O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI
ALISHER NAVOIY NOMIDAGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

MEXANIKA-MATEMATIKA FAKULTETI
“Algebra va geometriya” kafedrasi

Sultanov Ozod Temirovich

“KO’PXILLIKLARDAGI RATSIONAL FUNKSIYALARGA DOIR MASALALAR”

“5460100-matematika” ta’lim yo’nalishi bo’yicha
bakalavr darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar: dots.E.Ya.Jabborov

2015 yil “____”_______________

Bitiruv malakaviy ishi “Algebra va geometriya” kafedrasida bajarildi.

Kafedraning 2015 yil “ ___ ” maydagi majlisida muhokama qilindi va himoyaga tavsiya etildi (___-bayonnoma).

Fakultet dekani: dots.H.H.Ro’zimuradov

Kafedra mudiri: dots.G. Hasanov

Bitiruv malakaviy ishi YaDAKning 2015 yil “____”iyundagi majlisida himoya qilindi va _____ball bilan baholandi.(____-bayonnoma).

YaDAK raisi:____________________

A’zolari: ______________________

MUNDARIJA

Kirish

Mavzuning dolzarbligi. Matematika bakalavriat yo'nalishi algebra kursida o'rganildigan gruppa, xalqa va ko'pxilliklar ularga doir misol va masalarni talabalar o'rtasida bir muncha qiyinchiliklar tug'diradi. Zamonaviy matematikadan o'tuvchi g'oyalardan biri bo'lib quyidagilar hisoblanadi, qandaydir matematik obyektlar sinfini tushunish uchun yana ushbu obyektlar orasida akslantirishni o'rganish asosan ayrim o'rganilayotgan obyektlarning xususiyatlarini o'rganish ham zarurdir. Masalan chiziqli algebrada vektorli fazoni o'rganadi hamda chiziqli akslantirish xossalarini ya'ni shunday akslantirishlarni ularda vektorlarni qo'shish va skalyar ko'paytirishlar amallari saqlansin. Ko'pxilliklarda akslantirishni qaraymiz, natijada algebra va geometriya bo'limning yangi "lug'atini" olamiz. Polinomial (ko'phadli) va ratsional funksiyalarning algebraik xususiyatlari bo'lib ko'pxilliklardan uning o'zini geometrik xususiyatlari hisoblanadi. Bular ham faktor xalqa nazariyasiga kirish bo'lib hisoblanadi.

Masalaning qo'yilishi.

Ko'pxilliklarda polinomial (ko'phadli) funksiyalarni ifodalashini har xilligini quyida ikkita usuli mavjud:

* Biz barcha $f \in k[x_1, . . . , x_m]$ dagi ko'phadlarni V dagi funksiyani ifodalaydigan deb olib va uni "yangi funksiya" deb ataymiz. Bunday ko'phadlar to'plamini V da ifodalangan funksiya kabi qarashimiz mumkin.

* Boshqacha tomondan, V dagi funksiyani ifodalovchi ko'phadlardan eng soddalarini olib, uni "standart vakil"lari deb olamiz.

Tarif: $k\ [V]$ -orqali biz $\phi: V \to k$ dagi polinomial funksiyalarning to'plamini belgilaymiz.

k- maydonda kabi har qanday $\phi, \varphi \in k[V]$ funksiyalarning yig'indisi va ko'paytmalarini aniqlash mumkin. Har qanday $p \in V$ uchun

$$(\phi + \varphi)(p) = \phi(p) + \varphi(p)$$

$$(\phi \times \varphi)(\mathrm{p}) = \phi(p) \times \varphi(p)$$

bo'ladi. $f,g \in k[x_1, . . . , x_n]$ larni ϕ, φ -lar uchun mos holda tanlab olsak, unda $f+g$ yig'ndi $\phi + \varphi$ ni ifodalaydi va $f \times g$ esa $\phi \times \varphi$ ni ifodalaydi. Demak $\varphi + \phi$ va $\phi \times \varphi$ -lar V da polinominal funksiyalarlar bo'ladi.

