O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

ALISHER NAVOIY NOMIDAGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

MEXANIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

«AMALIY MATEMATIKA» KAFEDRASI

RAVSHANOV HASAN SAYFIDDIN O‘G‘LI

«5130200 – Amaliy matematika va informatika» ta’lim yo‘nalishi
bo‘yicha bakalavr darajasini olish uchun

«ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI CHEGARAVIY ELEMENTLAR USULI BILAN SONLI YECHISH»

mavzuli

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Bajardi : H.S.Ravshanov

Ilmiy rahbar : dots. A.Abdirashidov

Ushbu ish kafedraning 2016 yil «23» maydagi yig‘ilishida muhokama qilindi va himoya qilishga №11,a bayonnoma bilan tavsiya etildi.

Kafedra mudiri : dots. J.Maxmudov

Fakultet dekani : dots. H.Ro‘zimurodov

Ushbu ish DAKning 2016 yil «___» iyundagi yig‘ilishida muhokama qilindi va №___ bayonnoma bilan «____» ballga baholandi.

DAK raisi ________________
Komissiya a’zolari ________________
____
____

Samarqand - 2016

Mundarija

KIRISH

Masalaning qo'yilishi. Oxirgi vaqtlarda chekli ayirmalar, variasion usullardan biri hisoblanadigan chekli elementlar usuli bilan bir qatorda chegaraviy elementlar usuli keng qo'llanilmoqda. Usulning mohiyati shundaki, qaralayotgan jism chegarasi chekli sondagi hegaraviy elementlarga (kesma, parabolik yoki kvadratik chiziq bo'lagiga) ajratiladi. Har bir element ichida shakl funksiyalari beriladi va bu funksiyalar chegara tugunlardagi (elementlar tutashgan nuqtalar) ko'chishlar orqali elementning ichidagi ko'chishlarni aniqlash imkonini beradi.

Ushbu bitiruv malakaviy ishida oddiy differensial tenglamalarni chekli ayirmalar, chekli elementlar, chegaraviy elementlar usullari yordamida yechishni tadqiq qilish, masalaning matematik modelini tuzish; dasturiy ta'minotini yaratish; tanlangan masalaning yechilish jarayonini namoyish qiladigan dasturiy vosita yaratish qaraladi.

Mavzuning dolzarbligi. Fizik hodisalarining sifat ko'rsatkichlarini tahlil qilishda muhandis yoki fizik qaralayotgan sohada o'rinli bo'lgan differensial tenglamalar sistemasini kiritadi, unga boshlang'ich va chegaraviy shartlarni qo'yadi, ya'ni masalanig matematik modelini tuzadi. Bu holda matematik model to'liq (yopiq) bo'ladi va amaliyotda qo'llash uchun biror sohada berilgan sonli qiymatlardan bog'liq yechimini topish yetarli bo'ladi. Ko'pchilik hollarda qaralayotgan soha kesma yoki tekislikdan iborat bo'lmasdan murakkab shaklda bo'ladi (masalan samolyot, suv osti kemasi yon sirtlari). Bunday hollarda chekli yoki chegaraviy elementlar usulini qo'llash yaxshi sonli natijalarga olib keldishi mumkin. Bitiruv ishida qaralayotgan masalalarning dolzarbligir ham ana shundadir.

Ishning maqsadi. Ushbu bituruv malakaviy ishning maqsadi matematik fizika, mexanikaning ayrim amaliy masalalarida qaraladigan jarayonlarni kompyuter yordamida modellashtirishni o`rganish, sonli hisoblalar bajarish, dasturiy ta’minotni yaratish va hisoblash tajribalari asosida tadqiq etishdan iborat. Aniq masalalar sifatida birinchi, ikkinchi va yuqori tartibli differensial tenglamalarni sonli yechish masalasi olingan. Qo`yilgan masalani hal etish uchun quyidagi ishlarni hal etish zarur:

- fizik jarayonlarni matematik modellashtirish asoslarini o‘rganish;
- masalaning matematik tavsifini berish;
- chegaraviy elementlar usulida differensial tenglamalarni sonli yechish masalasining matematik modelini tuzish;
- masalani yechishning algoritmini tuzish;
- dasturiy mahsulotni loyihalashtirish, sozlash va sinovdan o`tkazish;
- hisoblash tajribalari o`tkazish va uning natijalarini tahlil qilish.

Yaratilayotgan dasturiy mahsulotni matematika, fizika va mexanika sohasidagi ilmiy tadqiqotlarda va o‘quv jarayonida amaliy masalalarni yechishda foydalanish nazarda tutiladi.

Ishning vazifasi. Yaratiladigan hisob metodikasi va dasturning vazifasi fizika, matematika va mexanika sohasidagi mutaxassislarga va o‘rganuvchilarga birinchi, ikkkinchi va yuqori tartibli differensial tenglamalarni chegaraviy elementlar usulini tadbiq etgan holda shu turgari masalalarni kompyuter yordamida tadqiq etishda hisoblash tajribalarini o‘tkazish imkoniyatini yaratishda yordam berishdan iborat.

Ilmiy-tadqiqot usullari. Bitiruv malakaviy ishining maqsad va vazifalarini bajarish maqsadida “Differensial tenglamalar”, “Hisoblash matematikasi”, “Dasturlashtirish texnologiyalari”, ”Matematik modellashtirish” fanlarining tadqiqot usullaridan foydalanildi.

Mavzuning ilmiy va amaliy ahamiyati. Mazkur ishdagi ma’lumotlar fizik, matematik va mexanik xarakterdagi masalalarni tadqiq etishda talabalarga, mutaxassislarga foydalanish uchun qo‘shimcha ma’lumot va ishlanma sifatida xizmat qilishi mumkin. Ma’lumotlarni ifodalashda aniq amaliy masala keltirilgan, dasturlashni to‘liq o‘z ichiga olgan shuning uchun undan foydali amaliy vosita sifatida ishlatish mumkin. Bunda dastur to‘liq holda keltirilgan, ular soddalashtirilgan holatda qo‘llangan.

Mavzu bo‘yicha qisqacha adabiyotlar tahlili. Mazkur ish hisoblarini bajarish bevosita differensial tenglamalar, hisoblash matematikasi va dasturlash-ga asoslangan. Buning uchun oddiy differensial tenglamalarni yechish masalasi [1-9, 12, 14, 15] adabiyotlar asosida o‘rganildi. Taqribiy hisob jarayonini va modellashtirishda va algoritmlashtirishda [2-5, 10, 11, 13, 16-18], masalani yechishning hisob algoritmini va hisob dasturiy vositasini yaratishda esa [1, 3, 4, 7, 17] adabiyotlardan va Internet saytlar [19-24] materiallaridan foydalanildi.

Ishning tuzilishi. Bitiruv malakaviy ishi kirish qismi, 3 ta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. Kirish qismida masalaning dolzarbligi, masalaning qo‘yilishi, ishning ilmiy va amaliy ahamiyati, ilmiy-tadqiqot metodlari hamda ishning tuzilishi va qisqacha mazmuni bayon qilingan. 1-bobda har xil tartibli oddiy differensial tenglama uchun chegaraviy masalasini chekli ayirmalar usulida yechish, 2-bobda chegaraviy masalani chekli elementlar usuli bilan yechish, 3-bobda ikkinchi va yuqori tartibli oddiy differensial tenglamali chegaraviy masalalarni chegaraviy elementlar usuli bilan yechish o‘rganilgan, aniq amaliy masalalar yechilgan, xulosa qismida bitiruv ishining asosiy natijalari va uning amaliy tadbiqlari bayon qilingan.

Olingan natijalarning qisqacha mazmuni (annotatsiyasi). Mazkur bitiruv malakaviy ishda fizik jarayonlarni matematik modellashtirish asoslari o‘rganilgan, masalaning matematik tavsifi berilgan, Birinchi, ikkinchi va yuqori tartibli differensial tenglamalarni chekli ayirmalar, chekli elementlar va chegaraviy elementlar usullarida yechish masalalarining matematik modeli ishlab chiqilgan, masalani yechish uchun sonli usularni qo‘llash o‘rganilgan, masalani yechishning algoritmi tuzilgan, dasturiy mahsulot loyihalashtirilgan, sozlangan va sinovdan o`tkazilgan, aniq masala uchun hisoblash tajribalari o`tkazilgan va uning natijalari tahlil qilingan.

1-BOB. CHEGARAVIY MASALALARNI CHEKLI AYIRMALAR USULI BILAN YECHISH

Oddiy differensial tenglamali chegaraviy masalalarni sonli yechishning chekli ayirmalar (bu to‘rlar usuli deb ham ataladi) usulining ma'nosi quyidagicha. Tadqiq qilinayotgan sohaga tugunlar yordamida to‘r yasaladi. Differensial tenglamaga va chegaraviy shartlarga kirgan barcha hosilalar sonli differensiallash formulalari yordamida ayirmali munosabatlarga taqriban almashtiriladi. Buning natijasida barcha tenglamalar izlanayotgan funksiyaning tugun nuqtalardagi noma'lum qiymatlari orqali ifodalanadi. Natijada to‘rning tugunlari uchun funksiyaning noma'lum qiymatlari qatnashgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Tugun nuqtalar oralig‘ida ketma-ket interpolyatsiyalash bilan bu sistemani yechish yakunida qaralayotgan masalaning taqribiy yechimini hosil qilamiz.

Bu usulning ustunligi shundaki, uning masala chegaraviy shartlaridan, qurilma geometriyasidan va uning dastlabki kuchlanganlik-deformatsiyalanganlik holatidan kuchsiz bog‘langanligida. Usulning kamchiligi esa algebraik tenglamalar sistemasining tartibi juda yuqoriligida. Chekli ayirmalar usulining yana bir kamchiligi aralash chegaraviy shartlarni hisobga olishning, har xil differensial tenglamalar bilan tavsiflangan sohalar va ularning kesimidagi ko‘p qirrali bog‘lanishlarni qarashning qiyinligida.

Quyida chekli ayirmalar usulining bir va ikki o‘lchovli chegaraviy masalalarni yechish uchun qo‘llanilishining asosiy tushunchalari keltirilgan.

1.1. Hosilalarning chekli ayirmali approksimatsiyasi

Faraz qilaylik, bir o‘lchovli chegaraviy masalani yechish, ya'ni $x = 0$ va $x = l$ nuqtalarda chegaraviy shartlar bilan $0 < x < l$ kesmada berilgan ushbu

$$L\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x) = f(x) \tag{1.1}$$

oddiy differensial tenglamani qanoatlantiruvchi $\varphi(x)$ funksiyani topish talab qilinsin, bu yerda $L\left(\frac{d}{dx}\right)$ – differensial operator; $\varphi(x)$ – izlanayotgan funksiya; $f(x)$ – ixtiyoriy funksiya.

Bu masalani chekli ayirmalar usuli bilan yechish uchun avvalo x erkli o‘zgaruvchi bo‘yicha tadqiqot sohasini diskretlashtirish, ya'ni berilgan $0 \le x \le l$ kesmada N+1 ta teng uzoqlikda joylashgan x_i (i = 0,1,2,…,N) tugun nuqtalarning to‘plamini qurish lozim, bunda $x_0 = 0$ – kesma boshi; $x_N = l$ – kesma oxiri; $\Delta x = x_{i+1} - x_i = l/N$ – tugun nuqtalar orasidagi masofa (1.1-rasm).

Navbatdagi qadamda differensial tenglamada qatnashayotgan differensiallarni va hadlarni faqatgina algebraik amallar orqali bog‘langan hadlarga keltirish. Buning uchun funksiya va uning hosilalari chekli ayirmali approksimatsiyalashdan foydalanib approksimatsiyalanadi.

