_3 > 0$  tengsizliklar bajarilsa, (3.10) shartni

$$\frac{\tau}{ch^2} \leq \frac{c_3}{2c_2} \quad (3.11)$$

ko'rinishda ham yozishimiz mumkin.

Agar approksimatsiya uchun 3-rasmda ko'rsatilgan T-shablon ishlatilsa, (3.1) tenglamaning o'rniga

$$c\rho(x_i, t_j) \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} = \frac{1}{h} \left[ b(x_{i+1}, t_j) \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_i^{j+1}}{h} - b(x_i, t_j) \frac{T_i^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{h} \right] + \quad (3.12)$$

$$+ Q(x_i, t_j)$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

Bu sxema (3.6) sxemadan farqli ravishda oshkormas sxemadir. U shartsiz turg'unidir, ya'ni turg'unlik (3.9)-(3.11) shartlarning bajarilishiga bog'liq bo'lmagan holda bajariladi.

Ayrim hollarda oshkor va oshkormas sxemalar (3.1) tenglamani approksimatsiya qilish uchun birgalikda ishlatiladi:

$$c\rho(x_i, t_j) \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} = \frac{\theta}{h} \left[ b(x_{i+1}, t_j) \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_i^{j+1}}{h} - b(x_i, t_j) \frac{T_i^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{h} \right] +$$

$$+ \frac{1-\theta}{h} \cdot \left[ b(x_{i+1}, t_j) \frac{T_{i+1}^j - T_i^j}{h} - b(x_i, t_j) \frac{T_i^j - T_{i-1}^j}{h} \right] + Q(x_i, t_j).$$

Bu sxema  $\theta = 0$  bo'lsa, (3.5) va  $\theta = 1$  bo'lsa, (3.7) sxemaga mos tushadi.

Sxema  $\theta \geq \frac{1}{2}$  bo'lganda absolyut turg'un bo'ladi.

Endi

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + f(T) \quad (3.13)$$

chiziqli bo`lmagan tenglamani qaraylik. Bunda  $a(T)$  temperatura o`zgaruvchanlik koeffitsiyenti. U faqat  $T$  temperaturaga bog`liq deb qaraladi. Manba funksiyasi  $f(T)$  ham faqat  $T$  temperaturaga bog`liq funksiya deb qaraladi.

(3.13) tenglamani oshkormas chekli ayirmali approksimatsiya

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} = \frac{1}{h} \left[ b_{i+1} \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_i^{j+1}}{h} - b_i \frac{T_i^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{h} \right] + f(T_i^j) \quad (3.14)$$

$i = 1, 2, I - 1$

ko`rinishda yoziladi. Bunda  $b_i = 0,5(a(T_i^j) + a(T_{i-1}^j))$  (3.14) sxema absolyut turg`un bo`lib, approksimatsiya xatoligi  $Q(\tau + h^2)$  ga teng.  $T_i^{j+1}$  yechim (3.13) va boshlang`ich, chegaraviy shartlardan tashkil topgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini progonka usuli bilan yechib topiladi.

Temperatura o`tkazuvchanlik koeffitsiyenti  $j + 1$  qatlamda hisoblansa, (3.13) tenglamaning o`rniga chiziqli bo`lmagan

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} = \frac{1}{h} \left[ b(T_{i+1}^{j+1}) \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_i^{j+1}}{h} - b(T_i^{j+1}) \frac{T_i^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{h} \right] + f(T_i^{j+1})$$

tenglamani hosil qilamiz. Tenglamada:

$$b(T_i^{j+1}) = 0,5 \left[ a(T_i^{j+1}) + a(T_{i-1}^{j+1}) \right]$$

bu tenglamadan  $T_i^{j+1}$  ni topish uchun endi progonka usulini qo`llab bo`lmaydi. Chunki bu tenglama chiziqli bo`lmagan tenglamadir. Uni yechish uchun iteratsion usullarini qo`llash kerak.

## 1.5. Ikki o`lchovli issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasini sonli yechish usuli

Issiqlik tarqalayotgan soha ikki o`lchamli bo`lsa, temperatura funksiyasi vaqtdan tashqari ikkita fazoviy koordinatalarga bog`liq funksiya bo`ladi. Eng sodda ko`rinishda bu soha  $(0, l_1) \times (0, l_2)$  to`g`ri to`rtburchakdan iborat bo`ladi.

Issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasi qaralayotgan hol uchun

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t) \quad (4.1)$$

ko`rinishda bo`ladi.

Boshlang`ich shart

$$T(x, y, 0) = \varphi(x, y)$$

shaklda olinadi.

Chegaraviy shartlarni esa to`rtburchakning  $x = 0, x = l_1, y = 0, y = l_2$  tomonlarida berish kerak.

Masalan,

$$T(0, y, t) = \psi_1(y, t), \quad T(l_1, y, t) = \psi_2(y, t),$$

$$T(x, 0, t) = \theta_1(x, t), \quad T(x, l_2, t) = \theta_2(x, t).$$

Yuqoridagi shratlarda  $\psi(x, y), \psi_1(y, t), \psi_2(y, t), \theta_1(x, t), \theta_2(x, t)$  lar berilgan funksiyalardir. Ular o`zaro moslangan bo`lishlari kerak, ya`ni

$$\varphi(0, y) = \psi_1(y, 0), \quad \varphi(l_1, y) = \psi_2(y, 0),$$

$$\varphi(0, x) = \theta_1(x, 0), \quad \varphi(x, l_2) = \theta_2(x, 0),$$

$$\psi_1(0, t) = \theta_1(0, t), \quad \theta_1(l_1, t) = \psi_2(0, t),$$

$$\psi_1(l_2, t) = \theta_2(0, t), \quad \theta_2(l_1, t) = \psi_2(l_2, t).$$

Uchala o`zgaruvchilar, ya`ni  $x, y, t$  larning o`zgarish sohasi to`g`ri burchakli parallelopipedchalarga bo`lib, to`r kiritamiz.  $(x_i, y_j, t_R)$  tugun nuqtalarda aniqlangan to`r funksiyaning qiymatini  $T_{ij}^R$  deb belgilaymiz. Bu qiymatlardan

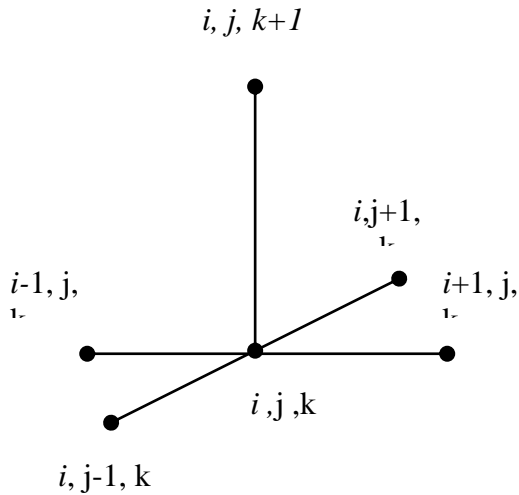
foydalanib, (4.1) tenglama uchun har xil chekli ayirmali sxemalar tuzishimiz mumkin.

Masalan, approksimatsiya uchun 5-a rasmda ko`rsatilgan shablon ishlatilsa,

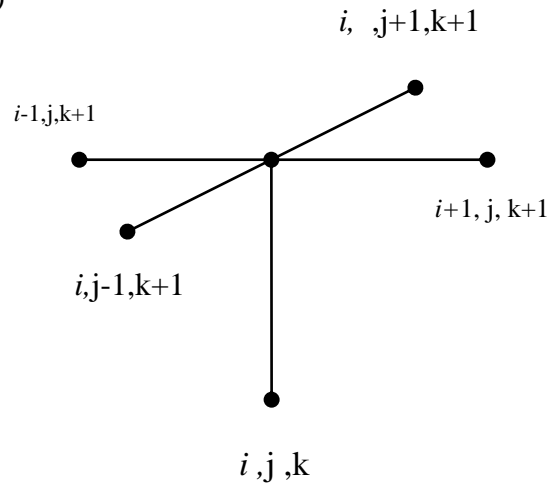
$$\frac{T_{ij}^{R+1} - T_{ij}^R}{\tau} = a \left( \frac{T_{i+1,j}^R - 2T_{ij}^R + T_{i-1,j}^R}{h_1^2} + \frac{T_{i+1,j}^R - 2T_{ij}^R + T_{i-1,j}^R}{h_2^2} \right) + f_{ij}^R \quad (4.2)$$

to`r tenglamaga ega bo`lamiz. Bunda  $f_{ij}^R(x_i, y_j, t_R)$ . (4.2) tenglamaning approksimatsiya aniqligi  $O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$  ekanligini ko`rish qiyin emas.

a)



b)



5-rasm

Sxemaning turg`unligini tekshirish uchun (4.1) tenglamada  $f(x, y, t) = 0$  deb, xuddi bir o`lchamli masaladagi kabi

$$T_{m,R}^n = \lambda^n \exp(i\omega_1 m h_1) \exp(i\omega_2 R h_2)$$

ifodani ishlatamiz. Bunda  $\omega_1, \omega_2$  ixtiyoriy haqiqiy sonlar,  $i = \sqrt{-1}$  mavhum birlik (yuqoridagidan farqli ravishda). Bu ifodani (4.1) tenglamaga qo`yib,  $f = 0$  ekanligini hisobga olgan holda

$$\lambda = 1 - 4 \frac{a\tau}{h_1^2} \sin^2 \frac{\omega_1 h_1}{2} - 4 \frac{a\tau}{h_2^2} \sin^2 \frac{\omega_2 h_2}{2}$$

ifodani topamiz. Bunda

$$\frac{a\tau}{h_1^2} = r_1 + \text{const}, \quad \frac{a\tau}{h_2^2} = r_2 + \text{const}$$

desak,  $|\lambda| \leq 1 + c\tau$ ,  $c = \text{const}$  Neyman shartidan  $r_1 + r_2 \leq \frac{1}{2}$  bo`lishi kerakligini

topamiz. Bu shart bajarilsa, (4.2) sxema turg`un bo`ladi.

(4.2) sxemada  $R + 1$  qatlamdagi yechimni  $r$ -qatlamdagi yechimlar orqali oshkor ko`rinishda topish mumkin:

$$T_{ij}^{R+1} = (1 - 2r_1 - 2r_2)T_{ij}^R + r_1(T_{i+1,j}^R + T_{i-1,j}^R) + r_2(T_{i,j+1}^R + T_{i,j-1}^R) + \mathcal{F}_{ij}^R \quad (4.3)$$

Agar  $r_1 + r_2 = \frac{1}{2}$  bo`lsa, (4.3) formuladan

$$T_{ij}^{R+1} = r_1(T_{i+1,j}^R + T_{i-1,j}^R) + r_2(T_{i,j+1}^R + T_{i,j-1}^R) + \mathcal{F}_{ij}^R \quad (4.4)$$

ko`rinishdagi sodda formulani topamiz.

(4.3) va (4.4) formulalar yordamida  $R = \bar{1}, \bar{k}$  qatlamlardagi yechimlar topiladi. Dastlabki, nolinci qatlamda yechim boshlang`ich fuunksiya yordamida beriladi:

$$T_{ij}^0 = \varphi(x_i, y_j).$$

Chegarada esa yechim chegaraviy funksiyalar bilan aniqlanadi:

$$T_{0j}^R = \psi_1(y_j, t_R), \quad T_{ij}^R = \psi_2(y_j, t_R),$$

$$T_{i0}^R = \theta_1(x_j, t_R), \quad T_{ij}^R = \theta_2(x_j, t_R).$$

Xuddi bir o`lchamli issiqlik o`tkazuvchanlik tenglamasiga bo`lgani kabi, (4.1) tenglamani oshkormas sxemalar bilan ham approksimatsiya qilish mumkin.

Buning uchun 3-b rasmda ko`rsatilgan shablonni ishlatamiz. Natijada

$$\frac{T_{ij}^{R+1} - T_{ij}^R}{\tau} = a \left( \frac{T_{i+1,j}^{R+1} - 2T_{ij}^{R+1} + T_{i-1,j}^{R+1}}{h_1^2} + \frac{T_{i+1,j}^{R+1} - 2T_{ij}^{R+1} + T_{i,j-1}^{R+1}}{h_2^2} \right) + \mathcal{F}_{ij}^R \quad (4.4)$$

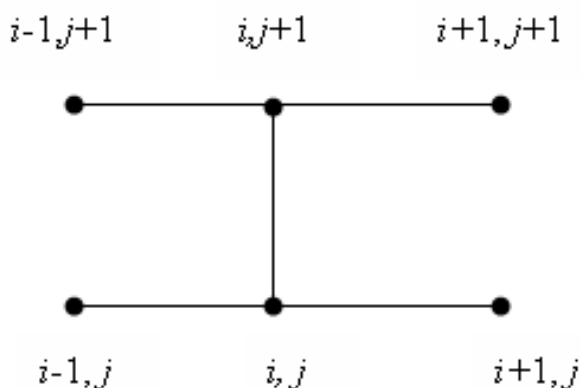
chekli ayirmali tenglamani hosil qilamiz.

Bu tenglamani

$$r_1(T_{i-1,j}^{R+1} + T_{i+1,j}^{R+1}) - (1 + 2r_1 + 2r_2)T_{ij}^{R+1} + r_2(T_{i,j-1}^{R+1} + T_{i,j+1}^{R+1}) = T_{ij}^{R+1} - \mathcal{F}_{ij}^R, \quad (4.5)$$

$i = 1, 2, \dots, I-1$ ,  $j = 1, 2, \dots, J-1$  ko`rinishda yozamiz. Bu tenglamalar izlanuvchi yechimlarga nisbatan chiziqli algebraik tenglamalar bo`lib, sistema tashkil qiladi. Yetishmayotgan tenglamalar chegaraviy shartlardan keltirilib chiqariladi. Tenglamalardan ko`rinib turibdiki, ular bir o`lchamli tenglamalar uchun oshkormas sxemalarda hosil bo`lgan tenglamalarga nisbatan murakkabroqdir. Shu tufayli hisoblash ishlari ham ancha ortadi. Lekin bu sxema (4.2) sxemadan farqli ravishda shartsiz turg`undir. Oshkormas sxemalarning bu xususiyati ularning oshkor sxemalarga nisbatan keng ishlatilishining asosiy sababidir.

Oshkormas sxemaning biz yuqorida qaragan xili ham xuddi oshkor sxema kabi  $O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$  aniqlikka ega. Bu aniqlikni oshirish uchun  $x$  va  $y$  koordinatalar bo`yicha alohida quyidagi



6-rasm

rasmdagiga o`xshash shablon asosida (3.14) tenglamani approksimatsiyalasak,

$$\frac{T_{ij}^{R+1} - T_{ij}^R}{\tau} = 0,5a \left( \frac{T_{i+1,j}^{R+1} - 2T_{ij}^{R+1} + T_{i-1,j}^{R+1}}{h_1^2} + \frac{T_{i+1,j}^{R+1} - 2T_{ij}^{R+1} + T_{i,j-1}^{R+1}}{h_2^2} + \frac{T_{i+1,j}^{R+1} - 2T_{ij}^R + T_{i-1,j}^R}{h_1^2} + \frac{T_{i,j+1}^R - 2T_{ij}^R + T_{i,j-1}^{R+1}}{h_2^2} \right) + f_{i,j}^{R+1/2} \quad (4.7)$$

to`r tenglamani hosil qilamiz. Bunda  $f_{i,j}^{R+1/2} = f(x_i, y_i, t_{R+\tau/2})$  bu sxema endi  $O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$  aniqlikka ega bo`ladi. Bunga  $T(x, y, t)$  funksiyani  $x_i, y_i, t_{R+\tau/2}$  nuqtada Teylor qatoriga yoyib ishonch hosil qilishimiz mumkin.

