O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

ALISHER NAVOIY NOMIDAGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

MEXANIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

«AMALIY MATEMATIKA» KAFEDRASI

DJABBAROVA ZAYNAB MAMARIZOYEVNA

«5130200 – Amaliy matematika va informatika» ta’lim yo‘nalishi
bo‘yicha bakalavr darajasini olish uchun

«KICHIK TEBRANISHLAR MASALASINI SONLI YECHISH, NATIJALARNI VIZUALLASHTIRISH VA AMALIY TADBIQLAR»

mavzuli

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Bajardi : Z.M.Djabbarova

Ilmiy rahbar : dots. A.Abdirashidov

Ushbu ish kafedraning 2016 yil «23» maydagi yig‘ilishida muhokama qilindi va himoya qilishga №11,a bayonnoma bilan tavsiya etildi.

Kafedra mudiri : dots. J.Maxmudov

Fakultet dekani : dots. H.Ro‘zimurodov

Ushbu ish DAKning 2016 yil «___» iyundagi yig‘ilishida muhokama qilindi va №___ bayonnoma bilan «____» ballga baholandi.

DAK raisi ________________

Komissiya a’zolari _________________

____

____

Samarqand - 2016

MUNDARIJA

KIRISH

Mavzuning dolzarbligi. Kompyuterning qo‘llanilish sohalaridan biri bu mexanik jarayonlarni va ob’ektlarning matematik modellarini hisoblash usullari va kompyuterlarning dasturiy vositalari yordamida tadqiq etish bo`lib qolmoqda. Hisoblash matematikasi usullari va kompyuterlarning zamonaviy imkoniyatlari birgalikda mexanik jarayonlar va obyektlarning shu paytgacha noma’lum xususiyatlarini ochishga va, shu asnoda, texnologik jarayonlarni takomillashtirishga xizmat qilmoqda. Ushbu bitiruv malakaviy ishning mavzusi ham hisoblash usullari va kompyuterning ilmiy tadqiqot ishlarda qo‘llanilishiga bog`liq bo‘lib, ilmiy va amaliy jihatdan dolzarbdir.

Hozirgi kunda fan-texnika rivojlanib borgan sari hisoblash matematikasi va konpyuterning o‘rni ortib bormoqda. Shu jumladan hisoblash matematikasi-dan fizika, mexanika, biologiya, kimyo va astronomiya hamda iqtisodiy masalalarni yechishda, mexanik jarayonlarni tahlil etishda va boshqa ko‘p sohalarda foydalaniladi. Bu sohalardagi jarayonlarning matematik modeli oddiy yoki xususiy hosilali differensial tenglamalar nomi bilan yuritiladi.

Eng ko‘p tarqalgan Koshi masalasi bu boshlang‘ich shart bilan berilgan masalalardir. Ana shu boshlang‘ich shartlar asosida masalani yechish jarayoni osonlashadi. Boshqa turdagi masalalar – chegaraviy masalalar (masalan, chekli shartlar yoki oraliq nuqtalarda shartlari berilgan masalalar) – maxsus uslublar yordamida yechiladi, xususan ularning ba’zilari unga ekvivalent bo‘lgan boshlang‘ich shartli masalalarga keltirib yechiladi.

Bunday masalalarni yechish usullarining ikkita guruhi mavjud: bir qadamli va ko‘p qdamli usullar. Birinchi guruhga kiruvchi usullar funksiyaning keyingi nuqtadagi qiymatini topish uchun uning dastlab bitta nuqtadagi, ikkinchi guruhda esa bir nechta nuqtadigi qiymati berilishini talab qiladi.

Ushbu ishda oddiy differensial tenglamalarni bir qadamli sonli usullar yordamida taqribiy yechish masalasi, ularning tebranish masalalarini yechishga tadbiqi qaraladi.

Keltirib o‘tilgan fikrlarga tayangan holda aytish mumkinki, bitiruv malakaviy ishida qo‘yilgan masala dolzarb.

Masalaning qo‘yilishi. Oddiy differensial tenglamalarni va tenglamalar sistemasini, ularni yechish usullarini qisqacha nazariy o‘rganish, ularni sonli yechishning bir qadamli usullarini o‘rganib, ularning algoritmini, hisob dasturini yaratish, tebranishlar nazariyasining har xil qiziqarli amaliy masalalarni sonli yechish, bunda matematik paketlardan samarali foydalanish.

Ishning maqsadi va vazifalari. Ushbu ishda ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar bilan berilgan Koshi masalalarni analitik va sonli yechish usullari yordamida matematik paketlardan samarali foydalanib, tebranishlar nazariyasining aniq amaliy masalalarini yechish jarayonini ko‘rsatish, masalani yechishning algoritmi va dasturini yaratish ko‘zda tutilgan. **Muammoning ishlab chiqilish darajasi.** Bitiruv malakaviy ishida ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar bilan berilgan Koshi masalalarining iborat bo‘lgan mexanikaning bir qator amaliy masalalarini taqribiy yechish qaralib, bir qadamli taqribiy hisob usullari bo‘yicha tebranishlar nazariyasining aniq amaliy masalalarini yechish. Tadqiqotlar aniq misollarda bajarildi, ular uchun zarur algoritm va dasturlar tuzildi.

Ishning ilmiy yangiligi. Ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar bilan berilgan Koshi masalalarini bir qadamli sonli usullardan foydalanib taqribiy yechishda bu bo‘limlarda qo‘llaniladigan uslublarni bilish zarur. Ular hisoblash usullarining asosiy bo‘limlarida qo‘llaniladigan elementar almashtirishlar va hisoblashlarning buyruqlaridan foydalanish imkonini beradi. Amalda ixtiyoriy matematik paket yordamida amalga oshirish mumkin bo‘lgan “elementar” hisoblashlar va almashtirishlar zanjiri murakkab masalalarni ham yechish imkonini beradi (masalan, Koshi masalasi, chegaraviy masalalar).

Tadqiqot predmeti. Bir qadamli sonli usullar amaliyotda uchraydigan oddiy differensial tenglamali ko‘pgina masalalarining taqribiy yechimlarini topishga imkon beradi. Ushbu bitiruv malakaviy ishida bir qadamli usullarning ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarbilan berilgan Koshi masalalarining ba’zi turlarini qurilmalar kichik tebranishlari misolida yechish uchun qo‘llash uslubi keltirilgan.

Tadqiqot obyekti. Ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar bilan berilgan Koshi masalasi ushbu bitiruv malakaviy ishining tadqiqot obyektidir [6, 10, 13, 14] adabiyotlarda, [1, 2-5, 7-9, 13] adabiyotlarda keltirilgan. Bevosita amaliyot bilan bog‘liq namunaviy masalalar va ularni matematik paketlar yordamida sonli yechish mashqlari esa [1, 11, 12, 16] adabiyotlarda, Internet manbalar [17-23] sahifalarda keltirilgan.

Ishning ilmiy ahamiyati. Bu bitiruv malakaviy ishida keltirilgan algoritm va dasturdan foydalanib, tebranishlar nazariyasining bir qator amaliy masalalarini sonli yechishni nazariy asoslash, turdosh masalalarni sonli yechish imkoni tug‘iladi.

Ishning amaliy ahamiyati. Bitiruv malakaviy ishidan «Nazariy mexanika», «Hisoblash usullari», «Matematik fizika tenglamalari» fanidan bo‘ladigan amaliy mashg‘ulotlarda, seminar mashg‘ulotlarida, oddiy differensial tenglama va tenglamalar sistemasi, Koshi masalasi, chegaraviy masalalarni sonli yechish bo‘yicha tanlov fanlari mashg‘ulotlarida uslubiy ish sifatida foydalanish mumkin.

Ishning tuzilishi. Bitiruv malakaviy ishi Kirish qismi, Asosiy qism (2 ta bob, 9 ta paragraf), Xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat bo‘lib, jami 50 bet hajmida tayyorlangan.

Annotatsiya. Ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar bilan berilgan Koshi masalasi yuqori aniqlikdagi bir qadamli sonli usullar bilan taqribiy yechilgan. Tadbiq uchun tebranishlar nazariyasiga oid aniq amaliy masalalar sonli yechilgani, hisob algoritmi yaratilgan, hisob dasturi matematik paketlarda

tuzilgan, natijalar aniq yechimlar bilan taqqoslangan va tegishli xulosalar chiqarilgan hamda amaliy tadbiq uchun tavsiyalar berilgan.

1-BOB.
DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA TEBRANISH NAZARIYASI MASALALARI HAQIDA DASTLABKI TUSHUNCHALAR

1.1. Differensial tenglamalar haqida dastlabki tushunchalar

Tabiiy, muhandislikning va ilmiy tadqiqot ishlarining ko‘plab masalalarini matematik modellashtirish oddiy yoki xususiy hosilali differensial tenglamalarga olib keladi. Bunda asosan fizik, mexanik, biologik hodisalardagi, texnik qurilmalardagi jarayonlarning o‘zgarishlarini o‘rganish, masalan, boshlang‘ich shart bilan berilgan oddiy differensial tenglamalarni (boshlang‘ich masalani yoki Koshi masalasini) yoki chegaraviy shartlar bilan berilgan berilgan oddiy differensial tenglamalarni (chegaraviy masalalarni) yechishni talab qiladi. Bunday masalalarga misol qilib qurilma va ular elementlarning tebranishi masalalari va ularda issiqlik rejimini tahlil qilishdagi issiqlik oqimini hisoblash masalalarini, elektromagnit jarayonlarni o‘rganishdagi elektr va magnit maydonlarini o‘rganish masalalarini, qurilmalar elementlarining mustahkamligini hisoblashda mexanik kuchlanish va deformatsiyalarni o‘rganish masalalarini, biologik turlarning ko‘payish jarayonlari masalalarini, tibbiy kasalliklarning o‘zgarishi jarayonlari masalalarini va boshqa amaliy masalalarni keltirishimiz mumkin. Bu jarayonlarning matematik modellari bir biriga juda o‘xshash yoki aynan bir xil bo‘lishi ham mumkin, ammo ularning tabiati turlicha ekanligini esdan chiqarmasligimiz lozim.

Afsuski, ko‘plab amaliy masalalarning matematik modellari juda ham murakkab differensial tenglamalar bilan ifodalanishi mumkinki, ularning aniq yechimini hamma vaqt ham topib bo‘lmaydi yoki juda ham qiyinchilik bilan bunga erishish mumkin bo‘ladi. Bu holat ayniqsa tenglamalarning nochiziqliligida yoki tartibi yuqoriroq bo‘lganda yaqqol namoyon bo‘ladi. Ana shunday hollarda ularning ham sodda va ham murakkab ko‘rinishida yechish uchun kompyuterdan unumli foydalanish imkoniyatlari mavjud. Buning uchun amaliy masalalarning differensial tenglamalarini yechishda ko‘plab taqribiy usullar yordam beradi.

Yuqorida ta'kidlaganimizdek, mazkur ishda o‘rganiladigan oddiy differensial tenglamalarni o‘z ichiga olgan amaliy masalalarning matematik modeli (masalan, muhandislikning kichik tebranishlar masalalari) yoki Koshi masalasiga yoki chegaraviy masalaga olib kelinadi.

Oddiy differensial tenglamalar bilan bog‘liq dastlabki tushunchalarni keltiraylik.

Differensial tenglama deb x erkli o‘zgaruvchini, izlanayotgan $y = f(x)$ funksiyani va uning y', y'',. . . , $y^{(n)}$ hosilalarini o‘z ichiga olgan tenglamaga aytiladi. Differensial tenglama

$$F\,(x, y, y', y'',. . . , y^{(n)}) = 0\ ,$$

kabi belgilanadi, bu yerda n – eng yuqori tartibli hosila bo‘lib, u *differensial tenglamaning tartibi* deb ataladi. Agar izlanayotgan funksiya faqat bitta erkli o‘zgaruvchidan bog‘liq bo‘lsa, u *oddiy differensial tenglama* deb ataladi. Differensial tenglama yechimining grafigi shu *tenglamaning integral egri chizig‘i* deb ataladi.

Bu differensial tenglamaning aniq yoki taqribiy yechimini topish uchun qo‘shimcha shartlar zarur bo‘ladi. Bu shartlar ikki turda bo‘lishi mumkin:

- *boshlang‘ich shartli Koshi masalasi*, bunda qo‘shimcha shart erkli o‘zgaruvchining bitta qiymatida berilgan bo‘ladi, masalan, $x=a$ nuqtada funksiyaning y_0 qiymati, balki y_0', y_0'' va hokazo qiymatlari ham berilgan bo‘lishi mumkin;
- *chegaraviy masala* – chegaraviy shartlar bilan berilgan masala, bunda qo‘shimcha shartlar erkli o‘zgaruvchining ikki yoki undan ortiq nuqtalarda beriladi, masalan, $x=a$ nuqtada funksiyaning y_a qiymati va $x=b$ nuqtada funksiyaning y_b qiymati.

Masalan, faraz qilaylik, moddiy nuqta OX o‘qi bo‘ylab harakat qilsin. Harakat funksiyasi $f(t)$ bo‘lsin. Bundan tashqari biror $t=t_0$ momentda uning absissasi x_0 qiymatni qabul qilsin. Shu moddiy nuqtaning harakat qonunini toping.

Bu masalaning matematik modeli ushbu

$$\frac{dx}{dt} = f(t) \tag{1.1}$$

differensial tenglama va

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

boshlang‘ich shart ko‘rinishi bilan ifodalanadi.

Bitta differensial tenglamani bir necha funksiyalar qanoatlantirishi mumkin, shuning uchun differensial tenglamalar nazariyasining asosiy maqsadi berilgan tenglamaning barcha yechimlarini topish va ularning xususiyatlarini o‘rganishdan iborat.

Bu maqsadga erishish uchun hozirgi kubda bizning qo‘limizda maxsus matematik paketlar mavjud. Bular Maple, MahCad, MATLAB, Mathematica va hokazo. Ana shu paketlardan foydalangan holda oddiy differensial tenglamalarni yechishimiz mumkin bo‘ladi.

Ammo yana bir masalani oydinlashtirish lozim bo‘ladi. Bu ham bo‘lsa shunday savolga javob berish kerak: har qanday differensial tenglamalarni ana shunday yo‘l bilan yechish mumkinmi?

Albatta, yo‘q. Unda nima qilish kerak?

Ana shunday holda bizga taqribiy hisob usullari yordam beradi.

Ulardan unumli foydalangan holda qo‘yilgan maqsadga yetarlicha aniqlikda erishish mumkin. Bunda albatta masalaning turi, undagi funksiyalarning xarakteriga qarab har xil taqribiy hisob usullarini qo‘llash mumkin.