Teylor formulasidan foydalanib, izlanayotgan $\varphi(x)$ funksiyani x=x_i nuqtada qatorga quyidagicha yoyamiz:

$$\varphi(x_{i+1}) = \varphi(x_i + \Delta x) + \frac{1}{1!}\frac{d\varphi}{dx}\bigg|_{x=x_i}\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{d^2\varphi}{dx^2}\bigg|_{x=x_i}\Delta x^2 + \ldots \ .$$

Bu munosabatda funksiyaning qiymati uchun quyi i indeksni ishlatib, uni quyidagicha yozish mumkin:

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \frac{d\varphi}{dx}\bigg|_i \Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2\varphi}{dx^2}\bigg|_i \Delta x^2 + \ldots \tag{1.2}$$

yoki

$$\frac{d\varphi}{dx}\bigg|_i = \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)}{\Delta x} - \frac{1}{2}\frac{d^2\varphi}{dx^2}\bigg|_i \Delta x + \ldots \ .$$

Bu yerdan funksiyaning birinchi hosilasi uchun oldinga ayirmali approksimatsiyasiga kelamiz:

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_i \approx \frac{\left(\varphi_{i+1}-\varphi_i\right)}{\Delta x}. \tag{1.3}$$

Bu approksimatsiyaning xatoligi $O(\Delta x)$ tartibli.

Xuddi shunday, Teylor formulasi bo‘yicha ushbu

$$\varphi_{i-1} = \varphi_i - \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_i \Delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 + \ldots \tag{1.4}$$

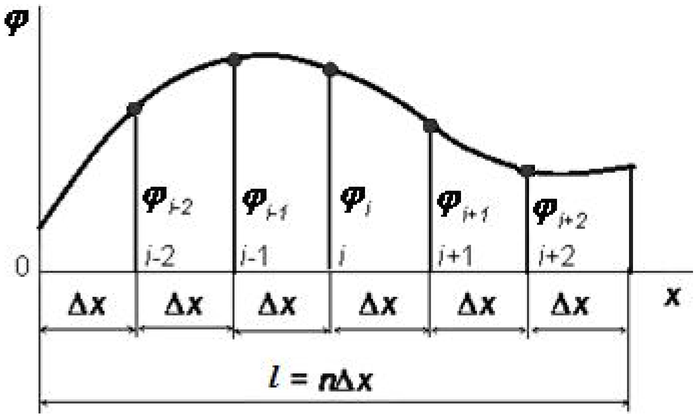
yoyilmadan

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_i = \frac{\left(\varphi_i-\varphi_{i-1}\right)}{\Delta x} + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right|_i \Delta x + \ldots$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerdan esa funksiyaning birinchi hosilasi uchun orqaga ayirmali approksimatsiyasiga kelamiz:

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_i \approx \frac{\left(\varphi_i-\varphi_{i-1}\right)}{\Delta x}. \tag{1.5}$$

Bu approksimatsiyaning xatoligi ham $O(\Delta x)$ tartibli.



1.1-rasm. $\varphi(x)$ funksiyaning tugun nuqtalardagi ordinatasi.

Endi har ikkala bir xil tartibli $O(\Delta x)$ xatolikka ega (1.3) va (1.5) approksimatsiyalarning xatolik tartibini oshirish maqsadida (1.2) va (1.4) approksimatsiyalarni o‘zaro ayirib

$$\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1} = 2\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_i \Delta x + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right|_i \Delta x^3 + \ldots ,$$

ulardanda yuqori ikkinchi $O(\Delta x^2)$ tartibli xatolikka ega bo‘lgan markaziy ayirmali approksimatsiya deb ataluvchi quyidagi formulaga ega bo‘lamiz:

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_i \approx \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})}{2\Delta x}. \tag{1.6}$$

Bu markaziy ayirmali approksimatsiya oldinga va orqaga ayirmali approksimatsiyalariga qaraganda afzalroq, ya'ni Δx qadam qancha kichik bo‘lsa, sonli yechim aniq yechimga shuncha yaqin bo‘ladi.

Endi (1.2) va (1.4) approksimatsiyalarni o‘zaro qo‘shib

$$\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1} = \left.\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right|_i \Delta x^2 + \frac{1}{4!}\left.\frac{d^4\varphi}{dx^4}\right|_i \Delta x^4 + \ldots ,$$

funksiyaning ikkinchi hosilasi uchun quyidagi $O(\Delta x^2)$ tartibli xatolikka ega approksimatsiyasiga kelamiz:

$$\left.\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right|_i \approx \frac{(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1})}{\Delta x^2}. \tag{1.7}$$

(1.7) ni (1.6) ga qo‘yib, uchinchi tartibli hosila uchun xuddi shunday quyidagi approksimatsiyani hosil qilishimiz mumkin:

$$\frac{d^3\varphi}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) = \frac{1}{2\Delta x}\left(\left.\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right|_{i+1} - \left.\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right|_{i-1}\right),$$

ya'ni

$$\left.\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right|_i \approx \frac{(\varphi_{i+2} - 2\varphi_{i+1} + 2\varphi_{i-1} - \varphi_{i-2})}{2\Delta x^3}. \tag{1.8}$$

To‘rtinchi tartibli hosilani approksimatsiyalash uchun (1.7) ni o‘z-o‘ziga ikki marta qo‘llaymiz, ya'ni

$$\frac{d^4\varphi}{dx^4} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) = \frac{1}{\Delta x^2}\left(\left.\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right|_{i+1} - 2\left.\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right|_i + \left.\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right|_{i-1}\right).$$

Natijada to‘rtinchi tartibli hosila uchun quyidagi approksimatsiya formulasini hosil qilamiz:

$$\left.\frac{d^4\varphi}{dx^4}\right|_i \approx \frac{\left(\varphi_{i+2} - 4\varphi_{i+1} + 6\varphi_i - 4\varphi_{i-1} + \varphi_{i-2}\right)}{\Delta x^4}. \tag{1.9}$$

Ba'zi hollarda differensial tenglama approksimatsiya qilinayotgan tugun nuqta tadqiqot sohasining chegarasida yoki unga yaqin nuqtada bo‘lsa, bunday holda bir tomonlama ayirmali approksimatsiya formulasidan foydalanish maqsadga muvofiq. Masalan,

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_i \approx \frac{\left(3\varphi_i - 4\varphi_{i-1} + \varphi_{i-2}\right)}{2\Delta x} \quad \text{yoki} \quad \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_i \approx \frac{\left(-3\varphi_i + 4\varphi_{i+1} - \varphi_{i+2}\right)}{2\Delta x}. \tag{1.10}$$

$$\left.\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right|_i \approx \frac{\left(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}\right)}{\Delta x^2} \quad \text{yoki} \quad . \tag{1.11}$$

$$\left.\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right|_i \approx \frac{\left(3\varphi_{i+1} - 10\varphi_i + 12\varphi_{i-1} - 6\varphi_{i-2} + \varphi_{i-3}\right)}{\Delta x^3} \quad \text{yoki}$$

$$\left.\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right|_i \approx \frac{\left(\varphi_{i+1} - 3\varphi_i + 3\varphi_{i-1} - \varphi_{i-2}\right)}{\Delta x^3}. \tag{1.12}$$

$$\left.\frac{d^4\varphi}{dx^4}\right|_i \approx \frac{\left(\varphi_{i+2} - 4\varphi_{i+1} + 6\varphi_i - 4\varphi_{i-1} + \varphi_{i-2}\right)}{\Delta x^4}. \tag{1.13}$$

Bu yerda (1.10) formula $O(\Delta x^2)$ tartibli xatolikka ega.

1.2. Oddiy differensial tenglamani chekli ayirmalar usuli bilan yechish

Yuqorida yozilgan hosilalarning chekli ayirmali ifodalarini aniq amaliy masalalarda (masalan, balkaning egilishi masalasi) qo‘llanilishini ko‘rib o‘tamiz.

Faraz qilaylik, $w(x)$ funksiya balkaning egilgan o‘qini ifodalasin. Balkaning mos egilish differensial tenglamasi quyidagi masalalarda keltirilgan. Uning chetlarida $w(x)$ funksiyaga nisbatan quyidagi mahkamlanish shartlaridan foydalanish mumkin:

$w=0, \quad \frac{dw}{dx}=0$ – qattiq mahkamlangan chegara uchun;

$w=0, \quad \frac{d^2w}{dx^2}=0$ – sharnirli mahkamlangan chegara uchun;

$\frac{d^2w}{dx^2}=0, \quad \frac{d^3w}{dx^3}=0$ – erkin chegara uchun;

Agar i nuqtada $w_i = 0$ bo‘lsa, u holda bu had algabraik tenglamalar sistemasidan chiqarib tashlanadi va mos ravishda sistemadagi tenglamalar soni bittaga kamaytiriladi.

Agar i nuqtada $\left.\frac{dw}{dx}\right|_i = w'_i = 0$ bo‘lsa, u holda (1.3), (1.5) yoki (1.6) formulalarga ko‘ra mos ravishda $w_i = w_{i-1}$ yoki $w_i = w_{i+1}$ yoki $w_{i+1} = w_{i-1}$ deb olib, bu hadlardan biri algabraik tenglamalar sistemasidan chiqarib tashlanadi va mos ravishda sistemadagi tenglamalar soni bittaga kamaytiriladi.

Agar i nuqtada $\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_i = w''_i = 0$ bo‘lsa, u holda (1.7) formulalarga ko‘ra, masalan, $w_{i+1} = 2w_i - w_{i-1}$ (agar $w_i = 0$ bo‘lsa, u holda $w_{i+1} = -w_{i-1}$) deb olib, bu had algabraik tenglamalar sistemasidan chiqarib tashlanadi va mos ravishda sistemadagi tenglamalar soni bittaga kamaytiriladi.

Agar i nuqtada $\left.\frac{d^3w}{dx^3}\right|_i = w'''_i = 0$ bo‘lsa, u holda (1.8) formulalarga ko‘ra, masalan, $w_{i+1} = 2w_i - w_{i-1}$ deb olib, bu had algabraik tenglamalar sistemasidan chiqarib tashlanadi va mos ravishda sistemadagi tenglamalar soni bittaga kamaytiriladi.

Agar i nuqtada balkaning chegarasi yaqinidagi ichki nuqta bo‘lsa, u holda buning uchun asosiy tenglamaning chekli ayirmali approksimatsiyasida yuqorida qayd etilgan chegaraviy shartlardan hosil bo‘lgan munosabatlardan hamda hosilaning bir tomonlama approksimatsiyasi formulalari (1.10) – (1.13) dan foydalanish lozim bo‘ladi.

1-masala. Uzunligi l ga teng, chetlari sharnirli mahkamlagan, sirti bo‘ylab teng taqsimlangan yuklanish bilan yuklangan balka buralishining momentlarga nisbatan taqribiy differensial tenglamasi

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x) \tag{1.10}$$

kabi yoziladi. Masalaning yechimini chekli ayirmalar usuli bilan toping.

Yechish. Balkaning chetlarida berilgan sharnirli mahkamlanish shartlari uchun $M(0) = 0$ va $M(l) = 0$ tengliklar yoziladi.

