

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIV VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI**

**ALISHER NAVOIY NOMIDAGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI**

MEXANIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

«AMALIY MATEMATIKA» KAFEDRASI

YUSUPOV NURIDDIN ABDUQAHHOR O‘G‘LI

«5130200 – Amaliy matematika va informatika» ta‘lim yo‘nalishi
bo‘yicha bakalavr darajasini olish uchun

**«BA‘ZI MUHANDISLIK MASALALARINI SONLI YECHISHNI
MATHCAD YORDAMIDA VIZUALLASHTIRISH»**

mavzuli

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Bajardi : N.A.Yusupov

Ilmiy rahbar : dots. A.Abdirashidov

Ushbu ish kafedraning 2016 yil «23» maydagi yig‘ilishida muhokama qilindi va himoya qilishga №11,a bayonnoma bilan tavsiya etildi.

Kafedra mudiri : dots. J.Maxmudov

Fakultet dekani : dots. H.Ro‘zimurodov

Ushbu ish DAKning 2016 yil «__» iyundagi yig‘ilishida muhokama qilindi va №__ bayonnoma bilan «__» ballga baholandi.

DAK raisi _____

Komissiya a‘zolari _____

Samarqand - 2016

MUNDARIJA

Kirish.....	3
1-bob. Oddiy differensial tenglama va tenglamalar sistemasi, ularga keltiriladigan jarayonlar haqida.....	5
1.1. Modellar differensial tenglamalar bilan ifodalanadigan jarayonlar...	5
1.2. Differensial tenglamalar haqida asosiy tushunchalar.....	6
1.3. Birinchi tartibli differensial tenglamalarning normal sistemasi.....	8
1.4. O'zgaras koeffisientli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi.....	9
1.5. Yuqori tartibli differensial tenglamalar haqida asosiy tushunchalar...	10
1.6. Yuqori tartibli differensial tenglamalarni birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasiga keltirish.....	11
2-bob. Oddiy differensial tenglama va oddiy differensial tenglamalar sistemasini Mathcad matematik paketi yordamida yechish.....	13
2.1. Chegaraviy masalalar haqida boshlang'ich ma'lumotlar.....	13
2.2. Oddiy differensial tenglama va oddiy differensial tenglamalar sistemasini yechishga mo'ljallangan Mathcad dasturi tarkibidagi standart funksiyalar.....	15
2.3. <i>Odesolve</i> va <i>rkfixed</i> funksiyalari yordamida ixtiyoriy tartibli oddiy differensial tenglama va ularning sistemasi uchun Koshi masalasini yechish texnologiyasi.....	17
2.4. Oddiy differensial tenglamalar va ularning sistemalarini berilgan bit-ta nuqtada yechish texnologiyasi. Mathcad dasturi tarkibidagi <i>rkadapt</i> va <i>bulstoer</i> funksiyalarining qo'llanilishi	26
2.5. Maxsus differensial tenglamalar va differensial tenglamalar sistemasini hamda Mathcad dasturining ularni yechishga mo'ljallangan standart funksiyalar.....	31
2.6. Avtonom differensial tenglamalar sistemasi. Fazaviy trayektoriyalar. Fazalar tekisligi. Fazaviy portret.....	40
Xulosa.....	46
Foydalanilgan adabiyotlar.....	47

KIRISH

Mavzuning dolzarbligi. Muhandislikning amaliy masalalarini yechishda doimo nochiziqli tenglamali masalalarni analitik yoki sonli yechish muammosiga to'qnash kelinadi. Zamonaviy kompyuterlar bunday hisoblarni taqribiy usullar yordamida tadqiq qilish imkonini beradi. Ba'zi masalalar aslida sodda ko'ringani bilan qo'yilgan maqsadga erishishning barcha hisob boshqichlarini bajarish, hisob modeli va algoritmini yaratish, ishni ishlab chiqarish yoki o'quv amaliyotiga tadbiiq qilishgacha olib borish ancha muammolar tug'diradi. Ana shunday amaliy masalalardan biri matematik mayatnikning majburiy tebranishi masalasi.

Mazkur ishda balkaning egilishi va matematik mayatnikning majburiy tebranishi masalasi har xil boshlang'ich va chegaraviy shartlarda yechilgan. Buning uchun avvalo oddiy differensial tenglamalarni matematik paketlar (masalan, Mathcad) yordamida sonli yechish ko'nikmasi hosil qilindi.

Masalaning qo'yilishi. Balkaning egilishi va matematik mayatnikning majburiy tebranishi masalasining har xil boshlang'ich shartlarda matematik modelini oddiy differensial tenglama va tenglamalar sistemasi asosida o'rganish va hisob algoritmini tuzish, hisoblashlarga dasturiy vosita yaratish.

Ishning maqsad va vazifalari. Balkaning egilishi va matematik mayatnikning majburiy tebranishi masalasining har xil boshlang'ich shartlardagi nochiziqli differensial tenglamalarini sonli hisoblashni o'rganish, hisob algoritmini yaratish, uni amaliy masalalarni yechishga qo'llash va taqribiy hisoblashlar natijalarini tahlil etish.

Ilmiy-tadqiqotning uslubiyati va uslublari. Balkaning egilishi va matematik mayatnikning majburiy tebranishi masalasining har xil boshlang'ich shartlarda hisob algoritmlarini qurish, matematik paketlardan foydalanish. Yaratilgan hisob algoritmini, dasturiy vositani, olingan natijalarni turdosh masalalarni yechishga qo'llash uslubiyatini ishlab chiqish.

Tadqiqot natijalarining ilmiy jihatdan yangilik darajasi. Balkaning egilishi va matematik mayatnikning majburiy tebranishi masalasining har xil boshlang'ich shartlarda tebranishi hisobining samarali matematik modelini tanlash, samarali hisob algoritmini ishlab chiqish, ularni muhandisliklikning namunaviy masalalari yechimlarida ko'rsatish.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati va tadbiqu. Sterjenlar, plastinkalar, plitalardan foydalaniladigan gidroinshootlar, qurilish va muhandislik obyektlari qismlari, geologik inshootlar qismlaridagi ba'zi mexanik qurilmalar, uchuvchi va suzuvchi obyektlar elementlari hisobini shunday hisob algoritmiga tayanib bajarish mumkin.

Mavzu bo'yicha qisqacha adabiyotlar tahlili. Mazkur ish hisoblarini bajarish bevosita differensial tenglamalar, hisoblash matematikasi va matematik paketlarga asoslangan. Buning uchun oddiy differensial tenglama va tenglamalar sistemasini yechish masalasi [1, 5, 8, 19] adabiyotlar asosida o'rganildi. Taqribiy hisob jarayonini va modellashtirishda va algoritmlashtirishda [3-5, 7, 8, 14, 17] adabiyotlardan, masalani yechishning hisob algoritmini va hisob dasturiy vositasini yaratishda esa [1, 2, 6, 9-13, 15, 16, 18, 20] adabiyotlardan va Internet saytlar [21-26] materiallaridan foydalanildi.

Ishning tuzilishi va tarkibi. Ushbu bitiruv malakaviy ishi kirish, 2 ta bob, 12 ta paragraf, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati va ilovalardan iborat.

Bajarilgan ishning asosiy natijalari. Muhandislik masalalarni matematik modellashtirish jarayonida amaliy masalalarni yechishning muammolari o'rganilgan. Odatda bunday masalalar hisoblashlar hajmi juda katta bo'lgan ma'lumotlar bazasi bilan yechiladi. Bu masalalarni yechish jarayonida paydo bo'ladigan muammolarni samarali hal etishning unumli hisob algoritmlari tahlil qilinib, masalalarni yechishga dasturiy vositalar yaratilgan. Bir qator hisob sxemalari asosida oddiy differensial tenglama va ularning sistemasi berilgan chegaraviy va boshlang'ich shartlarda taqribiy Mathcad dasturida sonli yechildi va aniqlangan qiymatlar vizuallashtirildi. Shularga ko'ra kerakli ilmiy-uslubiy hisob tavsiyalari berildi.

1-BOB.

ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMA VA TENGLAMALAR SISTEMASI, ULARGA KELTIRILADIGAN JARAYONLAR HAQIDA

1.1. Modellari differensial tenglamalar bilan ifodalanadigan jarayonlar

Tabiiy hodisalarni o'rganishda fan va texnikaning turli sohalariga tegishli ko'plab amaliy masalalarni yechishda qaralayotgan voqea va jarayonlarga mos keluvchi qonuniyatlarni aks ettiruvchi matematik modellar oddiy differensial tenglamalar yoki xususiy hosilali differensial tenglamalar shaklida ifodalanadi. Masalan, havo bosimining balandlikka bog'liq holda o'zgarishiga mos keluvchi matematik model quyidagi differensial tenglama ko'rinishda hosil qilinadi:

$$p'(h) = \frac{d\tilde{p}}{dh} = -k \cdot p(h), \quad (1.1)$$

bu yerda h – balandlik; $p(h)$ – havo bosimi.

Bu tenglamani berilgan boshlang'ich shartlar asosida yechib, havo bosimining balandlikka bog'li holda o'zgarish qonuniyati $p = \varphi(h)$ topiladi.

Yuqumli kasallikning tarqalishi (epidemiya) natijasida aholining kasallikka chalinish qonuniyati (dinamikasi) sodda hol uchun quyidagi birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasini yechish orqali aniqlanadi:

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{dx}{dt} = -k_1 \cdot x(t) \cdot y(t), \\ y'(t) = \frac{dy}{dt} = k_1 \cdot x(t) \cdot y(t) - k_2 \cdot y(t), \\ z'(t) = \frac{dz}{dt} = -k_2 \cdot y(t). \end{cases} \quad (1.2)$$

bu yerda $x(t)$ – qaralayotgan t vaqtdagi aholining sog'lom, lekin kasallikka chalinishi mumkin bo'lgan qismi; $y(t)$ – kasallikka chalinganlar soni; $z(t)$ – kasallikdan tuzalayotganlar, boshqalardan chegaralab qo'yilganlar, sog'lom va immunitetga ega bo'lganlar soni; k_1 – birlik vaqt oralig'ida kasallikka chalinish koeffitsiyenti; k_2 – birlik vaqt oralig'ida kasallikdan tuzalish koeffitsiyenti.

$N = x(t) + y(t) + z(t) - t$ paytdagi aholi soniga teng bo‘lib, qaralayotgan modelda aholining t paytdagi ko‘payishi (tug‘ilish) hisobga olinmagan.

Uzunligi l ga teng bo‘lgan va quyi qismidan mahkamlangan prizma shaklidagi po‘lat simning o‘z og‘irligi ostida egilish qonuniyatini topish quyidagi Bessel tenglamasi deb ataluvchi ikkinchi tartibli differensial tenglamani yechishga keltiriladi:

$$y''(x) + \frac{1}{x} \cdot y'(x) + \left(1 - \frac{1}{9x^2}\right) \cdot y(x) = 0. \quad (1.3)$$

Yupqa metall plastinkada issiqlikning tarqalish dinamikasi quyidagi ikki o‘lchovli xususiy hosilali differensial tenglamani berilgan boshlang‘ich va chegaraviy shartlar asosida yechish orqali o‘rganiladi:

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = D \cdot \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) + F(x, y, t, u). \quad (1.4)$$

Yuqoridagi misollardan ko‘rinib turibdiki differensial tenglamalar va ularni yechish usullarini o‘rganish muhim amaliy ahamiyatga ega.

1.2. Differensial tenglamalar haqida asosiy tushunchalar

Differensial tenglama deb, erkli o‘zgaruvchi, noma’lum funksiya va uning turli tartibli hosilalari yoki differensiallarini bog‘lovchi tenglamaga aytiladi.

Agar noma’lum funksiya bitta argumentga (o‘zgaruvchiga) bog‘liq bo‘lsa, bunday differensial tenglama oddiy differensial tenglama, agar u bir nechta argumentga bog‘liq bo‘lsa, xususiy hosilali differensial tenglama deb ataladi.

Differensial tenglamaning tartibi deb unga kiruvchi yuqori hosilaning (yoki differensialning) tartibiga aytiladi. Masalan, birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar quyidagi ko‘rinishlarning birida beriladi:

$$F(x, y, y') = 0, \quad (1.5)$$

$$y'(x) = f(x, y), \quad (1.6)$$

$$M(x, y) \cdot dx + N(x, y) \cdot dy = 0 \quad (1.7)$$

Berilgan differensial tenglamani qanoatlantiradigan har qanday $y=\varphi(x)$ funksiya, ya'ni tenglamada $y(x)$ ni va uning hosilalarini $\varphi(x)$ va uning tegishli hosilalari bilan almashtirilganda berilgan tenglamani ayniyatga aylantiradigan funksiya differensial tenglamaning yechimi deb ataladi.

Agar tenglamani qanoatlantiradigan funksiya $F(x,y)=0$ ko'rinishdagi munosabat orqali yoki parametrik berilgan bo'lsa, u holda ular differensial tenglamaning integrali nomi bilan yuritiladi.

Differensial tenglamaning yechimini analitik ko'rinishda topish aniqmas integralni hisoblashga keltiriladi. Shuning uchun ham yechim o'zgarmas c parametrغا bog'liq bo'lib, u differensial tenglamaning umumiy yechimi deb ataladi va quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$y = \varphi(x, c) \quad (1.8)$$

umumiy integral esa $F(x, u, s)=0$ ko'rinishga ega bo'ladi.

Shunday qilib, differensial tenglama yechimga ega bo'lsa, yechimni ifodalovchi funksiyalar cheksiz ko'p bo'ladi. Bu funksiyalardan birini ajratib olish uchun argumentni birorta qiymatiga mos keladigan yechim qiymatini ko'rsatish kerak, ya'ni

$$x = x_0 \text{ da } y(x_0) = y_0 \quad (1.9)$$

ko'rinishdagi shart berilishi zarur. Bunday shart boshlang'ich shart deyiladi.

Yuqorida keltirilgan (1.5)-(1.7) tenglamalardan birini (1.9) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi $u(x)=\varphi(x)$ yechimi (yoki $F(x,u)=0$ integrali) shu differensial tenglamaning xususiy yechimi (yoki xususiy integrali) deb ataladi.

Differensial tenglamaning berilgan boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish Koshi masalasi nomi bilan yuritiladi.

Shuni ta'kidlash lozimki, ko'plab amaliy masalalar yechimni analitik ko'rinishda olib bo'lmaydigan differensial tenglamalarga keltiriladi. Bunday hollarda taqribiy yechish usullariga murojaat qilishga to'g'ri keladi. Hozirgi zamon hisoblash matematikasida differensial tenglamalarning yechimini istalgan

aniqlik bilan son ko‘rinishda olish mumkin bo‘lgan o‘nlab, hatto yuzlab taqribiy (sonli) yechish usullari yaratilgan.