Quyida ana shunga erishish uchun birinchi, ikkinchi va undan yuqori tartibli oddiy differensial tenglama, ularning umumiy va xususiy yechimlari, ularni taqribiy usulda topish, qay hollarda matematik paketlardan qanday foydalanish mumkinligi haqida so‘z yuritiladi.

Bularni bosqichma-bosqich qarab chiqaylik.

Buning uchun esa oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechishning hisoblash usullari va ularning xususiyatlari bilan yaqindan tanishishni talab qiladi. Bu bilan birga shunday masalalar ham uchraydiki, ularni mavjud usullar bilan emas, balki ularning modifikatsiyasi, yangi uslubi va algoritmi bilan yechish lozim bo‘ladi.

Hozirda mavjud ana shunday taqribiy usullar ikki guruhga bo‘linadi: oddiy differensial tenglamalar bilan berilgan masalalarni yechishning bir qadamli va ko‘p qadamli usullari.

Mazkur ishda ikki va undan yuqori tartibli oddiy differensial tenglamalar bilan berilgan masalalarni yechishning bir qadamli taqribiy usullari o‘rganiladi.

1.2. Koshi masalasini taqribiy yechishning bir qadamli usullari haqida

Ishning maqsadi – bu berilgan differensial tenglamani va uning boshlang‘ich shartini qanoatlantiruvchi yechimini (integralini) topishdan iborat.

Koshi masalasining chegaraviy masaladan farqli eng muhim jihati shundaki, bunda izlanayotgan yechim aniqlangan soha oldindan ko‘rsatilmasligi mumkin. Shunga qaramasdan, Koshi masalasini chegaraviy masaladan biri deb qarash mumkin.

Koshi masalasi va uning yechimi bilan bog‘liq muhim savollar quyidagilar:

- Koshi masalasining yechimi (hech bo‘lmaganda lokal yechimi) mavjudmi?

- agar shunday yechim mavjud bo‘lsa u holda uning mavjudlik sohasi qanday?

- ana shu yechim yagonami?

- agar yechim yagona bo‘lga, u korrektmi, ya'ni u boshlang‘ich ma'lumotlarga nisbatan (qaysidir ma'noda) uzluksizmi?

Koshi masalasi *yagona yechimga ega* deyiladi, agar u yagona $y = f(x)$ va boshqa birorta ham yechim integral egri chiziqni bermaydi.

Koshi masalasini sonli yechishning bir qadamli usullariga Eyler usuli (birinchi tartibli), uning modifikatsiyasi (ikkinchi tartibli) va Runge-Kutta usullari (yuqori tartibli) kiradi.

Bu usullarning bir qadamli yoki ko‘p qadamli deb atalishining sababi quyidagicha:

Koshi masalasi (1.1)-(1.2) ning $[a,b]$ kesmadagi taqribiy yechimini topish uchun dastlab bu kesmani N ta bo‘laklarga $a=x_0<x_1<\ldots<x_n$ kabi bo‘lamiz. Ana shu x_i tugun nuqtalarda topiladigan yechimning taqribiy qiymatlarini y_i deb belgilaymiz. Bunga mos ikki turdagi sonli sxema mavjud:

1) *oshkor sxema*: $y_i = F(y_{i-k}, y_{i-k+1},\ldots, y_{i-1})$ (a);

2) *oshkormas sxema*: $y_i = F(y_{i-k}, y_{i-k+1},\ldots, y_{i-1}, y_i)$ (b);

Bu yerda F - yaqinlashishni bog‘lovchi biror funksiya. Oshkor sxemada x_i tugun nuqtadagi y_i noma'lum taqribiy qiymat k ta tugunda oldindan aniqlangan taqribiy qiymatlar orqali aniqlanadi. Oshkormas sxemada esa x_i tugun nuqtadagi y_i noma'lum taqribiy qiymat rekurrent formula bilan emas, balki y_i ga nisbatan ma'lum bir qonuniyat bilan berilgan formuladan topiladi. Oshkor sxema hisoblash uchun juda sodda va qulay, ammo oshkormas sxema yaxshi yaqinlashishni beradi.

Xususan (a) va (b) formulalarda x_i tugun nuqtadagi y_i noma'lum taqribiy qiymatni topish $y_{i-k}, y_{i-k+1},\ldots, y_{i-1}$larning faqat bittasidan bog‘liq bo‘lsa, u holda bu *usul bir qadamli*, aks holda *ko‘p qadamli* deb ataladi.

Koshi masalasi uchun oshkor sxemani hosil qilish uchun Teylor qatoriga yoyishdan foydalaniladi. $y(x)$ funksiya uchun u quyidagicha yoziladi:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h\frac{dy(x_i)}{dx} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2y(x_i)}{dx^2} + \frac{h^3}{3!}\frac{d^3y(x_i)}{dx^3} + \ldots .$$

Agar $y(x)$ funksiya (1.1)-(1.2) masalaning yechimi bo‘lsa, u holda

$$y'(x_i) = f(x_i, y_i),$$

xuddi shunday

$$y''(x_i) = \frac{d}{dx} f(x,y)\bigg|_{x_i} = f_{x_i}'(x_i, y_i) + f(x_i, y_i) f_y'(x_i, y_i)$$

va hokazo qolgan $y^{(k)}$ hosilalarni ham xuddi shunday $f(x,y)$ funksiyaning hosilalari orqali ifodalash mumkin:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\left[f_{x_i}'(x_i, y_i) + f(x_i, y_i) f_y'(x_i, y_i)\right] + \dots . \qquad (1.3)$$

Taqribiy yechimni oshkor sxema bo‘yicha hisoblash uchun h ning ma'lum bir aniqlik darajasidagi ifodasini chiqarishda (1.3) ning bunga mos hadigacha qirqib olinadi.

1.3. Eyler usullari

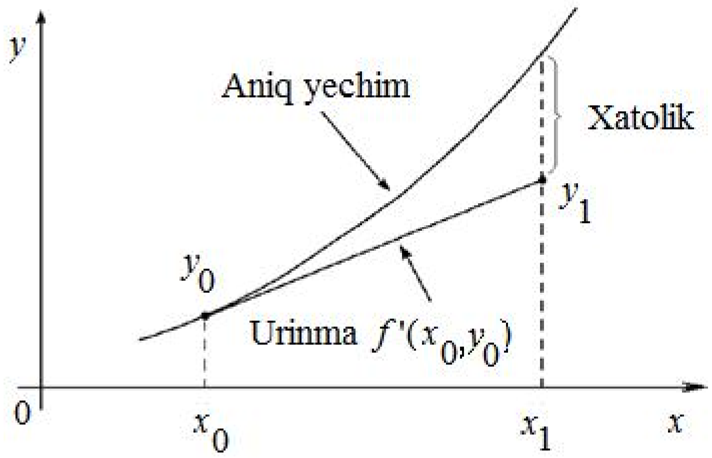
Eylerning klassik usuli. Bu usul Koshi masalasini taqribiy yechishning eng sodda usuli hisoblanadi. Buni birinchi tartibli (1.1) oddiy differensial tenglama va unga mos (1.2) boshlang‘ich shart uchun berilgan Koshi masalasini yechish misolida qarab chiqaylik.

Teylor qatoriga yoyilma (1.3) da h orttirma kichik, ya'ni $h \ll x_i$ desak, h ning ikkinchi darajasidan boshlab keyingi barcha qo‘shiluvchilarni kichik deb tashlab yuborishimiz mumkin. U holda (1.3) dan birinchi yaqinlashishda quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$y_{i+1} = y_i + hy_{x_i}' \quad \text{yoki} \quad y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i). \qquad (1.4)$$

Shunday qilib, (1.4) formula bo‘yicha izlanayotgan taqribiy yechimning x_i nuqtadagi $y(x_i)$ qiymati ma'lum bo‘lganda x_i nuqtadan h miqdorga siljigan $x_{i+1}=x_i+h$ nuqtadagi $y_{i+1}=y(x_i+h)$ taqribiy qiymatni topishimiz mumkin bo‘ladi. 1.1-rasmda Eyler usuli bilan yechishning boshlang‘ich qadami tasvirlangan.

Ushbu 1.1-rasmdan ko‘rinib turibdiki, Eyler usulining qadamdagi xatoligi $y(x)$ ning chiziqli approksimatsiyasidan foydalanishimizdan bog‘liq. Aniq yechim egri chiziqli grafigining (x_0,y_0) nuqtasiga o‘tkazilgan urinma og‘ish burchagining tangensi ma'lum va u $\frac{dy(x_0)}{dx}$ ga teng bo‘lsada, u x_0 dan x_1 ga qarab o‘tishda o‘zgarib boradi. Natijada h intervalning barcha nuqtalarida urinmaning boshlang‘ich og‘ish burchagi saqlangan holda y_1 ning qiymati shu xatolik bilan hisoblanadi. Buning natijasida Eyler usulining xatoligi har bir qadamda h^2 tartibga ega, chunki (1.3) ifodada h ning ikkinchi va undan yuqori tartibli qatnashgan hadlari tashlab yuborilgan edi. h qadamni maydalashtirish bilan *lokal xatolikni* kamaytirish mumkin.



1.1-rasm. Eyler usulining geometrik talqini.

Eylerning takomillashtirilgan usuli. Ushbu

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Koshi masalasi uchun berilgan h qadamdagi Eyler usulining aniqligini yanada oshirish mumkin. Buning uchun hisoblanayotgan qadamda $y(x)$ ning approksimatsiyasini yaxshilash lozim. Buni quyidagicha bajaramiz. $y(x)$ funksiyaning Teylor qatoriga yoyilmasi (1.3) da h^2 va $\frac{d^2 y(x_0)}{dx^2}$ hadlarni o‘z ichiga olgan qo‘shimcha hadni saqlab qolishimiz lozim. Buning uchun ikkinchi hosilaning chekli ayirmali approksimatsiyasini quyidagicha yozib olamiz:

$$\frac{d^2 y(x_0)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy(x_0)}{dx}\right) \approx \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \frac{y'(x_i + h) - y'(x_i)}{h}, \tag{1.5}$$

bu yerda $\Delta x = h, \quad y'(x_i + h) = \frac{dy\,(x_i + h)}{dx}$ va $y'(x_i) = \frac{dy\,(x_i)}{dx}$.

Bu hosil qilingan ifodani (1.3) ga qo‘yib, qatorning h^3 va undan yuqori tartibli hadlar ishtirok etgan qo‘shiluvchilarni tashlab yuborib, quyidagi tenglikni yozamiz:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + \frac{h}{2}\left[\frac{dy(x_i)}{dx} + \frac{dy(x_i + h)}{dx}\right].$$

Bu oxirgi ifodadagi hosilalarni Eyler usulidagi kabi approksimatsiyalarga almashtirib, mos qisqartirishlarni bajarganimizdan keyin quyidagi *Eylerning to‘g‘rilangan usuli* hisob formulasiga kelamiz:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right]. \qquad (1.6)$$

Bu (1.6) munosabat y_{i+1} uchun yechimni oshkormas ko‘rinishda beradi, chunki bu yerda y_{i+1} had tenglikning har ikkala tomonida ham ishtirok etmoqda. Oshkormas usullardan foydalanishdan maqsad, chunki bu usullar oshkor usullarga nisbatan odatda ustivorroq.

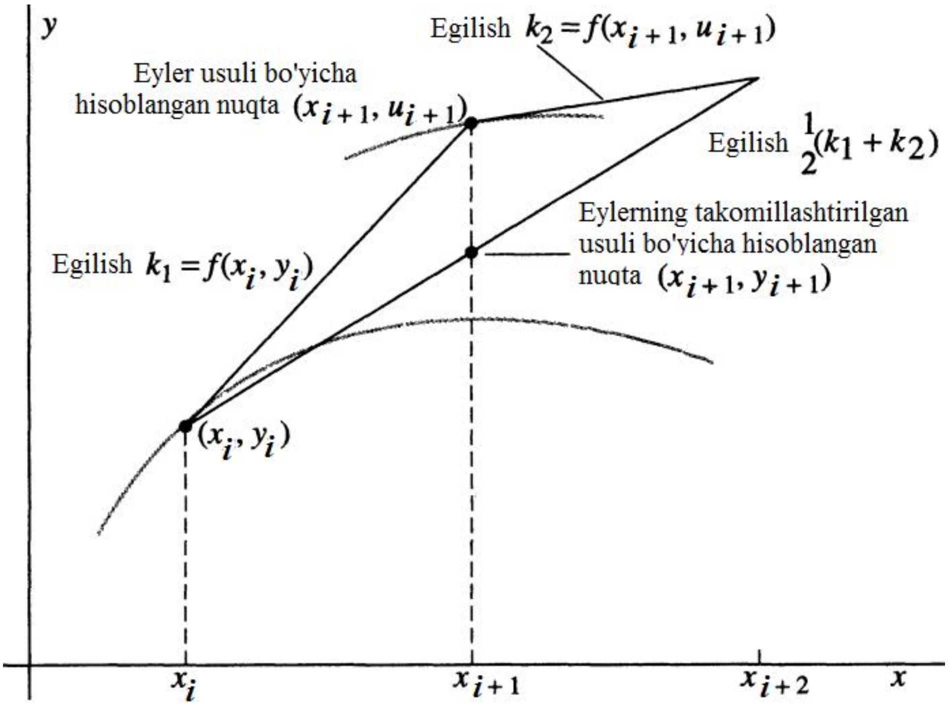
Ikkinchi tarafdan ushbu (1.6) formulani oshkor yechim deb ham qarashimiz mumkin. Buning uchun uning o‘ng tarafidagi ifodaga Eyler usulining (1.4) formulasi bo‘yicha hisoblangan y_{i+1}^* qiymatni qo‘yib, hisoblashlarni bajarsak. Bunday holda hisoblangan y_{i+1}^* qiymat *prognoz*, (1.6) formula bo‘yicha aniqlashtirilgan qiymat esa *korreksiya* deb ataladi. Agar Eyler usulining (1.4) formulasini (1.6) ning o‘ng tomoniga to‘gridan to‘g‘ri qo‘yib, hisoblashlarni bajarsak, bu formula *Eyler-Koshi usuli* (yoki *Xyun usuli*) deb ataladi.

Eylerning takomillashgan usuli yoki Eyler-Koshi usuli (yoki Xyun usuli)ning grafik ifodasi 1.2-rasmda tasvirlangan. 1.3-rasmdan ko‘rinib turibdiki, $y(x)$ egri chiziqning og‘ish o‘zgarishini ifodalovchi farq h qadamda sezilarli kamayadi.