Faraz qilaylik, $\Delta x = l/4$, u holda balkaning uzunligi bo‘ylab 4 ta tugun nuqtalarni belgilaymiz: $x = (0,\ l/4,\ l/2,\ 3l/4,\ l)$. $x = 0$ va $x = l$ tugunlarda $M_0 = 0$ va $M_5 = 0$ bo‘lganligi uchun qolgan $x = (l/4,\ l/2,\ 3l/4)$ tugunlar uchun M_1, M_2, M_3 momentlarning qiymatlarini aniqlashimiz lozim. Yuqoridagi (1.7) dan foydalanib, (1.10) ni quyidagicha yozamiz:

$$\left.\frac{d^2M(x)}{dx^2}\right|_i \approx \frac{\left(M_{i+1} - 2M_i + M_{i-1}\right)}{\Delta x^2}.$$

Agar (1.10) da $q(x) = q$ va $l = 1$ deb olsak, quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yozamiz:

$$i = 1\ ,\quad M_2 - 2M_1 + M_0 - q(0{,}25l)^2 = 0,$$

$$i = 2\ ,\quad M_3 - 2M_2 + M_1 - q(0{,}5l)^2 = 0,$$

$$i = 3\ ,\quad M_4 - 2M_3 + M_2 - q(0{,}75l)^2 = 0,$$

bu yerdan esa quyidagi natijalarga kelamiz:

$$M_1 = 0{,}094q\ ;\quad M_2 = 0{,}125q\ ;\quad M_3 = 0{,}094q\ .$$

Aniq yechim aslida quyidagicha:

$$M_1 = M_3 = 0{,}09375q\ ;\quad M_2 = 0{,}125q\ .$$

1.3. Ko‘ndalang kesimi doiraviy sterjenda issiqlik tarqalishi masalasini chekli ayirmalar usuli bilan yechish

1-masala. Ko‘ndalang kesimi o‘zgarmas va ikkita tayanchdagi balkaning taqsimlangan p yuklanish va jamlangan $F = 0{,}2ql$ kuch ta'siridagi $w(x)$ egilishini aniqlang (2-rasm).

Yechish. Balkani to‘rtta teng bo‘laklarga $\Delta x=l/4$ qadam bilan bo‘lamiz. Tayanch nuqtalarda egilishning qiymatlari ma'lum, ya'ni $w_0 = w_4 = 0$, qolgan ichki 1, 2, 3-nuqtalardagi egilishlarning qiymatlari esa noma'lum.

Bu masalaning matematik modeli sifatida balka o‘rta o‘qining $M(x)$ eguvchi moment ta'sirida egilishining taqribiy differensial tenglamasi

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{M}{EJ}$$

kabi yoziladi.

Eguvchi momentning tugun nuqtalardagi qiymatlari 3-rasmda berilgan. Ikkinchi tartibli hosilaning chekli ayirmali approksimatsiyasidan foydalanib, 1, 2, 3 nuqtalar uchun quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yozamiz:

$$i = 1\ ,\quad w_2 - 2w_1 + w_0 = 0{,}075\frac{pl}{EJ}\left(\frac{l^2}{16}\right),$$

$$i = 2\ ,\quad w_3 - 2w_2 + w_1 = 0{,}0875\frac{pl}{EJ}\left(\frac{l^2}{16}\right),$$

$$i = 3\ ,\quad w_4 - 2w_3 + w_2 = 0{,}06875\frac{pl}{EJ}\left(\frac{l^2}{16}\right).$$

Bu yerda $w_0 = w_4 = 0$ ni e'tiborga olsak, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga kelamiz:

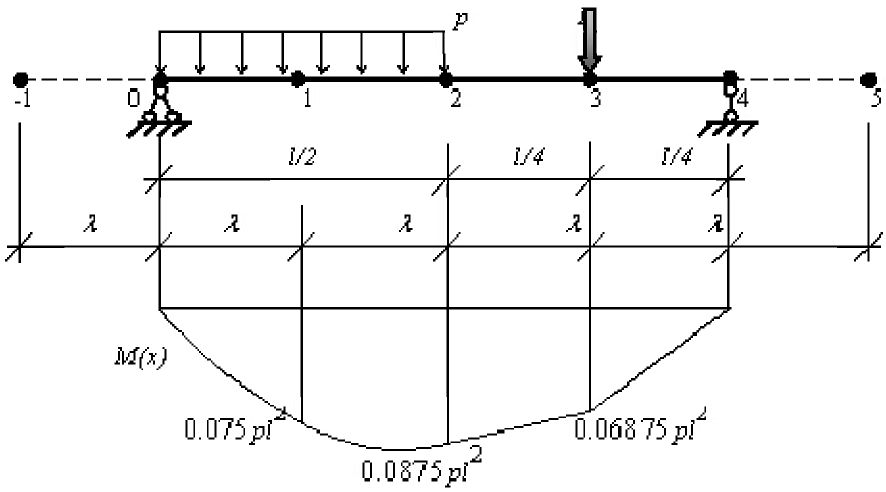
$$\begin{cases} -2w_1 + w_2 = 0{,}004688\dfrac{pl^4}{EJ}, \\ w_1 - 2w_2 + w_3 = 0{,}005469\dfrac{pl^4}{EJ}, \\ w_2 - 2w_3 = 0{,}004297\dfrac{pl^4}{EJ}. \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, quyidagi natijalarga ega bo‘lamiz:

$$w_1 = -0{,}007\frac{pl^4}{EJ}; \qquad w_2 = -0{,}00996\frac{pl^4}{EJ} \qquad w_3 = -0{,}00713\frac{pl^4}{EJ}.$$

Balkaning mos tugunlaridagi egilishlarning aniq qiymati quyidagicha:

$$w_1 = -0{,}00687\frac{pl^4}{EJ}; \qquad w_2 = -0{,}00938\frac{pl^4}{EJ} \qquad w_3 = -0{,}00658\frac{pl^4}{EJ}.$$



2-rasm.

2-masala. Ko‘ndalang kesimi o‘zgarmas va ikkita tayanchdagi balkaning taqsimlangan q yuklanish va jamlangan $F = 0{,}2ql$ kuch ta'siridagi $w(x)$ egilishini aniqlang (2-rasm).

Yechish. Balkani to‘rtta teng bo‘laklarga $\Delta x = l/4$ qadam bilan bo‘lamiz. Tayanch nuqtalarda egilishning qiymatlari ma'lum, ya'ni $w_0 = w_4 = 0$, qolgan ichki 1, 2, 3-nuqtalardagi egilishlarning qiymatlari esa noma'lum.

Bu masalaning matematik modeli sifatida balka o‘rta o‘qi egilishining taqribiy differensial tenglamasi

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{EJ}$$

kabi yoziladi. Bu holda balkaning tugunlarida ichki eguvchi momentlarning qiymatlarini oldindan aniqlab olish zarurati yo‘q. O‘z navbatida 3 tugunda jamlangan F kuch $q_3 = F/\Delta x = -4p/5$ ko‘rinishda, 1 va 2 tugunlardagi yuklanish esa mos ravishda $q_1 = -p$ va $q_2 = -p/2$ qiymatlar bilan ifodalanadi. To‘rtinchi tartibli hosilaning chekli ayirmali approksimatsiya formulasi (1.9) dan foydalanib, berilgan tenglamani ushbu

$$\frac{w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}}{\Delta x^4} = \frac{q_i}{EJ}.$$

ko‘rinishda, 1, 2, 3 tugunlar uchun esa quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$i = 1\ , \quad \frac{w_3 - 4w_2 + 6w_1 - 4w_0 + w_{-1}}{\Delta x^4} = -\frac{p}{EJ};$$

$$i = 2\ , \quad \frac{w_4 - 4w_3 + 6w_2 - 4w_1 + w_0}{\Delta x^4} = -\frac{p}{2EJ};$$

$$i = 3\ , \quad \frac{w_5 - 4w_4 + 6w_3 - 4w_2 + w_1}{\Delta x^4} = -\frac{4p}{5EJ}.$$

Bu yerda -1 va 5 tugun nuqtalar tadgigod sohasidan tashqarida yotganligi (mavhum tugun nuqtalar) sababli ularni chegaraviy shartlardan foydalanib, tenglamalar sitemasidan chiqarib tashlash mumkin. Sharnirli mahkamlangan chap 0 tayanch tugunda

$$w_0 = 0 \text{ va } \frac{M_0}{EJ} = \left.\frac{d^2 w(x)}{dx^2}\right|_0 \approx \frac{w_{-1} - 2w_0 + w_1}{\Delta x^2} = 0\,,$$

bu yerdan esa $w_{-1} = -w_1$. Xuddi shunday, o‘ng 4 tayanch tugunda $w_4 = 0$ va $w_5 = -w_3$. Bularni e'tiborga olsak, yuqoridagi algebraik tenglamalar sistemasi quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} 5w_1 - 4w_2 + w_3 = -\dfrac{1}{256}\dfrac{pl^4}{EJ}, \\ -4w_1 + 6w_2 - 4w_3 = -\dfrac{1}{512}\dfrac{pl^4}{EJ}, \\ w_1 - 4w_2 + 5w_3 = -\dfrac{1}{1280}\dfrac{pl^4}{EJ}. \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, quyidagi natijalarga ega bo‘lamiz:

$$w_1 = -0{,}00732\frac{pl^4}{EJ}; \qquad w_2 = -0{,}00996\frac{pl^4}{EJ} \qquad w_3 = -0{,}00712\frac{pl^4}{EJ}.$$

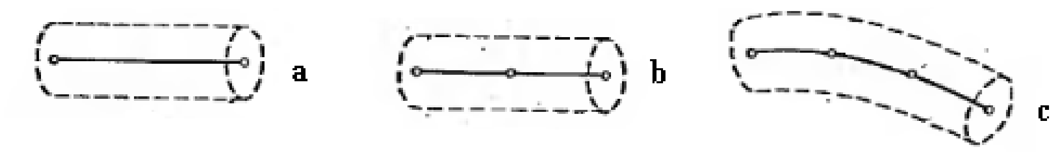
Bu natijani yuqoridagi misol natijalari bilan taqqoslash mumkin. Balkaning mos tugunlaridagi egilishlarning aniq qiymati yuqoridagi misolda keltirilgan edi.

2-BOB. CHEGARAVIY MASALALARNI CHEKLI ELEMENTLAR USULI BILAN YECHISH

2.1. Boshlang‘ich tushunchalar

Bir o‘lchovli elementlar.

Bir o‘lchovli element eng sodda element hisoblanadi. Ko‘ndalang kesimga ega bo‘lsa ham bunday element sxematik ko‘rinishda kesma shaklida ifodalanadi (2.1–rasm).



2.1-rasm. Ayrim bir o’lchovli elementlar sxemasi.

Ko‘ndalang kesım yuzası uzunlık bo‘ylab o‘zgarıshı mumkın, lekın ko‘pchilik masalalarda yuza o‘zgarmas deb qaraladi. Bunday elementlar ko‘pchilik hollarda bir o‘lchovli masalalarda (sterjen bo‘ylab issiqlik tarqalishi, qurilmalarning sterjensimon elementlarini hisoblashda) ishlatiladi.

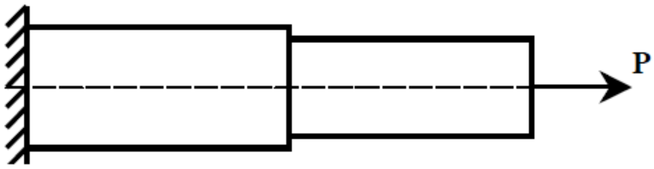
Sodda bir o‘lchovli element ikkita tugunga ega (2.1,*a*–rasm), uch tugunli element (kvadratik) (2.1,*b*–rasm) va to‘rt tugunli (kubik) (2.1,*c*–rasm) bo‘lishi mumkin. Bir o‘lchovli element egri chiziqli bo‘lishi mumkin (2.1,*c*–rasm), agarda elementni aniqlaydigan tenglamaga yoy uzunligi kiritilgan bo‘lsa.

Sterjenda ko‘chishlar funksiyasi.

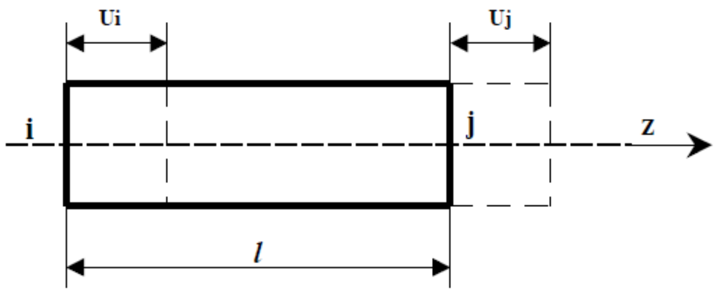
Muhandislikda eng ko‘p qo‘llaniladigan qurilmalardan biri bu fermalar bo‘lib, ular sterjenlarning sharnirli birikmasidan iborat bo‘ladi. Shuning uchun quyida sterjenlar uchun chekli elementlar usuli xossalarini keltiramiz [5,7,10,11].