Yuqorida (4.2) sxemaning turg`unligini tekshirishda ishlatilgan formuladan foydalanib (4.7) sxema uchun

$$\lambda = \frac{1 - 2 \frac{\tau a}{h_1^2} \sin^2 \frac{\omega_1 h_1}{2} - 2 \frac{\tau a}{h_2^2} \sin^2 \frac{\omega_2 h_2}{2}}{1 + 2 \frac{\tau a}{h_1^2} \sin^2 \frac{\omega_1 h_1}{2} + 2 \frac{\tau a}{h_2^2} \sin^2 \frac{\omega_2 h_2}{2}}$$

formulani topamiz. Bunda har qanday  $\tau$  uchun  $|\lambda| \leq 1$  ekanligini ko`rish qiyin emas. Demak, (4.2) sxema ham (4.5) sxema kabi shartsiz turg`un bo`ladi. Lekin (4.7) sxemadan izlanayotgan yechimni topish oson emas. Buning uchun oldindan ma`lum bo`lgan  $AT_{i-1}^{j+1} - CT_i^{j+1} + BT_{i+1}^{j+1} = -Y_i$

tenglamaga nisbatan ancha murakkab bo`lgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishga to`g`ri keladi.

Agar quyidagi ikki qadamli sxema ishlatilsa, aytilgan qiyinchilikni oson bartaraf qilish mumkin:

$$\frac{T_{ij}^{R+1/2} - T_{ij}^R}{0,5\tau} = a \left( \frac{T_{i+1,j}^{R+1/2} - 2T_{ij}^{R+1/2} + T_{i-1,j}^{R+1/2}}{h_1^2} + \frac{T_{i,j+1}^R - 2T_{ij}^R + T_{i,j-1}^R}{h_2^2} \right) + f_{ij}^R, \quad (4.8)$$

$$\frac{T_{ij}^{R+1} - T_{ij}^{R+1/2}}{0,5\tau} = a \left( \frac{T_{i+1,j}^{R+1/2} - 2T_{ij}^{R+1/2} + T_{i-1,j}^{R+1/2}}{h_1^2} + \frac{T_{i,j+1}^{R+1} - 2T_{ij}^{R+1} + T_{i,j-1}^{R+1}}{h_2^2} \right) + f_{ij}^{R+1/2} \quad (4.9)$$

(4.7), (4.8) sxemalar asosida  $R + 1$  qatlamdagi yechimlar  $R$  qatlamlar orqali ikki bosqichda amalga oshiriladi. Birinchi bosqichda (4.8) tenglamaga asosan  $R + 1/2$  qatlamdagi yechim  $R$  qatlamdagi yechimlar orqali topiladi. Bunda  $i$  indeks bo`yicha progonka usulini ishlatishimiz mumkin. Ikkinchi bosqichda xuddi shu tariqa (4.9) tenglama asosida  $R + 1$  qatlamdagi yechimlar  $R + 1/2$  qatlamdagi yechimlar orqali ifodalanadi. Bu sxema ham shartsiz turg`un bo`lib, uning aniqligi alohida (4.8), (4.9) tenglamalar uchun  $O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$  dir.

Qaralgan sxema o'zgaruvchi yo'nalishlar bo'yicha (yoki bo'ylama-ko'nadalang) sxema deyiladi. U umumiy shaklda beriluvchi kasr qadamli sxemalar yoki parchalash (bo'lish) sxemalarining ikki o'lchamli masalalarga mos keluvchi xususiy holidir.

Ikki o'lchamli masalalarni yechishda local bir o'lchamli sxemalar ham ishlatiladi. Ularni hosil qilishda vaqt bo'yicha har bir kasr qadamda tenglama bir o'lchamli deb qaraladi va natijada ko'p o'lchamli masala bir o'lchamli masalalar ketma-ketligiga keltiriladi. Shuning uchun bu sxemalarga koordinatalar bo'yicha parchalash sxemalari deyiladi. Har bir kasr qatlamdagi to'r tenglamalar berilgan tenglamani alohida approksimatsiyalaydi. Ularning hammasini jamlaganda berilgan ko'p o'lchamli tenglamani approksimatsiyalovchi to'r hosil bo'ladi. Masalan, (4.1) tenglamada  $R + 1/2$  qatlamda faqat  $x$  bo'yicha hosilani,  $R + 1$  qatlamda esa faqat  $y$  bo'yicha hosilani approksimatsiyalab, quyidagi to'r tenglamalarni hosil qilamiz:

$$\frac{T_{ij}^{R+1} - T_{ij}^{R+1/2}}{\tau} = a \frac{T_{i+1,j}^{R+1/2} - 2T_{ij}^{R+1/2} + T_{i-1,j}^{R+1/2}}{h_1^2} + (1/2)f_{ij}^{R+1/2}, \quad (4.10)$$

$$\frac{T_{ij}^{R+1} - T_{ij}^{R+1/2}}{\tau} = a \frac{T_{i,j+1}^{R+1/2} - 2T_{ij}^{R+1/2} + T_{i,j-1}^{R+1/2}}{h_1^2} + (1/2)f_{ij}^R. \quad (4.11)$$

Hosil qilingan tenglamalarni progonka usuli bilan yechishimiz mumkin. Buni biz yuqorida bir o'lchamli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasini yechganda ko'rgan edik. Masalani yechishda shartli ravishda ikkita bosqichga bo'lamiz. Birinchi bosqichda (4.10) tenglamadan  $T_{ij}^{R+1/2}$  lar topiladi, ikkinchi bosqichda esa topilgan  $T_{ij}^{R+1/2}$  larni ishlatib  $T_{ij}^{R+1}$  lar topiladi. Albatta (4.10) va (4.11) tenglamalarga boshlang'ich va chegaraviy shartlarni ham qo'shish kerak. (4.10) va (4.11) sxemalar uchun turg'unlik sharti Furrye usuli bilan tekshirilganda

$$\lambda' = \left( 1 + 4 \frac{\tau a}{h_1^2} \sin^2 \frac{\omega_1 h_1}{2} \right)^{-1},$$

$$\lambda'' = \left( 1 + 4 \frac{\tau a}{h_2^2} \sin^2 \frac{\omega_2 h_2}{2} \right)^{-1}$$

formulalarni hosil qilamiz. Bulardan  $|\lambda| = |\lambda'| \cdot |\lambda''| \leq 1$  ekanligi va bundan esa (4.10) va (4.11) sxemalarning shartsiz turg'un ekanligi kelib chiqadi.

Ayrim masalalarni yechishda fizik jarayonlar bo'yicha parchalash sxemalari ham ishlatiladi. Bu sxemalarda har bir kasr qadamda faqat ayrim fizik parametrlarni ta'siri hisobga olinadi. Umumiy hisoblash sxemasi yuqorida qaralgan parchalash sxemalaridan deyarli farq qilmaydi.

## II BOB. DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI MAPLE PAKETI YORDAMIDA YECHISH USULLARI

### 2.1. Differensial tenglamani analitik va umumiy yechimi

Bugungi kunda ilmiy-metodik va ilmiy-tadqiqot izlanishlarini olib borayotgan tadqiqotchilar Maple, Mathcad, Matlab va Matematika paketlari xizmatlaridan juda keng foydalanishmoqda. Ushbu matematik sistemalar zamonaviy dasturlash tizimlarining eng ilg`or bosqichi hisoblanib, ba`zi ko`rsatkichlar bo`yicha doimo bir-biri bilan raqobatda bo`ladi.

Matematik paketlarning deyarli barchasida quyidagi imkoniyatlar mavjud:

- Chiziqli va chiziqli bo`lmagan algebraik tenglama va sistemalarni yechish;
- Oddiy differensial tenglama va sistemalarni (Koshi masalasi va chegaraviy masala) yechish;
- Xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechish;
- Berilganlarni statistik qayta ishlov berish va hokazo.

Yuqoridagi fikrlarimizni amaliyotga joriy etish maqsadida Maple tizimidan foydalanib differensial tenglamalarni yechish haqida qisqacha to`xtalib o`tamiz.

Differensial tenglamalarning analitik yechimini topish uchun Maple paketining **dsolve(eq, var, options)** komandasidan foydalaniladi, bu yerda **eq** – berilgan differensial tenglamaning analitik ko`rinishi, **var** – topilishi kerak bo`lgan noma'lum funksiya, **options** – parametrlar. Parametrlar masalaning yechilish usulini ko`rsatishi mumkin, masalan, differensial tenglamaning analitik yechimini topish uchun **type=exact** parametri tanlanadi. Agar parametr kiritilmasa shu holat joriy hisoblanadi va tenglama analitik usulda yechiladi. Xuddi shuningdek, parametrlarning boshqa turlari ham mavjud: **type=series** – bu holat tanlanganda yechim qator ko`rinishda izlanadi, **type=numeric** – parametr kiritilganda esa differensial tenglamaning sonli yechmi izlanadi.

Yechimni oshkor yoki oshkormas ko`rinishda izlashni aniqlash uchun yana bir nechta parametrlarni kiritishimiz mumkin ( **explicit=true** yoki **explicit=false** ), faqat bu holda differensial tenglamani yechish metodi ham beriladi (masalan, **method=laplace** )

Agar **type=numeric** parametri berilgan bo`lsa, u holda sonli yechish metodlarini berishimiz mumkin, masalan **method=rkf45** – to`rtinchi-beshinchi tartibli Runge-Kutta metodi;

**method=dverk78** – yettinchi-sakkizinchi tartibli Runge-Kutta metodi;

**method=classical** – bir nechta klassik metodlardan iborat (Euler, Runge-Kutta va boshqalar);

**method=gear** va **method=mgear** – bir qadamli va ko`pqadamli Gir metodlari.

Endi shu usullarni qo`llash bo`yicha misollar keltiramiz va dastlab ishni sodda tenglamalarni yechishdan boshlaymiz.

1.  $y' + y \cos x = \sin x \cos x$  differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

> **restart;**

> **de:=diff(y(x),x)+y(x)\*cos(x)=sin(x)\*cos(x);**

$$de := \left( \frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) + y(x) \cos(x) = \sin(x) \cos(x)$$

> **dsolve(de,y(x));**

$$y(x) = \sin(x) - 1 + e^{(-\sin(x))} \_C1$$

2.  $y'' + y = x \cdot \sin x$

➤ **dsolve(diff(y(x),x\$2) - y(x) = sin(x)\*x, y(x));**

$$y(x) = e^{(-x)} \_C2 + e^x \_C1 - \frac{1}{2} \cos(x) - \frac{1}{2} \sin(x) x$$

*Eslatma:* Berilgan tenglama 2-tartibli bo`lgani uchun yechimda ikkita o`zgarmas qatnashadi.

Olingan yechimdagi  $\_C1$  va  $\_C2$  lar integrallashda hosil bo`ladigan o`zgarmas sonlar. Differensial tenglamaning boshlang`ich shartlari tenglamadan

keyin vergul orqali kiritiladi, so`ngra tenglama va boshlang`ich shartlar Maple tizimida birgalikda yoziladi.

$$3. y''(x^2 + 1) = 2xy', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

Avval ushbu differensial tenglamani Mapleda tasvirlab olamiz.

**> restart;diff(y(x),x\$2)\*(x^2+1)=2\*x\*diff(y(x),x);**

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right)(x^2 + 1) = 2x \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)$$

Bu tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

**> dsolve(diff(y(x),x\$2)\*(x^2+1)=2\*x\*diff(y(x),x), y(x));**

$$y(x) = \_C1 + \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right) \_C2$$

Endi shu differensial tenglamaga boshlang`ich shartlarni qo`yamiz. Hosila qatnashgan boshlang`ich shartlar operator ko`rinishda yoziladi (ya`ni  $D(y)(0)$ ), yuqori tartibli hosila bo`yicha shartlar  $D(D(y))(0)$  yoki  $(D@@2)(y)(0)$  ko`rinishda kiritiladi).

**> restart;dsolve({diff(y(x),x\$2)\*(x^2+1)=2\*x\*diff(y(x),x), y(0)=1, D(y)(0)=3}, y(x));**

$$y(x) = 1 + x^3 + 3x$$

Xuddi shu yo`l bilan to`rtinchi tartibli differensial tenglamani ham yechish mumkin

**> de2 := diff(y(x),x\$4)+2\*diff(y(x),x\$2) -cos(x)=3;**

$$de2 := \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} y(x)\right) + 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) - \cos(x) = 3$$

**>dsolve(de2,y(x));**

$$y(x) = -\frac{1}{2} \sin(\sqrt{2} x) \_C2 - \frac{1}{2} \cos(\sqrt{2} x) \_C1 - \cos(x) + \frac{3}{4} x^2 + \_C3 x + \_C4$$

Bir jinsli bo`lmagan chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi uning strukturasi aniq ko`rinishi uchun har doim o`ziga xos holda kiritiladi. Bir jinsli

emas differensial tenglamaning yechimi unga mos bir jinsli differensial tenglamaning xususiy yechimlari yig'indisiga teng ekanligi bizga differensial tenglamalar kursidan ma'lum. Shuning uchun bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamaning yechimini chiqaruvchi satr har doim yig'indi ko'rinishida, bu yig'indida ixtiyoriy o'zgarmasli (bir jinsli differensial tenglamaga mos umumiy yechim) va ixtiyoriy o'zgarmasiz (bir jinsli emas differensial tenglamaning unga mos xususiy yechimi) yigindidan tashkil topgan.

**dsolve** komandasi differensial tenglamani hisoblab bo'lmaydigan formatda yechimini beradi. Keyinchalik xususiy yechim bilan ishlash imkoniyati tug'ilishi uchun olingan yechimni o'ng qismini **rhs(%)** komandasi yordamida ayirish kerak.

4.  $y'' - 2y' + y = \sin x + e^{-x}$  ikkinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

> **restart;**

> **deq:=diff(y(x),x\$2)-2\*diff(y(x),x)+y(x)=sin(x)+exp(-x);**

$$deq := \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x) \right) - 2 \left( \frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) + y(x) = \sin(x) + e^{(-x)}$$

> **dsolve(deq, y(x));**

$$y(x) = \left( \frac{1}{2} \cos(x) e^x + \frac{1}{4} \right) e^{(-x)} + \_C1 e^x + \_C2 e^x x$$

Birinchi ikkita yigindi bir jinsli differensial tenglamaga mos keluvchi umumiy yechimni keyingi ikkitasi bir jinsli emas differensial tenglamaning xususiy yechimini ifodalaydi.