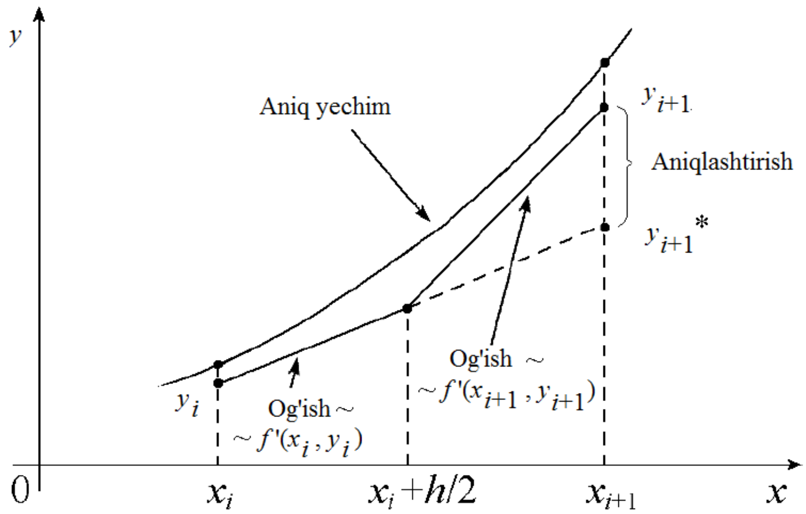
Endi yechimning xatoligini yanada kamaytirish uchun $y(x)$ ning yuqoriroq tartibli aniqlikka ega yanada yaxshiroq approksimatsiyasidan foydalanishimiz lozim bo‘ladi. Bu g‘oya Runge-Kutta usulida rivojlantirilgan.

Shunday qilib, Eylerning takomillashtirilgan usuli uchun iteratsion formulalar quyidagicha yoziladi:

$$k_1 = f(x_i, y_i), \quad u_{i+1} = y_i + hk_1, \quad k_2 = f(x_{i+1}, u_{i+1}), \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$



1.2-rasm. Eylerning takomillashgan usuli yoki Eyler-Koshi usuli (yoki Xyun usuli)ning grafigi



1.3-rasm. Eylerning takomillashtirilgan usulining geometrik talqini.

1-misol. Quyidagi Koshi masalasini Eyler usullari bilan yeching va natijalarni taqqoslang.

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1.$$

Yechish. Ushbu masalaning analitik yechimi: $y(x) = 2e^x - x - 1$.

Dastlabki qadamlardagi hisoblashlarni qo‘lda bajaramiz. Hisob formulalari:

$$u_{i+1} = y_i + h\cdot(x_i + y_i),$$

$$y_{i+1} = y_i + (h/2)\cdot[(x_i + y_i)+(x_{i+1} + y_{i+1})].$$

Hisoblashlarda $h = 0.1$; $x_0 = 0$; $y_0 = 1$ desak, u holda:

$u_1 = 1+(0.1)\cdot(0+1) = 1.1$,

$y_1 = 1+(0.05)\cdot[(0+1)+(0.1+1.1)] = 1.11$,

$u_2 = 1.11+(0.1)\cdot(0.1+1.11) = 1.231$,

$y_2 = 1.11+(0.05)\cdot[(0.1+1.11)+(0.2+1.231)] = 1.24205$ va hokazo.

Masalani sonli yechishning MATLAB dasturi:

```
function yp = f(x,y)
yp = x + y
function [X,Y] = impeuler(x,y,x1,n)
h = (x1 – x)/n;  X = x;   Y = y;
For i = 1:n;
        k1 = f(x,y);
        k2 = f(x+h,y+h*k1);
        k = (k1 + k2)/2;
        x = x + h;
        y = y + h*k;
        X = [X;x];
        Y = [Y;y];
 end
```

Hisob natijalari va ularni taqqoslash jadvali

x	**Eyler usuli**		**Eylerning takomillashtirilgan usuli**		**Aniq yechim**
	***h* = 0.1**	***h* = 0.005**	***h* = 0.1**	***h* = 0.005**	
0.1	1.1000	1.1098	1.1100	1.11034	1.11034
0.2	1.2200	1.2416	1.2421	1.24280	1.24281
0.3	1.3620	1.3977	1.3985	1.39971	1.39972
0.4	1.5282	1.5807	1.5818	1.58364	1.58365
0.5	1.7210	1.7933	1.7949	1.79744	1.79744
0.6	1.9431	2.0388	2.0409	2.04423	2.04424
0.7	2.1974	2.3205	2.3231	2.32749	2.32751

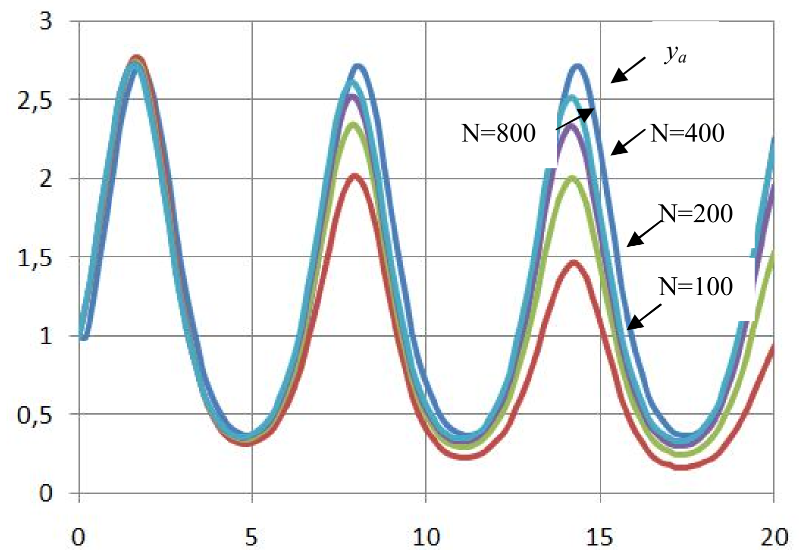
0.8	2.4872	2.6422	2.6456	2.65107	2.65108
0.9	2.8159	3.0082	3.0124	3.01919	3.01921
1.0	3.1875	3.4230	3.4282	3.43654	3.43656

Bu jadvaldan ko‘rinib turibdiki, Eylerning takomillashtirilgan usuli ba'zi amaliy masalalarning integral egri chiziqlarini (Koshi masalasining yechimini) qurishda juda ham samarali natija berar ekan.

2-misol. Eyler usuli va Eyler takomillashtirilgan usulining aniqligini yana bir bor teksirish maqsadida quyidagi Koshi masalasini sonli yechamiz:

$$\frac{dy}{dx} = y\cos x, \quad y(0) = 1.$$

Yechish. Hisoblashlarni $x \in [0,6\pi]$ oraliqda vizuallashtirib, taqqoslaymiz. Berilgan Koshi masalasining analitik yechimi $y(x) = e^{\sin x}$ ko‘rinishida. Bu aniq integral egri chiziq va Eyler usuli hamda Eylerning takomillashtirilgan usuli bilan olingan taqribiy egri chiziqlarning kesmani bo‘lishlar soni N ning har xil qiymatlarida aniq yechim (y_a) bilan taqqoslangan grafiklari 1.4-rasmda tasvirlangan.



1.4-rasm. Eyler usuli bilan olingan taqribiy egri chiziqlarning kesmani bo‘lishlar soni N ning har xil qiymatlarida aniq yechim (y_a) bilan taqqoslangan grafiklari.

Bu yerda Eyler usuli yetarlicha aniqlikdagi yechimni berayotganligini ko‘rib turibmiz (1.4-rasm), ammo bu holni har qanday Koshi masalasi uchun ham o‘rinli deb bo‘lmaydi. Endi Eyler takomillashtirilgan usulining aniqligini tekshiraylik. 1.4-rasmdagi natijalar shuni ko‘rsatadiki, bunday aniqlikka N=100 bo‘lgandayoq erishish mumkin ekan.

1.4. Runge-Kutta usullari

Eylerning to‘g‘rilangan usulida ikkinchi tartibli hosila $\dfrac{d^2y(x_i)}{dx^2}$ ni olish uchun (1.5) chekli ayirmali formuladan foydalaniladi, bunda birinchi hosilalar $y'(x_i)$ va $y'(x_i+h)$ ning qadamning boshlang‘ich va oxirgi nuqtalaridagi giymatlaridan foydalaniladi. Xuddi shu tartibda uchinchi tartibli hosila ham qadamning ikkita nuqtasidagi ikkinchi hosilaning qiymatlaridan foydalanib hisoblansa, u holda (1.3) yordamida uchinchi tartibli aniqlikdagi usulning hisob formulasini hosil qilishimiz mumkin. Buning uchun birinchi tartibli hosila $y'(x)$ ning x_i va x_{i+1} nuqtalar orasidagi qo‘shimcha nuqtadagi qiymatini aniqlash zarur bo‘ladi.

Xuddi shunday, yechimning xatoligini keskin kamaytirish imkonini beruvchi yuqoriroq tartibli usullarning hisob formulalarini chiqarish mumkin. Ammo bunday usullarning amaliy tadbiqi har bir qadamda qo‘shimcha oraliq nuqtalarni kiritishni talab qiladi, bu esa hisoblashlar hajmini oshirib boradi.

Yuqori aniqlikka ega bo‘lgan sonli usullarni qurishning bosqa uslublari ham mavjud. Ana shunday usullardan biri bu Runge-Kutta usullari guruhi bo‘lib, ularda differensial tenglama yechimi quyidagi yig‘indi bilan approksimatsiyalanadi:

$$y(x_i+h) \approx \xi(x_i,h) = y(x_i) + \sum_{n=1}^{p} A_n k_n(h)\,. \tag{1.7}$$

bu yerda A_n – yoyilma koeffisiyentlari; k_n – quyidagi funksiyalar ketma-ketligi:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)\,,$$

$$k_2 = hf(x_i+\alpha_2 h, y_i+\beta_{21}k_1)\,,$$

$$k_3 = hf(x_i+\alpha_3 h, y_i+\beta_{31}k_1+\beta_{32}k_2)\,, \tag{1.8}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$k_p = hf(x_i + \alpha_p h, y_i + \beta_{p,1}k_1 + \ldots + \beta_{p,p-1}k_{p-1}) .$$

$\alpha_m, \beta_{n,m}$, $0 < m < n \le p$ - biror parametrlar. Noma'lum A_n, α_m, $\beta_{n,m}$ parametrlarni quyidagi shartlardan tanlab olish mumkin:

$$\psi(0) = \psi'(0) = \psi''(0) = \ldots = \psi^{(k)}(0) = 0 , \qquad (1.9)$$

bu yerda $\psi(h) = y(x_i+h) - \xi(x_i,h)$ funksiya $\xi(x_i,h)$ – taqribiy yechimning $y(x_i+h)$ – nuqtadan chetlanishini ko‘rsatadi va u *bir qadamli usulning lokal xatoligi* deb ataladi. (7) da p parametrning kattalashishi aniq yechimni taqribiy yechimga almashtirishdagi xatolikni juda ham kichiklashtirish imkonini beradi.

Bir qadamli usullarning lokal xatoligini ushbu

$$\psi(h) = y(x_i + h) - y(x_i) - \sum_{n=1}^{p} A_n k_n(h)$$

formuladan hisoblaymiz.

Faraz qilaylik, $p = 1$. U holda (1.7) ni (1.9) ga qo‘yib, $\psi(0) = \psi'(0) = 0$ shartlardan $A_1 = 1$ va $\psi''(0) \neq 0$ ni hosil qilamiz, bu yerda esa

$$y(x_i + h) \approx y(x_i) + \sum_{n=1}^{p} A_n k_n(h) = y_i + k_1 = y_i + hf(x_i, y_i) . \qquad (1.10)$$

Bu (1.4) – Eyler formulasiga mos keladi. Xuddi shunday, Runge-Kutta usullari deb ataluvchi yuqori tartibli aniqlikka ega usullar formulalarini keltirib chiqarish mumkin. Masalan, $p = 3$ bo‘lganda uchinchi tartibli aniqlikka ega Runge-Kutta usullari hisob formulalari quyidagilar:

$$a)\quad \begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i), \\ k_2 &= hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1), \\ k_3 &= hf(x_i + h, y_i - k_1 + 2k_2), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3). \end{aligned} \qquad b)\quad \begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i), \\ k_2 &= hf(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{1}{3}k_1), \\ k_3 &= hf(x_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}k_2), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3). \end{aligned}$$

Masalan, Runge-Kutta usulining $p = 4$ bo‘lganda to‘rinchi tartibli aniqlikka ega varianti va uning qadamdagi xatoligi h^5 bo‘lib, hisob formulalari quyidagicha:

$$k_1 = hf(x_i, y_i),$$
$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1),$$
$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2),$$
$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3),$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Xususan, birinchi va ikkinchi tartibli Runge-Kutta usullari bu mos ravishda Eyler usuli va uning modifikatsiyalangan usulidir.

Yana bir variant, Koshi masalasini o‘zgarmas h qadamli 4-tartibli aniqlikka ega bo‘lgan Runge-Kutta usuli bilan yechish formulalari quyidagicha:

$$k_1 = f(x_i, y_i),$$
$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{3}k_1),$$
$$k_3 = f(x_i + \frac{2h}{3}, y_i - \frac{h}{3}k_1 + hk_2),$$
$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_1 - hk_2 + hk_3),$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4).$$

Bu 4-tartibli aniqlikka ega usullarda hisoblashlar hajmi 1- va 2-tartiblisiga nisbatan ko‘paygani bilan hisoblashlarning lokal xatoligi keskin kamayadi. Bu esa hisoblash qadamini oshirish va o‘z navbatida hisob vaqtini qisqartirish imkonini beradi.

3-misol. Quyidagi Koshi masalasini Runge-Kutta usuli bilan yeching va natijalarni taqqoslang.

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1.$$

Yechish. Ushbu masalaning analitik yechimi: $y(x) = 2e^x - x - 1$.

Dastlabki qadamlardagi hisoblashlarni qo‘lda bajaramiz:

1-qadamda: $h = 0.1$; $x_0 = 0$; $y_0 = 1$,

$k_1 = 0+1 = 1$,

$k_2 = (0+0.25)+(1+(0.25)\cdot(1)) = 1.5,$

$k_3 = (0+0.25)+(1+(0.25)\cdot(1.5)) = 1.625,$

$k_4 = (0.5)+(1+(0.5)\cdot(1.625)) = 2.3125,$

$y_1 = 1+(0.5/6)[1+2\cdot(1.5)+2\cdot(1.625)+2.3125] \approx 1.7969.$

2-qadamda: $y_2 \approx 3.4347$ va hokazo.