Mexanikadan ma’lumki, sterjenlarning deformatsiyalanishi murakkab, ammo biz quyida fermaning sterjenlari faqat cho‘zilish–siqilishga ishlaydi, deb faraz qilamiz. Bundan tashqari, sterjenlar pillapoyali bo‘lishi ham mumkin (2.2–rasm).

Hisoblarda chekli element sifatida 2.3–rasmda tasvirlangan sterjenni qabul qilamiz.



2.2–rasm. Pillapoyali sterjen sxemasi.



2.3–rasm. Chekli element.

Bu chekli element uchun $\{f\}$ ko‘chishlar funksiyasi quyidagicha yoziladi:

$$\{f\} = \left| \frac{l-z}{l}; \frac{z}{l} \right| \cdot \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}, \tag{2.1}$$

bu yerda U_i va U_j – i va j tugunlarning mos ko‘chishlari; $\frac{l-z}{l} = N_1$ va $\frac{z}{l} = N_2$– shakl funksiyalari bo‘lib, 1 dan 0 gacha o‘zgaradi.

$\{f\}$ ko‘chishlar funksiyasi chekli elementning shaklidan bog‘liq. Uni qanday tanlashni quyida qaraymiz.

Sterjenda deformatsiyalar funksiyasi.

Deformatsiyalar funksiyasi yoki deformatsiyalar vektori ko‘chishlar funksiyasi orqali ifodalanadi.

Cho‘zilishda sterjenning nisbiy uzayishi quyidagicha:

$$\{\varepsilon\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial z}\right\} = \frac{1}{l}\cdot\left|-1;\ 1\right|\cdot\left\{\begin{matrix} U_i \\ U_j \end{matrix}\right\}. \tag{2.2}$$

Bu yerda $|B| = \frac{1}{l}\left|-1;\ 1\right|$ – koeffisiyentlar matritsasi; $\{\delta\}^e = \left\{\begin{matrix} U_i \\ U_j \end{matrix}\right\}$ – element tugunlarining ko‘chishlari vektori deb belgilashlar kiritsak, u holda

$$\{\varepsilon\} = |B|\,\{\delta\}^e. \tag{2.3}$$

Sterjenda kuchlanishlar funksiyasi.

Kuchlanishlar funksiyalari yoki kuchlanishlar vektori deformatsiyalar vektori orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$\{\sigma\} = |D|\cdot\{\varepsilon\}\cdot\{B\}\cdot\{\delta\}^e, \tag{2.4}$$

bu yerda $|D|$ – elastiklik matritsali (kuchlanish va deformatsiyalarni bog‘laydi) bo‘lib, u qaralayotgan masaladan bog‘liq.

To‘la qurilma uchun chekli elementlar usulining tenglamalar sistemasi.

Mumkin bo‘lgan vertikal ko‘chishlarda

$$(d\{\delta\}^e)$$

tashqi va ichki kuchlarning ishini aniqlaymiz.

Virtual ko‘chishlarda birlik hajmlardagi ichki kuchlarning ishi

$$d(\{\varepsilon\}^T)\{\sigma\}$$

ga teng bu yerda $\{\varepsilon\}^T$ – deformatsiyalar vektori bo‘lib, $\{\varepsilon\}$ vektorning transponirlangani.

Butun chekli element bo‘yicha ichki kuchlarning ishi

$$\int_V d(\{\varepsilon\}^T)\{\sigma\}dV = \int_V d(\{\delta\}^e)^T \cdot |B|^T \cdot |D| \cdot |B| dV$$

Elementning virtual ko‘chishlarida $\{F\}^e$ tashqi tugun kuchlarining ishi quyidagi miqdorga teng:

$$(d\{\delta\}^e)^T \cdot \{F\}^e.$$

Elementning mumkin bo‘lgan ko‘chishlarida tashqi va ichki kuchlarning ishini tenglashtirib, quyidagiga kelamiz:

$$(d\{\delta\}^e)^T \cdot \int_V |B|^T \cdot |D| \cdot |B| dV \cdot \{\delta\}^e = (d\{\delta\}^e)^T \cdot \{F\}^e.$$

Bu yerda tenglikning har ikkala tarafini $(d\{\delta\}^e)^T$ ga qisqartirsak,

$$\int_V |B|^T \cdot |D| \cdot |B| dV \cdot \{\delta\}^e = \{F\}^e$$

yoki

$$|K|^e\{\delta\}^e = \{F\}^e, \tag{2.5}$$

bu yerda

$$|K|^e = \int_V |B|^T \cdot |D| \cdot |B| dV \tag{2.6}$$

- chekli elementning bikrlik matritsasi.

Umumiy qilib aytganda, to‘la qurilma uchun chekli elementlar usulining tenglamasi quyidagicha:

$$|K| \cdot \{\delta\} = \{R\}, \tag{2.7}$$

bu yerda

$|K|$ – to‘la qurilmaning birlik matritsasi bo‘lib qurilma tuzilgan chekli elementlarning bikrlik matritsalari yig‘indisini ifodalaydi;

$\{\delta\}$ – barcha tugunlarning ko‘chishlari vektori;

$\{R\}$ – tugunlardagi yuklanishlar vektori.

Chekli elementlar usulining har qanday masalasi oxirgi holatda (2.7) ko‘rinishdagi tenglamalar sistemasini yechishga olib kelinadi. Uning tartibi sistemadagi tugunlar sonining tugunlar erkinlik darajasiga ko‘paytmasiga teng.

Chekli elementlar usuli masalasini yechish bilan differensial tenglamalar o‘rniga algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilishni ko‘ramiz.

Shuni takidlash lozimki, chekli element uchun (2.6) – bikrlik matritsasini chiqarishda tugunlarning boshlang‘ich ko‘chishlari, temperatura ta’siri va boshlang‘ich kuchlanishlari hisobga olinmagan.

2.2. Dastlab to‘g‘ri chiziqli shaklda, bir cheti bikr mahkamlangan, ikkinchi cheti biror kuch ta’sirida pastga bosilgan balkaning egilishi hisobi masalasini chekli elementlar usuli bilan yechish

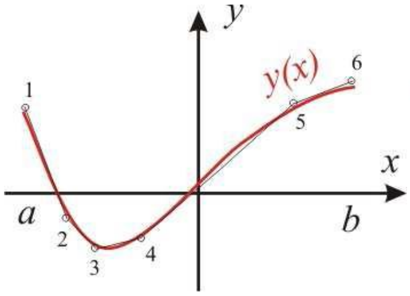
1-masala. Faraz qilaylik, quyidagi abstrakt masala berilgan: biror a dan b gacha intervalda x dan bog‘liq y bog‘lanishni topish talab etilsin. Buni ikki yo‘l bilan izlash mumkin: 1) $y=y(x)$ funksiya bog‘lanishi ko‘rinishidagi analitik ko‘rinishni, ya’ni biror formulani izlash; 2) funksiyani talab qilingan va berilgan aniqlikda tugun nuqtalarning to‘plami ko‘rinishida izlash.

Masalan, 2.4-rasmda grafigi tasvirlangan biror $y=y(x)$ funksiya o‘rniga 1-2-3-4-5-6 siniq chiziqlar bilan tasvirlangan funksiyani yetarlicha aniqlikda topish. Bu yerda yaqqol ko‘rinib turibdiki, nuqtalar soni qancha ko‘p bo‘lsa, siniq chiziqlar funksiya grafigiga shuncha yaqin bo‘ladi. Izlanayotgan analitik funksiya grafigining o‘rniga chekli sondagi ana shunday nuqtalarga o‘tish orqali uni taqribiy qurish sonli usullar deb ataladi.

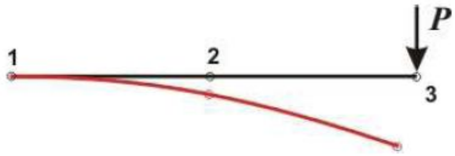
Faraz qilaylik, bir cheti bikr mahkamlangan, ikkinchi cheti esa 2.5-rasmda tasvirlangandek, biror kuch ta’sirida pastga bosilgan, dastlab to‘g‘ri chiziqli shakldagi qurilma biror elementining egilishi hisobi masalasini yechish talab qilinsin. Qurilmaning bunday elementi, masalan, konsol balka, avtomobil stoykasi, avtomobil kapotining bo‘ylama kesimi va shu kabilar bo‘lishi mumkin.

Chekli elementlarni qurish va ko‘chish funksiyasini tanlash.

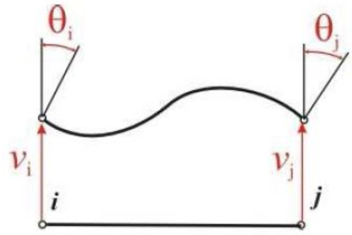
Aniqlik uchun balka 2.5-rasmda ko‘rsatilgandek ikkita chekli elementga (soddalik uchun, birinchi element 1 va 2 tugunlarga, ikkinchisi esa 2 va 3 tugunlarga ega) ajratilgan bo‘lsin, ya’ni 2-tugun qo‘shni ikkita elementlar uchun umumiy. Aniq o‘lchamli masalani yechishda avval chekli elementning xossasini umumiy holda keltiraylik. *i* va *j* tugunli abstrakt chekli elementni qaraylik (2.6-rasm).



2.4-rasm. Izlanayotgan funksiya analitik ifodasi va uning tugun nuqtalar orqali o‘tuvchi siniq chiziqlar bilan ifodalangan grafiklari.



2.5-rasm. Hisob ob’yekti va uning yuklanish sxemasi.



2.6-rasm. Erkinlik darajasi ikkiga teng bo‘lgan chekli element sxemasi.

Qurilma elementining shunday qismini chekli element deb ataymizki, bunda yechimning aniqligi uchun uning ixtiyoriy nuqtasi ko‘chishini uning tugunlari ko‘chishlari orqali qiyinchiliksiz ifodalash mumkin bo‘lsin. Balkaning egilishi jarayonida *ij* tugunli chekli elementning har bir nuqtasi ikkita erkinlik darajasiga ega:

- nuqta vertikal bo‘ylab v masofaga ko‘chishi mumkin;
- nuqtadagi ko‘ndalang kesim biror θ burchakka burilishi mumkin.

Chekli element ikkita tugun bilan ifodalangani uchun u to‘rtta erkinlik darajasiga ega. Demak, element ichidagi x koordinatali har bir nuqtadagi ko‘chish funksiyasini quyidagi to‘rtta koeffisiyentli ko‘phad bilan ifodalash mumkin:

$$v = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3.$$

Bu yerda shunday savol tug‘iladi: nima uchun aynan ko‘phad bilan, axir haqiqatdagi ko‘chish funksiyasi xohlagan ko‘rinishdagi murakkab funksiya bo‘lishi mumkin-ku? Javob: shu tanlov eng soddasi. Biz har bir chekli elementning ichida $y(x)$ funksiyani birinchi darajali ko‘phad (to‘g‘ri chiziqning kesmasi) orqali ifodaladik, bu esa 1-rasmda tasvirlangan va aniqlik yetarlicha ekanligiga ishonch hosil qildik. Agar bundanda yuqori aniqlik zarur bo‘lsa, u holda chekli elementlar sonini doimo oshirish imkoniyatiga egamiz.