Masalan, (1.6) tenglamaning (1.9) boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini birorta $[a;b]$ kesmada to‘rtinchi tartibli Runge-Kutta usulini qo‘llab topish uchun u quyidagi rekurrent formula ko‘rinishda berilgan diskret tenglama bilan almashtiriladi:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} \cdot (m_1 + 2 \cdot m_2 + 2 \cdot m_3 + m_4), \quad (1.10)$$

bu yerda $m_1 = f(x_k, y_k)$; $m_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + m_1 \cdot \frac{h}{2}\right)$; $m_3 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + m_2 \cdot \frac{h}{2}\right)$; $m_4 = f(x_k + h, y_k + m_3 \cdot h)$; $h = \frac{b-a}{n}$ – integrallash qadami; n – integrallash oralig‘ining bo‘linish nuqtalari soni; $x_k = a + k \cdot h$ – bo‘linish (integrallash) nuqtasi; y_k – yechimning x_k nuqtadagi taqribiy qiymati; $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

1.3. Birinchi tartibli differensial tenglamalarning normal sistemasi

Birinchi tartibli n ta differensial tenglamalarning normal sistemasi va berilgan boshlang‘ich shartlar umumiy holda quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \quad (1.11)$$

$$y_1(x_0) = y_{1,0}, \quad y_2(x_0) = y_{2,0}, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = y_{n,0}, \quad (1.12)$$

bu yerda $y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{n,0}$ - berilgan sonlar.

Berilgan (1.11) sistemaning (1.12) boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topish differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi deb ataladi.

Birinchi tartibli n ta differensial tenglamalarning normal sistemasi (1.11) ning umumiy yechimi quyidagi ko‘rinishda topiladi:

$$\begin{cases} y_1(x) = \varphi_1(x, c_1, c_2, \dots, c_n), \\ y_2(x) = \varphi_2(x, c_1, c_2, \dots, c_n), \\ \dots \\ y_n(x) = \varphi_n(x, c_1, c_2, \dots, c_n), \end{cases} \quad (1.13)$$

bu yerda c_1, c_2, \dots, c_n - o'zgarmaslar.

Differensial tenglamalar sistemasi (1.11) va berilgan boshlang'ich shartlar (1.12) ni vektor shaklida ifodalash mumkin:

$$\mathbf{Y}'(x) = \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{F}(x, \mathbf{y}), \quad (1.14)$$

$$\mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{Y}_0 \quad (1.15)$$

bu yerda

$\mathbf{Y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ - koordinatalari (tashkil etuvchilari) qidirilayotgan yechimlardan iborat vektor funksiya;

$\mathbf{Y}_0 = (y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{n,0})$ - koordinatalari berilgan boshlang'ich shartlardan iborat vektor;

$\mathbf{F}(x, \mathbf{y}) = (f_1(x, y_1, \dots, y_n), f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n))$ - koordinatalari berilgan tenglamalar sistemasining o'ng tomonida turgan funksiyalardan iborat vektor funksiya.

1.4. O'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi

Agar $f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ funksiyalar izlanayotgan $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funksiyalarga nisbatan chiziqli bo'lsa, differensial tenglamalarning normal sistemasi (1.11) chiziqli sistema deyiladi. Bu ta'rifdan chiziqli va bir jinsli bo'lmagan sistema ushbu ko'rinishda bo'lishi kelib chiqadi:

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11} \cdot y_1 + a_{12} \cdot y_2 + \dots + a_{1n} \cdot y_n + b_1, \\ y_2'(x) = a_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2 + \dots + a_{2n} \cdot y_n + b_2, \\ \dots \\ y_n'(x) = a_{n1} \cdot y_1 + a_{n2} \cdot y_2 + \dots + a_{nn} \cdot y_n + b_n, \end{cases} \quad (1.16)$$

bu yerda barcha a_{ik} koeffitsiyentlar va $b_i (i, k = 1, 2, \dots, n)$ «ozod hadlar», umuman olganda x ning ixtiyoriy funksiyalari bo‘lishi mumkin.

Vektor-matrisa belgilashlardan foydalansak (1.16) sistema quyidagi ixcham ko‘rinishda yoziladi:

$$\mathbf{Y}'(x) = A \cdot \mathbf{Y} + B, \quad (1.17)$$

bu yerda $\mathbf{Y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))^T$, $\mathbf{Y}'(x) = (y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x))^T$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$$

Hosil qilingan (1.17) tenglik *chiziqli differensial tenglamalar sistemasining vektor-matrisa shaklidagi yozuvi* deyiladi.

Agar (1.16) sistemada barcha a_{ik} va b_i lar o‘zgarmas bo‘lsa, ya’ni $a_{ik} = \text{const}$ va $b_i = \text{const} (i, k = 1, 2, \dots, n)$ bo‘lganda u o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi deb ataladi, $b_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ bo‘lganda esa *o‘zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi* nomi bilan yuritiladi.

1.5. Yuqori tartibli differensial tenglamalar haqida asosiy tushunchalar

Birinchi tartibdan yuqori tartibga ega bo‘lgan barcha differensial tenglamalar yuqori tartibli differensial tenglamalar deyiladi. Umumiy holda n – tartibli differensial tenglama quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$\mathbf{F}(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.18)$$

yoki agar mumkin bo‘lsa, yuqori hosilaga nisbatan yechilgan ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1.19)$$

Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi bitta o‘zgarmasga bog‘liq bo‘lar edi, n - tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi esa n ta o‘zgarmasga bog‘liq bo‘ladi:

$$y(x) = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (1.20)$$

va u n tartibli differensial tenglamaning yechimlari to'plamini tashkil etadi.

Umumiy yechimdan birorta xususiy yechimni olish uchun izlanayotgan funksiyaning (yechimning) va uning $(n-1)$ - tartibgacha barcha hosilalarining mumkin bo'lgan $x = x_0$ nuqtadagi qiymatlari berilishi lozim, ya'ni $x = x_0$ da

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (1.21)$$

sonlar (boshlang'ich shartlar) beriladi.

Tartibi n ga teng bo'lgan (1.19) tenglamaning (1.21) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topish *Koshi masalasi* nomi bilan yuritiladi.

Umumiy yechimning oshkormas ko'rinishini aniqlovchi

$$\Phi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \quad (1.22)$$

tenglama (1.19) tenglamaning *umumiy integrali* deb ataladi.

1.6. Yuqori tartibli differensial tenglamalarni birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasiga keltirish

Birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasini yuqori tartibli bitta differensial tenglamadan yordamchi funksiyalar kiritish yo'li bilan hosil qilish mumkin. Haqiqatan ham

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad (1.23)$$

tenglama yuqori hosilaga nisbatan yechilgan n - tartibli differensial tenglama bo'lsin. Quyidagi belgilashlarni (funksiyalarni) kiritamiz:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_1(x), \\ y'(x) &= y'_1(x) = y_2(x), \\ y''(x) &= y'_2(x) = y_3(x), \\ &\dots \\ y^{(n-1)}(x) &= y'_{n-1}(x) = y_n, \\ y^n(x) &= y'_n(x) = f(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Natijada n – tartibli bitta tenglamadan quyidagi birinchi tartibli n ta differensial tenglamalarning normal sistemasi hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2, \\ y_2'(x) = y_3, \\ \dots \\ y_n'(x) = f(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \end{cases} \quad (1.25)$$

Yuqorida berilgan boshlang‘ich shartlar esa ((1.21) tengliklarga qarang), (1.25) sistema uchun quyidagicha yoziladi:

$$y_1(x_0) = y_{0,1}, y_2(x_0) = y_{0,2}, \dots, y_n(x_0) = y_{0,n}, \quad (1.26)$$

Masalan, beshinchi tartibli o‘zgarmas koeffisientli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglama uchun Koshi masalasi berilgan bo‘lsin:

$$y^V - y^{IV} = x \cdot e^x - 1, \quad (1.27)$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = 2, y'''(0) = 0, y^{IV}(0) = 3 \quad (1.28)$$

Quyidagi funksiyalarni kiritamiz:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_1(x), \\ y'(x) &= y_1'(x) = y_2(x), \\ y''(x) &= y_2'(x) = y_3(x), \\ y'''(x) &= y_3'(x) = y_4(x), \\ y^{IV}(x) &= y_4'(x) = y_5(x). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Bu yerda $y^V - y^{IV} = x \cdot e^x - 1$ va $y^V(x) = y_5'(x)$ ekanligini e‘tiborga olib berilgan masalani birinchi tartibli differensial tenglamalarning normal sistemasi uchun Koshi masalasiga keltiramiz va u quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = y_3(x), \\ y_3'(x) = y_4(x), \\ y_4'(x) = y_5(x), \\ y_5'(x) = y_5(x) + x \cdot e^x - 1 \end{cases} \quad (1.30)$$

$$y_1(0) = 1, y_2(0) = 1, y_3(0) = 2, y_4(0) = 0, y_5(0) = 3 \quad (1.31)$$

2-BOB.

ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMA VA ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR SISTEMASINI MATHCAD MATEMATIK PAKETI YORDAMIDA YECHISH

2.1. Chegaraviy masalalar haqida boshlang'ich ma'lumotlar

Yuqori tartibli chiziqli o'zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan oddiy differensial tenglamalar. Bunday tenglamalar mos ravishda quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n \cdot y = 0 \quad (2.1)$$

$$a_0 y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n \cdot y = f(x) \quad (2.2)$$

bu yerda a_0, a_1, \dots, a_n – ixtiyoriy haqiqiy sonlar (ya'ni $a_i \in R, i = 0, 1, 2, \dots, n$); $n > 1, a_0 \neq 0$

Masalan, $y''' + 2 \cdot y'' - y' - 2y = 0$ tenglama uchinchi tartibli chiziqli o'zgar-mas koeffitsentli bir jinsli differensial tenglamadir.

Ushbu $y'' + 2y + y = x^2 \cdot e^{-x} \cdot \cos x$ tenglama ikkinchi tartibli chiziqli o'zgar-mas koeffitsentli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaga misol bo'la oladi.

Yuqori tartibli chiziqli o'zgaruvchi koeffitsentli bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan oddiy differensial tenglamalar. Ushbu turga mansub bo'lgan differensial tenglamalar umumiy holda quyidagicha beriladi:

$$p_0(x) \cdot y^{(n)} + p_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) \cdot y = 0, \quad (2.3)$$

$$p_0(x) \cdot y^{(n)} + p_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) \cdot y = f(x) \quad (2.4)$$

bu yerda $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x), f(x)$ – argument x ning ixtiyoriy uzluksiz funksiya-lari ($x \in [a; b]$).

Masalan, $x^2 \cdot y^{(IV)} + 4x \cdot y''' + 2 \cdot y'' = 0$, $y'' = e^{-xy}$ va $x \cdot y'' - (1 + 2x^2) \cdot y' = 4x^3 \cdot e^{-x^2}$ tenglamalar o'zgaruvchi koeffitsentli chiziqli bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalardir.

Chegaraviy masala. Amaliyotda shunday masalalar uchraydiki, ularning matematik modeli sifatida hosil qilingan differensial tenglamalarning umumiy

yechimidan xususiy yechimini ajratib olish uchun Koshi masalasidan emas, balki izlanayotgan funksiya va uning hosilasini integrallash oralig'ining boshlang'ich va oxirgi nuqtasidagi qiymatlaridan foydalaniladi. Bunday masalalar chegaraviy masalalar nomi bilan yuritiladi.

Ikkinchi tartibli chiziqli o'zgaruvchi koeffitsiyentli va bir jinsli bo'lgan differensial tenglama

$$y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = 0 \quad (2.5)$$

berilgan bo'lsin. Bu yerda $p_1(x), p_2(x)$ funksiyalar har qanday $x \in [a; b]$ uchun uzluksiz funksiyalar deb faraz qilinadi. Bunday tenglamalar uchun eng sodda chegaraviy shartlar umumiy holda quyidagi ko'rinishda beriladi:

$$\alpha_0 \cdot y(a) + \beta_0 \cdot y'(a) = k_0, \quad \alpha_1 \cdot y(b) + \beta_1 \cdot y'(b) = k_1, \quad (2.6)$$

bu yerda: $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, k_0, k_1$ lar berilgan o'zgarimas sonlar va ular bir vaqtda nolga teng bo'la olmaydilar.

Agar $k_0 = k_1 = 0$ bo'lsa, berilgan chegaraviy shartlar bir jinsli deb ataladi.

Masalan, quyidagilar eng sodda bir jinsli chegaraviy shartlardir:

- $y(a) = y(b) = 0;$
- $\alpha \cdot y(a) = y'(a), y'(b) = -\beta \cdot y(b); \quad \alpha, \beta > 0;$
- $y'(a) = y'(b) = 0;$
- $y(a) = y(b), y'(a) = y'(b)$ (2.7)

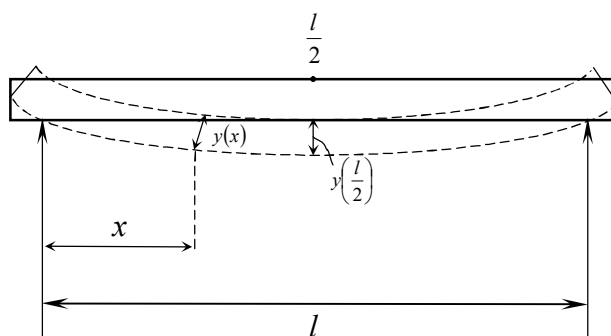
Umuman olganda chegaraviy masalalar har doim ham yechimga ega bo'lavermaydi.

Ikkita uchidan sharnirli mahkamlangan po'lat balka (2.1-rasm) o'z og'irlik kuchi ta'sirida egilish qonuniyatini o'rganish quyidagi ikkinchi tartibli differensial tenglamani

$$y'' + \frac{\omega}{2E \cdot I} \cdot x(l-x) = 0 \quad (2.8)$$

$y(0) = 0$ va $y(l) = 0$ chegaraviy shartlar asosida yechishga keltiriladi.

Bu yerda ω - balkaning solishtirma chiziqli massasi; l - balkaning uzunligi; E – elastiklik moduli; I - balka ko'ndalang kesimining inersiya momenti; $u(x)$ - balkaning x nuqtadagi egilish miqdori.



2.1-rasm. Ikki uchidan sharnirli mahkamlangan po‘lat balka.