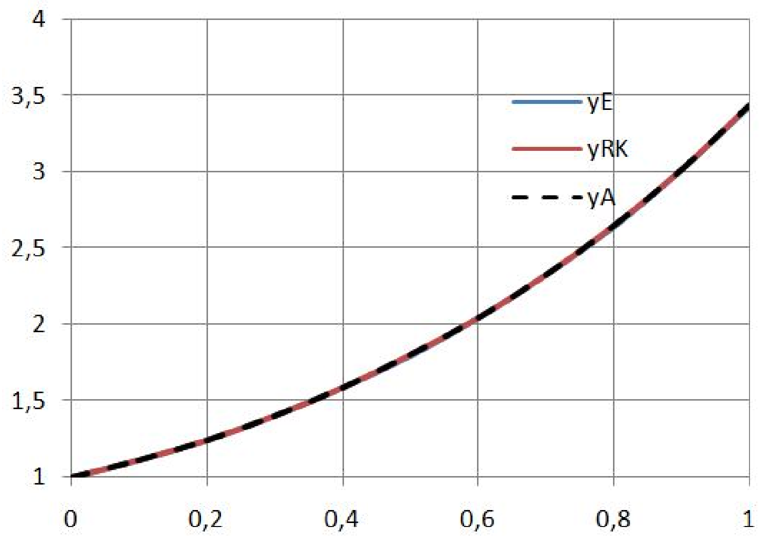
Qolgan hisoblashlar natijalartini jadvalda va 1.5-rasmda ko‘rish mumkin.

Masalani sonli yechishning MATLAB dasturi:

```
function yp = f(x,y)
yp = x + y
function [X,Y] = rk(x,y,x1,n)
h = (x1 – x)/n;
X = x;
x
Y = y;
y
For i = 1:n;
        k1 = f(x,y);
        k2 = f(x+h/2,y+h*k1/2);
        k3 = f(x+h/2,y+h*k2/2);
        k4 = f(x+h,y+h*k3);
        k = (k1 + 2*k2+2*k3+k4)/6;
        x = x + h;
        y = y + h*k;
        X = [X;x];
        Y = [Y;y];
 end
```

Hisob natijalari va ularni taqqoslash jadvali

x	**Eylerning takomillashtirilgan usuli (*h*=0.1)**	**Runge-Kutta usuli (*h* = 0.1)**	**Aniq yechim**
0.1	1.1100	1.110342	1.110342
0.2	1.2421	1.242805	1.242806
0.3	1.3985	1.399717	1.399718
0.4	1.5818	1.583648	1.583649
0.5	1.7949	1.797441	1.797443
0.6	2.0409	2.044236	2.044238
0.7	2.3231	2.327503	2.327505
0.8	2.6456	2.651079	2.651082
0.9	3.0124	3.019203	3.019206
1.0	3.4282	3.436559	3.436564



1.5-rasm. Runge-Kutta usuli bilan olingan 2-misolning natijalari grafigi.

Bu jadvaldan ko‘rinib turibdiki, Runge-Kutta usuli ba'zi amaliy masalalarning integral egri chiziqlarini (Koshi masalasining yechimini) qurishda Eylerning takomillashtirilgan usulidan ham ko‘ra juda ham samarali natija berar ekan.

1.5. Sodda tebranish masalalari va ularning yechimlari

Suyuqlik bilan ta’sirlashayotgan chiziqli ostsiylyatorning seysmik tebranishi masalasini misol tariqasida keltiraylik.

1-masala. Bo‘sh ostsilyatorning seysmik tebranishi tenglamasi quyidagicha:

$$m\ddot{y} + ry = -m\ddot{Y}_0,$$

u suyuqlik bilan ta’sirlalashayotganda esa sistemaning seysmik tebranishlari tenglamasi ushbu

$$m\ddot{y} + ry = -m\ddot{Y}_0 + P_0 + P_e, \qquad (1.11)$$

tenglama bilan ifodalanadi, bunda

m – qurilma massasi;

r – bikrlik;

P_0 – asosning Y_0 qonuniyat bilan harakatidan bog‘liq gidrodinamik bosimning inertsion tashkil etuvchisi;

$P_e = -\mu_0 \ddot{Y}_0$ - elastik siljish bilan bog‘liq gidrodinamik bosimning inertsion tashkil etuvchisi;

μ_0 – suyuqlikning biriktirilgan massasi deb ataluvchi proporsionallik koeffisiyenti (uning qiymati suyuqlikni saqlab turgan idish shaklidan va chegaraviy shartlardan bog‘liq).

Yechish. Bularni hisobga olsak, (1.11) tenglama quyidagicha yoziladi:

$$(m + \mu_0)\ddot{y} + ry = -(m + \mu_0)\ddot{Y}_0. \qquad (1.12)$$

Bu sistemaning xususiy tebranishlari chastotasi quyidagicha:

$$\widetilde{\omega} = \sqrt{\frac{r}{m + \mu_0}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \dfrac{\mu_0}{m}}},$$

bunda $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{r}{m}}$.

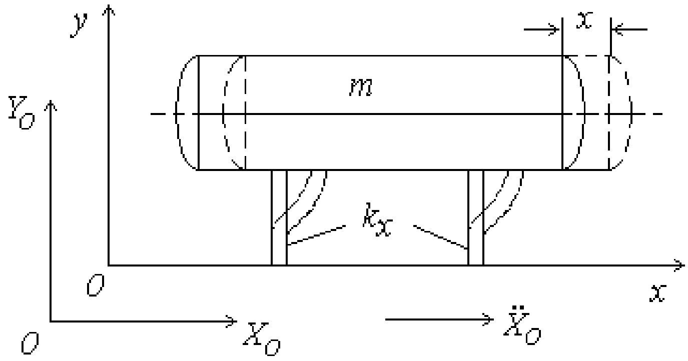
Nolga teng boshlang‘ich shartlarda (1.12) tenglamaning yechimi Dyuamel integrali yordamida quyidagicha yoziladi:

$$y(t) = -\frac{1}{\widetilde{\omega}} \int_o^t \ddot{Y}_0(\tau) \sin \widetilde{\omega}_0 (t - \tau) d\tau .$$

Yuqoridagi masalani yanada rivojlantirish mumkin.

2-masala. Chiziqli elastik tayanchlarda turgan va yig‘indi bikrligi k_x ga teng m massali jism, masalan, 16-rasmda tasvirlangan issiqlik almashinuvchan qurilmaning harakatini o‘rganaylik.

Faraz qilaylik, unga tayanchlarning elastik reaksiyasidan tashqari tezlikka proporsional noelastik qarshilik kuchi (balki “qovushoq” so‘nish, energiya yoyilishi, energiya dissipatsiyasi, energiya yo‘qotilishi, dempfirlash yoki Foygt-Kelvin gipotezasi bo‘yicha so‘nish) ta’sir qilayotgan bo‘lsin. Bunday sistemaning erkinlik darajasi birga teng bo‘lib, u *chiziqli nokonservativ ossilyator* deb ataladi.



16.-rasm. Tebranuvchan gidroelastik qurilma sxemasi.

Muvozanat holatidan chiqarilgan bunday ostsilyator so‘nuvchi tebranishlarni sodir qiladi va bu ushbu

$$\ddot{x} + 2\beta\omega\,\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (1.13)$$

differensial tenglama bilan tafsiflanadi, bunda β - nisbiy dempfirlanish; ω - sistemaning so‘nishsiz xususiy aylanma chastotasi (rad/s):

$$\omega = \sqrt{\frac{k_x}{m}}\,. \qquad (1.14)$$

Yechish. Agar β<1 bo‘lsa, u holda (1.13) tenglamaning yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$x = Ae^{-\beta\omega t}\sin(\omega^* t + \alpha), \qquad (1.15)$$

bu yerda $\omega^* = \omega\sqrt{1-\beta^2}$ - so‘nishni hisobga olgandagi chastota;

A va α lar boshlang‘ich shartlardan topiladi. Agar β = 1 bo‘lsa, u holda sistema tebranuvchan bo‘lmaydi, ya’ni massa aperiodik ravishda muvozanat holatiga intiladi va β ning qiymati “kritik so‘nish” deb ataladi.

Qurilmalar uchun odatda β << 1 bo‘lib, amaliyotda $\omega^* \approx \omega$ deb qabul qilinadi.

3-masala. Agar massaga $F(t)$ kuch ta’sir qilayotgan bo‘lsa, u holda uning ko‘chishlari ushbu

$$\ddot{x} + 2\beta\omega\,\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m} \qquad (1.16)$$

tenglama bilan ifodalanadi.

Yechish. Nolga teng boshlang‘ich shartlarda bu tenglamaning umumiy yechimini Dyuamel integrali yordamidagi quyidagicha yozamiz:

$$x(t) = -\frac{1}{m\omega^*}\int_o^t F(\tau)e^{-\beta\,\omega(t-\omega)}\sin\omega^*(t-\tau)d\tau\,. \tag{1.17}$$

(1.16) tenglamaning yechimini biror bir sonli usul (masalan, Runge-Kutta, Nyumark, Vilson va boshqa) yoki Furye akslantirishi yordamida ham topish mumkin.

4-masala. Agar asos $\ddot{X}_0(t)$ tezlanish (kinematik qo‘zg‘alish) bilan harakat qilayotgan bo‘lsa, u holda m massaga $F(t) = -m\ddot{X}_0(t)$ ko‘chirilish inertsiya kuchi ta’sir qilayotgan bo‘ladi. Buni (1.16) tenglamaga qo‘ysak, u holda asos bilan bog‘langan m massaning nisbiy ko‘chishlarini ifodalovchi quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\ddot{x} + 2\beta\,\omega\,\dot{x} + \omega^2\,x = -\,\ddot{X}_0(t)\,. \tag{1.18}$$

Yechish. Bu tenglamaning yechimi, (1.17) ga ko‘ra, quyidagicha topiladi:

$$x(t) = -\frac{1}{\omega^*}\int_o^t \ddot{X}_0(\tau)e^{-\beta\,\omega(t-\omega)}\sin\omega^*(t-\tau)d\tau\,. \tag{1.19}$$

Agar kinematik qo‘zg‘alish berilgan bo‘lsa, u holda m massaning absolyut tezlanishi $\ddot{x}_a = \ddot{x} + \ddot{X}_0$ ni aniqlash talab qilinadi. β<<1 bo‘lgan holda (1.19) ni differensiallab, ushbu

$$\ddot{x}_a \approx -(\omega^*)^2 x \tag{1.20}$$

tenglikni hosil qilamiz. Shunga ko‘ra (1.18) ni quyidagicha yozamiz:

$$\ddot{x}_a + 2\beta\,\omega\,\dot{x}_a + \omega^2\,x_a = -\,\omega^2\left[X_0(t) + \frac{2\beta}{\omega}\dot{X}_0(t)\right], \tag{1.21}$$

bunda qo‘zg‘alish tashqi ta’sirning $X_0(t)$ seysmogramma va $\ddot{X}_0(t)$ velosigrammasi orqali bo‘lishi kerak. Seysmogramma funksiyasi yoki uning jadvalidan sonli differensiallash yordamida $\dot{X}_0(t)$ va $\ddot{X}_0(t)$ lar topiladi.

5-masala. Gidrosistemalar elementlari va qurilmalardagi suyuqliklar tebranishining ko‘pgina masalalari usbu

$$\ddot{x} + \mu\,\dot{x} + \omega_*^{\,2}\,x + \beta\,x^3 = f(t) \qquad (1.22)$$

qovushoq qarshilikli va kubik kvazielastik xarakteristikali nochiziqli sistemaning majburiy tebranishi tenglamasini yechishga olib kelinadi, bu yerda

ω_* - sistemaning so‘nishsiz xususiy aylanma chastotasi (rad/s);

μ - qovushoq qarshilik koeffisiyenti;

β - kubik kvazielastik xarakteristika koeffisiyenti.

Yechish. Xususiy holda ta’sir kuchi $f(t) = F_0 \sin\omega t$ qonuniyat bilan berilgan bo‘lsa, u holda tebranuvchi sistemada qo‘zg‘alishlar A amplitudasining ω chastotasidan bog‘liqlik tenglamasi quyidagicha:

$$\left(\omega^2 - \omega_*^{\,2}\right)A - \beta A^3 + \sqrt{F_0^2 - (\mu A\omega)^2} = 0$$

Gidroelastiklik masalalaridan biri bo‘lgan deformatsiyalanuvchi quvurdagi suyuqlikning kavitatsion tebranishlari masalasi ushbu

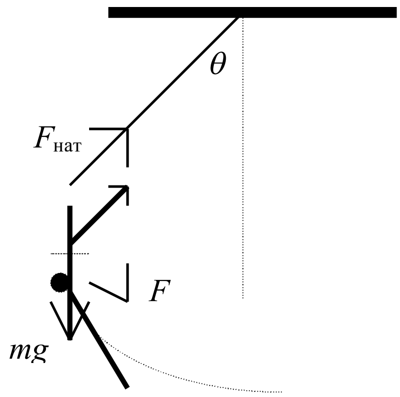
$$\ddot{x} + \mu\,\dot{x} + \omega_*^{\,2}\,x + \alpha\,x^2 + \beta\,x^3 + \gamma\,x^4 + \delta\,x^5 = -l\cos\omega t + C$$

tenglamani yechishga olib kelinadi. Bu tenglama berilgan boshlang‘ich $x_0 = x(0);\ \dot{x}_0 = \dot{x}(0)$ shartlarda yechiladi. Hosil bo‘lgan Koshi masalasini har xil analitik (masalan, darajali qator yordamida integrallash) va taqribiy hisob (masalan, Runge-Kutta, Kutta-Merson) usullaridan foydalanib yechish mumkin.

2-BOB.
KICHIK TEBRANISHLAR MASALASINI SONLI YECHISH VA NATIJALARNI VISUALLASHTIRISH

2.1. Matematik mayatnikning tebranishi masalalari

Masalaning qo'yilishi. Vertikaldan dastlabki og'ish burchagi ixtiyoriy bo'lgan matematik mayatnikning harakati masalasi qaraladi (2.1-rasm).



2.1-rasm. Matematik mayatnik.

Yuk osilgan ip cho'zilmaydigan, u holda mayatnikning erkinlik darajasi birga teng. Hisoblashlarning qulayligi uchun buni yuk osilgan ipning vertikaldan og'ish burchagi deb qabul qilish mumkin.