Ma’lumki, masalan, materiallar qarshiligidan, kesimning burilish burchagi funksiyasi ko‘chishdan koordinata bo‘yicha birinchi tartibli hosilaga teng, ya’ni

$$\theta = dv/dx = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2.$$

Koordinatalar sistemasi boshini chekli elementning i-tuguniga qo‘yamiz, x – koordinata o‘qini esa o‘ng tarafga yo‘naltiramiz. U holda ko‘phadning α_0 , α_1 , α_2 , α_3 koeffisiyentlarini i va j tugunlar ko‘chishlari orqali ifodalash mumkin, ya’ni v_i, θ_i, v_j, θ_j lar orqali.

$x = 0$ da, ya’ni i-tugunda $v_i = \alpha_0$; $\theta_i = \alpha_1$.

Tenglamalar sistemasi va yechim.

j-tugunda, ya’ni $x=x_j=$l da ($l = x_j - x_i$ – chekli elementning uzunligi) va α_0 , α_1 larning yuqoridagi qiymatlariga ko‘ra

$$v_j = v_i + \theta_i x_j + \alpha_2 x_j^2 + \alpha_3 x_j^3 ;$$
$$\theta_j = \theta_i + 2\alpha_2 x_j + 3\alpha_3 x_j^2 .$$

Bu tenglamalar sistemasini α_2 va α_3 koeffisiyentlarga nisbatan yechib, quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$\alpha_2 = [3l^2 (v_j - v_i - \theta_i l) - l^3(\theta_j - \theta_i)]/l^4 ;$$
$$\alpha_3 = [l^2(\theta_j - \theta_i) - 2l(v_j - v_i - \theta_i l)]/l^4 .$$

α_0 , α_1 , α_2 , α_3 koeffisiyentlarning topilgan qiymatlarini v_i uchun yozilgan ifodaga qo‘yamiz:

$$v = [1 - 3x^2/l^2 + 2x^3/l^3]v_i + [x - 2x^2/l + x^3/l^2]\theta_i +$$
$$[3x^2/l^2 - 2x^3/l^3]v_j + [-x^2/l + x^3/l^2]\theta_j .$$

Bu ifoda katta ko‘rinadi, ammo natijaga erishdik, ya’ni chekli elementning ixtiyoriy nuqtasidagi ko‘chishni uning tugunlaridagi ko‘chishlari (masalaning asosiy noma’lumlari) orqali ifodaladik, chunki qurilmani chekli elementlarga ajratish bilan izlanayotgan funksiyani faqat ba’zi nuqtalardagina hisoblaymiz, ular orasida esa uni taqribiy (approksimatsiyalab) ifodalaymiz. Endi elementning l uzunligini hamda chekli elementning tugunlardagi v_i , θ_i , v_j , θ_j ko‘chishlarni va biror x nuqtaning koordinatasini bilgan holda shu nuqtadagi v ko‘chishni yuqoridagi formula orqali topa olamiz.

Oxirgi formulaning juda katta ekanligidan uni soddalashtirish mumkin, masalan, uni matritsa ko‘rinishida ifodalaymiz. Chekli elementning tugunlari ko‘chishlari vektori $\{\delta^e\}$ ni quyidagicha yozamiz:

$$\{\delta^e\}^T = \{ v_i , \theta_i , v_j , \theta_j \},$$

bu yerda $\{\ldots\}^T$ – transponirlangan vektor yoki matritsa.

$\{N\}$ elementni vektor ko‘rinishda quyidagicha ifodalaymiz:

$$\{N\}^T = \{1 - 3x^2/l^2 + 2x^3/l^3, x - 2x^2/l + x^3/l^2,$$
$$3x^2/l^2 - 2x^3/l^3, -x^2/l + x^3/l^2\}.$$

Bularga ko‘ra v – ko‘chish vektori uchun quyidagi ifodaga kelamiz:

$$v = \{N\}^T \{\delta^e\}.$$

2.3. Chekli uzunlikdagi elastik namunaning cho‘zilishi va egilishi masalasini chekli elementlar usuli bilan yechish

2-masala. «Deformatsiya» so‘zini nimani anglatishini tushunib olaylik. Ingliz tilida rus tilidagi «деформация» so‘zi ikkita har xil ma’noni anglatadi: deformation va strain. Birinchi so‘z biror narsa geometrik o‘lchamining o‘zgarishini, ya’ni rus tilidagi «деформация» so‘zining to‘g‘ridan to‘g‘ri ma’nosini anglatadi. Bu – umuman olganda cho‘zilish, siqilish, buralish, egilish, pachaqlanish va hokazolar. Ingliz tilida ikkinchi so‘z strain esa deformatsiya o‘lchami yoki deformatsiya darajasini anglatadi.

Masalan, biror materialdan tayyorlangan namuna L_0 uzunlikda bo‘lsin. Agar bu namuna, masalan, cho‘zilgan bo‘lsa, ya’ni uning uzunligi ΔL ga uzaytirilib, $L_1=L_0+\Delta L$ ga yetkazilgan bo‘lsa, u holda uning deformatsiyalanish darajasi deb quyidagi o‘lchamsiz miqdorga aytamiz:

$$\varepsilon = \Delta L/L_0 = (L_1 - L_0)/L_0 .$$

ε miqdorni deformatsiya yoki nisbiy deformatsiya deb ataymiz. Nisbiy deformatsiyaning kamchiligi shundaki, u additiv emas – nisbiy deformatsiyalarni qo‘shib borganimizda xatolik yig‘iladi. Masalan, uzunligi 10 sm bo‘lgan namuna biror tajribada 1 sm ga cho‘zilgan bo‘lsin, ya’ni $\varepsilon_1 = 1/10$ miqdorga deformatsiyalandi. Endi namunaning uzunligi 11 sm bo‘ldi. Ikkinchi bir tajriba o‘kazayotgan kishi, bu haqda ma’lumotga ega bo‘lmasdan, namunani yana 1 sm ga uzaytirdi, ya’ni namuna $\varepsilon_2 = 1/11$ miqdorga deformatsiyalandi. Bularga ko‘ra yig‘indi nisbiy deformatsiya quyidagicha bo‘ladi:

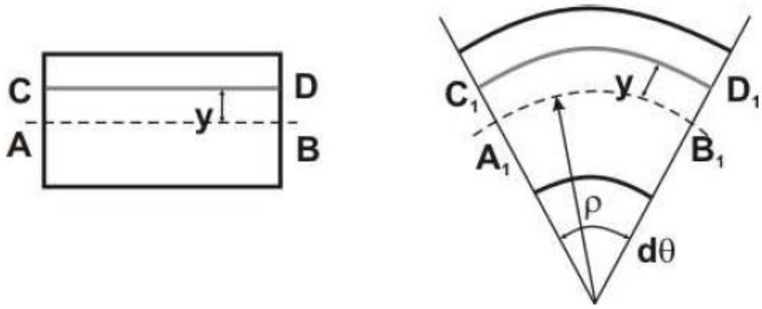
$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1/10+1/11,$$

bu miqdor namunaning dastlabki holatiga nisbatan olgan $\varepsilon = 2/10$ deformatsiyasidan kichin ekanligi yaqqol ko‘rinib turibdi. Bunday holatdan chiqishning yo‘li bor, ammo bizning asosiy masalamiz kichik deformatsiyalar uchun foydalanish mumkin bo‘lgan nisbiy deformatsiyani aniqlash .

Biz tanlagan qurilma biror qalinlikka, faraz qilaylik, chekli element uzunligi bo‘ylab o‘zgarmas miqdorga ega bo‘lsin. Elementning dx uzunlikka ega bo‘lagi quyidagi 2.7-rasmda chapda egilishgacha va o‘ngda egilgandan keyin tasvirlangan. Egilish jarayonida o‘rganilayotgan materialning tolasi (o‘q) AB o‘z uzunligin o‘zgartirmaydi, ya’ni $AB = A_1B_1$, uning egrilik radiusi ρ bo‘lsin. Ixtiyoriy CD tolaning nisbiy deformatsiyasi quyidagiga teng:

$$\varepsilon = \frac{C_1D_1 - CD}{CD}, \quad CD = AB = A_1B_1 = \rho d\theta , \quad C_1D_1 = (\rho + y)d\theta ,$$

bu yerdan esa $$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}.$$



2.7-rasm. Namunaning nisbiy deformatsiyasi sxemasi.

Matematika kursidan ma’lumki, kesimning burchak bo‘yicha kichik miqdori uchun quyidagi munosabat o‘rinli:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right)^2}} \approx \frac{d^2v}{dx^2}.$$

Bunga ko‘ra deformatsiya

$$\varepsilon = y\frac{d^2v}{dx^2} \text{ yoki } \varepsilon = y\frac{d^2v}{dx^2}\left(\{N\}^T\{\delta^e\}\right) = y\{B\}\{\delta^e\},$$

bu yerda $\{B\}$ vektor quyidagicha

$$\{B\} = \{-6/l^2 + 6x/l^3,\ -4/l + 6x/l^2,\ 6/l^2 - 6x/l^3,\ -x/l + 6x/l^2\}.$$

Guk qonuniga ko‘ra kuchlanish (kesim birliga ta’sir etuvchi kuch) deformatsiya bilan elastiklik moduli (Yung moduli) E orqali bog‘langan:

$$\{\sigma\} = E\{\varepsilon\} = Ey\{B\}\{\delta^e\}.$$

Ma’lumki (materiallar qarshiligi kursidan), eguvchi moment kesimdagi kuchlanish bilan kesimning o‘q bo‘ylab inertsiya momentini hisobga olgan holda bog‘langan: $M = I\sigma / y$, bu yerdan esa tugun kuchlarining vektoriga ega bo‘lamiz: $\{M^e\} = EI\{B\}\{\delta^e\}$.

Endi biz chekli elementlar tugunlari ko‘chishlarining vektori $\{\delta^e\}$ ga, chekli elementlar tugunlari kuchlari vektori $\{M^e\}$ ga, nisbiy deformatsiyalar vektori $\{\varepsilon\}$ ga va kesimdagi kuchlanish vektori $\{\sigma\}$ ga ega bo‘ldik. Bunda $\{\varepsilon\}$, $\{\sigma\}$ va $\{M^e\}$ vektorlar ko‘chish vektori $\{\delta^e\}$ ning komponentalari orqali ifodalanadi, bu yerda $\{\delta^e\}$ – masalaning izlanayotgan noma’lumlari.

Agar chekli elementlar (chekli elementlarga o‘xshash) to‘rining biror tuguniga (yoki tugunlariga) tashqi kuchlarni qo‘ysak yoki, xuddi shu kabi, ularga ma’lum bir ko‘chishlar, masalan, biz tanlagan qurilma deformatsiyasi o‘lchamidan kelib chiqib, berilsa, u holda qolgan tugunlarning haqiqiy ko‘chishlari deformatsiyaning to‘la energiyasi minimumini ta’minlovchi darajada bo‘ladi.

To‘la energiyani minimallashtirish – bu balkaning deformatsiyasini tavsiflovchi differensial tenglamalar sistemasini yechish bilan teng kuchli.

Ana shu to‘la energiyani qanday hisoblash mumkin? Kuchlanishning unga mos deformatsiyaga ko‘paytmasi birlik hajmga mos keluvchi deformatsiya solishtirma energiyasini beradi. Chekli elementlangan to‘la hajm bo‘ylab deformatsiya energiyasini hisoblash uchun chekli element hajmi bo‘ylab deformatsiya solishtirma energiyasini integrallash (yig‘indisini tuzish), keyin esa chekli elementlangan to‘la hajm bo‘ylab ularning yig‘indisini topish zarur. Keyin esa tugunlardagi kuchlarning mos tugunlardagi ko‘chishlarga ko‘paytmasi tashqi kuchlarning ishini beradi. Deformatsiyaning to‘la energiyasi chekli elementlangan to‘la hajm barcha chekli elementlarining deformatsiya energisi bilan tashqi kuchlar ishi o‘rasidagi farqqa teng. Uning minimumini topish uchun to‘la energiyaning ifodasini yozish va uni har bir ko‘chish bo‘yicha integrallash lozim. Xususiy hosilalarning jamlanmasi quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini beradi: $[K]\cdot\{\delta\} = \{M\}$, bu yerda $[K]$ – chekli elementlangan hajmning bikrlik matritsa-si; $\{\delta\}$ – chekli elementlangan hajmning chekli elementlari tugunlari ko‘chishi vektori; $\{M\}$ – chekli elementlangan hajmning chekli elementlari tugunlaridagi kuchlar vektori.