2.2. Oddiy differensial tenglama va oddiy differensial tenglamalar sistemasini yechishga mo‘ljallangan Mathcad dasturi tarkibidagi standart funksiyalar

Ko‘plab differensial tenglamalar va differensial tenglamalar sistemasining yechimlarini analitik (aniq, ya’ni funksiya ko‘rinishda) topish mumkin. Qaralayotgan fizik jarayonni tahlil qilish, shular asosida ma’lum xulosalarga kelish uchun berilgan boshlang‘ich ma’lumotlarning turli qiymatlarida, olingan analitik yechimning sonli qiymatlarini topish, ular asosida grafiklar qurish ehtiyoji tug‘iladi.

Bulardan tashqari shunday differensial tenglamalar va differensial tenglamalar sistemalari mavjudki, ularning yechimini analitik ko‘rinishda topib bo‘lmaydi. Shuning uchun ham differensial tenglamalarni integrallashning taqribiy usullari keng tarqalgan.

Mathcad dasturi tarkibida birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar, yuqori tartibli oddiy differensial tenglamalar va birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini hamda chegaraviy masalalarni sonli yechishga mo‘ljallangan o‘ndan ortiq standart funksiyalar mavjud bo‘lib, ularning asosiylari quyida keltirilgan.

- ***rkfixed*** ($u, x1, x2, m, D$) – bu funksiya birinchi tartibli oddiy differensial tenglama yoki birinchi tartibli n ta oddiy differensial tenglamalar sistemasi

uchun Koshi masalasini berilgan kesmada to‘rtinchi tartibli Runge-Kutta usulini qo‘llab, integrallash qadami o‘zgarmas bo‘lgan hol uchun yechadi.

Bu yerda shuni ta’kidlash lozimki, **rkfixed** funksiyasi yordamida olingan sonli yechim $(m+1)$ satr va $(n+1)$ ta ustunga ega bo‘lgan matrisaning elementlari ko‘rinishida beriladi. Matrisaning birinchi ustuni argument x ning integrallash oralig‘iga tegishli qiymatlari, ya’ni $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ larni (boshlang‘ich va integrallash nuqtalarini) o‘z ichiga oladi. Ikkinchi ustunda $u_1(x)$ funksiyaning (ya’ni $u(x)$ funksiyaning), uchinchi ustunda $u_2(x)$ funksiyaning (ya’ni $y'(x)$ funksiyaning), to‘rtinchi ustunda $u_3(x)$ funksiyaning (ya’ni $y''(x)$ funksiyaning) va hokazo oxirgi ustunda $u_n(x)$ funksiyaning (ya’ni $u^{(n-1)}(x)$ funksiyaning) x ning yuqoridagi qiymatlariga mos qiymatlari joylashgan bo‘ladi.

Agar differensial tenglama birinchi tartibli bo‘lsa, olingan sonli yechim ikkita ustunli matrisa elementlari shaklida ifodalanadi. Birinchi ustunda argument x ning qiymatlari ($x_i = x_0 + i \cdot h$, $h = (x_2 - x_1)/m$), ikkinchi ustunda esa ana shu qiymatlarga mos yechimning qiymatlari $y_i = y(x_i)$ joy oladi ($i = 0, 1, \dots, m$).

- **Rkadapt** ($u, x1, x2, m, D$) - bu funksiya birinchi tartibli oddiy differensial tenglama yoki birinchi tartibli n ta oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini berilgan kesmada to‘rtinchi tartibli Runge-Kutta usulini qo‘llab, integrallash qadamini avtomatik tanlash yo‘li bilan yechadi.
- **Bulstoer** ($u, x1, x2, m, D$) - bu funksiya birinchi tartibli oddiy differensial tenglama yoki birinchi tartibli n ta oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini berilgan kesmada Bulirish-Shter usulini qo‘llab, integrallash qadami o‘zgarmas bo‘lgan hol uchun yechadi.

Ushbu **rkfixed**, **Rkadapt** va **Bulstoer** funksiyalarining argumentlari bir xil ma’noni anglatadi va masalaning matematik qo‘yilishi bo‘yicha quyidagicha aniqlanadi: $y = (y_{0,1}, y_{0,2}, \dots, y_{0,n})^T$ - komponentlari berilgan boshlang‘ich shartlardan tashkil topgan vektor funksiya; $x1, x2$ - mos ravishda integrallash oralig‘ining boshlang‘ich va oxirgi qiymati; m - integrallash nuqtalari soni,

ya'ni integrallash oralig'i $[x_1; x_2]$ ning o'zgarish qadam bilan bo'linish nuqtalari soni;

$$D(x, y) = (f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n))^T \quad (2.9)$$

komponentlari (tashkil etuvchilari) differensial tenglamalar sistemasining o'ng tomonida turgan funksiyalardan iborat bo'lgan n ta satr va 1 ta ustundan iborat vektor funksiya; x - skalyar miqdor; $u = u(x)$ – izlanayotgan vektor funksiya.

Birinchi tartibli $y' = f(x, y)$ tenglama uchun $D(x, u)$ funksiya

$$D(x, y) = f(x, y) \quad (2.10)$$

ko'rinishda yoziladi.

2.3. Odesolve va rkfixed funksiyalari yordamida ixtiyoriy tartibli oddiy differensial tenglama va birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini yechish texnologiyasi

Mathcad dasturi tarkibida n –tartibli ($n = 1, 2, \dots$) oddiy differensial tenglamalar va birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasini sonli yechish uchun mo'ljallangan **Odesolve** funksiyasi mavjud bo'lib, u umumiy holda quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\mathbf{Odesolve} ([y], x, b, [m])$$

Bu yerda y – berilishi shart bo'lmagan va nomi qidirilayotgan funksiya nomi-dan, koordinatalari berilgan boshlang'ich shartlardan iborat vektor (oddiy differensial tenglamalar sistemasini yechishda uning berilishi shart); x – erkli o'zgaruvchi; b - integrallash oralig'ining oxirgi qiymati; t – berilishi shart bo'lmagan, qiymati esa integrallash qadamlari sonini bildiruvchi butun son (integrallash oralig'i $[a; b]$ ni bo'linishlar soni) bo'lib, sonli yechimni yuqori aniqlik bilan olish uchun xizmat qiladi. (t ning qiymati ortishi bilan aniqlik ham ortadi, lekin shu bilan birga, integrallash uchun sarflanadigan kompyuter vaqti ham ortib boradi).

Odesolve funksiyasi **Given** kalit so'z bilan birgalikda ishlatiladi (**Given** – berilgan, berilgan ma'lumotlar ma'nolarini bildiradi). Amaliyotda **Given** va

Odesolve juftlik oralig'iga berilgan differensial tenglama yoki ularni sistemasi va berilgan boshlang'ich shartlar yoziladi (tenglik belgisini yozishda mantiqiy amal belgilari panelidagi tenglik belgisidan yoki **[Ctrl ++]** buyruqdan foydalaniladi). Tenglama va boshlang'ich shartlar tarkibiga kiruvchi kattaliklarning qiymatlari **Given** kalit so'zdan avval sonli tenglik belgisi (**: =**) yordamida kiritiladi.

Masalan, (1.18) va (1.21) tengliklar bilan berilgan p – tartibli differensial tenglama uchun Koshi masalasining **Given – Odesolve** juftligi yordamida yechish algoritmi umumiy holda quyidagi ko'rinishda yozilishi mumkin:

$$\begin{aligned}
 & x_0 := a \\
 \mathbf{Given} \quad & F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \\
 & y(x_0) = y_0 \quad y''(x_0) = y'_0 \quad \dots \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \\
 & y := \mathbf{Odesolve}(x, b)
 \end{aligned}$$

Vektor shaklida (1.14) va (1.15) tengliklar bilan berilgan p ta birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini yechish algoritmi quyidagi amallar ketma-ketligidan iborat bo'ladi:

$$\begin{aligned}
 & x_0 := a \\
 \mathbf{Given} \quad & Y'(x) = F(x, y) \\
 & Y(x_0) = Y_0 \\
 & Y := \mathbf{Odesolve}(Y_0, x, b)
 \end{aligned}$$

Hosila belgisini ko'rsatish uchun klaviaturaning chap tomonidagi ikkinchi qatorning birinchi tugmasidan (' belgisidan) yoki hisoblash panelidagi va ushbu

$$\frac{d}{dx} \quad \frac{d^n}{dx^n}$$

operatorlarning biridan foydalanish yoki bu operatorlarga mos **[Shift + /]** va **[Ctrl + Shift + /]** buyruqlardan birini klaviatura yordamida kiritish kifoya.

Odesolve va rkfixed funksiyalarni qo'llashga doir misollar

1-misol. **Odesolve** va **rkfixed** funksiyalari yordamida berilgan birinchi tartibli differensial tenglama uchun Koshi masalasini yeching. Topilgan sonli yechimni berilgan analitik (aniq) yechim bilan solishtiring.

$$(y \cdot \cos(y/x) - x) dx - x \cdot \cos(y/x) dy = 0,$$

$$y_{\text{aniq}}(x) = x \cdot \arcsin \left(\ln \left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} / x \right) \right), \quad y = \frac{\pi}{3}, \quad x \in [1; 6]$$

Yechish. 1. Given-Odesolve juftligi yordamida yechish

Avval berilgan tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$x \cdot \cos(y/x) \cdot y' + x - y \cdot \cos(y/x) = 0$$

Algoritm:

$$a := 1 \quad b := 6$$

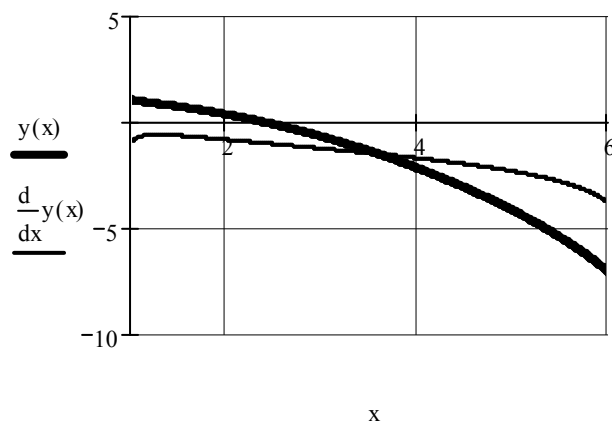
$$\text{Given} \quad x \cdot \cos(y(x)/x) \cdot y'(x) + x - y(x) \cdot \cos(y(x)/x) = 0 \quad y(a) = \frac{\pi}{3}$$

$$y := \text{Odesolve}(x, b)$$

Algoritmning ikkinchi bandini ushbu ko‘rinishda ifodalasa ham bo‘lar edi:

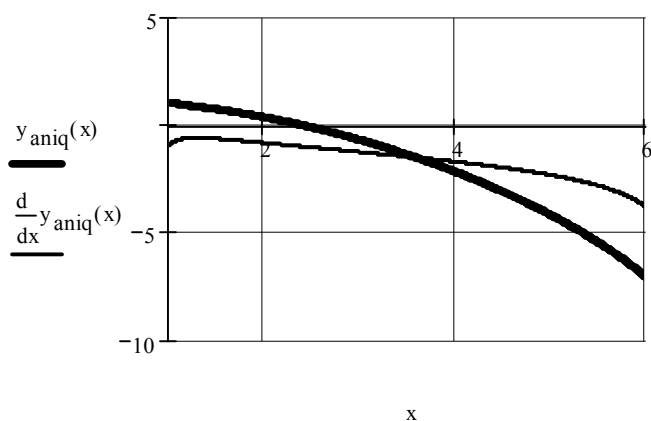
$$\text{Given} \quad x \cdot \cos(y(x)/x) \cdot \frac{d}{dx} y(x) + x - y(x) \cdot \cos(y(x)/x) = 0$$

Olingan sonli yechim va berilgan analitik yechimlarning hamda ularning birinchi tartibli hosilalarining grafiklari 2.2- va 2.3-rasmda berilgan.



2.2-rasm. Berilgan masala sonli yechimi va uning birinchi tartibli hosilasi grafiklari.

$$x := 1, 1.025 \dots 5$$



2.3-rasm. Analitik yechim va uning hosilasi grafiklari.

$y(x) =$	$y_{\text{aniq}}(x) =$	$\frac{d}{dx}y(x) =$	$\frac{d}{dx}y_{\text{aniq}}(x) =$
1.047	1.047	-0.885	-0.953
1.004	1.004	-0.796	-0.779
0.968	0.968	-0.685	-0.689
0.935	0.935	-0.643	-0.642
0.903	0.903	-0.617	-0.617
0.873	0.873	-0.607	-0.607
0.843	0.843	-0.606	-0.606
0.812	0.812	-0.611	-0.611
0.781	0.781	-0.621	-0.621
0.75	0.75	-0.633	-0.633
0.718	0.718	-0.648	-0.648
0.685	0.685	-0.664	-0.664
0.651	0.651	-0.682	-0.682
0.617	0.617	-0.7	-0.7
0.581	0.581	-0.719	-0.719
0.545	0.545	-0.739	-0.739
0.508	0.508	-0.759	-0.759
0.469	0.469	-0.779	-0.779

2.4-rasm. Taqribiy va aniq yechimlarning son qiymatlari

Keltirilgan natijalarni solishtirib, *Odesolve* funksiyasi yordamida sonli yechim yuqori aniqlik bilan topilganiga ishonch hosil qilish mumkin.