Matematik mayatnikning harakat differensial tenglamasi quyidagicha:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) \ . \qquad (2.1)$$

Kichik tebranishlar holida (kichik amplitudali tebranishlarda) $\sin(\theta)$ ni θ ga almashtirilsa bu tenglama kichik tebranishlar tenglamasi deb aytiladigan tenglamaga aylanadi. Bunday kichik tebranishlar haqidagi masala quyidagi ko'rinishdagi analitil yechimga ega:

$$\theta = A\cos(\omega\, t + \varphi), \qquad (2.2)$$

bu yerda

A – tebranish amplitudasi,

ω - tebranish chastotasi,

φ - boshlang‘ich faza.

A va φ ni boshlang‘ich shartlar yordamida θ_0 - boshlang‘ich burchak va скорость v_0 – boshlang‘ich tezlik orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

$$A = \sqrt{\theta_0^2 + \frac{v_0^2}{(l\omega)^2}}, \quad tg(\varphi) = -\frac{v_0}{l\omega\vartheta_0} . \tag{2.3}$$

Tebranish chastotasi: $\omega = \sqrt{l/g}$; tebranish davri: $T = 2\pi/\omega$, ko‘rinib turibdiki, kichik tebranishlrda bu parametrlar boshlang‘ich amplitudadan bog‘liq emas.

Shunday qilib, mayatnikning kichik tebranishlar – bu sodda trigonometrik funksiyalar bilan ifodalanuvchi garmonik harakatdan iborat ekan ((2.2) formulaga qarang).

Sonli eksperimentlar uchun tebranish tenglamasini birinchi tartibli ikkita tenglamalar sistemasi orqali quyidagicha ifodalab olish qulay:

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = x, \\ \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{g}{l}\sin(\theta) . \end{cases} \tag{2.4}$$

Bu yerda modelning kiritiladigan parametrlari quidagilar:

l - yuk osilgan ipning uzunligi;

θ_0 - mayatnikning boshlang‘ich og‘ish burchagi;

x_0 - boshlang‘ich burchak tezlik.

1-masala. Yuk osilgan ip cho‘zilmaydigan, uzunligi 1 birlikka teng, mayatnikning erkinlik darajasi birga teng. Bunday matematik mayatnikning harakat differensial tenglamasi quyidagicha :

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -g\sin(y_1). \end{cases}$$

bu yerda g – erkin tushish tezlanishi, g = 9,81.

Boshlang‘ich shartlar:

$$y_1(0) = 0; \; y_2(0) = 2.$$

Yechish. MATLAB dasturida oddiy differensial tenglamalar va ularning sistemasi uchun yozilgan Koshi masalasini sonli yechishning bir qator standart funksiyalari mavjud, bular, masalan,

ode45, ode23, ode113, ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb.

Bu funksiyalar har xil usullardan foydalanadi. Bu usullarda integrallash qadami avtomatik tarzda tanlanadi, shuning uchun uni oldindan berish shart emas. Foydalanuvchi bu funksiyalar uchun nisbiy yoki absolyut xatolikni o‘zini qanoatlantiruvchi holat uchun oldindan berishi mumkin (jimlik qoidasiga ko‘ra bu 10^3 va10^6 ga teng).

Bu funksiyalardan ode45, ode23, ode113 – noqat'iy masalalarni yechish uchun, ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb – qat'iy masalalarni yechish uchun foydalaniladi.

Bu funksiyalarni chaqirishning umumiy shaklini quyidagicha yozamiz:

[t, y] = ode***(fun, tspan, y0)

bu yerda ode*** – yuqorida qayt etilgan funksiyalardan birining nomi; fun – differensial tenglamaning o‘ng tomonini hisoblash funksiyasi ko‘rsatgichi, masalan, t – erkli va y – erksiz o‘zgaruvchilar; tspan – integrallash oralig‘i (eng sodda holda bu vektor bo‘lib, $[t_0,T]$ kesmani ifodalaydi, t_0 – vaqtning boshlang‘ich qiymati, T – vaqtning oxirgi qiymati); y0 – vaqtning t_0 momentida izlanayotgan funksiyaning qiymatlaridan iborat vektor.

Chiqishda t – vaqt qiymatlarining ustuni; y – har bir satri t vaqtga mos yechimlar matritsasi.

Agar differensial tenglamaning o‘ng tomoni biror qo‘shimcha paramatrlardan bog‘liq bo‘lsa, masalan, options – opsiya (odeset funksiyasini saqiradi) yoki p1, p2,..., - parametrlar, u holda unga murojaat quyidagicha yoziladi:

[t, Y] = ode***(@fun, tspan, y0, options, p1, p2, . . .)

bu yerda

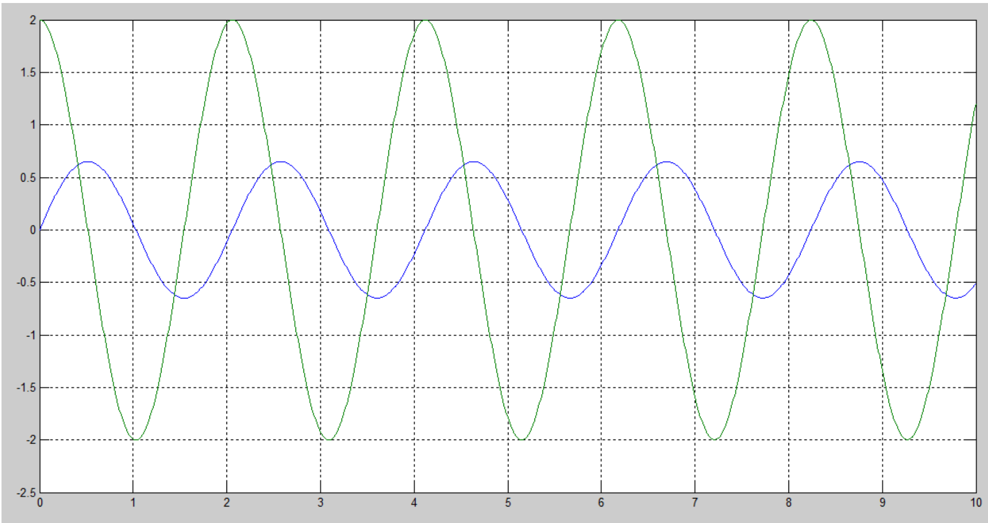
options = odeset('name1 ', value1, 'name2 ', value2,. . .)

options = odeset(oldopts, 'name1 ', value1,. . .)

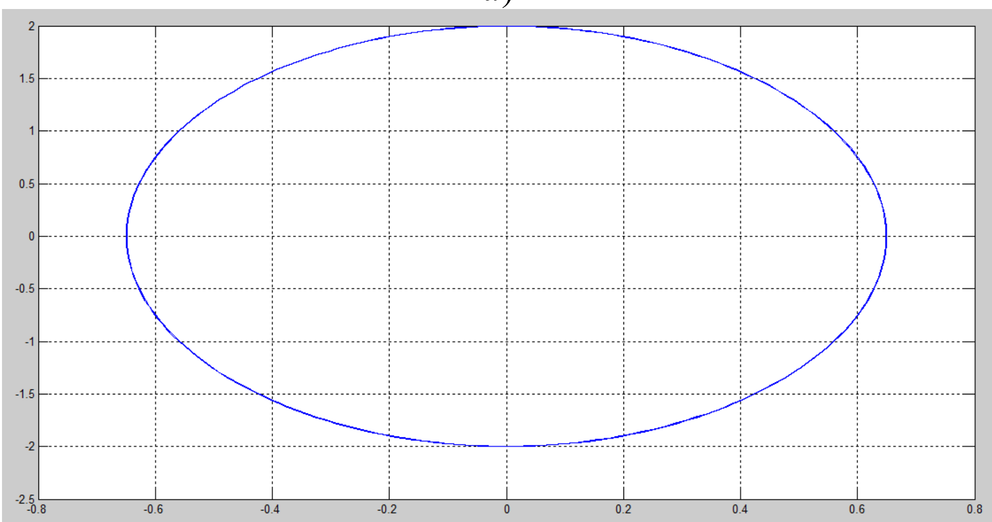
Endi shu funksiyalardan foydalangan holda quyidagi qiziqarli amaliy masalalarni sonli yechamiz. Ushbu masalani MATLAB matematik paketidan foydalanib, sonli yechamiz (2.2-rasm).

Dastur matni:

```
>> g = @(t, y) [y(2); - 9.81*sin(y(1))];
>> [t, ya] = ode45(g, [0:0.01:10], [0 2]);
>> plot(t,ya(:,1),t,ya(:,2))
>> grid on
```



a)



b)

2.2-rasm. 1-masala uchun: *a*) $y_1(t)$ va $y_2(t)$ integral egri chiziqlar grafiklari; *b*) fazoviy portret.

Mayatnikning tebranishi so‘nmaydi, chunki bu masalada tashqi muhit tasiri, ya’ni so‘ndirgich yo‘q.

2.2. Osilish nuqtasida ishqalanishga ega bo‘lgan mayatnikning tebranishi masalasi

Osilish nuqtasida ishqalanishga ega bo‘lgan mayatnikning tebranishi quyidagi tenglama bilan ifodalanadi:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -2\eta\frac{d\theta}{dt} - \omega^2 \sin(\theta) \tag{2.5}$$

Bu yerda ham xuddi yuqoridagidek,

$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ - tebranish chastotasi,

η - ishqalanish koeffisiyenti.

Bu (2.5) tenglamani qulaylik uchun, xuddi yuqoridagidek, quyidagi ikkita tenglamalar sistemasiga keltiramiz:

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = x, \\ \dfrac{dx}{dt} = -2\eta x - \omega^2 \sin(\theta)\,. \end{cases} \tag{2.6}$$

Ishqalanish, xususan, η va ω parametrlardan bog‘liq holda hal xil harakat rejimini keltirib chiqaradi: so‘nuvchi tebranish va tebranishsiz so‘nish.

Tadqiqot masalalaridan biri - bu fazaviy tekislikda ikkita harakat rejimini ajratib turuvchi, mayatnikning boshlang‘ich og‘ishidan bogliq bo‘lgan (η, ω) bog‘lanish chiziqlarini chizishdan iborat.

Modelning kiritiladigan parametrlari:

ω - mayatnikning kichik xos tebranishlari chastotasi;

θ_0 - mayatnikning boshlang‘ich og‘ish burchagi;

x_0 - boshlang‘ich burchak tezlik;

η - ishqalanish koeffisiyenti.

1-masala. Yengil, ammo juda mustahkam ipga osilgan yuk, xuddu mayatnik kabi, lekin yetarlicha katta burchakka, hatto 360^0 ga ham burila oladi. Bu aslida haqiqatga juda yaqin bo‘lmasada, faraz qilaylik, bunday mayatnikning harakatini asta sekin so‘ndiruvchi ishqalanish kuchi shu mayatnikning tezligiga to‘g‘ri proporsional bo‘lsin. Yana faraz qilamizki, mayatnik uzunligi 1 m, mayatnikning uchiga ilingan yukning og‘irligi 1 kg, ishqalanish koeffisiyenti esa 0,5 ga teng bo‘lsin. Bunday holda mayatningning harakat differensial tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$y''(t)+0{,}5y'(t)+g\cdot\sin(y(t))=0,$$

bu yerda g – erkin tushish tezlanishi, $g = 9{,}81\ m/s^2$.

Bu tenglamani ikkita oddiy differensial tenglamalar sistemasi ko‘rinishida yozib olamiz:

$$y'_1(t) = y_2(t),$$
$$y'_2(t) = -0.5\ y_2(t) + g\cdot\sin(y_1(t)).$$

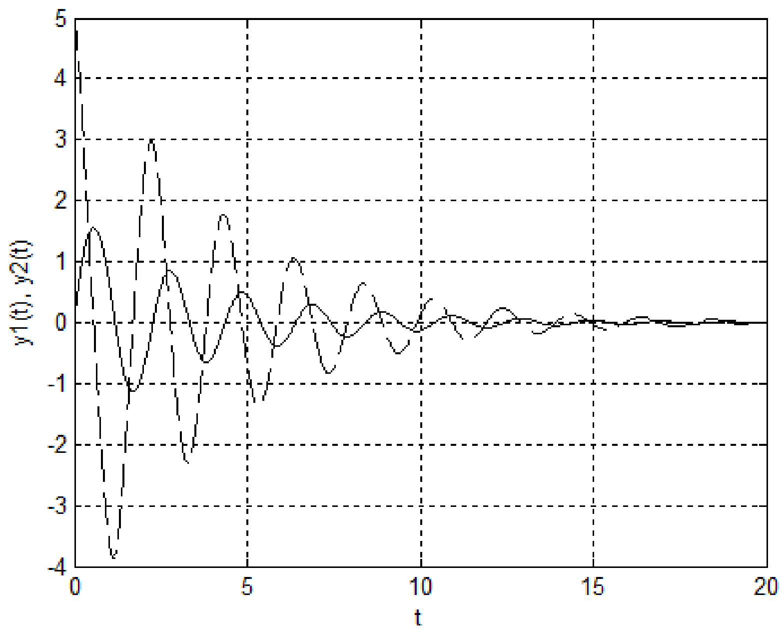
Boshlang‘ich shartlar:

$$y_1(0) = 0;\ \ y_2(0) = 5.$$

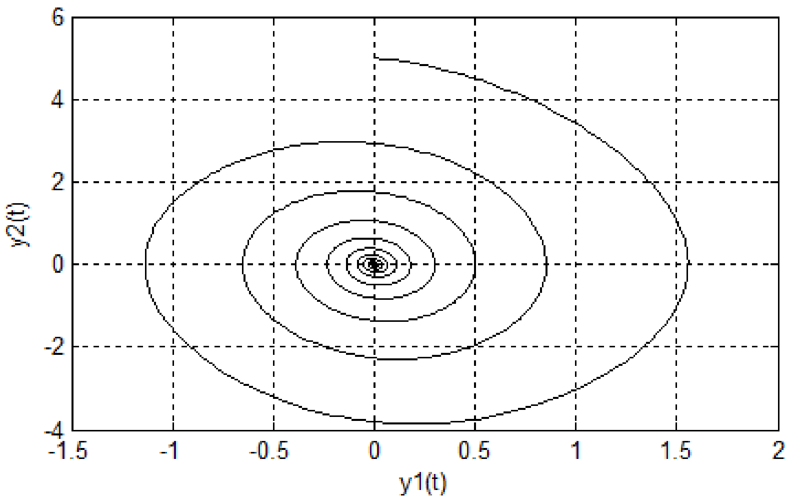
Yechish. Bu Koshi masalasini sonli yechishning MATLAB dasturi matni va uning natijasi quyidagicha (4-rasm):

```
>> g=@(t,y) [y(2); -0.5*y(2)-9.81*sin(y(1))];
>> [t,ya]=ode45(g,[0:0.01:20], [0 5]);
>> plot(t,ya(:,1), t,ya(:,2))   yoki    plot(ya(:, 1), ya(:,2))
```