Oxirgi formulaning ko‘rinishi shuni ko‘rsatadiki, chekli elementlangan hajmning deformatsiya energiyasi tashqi kuchlarning bajargan ishiga teng (ichki kuchlarning ishi tashqi kuchlarning ishiga teng).

Endi yuqoridagi belgilashlarimiz va ularning ifodasidan birlik matritsasining quyidagi ifodasiga kelamiz:

$$[K^e]=EI\begin{bmatrix} 12/l^3 & 6/l^2 & -12/l^3 & 6/l^2 \\ 6/l^2 & 4/l & -6/l^2 & 2/l \\ -12/l^3 & -6/l^2 & 12/l^3 & -6/l^2 \\ 6/l^2 & 2/l & -6/l^2 & 4/l \end{bmatrix}.$$

Bu yerdan ko‘rinadiki chekli elementning $[K^e]$ bikrlik matritsasi 4×4 o‘lchamga ega va u o‘zining bosh diagonaliga nisbatan simmetrik. Chekli element tugunlarining i va j kabi belgilanishiga ko‘ra bu matritsani quyidagicha ifodalash mumkin:

$$[K^e]=\begin{bmatrix} [k_{ii}] & [k_{ij}] \\ [k_{ji}] & [k_{jj}] \end{bmatrix},$$

bu yerda $[k_{ii}]$, $[k_{ij}]$, $[k_{ji}]$, $[k_{jj}]$ – o‘lchamlari 2×2 bo‘lgan qism matritsalar; i va j larning o‘rniga chekli elementning tugunlari nomerlarini qo‘ysak, u holda chekli elementlangan hajmning har bir qism matritsasi va bikrlikning bosh matritsasining o‘rnini aniqlagan bo‘lamiz.

Xuddi shunday, chekli elementning $\{\delta^e\}$ – ko‘chishlari vektori va $\{M^e\}$ – tugunlari kuchlari vektorini ikkita qism vektorlar ko‘rinishida ifodalash, i va j larning o‘rniga chekli elementning tugunlari nomerlarini qo‘yish chekli elementlangan hajmning har bir $\{\delta\}$ – tugunlari ko‘chishlari vektorining va $\{M\}$ – tugunlari kuchlari vektorining qism vektorlari o‘rnini ko‘rsatadi:

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_i\} \\ \{\delta_j\} \end{Bmatrix}, \quad \{M^e\} = \begin{Bmatrix} \{M_i\} \\ \{M_j\} \end{Bmatrix}.$$

Bularga ko‘ra ko‘chish vektori uchun ushbu ifodaga kelamiz: $[K]\cdot\{\delta^e\}=\{M^e\}$.

3-BOB. CHEGARAVIY MASALALARNI CHEGARAVIY ELEMENTLAR USULI BILAN YECHISH

3.1. Boshlang‘ich tushunchalar

Tutash muhit mexanikasining xususiy hosilali yoki oddiy differensial tenglamali chegaraviy masalalarini yechishning chekli ayirmalar va chekli elementlar usullari bilan bir qatorda chegaraviy elementlar usuli ham mavjud. Chegaraviy elementlar usulini qo‘llash uchun jarayonning matematik modelini izlanayotgn noma’lum parametrlarni o‘z ichiga olgan chegaraviy integral tenglamalar shakliga keltirib olish kerak bo‘ladi. Bu esa masalaning o‘lchamini bir birlikka kamaytirish va hisoblash jarayoniga sarflanadigan vaqtni iqtisod qilish imkonini beradi.

Chegaraviy integral tenglamalarni keltirib chiqarish va ularni yechish matematik nuqtai nazardan yuqorida qayd etilgan usullarga nisbatan ancha murakkab, ammo bunga qaramasdan bugungi kunda bu usul har bir alohida yechimning mavjudligi va yagonaligini ta’minlovchi teoremalarsiz amaliy masalalarni yechishga samarali qo‘llanilib kelinmoqda. Shuning uchun bu usul bugungi kunda muhandislik hisoblarida eng ko‘p qo‘llaniladigan usullardan biriga aylandi. Bu usul asosida bir qator maxsus amaliy dasturlar yaratildi Ansys Nastran, Adams, T-Flex-Динамика, Динамика-2 va boshqa).

Chegaraviy elementlar usulining bir qator modifikatsiyalari mavjudki, ularni birlashtirib turgan umumiy g‘oyadan tashqari ularni bir biridan bog‘liq uchta kategoriyaga ajratish mumkin.

Chegaraviy elementlar usulining to‘g‘ri varianti. Bu variantda integral tenglamaga kiruvchi noma’lum funksiya o‘zgaruvchan masalaning fizik ma’nosini o‘zida mujassamlashtirgan real funksiya. Masalan, elastiklik nazariyasining masalalarida integral tenglamaning bunday yechimi tadqiqot sohasining chegarasida barcha zo‘riqishlar va ko‘chishlarni berishi lozim, ichki nuqtalarda esa ular chegaraviy qiymatlarni sonli integrallash orqali chiqariladi. To‘g‘ridan to‘g‘ri hisoblashga asoslangan bunday algoritm *chegaraviy integral tenglamalr usuli* nomi bilan ataladi.

Chegaraviy elementlar usulining to‘g‘ri bo‘lmagan varianti. Bu variantda integral tenglamalar tadqiqot sohasining cherasi bo‘ylab noma’lum zichlik bilan taqsimlangan dastlabki differensial tenglamaning fundamental singulyar yechimi orqali to‘la ifodalanadi. Shuni eslatib o‘tish lozimki, matematik singulyarlik – bu matematik funksiya cheksizlikka intiladigan nuqta. O‘z o‘zidan ko‘rinib turibdiki, bunday holda bu funksiya to‘lasincha fizik ma’noni bermaydi, ammo u topilgan paytda (integral tenglama sonli yechilganda) jism ichki nuqtalari bo‘ylab topilgan yechimning parametrlari qiymati soda integrallashdan chiqariladi.

Chegaraviy elementlar usulining yarim to‘g‘ri varianti. Bu variantda noma’lum funksiyalar uchun integral tenglamalarni elastiklik nazariyasining kuchlanish funksiyasiga o‘xshash qilib tuzib olish mumkin. Bu funksiyalar uchun yechim topilganda soda differensiallash, masalan, ichki kuchlanishlar taqsimotini beradi.

Barcha chegraviy elementlar usullari superpozitsiya prinsipidan foydalanadi va ular to‘lasincha chiziqli tenglamalarga yoki approksimatsiya qilingandan oldin yoki keyin hosil bo‘lgan ko‘chishga nisbatan chiziqli bo‘lgan sistemaga qo‘llanilishi mumkin. Bunday holda chegaraviy elementlar usuli sistemaning chegaraviy geometriyasini modellashtiradi, bundan keyin olingan zaruriy ma’lumotlarga tayanib sohaning ichki nuqtalarida ham izlanayotgan o‘zgaruvchining qiymatlarini topish imkonini beradi.

Tabiatiga ko‘ra bu usulda chegaraviy integral tenglamalar aniq yechimga olib keluvchi masalani tuzib olish degani. Bu masalaning yechimini diskretlashtirish xatoligi faqat chegara nuqtalarda paydo bo‘lishi mumkin. Agar bu chegarada egri chiziqli elementlar tanlab olinsa, u holda bu xatolik juda ham kichik bo‘ladi. Buni shunday izohlash mumkinki, chegaraviy elementlar usullari tayanadigan sonli integrallash sonli differensiallashga nisbatan ancha aniq va ustivor hisob jarayonidir.

Chegaraviy elementlarning turlari. Faraz qilaylik, biror *G* chegarali *S* sohaning ichida differensial tenglamaning yechimini topish talab etilsin. Chegaraviy elementlar usulining mazmuniga ko‘ra chegara chekli sondagi segmentlar (ularning barchasi o‘zaro teng bo‘lishi shart emas) bilan diskretlashtiriladi. Bu segmentlar *chegaraviy elementlar* deb ataladi. Bu har bir chegaraviy element uchun ikkita yaqinlashish quriladi: birinchisi chegaraning geometriyasidan bog‘liq, ikkinchisi esa chegaraviy elementda noma’lumning chegaraviy qiymati o‘zgarishiga taalluqli.

Amaliyotda, odatda, quyidagi chegaraviy elementlardan foydalaniladi:

- o‘zgarmas chegaraviy elementlar;
- chiziqli chegaraviy elementlar;
- parabolik yoki kvadratik chegaraviy elementlar.

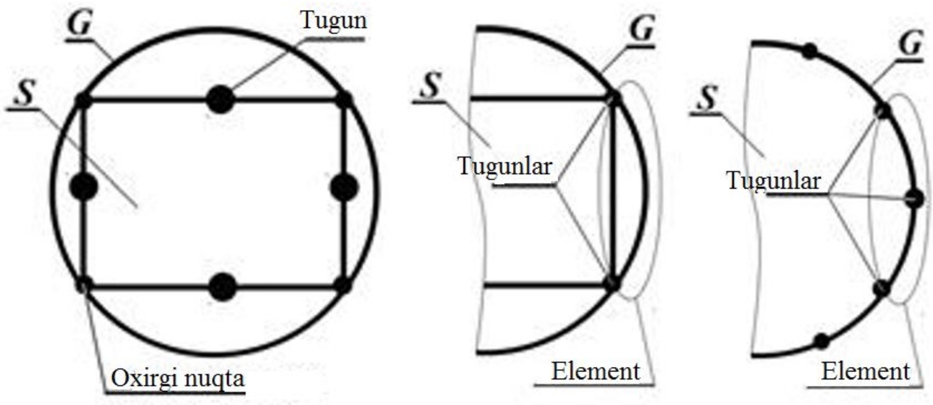
Har bir turdagi chegaraviy elementda izlanayotgan qiymatning chegaraviy miqdori aniqlanadigan *chegaraviy* yoki *oxirgi tugun nuqta* (*tugunlar*) ajratib olinadi.

O‘zgarmas chegaraviy element uchun chegaraviy segment ikkita chetki nuqtasini tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziqdan iborat. Tugunlar shu to‘g‘ri chiziqning o‘rtasiga joylashtiriladi, chegaraviy miqdorlar esa ana shu chegaraviy element bo‘ylab o‘zgarmas va uning qiymati tugun nuqtadagisi bilan bir xil (3.1,*a*-rasm).

Chiziqli chegaraviy element ham uning ikki chetki nuqtasini tutashtiruvchi xuddi shunday to‘g‘ri chiziqdan iborat. Bu element uning chegara nuqtalariga joylashtirilgan ikkita tugunga ega. Chegaraviy qiymat ana shu tugun nuqtalar bo‘ylab chiziqli o‘zgaradi (3.1,*b*-rasm).

Parabolik yoki kvadratik chegaraviy elementning geometriyasi parabolik yoyga yaqinlashtiriladi. Bunda element uchta tugunga ega bo‘lib, ulardan ikkitasi elementning oxirlarida, bittasi esa shu elementning ortasida joylashgan bo‘ladi (3.1,*c*-rasm).

Quyida ana shu *chegaraviy elementlar usullari*dan foydalanib, bir qator amaliy masalalar yechilgan.



a) *b*) *c*)

3.1-rasm. Chegaraviy elementlar turlari.