2. Qo‘yilgan masalani *rkfixed* funksiyasi yordamida yechish uchun berilgan tenglamani birinchi tartibli hosilaga nisbatan yechilgan ko‘rinishda yozib olamiz:

$$y'(x) = \frac{y \cdot \cos(y/x) - x}{x \cdot \cos(y/x)}$$

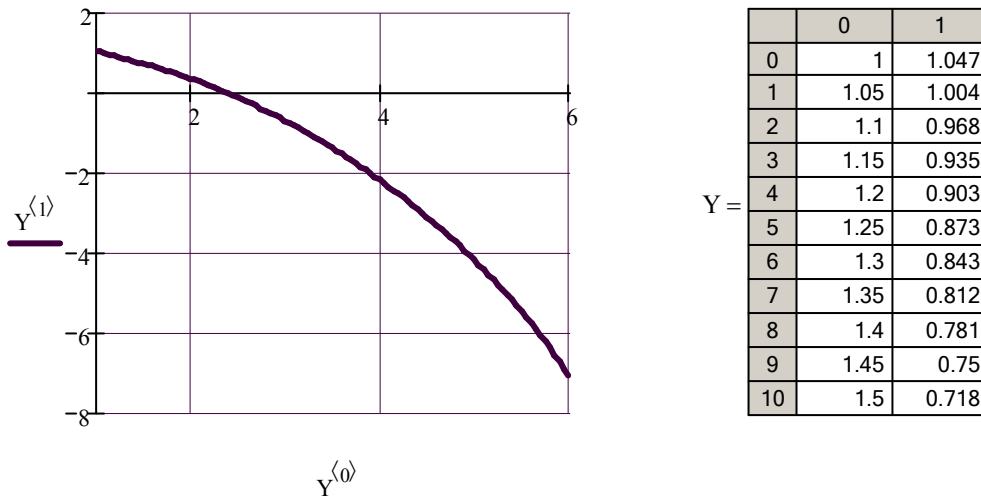
U holda algoritm quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:

$$D(x, y) := \frac{y \cdot \cos(y/x) - x}{x \cdot \cos(y/x)} \quad a := 1 \quad b := 6$$

$$y_0 := \frac{\pi}{3} \quad m := 100$$

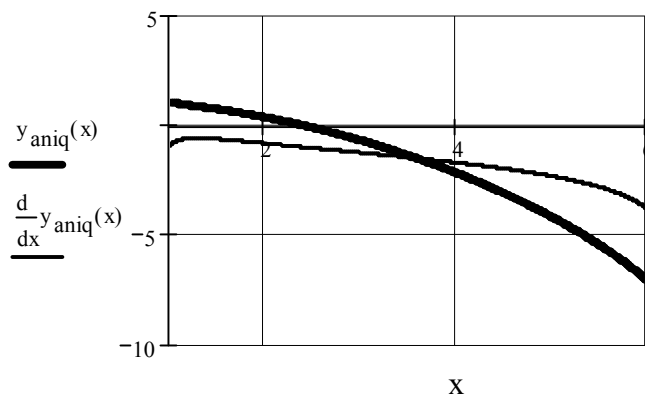
$$Y := \text{rkfixed}[y_0, a, b, m, D]$$

Olingan natijalar quyidagi grafik va jadvallarda berilgan:



2.5-rasm. *rkfixed* funksiyasi yordamida olingan sonli yechimning grafigi

$$y_{aniq}(x) = x \cdot a \sin \left(\ln \left(e^{\frac{\sqrt{3}}{2}} / x \right) \right)$$



2.6- rasm. Aniq yechim va uning birinchi tartibli hosilasi grafiklari.

2- misol. *Odesolve* va *rkfixed* funksiyalari yordamida berilgan ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama uchun Koshi masalasini berilgan oraliqda yeching. Topilgan sonli yechimni berilgan analitik yechim bilan solishtiring.

$$y'' + 4 \cdot y = (6x + 5)e^{-2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.75, \quad x \in [0; 6]$$

$$y_{aniq}(x) = -\cos 2x + \sin 2x + \left(\frac{3x}{4} + 1 \right) \cdot e^{-2x},$$

Yechish: 1. *Given* – *Odesolve* juftligi yordamida yechish algoritmi:

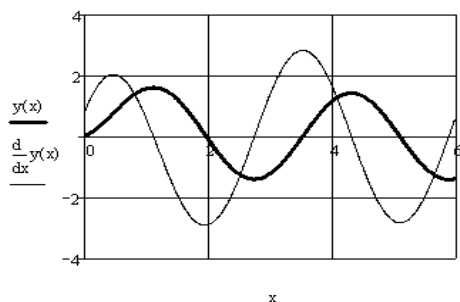
$$a := 0 \quad b := 6$$

$$\text{Given } \frac{d^2}{dx^2} y(x) + 4 \cdot y(x) = (6 \cdot x + 5) \cdot e^{-2 \cdot x}$$

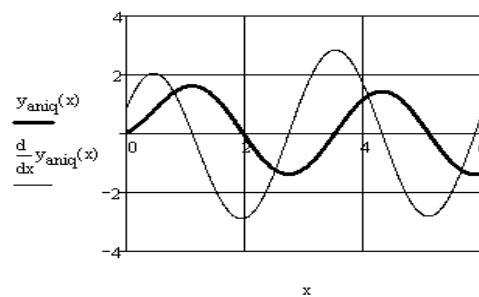
$$y(a) = 0 \quad y'(a) = 0.75$$

$$y := \text{Odesolve}(x, b)$$

Olingan sonli (taqribiy) yechim va berilgan analitik (aniq) yechimlarning grafiklari 2.7- va 2.8-rasmlarda berilgan.



2.7-rasm. Topilgan taqribiy yechim va uning birinchi tartibli hosilasi grafiklari.



2.8-rasm. Aniq yechim va uning birinchi tartibli hosilasi grafiklari.

2. Sonli yechimni *rkfixed* funksiyasi yordamida topish algoritmi:

Ushbu $y(x) = y_1(x)$; $y'(x) = y_2(x)$ belgilarni kiritib, berilgan masalani quyidagi birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasiga keltirib olamiz:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = -4 \cdot y_1(x) + (6 \cdot x + 5) \cdot e^{-2x}, \end{cases} \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0.75, \quad x \in [0; 6]$$

Algoritm:

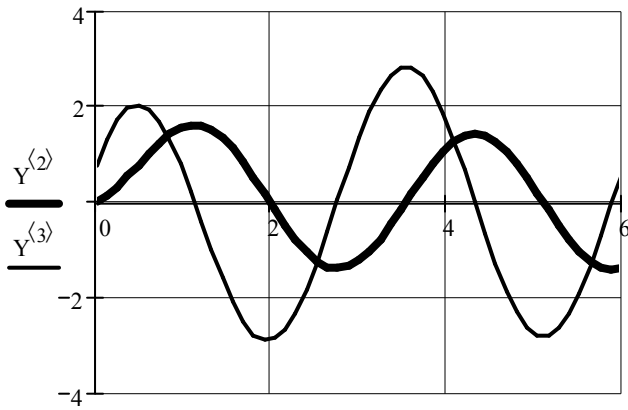
ORIGIN := 1

$$y := (0 \quad 0.75)^T$$

$$D(x, y) := \begin{bmatrix} y_2 \\ -4 \cdot y_1 + (6 \cdot x + 5) \cdot e^{-2x} \end{bmatrix}$$

$$Y := \text{rkfixed}(y, 0, 6, 30, D)$$

Topilgan sonli yechimlarning grafiklari va ularning sonli qiymatlari 2.9- va 2.10 - rasmlarda keltirilgan.



2.9-rasm. Koshi masalasining *rkfixed* funksiya yordamida olingan sonli yechimlari grafigi.

	0	1	2
0	0	0	0.75
1	0.12	0.124	1.293
2	0.24	0.305	1.701
3	0.36	0.526	1.951
4	0.48	0.766	2.031
5	0.6	1.006	1.941
6	0.72	1.226	1.692
7	0.84	1.407	1.302
8	0.96	1.534	0.801
9	1.08	1.596	0.221

2.10-rasm. Argument x va unga mos $y(x)$, $y'(x)$ larning qiymatlari

Yuqorida hosil qilingan birinchi tartibli tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini *Odesolve* funksiyasi yordamida yechish algoritmi quyidagi ko‘rinishlarning birida berilishi mumkin:

Given

$$y1'(x) = y2(x) \quad y2'(x) = -4 \cdot y1(x) + (6 \cdot x + 5) \cdot e^{-2x}$$

$$y1(0) = 0 \quad y2(0) = 0.75$$

$$\begin{bmatrix} y1 \\ y2 \end{bmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{bmatrix} y1 \\ y2 \end{bmatrix}, x, 6 \right] \quad \text{yoki}$$

Given

$$\frac{d}{dx} y1(x) = y2(x)$$

$$\frac{d}{dx} y2(x) = -4 \cdot y1(x) + (6 \cdot x + 5) \cdot e^{-2x}$$

$$y1(0) = 0 \quad y2(0) = 0.75$$

$$\begin{bmatrix} y1 \\ y2 \end{bmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{bmatrix} y1 \\ y2 \end{bmatrix}, x, 6 \right]$$

3-misol. *Odesolve* va *rkfixed* funksiyalari yordamida berilgan to‘rtinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli bo‘lmagan ODT uchun Koshi masalasini yeching. Topilgan sonli yechimni berilgan analitik yechim bilan solishtiring.

$$y''''(x) + 2 \cdot k^2 \cdot y''(x) + k^4 \cdot y(x) = \cos(k \cdot x),$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 2 \cdot k^3, \quad x \in [0; 15]$$

$$y_{\text{aniq}}(x) = \left(1 + \frac{x}{8k^3}\right) \cdot \sin(k \cdot x) - \left(k + \frac{x}{8k^2}\right) \cdot x \cdot \cos(k \cdot x)$$

Yechish. 1. Given – Odesolve juftligi yordamida yechish algoritmi ($k=0.5$ deb olamiz):

$$a := 0 \quad b := 15 \quad k := 0.5$$

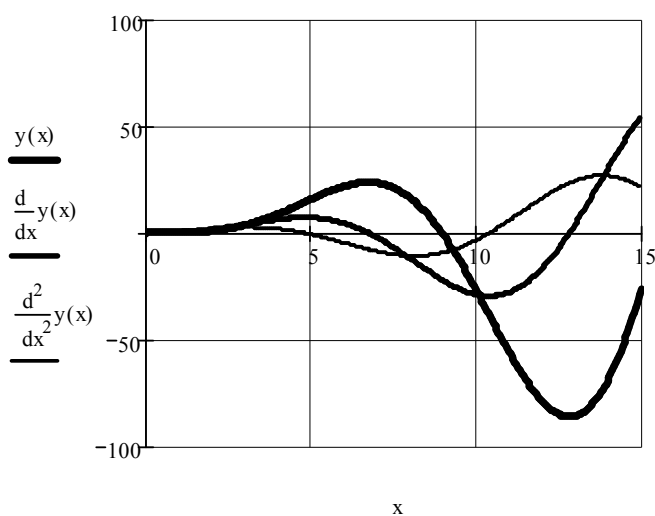
$$\text{Given} \quad \frac{d^4}{dx^4} y(x) + 2 \cdot k^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} y(x) + k^4 \cdot y(x) = \cos(k \cdot x)$$

$$y(a) = 0 \quad y'(a) = 0 \quad y''(a) = 0 \quad y'''(a) = 2 \cdot k^3$$

$$y := \text{Odesolve}(x, b)$$

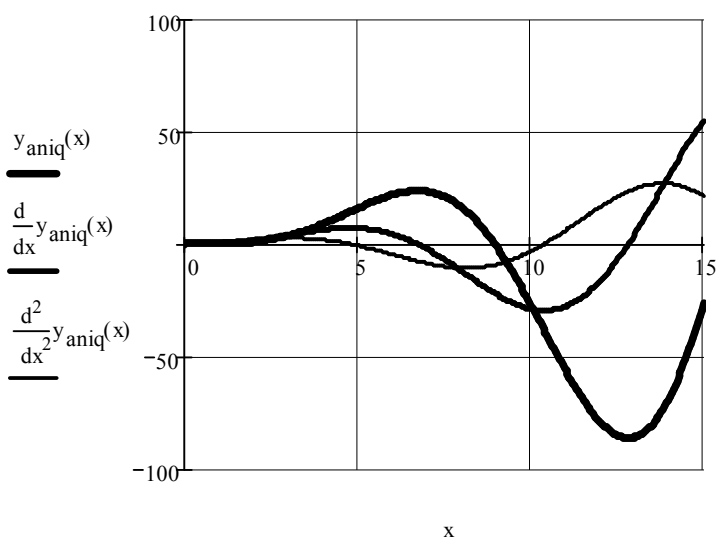
$$x := a, a + 0.05.. b$$

$$y(x) =$$



0
$5.468 \cdot 10^{-6}$
$4.582 \cdot 10^{-5}$
$1.616 \cdot 10^{-4}$
$3.996 \cdot 10^{-4}$
$8.125 \cdot 10^{-4}$
$1.459 \cdot 10^{-3}$
$2.404 \cdot 10^{-3}$
$3.718 \cdot 10^{-3}$
$5.478 \cdot 10^{-3}$
$7.764 \cdot 10^{-3}$
0.011
0.014
0.019

2.11-rasm. Olingan sonli yechimlarning grafiklari.



$y_{\text{aniq}}(x) =$
0
$5.468 \cdot 10^{-6}$
$4.582 \cdot 10^{-5}$
$1.616 \cdot 10^{-4}$
$3.996 \cdot 10^{-4}$
$8.125 \cdot 10^{-4}$
$1.459 \cdot 10^{-3}$
$2.404 \cdot 10^{-3}$
$3.718 \cdot 10^{-3}$
$5.478 \cdot 10^{-3}$
$7.764 \cdot 10^{-3}$
0.011
0.014
0.019

2.12-rasm. Berilgan aniq yechim va uning hosilalari grafiklari.

Topilgan sonli yechim va uning hosilalari grafiklari hamda aniq yechim va uning hosilalari grafiklari 2.11- va 2.12-rasmlarda tasvirlangan.

2. Qo'yilgan masala sonli yechimini *rkfixed* funksiyasi yordamida topish uchun ushbu

$$y(x) = y_1(x), \quad y'(x) = y_2(x), \quad y''(x) = y_3(x), \quad y'''(x) = y_4(x)$$

belgilashlarni kiritamiz. Natijada berilgan masala unga teng kuchli bo'lgan birinchi tartibli tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasiga keladi:

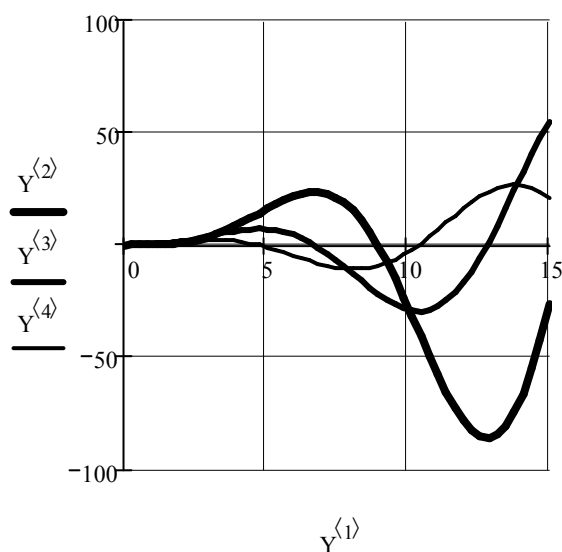
$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = y_3(x), \\ y_3'(x) = y_4(x), \\ y_4'(x) = \cos(kx) - 2 \cdot k^2 \cdot y_3(x) - k^4 \cdot y_1(x), \end{cases} \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = 0, \quad y_4(0) = 2 \cdot k^3$$

Hosil bo'lgan oxirgi sistemani yechish algoritmi:

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad a := 0 \quad b := 15 \quad m := 50 \quad k := 0.5 \quad y := (0 \ 0 \ 0 \ 2 \cdot k^3)^T$$

$$D(x, y) := \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \cos(k \cdot x) - 2 \cdot k^2 \cdot y_3 - k^4 \cdot y_1 \end{bmatrix} \quad Y := \text{rkfixed}(y, a, b, m, D)$$

Hisoblash natijalari 2.13 va 2.14-rasmlarda berilgan.