Bu yerda y1(t) – mayatnikning burilish burchagini, y2(t) – uning tezligini ifodalaydi. 2.3-rasmdan ko‘rinib turibdiki, harakat (0;5) nuqtadan boshlanib, soat strelkasi yo‘nalishida harakatlanib, (0;0) nuqtaga beralib keladi. Bu degani mayatning o‘ng yoki chapga tebranib borib, asta sekin so‘nib borati va t=20 da u tinch holatga keladi.



a)

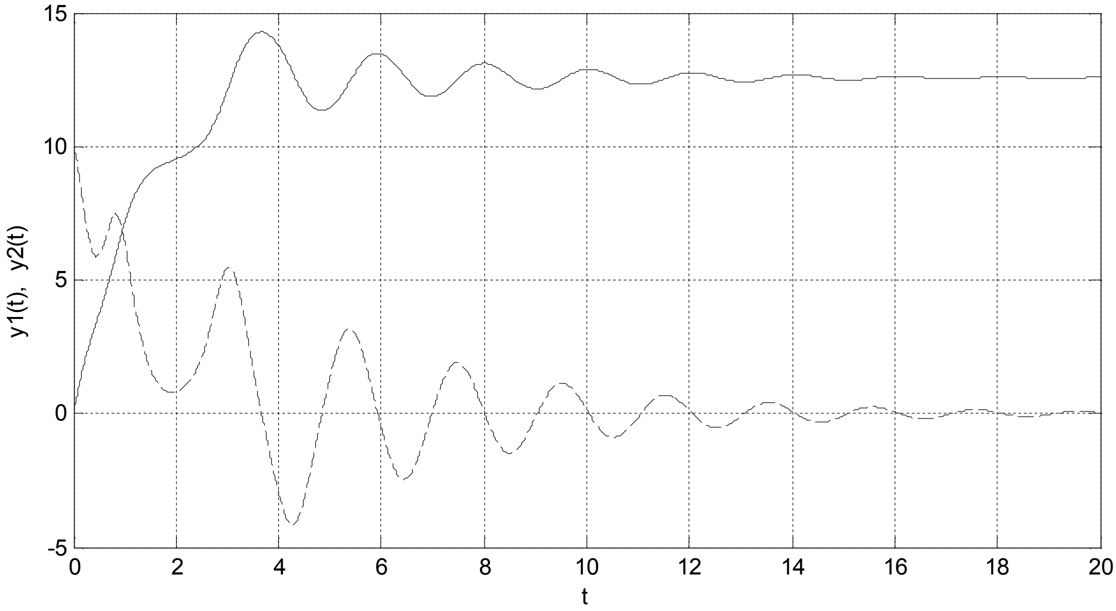


b)

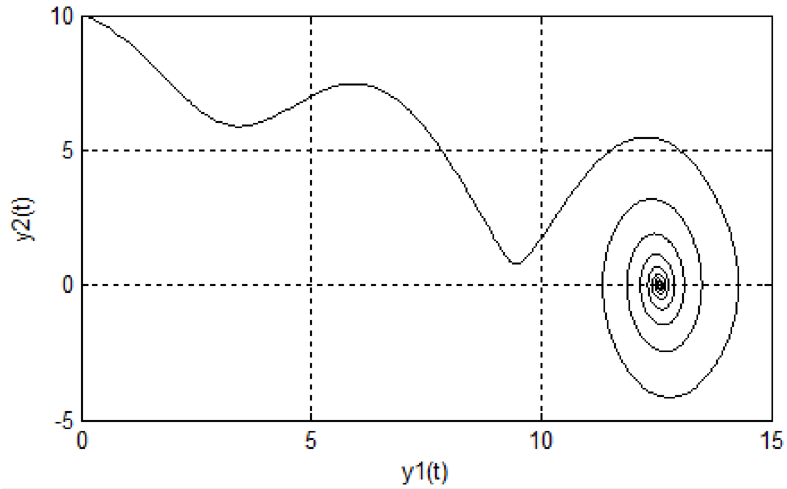
2.3-rasm. 1-masala uchun: *a*) $y_1(t)$ va $y_2(t)$ integral egri chiziqlar grafiklari; *b*) fazoviy portret.

2-masala. Yuqoridagi 1-masala shartlaridan kelib chiqib, agar mayatnink tebranishining boshlang'ich tezligini oshirsak, fazoviy portret quyidagicha (2.4-rasm):

```
>> g=@(t,y) [y(2); -0.5*y(2)-9.81*sin(y(1))];
>> [t,ya]=ode45(g,[0:0.01:20], [0 10]);
>> plot(t,ya(:,1), t,ya(:,2))   yoki    plot(ya(:, 1), ya(:,2))
```



a)



b)

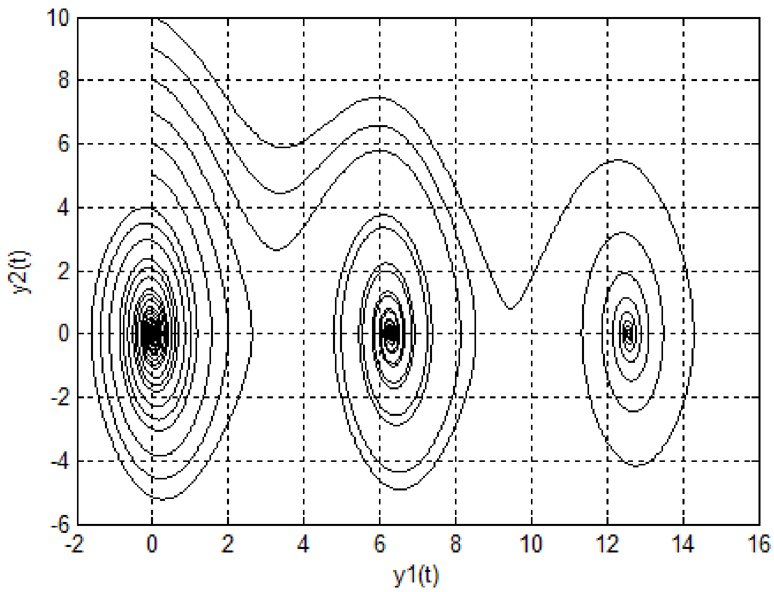
2.4-rasm. 2-masala uchun *a*) $y_1(t)$ va $y_2(t)$ integral egri chiziqlar grafiklari;

b) fazoviy portret.

Bu 2.4-rasm shuni ko‘rsatadiki, mayatnik harakatini (0;10) nuqtadan boshlab, burchak 14 radiandan oshadi, egri chiziq esa (12,5;0) nuqtaga intiladi. Agar buni yanada aniqroq aytadigan bo‘lsak, mayatnink (4π;0) nuqta atrofida buraladi (xuddi mayatnikning 0 radian atrifidagi harakati kabi). Demak, mayatnik so‘nishdan oldin ikkita to‘la aylanish davrini o‘tadi. Mayatnikning harakat tezligi π gacha kamayib boradi, keyin u vertikal holatga keladi va impuls oladi. Bu impuls uni 3π da yana bir bor vertikal holatga keltiradi.

3-masala. Faraz qilaylik, mayatnikning harakat boshlaganidan boshlab bir marta to‘la aylanishini talab qilgan hol uchun boshlang‘ich tezlikning eng kichik qiymatini aniqlaylik. Buning uchun boshlang‘ich tezlik 5 dan 10 gacha o‘zgarsin, u holda bu qiymatda burilish burchagi π dan oshib ketmaydi (2.5-rasm).

```
>> g=@(t,y) [y(2); -0.5*y(2)-9.81*sin(y(1))];
>> hold on
>> for a=5:10
       [t,ya]=ode45(g, [0:0.01:20.0], [0,a]);
       plot(ya(:,1), ya(:,2))
   end
>> hold off
```



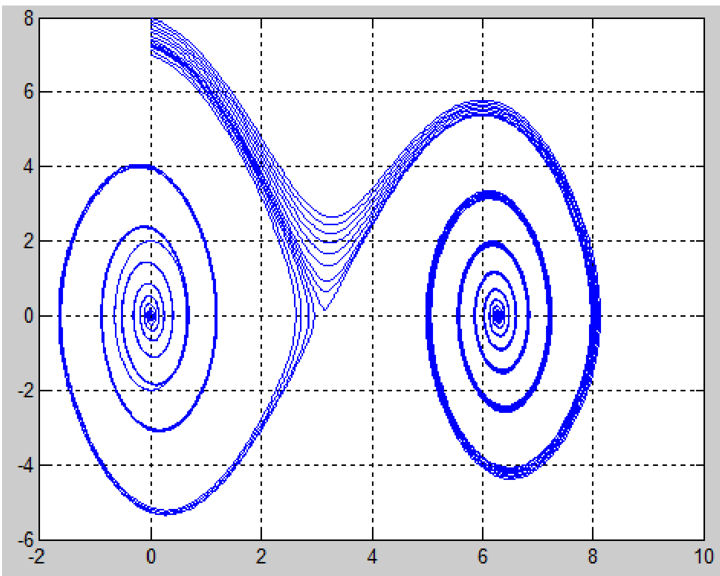
2.5-rasm. 3-masala uchun: fazoviy portret.

4-masala. Agar yuqoridagi masalada boshlng‘ich tezlikni 5, 6, 7 desak, burchak π dan katta bo‘lmaydi. Agar uni 8, 9, 10 desak, u holda mayatning juda kuchli tebranib boshlaydi. Buni 7 va 8 oralig‘ida kuzataylik (2.6,*a*-rasm):

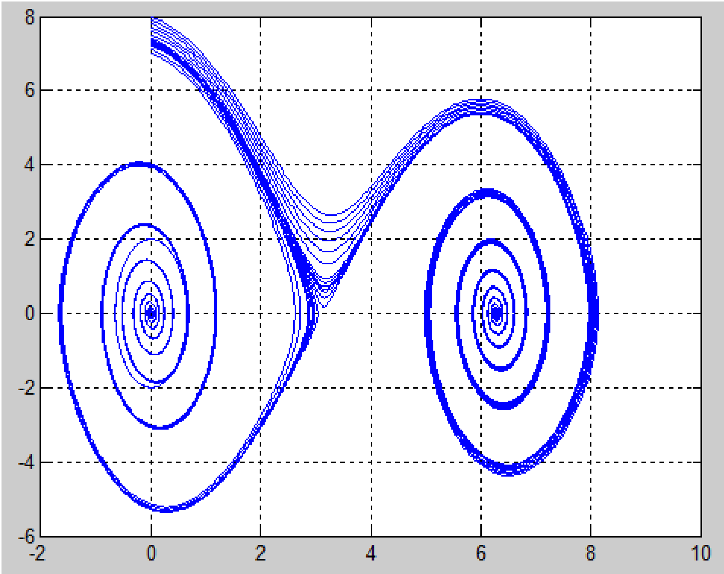
```
>> g=@(t,y) [y(2); -0.5*y(2)-9.81*sin(y(1))];
>> hold on
>> for a=7.0:0.1:8.0
        [t,ya]=ode45(g, [0:0.01:20.0], [0,a]);
        plot(ya(:,1), ya(:,2))
   end
>> hold off
```

Agar uni 7.2 da 7.4 gacha desak, u holda mayatning juda kuchli tebranib boshlaydi. Buni 7 va 8 oralig‘ida kuzataylik (2.6,*b*-rasm):

```
>> g=@(t,y) [y(2); -0.5*y(2)-9.81*sin(y(1))];
>> hold on
>> for a=7.2:0.02:7.4
        [t,ya]=ode45(g, [0:0.01:20.0], [0,a]);
        plot(ya(:,1), ya(:,2))
   end
>> hold off
```



a)



b)

2.6-rasm. 4-masala uchun: fazoviy portret.

Bu natijalar shuni ko‘rsatadiki, eng kichik zaruriy tezlik 7.25 va 7.30 oralig‘ida ekan.

2.3. Mayatnikning majburiy tebranishlari

Mayatnikning majburiy tebranishlari quyidagi tenglama bilan ifodalanadi:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -2\eta\frac{d\theta}{dt} - \omega^2\sin(\theta) + f\cos(\lambda\, t)\,, \qquad (2.7)$$

bu yerda

f - amplituda;

λ - majburlovchi kuch chastotasi.

Yuqoridagi (2.7) tenglama quyidagi tenglamalar sistemasiga teng kuchli:

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = x, \\ \dfrac{dx}{dt} = -2\eta\, x - \omega^2\sin(\theta) + f\cos(\lambda\, t)\,. \end{cases} \qquad (2.8)$$

Tadqiqot modelining kiritiladigan parametrlari:

ω – mayatnik xos kichik tebranishlarining chastotasi;

θ_0 – mayatnikning boshlang‘ich chetlanishi;

x_0 – boshlang‘ich burchak tezlik;

η - ishqalanish koeffisiyenti;

f – majburlovchi kuch amplitudasi;

λ – majburlovchi kuch chastotasi.

1-masala. Tebranishning bosh tenglamasida ishqalanish va tashqi majburlovchi kuchni e’tiborga olingan holda mayatnikning kichik tebranishlarini tadqiq qilamiz.

Xuddu yuqoridagi masaladagidek, yengil, ammo juda mustahkam ipga osilgan yuk, xuddu mayatnik kabi, lekin yetarlicha katta burchakka, hatto 360^0 ga ham burila oladi. Bu aslida haqiqatga juda yaqin bo‘lmasada, faraz qilaylik, bunday mayatnikning harakatini asta sekin so‘ndiruvchi ishqalanish kuchi va tashqi majburlovchi kuch shu mayatnikning tezligiga to‘g‘ri proporsional bo‘lsin. Yana faraz qilamizki, mayatnik uzunligi 1 m, mayatnikning uchiga ilingan yukning og‘irligi 1 kg, ishqalanish koeffisiyenti esa 0,5 ga teng bo‘lsin. Bunday holda mayatningning harakat differensial tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$y''(t)+0{,}5\cdot y'(t)-g\cdot\sin(y(t))\ -f\cdot\cos(\lambda\cdot t)=0,$$

bu yerda g – erkin tushish tezlanishi, $g = 9{,}81\ m/s^2$.