3.2. Differensial tenglamaning fundamental yechimi tushunchasi

Yuqorida ta'kidlaganimizdek, o'zgarmas koeffisiyentli oddiy differensial tenglamani quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$L\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x) = f(x), \tag{3.1}$$

bu yerda $L\left(\frac{d}{dx}\right)$ – differensial operator; $\varphi(x)$ – izlanayotgan funksiya; $f(x)$ – ixtiyoriy funksiya.

Ixtiyoriy o'zgarmas koeffisiyentli oddiy differensial tenglama ushbu

$$L\left(\frac{d}{dx}\right)G(x,\xi) = \delta(x-\xi) \tag{3.2}$$

tenglamaning yechimi bo'lgan $G(x,\xi)$ – fundamental yechimga ega, bu yerda $\delta(x-\xi)$ – Dirak delta-funksiyasi.

Fundamental yechim quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$G(x,\xi) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(x-\xi)\varphi_0(x), \tag{3.3}$$

bu yerda $\operatorname{sgn}(x-\xi)=\begin{cases}+1, & x>\xi,\\ -1, & x<\xi\end{cases}$ – ishora funksiyasi; $\varphi_0(x)$ – ushbu $x=\xi$ da

$$\varphi_0(x)=\frac{d\varphi_0(x)}{dx}=...=\frac{d^{(n-2)}\varphi_0(x)}{dx^{n-2}}=0 \text{ va } \frac{d^{(n-1)}\varphi_0(x)}{dx^{n-1}}=1 \tag{3.4}$$

kabi chegaraviy shartlar bilan berilgan ushbu $L\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi_0(x)=0$ bir jinsli oddiy differensial tenglamaning yechimi,bunda n – operator L ning yuqori darajali tartibi. Fundamental yechim bir jinsli oddiy differensial tenglamani aniq yechish orqali topiladi va u o‘z navbatida umumlashgan funksiya bo‘ladi.

Ishora funksiyasi va Dirak funksiyasi quyidagi differensial bog‘lanish bilan bog‘langan:

$$\delta(x-\xi)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x-\xi)\right). \tag{3.5}$$

Agar biror oddiy differensial tenglamaning fundamental yechimi ma'lum bo‘lsa, u holda o‘ng tomoni ixtiyoriy bo‘lgan xuddi shu oddiy differensial tenglamaning yechimini quyidagicha yozish mumkin:

$$\varphi(x)=\int_{\Omega} G(x,\xi)f(\xi)d\xi+R(x), \tag{3.6}$$

bu yerda $R(x)$ – topilgan $\varphi(x)$ funksiya va uning Ω – aniqlanish sohasi chegarasidagi hosilasining qiymatlaridan bog‘liq yechim.

3.3. Balkaning ko‘ndalang egilishi masalalarini chegaraviy elementlar usuli bilan yechish

Masalaning qo‘yilishi. Uzunligi l ga teng bo‘lgan balkaning ko‘ndalang egilishi masalasi ushbu

$$EJ\frac{d^4w(x)}{dx^4}=q(x), \quad 0\le x\le l \tag{3.7}$$

oddiy differensial tenglama bilan ifodalanadi, bu yerda EJ – balkaning ko‘ndalang egilishidagi bikrligi; $w(x)$ – balka nuqtalarining ko‘chishi; $q(x)$ –

ixtiyoriy ko‘ndalang yuklanish. Ushbu (3.7) tenglamaning fundamental yechimini topish talab qilinadi.

Yechish. (3.7) tenglamaning differensial operatori $L\left(\frac{d}{dx}\right)=EJ\frac{d^4}{dx^4}$ kabi bo‘lib, ushbu $L\left(\frac{d}{dx}\right)w_0(x)=0$ bir jinsli tenglamaning yechimi quyidagi funksiya va uning hosilalari:

$$EJw_0(x)=\frac{1}{6}C_1x^3+\frac{1}{2}C_2x^2+C_3x+C_4\ ;$$

$$EJ\frac{dw_0(x)}{dx}=\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3\,;$$

$$EJ\frac{d^2w_0(x)}{dx^2}=C_1x+C_2\,;$$

$$EJ\frac{d^3w_0(x)}{dx^3}=C_1\,;$$

Fundamental yechimni olishning (3.4) shartlaridan foydalanib, C_i integrallash o‘zgarmaslariga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$EJw_0(\xi)=\frac{1}{6}C_1\xi^3+\frac{1}{2}C_2\xi^2+C_3\xi+C_4=0; \quad \Rightarrow \quad C_4=-\frac{1}{EJ}\frac{1}{6}\xi^3\,;$$

$$EJ\frac{dw_0(\xi)}{dx}=\frac{1}{2}C_1\xi^2+C_2\xi+C_3=0; \quad \Rightarrow \quad C_3=\frac{1}{EJ}\frac{1}{2}\xi^2\,;$$

$$EJ\frac{d^2w_0(\xi)}{dx^2}=C_1\xi+C_2=0; \quad \Rightarrow \quad C_2=-\frac{1}{EJ}\xi\,;$$

$$EJ\frac{d^3w_0(\xi)}{dx^3}=C_1=1; \quad \Rightarrow \quad C_1=\frac{1}{EJ}.$$

(3.2) dan foydalanib, (3.7) tenglamaning quyidagi fundamental yechimi va uning hosilalariga ega bo‘lamiz:

$$G(x,\xi)=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x-\xi)\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{6}x-\frac{1}{2}x^2\xi+\frac{1}{2}x\xi^2-\frac{1}{6}\xi^3\right)=\frac{|x-\xi|^3}{12EJ};$$

$$\frac{dG(x,\xi)}{dx} = \operatorname{sgn}(x-\xi)\frac{(x-\xi)^2}{4EJ};$$

$$\frac{d^2G(x,\xi)}{dx^2} = \frac{|x-\xi|}{2EJ}; \qquad (3.8)$$

$$\frac{d^3G(x,\xi)}{dx^3} = \frac{\operatorname{sgn}(x-\xi)}{2EJ};$$

$$\frac{d^4G(x,\xi)}{dx^4} = \frac{\delta(x-\xi)}{EJ}.$$

Bularni (3.2)ga qo‘yib ayniyatlarni hosil qilamiz.

Balkaning egilish funksiyasi $w(x)$ ni quyidagi ko‘rinishda izlaymiz:

$$w(x) = \int_0^l G(x,\xi)q(\xi)d\xi + Q_0 G(x,0) + M_0\frac{dG(x,0)}{dx} + Q_l G(x,l) + M_l\frac{dG(x,l)}{dx}, \quad (3.9)$$

bu yerda Q_0, M_0, Q_l, M_l – berilgan $x = 0$ va $x = l$ kesmaning chetlaridagi ba'zi parametrlar. Bu jarayonda shunga e'tibor berish kerakki, tanlangan nuqta doimo aniqlanish sohaning ichida yotishi lozim, ya'ni sohaning chegara nuqtasi $x = 0$ da funksiya aniqlanganda $x = \varepsilon$ qiymatni va sohaning chegara nuqtasi $x = l$ da funksiya aniqlanganda $x = l - \varepsilon$ qiymatni olish lozim. Bunda ε - musbat kichik son.

Ushbu Q_0, M_0, Q_l, M_l noma'lum miqdorlarni aniqlash uchun balkaning chetida quyidagi mahkamlanish shartlaridan foydalaniladi:

$w=0, \quad \theta=\dfrac{dw}{dx}=0$ – qattiq mahkamlangan chegara uchun;

$w=0, \quad M=EJ\dfrac{d^2w}{dx^2}=0$ – sharnirli mahkamlangan chegara uchun; (3.10)

$M=EJ\dfrac{d^2w}{dx^2}=0, \quad Q=EJ\dfrac{d^3w}{dx^3}=0$ – erkin chegara uchun;

Taqsimlangan yuklaninsh $q(x)$ quyidagi turlarda bo‘lishi mumkin:

$q(x) = p\theta[(x-a)(b-x)]$ – balkaning $a \le x \le b$ bo‘lagida p o‘zgarmas yuklanish;

$q(x) = P\delta(x-a)$ – balkaning $x=a$ nuqtasida P jamlangan yuklanish;

$$q(x) = -M\frac{d\delta(x-a)}{dx}$$ – balkaning $x=a$ nuqtasida P jamlangan moment;

a) Uzunligi l bo‘lgan balkaning chetlari qattiq mahkamlanganlik holida uning $x = l/2$ nuqtasiga qo‘yilgan P jamlangan kuch ta'siridagi egilishi masalasini qaraymiz. Bunda chegaraviy shartlar quyidagicha bo‘ladi:

$$w(0)=0, \quad \frac{dw(0)}{dx}=0, \quad w(l)=0, \quad \frac{dw(l)}{dx}=0.$$

Yechimni (3.9) ko‘rinishda izlaymiz, ya'ni

$$w(x)=P\frac{|x-l/2|^3}{12EJ}+Q_0\frac{|x|^3}{12EJ}+M_0\operatorname{sgn}(x)\frac{x^2}{4EJ}+Q_l\frac{|x-l|^3}{12EJ}+M_l\operatorname{sgn}(x-l)\frac{(x-l)^2}{4EJ};$$

$$\frac{dw(x)}{dx}=P\operatorname{sgn}(x-l/2)\frac{|x-l/2|^2}{4EJ}+Q_0\operatorname{sgn}(x)\frac{x^2}{4EJ}+M_0\frac{|x|}{2EJ}+$$
$$+Q_l\operatorname{sgn}(x-l)\frac{(x-l)^2}{4EJ}+M_l\frac{|x-l|}{2EJ}.$$

Bularning chegaraviy shartlarni qanoatlantirishidan Q_0, M_0, Q_l, M_l noma'lum miqdorlarga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasiga kelamiz:

$$w(0)=P\frac{l^3}{96EJ}+Q_l\frac{l^3}{12EJ}-M_l\frac{l^2}{4EJ}=0;$$

$$\frac{dw(0)}{dx}=-P\frac{l^2}{36EJ}-Q_l\frac{l^2}{4EJ}+M_l\frac{l}{2EJ}=0;$$

$$w(l)=P\frac{l^3}{96EJ}+Q_0\frac{l^3}{12EJ}+M_0\frac{l^2}{4EJ}=0;$$

$$\frac{dw(l)}{dx}=-P\frac{l^2}{36EJ}+Q_l\frac{l^2}{4EJ}+M_l\frac{l}{2EJ}=0.$$

Bu sistemaning yechimi izlanayotgan parametrlarning qiymatini beradi:

$$Q_0 = Q_l = -\frac{1}{2}P, \quad M_0 = M_l = \frac{1}{8}Pl\ .$$

Masalan, $x = l/2$ nuqtadagi ko‘chishning qiymati $w\left(\frac{l}{2}\right) = 0{,}005208\frac{Pl^3}{EJ}$ bo‘lib, u bizga ma'lum bo‘lgan boshqa usullar bilan olingan natija bilan mos keladi.

b) Uzunligi l bo□lgan balkaning chap cheti qattiq mahkamlangan va o‘ng cheti sharnirli mahkamlanganlik holida uning $x = l/2$ nuqtasiga qo□yilgan P jamlangan kuch ta'siridagi ko‘ndalang egilishi masalasini qaraymiz. Bunda chegaraviy shartlar quyidagicha bo□ladi:

$$w(0) = 0, \quad \frac{dw(0)}{dx} = 0, \quad w(l) = 0, \quad \frac{d^2 w(l)}{dx^2} = 0.$$