2.13-rasm. Topilgan sonli yechim va uning hosilalari grafiklari.

	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0.3	.462 · 10 ⁻³	0.016	0.119
3	0.6	0.014	0.08	0.321
4	0.9	0.057	0.216	0.595
5	1.2	0.153	0.442	0.922
6	1.5	0.332	0.772	1.28
7	1.8	0.627	1.211	1.645
8	2.1	1.07	1.757	1.988
9	2.4	1.691	2.399	2.28
10	2.7	2.516	3.117	2.493
11	3	3.566	3.884	2.6

2.14-rasm. Yechimlarning sonli qiymatlari.

2.4. Oddiy differensial tenglamalar va ularning sistemalarini berilgan bitta nuqtada yechish texnologiyasi. Mathcad dasturi tarkibidagi *rkadapt* va *bulstoer* funksiyalarining qo'llanilishi

Amaliyotda shunday masalalar uchraydiki ularni matematik modeli sifatida olingan oddiy differensial tenglamalar yoki ularning sistemasi integrallash oraliq'ini barcha nuqtalarda emas, balki berilgan bitta yoki bir nechta nuqtalarda yechiladi (masalan, oraliqning oxirgi nuqtasida). Bunday turga tegishli masalalardan keng tarqalgani dinamik sistemalarning attraktorlarini qidirish masalasidir (attraktor – bitta nuqtaga intilish ma'nosini bildiruvchi inglizcha so'z). Dinamik sistemalarni harakatini ifodalovchi differensial tenglamalarning turli xil nuqtalardan chiqqan (turli xil boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi) yechimlari, ya'ni harakat trayektoriyalari $t \rightarrow \infty$ da aynan bitta nuqtaga (attraktorga) asimptotik yaqinlashadi. Bunday nuqtalarni topish esa amaliy ahamiyatga egadir.

Mathcad dasturi tarkibida bu turdagi masalalarni yechishga mo'ljallangan *rkadapt* va *bulstoer* kabi standart funksiyalar mavjud. Ularning umumiy ko'rinishi va vazifalari quyida keltirilgan.

□ *rkadapt*($y, x1, x2, eps, D, kmax, h$) – bu funksiya oddiy differensial tenglama yoki ularning sistemasi uchun Koshi masalasini bitta nuqtada (yoki berilgan bir nechta nuqtalarda) integrallash qadamini avtomatik tanlash (o'zgaruvchi qadam) bilan Runge-Kutta usulini qo'llab yechadi;

□ *bulstoer*($y, x1, x2, eps, D, kmax, h$) – bu funksiya oddiy differensial tenglama yoki ularning sistemasi uchun Koshi masalasini bitta nuqtada (yoki berilgan bir nechta nuqtalarda). Bulirsh – Shter usulini qo'llab yechadi. Bu yerda *eps* – integrallash qadami o'zgaruvchi bo'lganda yechim xatoligini boshqarib turuvchi parametr (agar topilgan sonli yechim xatoligi *eps* dan katta bo'lsa, integrallash qadamining qiymati *h* – ning qiymatidan kichik bo'lguncha kichiklashadi); *kmax* – integrallash nuqtalarining maksimal soni (yechim hosil bo'ladigan matrisaning satrlari soni, integrallash nuqtasi bitta bo'lganda

$kmax=2$ bo‘ladi); h – integrallash qadamining mumkin bo‘lgan eng kichik qiymati.

Amaliy masalalarni yechishda eps va $kmax$ parametrlarning qiymatlari qaralayotgan har bir masalaning xususiyatiga qarab, foydalanuvchi tomonidan beriladi ($eps \approx 0.001$ va $kmax < 1000$ qiymatlardan foydalanish tavsiya etiladi).

Bu funksiyalarni qo‘llash natijasida elementlari erkli o‘zgaruvchi x ning qiymatlari va ularga mos topilgan sonli yechimlardan iborat $kmax$ ta satr va $n+1$ ta ustunga ega bo‘lgan ikki o‘lchovli matrisa hosil bo‘ladi (n – integrallash nuqtalari soni).

Mathcad dasturi tarkibidagi rkadapt va bulstoer funksiyalarni qo‘llashga doir misollar

1-Misol. Berilgan Koshi masalasini integrallash oralig‘ini oxirgi nuqtasidagi yechimini *rkadapt* va *bulstoer* funksiyalari yordamida toping

$$y'(x) + y(x) = 3 \cdot \sin(y(x) \cdot x/3), \quad y(0) = 2, \quad x \in [0; 50]$$

Yechish. ORIGIN :=1 kmax:=2 a:=0 b:=50 eps:=0.001 h:=0.01

$$y=2 \quad D(x,y):= -y+3\sin(x \cdot y/3)$$

$$rkadapt(y, a, b, eps, D, kmax, h) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 50 & 0.185 \end{pmatrix}$$

$$bulstoer(2, 0, 50, 0.0001, D, 2, 0.001) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 50 & 0.185 \end{pmatrix} \quad \text{yoki}$$

$$Y:=rkadapt(2, 0, 50, 0.001, D, 2, 0.01)$$

$$Z:=bulstoer(2, 0, 50, 0.0001, D, 2, 0.01)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 50 & 0.185 \end{pmatrix} \quad (Y^T)^{(2)} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0.185 \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 50 & 0.185 \end{pmatrix} \quad (Z^T)^{(2)} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0.185 \end{pmatrix}$$

Yuqoridagi masalani $[0;100]$ oralig‘iga tegishli butun nuqtalardagi yechimlarini quyidagicha topish mumkin:

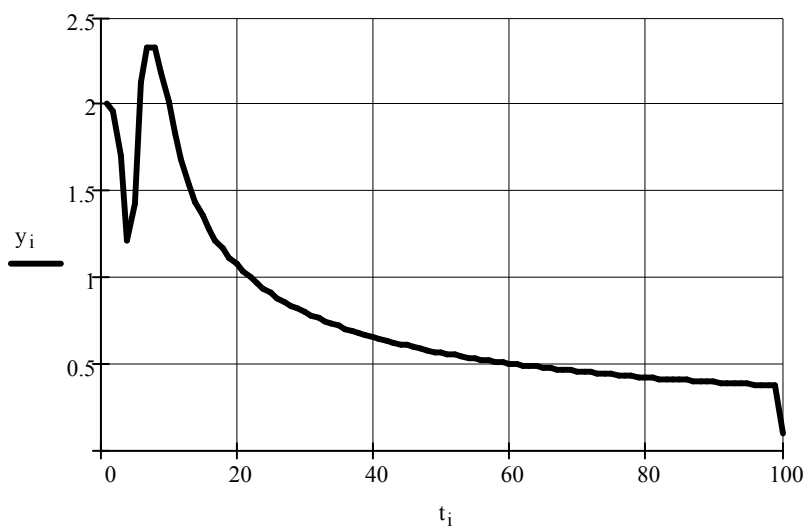
ORIGIN := 1

H :=1 (integrallash qadami); **a**:=0 (integrallash orarlig'ining boshlang'ich qiymati); **N** := 100 (integrallash nuqtalarining soni) **eps** := 0.0001 (integrallash aniqligi); **h** := 0.01 (integrallash qadamini mumkin bo'lgan eng kichik qiymati); **y**:= 2 (berilgan boshlang'ich shart); **D(x,y)**:= -y+3·sin(x·y/3) (berilgan tenglamaning o'ng tomonida turgan funksiya); **i**:=1..N; **t_i**:= i·H (elementlari berilgan oraliqqa tegishli butun sonlardan iborat massiv); **kmax**:=100 (integrallash nuqtalarining maksimal soni).

$$y_i := rkadapt (y, 0, t_i, 0.0001, D, 100, 0.01)_{i,2}$$

$$z_i := bulstoer (2, a, t_i, eps, D, kmax, h)_{i,2}$$

Olingan natijalardan ko'rinib turibdiki (2.15, 2.16 – rasmlar) **rkadapt** funksiyasi **bulstoer** funksiyasiga qaraganda qo'yilgan masalani aniqroq yechar ekan.



2.15-rasm. rkadapt funksiyasi yordamida olingan yechim grafigi.

Berilgan masalaning [0;80] kesmaning butun nuqtalarida **Odesolve**, **rkadapt** va **rkfixed** funksiyalari yordamida olingan yechimlar grafiklari 2.18-, 2.19-rasmlarda tasvirlangan. Natijalardan ko'rinib turibdiki, rkadapt funksiyasi qaralayotgan hol uchun yechimni to'g'ri topgan.

$$\text{Given} \quad y'(x) + y(x) - 3 \cdot \sin(x \cdot y(x)/3) = 0 \quad y(0) = 2$$

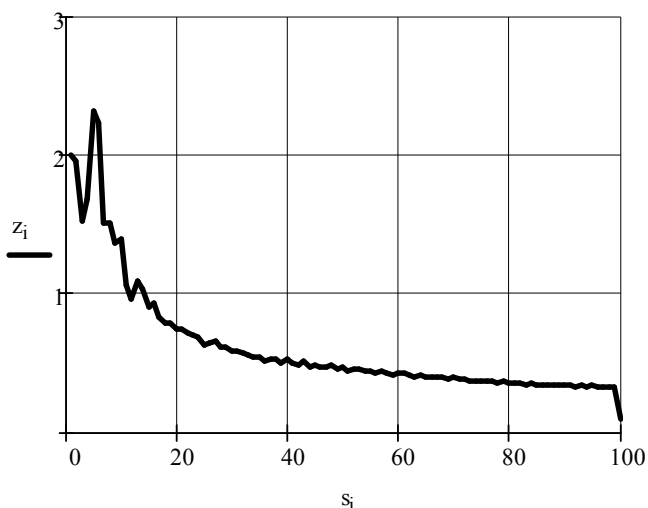
$$y := Odesolve(x, 80, 80)$$

ORIGIN:=1

$$D(x, y) := -y + 3 \cdot \sin(x \cdot y / 3)$$

$$Y := rkadapt(2, 0, 80, 0.0001, D, 80, 0.01)$$

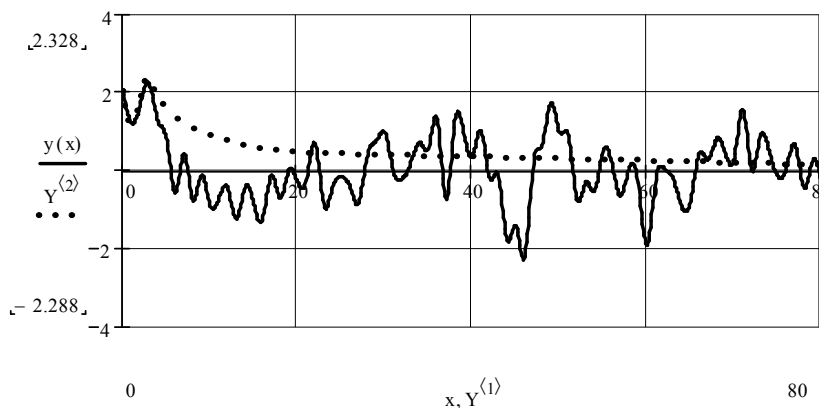
$$Z := rkfixed(2, 0, 80, 80, D)$$



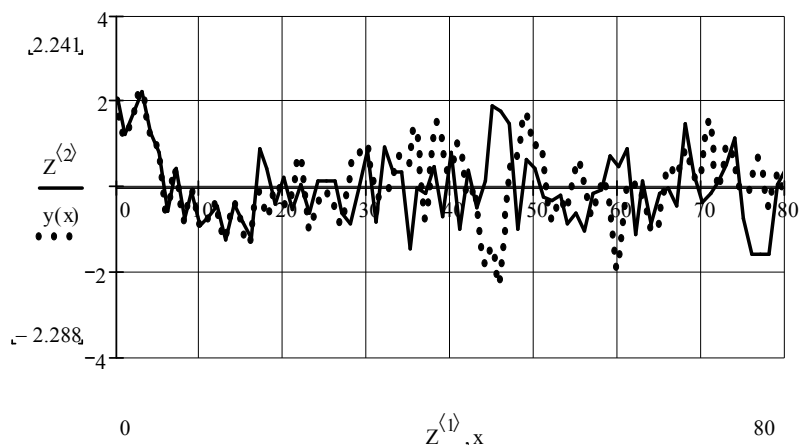
2.16-rasm. Bulstoe funksiyasi yordamida olingan yechim grafigi.

$t_i =$	$y_i =$	$z_i =$
1	2	2
2	1.961	1.961
3	1.698	1.518
4	1.213	1.677
5	1.424	2.313
6	2.123	2.232
7	2.329	1.509
8	2.325	1.51
9	2.182	1.367
10	2.015	1.395
11	1.831	1.058
12	1.684	0.955

2.17-rasm. Olingan sonli yechimlarning qiymatlari



2.18-rasm. Qo'yilgan masalaning rkadapt funksiyasi yordamida olingan turg'un va Odesolve funksiyasi yordamida olingan turg'un bo'lmagan yechimlari grafiklari.



2.19-rasm. Odesolve va rkfixed funksiyalar yordamida olingan turg'un bo'lmagan (katta xatoliklar bilan olingan) yechimlari grafiklari.

Odesolve va rkfixed funksiyalari yordamida qo'yilgan masalani berilgan aniqlikdagi sonli (turg'un) yechimini $[0; 80]$ oraliqda topish uchun integrallash oralig'ini 2000 ta bo'lakka bo'lish zarur, **rkadapt** yoki **bulstoer** funksiyasi yordamida esa 80 ta nuqtada integrallash kifoya. Quyida ana shu algoritm va olingan natijalar keltirilgan (2.20-, 2.21 – rasmlar).