5. Ikkinchi tartibli  $y'' + k^2 y = \sin(qx)$  tenglamani yechimini toping, unda quyidagi hol bo'ladi:  $q \neq k$  va  $q = k$ .

> **restart; de:=diff(y(x),x\$2)+k^2\*y(x)=sin(q\*x);**

$$de := \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x) \right) + k^2 y(x) = \sin(q x)$$

> **dsolve(de,y(x));**

$$y(x) = \_C1 \sin(k x) + \_C2 \cos(k x) + \frac{\sin(q x)}{k^2 - q^2}$$

Endi rezonans holat uchun yechimini topamiz. Buning uchun **dsolve** komandasidan oldin  $q=k$  deb olish kerak.

> **q:=k: dsolve(de,y(x));**

$$y(x) = \_C1 \cos(kx) + \_C2 \sin(kx) - \frac{1}{2} \frac{x \cos(kx)}{k} + \frac{1}{2} \frac{\sin(kx)}{k^2}$$

*Eslatma:* Ikkalasida ham bir jinsli emas tenglamaning xususiy yechimi va umumiy yechimi, har doim hosilada saqlanadi, qo`shiluvchi alohida qoladi.

**dsolve** komandasi imkoniyati orqali differensial tenglamaning fundamental sistema yechimi (baza funksiyasi) topiladi, bunda **dsolve** komanda parametridan keyin **output=basis** buyrug`i beriladi.

**dsolve** komandasi yordamida Koshi masalasining yechimi yoki chegaraviy masalaning yechimini topish mumkin, agar noma'lum funksiya uchun differensial tenglamaning boshlang`ich va chegaraviy shartlarining hosilalarini tasvirlash uchun differensiallash (D) operatoridan foydalaniladi, masalan,  $y''(0)=2$  shart quyidagi ko`rinishda yoziladi  $(D@@2)(y)(0)=2$  yoki  $y'(1)=0: D(y)(1)=0$ . Eslatib o`tamizki  $n$ -tartibli hosila  $(D@@n)(y)$  ko`rinishida yoziladi.

### Amaliy misollar yechishda uslubiy ko`rsatma

1. Differensial tenglamaning fundamental yechimlari sistemasi topilsin:

$$y^{(4)}+2y''+y=0.$$

> **de:=diff(y(x),x\$4)+2\*diff(y(x),x\$2)+y(x)=0;**

$$de := \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} y(x) \right) + 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x) \right) + y(x) = 0$$

> **dsolve(de, y(x), output=basis);**

[sin(x), cos(x), sin(x) x, cos(x) x]

2. Koshi masalasining yechimini toping:

$$y^{(4)}+y''=2\cos x, y(0)=-2, y'(0)=1, y''(0)=0, y'''(0)=0.$$

> **de:=diff(y(x),x\$4)+diff(y(x),x\$2)=2\*cos(x);**

$$de := \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} y(x) \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x) \right) = 2 \cos(x)$$

> **cond:=y(0)=-2, D(y)(0)=1, (D@@2)(y)(0)=0, (D@@3)(y)(0)=0;**

$$cond := y(0) = -2, D(y)(0) = 1, (D^{(2)})(y)(0) = 0, (D^{(3)})(y)(0) = 0$$

> **dsolve({de,cond},y(x));**

$$y(x) = -2 \cos(x) - \sin(x) x + x$$

3. Chegaraviy masalaning yechimini toping:  $y''+y = 2x - \pi$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

Yechim grafigini yasang.

> **restart; de:=diff(y(x),x\$2)+y(x)=2\*x-Pi;**

$$de := \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x) \right) + y(x) = 2x - \pi$$

> **cond:=y(0)=0,y(Pi/2)=0;**

$$cond := y(0) = 0, y\left(\frac{1}{2} \pi\right) = 0$$

> **dsolve({de,cond},y(x));**

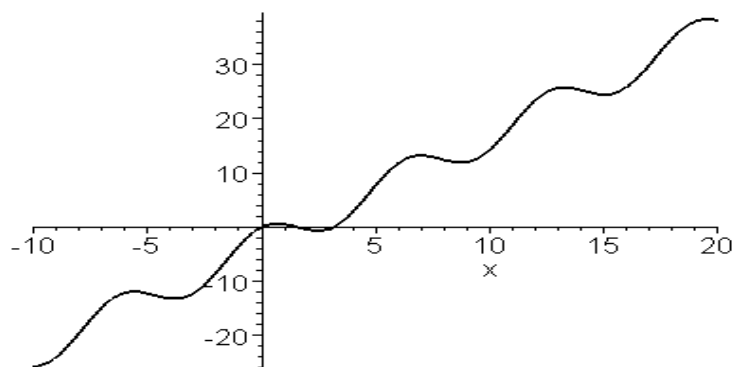
$$y(x) = 2x - \pi + \pi \cos(x)$$

*Eslatma:* Yechimning grafigini yasash uchun olingan ifodaning o`ng tomonini ajratish kerak.

> **dsolve({de,cond},y(x));**

$$y(x) = 2x - \pi + \pi \cos(x)$$

➤ **y1:=rhs(%): plot(y1,x=-10..20, thickness=2);**



Navbatdagi tenglama uchun yechim faqat o`zgaruvchilarni almashtirish metodi yordamida topiladi.

> **restart;q:=(2\*sqrt(x\*y(x))-x)\*diff(y(x),x)+y(x);**

$$q := (2\sqrt{x y(x)} - x) \left( \frac{\partial}{\partial x} y(x) \right) + y(x)$$

O`zgaruvchilarni almashtirish uchun DEtools paketining Dchangevar komandasi qo`llaniladi:

**with(DEtools):f:=Dchangevar({y(x)=v(x)\*x},[q],x);**

$$f := (2\sqrt{x^2 v(x)} - x) \left( \frac{\partial}{\partial x} v(x) x \right) + v(x) x$$

Endi  $v(x)$  funksiyasi uchun yechimni topamiz:

> **w:=dsolve(f,v(x));**

w :=

$$v(x) = \frac{e^{\left( 2 \operatorname{LambertW} \left( \frac{1}{2} e^{\left( \frac{1}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} - C1 \right)} \right) + C1 \right)}}{x}$$

$$v(x) = \frac{e^{\left( 2 \operatorname{LambertW} \left( -\frac{1}{2} e^{\left( \frac{1}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} - C1 \right)} \right) + C1 \right)}}{x}$$

$y(x)$  ning izlangan yechimini topish uchun teskari o`rin almashtiramiz:

> **W1:=subs({v(x)=y(x)/x},w[1]);W2:=subs({v(x)=y(x)/x},w[2]);**

$$W1 := \frac{y(x)}{x} = \frac{e^{\left( 2 \operatorname{LambertW} \left( \frac{1}{2} e^{\left( \frac{1}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} - C1 \right)} \right) + C1 \right)}}{x}$$

$$W2 := \frac{y(x)}{x} = \frac{e^{\left(2 \operatorname{LambertW}\left(-\frac{1}{2} e^{\left(\frac{1}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} - C1\right)}\right) + C1\right)}}{x}$$

> **Y1:=solve(W1,y(x));Y2:=solve(W2,y(x));**

$$Y1 := e^{\left(2 \operatorname{LambertW}\left(\frac{1}{2} e^{\left(\frac{1}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} - C1\right)}\right) + C1\right)}$$

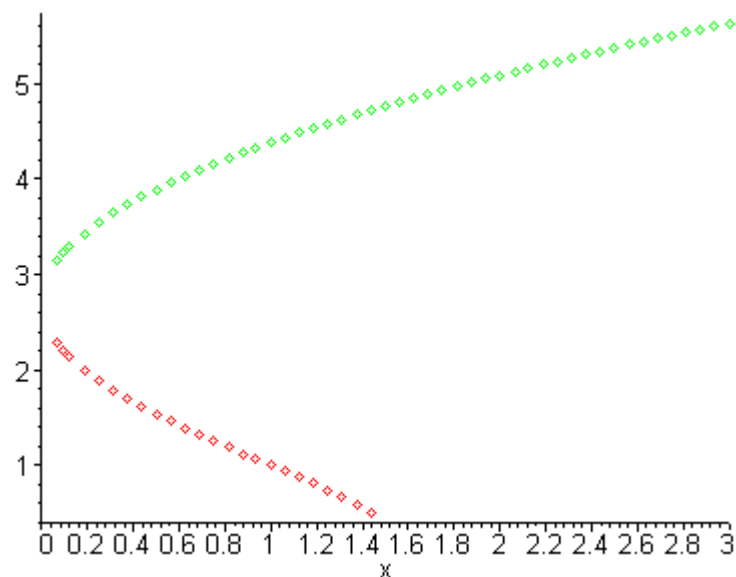
$$Y2 := e^{\left(2 \operatorname{LambertW}\left(-\frac{1}{2} e^{\left(\frac{1}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} - C1\right)}\right) + C1\right)}$$

> **Z1:=simplify(subs(\_C1=1,Y1)); Z2:=simplify(subs(\_C1=1,Y2));**

$$Z1 := \frac{1}{4} \frac{x}{\operatorname{LambertW}\left(\frac{1}{2} \sqrt{x} e^{\left(\frac{-1}{2}\right)^2}\right)}$$

$$Z2 := \frac{1}{4} \frac{x}{\operatorname{LambertW}\left(-\frac{1}{2} \sqrt{x} e^{\left(\frac{-1}{2}\right)^2}\right)}$$

> **plot({Z1,Z2},x=0..3);**



Chiziqli kombinatsiyalar orqali differensial tenglamaning to'liq yechimini beruvchi funksiyalarni topish mumkin. Buning uchun **dsolve** komandasiga **output=basis** opsiyasi qo'shimcha qilinadi:

> **dsolve(2\*x\*diff(y(x),x\$2)+diff(y(x),x)+3\*y(x)=x,y(x),output=basis);**

$$\left[ \left[ \cos(\sqrt{6} \sqrt{x}), \sin(\sqrt{6} \sqrt{x}) \right], -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}x \right]$$

## 2.2. Differensial tenglamalar sistemasi

Differensial tenglamalar sistemasining (Koshi masalasining) yechimini topish **dsolve** komandasi orqali bajariladi, uning buyruq formati quyidagicha: **dsolve({sys},{x(t),y(t),...})**, bu yerda **sys** □ berilgan differensial tenglamalar sistemasi, **x(t),y(t), ...** □ lar esa noma'lum funksiyalar to'plami.

Differensial tenglamalar sistemasini Maple paketida yechishni aniq misollar yordamida ko'rib o'tamiz.

Differensial tenglamalar sistemasining yechimi topilsin:

$$\begin{cases} x' = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1} \\ y' = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1} \end{cases}$$

> **sys:=diff(x(t),t)=-4\*x(t)-2\*y(t)+2/(exp(t)-1),diff(y(t),t)=6\*x(t)+3\*y(t)-3/(exp(t)-1):**

> **dsolve({sys},{x(t),y(t)});**

$$\{ y(t) = -2\_C2 - 3 e^{(-t)} - 3 e^{(-t)} \ln(e^t - 1) + \frac{3}{2} e^{(-t)} \_C1,$$

$$x(t) = 2 e^{(-t)} + 2 e^{(-t)} \ln(e^t - 1) - e^{(-t)} \_C1 + \_C2 \}$$

Ikkita  $x(t)$  va  $y(t)$  funksiyalar topilgan, ular  $\_C1$  va  $\_C2$  o'zgarmaslardan iborat.

## Amaliy misollar yechishda uslubiy ko`rsatma

Differensial tenglamalar sistemasi boshlang`ich ma'lumotlar bilan birga to`plam ko`rinishida (figurali qavslarda ifodalarning ketma-ketligida) **dsolve** komandasi argumentida yoziladi.

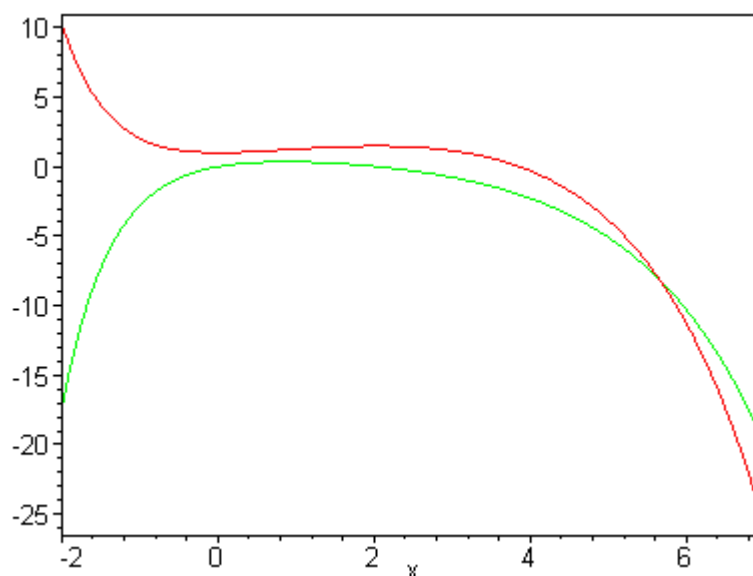
> **sys := diff(y(x),x)=z(x)-y(x)-x, diff(z(x),x)=y(x):**

> **fcns := {y(x), z(x)}:**

> **Y:=dsolve({sys,y(0)=0,z(0)=1}, fcns);**

$$Y := \left\{ \begin{array}{l} y(x) = -\frac{1}{2} e^{\left(\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)x\right)} - \frac{1}{10}\sqrt{5} e^{\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)x\right)} + \frac{1}{10}\sqrt{5} e^{\left(\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)x\right)} - \\ - \frac{1}{2} e^{\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)x\right)} + 1, \\ z(x) = \frac{1}{5}\sqrt{5} e^{\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)x\right)} - \frac{1}{5}\sqrt{5} e^{\left(\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)x\right)} + 1 + x \end{array} \right\}$$

> **plot({rhs(Y[1]),rhs(Y[2])},x=-2..7);**



Aynan ushbu sistemaning yechimini darajali qator ko`rinishida topish mumkin.

> **dsolve({sys,y(0)=0,z(0)=1}, fcns, type=series);**

$$\{y(x) = x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{24}x^4 + \frac{1}{15}x^5 + O(x^6),$$

$$z(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{24}x^5 + O(x^6)\}$$

Xuddi shu sistemaning sonli yechimiga **type=numeric** opsiyasining oddiy o`rnatilishi orqali erishiladi.

> **F := dsolve({sys, y(0)=0, z(0)=1}, fcns, type=numeric);**

**F := proc(xkf45\_x) ... end**

Ko`rinadiki, joriy holat dasturidan foydalangan holda yechim Runge-Kutta metodi orqali sonli qiymatlarni topish ko`rinishida chiqariladi. Masalan,  $x/$  ga teng o`zgaruvchi mustaqil qiymatga ega bo`lganda yechimni topish uchun, quyidagini yozish kifoya:

> **F(-2);**

**[x = -2, y(x) = -17.48416643461852, z(x) = 10.24428920402548]**

Navbatdagi misolda **dsolve** komandasida differensial tenglamalar sistemasining yechimi hamda mustaqil o`zgaruvchi boshlang`ich qiymatlarning massivi uchun bizga zarur natijalar olish metodi ochiq ko`rsatilgan.