Yechimni (9) ko□rinishda izlaymiz, ya'ni

$$w(x) = P\frac{|x - l/2|^3}{12EJ} + Q_0\frac{|x|^3}{12EJ} + M_0\,\mathrm{sgn}(x)\frac{x^2}{4EJ} + Q_l\frac{|x-l|^3}{12EJ} + M_l\,\mathrm{sgn}(x-l)\frac{(x-l)^2}{4EJ};$$

$$\frac{dw(x)}{dx} = P\,\mathrm{sgn}(x - l/2)\frac{(x - l/2)^2}{4EJ} + Q_0\,\mathrm{sgn}(x)\frac{x^2}{4EJ} + M_0\frac{|x|}{2EJ} +$$
$$+ Q_l\,\mathrm{sgn}(x-l)\frac{(x-l)^2}{4EJ} + M_l\frac{|x-l|}{2EJ};$$

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = P\frac{|x - l/2|}{2EJ} + Q_0\frac{|x|}{2EJ} + M_0\frac{\mathrm{sgn}(x)}{2EJ} + Q_l\frac{|x-l|}{2EJ} + M_l\frac{\mathrm{sgn}(x-l)}{2EJ}.$$

Bularning chegaraviy shartlarni qanoatlantirishidan Q_0, M_0, Q_l, M_l noma'lum miqdorlarga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasiga kelamiz:

$$w(0) = P\frac{l^3}{96EJ} + Q_l\frac{l^3}{12EJ} - M_l\frac{l^2}{4EJ} = 0; \quad \frac{dw(0)}{dx} = -P\frac{l^2}{16EJ} - Q_l\frac{l^2}{4EJ} + M_l\frac{l}{2EJ} = 0;$$

$$w(l) = P\frac{l^3}{96EJ} + Q_0\frac{l^3}{12EJ} + M_0\frac{l^2}{4EJ} = 0;$$

$$\frac{d^2 w(l)}{dx^2} = P\frac{l}{4EJ} + Q_0\frac{l}{2EJ} + \frac{M_0}{2EJ} + \frac{M_l}{2EJ} = 0.$$

Bu sistemaning yechimi izlanayotgan parametrlarning qiymatini beradi: $\{Q_0; Q_l; M_0; M_l\} = -P\{1/2;\ 1/2;\ -l/8;\ l/8\}$. Masalan, $w = \frac{Pl^3}{192EJ}$ – bu ko□chishning $x =$

l/2 nuqtadagi qiymati bo□lib, u boshqa usullar bilan olingan natija bilan mos keladi.

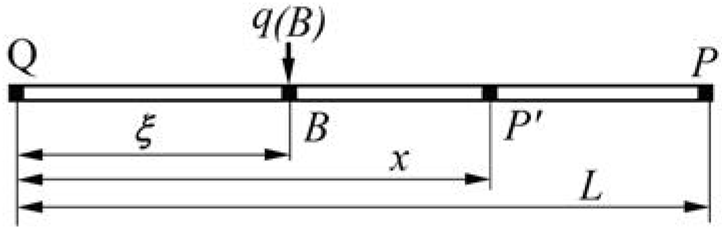
3.4. Ko‘ndalang kesimi o‘zgarmas quvurda siqilmaydigan ideal suyuqlikning oqimi masalasini chegaraviy elementlar usuli bilan yechish

Ma’lumki, chegaraviy elementlar usuli dastlabki chegaraviy masalaning o‘lchamini bittaga kamaytiradi. Xuddi shunday, bu usul chekli elementlar usuliga qaraganda hisoblashlar jarayonini ham kamaytiradi. Muhandislik hisoblarida ko‘pincha chekli ayirmalar yoki chekli elementlar usuliga murojaat qilinadi. Zamonaviy muhandislik amaliyotida chegaraviy elementlar usuli bilan ham ko‘plab tadqiqot ishlari olib borilmoqda. Quyida ana shu usulning amaliyotda qo‘llanilishi namoyon qilinadi.

Chegaraviy elementlar usulining asosida bir o‘lchovli *G* – tadqiqot sohasini chegaraviy elementlar deb ataluvchi chekli sondagi segmentlarga diskretlashtirish yotadi. Amaliyotda, odatda, chegaraviy elementlarning uch turidan foydalaniladi: o‘zgarmas, chiziqli va kvadratik. O‘zgarmas chegaraviy element sohaning chetki nuqtalarini tutashtiruvchi chegaraviy segmentni approksimatsiyalaydi. Bunda tugun shu to‘g‘ri chiziqning o‘rtasiga joylashtiriladi, chegaraviy miqdorlar esa butun chegaraviy element bo‘ylab tugun nuqtadagi qiymatga teng miqdorni qabul qiladi. Chiziqli chegaraviy element ikkita chetki nuqtalarni (tugunlarni) tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziq bo‘lib, fazoviy o‘zgaruvchi ikkita tugun qiymatlar orasida chiziqli o‘zgaradi. Kadratik (parabolik) chegaraviy element geometriyasi esa uchta yonma-yon tugun bo‘ylab o‘tuvchi parabola yoyini ifodalaydi.

Masalaning qo‘yilishi. Ko‘ndalang kesimi o‘zgarmas quvurda siqilmaydigan ideal suyuqlik oqimi masalasining matematik modeli xususiy hosilali differensial tenglama (ushbu holda Laplas tenglamasi) bilan ifodalanadi. Bir o‘lchovli bir jinsli quvurning uzunligini L [sm^2], ko‘ndalang kesimini S

[sm^2], chegara nuqtalarini Q va P, bu nuqtalarga mos keluvchi suyuqlik bosimini $p(Q)$, $p(P)$, quvurning $x=\xi$, ya'ni B nuqtasidagi manba intensivligini ψ [m/s^2] deb belgilab olamiz (3.2-rasm).



3.2-rasm. Tadqiqot obyekti va yuklanish sxemasi.

Yechish. Tadqiqot sohasining P, Q, B nuqtalaridan boshqa barcha x [sm] koordinatali ichki P` nuqtalarida $p(x)$ – quvurdagi suyuqlik bosim ushbu

$$\frac{d^2 p(x)}{dx^2} = 0 \tag{3.11}$$

Laplas tenglamasini, $v(x)$ - quvurdagi suyuqlik oqimi tezligi esa ushbu

$$v(x) = -k\frac{dp(x)}{dx} \tag{3.12}$$

tenglamani qanoatlantiradi. Agar chegaraviy shartlarni holga teng, ya'ni $p(Q)$=0, $p(P)$=0 deb olsak, u holda (3.11) va (3.12) tenglamalarning yechimi tadqiqot sohasining $x=\xi$ dan boshqa ixtiyoriy nuqtasida quyidagiga teng bo'ladi:

$$p(x) = \psi\frac{L-\xi}{L}\cdot\frac{x}{k}; \qquad v(x) = -\psi\frac{L-\xi}{L}, \quad 0 \le x < \xi$$

$$p(x) = \psi\frac{L-x}{L}\cdot\frac{\xi}{k}; \qquad v(x) = \psi\frac{\xi}{L}, \qquad \xi < x \le L$$

3.5. Chegaraviy elementlar usuli yordamida issiqlik rejimlarini hisoblash

Masalaning qo'yilishi. Uzunligi L va ko'ndalang kesimi S bo'lgan hamda Q va P nuqtalar bilan chegaralangan bir jinsli obyektni qaraymiz (3.2-rasm). Q va P nuqtalardagi temperaturalarni mos ravishda $T(Q)$ и $T(P)$ deb belgilaylik. Yuk qo'yilgan x koordinatali B nuqtada intensivligi $q=q(B)$ ga teng nuqtaviy issiqlik manbai joylashgan. Kuzatuv nuqtasi yoki maydon nuqtasi P' ning koordinatasi x. Bir o‘lchovli yaqinlashishda sohaning barcha ichki nuqtalaidagi $T(x)$ temperatura ushbu

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0\,, \tag{3.13}$$

Laplas tenglamasini, issiqlik oqimi esa ushbu

$$q(x) = \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \tag{3.14}$$

tenglamani qanoatlantiradi.

Masalaning yechimi. Nolinchi chegaraviy shartlarda (3.13) va (3.14) tenglamalarning yechimlari tadqiqot sohasining $x=\boldsymbol{x}$ dan boshqa barcha nuqtalarida quyidagicha yozish mumkin:

$$T(x) = \frac{q(L-\xi)}{\lambda L} x, \qquad q(x) = -q\frac{(L-\xi)}{L}\,, \quad 0 \le x < \xi, \tag{3.15}$$

$$T(x) = \frac{q(L-x)}{\lambda L} \xi, \qquad q(x) = -q\frac{\xi}{L}\,, \quad \xi \le x < L. \tag{3.16}$$

$x=\boldsymbol{x}$ da $T(x)$ miqdor (3.15) va/yoki (3.16) lardan bir qiymatli aniqlanadi, yuklanish qo‘yilgan nuqta orqali kuzatish nuqtasiga o‘tishda $q(x)$ ning qiymati $q(B)$ ga teng sakrashlar tarzida o‘zgarib turadi.

XULOSA

Mazkur bitiruv malakaviy ishini bajarish natijasida olingan xulosalar:

- oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechishning chekli ayirmalar, chekli elementlar, chegaraviy elementlar usullari hisobiga oid jarayonlarni kompyuterda modellashtirish va sonli tajribalar asosida tadqiq etish uslublari oʻrganildi;
- oddiy differensial tenglamali chegaraviy masalaga olib kelinadigan jarayonlar hisobi masalasining matematik modeli oʻrganildi;
- amaliy jarayonlar hisobiga oid asosiy munosabatlar oʻrganib chiqildi;
- oʻrganilayotgan jarayonlar hisobiga oid chegaraviy masala tuzildi;
- chegaraviy masalani yechishning chekli ayirmalar, chekli elementlar, chegaraviy elementlar usullaridagi sonli hisob metodikasi va algoritmi ishlab chiqildi;
- oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechishning sonli hisob dasturi tuzildi;
- sonli hisob natijalari amaliy tajribalarga mos keldi;
- oddiy differensial tenglamalarning taqribiy hisobiga oid ishlab chiqilgan sonli hisob metodikasidan har xil hisob masalalarini chekli ayirmalar, chekli elementlar, chegaraviy elementlar usullari yordamida yechishda samarali foydalanish mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Баженов В.А., Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. Строительная механика. Применение метода граничных элементов. – Одесса: Астропринт, 2001. – 288 с.
2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: Изд-во Бином. Лаборатория знаний, 2011. – 640 с.
3. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
4. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
5. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2009. – 848 с.
6. Галлагер Р. МКЭ: Основы /Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 215 с.
7. Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г. /Численно-аналитический метод граничных элементов / В 2-х томах. Т.1. – Одесса. – Стандарт, 2010. – 415 с.
8. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике / Пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
9. Зенкевич О.С., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир. – 1986. – 318 с.
10. Исраилов М.И. Ҳисоблаш методлари. 1- ва 2-қисмлар. – Тошкент: Ўқитувчи, 2003, 2008.
11. Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Численные методы: в 2 кн. Кн. 2. Методы математической физики. - М.: Издательский центр «Академия»,2013.-304 с.
12. Куликов Ю.А. Решение плоской задачи теории упругости методом конечных элементов. – Горький. – 1980. – 68 с.

13. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Изд-во Лань, 2010. – 608 с.
14. Метод конечных элементов: Учебное пособие для вузов / Под. ред. П.М.Варвака. – Киев: Вища школа, Головное изд–ва, 1981.
15. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов / Пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
16. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Изд-во Лань, 2009. - 288 с.
17. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир. – 1979. – 392 с.
18. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
19. http://www.edu.uz – ta’lim sayti.
20. http://www.edu.ru – ta’lim sayti.
21. http://www.intuit.ru – masofaviy ta’lim sayti.
22. http://www.eqworld.ru – adabiyotlarning elektron varianti.
23. http://www.twirpx.com – adabiyotlarning elektron varianti.
24. http://www.ziyonet.uz - adabiyotlarning elektron variantlari