Given

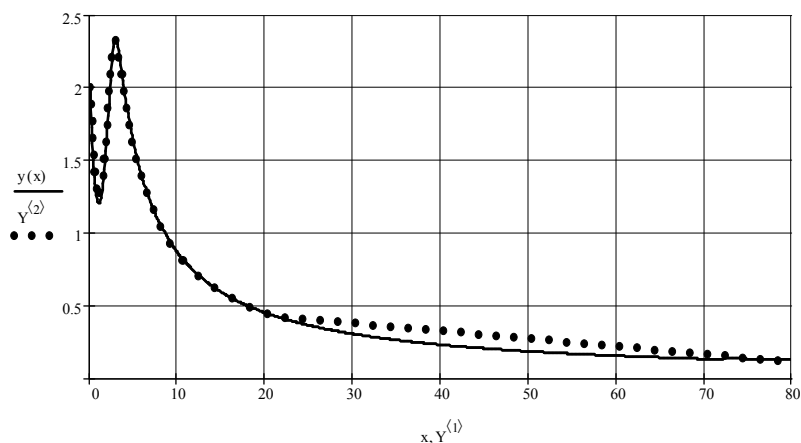
$$y'(x) + y(x) - 3 \cdot \sin(x \cdot y(x)/3) = 0 \quad y(0) = 2 \quad y := \text{Odesolve}(x, 80, 2000)$$

ORIGIN:= 1

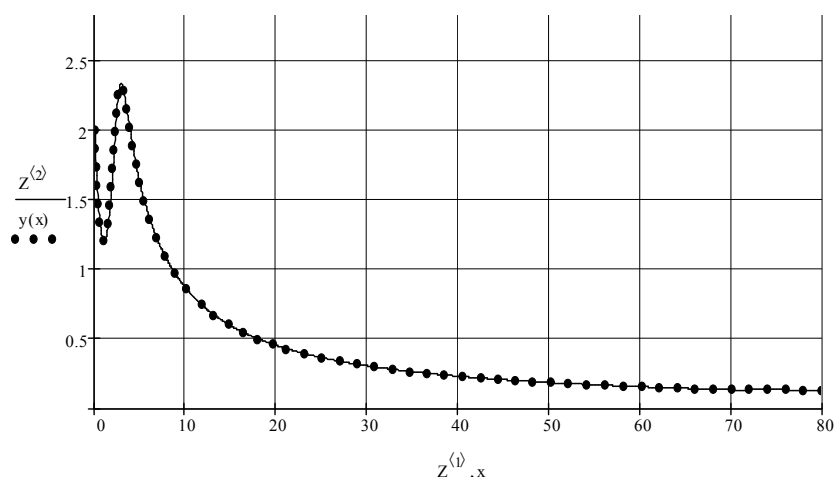
$$D(x, z) := -z + 3 \cdot \sin(x \cdot z / 3)$$

$$Y := \text{rkadapt}(2, 0, 80, 0.0001, D, 80, 0.01)$$

$$Z := \text{rkfixed}(2, 0, 80, 2000, D)$$



2.20-rasm. Odesolve va rkadapt funksiyalari yordamida olingan sonli yechimlar grafiklari.



2.21-rasm. Odesolve va rkfixed funksiyalari yordamida olingan sonli yechimlar grafiklari.

Olingan natijalar tasvirlangan 2.20- yoki 2.21-rasmlardan ko‘rinib turibdiki, *rkadapt* funksiyasi differensial tenglama sonli yechimini berilgan kesmada yuqori aniqlik bilan topsada, amaliyotda *rkadapt* va *bulstoer* funksiyalardan differensial tenglama yechimini integrallash oralig‘iga tegishli faqat bitta yoki bir nechta nuqtalarda topish zaruriyati tug‘ilgandagina foydalanish tavsiya etiladi.

2.5. Maxsus differensial tenglamalar va differensial tenglamalar sistemasi hamda Mathcad dasturining ularni yechishga mo‘ljallangan standart funksiyalar

Maxsus differensial tenglamalar va maxsus differensial tenglamalar sistemasi haqida boshlang‘ich ma‘lumotlar. XX asrning 50 yillaridan boshlab bir vaqtda juda sekin va yetarlicha katta tezlikda o‘tadigan kimyoviy reaksiyalar ostida bo‘ladigan jarayonlarning kinetikasi o‘rganila boshlandi. Ana shunday ko‘plab amaliy masalalar oddiy differensial tenglamalar hamda oddiy differensial tenglamalar sistemasining alohida turlari uchun Koshi masalasini

yechishga keltirildi. Bunday tenglamalarni maxsus (jestkiy) differensial tenglamalar yoki maxsus differensial tenglamalar sistemasini deb atash mumkin.

Ushbu turga tegishli differensial tenglamalar va ularning sistemasini eng ishonchli hisoblangan Runge-Kutta usulini qo'llab sonli yechganda olingan yechimning integrallash oralig'ini nolga yaqin qismida sekin, keyingi qismga o'tganda, ya'ni o'tish fazasida keskin o'zgarishi kuzatildi. Kuzatilgan hodisa bunday turdagi tenglamalarni yechish uchun Runge-Kutta, Eyer va shular kabi hisoblash matematikasi kursidan ma'lum bo'lgan boshqa usullarning yaroqsiz ekanligini bildiradi (algoritmnining turg'unligi buziladi). Amaliyotda ushbu sinfga tegishli shunday differensial tenglamalar uchraydiki, ularni yuqorida qayd etilgan usullar bilan sonli yechish uchun millionlab, milliardlab hatto undan ko'p nuqtalarda integrallashga to'g'ri keladi.

Maxsus differensial tenglamalar yoki ularning sistemasini yechimlari ikki qismdan iborat bo'ladi. Ulardan biri yetarlicha sekin o'zgaradigan, ikkinchisi katta tezlik bilan nolga intiladigan (so'nadigan) funksiyadir. Ana shu ikkinchi funksiya qiymatlarini hisoblashda amaliy jihatdan ma'lum qiyinchiliklar yuzaga keladi. Masalan, quyidagi Koshi masalasini qaraylik:

$$y'' + 101 \cdot y' + 100y = 0, \quad (2.11)$$

$$y(0) = 1.01, \quad y'(0) = -2. \quad (2.12)$$

Berilgan ushbu ikkinchi tartibli o'zgarimas koeffitsiyentli bir jinsli differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi $k^2 + 101 \cdot k + 100 = 0$ ushbu $k_1 = -1$ va $k_2 = -100$ yechimlarga ega bo'lgani uchun (2.11) tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-100x} \quad (2.13)$$

ko'rinishda yoziladi. Berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechim quyidagi ko'rinishda topiladi:

$$y(x) = e^{-x} + 0.01 \cdot e^{-100x} \quad (2.14)$$

Olingan analitik yechim ikkita funksiya yig'indisidan iborat bo'lib, ulardan birinchisining qiymatlari nisbatan tekis va sekin o'zgaradi, ikkinchi funksiyaning qiymatlari tez o'zgaruvchan bo'lib, nolga katta tezlik bilan intiladi.

Quyidagi jadvalda bu ikki funksiya taqribiy qiymatlarini $[0; 0.1]$ kesmadagi o'zgarish qonuniyati keltirilgan:

x	$Y_1 = e^{-x}$	$Y_2 = 0,01 \cdot e^{-100x}$
0	1	0,01
0,00001	0,99999	0,009999
0,0001	0,9999	0,0099
0,001	0,999	0,009
0,01	0,99	0,004
0,1	0,9	0,0000004

Jadvaldagi qiymatlardan ko'rinib turibdiki $[0;0.1]$ kesmadan tashqarida, ya'ni o'tish fazasida yechimning ikkinchi qo'shiluvchisi hisobga olmasa ham bo'ladigan darajada kichik qiymatlarga ega bo'lar ekan. Bundan (2.11)-(2.12) masala yechimini $[0;0.1]$ kesmada yetarlicha kichik qadam bilan sonli topish va o'tish fazasida kompyuter vaqtini tejash hamda yaxlitlash xatoliklarini kamaytirish maqsadida integrallash qadamini kattalashtirish zarur degan xulosaga kelish mumkin. Amaliy hisoblar bu xulosaning noto'g'ri ekanligini ko'rsatdi. Chunki yuqorida keltirilgan tanish usullarni qo'llab turg'un yechim olish uchun birinchi funksiya hisobiga integrallash oralig'ini barcha qismida bir xil bo'lgan yetarlicha kichik integrallash qadami talab etiladi.

Zamonaviy hisoblash matematikasida maxsus differensial tenglamalar va ularning sistemasini yechishga mo'ljallangan alohida usullar yaratilgan.

Maxsus differensial tenglamalar va differensial tenglamalar sistemasini yechishga mo'ljallangan Mathcad dasturining standart funksiyalar. Mathcad dasturi tarkibida maxsus differensial tenglamalar va ularning sistemasini alohida yaratilgan algoritmlar asosida yechadigan standart funksiyalar mavjud. Masalan:

- **Stiff** ($y, x1, x2, eps, D, J$) - bu funksiya birinchi tartibli maxsus oddiy differensial tenglama yoki ularning n ta birinchi tartibli sistemasi uchun Koshi masalasini berilgan kesmada Rozenbrok usuli (algoritmi) bilan yechadi.

- **Stiffb** ($y, x1, x2, eps, D, J$) – bu funksiya birinchi tartibli maxsus oddiy differensial tenglama yoki ularning birinchi tartibli n ta sistemasi uchun Koshi masalasini berilgan $[x1;x2]$ kesmada Bulirsh-Shter usulidan foydalanib yechadi.
- **Radau** ($y, x1, x2, m, D$) – bu funksiya birinchi tartibli maxsus oddiy differensial tenglama yoki n ta birinchi tartibli maxsus oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini berilgan $[x1; x2]$ kesmada **RADAUS** usuli bilan yechadi.

Bu funksiyalarning argumentlari quyidagi ma'nomalarni anglatadi: u – tashkil etuvchilari (koordinatalari) berilgan boshlang'ich shartlardan iborat vektor funksiya; $x1, x2$ – mos ravishda integrallash oralig'ining boshlang'ich va oxirgi qiymati; eps – berilgan integrallash aniqligi; $D(x,y)$ – tashkil etuvchilari berilgan maxsus differensial tenglamalar sistemasining o'ng tomonida turgan funksiyalardan iborat vektor funksiya; $J(x,y)$ – elementlari berilgan maxsus differensial tenglamalar sistemasining o'ng tomonida turgan funksiyalarning xususiy hosilalaridan tashkil topgan n ta satr va $(n+1)$ ta ustunli Yakobi matrisasi (yakobian):

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

Berilgan differensial tenglamalar yoki differensial tenglamalar sistemasining maxsus turga tegishlilik sharti quyidagicha aniqlanadi.

Yuqori tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli yoki bir jinsli bo'lmagan

$$a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n \cdot y = 0, \quad (2.16)$$

$$a_0 \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n \cdot y = f(x) \quad (2.17)$$

differensial tenglamalar maxsus differensial tenglamalar deb ataladi, agar ularning xarakteristik tenglamasi

$$a_0 \cdot \lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot \lambda + a_n = 0 \quad (2.18)$$

quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan yechimlarga ega bo'lsa:

$\text{Re}(\lambda_k) < 0, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ (xarakteristik tenglamaning barcha ildizlari manfiy, kompleks son bo'lsa haqiqiy qismi manfiy); (2.19)

$$g = \frac{\max \{|\text{Re}(\lambda_k)|\}}{\min \{|\text{Re}(\lambda_k)|\}} - \text{maxsuslik soni (darajasi) yetarlicha katta.} \quad (2.20)$$

Birinchi darajali o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli n ta differensial tenglamalar sistemasi:

$$\mathbf{Y}' = A \cdot \mathbf{Y}, \quad (2.21)$$

bu yerda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))^T,$$

$$\mathbf{Y}' = (y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x))^T$$

maxsus sistema bo'lishi uchun uning xarakteristik tenglamasining

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.22)$$

xos qiymatlari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ yuqoridagi ikkita shartni qanoatlantirishi lozim.

O'zgaruvchi koeffitsiyentli differensial tenglamalar sistemasi uchun yuqoridagi ikkita shart quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\text{Re}(\lambda_k(x)) < 0, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}; \quad (2.23)$$

$$\text{Sup } g(x) - \text{yetarlicha katta.} \quad (2.24)$$

$$x \in (0, b)$$

Shunday qilib, differensial tenglamaning maxsuslik alomati o'zining xarakteristik tenglamasi ildizlari bilan uzviy bog'liq bo'lib, bu alomatga ko'ra, xarakteristik tenglamaning barcha ildizlari manfiy bo'lishi yoki ildiz kompleks

son bo‘lganda uning haqiqiy qismini manfiy bo‘lishi va ular miqdor jihatdan bir-biridan keskin farq qilishi zarur va yetarli ekan.

Agar berilgan tenglamalar sistemasi

$$\frac{dY}{dx} = F(Y, x) \quad (2.25)$$

chiziqsiz bo‘lsa, quyidagi matrisaning determinanti hisoblanadi.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

U qancha nolga yaqin bo‘lsa, sistemaning maxsusligi shunchalik kuchli bo‘ladi. Bu yerda f_i va y_i lar mos ravishda \mathbf{F} va \mathbf{Y} vektor funksiyalarning \mathbf{i} - tashkil etuvchisi (\mathbf{i} – koordinatasi).

Misol sifatida oddiy differensial tenglamalarning maxsuslik mohiyatini ochib beruvchi kimyoviy kinetikaning klassik modellaridan biri (Robertson modeli, 1966) reagentlar konsentratsiyasi (uchta moddaning o‘zaro kimyoviy ta’siri) dinamikasini ifodalovchi chizikli bo‘lmagan oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini qaraylik:

$$\begin{cases} y_1'(x) = -0.1 \cdot y_1 + 100 \cdot y_2 \cdot y_3, \\ y_2'(x) = 0.1 \cdot y_1 - 100 \cdot y_2 \cdot y_3 - 1000 \cdot y_2, \\ y_3'(x) = 1000 \cdot y_2 \end{cases} \quad (2.26)$$

$$y = (1 \ 0 \ 0)^T \quad x \in [0; 50] \quad (2.27)$$

Ushbu masalani Mathcad vositasida yechish algoritmi quyidagi amallar ketma-ketligidan iborat bo‘ladi:

□ berilgan sistemaning maxsusligini tekshiramiz

$$f_1(y_1, y_2, y_3) := -0.1 \cdot y_1 + 100 \cdot y_2 \cdot y_3$$

$$f_2(y_1, y_2, y_3) := 0.1 \cdot y_1 - 100 \cdot y_2 \cdot y_3 - 1000 \cdot y_2$$

$$f_3(y_1, y_2, y_3) := 1000 \cdot y_2$$

$$J(y_1, y_2, y_3) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(y_1, y_2, y_3)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1(y_1, y_2, y_3)}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1(y_1, y_2, y_3)}{\partial y_3} \\ \frac{\partial f_2(y_1, y_2, y_3)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2(y_1, y_2, y_3)}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2(y_1, y_2, y_3)}{\partial y_3} \\ \frac{\partial f_3(y_1, y_2, y_3)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_3(y_1, y_2, y_3)}{\partial y_2} & \frac{\partial f_3(y_1, y_2, y_3)}{\partial y_3} \end{pmatrix}$$

$$J(y_1, y_2, y_3) \rightarrow \begin{pmatrix} -0.1 & 100 \cdot y_3 & 100 \cdot y_2 \\ 0.1 & -100 \cdot y_3 - 100 & -100 \cdot y_2 \\ 0 & 1000 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta J := |J(y_1, y_2, y_3)| \quad \Delta J = 0$$

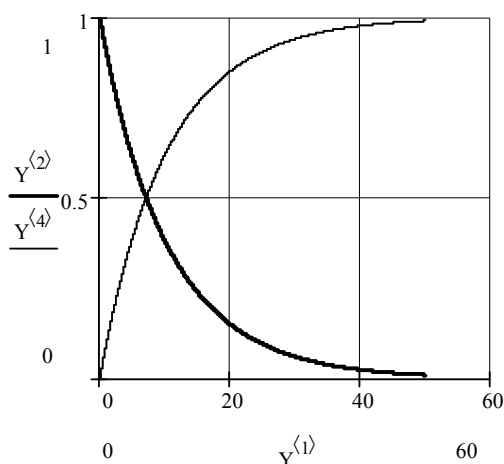
Oxirgi tenglik ixtiyoriy y_1, y_2, y_3 uchun o‘rinli. Bu (56) sistemaning o‘ta maxsus ekanligini bildiradi.