>**sys2:={D@@2)(y)(x)=2\*x^3\*y(x), y(0)=1, D(y)(0)=1};**

**s := dsolve(sys2, {y(x)}, type=numeric, method=dverk78, value=array([1.0,1.5,1.7]));**

$$s := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x, y(x), \frac{\partial}{\partial x} y(x) \end{bmatrix} \\ 1. & 2.170132435253218 & 1.936037883117229 \\ 1.5000000000000000 & 4.268267966270898 & 8.363916916546218 \\ 1.7000000000000000 & 6.710398546650839 & 17.27579721228390 \end{bmatrix}$$

Shu yo`l bilan massivdan aniq qiymatlarni ajratib olish mumkin.

> **s[2,1][2,3];**

**8.363916916546218**

### 2.3. Darajali qatorlar yordamida differensial tenglamaning taqribiy yechimini topish

Ko'pchilik differensial tenglamalarni yechishda aniq analitik yechimini topib bo'lmaydi. Bunday hollarda differensial tenglamalarni taqribiy usullar yordamida yechish mumkin, jumladan, noma'lum funksiyani darajali qatorga yoyish yordamida.

Differensial tenglamaning taqribiy yechimini darajali qator yordamida topish uchun **dsolve** komanadasida o'zgaruvchilardan keyingi **type=series** (qisqacha **series**) parametrini ko'rsatish kerak.  $n$  gacha yoyish tartibini ya'ni daraja tartibini ko'rsatish uchun **dsolve** komandasidan oldin tartibni aniqlovchi **Order:=n** komandasini qo'yish kerak.

Agar differensial tenglamaning umumiy yechimi darajali qatorga yoyilgan ko'rinishda izlansa, u holda koeffitseyentlar darajasidagi  $x$  topilgan yoyilmadagi noma'lum funksiyalarning qiymatiga nol,  $y(0)$  va ularning hosilalari  $D(y)(0)$ ,  $(D@@2)(y)(0)$  kiradi. Hosil bo'lgan natijaviy qatordagi ifoda quyidagi ko'rinishda bo'ladi, **Makloren** qatorning izlanayotgan yechimiga o'xshash yoyilish bo'lib, faqat koeffitseyentlarining darajasida  $x$  qatnashadi. Xususiy yechimni topishda boshlang'ich natijalarni kiritish kerak,  $y(0)=u1$ ,  $D(y)(0)=u2$ ,  $(D@@2)(y)(0)=u3$  bilan bir qatorda boshlang'ich natijalarning soni differensial tenglamaning tartibi bilan ustma-ust tushishi kerak.

Yoyilgan darajali qator **series** tipida bo'ladi, shuning uchun keyingi ishlarda darajali qator bilan ishlash uchun uni **convert(%,polynom)** komandasi yordamida to'la holatda almashtirish mumkin. Topilgan ifodani o'ng qismini **rhs(%)** komandasi yordamida ajratish kerak.

## Amaliy misollar yechishda uslubiy ko`rsatma

1. Koshi masalasining yechimi topilsin:  $\arctg 3 - \arcsin \frac{\sqrt{5}}{5}$ ,  $y(0) = 0$ , ni 5-darajali qator ko`rinishida yoying.

> **restart; Order:=5:**

> **dsolve({diff(y(x),x)=y(x)+x\*exp(y(x)), y(0)=0}, y(x), type=series);**

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + O(x^5)$$

Hosil qilingan  $O(x^5)$  yechim 5 – tartibli yoyilmani bildiradi.

2.  $y''(x) - y^3(x) = e^{-x} \cos x$  differensial tenglamaning umumiy yechimi topilsin, darajali qatorni 4-darajagacha tartibda yoying. Qatorni quyidagi boshlang`ich shartlar asosida yoying:  $y(0)=1$ ,  $y'(0)=0$ .

> **restart; Order:=4: de:=diff(y(x),x\$2)-y(x)^3=exp(-x)\*cos(x):**

> **f:=dsolve(de,y(x),series);**

$$f := y(x) = y(0) + D(y)(0)x + \left(\frac{1}{2}y(0)^3 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}y(0)^2 D(y)(0) - \frac{1}{6}\right)x^3 + O(x^4)$$

> **y(0):=1: D(y)(0):=0:f;**

$$y(x) = 1 + x^2 - \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$

*Maple* tizimi murakkab differensial tenglamalar va sistemalarni yechishning samarali algoritmlariga ega.

Shunday algoritmlardan biri hisoblangan Girning bir qadamli interpolatsiya metodi quyidagi differensial tenglamani yechish uchun qo`llaniladi:

```
>                               Digits                               :=                               10:
deq1      :=      {diff(y(x),      x$3)      =      y(x)*diff(y(x),      x)-x}:
init1     :=      {(D@@2)(y)(1) = 4, D(y)(1) = 3, y(1) = 2.4 }:
ans1      :=      dsolve(deq1 union init1, y(x), type=numeric,
method=gear[polyextr],          stepsize=0.015,          minstep=Float(1,-11),
```

**errorper=Float(1,-5));**

**ans1(1.01);**

$$\left[ \begin{array}{l} x = 1.01, y(x) = 2.430201040709296, \frac{\partial}{\partial x} y(x) = 3.040312954671420, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x) = 4.062888549132273 \end{array} \right]$$

Girning ko`p qadamli interpolyatsiya metodi esa quyidagi differensial tenglamani yechish uchun qo`llanilgan:

```
> Digits := 12:  
deq3 := diff(y(t), t$2) = 100*(exp(-10*t)+exp(10*t)):  
ans3 := dsolve({deq3}, y(t), numeric, method=mgear[msteppart],  
initial=array([2,0]), start=0):  
ans3(0.7653);
```

$$\left[ t = .7653, y(t) = 2106.958269487634, \frac{\partial}{\partial t} y(t) = 21069.56916506883 \right]$$

## 2.4. Differensial tenglamani sonli yechish

Differensial tenglamaning sonli yechimi **dsolve** komandasi yordamida bajariladi. Differensial tenglama yechimining grafigini chizish **odeplot** komandasi yordamida bajariladi. Shuning uchun differensial tenglama sonli yechish (Koshi masalasi yoki chegaraviy masala) da **dsolve** komandasidan keyin **type=numeric** (yoki qisqacha **numeric**) parametri ko`rsatiladi. U holda differensial tenglamaning yechimi **dsolve(eq, vars, type=numeric, options)** komandasi ko`rinishida beriladi, bu yerda **eq** – tenglama, **vars** – noma'lum funksiyalar ro`yxati, **options** – parametrlar, differensial tenglamaning integrali sonli metod bilan ko`rsatilgan. *Maple* da aniqlangan bunday metod: **method=rkf45** Ro`nge-Kutta-Felberg 4-5-tartibli darajali metodi (o`rnatilgan); **method=dverk78** – Ro`nge-Kutta 7-8 tartibli darajali metodi; **method=classical** –Ro`nge-Kuttaning 3-tartibli darajali klassik

metodi; **method=gear** i **method=mgear** – Girning bir qadamli va ko`p qadamli metodi.

Differensial tenglamaning sonli yechimining grafigini chizish uchun **odeplot(dd, [x,y(x)], x=x1..x2)** komandasidan foydalaniladi, bu yerda funktsiyani sonli yechimi sifatida **dd:=dsolve({eq,cond}, y(x), numeric)** komandasidan foydalaniladi, kvadrat qavs ichida o`zgaruvchi va noma'lum funktsiya **[x,y(x)]** va **x=x1..x2** interval grafik yasash uchun ko`rsatiladi.

### Amaliy misollar yechishda uslubiy ko`rsatma

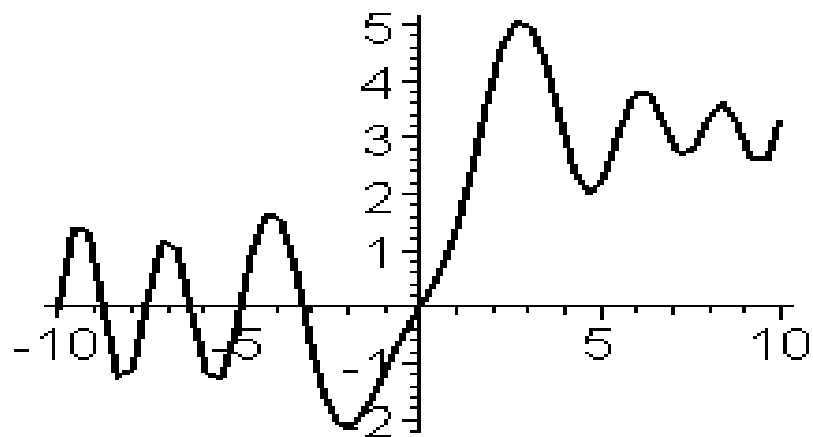
1. Koshi masalasining  $y' - x \sin(y) = \sin 2x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$  sonli va taqribiy yechimini 6-tartibli darajali qator ko`rinishida toping.

Dastlab Koshi masalasining sonli yechimini topamiz va grafigini yasaymiz.

```
> restart; Ordev=6:  
> eq:=diff(y(x),x$2)-x*sin(y(x))=sin(2*x):  
> cond:=y(0)=0, D(y)(0)=1:  
> de:=dsolve({eq,cond},y(x),numeric);  
de := proc(rkf45_x) ... end proc
```

*Eslatma:* natija chiqqan qatorda **rkf45** metodidan yechimda foydalanganlik haqida ma'lumot hosil bo`ladi. Agar  $x$  o`zgaruvchi biror-bir fiksirlangan qiymatida yechim qiymatini olish zarur bo`lsa, masalan,  $x=0.5$  bo`lsa, u holda quyidagini terish kerak:

```
> de(0.5);  
[ x = .5, y(x) = .544926115386263010,  $\frac{\partial}{\partial x} y(x) = 1.27250308222538000$  ]  
> with(plots):  
> odeplot(de,[x,y(x)],-10..10,thickness=2);
```



Endi Koshi masalasining taqribiy yechimini darajali qator ko`rinishida topamiz va grafikni sonli yechim va hosil qilingan darajali qatorning intervalda mos keluvchi grafigini yasaymiz.

> **dsolve({eq, cond}, y(x), series);**

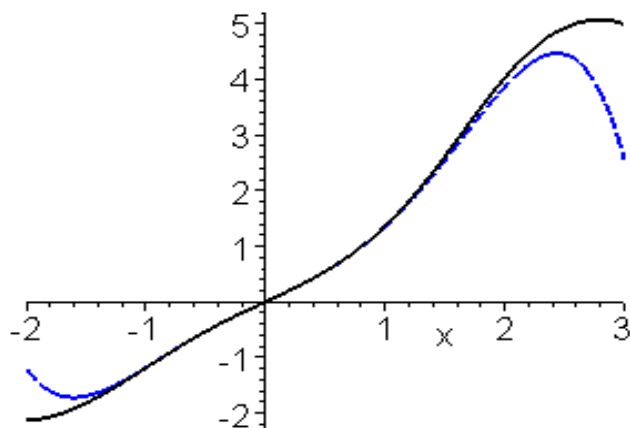
$$y(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + O(x^6)$$

> **convert(%, polynomial):p:=rhs(%):**

> **p1:=odeplot(de,[x,y(x)],-2..3, thickness=2,color=black):**

> **p2:=plot(p,x=-2..3,thickness=2,linestyle=3,color=blue):**

> **display(p1,p2);**



Hosil qilingan darajali qator bilan taqribiy yechim  $-1 < x < 1$  da mos keladi.

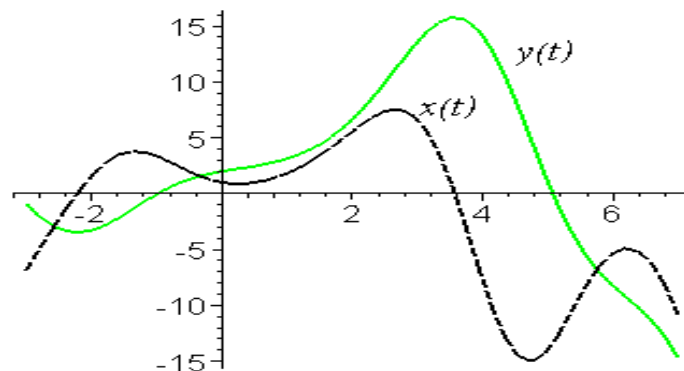
2. Differensial tenglamalar sistemasi (Koshi masalasi) ni yechimining grafigini chizing:

$$x'(t) = 2y(t)\sin(t) \square x(t) \square t, \quad y'(t) = x(t), \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$$

```

> restart; cond:=x(0)=1,y(0)=2: sys:=diff(x(t),t)=2*y(t)*sin(t)-x(t)-
t,diff(y(t),t)=x(t):
> F:=dsolve({sys,cond},[x(t),y(t)],numeric):
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
> p1:=odeplot(F,[t,x(t)],-3..7, color=black, thickness=2,linestyle=3):
> p2:=odeplot(F,[t,y(t)],-3..7,color=green,thickness=2):
> p3:=textplot([3.5,8,"x(t)"], font=[TIMES, ITALIC, 12]):
> p4:=textplot([5,13,"y(t)"], font=[TIMES, ITALIC, 12]):
> display(p1,p2,p3,p4);

```



*Maple* paketiga kiruvchi **odeplot** komandasi differensial tenglamalar va differensial tenglamalar sistemasi yechimlarining grafigini chizish imkoniyatini beradi.

Quyidagi sistemani qaraymiz.

```

> sys := diff(y(x),x)=z(x),diff(z(x),x)=y(x): fcns := {y(x), z(x)}:
p:= dsolve({sys,y(0)=0,z(0)=1},fcns,type=numeric):

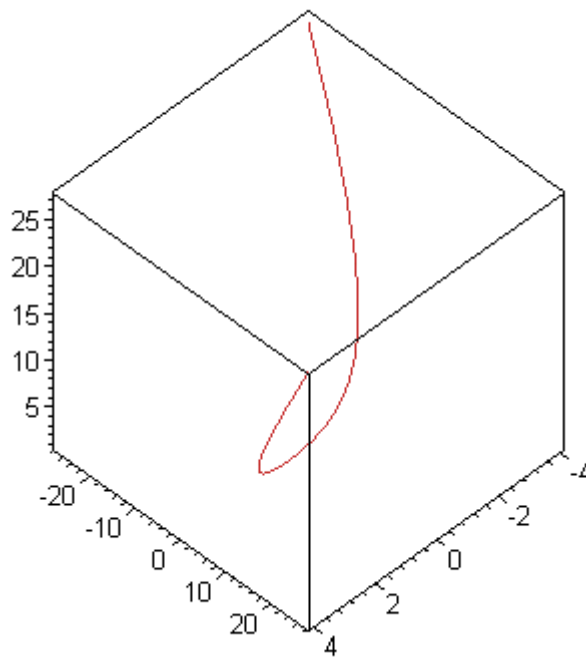
```

Yechimning uch o'lchovli grafigini chizish uchun quyidagi buyruqni beramiz.

```

> odeplot(p, [x,y(x),z(x)],-4..4,numpoints=25, color=orange);

```



## 2.5. Differensial tenglama yechimining grafigini Detools paketi yordamida namoyish qilish.

Koshi masalasini sonli yechish uchun yechim grafigini chizish va fazoviy rasmini chizish *Maple* ning maxsus paketi **Detools** orqali bajariladi.