Bu tenglamani ikkita oddiy differensial tenglamalar sistemasi ko‘rinishida yozib olamiz:

$$y'_1(t) = y_2(t),$$

$$y'_2(t) = -0.5\cdot y_2(t) + 9.81\cdot\sin(y_1(t)) +0.6\cdot\cos(2\cdot t).$$

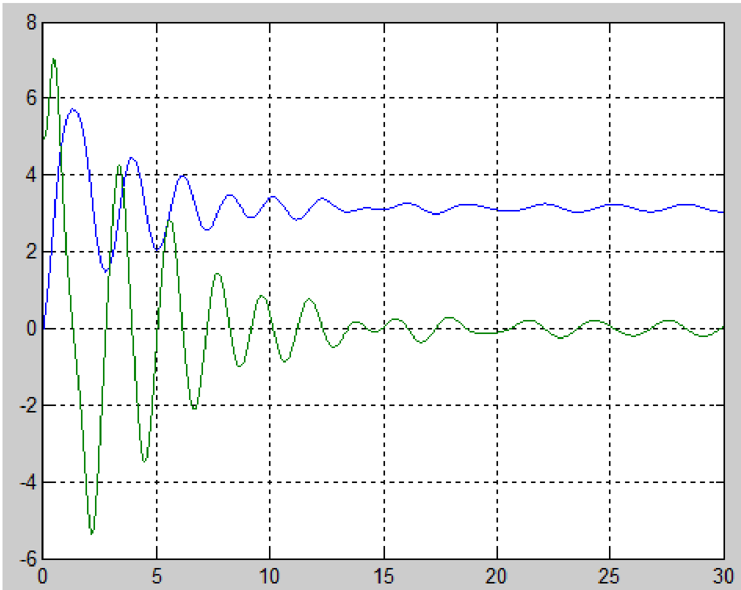
Boshlang‘ich shartlar:

$$y_1(0) = 0;\ \ y_2(0) = 5.$$

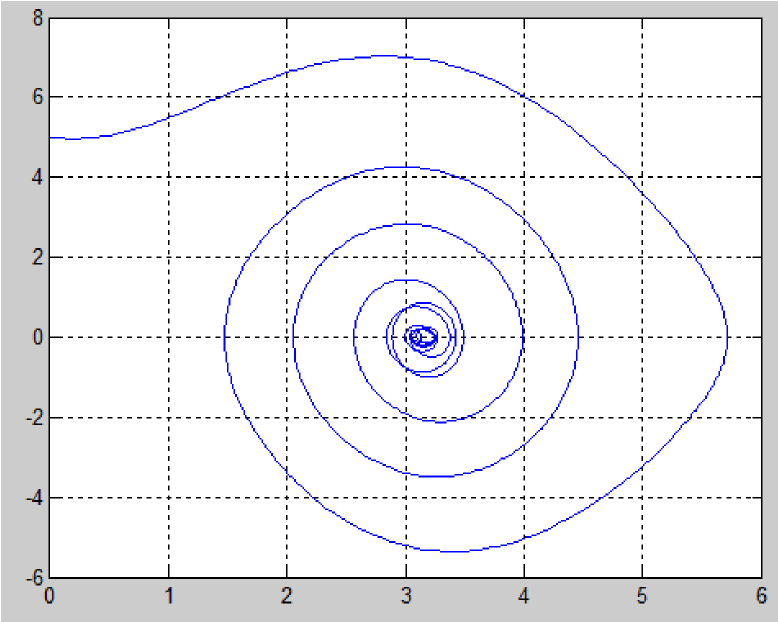
Yechish. Bu Koshi masalasini sonli yechishning MATLAB dasturi matni va uning natijasi quyidagicha (2.7-rasm):

```
>> g=@(t,y) [y(2); -0.5*y(2)+9.81*sin(y(1))+0.6*cos(2*t)];
>> [t,ya]=ode45(g,[0:0.01:30], [0 5]);
>> plot(t,ya(:,1), t,ya(:,2)) ;   yoki   plot(ya(:, 1), ya(:,2)) ;
>> grid on
```

Bu yerda y1(t) – mayatnikning burilish burchagini, y2(t) – uning tezligini ifodalaydi. 6-rasmdan ko'rinib turibdiki, harakat (0;5) nuqtadan boshlanib, soat strelkasi yo'nalishida harakatlanib, (0;0) nuqtaga buralib keladi. Bu degani mayat o'ng yoki chapga tebranib borib, asta sekin so'nib borati va t=30 da u juda ham kichik tebranishli tinch holatga keladi.



a)



b)

2.7-rasm. 1-masala uchun: *a*) $y_1(t)$ va $y_2(t)$ integral egri chiziqlar grafiklari;

b) fazoviy portret.

2-masala. Tebranishning bosh tenglamasida ishqalanish kuchini e'tiborga olinmagan holda rezonans holatni tadqiq qilamiz.

Bu holda (2.8) tenglamani quyidagi ikkita oddiy differensial tenglamalar sistemasi ko'rinishida yozib olamiz:

$$y'_1(t) = y_2(t),$$

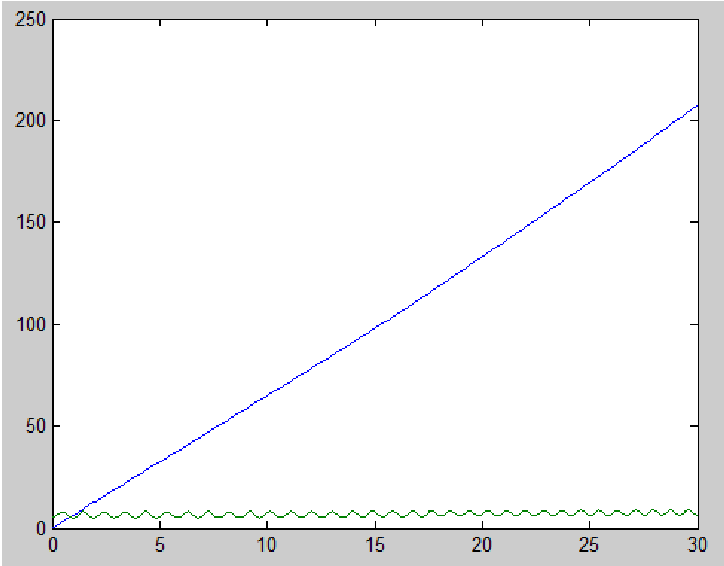
$$y'_2(t) = 9.81 \cdot \sin(y_1(t)) + 0.6 \cdot \cos(9 \cdot t).$$

Boshlang'ich shartlar:

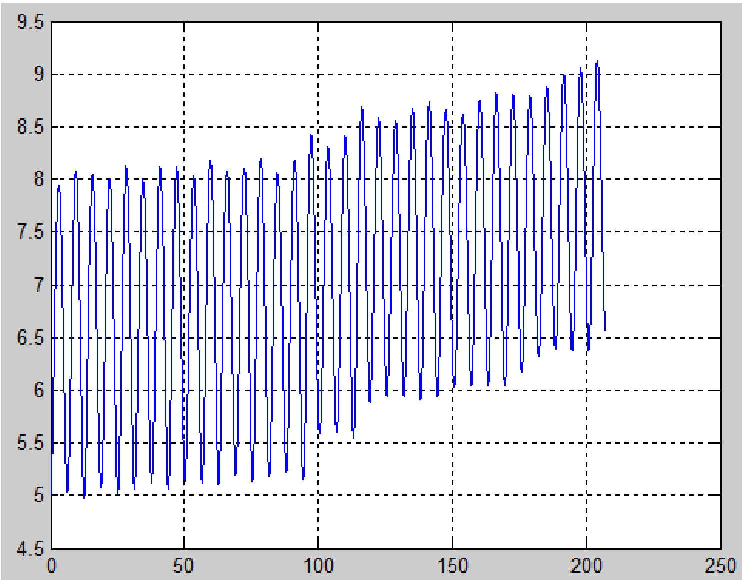
$$y_1(0) = 0; \;\; y_2(0) = 5.$$

Yechish. Bu Koshi masalasini sonli yechishning MATLAB dasturi matni va uning natijasi quyidagicha (2.8-rasm):

```
>> g=@(t,y) [y(2); 9.81*sin(y(1))+0.6*cos(9*t)];
>> [t,ya]=ode45(g,[0:0.01:30], [0 5]);
>> plot(t,ya(:,1), t,ya(:,2)) ;   yoki    plot(ya(:, 1), ya(:,2)) ;
>> grid on
```



a)



b)

2.8-rasm. 2-masala uchun: *a*) $y_1(t)$ va $y_2(t)$ integral egri chiziqlar grafiklari; *b*) fazoviy portret.

Majburiy tebranishlar ikki bosqichda sodir bo‘ladi: o‘tish jarayoni va majburlovchi kuch chastotasi bilan statsionar tebranish. Agar $\lambda \approx \omega$ deb olsak, u holda o‘tish jarayonida zarbali silkinishlar kuzatiladi, bu pulsli tebranishlarning maxsus holi (2.8-rasm).

Agar $\lambda \approx \omega$ deb olsak, u holda majburiy tebranishlarning amplitudasi keskin oshadi. Agar $\lambda = \omega$ deb olsak, u holda kichik tebranishlarga yaqinlashganda amplituda formal holatda cheksiz, ammo yaqinlashishning o‘zi ishlamaydi (2.8-rasm).

3-masala. Zarbali silkinishlar amplitudasining sistema parametrlaridan bog‘liqligini tadqiq qilamiz.

Bu holda (2.8) tenglamani quyidagi ikkita oddiy differensial tenglamalar sistemasi ko‘rinishida yozib olamiz:

$$y'_1(t) = y_2(t),$$

$$y'_2(t) = 9.81\cdot\sin(y_1(t)) + 0.6\cdot\cos(9.81\cdot t).$$

Boshlang‘ich shartlar:

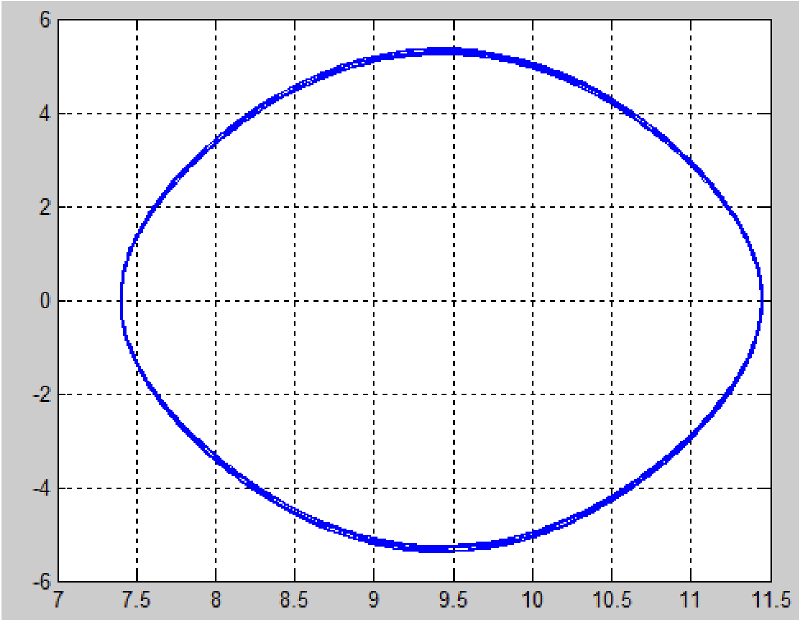
$$y_1(0) = 10; \quad y_2(0) = 5.$$

Boshlang‘ich chetlashish o‘zgargan holda ($y_1(0) = 10$) rezonans holatining o‘zgarishi qaralayapti.

Yechish. Bu Koshi masalasini sonli yechishning MATLAB dasturi matni va uning natijasi quyidagicha (2.9-rasm):

```
>> g=@(t,y) [y(2); 9.81*sin(y(1))+0.6*cos(9.81*t)];
>> [t,ya]=ode45(g,[0:0.01:30], [10 5]);
>> plot(ya(:, 1), ya(:,2)) ;
>> grid on
```

Bu yerda y1(t) – mayatnikning burilish burchagini, y2(t) – uning tezligini ifodalaydi. 2.9-rasmdan ko‘rinib turibdiki, harakat (10;5) nuqtadan boshlanib, soat strelkasi yo‘nalishida harakatlanib, (0;0) nuqta atrofida aylanadi. Bu degani mayat rezonans holati ($\lambda = \omega$) dan chiqib, ishqalanishsiz davriy tebranishni sodir etadi (2.9-rasm).



2.9-rasm. Fazoviy portret. Boshlang‘ich chetlashish o‘zgarishining rezonans holatiga ta’siri

2.4. Mayatnik osilgan ip uzunligi davriy o‘zgarishining mayatnik majburiy tebranishlariga ta’siri

Mayatnik osilgan ip uzunligi davriy o‘zgarishining mayatnik majburiy tebranishlariga ta’sirini tadqiq qilish uchun asosiy oddiy differensial tenglama quyidagicha yoziladi:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -2\eta\frac{d\theta}{dt} - \omega_0^2(1+\alpha\cos(\lambda t))\sin(\theta) \qquad (2.11)$$

bu yerda λ - yuk osilgan ip uzunligining tebranish chastotasi.

Yuqoridagi (2.11) tenglamani quyidagi ikkita oddiy differensial tenglamalar sistemasi ko‘rinishida yozish mumkin:

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = x, \\ \dfrac{dx}{dt} = -2\eta x - \omega_0^2(1+\alpha\cos(\lambda t))\sin(\theta) \end{cases} \qquad (2.12)$$

Bunday tebranishning o‘ziga xos jihati shundaki, parametrik rezonans deb ataluvchi holatning paydo bo‘lishi bu biror λ va ω_0 chastotalar orasidagi munosabatdan sodir bo‘lishi, masalan

$$\lambda \approx \omega_0 / 2, \quad \lambda \approx \omega_0, \quad \lambda \approx 3\omega_0/2, \ldots$$

Tadqiqot modelining kiritiladigan parametrlari:

ω_0 – mayatnik xos kichik tebranishlarining chastotasi;

θ_0 – mayatnikning boshlang‘ich chetlanishi;

x_0 – boshlang‘ich burchak tezlik;

η - ishqalanish koeffisiyenti;

α– modulyatsiya amplitudasi;

λ – modulyatsiya chastotasi.