□ $\text{ORIGIN}:=1 \quad y:=(1 \ 0 \ 0)^T$

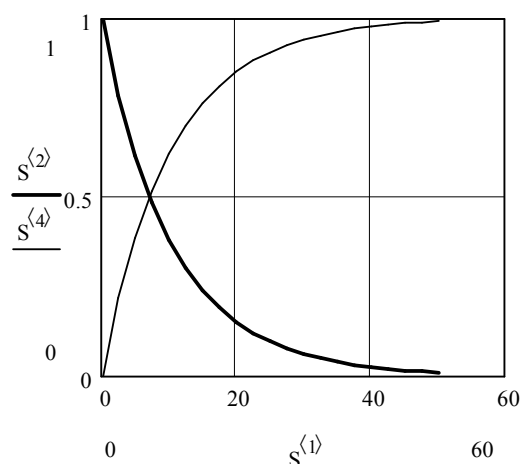
□ $D(x,y) := \begin{pmatrix} -0.1 \cdot y_1 + 100 \cdot y_2 \cdot y_3 \\ 0.1 \cdot y_1 - 100 \cdot y_2 \cdot y_3 - 100 \cdot y_2 \\ 1000 \cdot y_2 \end{pmatrix}$

□ $JS(x,y) := \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & 100 \cdot y_3 & 100 \cdot y_2 \\ 0 & 0.1 & -100 \cdot y_3 - 1000 & -100 \cdot y_2 \\ 0 & 0 & 1000 \cdot y_2 & 0 \end{pmatrix}$

□ $Y := \text{rkfixed}(y, 0, 50, 20000, D) \quad S := \text{Stiffb}(y, 0, 50, 20, D, JS)$



2.22-rasm. rkfixed funksiya yordamida olingan yechim grafigi.



2.23-pacm. Stiffb funksiya yordamida olingan yechim grafigi.

Bu yerda shu narsaga e'tibor berish kerakki, *rkfixed* funksiyasini qo'llab (2.26) - (2.27) masala sonli yechimini olish uchun yigirma nuqtada, *Stiffb* funksiyasi yordamida esa yigirmata nuqtada integrallash kifoya ekan.

Misol. Quyida berilgan vektor - matrisa ko'rinishdagi chiziqli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini yeching:

$$\frac{dY}{dx} = A \cdot Y \quad (2.28)$$

$$Y_0(0) = (y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{40})^T, \quad x \in [0; 4] \quad (2.29)$$

Bu yerda

$$A = \begin{pmatrix} 205.3 & 315.8 & 216.8 & 206.9 \\ -12.4 & -13.0 & -2.0 & -11.4 \\ -92.8 & -147.5 & -109.0 & -93.3 \\ -203.9 & -313.8 & -214.8 & -206.5 \end{pmatrix}$$

$$y_0 = (0.913 \quad 0.408 \quad -0.667 \quad 0.745)^T$$

Yechish. Masalaning yechish algoritmi quyidagi qadamlardan tashkil topadi:

□ Differensial tenglamalar sistemasining maxsus ekanligini tekshiramiz:

$$A := \begin{pmatrix} 205.3 & 315.8 & 216.8 & 206.9 \\ -12.4 & -13.0 & -2.0 & -11.4 \\ -92.8 & -147.5 & -109.0 & -93.3 \\ -203.9 & -313.8 & -214.8 & -206.5 \end{pmatrix}$$

A matrisaning xos sonlarini topamiz:

$$\lambda := \text{eigenvals}(A)$$

$$\lambda := \begin{bmatrix} -110 \\ -11 \\ -1.1 + 0.5 \cdot i \\ -1.1 - 0.5 \cdot i \end{bmatrix}$$

Sistemasining maxsuslik sonini aniqlaymiz:

$$s := \frac{\max(\text{Re}(|\vec{\lambda}|))}{\min(\text{Re}(|\vec{\lambda}|))} \quad s = 100$$

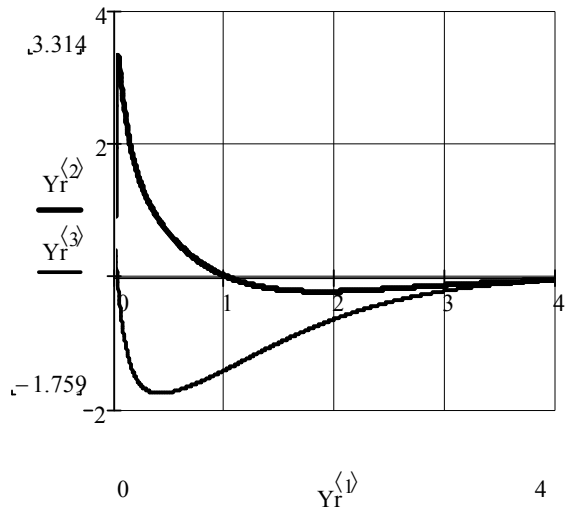
Topilgan s ning qiymati (58) sistemaning maxsusligini bildiradi.

□ Qaralayotgan masalani bir nechta usul bilan yechish uchun $D(x, y)$ va $J(x, y)$ vektor funksiyalarni hosil qilamiz:

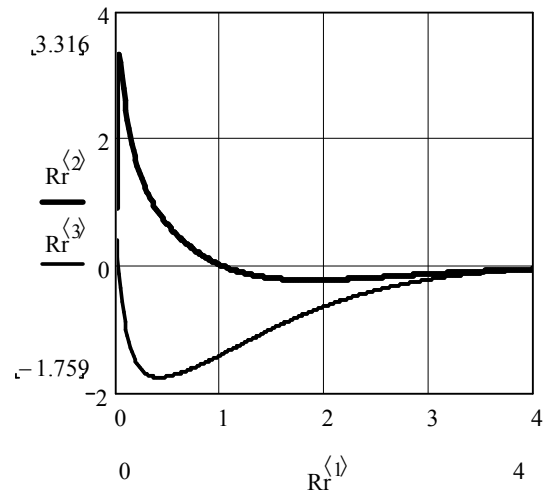
$$D(x, y) := \begin{pmatrix} 205.3 \cdot y_1 + 315.8 \cdot y_2 + 216.8 \cdot y_3 + 206.9 \cdot y_4 \\ -12.4 \cdot y_1 - 13.0 \cdot y_2 - 2.0 \cdot y_3 - 11.4 \cdot y_4 \\ -92.8 \cdot y_1 - 147.5 \cdot y_2 - 109.0 \cdot y_3 - 93.3 \cdot y_4 \\ -203.9 \cdot y_1 - 313.8 \cdot y_2 - 214.8 \cdot y_3 - 206.5 \cdot y_4 \end{pmatrix}$$

$$J(x, y) := \begin{pmatrix} 0 & 205.3 & 315.8 & 216.8 & 206.9 \\ 0 & -12.4 & -13.0 & -2.0 & -11.4 \\ 0 & -92.8 & -147.5 & -109.0 & -93.3 \\ 0 & -203.9 & -313.8 & 214.8 & -206.5 \end{pmatrix}$$

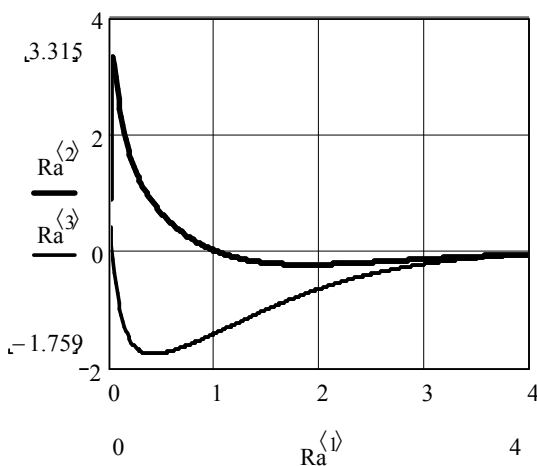
□ Sonli yechimni *rkfixed*, *Rkadapt*, *Radau*, *Stiffb* funksiyalar bilan topamiz:



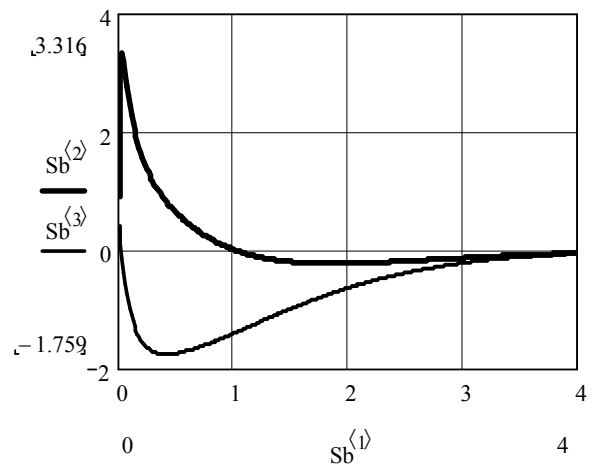
2.24-rasm. *rkfixed* funksiya yordamida olingan yechim grafiği:
 $Yr := rkfixed(y, 0, 4, 1000, D)$



2.25-rasm. *Rkadapt* funksiya yordamida olingan yechim grafiği:
 $Rr := Rkadapt(y, 0, 4, 300, D)$



2.26-rasm. *Radau* funksiya yordamida olingan yechim grafiği:
 $Ra := Radau(y, 0, 4, 300, D)$



2.27-rasm. *Stiffb* funksiya yordamida olingan yechim grafiği: $Sb := Stiffb(y, 0, 4, 300, D, J)$

Qaralayotgan masalaning yechimlari (y_1 va y_2 reagentlarning o'zgarish dina-mikasi grafiklari) 2.24-2.27-rasmlarda tasvirlangan. Natijalarni rkfixed funksiyasi yordamida olish uchun integrallash oralig'ini mingta bo'lakka bo'lish zarur bo'lsa, Rkadapt, Radau, Stiffb funksiyalarni qo'llaganda oraliqqa tegishli uch yuzta nuqtada integrallash yetarli ekan. Demak, berilgan alohida masalani yechishda foydalanuvchi tomonidan shu masalaga mos standart funksiyani tanlay bilish amaliy jihatdan muhimdir.

2.6. Автоном дифференциал тенгламалар системаси. Фазавий траекториялар. Фазалар текислиги. Фазавий портрет

Agar erkli o'zgaruvchi sistemada oshkor holda ishtirok etmasa bunday *oddiy differensial tenglamalar sistemasi avtonom deyiladi*. Avtonom sistemalarda erkli o'zgaruvchini t (vaqt) harfi bilan, yechimni esa $x(t)$ kabi belgilanadi. *Avtonom sistemalar dinamik sistemalar deb ham aytiladi*.

Ikkinchi tartibli avtonom sistema umumiy holda quydagicha yoziladi:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.30)$$

Faraz qilaylik $x_1 = \varphi_1(t)$ va $x_2 = \varphi_2(t)$ lar (60) sistemaning yechimlari bo'lsin. U holda

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t), \\ x_2 = \varphi_2(t) \end{cases} \quad (2.31)$$

tenglamalar (x_1, x_2) tekislikda parametrik shaklda berilgan egri chiziqlarni ifodalaydi. Bu chiziqlar (2.30) *sistemaning fazaviy trayektoriyasi* deb ataladi. Fazalar trayektoriyasi joylashgan tekislik avtonom sistemaning fazalar tekisligi nomi bilan yuritiladi.

Fazalar tekisligining fazaviy trayektoriyalar bilan to'lgan qismi sistemaning fazaviy portreti deyiladi. Fazaviy portret butun tekislikni to'ldiradi,

chunki boshlang'ich shartlar tegishlicha tanlab olinganda fazalar tekisligining istalgan nuqtasi orqali fazaviy trayektoriya o'tkazish mumkin.

Qaralayotgan sistemaning integral egri chiziqlari quyidagi parametrik ko'rinishda berilgan tenglamalar shaklida ifodalanadi:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t), \\ x_2 = \varphi_2(t), \\ t = t \end{cases} \quad (2.32)$$

Integral egri chiziqlarining fazalar tekisligiga proyeksiyalari fazaviy trayektoriyalarni beradi.

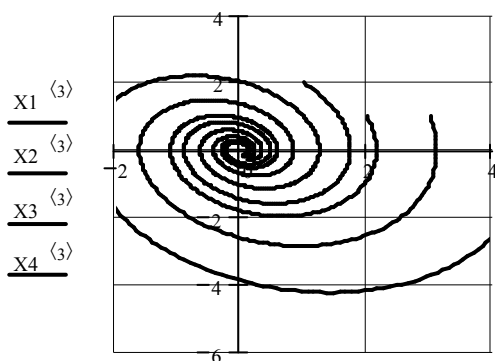
1-masala. Quyida ushbu

$$\begin{cases} x_1' = 2 \cdot x_2, \\ x_2' = -3x_1 - x_2 \end{cases} \quad (2.33)$$

avtonom sistemaning turli xil boshlang'ich shartlarda olingan fazalar trayektoriyalari (2.28-rasm) va $x_1(0)=4, x_2(0)=3$ boshlang'ich shartlar uchun integral egri chizig'i (2.29-rasm) tasvirlangan:

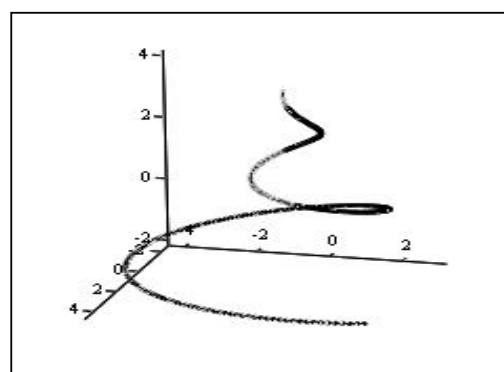
```

ORIGIN:=1  a := -2    b := 4      m := 500      D(t,x) := ( 2*x2
                                                    -3*x1 - x2 )
x := (1 2)T  X1 := rkfixed(x, a, b, m, D)  x := (2 1)T  X2 := rkfixed(x, a, b, m, D)
x := (3 1)T  X3 := rkfixed(x, a, b, m, D)  x := (4 3)T  X4 := rkfixed(x, a, b, m, D)
    
```



$x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, x_4^{(2)}$

2.28-rasm. To'rt xil boshlang'ich shart uchun olingan fazalar trayektoriyalari



$(x_4^{(2)}, x_4^{(3)}, x_4^{(1)})$

2.29-rasm. Berilgan bitta boshlang'ich shart uchun olingan integral egri chiziq.