**DEtools** paketining **DEplot** komandasi fazoviy paketlar yoki grafik yechimlarni sonli usullar yordamida qurish imkonini beradi. Bu komanda ham odatdagi **odeplot** komandasiga o`xshash bo`lib, undan ko`p qirraliligi bilan farq qiladi. Uning **odeplot** dan farqi shundaki, differensial tenglamaning sonli yechimini o`zi hisoblaydi. **DEplot** ning asosiy parametrlari **odeplot** parametrlariga juda o`xshash bo`lib uni quyidagicha yozish mumkin:

**DEplot**(**de**, **vars**, **range**, **x=x1..x2**, **y=u1..u2**, **cond**, **ptions**),

bunda **de** - differensial tenglama yoki differensial tenglamalar sistemasi;

**vars** – noma'lum funksiyalar ro`yxati;

**range** – noma'lum o`zgaruvchilarning o`zgarish diapazoni;

**cond** – boshlang`ich shart;

**x=x1..x2** va **y=u1..u2** – funksiyalarning o`zgarish diapazoni;

**options** – qo`shimcha parametrlar.

Bu komandada juda ko`p ishlatiladigan parametrlar quyidagilar:

**linecolor** - chiziq rangi;

**scene=[x,y]** - grafikni qanday o`zgaruvchilarga bog`liqligini aniqlash;

**iterations** - hisoblash aniqligini oshirish uchun zarur bo`lgan iteratsiyalar soni (joriy holda bu son 1 ga teng);

**stepsize** – grafikdagi nuqtalar orasidagi masofaga teng bo`lgan son (u joriy holatda  $(x2 - x1)/20$  ga teng), bu parametr yechim grafigini silliq chiqarish uchun qo`llaniladi;

**obsrange=true/false** – grafik uzilishga ega yoki yechim yo`q, agar yechim grafigi o`rnatilgan chegaradan chiqsa o`rinli bo`ladi. N- tartibli differensial tenglamaning yechish uchun boshlang`ich shartni ixchamroq ko`rinishda quyidagicha kiritishimiz mumkin:  $[x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots]$ , bu yerda  $x_0$  berilayotgan boshlang`ich shartning qiymati,  $y_0$  -  $x_0$  nuqtadagi izlanayotgan funksiyaning qiymati,  $y'_0, y''_0, \dots$  birinchi, ikkinchi va xokazo  $(n-1)$  tartibli hosilalarning  $x_0$  nuqtadagi qiymati.

### Amaliy misollar yechishda uslubiy ko`rsatma

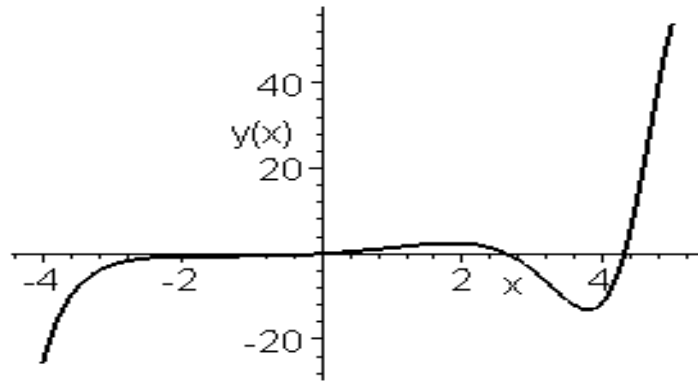
Differensial tenglama yechimining grafigini chizing:

$$y'' + x\sqrt{|y|} + x^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 1 \text{ oraliq } x \in [-4, 5].$$

> **restart; with(DEtools):**

> **DEplot(diff(y(x),x\$3)+x\*sqrt(abs(diff(y(x),x)))+x^2\*y(x)=0, {y(x)}, x=-4..5, [y(0)=0,D(y)(0)=1,**

**(D@@2)(y)(0)=1]], stepsize=.1, linecolor=black, thickness=2);**



## 2.6. Differensial tenglamalar sistemasining fazodagi rasmini chizish

Birinchi tartibdan yuqori boʻlgan differensial tenglamalar uchun **DEplot** komandasi yechimlar egri chizigʻini chizish uchun qoʻllaniladi, differensial tenglamalar sistemasi uchun birinchi tartibli rasm chizadi va fazoda ham rasm chizadi.

$(x, y)$  ni tekislikda fazoviy rasmini chizish uchun **DEplot** komandasi yordam beradi, differensial tenglama uchun ikki sistema:  $\frac{dx}{dt} = f(x, y, t), \frac{dy}{dt} = g(x, y, t)$ , **scene=[x,y]** parametrlari koʻrsatilgan.

Agar differensial tenglamalar sistemasi avtonom boʻlsa, u holda fazoviy rasmini chizish uk oʻlchami koʻrinishdagi maydonga yuboriladi. Parametr oʻq oʻlchami **arrows=SMALL, MEDIUM, LARGE, LINE** yoki **NONE** bilan tartibga solinadi.

Keyin bunda hamma fazoviy rasmini chizish, har bir fazoviy trayektoriya uchun boshlangʻich shart zarur: masalan, ikki differensial tenglamalar sistemasi uchun 1-tartibli bir necha boshlangʻich shartli **DEplots** komandasidan soʻng mustaqil oʻzgaruvchi  $t$  ni oʻzgartirish diapazoni koʻrsatiladi: **[[x(0)=x1, y(0)=y1], [x(0)=x2, y(0)=y2],..., [x(0)=xn, y(0)=yn]]**.

Boshlangʻich shart ancha ixcham formada berilishi mumkin: **[t0, x0, y0]**, bunda **t0** □ nuqta, boshlangʻich shart topshirigʻi, **x0** va **y0** □ funksiyaning **t0** nuqtada qidirilgan qiymatlari.

Ikki differensial tenglamalar sistemasi uchun 1-tartibli fazoviy rasmni chizish uchun `phaseportrait(sys, [x,y],x1..x2,[[cond]])` komandasidan foydalaniladi, bunda `sys` – 1-tartibli ikkita differensial tenglamalar sistemasi, `[x,y]` □ ya’ni qidirilayotgan funksiya, `x1..x2` □ interval, har bir keyingi fazoviy rasmni chizish, figurali qavsda boshlang`ich shart ko`rsatilgan. Bu komanda **DEtools** paketida bo`ladi, shuning uchun berilgan paket oldingiday kerak bo`ladi.

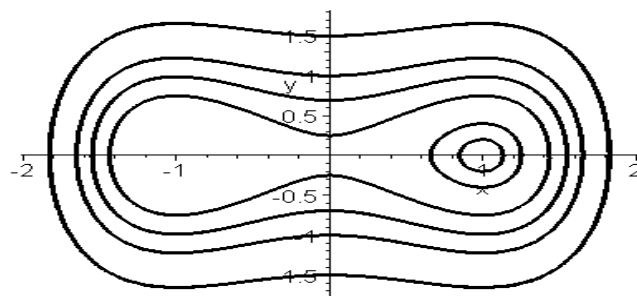
### Amaliy misollar yechishda uslubiy ko`rsatma

1.  $\begin{cases} x' = y \\ y' = x - x^3 \end{cases}$  differensial tenglamalar sistemasining fazoviy rasmini chizing.

Yechish uchun bir nechta boshlang`ich shartlar berilgan:  $x(0)=1, u(0)=0.2$ ;  $x(0)=0, u(0)=1$ ;  $x(0)=1, u(0)=0.4$ ;  $x(0)=1, u(0)=0.75$ ;  $x(0)=0, u(0)=1.5$ ;  $x(0)=\square 0.1, u(0)=0.7$ .

> **restart; with(DEtools):**

> **DEplot({diff(x(t),t)=y, diff(y(t),t)=x-x^3}, [x(t),y(t)], t=0..20, [[0,1,0.2], [0,0,1], [0,1,0.4], [0,1,0.75], [0,0,1.5], [0,-0.1,0.7]], stepsize=0.1, arrows=none, linecolor=black);**



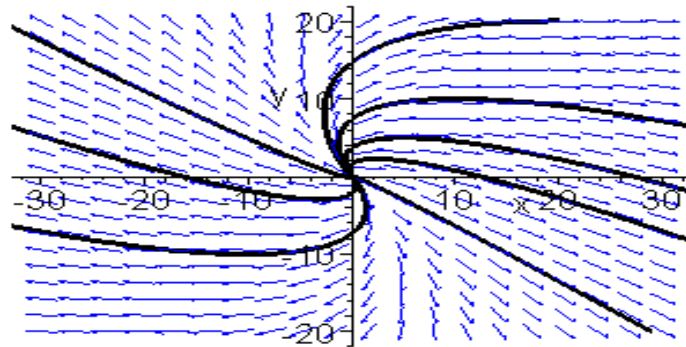
2.  $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = y - x \end{cases}$  differensial tenglamalar sistemasining fazoviy rasmini chizing.

> **restart; with(DEtools):**

```

> sys:=diff(x(t),t)=3*x+y, diff(y(t),t)=-x+y:
> phaseportrait([sys],[x(t),y(t)],t=-10..10, [[0,1,-2], [0,-3,-3], [0,-2,4], [0,5,5],
[0,5,-3],
[0,-5,2], [0,5,2], [0,-1,2]], x=-30..30,y=-20..20, stepsize=.1,
colour=blue,linecolor=black);

```



$kf(x)$  qavariq kuchini hisobga oluvchi va davriy kuch ta'siridagi jism harakatini tasvirlovchi  $a \cos(\omega(x - x_0))$  Nyutonning differensial tenglamasini ko`rib chiqamiz.

```

>restart;
deq:= m*diff(x(t),t,t)+k*x(t)=a*cos(omega*(t-t0));

```

$$deq := m \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} x(t) \right) + k x(t) = a \cos(\omega (t - t_0))$$

Ushbu tenglamani yechish uchun Furiyening qayta o`zgartirish metodini qo`llaymiz.

```

> with(inttrans):F:=fourier(deq,t,ti);

```

$$\begin{aligned}
 F &:= -m \text{ti}^2 \text{fourier}(x(t), t, ti) + k \text{fourier}(x(t), t, ti) = \\
 &= a \left( e^{(-I \omega t_0)} \pi \text{Dirac}(-ti + \omega) + e^{(I \omega t_0)} \pi \text{Dirac}(ti + \omega) \right)
 \end{aligned}$$

Endi olingan algebraik tenglamaning  $f(x)$  dastlabki funksiyasidan Furiye qayta o`zgartirishiga nisbatan yechimini topamiz.

```

> S:=solve(F,fourier(x(t),t,ti));

```

$$S := \frac{a \pi (e^{(-I \omega t_0)} \text{Dirac}(-ti + \omega) + e^{(I \omega t_0)} \text{Dirac}(ti + \omega))}{-m ti^2 + k}$$

Tebranishlar chastotasining  $\omega$  muayyan oshishida soddalashtirgandan so`ng qo`yidagiga ega bo`lamiz.

> **assume(omega>0);simplify(S);**

$$\frac{a \pi e^{(-I ti t_0)} (\text{Dirac}(-ti + \omega) + \text{Dirac}(ti + \omega))}{-m ti^2 + k}$$

Oxirgi formulaga Dirakning **Dirac** umumlashtirish funksiyasi kiradi. Endi Furiye almashtirishdan teskari foydalangan holda dastlabki funksiyani topamiz

> **invfourier(%,ti,t);**

$$\frac{1}{2} \frac{a (e^{(-I \omega t_0)} e^{(I \omega t)} + e^{(I \omega t_0)} e^{(-I \omega t)})}{-m \omega^2 + k}$$

> **simplify(%);**

$$\frac{a \cos(\omega (t - t_0))}{-m \omega^2 + k}$$

## 2.7. Xususiy hosilali differensial tenglamalarni Maple da yechish usullari

Maple dasturining yangi versiyasi xususiy hosilalardagi ba'zi differensial tenglamalar sinfini analitik yechishga "qodir". Shu maqsadda **pdesolve** (tenglamalar, o`zgaruvchilar) komandasi kiritilgan.

Misollar keltiramiz.

> **restart;pdesolve( diff(f(x,y),x,x)+5\*diff(f(x,y),x,y)=3, f(x,y) );**

$$f(x,y) = \frac{3}{2} x^2 + \_F1(y) + \_F2(y - 5x)$$

Ushbu tenglamani yechishda  $\_F1$ ,  $\_F2$  erkin funksiyalari mavjud.

> **pdesolve( 3\*diff(g(x,y),x)+7\*diff(g(x,y),x,y)=x\*y, g(x,y) );**

$$g(x,y) = \frac{1}{6}x^2y - \frac{7}{18}x^2 + \_F1(y) + e^{\left(-\frac{3}{7}y\right)} \_F2(x)$$

Maple doimiy koeffitseyent ega bo'lmagan tenglamalardan ayrim turlarining yechimini topa oladi, misol

> **pdesolve(y\*diff(U(x,y),x)+x\*diff(U(x,y),y)=0, U(x,y) );**

$$U(x,y) = \_F1(-x^2 + y^2)$$

Uchta mustaqil o'zgaruvchilardan U ning funksiyasi uchun turdosh bo'lmagan tenglama

> **pdesolve( diff(U(x, y, z), x)+2\*diff(U(x, y, z), y)+5\*diff(U(x, y, z), z)=13\*x\*y\*z, U(x, y, z) );**

$$U(x,y,z) = \frac{65}{2}x^4 + \frac{1}{3}(65y - 260x + 26z)x^3 + \frac{13}{2}(y - 2x)(z - 5x)x^2 + \_F1(y - 2x, z - 5x)$$

Navbatdagi ikkita misol matematik-fizika tenglamalari hisoblanadi.

Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi

> **restart;heat:=diff(u(x,t),t)-k\*diff(u(x,t),x,x)=0;**

$$heat := \left( \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \right) - k \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right) = 0$$

Команда **pdesolve** ning "peshonaga" komandasi bu tenglamani yechmaydi, albatta

> **pdesolve(heat,u(x,t));**

$$pdesolve \left( \left( \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \right) - k \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right) = 0, u(x, t) \right)$$

Bizga tanish bo'lgan o'zgaruvchilarni bo'lish usulini qo'llaymiz. Buning uchun dastlab o'rin almashtirish usulini amalga oshiramiz.

> **eq:=subs(u(x,t)=X(x)\*T(t),heat);**

$$eq := \left( \frac{\partial}{\partial t} X(x) T(t) \right) - k \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x) T(t) \right) = 0$$

Endi tenglamaning ikkala qismini X(x)\*T(t) bo'lamiz.

> **expand(eq/X(x)/T(t));**

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t} T(t)}{T(t)} - \frac{k \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x) \right)}{X(x)} = 0$$

O`zgaruvchilarni bo`lamiz.