1-masala. Mayatnik osilgan ip uzunligi davriy o‘zgarishining mayatnik majburiy tebranishlariga ta’sirini tadqiq qilish uchun asosiy oddiy differensial tenglama (2.11) dan quyidagicha (2.12) kabi ikkita oddiy differensial tenglamalar sistemasi ko‘rinishida yozib olamiz:

$$y'_1(t) = y_2(t),$$
$$y'_2(t) = -0.5 \cdot y_2(t) + 3 \cdot (1+0.6 \cdot \cos(2 \cdot t)) \cdot \sin(y_1(t)).$$

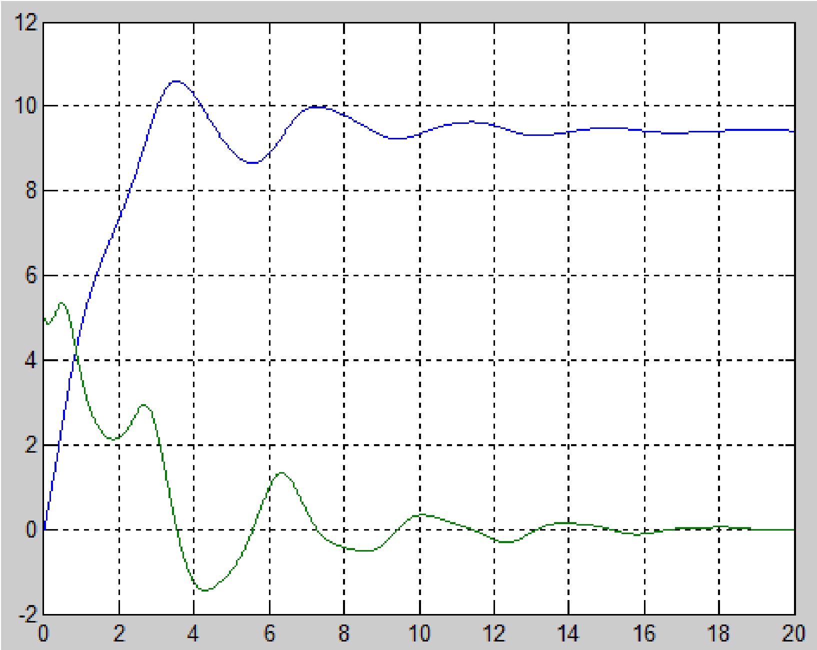
Boshlang‘ich shartlar:

$$y_1(0) = 0; \quad y_2(0) = 5.$$

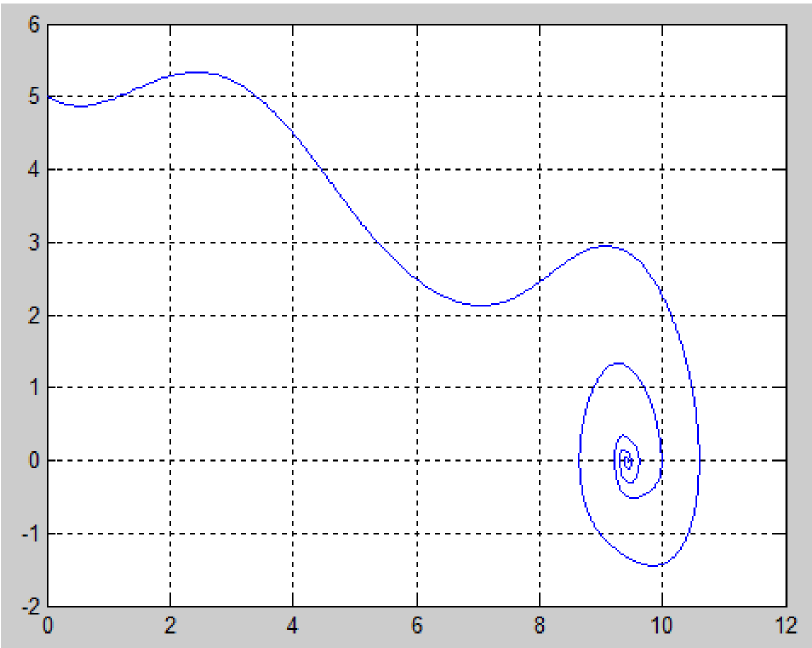
Yechish. Bu Koshi masalasini sonli yechishning MATLAB dasturi matni va uning natijasi quyidagicha (2.10-rasm):

```
>> g=@(t,y) [y(2); -0.5*y(2)+3*(1+0.6*cos(2*t))*sin(y(1))];
>> [t,ya]=ode45(g,[0:0.01:20], [0 5]);
>> plot(t,ya(:,1), t,ya(:,2)) ;   yoki    plot(ya(:, 1), ya(:,2)) ;
>> grid on
```

Bu yerda y1(t) – mayatnikning burilish burchagini, y2(t) – uning tezligini ifodalaydi. 11,*b*-rasmdan ko‘rinib turibdiki, harakat (0;5) nuqtadan boshlanib, soat strelkasi yo‘nalishida harakatlanib, (0;3π) nuqtaga buralib keladi. Bu degani mayat o‘ng yoki chapga tebranib borib, uning tebranishi 3π burchak ostida og‘gan holatiga asta sekin so‘nib borati (t=20).



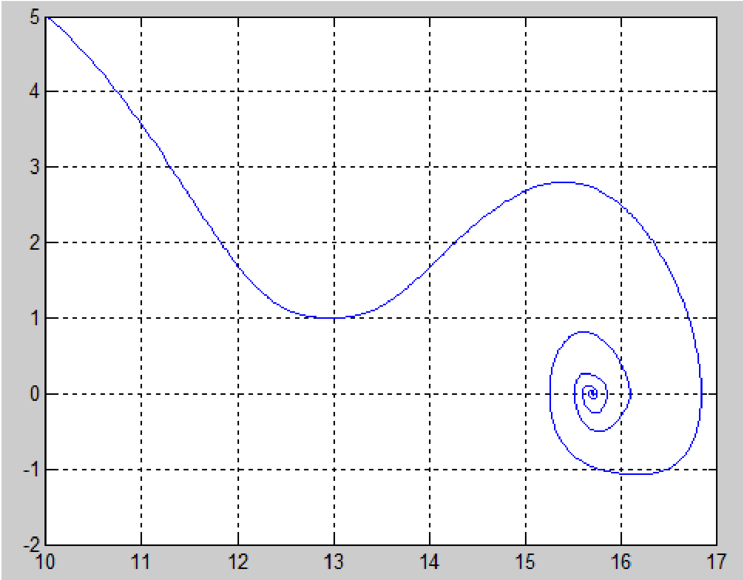
a)



b)

2.10-rasm. 1-masala uchun: *a*) $y_1(t)$ va $y_2(t)$ integral egri chiziqlar grafiklari; *b*) fazoviy portret.

Agar mayatning boshlang‘ich og‘ishini (y1(0)=10) e’tiborga olsak, u hola 2.11-rasmda tasvirlangan fazoviy portretga ega bo‘lamiz, ya’ni u soat strelkasi yo‘nalishida harakatlanib, (0;4π) nuqtaga buralib keladi.

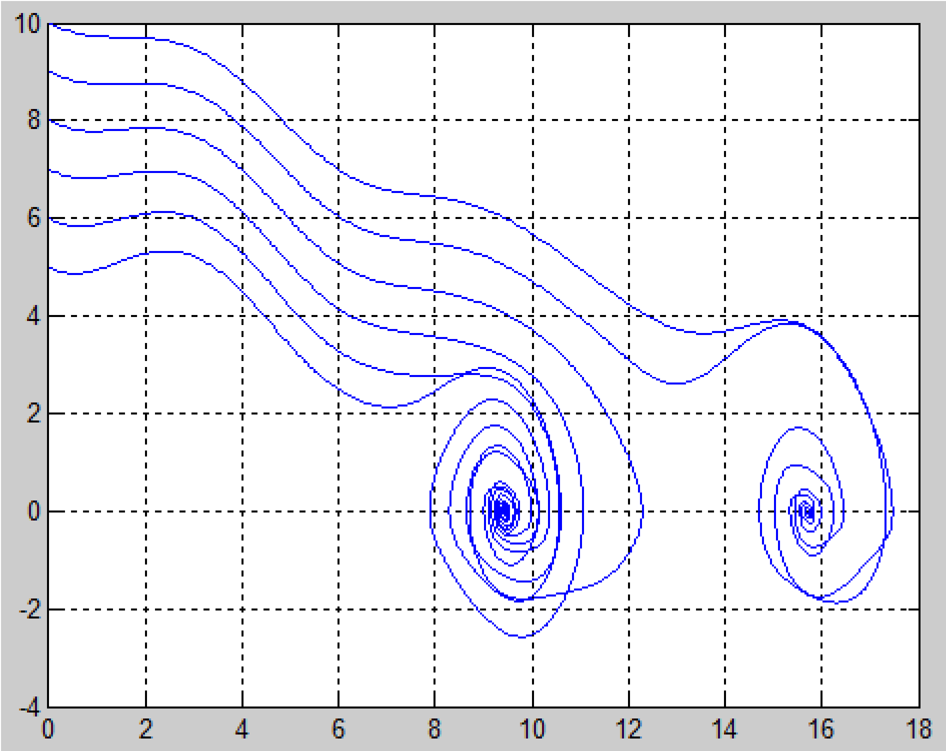


2.11-rasm. 1-masala uchun boshlang‘ich tezlik o‘zgargandagi fazoviy portret.

2-masala. Faraz qilaylik, mayatnikning harakat boshlaganidan boshlab bir marta to‘la aylanishini talab qilgan hol uchun boshlang‘ich tezlikning eng kichik qiymatini aniqlaylik. Buning uchun boshlang‘ich tezlik 5 dan 10 gacha o‘zgarsin, u holda bu qiymatda burilish burchagi π dan oshib ketmaydi (2.12-rasm).

```
>> g=@(t,y) [y(2); -0.5*y(2)+3*(1+0.6*cos(2*t))*sin(y(1))];
>> hold on
>> for a=5:10
        [t,ya]=ode45(g, [0:0.01:20.0], [0,a]);
        plot(ya(:,1), ya(:,2))
   end
>> hold off
```

2.12-rasmdan ko‘rinib turibdiki, harakat (0;5) nuqtadan boshlanib, soat strelkasi yo‘nalishida harakatlanib, (0;3π) va (0;4π) nuqtaga buralib keladi. Bu degani mayat o‘ng yoki chapga tebranib borib, asta sekin so‘nib borati (t=20).



2.12-rasm. 2-masala uchun: fazoviy portret.

XULOSA

Ushbu ishni bajarish jarayonida quyidagi natijalarga erishildi:

- «Hisoblash matematikasi» va «Hisoblash usullari» fanlarining «Oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini sonli yechish usullari» mavzusini nazariy jihatdan chuqurroq o‘rganildi;
- mustaqil tadqiqot olib borish ko‘nikmalari hosil qilindi;
- amaliy masalalarni yechish uchun sonli usullarni qo‘llash ko‘nikmalari rivojlantirildi;
- bir qadamli usullar ichida samaraliroq bo‘lgan Eyler modifikatsion usuli va Runge-Kutta usullariga ko‘proq e’tibor qaratildi;
- qo‘llanilgan bir qadamli usular yetarlicha aniqlik uchun kam vaqt sarflaydi;
- bir qadamli usullar uchun yagona shart yetarli;
- qadamning qiymati yechimning aniqligi va tezligiga muhim ta’sir ko‘rsatadi;
- bir qadamli usullarda hisoblash jarayonida hisob qadamini o‘zgartirish mumkin bo‘ladi;
- qo‘llanilgan bir qadamli usullarni aniq amaliy masalalarga qo‘llash orqali ularning samaraliligi ko‘rsatildi;
- amaliy va uslubiy ahamiyatga ega bo‘lgan dasturiy vosita yaratildi;
- aniq amaliy masalalardan biri bo‘lgan tebranish nazariyasidagi matematik mayatnikning kichik tebranishlari masalalarini matematik paketlardan biri MATLAB yordamida yechishda quyidagilarga e’tibor berish talab qilinadi:
  - hisob algoritmi va dasturini yaratgunga qadar masalaga kiruvchi barcha tenglama va ifodalarni o‘lchamsiz holga keltirish va keyingi hisoblashlarda ana shu tenglama va ifodalardan foydalanish;
  - foydalanilayotgan hisoblash usulining aniqligi va ustivorligiga e’tiborni qaratish;

- oddiy differensial tenglamalar va ularning sistemasini yechishda integrallashning standart usullaridan foydalanish;
- Runge-Kutta usulining Eyler usuliga nisbatan aniqligi yuqori ekanligini e'tiborga olish;
- Kompyuter dasturining hisob natijalarini jadval, grafik ko'rinishida dinamik tasvirlash, masshtablarni bir xil holatga keltirish va ulardan tegishli xulosalar chiqarish.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad, Mathlab, Maple (Самоучитель). – М.: НТ Пресс, 2006. – 496 с.
2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: Изд-во Бином. Лаборатория знаний, 2011. – 640 с.
3. Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В. Численные методы в задачах и упражнениях. – М.: Изд-во Бином. Лаборатория знаний, 2010. – 240 с.
4. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2009. – 848 с.
5. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966. – 566 б.
6. Заусаев А.Ф. Разностные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений: Учеб. пособ. - Самара: Самарский гос. техн. ун-т, 2010. - 100 с.
7. Исраилов М.И. Ҳисоблаш методлари. 1- қисм. – Тошкент: Ўқитувчи, 2003. – 440 б.
8. Исраилов М.И. Ҳисоблаш методлари. 2-қисм. – Тошкент: Ўқитувчи, 2008. – 340 б.
9. Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Численные методы: в 2 кн. Кн. 2. Методы математической физики. - М.: Издательский центр «Академия», 2013. - 304 с.
10. Мигулин В.В. и др. Основы теории колебаний.- М.: Наука,1988.-560 с.
11. Мэтьюз Джон Г., Финк Куртис Д. Численные методы. Использование Matlab. 3-издание: Пер. с англ.– М.: Изд. дом «Вильямс»,2001.-720 с.
12. Половко А.М., Бутусов П.Н. MATLAB для студента. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 320 с.
13. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Изд-во Лань, 2009. - 288 с.

14. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний.- М.: Наука,1964.- 470 с.
15. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
16. Шампайн Л.Ф., Гладвел И., Томпсон С. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием MATLAB: Учебное пособие./Пер с англ. М.А.Макарова. – СПб.: Изд-во «Лань», 2009. – 304 с. (Учебники для вузов. Специальная литература).

Internet resurslari va saytlari

17. http://www.edu.uz – ta’lim sayti.
18. http://www.edu.ru – ta’lim sayti.
19. http://www.intuit.ru – masofaviy ta’lim sayti.
20. http://www.eqworld.ru – adabiyotlarning elektron varianti.
21. http://ru.wikipedia.org – erkin ensiklopediya «Vikipediya».
22. http://www.twirpx.com – adabiyotlarning elektron varianti.
23. http://www.ziyonet.uz - adabiyotlarning elektron variantlari