Бу ерда шуни таъкидлаш лозимки, интеграл эгри чизиги оператор ёрдамида ҳосил қилинади.



2-masala. Yengil, ammo juda mustahkam ipga osilgan yuk, xuddi mayatnik kabi, lekin yetarlicha katta burchakka, hatto 360^0 ga ham burila oladi. Bu aslida haqiqatga juda yaqin bo‘lmasada, faraz qilaylik, bunday mayatnikning harakatini asta sekin so‘ndiruvchi ishqalanish kuchi shu mayatnikning tezligiga to‘g‘ri proporsional bo‘lsin. Yana faraz qilamizki, mayatnik uzunligi 1 m, mayatnikning uchiga ilingan yukning og‘irligi 1 kg, ishqalanish koeffitsiyenti esa 0,5 ga teng bo‘lsin. Bunday holda mayatningning harakat differensial tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$y''(t)+0,5y'(t)+g\cdot\sin(y(t))=0,$$

bu yerda g – erkin tushish tezlanishi, $g = 9,81$.

Bu tenglamani ikkita oddiy differensial tenglamalar sistemasi ko‘rinishida yozib olamiz:

$$y_1'(t) = y_2(t), \quad y_2'(t) = -0.5 y_2(t) + g\cdot\sin(y_1(t)).$$

Boshlang‘ich shartlar:

$$y_1(0) = 0; \quad y_2(0) = 5.$$

Yechish. a) Bu Koshi masalasini sonli yechishning Mathcad dasturi matni va uning natijasi quyidagicha (2.30-rasm):

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad a := 0 \quad b := 10 \quad m := 500$$

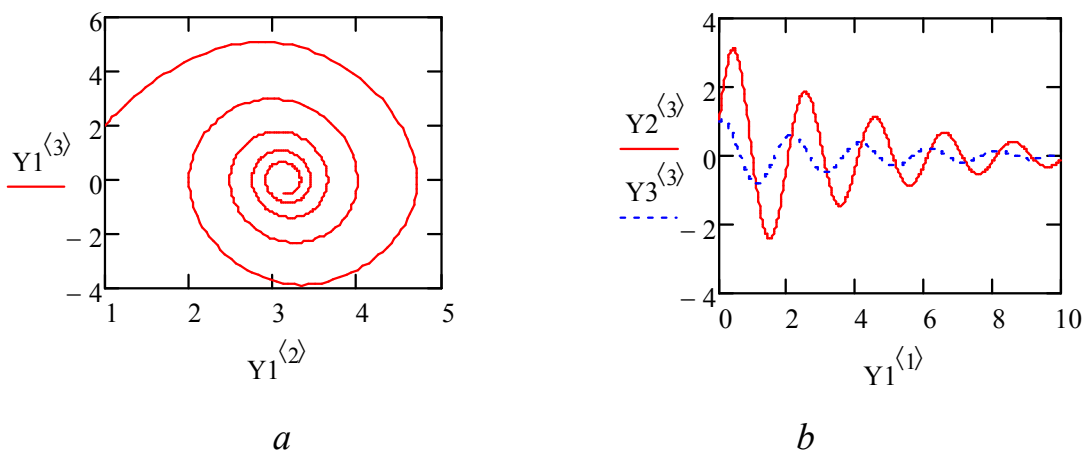
$$g := 9.81 \quad D(x,y) := \begin{pmatrix} y_2 \\ -0.5 \cdot y_2 + g \cdot \sin(y_1) \end{pmatrix}$$

$$y := (1 \ 2)^T \quad Y1 := \text{rkfixed}(y, a, b, m, D)$$

$$y := (2 \ 1)^T \quad Y2 := \text{rkfixed}(y, a, b, m, D)$$

$$y := (3 \ 1)^T \quad Y3 := \text{rkfixed}(y, a, b, m, D)$$

$$y := (4 \ 3)^T \quad Y4 := \text{rkfixed}(y, a, b, m, D)$$



2.30-rasm. 2-masala uchun *a*) fazoviy portret va *b*) $y_1(t)$ va $y_2(t)$ integral egri chiziqlar grafiklari.

Bu yerda $y_1(t)$ – mayatnikning burilish burchagini, $y_2(t)$ – uning tezligini ifodalaydi. 4-rasmdan ko'rinib turibdiki, harakat (0;5) nuqtadan boshlanib, soat strelkasi yo'nalishida harakatlanib, (0;0) nuqtaga buralib keladi. Bu degani mayatning o'ng yoki chapga tebranib borib, asta sekin so'nib boradi va $t=20$ da u tinch holatga keladi.

3-masala. Quyidagi nochiziqli differensial tenglamalar sistemasi har xil boshlang'ich shartlarda sonli yeching:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_0(t) = x_0(t)(1 - x_1(t)), \\ \frac{d}{dt} x_1(t) = x_1(t)(x_0(t) - 1), \end{cases}$$

a) $x_0(0) = 2; \quad x_1(0) = 1, \quad b) \quad x_0(0) = 3; \quad x_1(0) = 1, \quad c) \quad x_0(0) = 4; \quad x_1(0) = 1,$

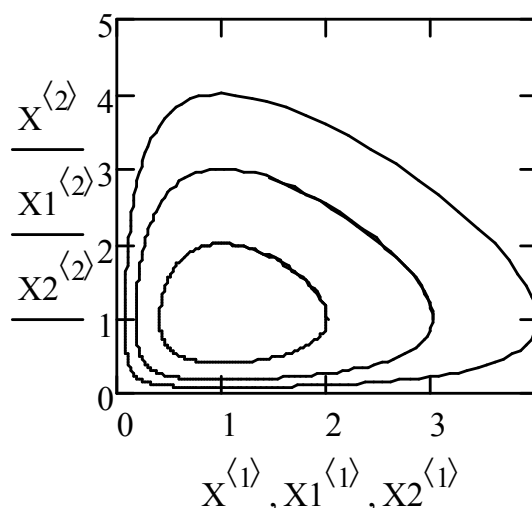
Yechish. Berilgan sistemaning o'ng tomoni matritsasini yozib olamiz va uni Radau funksiyasidan foydalanib, har xil boshlang'ich shartlarda sonli yechamiz:

$$D(t, x) := \begin{pmatrix} x_0 - x_0 \cdot x_1 \\ x_0 \cdot x_1 - x_1 \end{pmatrix}$$

$$X := \text{Radau}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, 0, 8, 100, D\right]$$

$$X1 := \text{Radau}\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, 0, 8, 100, D\right]$$

$$X2 := \text{Radau}\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, 0, 8, 100, D\right]$$



Rasmdan ko'rinib turibdiki, berilgan sistema (1;1) nuqtada maxsus turg'unlik nuqtasiga ega.

4-masala. Quyidagi noxiziqli differensial tenglamalar sistemasi har xil boshlang'ich shartlarda sonli yeching:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_0(t) = -3x_0(t) - 2x_1(t) - 2x_0(t)x_1^2(t), \\ \frac{d}{dt} x_1(t) = 2x_0(t) - x_1(t) + 2x_1^3(t), \end{cases}$$

a) $x_0(0) = 0,8$; $x_1(0) = 0$; b) $x_0(0) = 0,8$; $x_1(0) = 0,2$; c) $x_0(0) = 0,8$; $x_1(0) = 0,6$,

Yechish. Dastlab berilgan sistemani qat'iylikka tekshiramiz:

$$B := \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda := \text{eigenvals}(B)$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} -2 + 1.732i \\ -2 - 1.732i \end{pmatrix}$$

$$s_w := \frac{\max(\operatorname{Re}(\overrightarrow{|\lambda|}))}{\min(\operatorname{Re}(\overrightarrow{|\lambda|}))}$$

$$s = 1$$

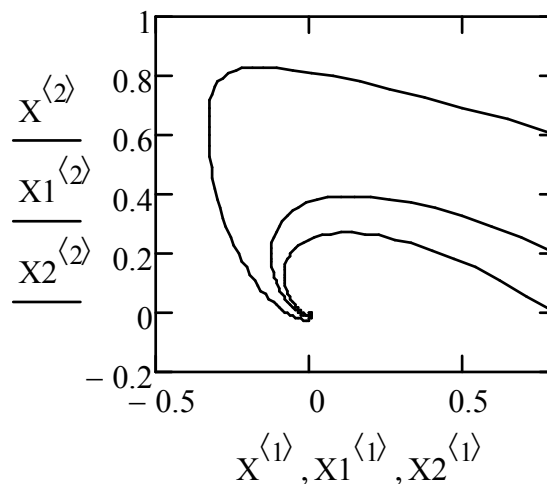
Berilgan sistemaning o'ng tomoni matritsasini yozib olamiz va uni **Radau** funksiyasidan foydalanib, har xil boshlang'ich shartlarda sonli yechamiz:

$$D(t, x) := \begin{pmatrix} -3x_0 - 2x_1 - 2x_0 \cdot x_1 \cdot x_1 \\ 2x_0 - x_1 + 2x_1 \cdot x_1 \cdot x_1 \end{pmatrix}$$

$$X := \operatorname{Radau} \left[\begin{pmatrix} 0.8 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, 4, 100, D \right]$$

$$X1 := \operatorname{Radau} \left[\begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}, 0, 4, 100, D \right]$$

$$X2 := \operatorname{Radau} \left[\begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}, 0, 4, 100, D \right]$$



Rasmdan ko'rinib turibdiki, berilgan sistema (0;0) nuqtada maxsus turg'unlik nuqtasiga ega.

XULOSA

Mazkur bitiruv malakaviy ishini bajarish natijasida olingan xulosalar:

- oddiy differensial tenglama va tenglamalar sistemasini taqribiy yechishning sonli usuli hisobiga oid jarayonlarni kompyuterda modellashtirish va sonli tajribalar asosida tadqiq etish usullari o'rganildi;
- oddiy differensial tenglama va tenglamalar sistemali chegaraviy masalaga olib kelinadigan jarayonlar hisobi masalasining matematik modeli o'rganildi;
- amaliy jarayonlar hisobiga oid asosiy munosabatlar o'rganib chiqildi;
- o'rganilayotgan jarayonlar hisobiga oid Koshi masalasi va chegaraviy masala tuzildi;
- Koshi masalasini va chegaraviy masalani yechishning sonli hisob metodikasi va algoritmi ishlab chiqildi;
- oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechishning sonli hisob Mathcad dasturi tuzildi;
- sonli hisob natijalari amaliy tajribalarga mos keldi;
- hisoblashlar jarayoni uchun Mathcad matematik paketida dasturiy vositalar yaratildi, hisob natijalari grafiklarda vizuallashtirildi;
- oddiy differensial tenglama va tenglamalar sistemasiga olib kelinadigan tebranishga oid muhandislik amaliy masalalarining sonli hisob metodikasidan har xil hisob masalalarini Mathcad matematik paketida sonli yechishda samarali foydalanish mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Алексеев Е. Р., Чеснокова О. В. Mathcad 12. – М.: НТ Пресс, 2005. – 345 с.
2. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad, Matlab, Maple (Самоучитель). – М.: НТ Пресс, 2006. – 496 с.
3. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: Изд-во Бином. Лаборатория знаний, 2011. – 640 с.
4. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2009. – 848 с.
5. Вержбицкий В. М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): Учеб. пособие для вузов. – М.: ООО Издательский дом «ОНИКС 21 век», 2005. – 400 с.
6. Гурский Д. А., Турбина Е. С. Вычисления в Mathcad 12. – СПб.: Питер, 2006. – 544 с.
7. Исраилов М.И. Ҳисоблаш методлари. 1- ва 2-қисмлар. – Тошкент: Ўқитувчи, 2003, 2008.
8. Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Численные методы: в 2 кн. Кн. 2. Методы математической физики. - М.: Издательский центр «Академия», 2013. - 304 с.
9. Кирьянов Д. В. Mathcad 12. - СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 576 с.
10. Кирьянов Д.В. Mathcad 13. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 608 с.
11. Кудрявцев Е. М. Mathcad 11: Полное руководство по русской версии. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 592 с.
12. Макаров Е. Г. Инженерные расчеты в Mathcad. Учебный курс. СПб.: Питер, 2003. – 448 с.
13. Макаров Е. Инженерные расчеты в Mathcad 15: Учебный курс. – СПб.: Питер, 2011. – 400 с.

14. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Изд-во Лань, 2010. – 608 с.
15. Мэтьюз Джон Г., Финк Куртис Д. Численные методы. Использование Matlab. 3-издание: Пер. с англ. – М.: Изд-во дом «Вильямс», 2001. - 720 с.
16. Плис А.И., Силвина Н.А. Mathcad 2000: Математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. пособие. - М.: Финансы и статистика, 2000. – 656 с.
17. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Изд-во Лань, 2009. - 288 с.
18. Теория и реализация задач вычислительной математики в пакете Mathcad: учебное пособие/сост. А.И.Кочегуров, Е.А.Кочегурова. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2013.– 135с.
19. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
20. Херхагер М., Партолль Х. Mathcad 2000: Полное руководство: Пер. с нем. – К.: Издательская группа ВНУ, 2000. – 416 с.
21. <http://www.edu.uz> – ta’lim sayti.
22. <http://www.edu.ru> – ta’lim sayti.
23. <http://www.intuit.ru> – masofaviy ta’lim sayti.
24. <http://www.eqworld.ru> – adabiyotlarning elektron varianti.
25. <http://www.twirpx.com> – adabiyotlarning elektron varianti.
26. <http://www.ziyonet.uz> - adabiyotlarning elektron variantlari