> **sep:=(%) + (k\*diff(X(x),x,x)/X(x)=k\*diff(X(x),x,x)/X(x));**

$$sep := \frac{\frac{\partial}{\partial t} T(t)}{T(t)} = \frac{k \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x) \right)}{X(x)}$$

Olingan tenglikning o`ng va chap qismlarida har xil o`zgaruvchilarning funksiyalari turganligi sababli o`ng va chap qismlar doimiy kattalik hisoblanadi.

> **lhs(sep)=C;**

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t} T(t)}{T(t)} = C$$

Endi biz oddiy differensial tenglama va uning yechimiga ega bo`ldik.

> **T\_sol:=dsolve(%,T(t));**

$$T\_sol := T(t) = \_C1 e^{(C t)}$$

Xuddi shu yo`l bilan tenglikning o`ng qismini o`zgarmasga tenglashtiramiz

> **rhs(sep)=C;**

$$\frac{k \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x) \right)}{X(x)} = C$$

Olingan oddiy differensial tenglamaning yechimi quyidagicha.

> **X\_sol:=dsolve(%,X(x),explicit=true);**

$$X\_sol := X(x) = \_C1 \cosh\left(\sqrt{\frac{C}{k}} x\right) + \_C2 \sinh\left(\sqrt{\frac{C}{k}} x\right)$$

> **map(subs,[X\_sol],T\_sol,X(x)\*T(t));**

$$\left[ \left( -C1 \cosh\left(\sqrt{\frac{C}{k}} x\right) + -C2 \sinh\left(\sqrt{\frac{C}{k}} x\right) \right) -C1 e^{(C t)} \right]$$

> **sol:=map(simplify,%);**

$$sol := \left[ -C1^2 e^{(C t)} \cosh\left(\sqrt{\frac{C}{k}} x\right) + -C1 e^{(C t)} -C2 \sinh\left(\sqrt{\frac{C}{k}} x\right) \right]$$

Soddalashtirish maqsadida erkin o'zgarmlar uchun aniq qiymatlarning o'rnini almashtirishni bajaramiz

> **subs(C=k,k=1,\_C1=1,\_C2=1,sol);**

$$[e^t \cosh(x) + e^t \sinh(x)]$$

> **evalc(%);**

$$[e^t \cosh(x) + e^t \sinh(x)]$$

Trigonometrik ko'rinishga o'tkazamiz

> **convert(%,trig);**

$$[(\cosh(t) + \sinh(t)) \cosh(x) + (\cosh(t) + \sinh(t)) \sinh(x)]$$

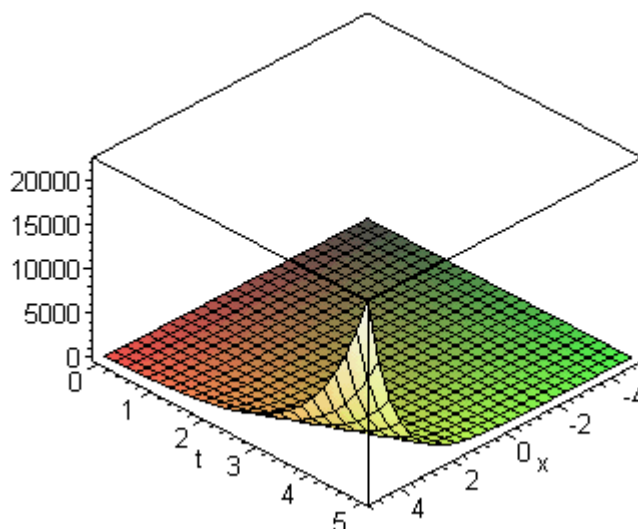
va soddalashtiramiz

> **S:=evalc(%);**

$$S := [(\cosh(t) + \sinh(t)) \cosh(x) + (\cosh(t) + \sinh(t)) \sinh(x)]$$

Endi birinchi yechimning grafigini qurish mumkun.

> **plot3d(op(S),x=-5..5,t=0..5);**



Birinchi yechimning to'g'riligini tekshiramiz.

> **simplify(subs(u(x,t)=sol[1],heat));**

$$0 = 0$$

Yana bitta misol tariqasida to'liqinli tenglamani ko'rib chiqamiz.

> **restart;wave:=diff(u(x,t),t,t)-c^2\*diff(u(x,t),x,x);**

$$\text{wave} := \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) \right) - c^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \right)$$

$u(x,t)$  uchun yechim topamiz.

> **sol:=pdesolve(wave,u(x,t));**

$$\text{sol} := u(x, t) = \_F1(tc + x) + \_F2(tc - x)$$

Bu yerda  $\_F1$  va  $\_F2$  – erkin funksiyalar. Ularni  $f1$  va  $f2$  ning aniq funksiyalari bilan almashtiramiz.

> **f1:=xi -> sech(-xi^2);**

$$f1 := \xi \rightarrow \text{sech}(-\xi^2)$$

> **f2:=xi -> piecewise(-1/2<xi and xi<1/2,1,0);**

$$f2 := \xi \rightarrow \text{piecewise}\left(\frac{-1}{2} < \xi \text{ and } \xi < \frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

Yechimdagi funksiyalarning nomini  $f1$  va  $f2$  ga almashtiramiz hamda  $c=1$  ni qo'yamiz.

> **subs(\_F1=f1, \_F2=f2, c=1, sol);**

$$u(x, t) = f1(t + x) + f2(t - x)$$

Aniq yechimga ega bo'lish uchun  $f1$  va  $f2$   $u(x,t)$  qiymatlarini o'rniga qo'yamiz.

> **subs(%,u(x,t));**

$$\text{sech}((t+x)^2) + \left( \begin{array}{l} 1 \quad -\frac{1}{2} - t + x < 0 \text{ and } t - x - \frac{1}{2} < 0 \\ 0 \quad \text{otherwise} \end{array} \right)$$

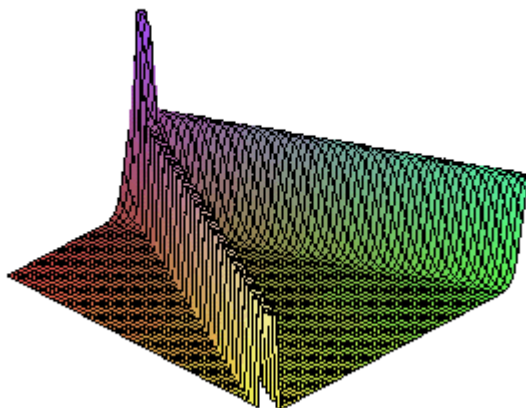
$(x$  va  $t)$  ning funksiyasidagi olingan qiymatni o'zgartirish uchun **unapply** ning funksiyasini tadbiiq qilamiz.

> **f:=unapply(%,x,t);**

$$f := (x, t) \rightarrow \operatorname{sech}((t+x)^2) + \operatorname{piecewise}\left(-\frac{1}{2} - t + x < 0 \text{ and } t - x - \frac{1}{2} < 0, 1, 0\right)$$

Endi biz yechishning grafigini chizishimiz mumkin.

> **plot3d(f, -10..10, 0..10, grid=[60,60]);**



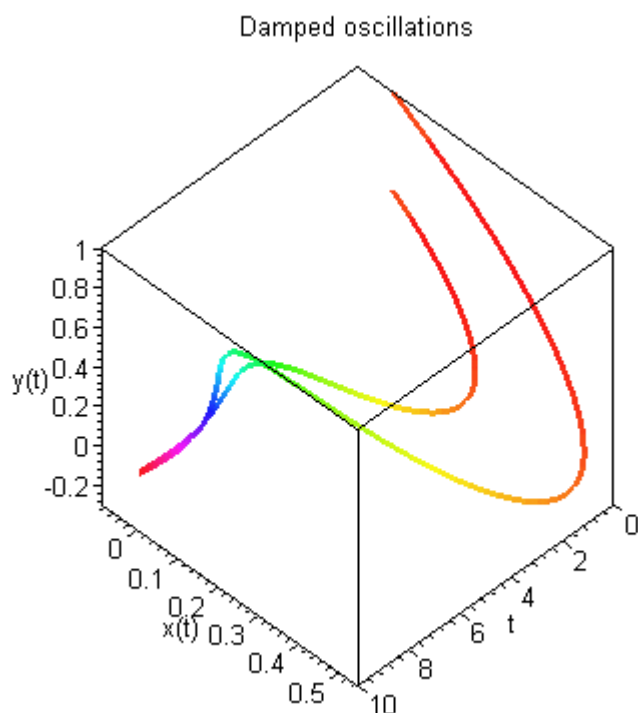
Biz grafikda to'liqinli tenglama yechimlarini ifoda etuvchi ikkita to'liqinni ko'ramiz.

Berilgan differensial tenglamalar sistemasi va boshlang'ich ma'lumotlar ro'yxati uchun **DEplot3d** komandasi sistema egri yechimining uch o'lchovli ko'rinishini bajaradi. Bunda sistema faqat bitta mustaqil o'zgaruvchiga ega bo'lishi shart. Ushbu komanda (**DEplot** komandasidan farqli ravishda) yordamida yo'nalishlar maydoni qurib bo'lmaydi.

Misol keltiramiz:

> **with(DEtools):**

> **DEplot3d({D(x)(t)=y(t),D(y)(t)=-x(t)-y(t)},{x(t),y(t)},t=0..10,  
[[x(0)=0,y(0)=1],[x(0)=0,y(0)=.5]],scene=[t,x(t),y(t)],stepsize=.1,  
title='Damped oscillations',linecolour=t-sqrt(t));**



**PDEplot** paketi komandasi xususiy hosilalarda tenglamalar yechimlari grafigini qurish imkoniyatini beradi. Bu funksiya  $P(x,y,u) * \text{ko`rinishdagi birinchi tartibli } D[1](u)(x,y) + Q(x,y,u) * D[2](u)(x,y) = R(x,y,u)$  kvazichiziqli tenglamalar yuzasini quradi: bu yerda P, Q, va R faqat x, y, va  $u(x,y)$  larga bog`liq. Misollar keltiramiz

`pde1 := diff(u(x,y),x)*diff(u(x,y),y)-x*y+u(x,y)=0;`

$$pde1 := \left( \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) \right) - x y + u(x,y) = 0$$

x-y tekislikda yakka radiusli aylanadan boshlang`ich egri chiziq sifatida foydalanib, biz PDEplot yordamida xususiy hosilalarda tenglamalar integrallashishi yuzasini tadqiq qila olamiz:

**> pde1 := diff(u(x,y),x)\*diff(u(x,y),y)-x\*y+u(x,y)=0;**

$$pde1 := \left( \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) \right) - x y + u(x,y) = 0$$

**>PDEplot(pde1, [cos(t), sin(t),0], t=-2\*Pi..3\*Pi,**

**ic\_assumptions=[diff(u(x,y), x) = -cos(t)];**

## 2.8. Maple dasturining differensial tenglamalarni yechish uchun mo`ljallangan maxsus paketida ishlash

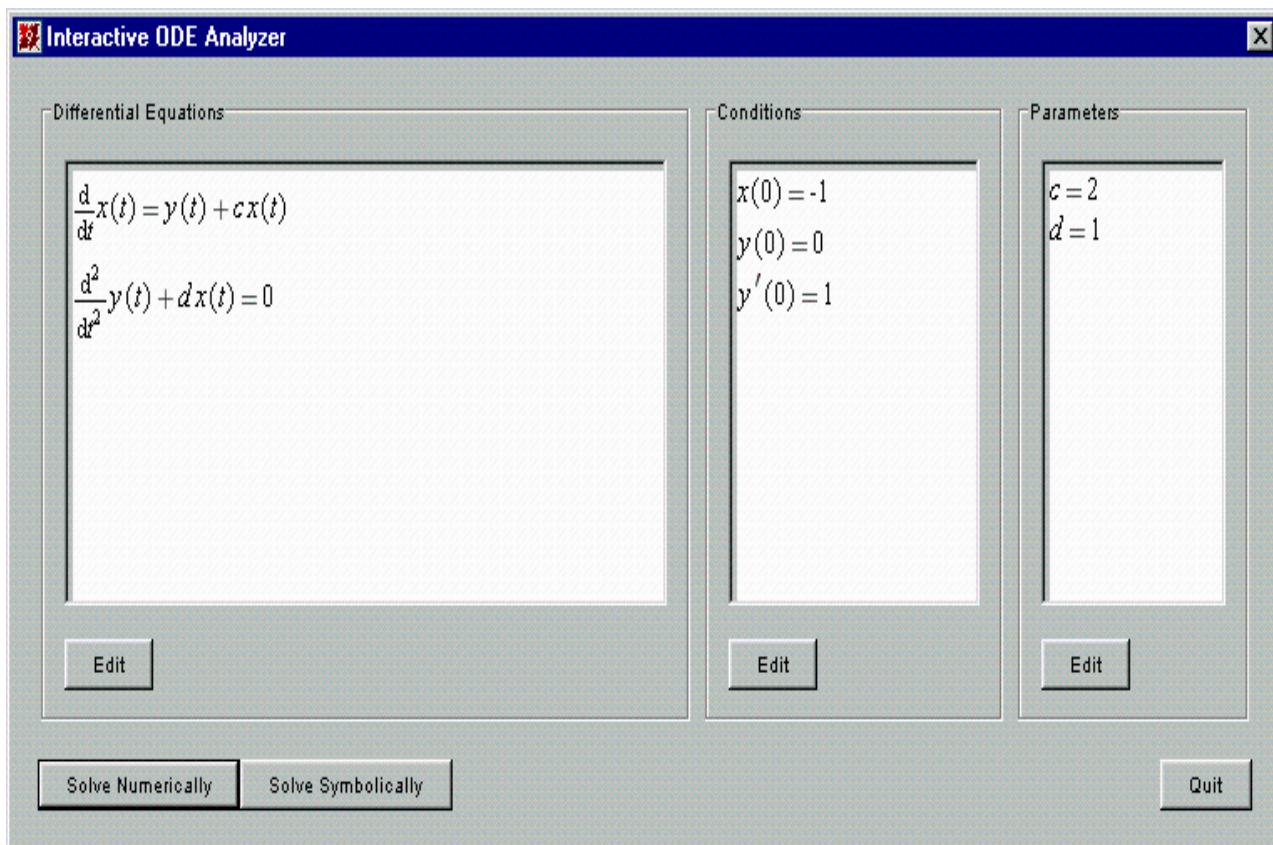
Maple amaliy paketida differensial tenglamalarning yechimlarini hisoblash uchun **dsolve[interactive]** komandasi yordamida qulay muloqot oynasidan foydalanish imkoniyatiga ega. Muloqot oynasida natijani olish uchun oddiy differensial tenglamani qiymatini hisoblashda analitik va sonli usullardan foydalanish mumkin.

Analiz qiluvchi muloqot oynasini ishga tushirish quyidagicha:

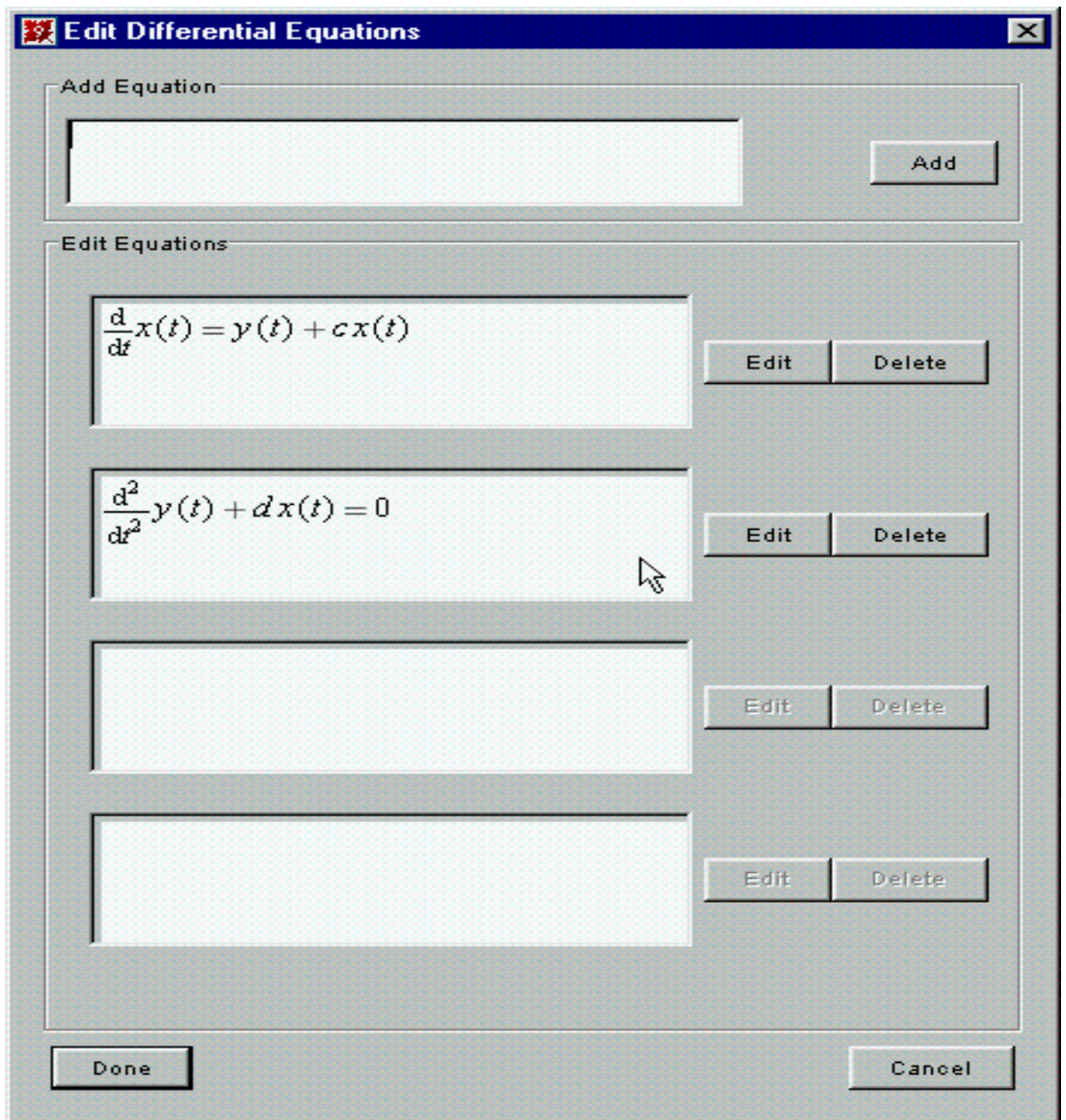
```
> dsolve[interactive](diff(y(x),x) = (a[0]+a[1]*y(x)+a[2]*y(x)^2+a[3]*y(x)^3)/  
((s[1]*x+s[0])*y(x)+r[1]*x+r[0]));
```

Muloqot analizi uch sistemali qismdan iborat.

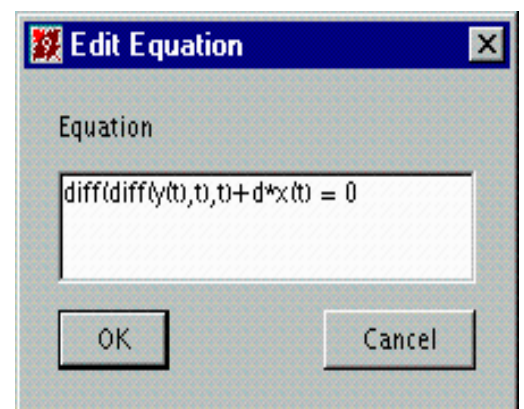
- Har xil sistemali tenglamalar
- Sistemalar boshlang`ich va aniq chegaralari
- Sistemalar parametrlari (aniqmas o`zgarmaslar)



Muloqot oynasida har xil tenglama va tenglamalar sistemasini o`zgartirish kiritish uchun **Edit** tugmachasini bosish kerak. Bunda tenglamalarni joriy oynadagi parametrlarini o`zgartirish mumkin.

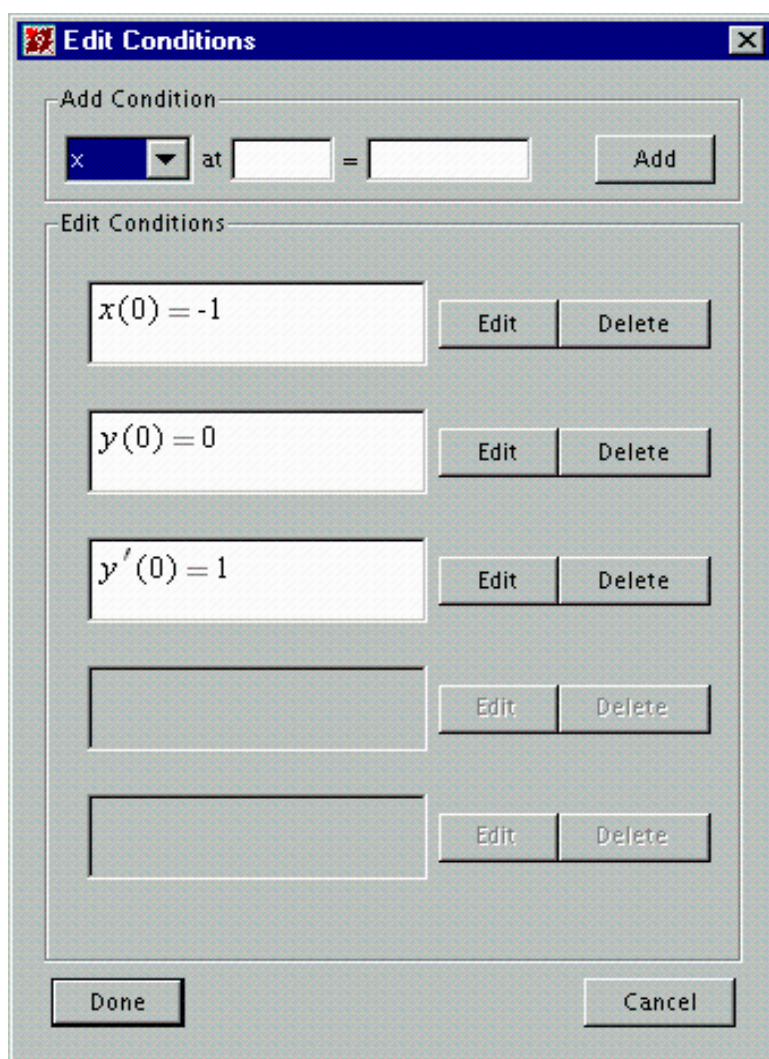


Ushbu oynaning ikkita sohasi mavjud bo`lib, sistemaga ishlatilayotgan va yangi tenglamalarni qo`shish mumkin. Buning uchun yangi tenglama (tenglamalar sistemasi) larni kiritib, **Add** tugmasi bosiladi. Differensial tenglamani kiritishda xatolikka yo`l qo`yilsa, **Edit** (**Delete**-kiritilgan tenglamalarni o`chiradi)

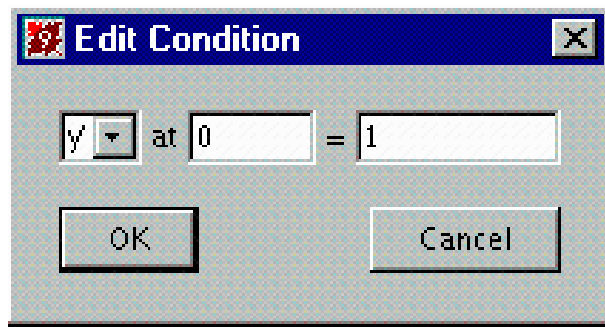


bosiladi. Tenglama tuzatilib, **OK** tugmasi (**Cancel**-bekor qilish) bosiladi.

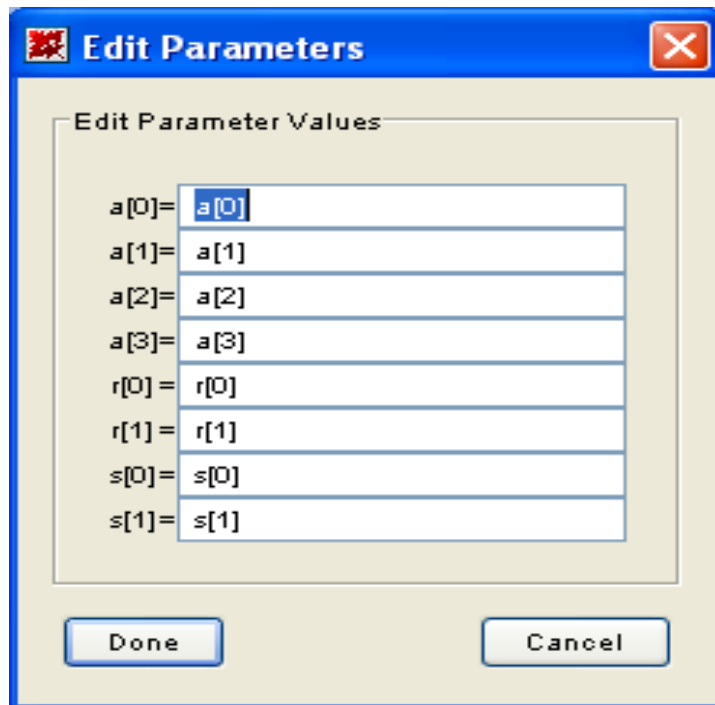
Barcha o`zgartirishlar qilingandan keyin **Done** tugmasi bosiladi.



Tenglamaga boshlang`ich va chegaraviy shartlarni ( $x(0)$ ,  $y(0)$ , ...) kiritish yuqoridagi oynada bajariladi. Bunda **Edit** bosilganda quyidagi oyna chiqadi. Xato kiritilgan ma`lumotga o`zgartirish kiritishda **Edit (Delete)** tugmachasi bosiladi natijada quyidagi oyna chiqadi va xuddi oldingi tenglama kiritishdagi amallar bajariladi.



Tenglamadagi o`zgarmas parametrlarni kiritishda quyidagi oyna ochiladi. Ochilgan oynada o`zgarmaslarga ixtiyoriy qiymatlarni kiritish mumkin.



Differensial tenglamalar sistemasini sonli yechimini topishda **Solve Numerically** tugmasi bosiladi va ekranda quyidagi muloqot oynasi ochiladi.

**Solve Numerically**

**Parameters**

- Runge-Kutta-Fehlberg 4-5th order
- Dverk 7-8th order interpolant
- Gear single step extrapolation rational
- Rosenbrock stiff 3-4th order
- Livermore stiff adams iterative
- Boundary Value Problem solver
- trapezoidal richardson extrapolation
- Range of t: 0 to 10
- Taylor series lazy series
- Modified Extended BDF Implicit
- Fixed step methods
- .5e-2 forward Euler
- Absolute: 1.000000e-07 default
- Relative: 1.000000e-08 default

**Output**

Show function values at t = 1.000000

Solve

Plot

Plot Options

$x = -5.81256721901883111$   
 $y = 2.01432225845313218$   
 $y' = 3.79824496056569938$

Show Maple commands

Clear Help Back Quit

On Quit, Return Plot

Unda berilgan differensial tenglamani sonli yechish, uning grafigini ikki o`lchovli tekislikda va uch o`lchovli fazoda tasvirlash, animatsiya (harakatlantirish) berish, chizmani turli xildagi ranglarda tasvirlash va differensial tenglamalar ustida boshqa ishlarni bajarish mumkin. Bu muloqot oynasidan foydalanish ko`pgina

qulayliklarga ega. Oynada muhim chiqishni tasvirlovchi kirish sistemasining raqamli yechimini topish uchun tanlovlarni aniqlash mumkin.

Izoh: Bu oynaga kirish sistemasi to'liq aniqlanganda, ya'ni kirim uchun unikal raqamli yechim olish mumkin bo'lganda erishish mumkin, chunki barcha muhim shart aniqlangan va barcha parametrlar raqamli kattaliklarga ega bo'ladi.

Differensial tenglamalar sistemasini analitik yechimini topishda **Solve Symbolically** tugmasi bosiladi va ekranda quyidagi oyna chiqadi.

**Solve Symbolically**

Method

- Default
- Use Lie methods
- Use Classification methods
- Use Integration Factors

Integrate

Explicit

Transforms

Truncated Series, order

Formal Series

Expansion point

Show Maple commands

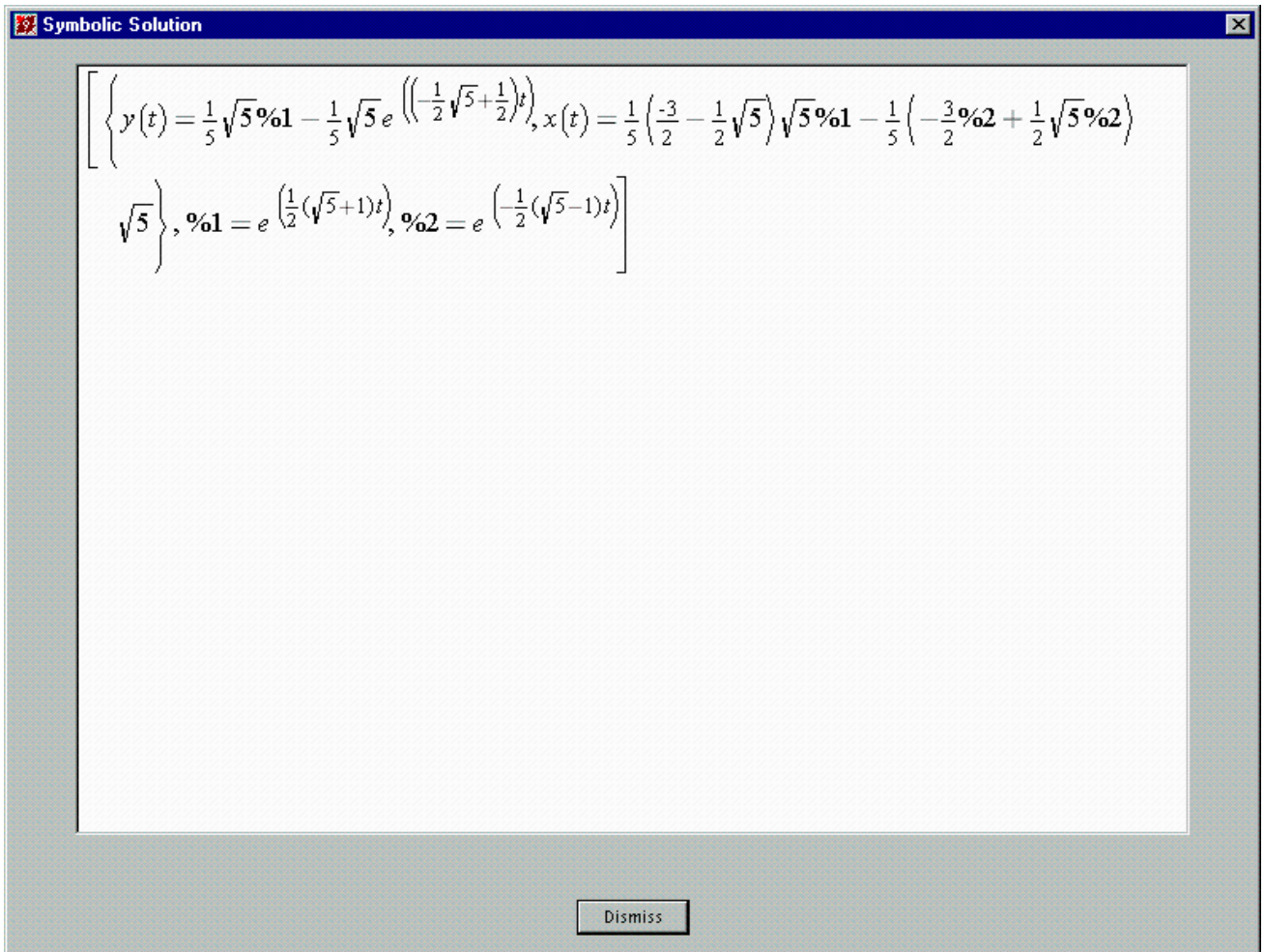
```
sol1 := dsolve([diff(x(t),t) = y(t)+2*x(t),
diff(diff(y(t),t),t)+x(t) = 0, x(0) = -1, y(0)
= 0, D(y)(0) = 1], {x(t), y(t)});
plot([-1/5*(-3/2+1/2*5^(1/2))*5^(1/2)*e
xp(-1/2*(5^(1/2)-1)*t)+1/5*(-3/2*exp(1
/2*(5^(1/2)+1)*t)-1/2*5^(1/2)*exp(1/2*(
5^(1/2)+1)*t))*5^(1/2),
```

Output

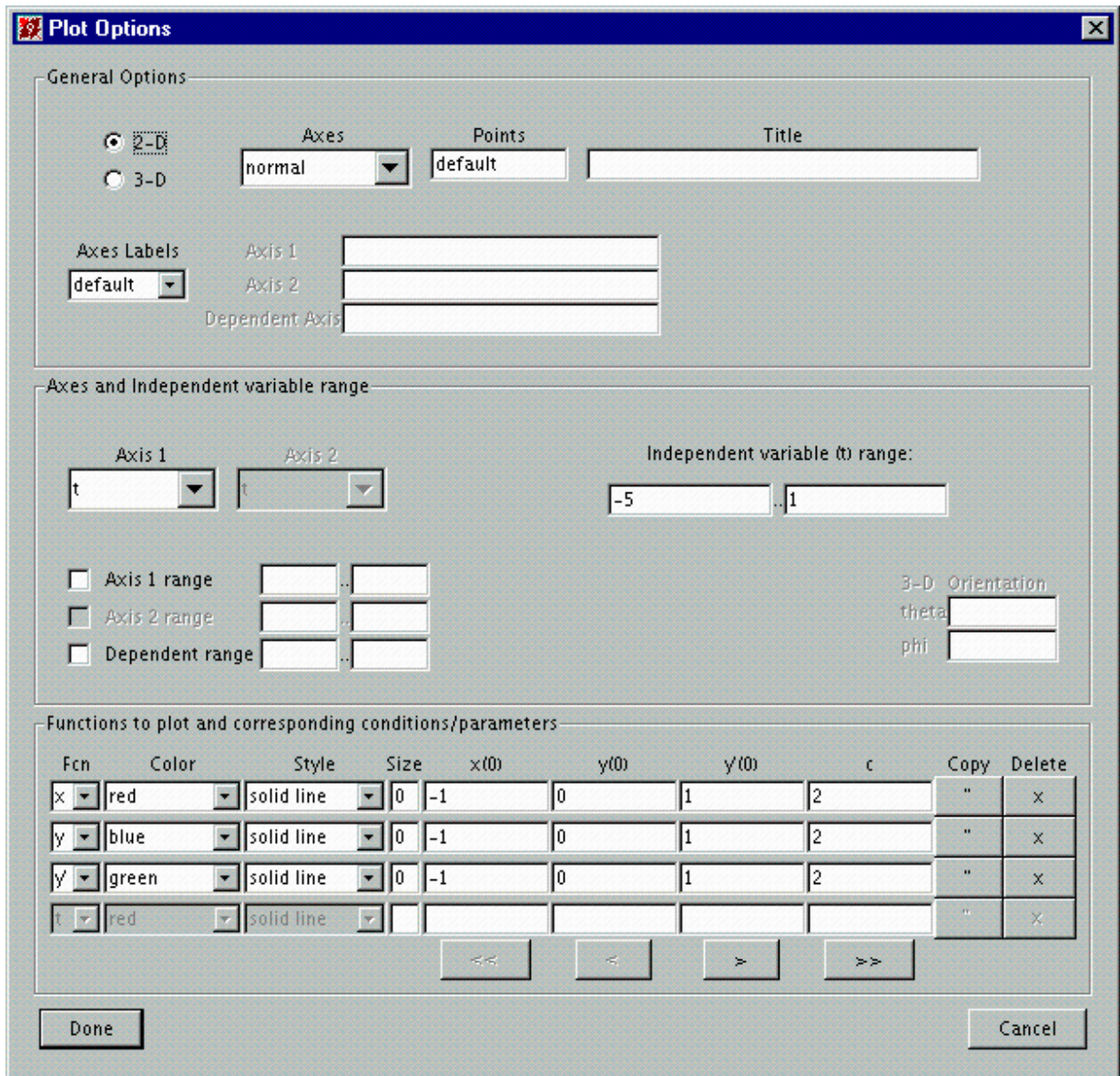
$$\left[ \left\{ \begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{5}\sqrt{5}e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)t} - \frac{1}{5}\sqrt{5}\%2, x(t) = -\frac{1}{5} \right. \\ &\left. \left( \frac{-3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \right) \sqrt{5}\%2 + \frac{1}{5} \left( -\frac{3}{2}\%1 - \frac{1}{2}\sqrt{5}\%1 \right) \right. \\ &\left. \sqrt{5} \right\}, \%1 = e^{\left(\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)t\right)}, \%2 = e^{\left(-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)t\right)} \right]$$

On Quit, Return

Differensial tenglamani qiymatini chiqarish uchun **Solve**, agarda qiymat katta joyini egallasa yoki qiyin bo`lsa, uni faqat katta oynada ko`rish mumkin. Katta oynadan foydalanish uchun **Large Display** tugmasi bosiladi Misol tariqasida ishlash uchun quyidagi oynani ko`rish yetarli.



Differensial tenglamaning grafigini chizhishda **Plot** tugmachasidan foydalaniladi. **Plot options** tugmachasi esa grafikni tanlash imkonini beradi.



Bu oyna grafikni chizishda unga o'zgartirishlar kiritishga qulay. Masalan uning nomini, o'qlarini, o'qlar va mustaqil o'zgaruvchi diapazonlar, umumiy tanlash (2-D yoki 3-D) ikki o'lchovli va uch o'lchovli ko'rinishda, nuqtalar (qurilishida), o'qlarining naqshini va grafik ustida boshqa amallarni bajarish mumkin.

## XULOSA

Ma'lumki, differensial va integral hisobning tadbiri ko'p predmetlar bilan bog'liq. Shuning uchun bu tushunchalarni mukammal anglash va tushinib yetish o'quvchi va talabalar uchun muhimdir. Maktab, litsey va kasb hunar kollejlarda o'tiladigan oliy matematika va geometriya fanlarida diferensial va hosila haqidagi mavzulardan misol va masalalar yechishda Maple amaliy dasturidan foydalansak ishimiz ancha yengil va oson kechadi. Maple amaliy dasturida differensial tenglamani analitik yechish, differensial tenglamaning umumiy yechimi, fundamental (bazis) sistemaning yechimi, Koshi masalasining yechimi yoki chegaraviy masalalar, differensial tenglamalar sistemasini yechish, darajali qatorlar yordamida differensial tenglamaning taqribiy yechimini topish, differensial tenglamani sonli yechish, odeplot komandasi yordamida differensial tenglamaning grafigini yasash, differensial tenglama yechimining grafigini Detools paketi yordamida namoyish qilish va differensial tenglamalar sistemasining fazodagi rasmini chizish kabi amallarni o'zida saqlaydi. Maple amaliy dasturi mana shu misollarni yechishda yuksak imkoniyat darajalari bilan ajralib turadi. Maple amaliy dasturidan foydalanishning eng katta yutuqlaridan biri differensial tenglama yechimini grafikli holatda ko'rsatishidir. Ya'ni bunda biz Maple amaliy dasturining standart kutubxonasi ko'magidan foydalanamiz. Differensial tenglama yechimining grafigini Detools paketi yordamida namoyish qilish mumkin. Bunda misolning yechimini yorqin dalil bilan ko'rsatib bergan bo'lamiz.

Ishning asosiy natijalari:

- Differensial tenglamaning yechimini to'liq va aniq misollarda ko'rsatish uchun issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi keltirilgan va shu tenglamani chekli ayirmalar yordamida tasvirlash aytib o'tilgan.
- Chekli ayirmalarni kiritishda sxemaning turg'unligi e'tiborga olingan.

- Differensial tenglamalarni zamonaviy dasturlash paketi bo'lgan Maple dasturida tasvirlash va tenglamaning analitik yechimini olish keltirib o'tilgan.
- Maple paketi yordamida differensial tenglamalarni sonli yechish ko'rsatib o'tilgan va unga doir bir nechta misollar yechib ko'rsatilgan.
- Mapleda paketida darajali qatorlar yordamida differensial tenglamaning taqribiy yechimini topish usuli taqdim etilgan.
- Xususiy hosilali differensial tenglamalarni Maple yordamida yechish usullari ko'rsatib o'tilgan va unga doir bir nechta misollar keltirib o'tilgan.
- Differensial tenglama yechimining grafigini Detools paketida namoyish qilish.
- Differensial tenglamalar sistemasining sonli yechimini Maple paketi yordamida amalga oshirilgan.

Ushbu ishni bajarish davomida differensial tenglamalarning sonli yechimini topish muammosini mustaqil hal qilish to'liq o'rganildi va tahlil qilindi. Bundan tashqari zamonaviy dasturlash tizimlaridan biri bo'lgan Maple paketining differensial tenglamalar bilan ishlash qoidalarini mukammal holda o'rganib chiqildi va buning natijasi sifatida mustaqil ravishda turli murakkablikdagi masalalar Maple paketida yechib ko'rsatildi va tahlil qilindi. Differensial tenglamalar yechimini tahlil qilish uchun esa ularning grafiklarini chizish komandalari va qo'shimcha paketlari o'rganib chiqildi.

## A d a b i y o t l a r

1. Каримов И.А. “Юксак малакали мутахассислар – тараққиёт омили”. Тошкент. Ўзбекистон. 1995 йил.
2. Каримов И.А. Юксак маънавият енгилмас куч. Тошкент. Ўзбекистон. 2008 йил.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука. 1989.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1989.
5. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Эдиториал, 2000.
6. Isroilov M.I. Hisoblash usullari. Toshkent. O`qituvchi. 2004.
7. Xo`jayorov B.X. Qurilish masalalarini sonli yechish usullari. Toshkent. O`zbekiston. 1995.
8. Abduqodirov A.A., Fozilov F.I. Umurzaqov T.N. Hisoblash matematikasi va programmalash. Toshkent. O`qituvchi. 1989 y.
9. Демидович Б.П., Марон И.А., Основы вычислительной математики. М. “Наука”, 1970 г.
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. –М.: Наука, 1972. 736 с.
11. Самарский А.А. Теория разностных схем. –М.: Наука, 1989. 616 с.
12. Плис А.И., Сливина Н.А. Лабораторный практикум по высшей математике. –М.: Высшая школа. 1983.
13. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. –М.: Высшая школа. 1990.
14. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. –М.: Наука, 1972.
15. Березин И.С., Жидков П.П. Методы вычислений. М.: Физматгиз, 1962 т.

16. Крилов В.И. Бобков В.В.Монасткрский П.И. Вычислительные методы высшей математики в 2-х томах. Минск, Высшая шк., 1972-1979. т. 1-2.
17. Матросов А. Решения задачи математики и механики системе Maple-6 . Санкт-Петербург . 2000
18. Савотченко С.Е., Кузьмичева Т.Г. Методы решения математических задач в Maple.: Учебное пособие – Белгород: Изд. Белаудит, 2001. – 116 с
19. Дьяконов В.П. Maple 6: учебный курс. СПб.: Питер, 2001.
20. Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. Введение в Maple V. Математический пакет для всех. М.: Мир, 1997.
21. Прохоров Г.В., Леденев М.А., Колбеев В.В. Пакет символьных вычислений Maple V. М.: Петит, 1997.
22. [www.edu.uz](http://www.edu.uz) – O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi maxsus portali.
23. [www.ref.uz](http://www.ref.uz) – Referatlar, kurs ishi va diplom ishlari.
24. [www.macromedia.com](http://www.macromedia.com) – Macromedia firmasi maxsus sayti.
25. [www.5ballov.ru](http://www.5ballov.ru) – Referatlar va kurs ishlari.
26. [www.twt.mpei.ac.ru](http://www.twt.mpei.ac.ru) – zamonaviy matematik paketlar uchun maxsus sayt
27. [www.maplesoft.com](http://www.maplesoft.com) – Maplesoft firmasi maxsus sayti.
28. [www.exponenta.ru](http://www.exponenta.ru) – matematik o`quv sayti.
29. Xudoyorov Sh.J., Eshonqulova Z., Dustov S. Differensial tenglamaning analitik yechimini topish usuli. Professor-o`qituvchilar va talabalarning XXIII ilmiy-amaliy konferensiyasi materiallari to`plami. Navoiy. 2008 y. 11-13 belar.
30. Xudoyorov Sh.J., Dustov S., Nazarova N. Maple tizimida differensial tenglamani yechish usullari haqida. Professor-o`qituvchilar va talabalarning XXIV ilmiy-amaliy konferensiyasi materiallari to`plami. Navoiy. 2009 y.