Ishning ilmiy ahamiyati. Ko'pxillikda maydonlardan eng kichigiga $\mathbb{Q}$ ratsional sonlar maydoni hisoblanadi. $\mathbb{Q}$; $\frac{m}{n}$, $n, m \in Z$ kasrlardan tuziladi. $\mathbb{Q}$ ni qurish uchun faqat butun sonlardan foydalaniladi. Shunga o'xshash $k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ polinamial xalqa.

$$k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left\{\frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{g(x_1, x_2, \dots, x_n)}; f, g \epsilon\, k(x_1, x_2, \dots, x_n),\ \ g \neq o\right\}$$

ratsional funksiyalar maydonining qism xalqasi hisoblanadi.

$\mathcal{R}$ butunlikning birorta soxasi bo'lsin. U holda biz uning bo'linmalar maydonini ko'rishimiz mumkin va uni $\mathbb{Q}$ □ $(\mathcal{R})$ deb olamiz. Uning elementlari $\frac{r}{s}$ kasrlardan iborat bo'lib, bu yerda $r, s\epsilon\mathcal{R}\ va\ s \neq 0$. $\mathbb{Q}$ □ $(\mathcal{R})$ dagi elemantlarini soni kasrlardagi ratsional funksiyalar kabi qo'shamiz va ayramiz:

$$\frac{r}{s} + \frac{t}{u} = \frac{ru + ts}{su} \quad va \quad \frac{r}{s} \cdot \frac{t}{u} = \frac{rt}{su}$$

$\mathcal{R} -$ butunlik sohasi bo'lgani uchun yig'indidagi va ko'paytmadagi maxraj nolga teng emas. $\frac{r}{s}$ va $\frac{r'}{s'}$ kasrlar $\mathbb{Q}$ □ $(\mathcal{R})$ ga teng agar $rs' = r's$ bo'lsa maydonning barcha aniqlanadigan $\mathbb{Q}$ □ $(\mathcal{R})$ da bajariladi. Bundan tashqari $\mathbb{Q}$ □ $(\mathcal{R})$ $\left\{\frac{r}{1}: r\epsilon\mathcal{R}\right\}$ qism to'plamini o'z ichiga oladi va u $\mathcal{R}$ ga izomorf qism xalqa bo'ladi.

$V \subset k^n$ – keltirilmaydigan ko'pxillik bo'lsin. U holda $k[V]$ koordinatalar xalqasi butunlik sohasi bo'ladi. $\mathbb{Q}$ □ $(k[V])$ maydon maxsus nomga ega.

Tarif. ***$V - k^n$ da keltirilmaydigan affin ko'pxillik bo'lsin. U xolda*** $\mathbb{Q}$ F $(\boldsymbol{k[V]})$ ***ga V da funksiyalar maydoni yoki ratsional funksiyalar maydoni deb ataladi va $\boldsymbol{k(V)}$ deb belgilanadi.***

Ishning nazariy xarakteri. Malakaviy bitiruv ishining nazariy xarakteri shundan iboratki, unda keltirilgan har bir sodda ko'pxilliklardagi rastional funksiyalarga oid ta'rif va teoremalar ko'pxilliklarda akslantirishlar natijasida algebra geometriya bo'limining polinomial va ratsional funksiyalarning algebraik xususiyatlari bo'lib ko'pxilliklardan uning o'zini geometrik xususiyatlari o'rganiladi.

Olingan natijalar. Ko'pxilliklarda rastional funksiyalar $k\,[V]$ -orqali $\phi: V \to k$ dagi polinominal funksiyalarning to'plamini belgilab, unda *k*- maydonda har qanday $\phi, \varphi \in k[V]$ funksiyalarning yig'indisi va ko'paytmalarini aniqlash mumkin. *f,g* $\in k[x_1, . . . , x_n]$ larni ϕ, φ -lar uchun mos holda tanlab olsak, unda

f+g yig'ndi $\phi + \varphi$ ni ifodalaydi va $f \times g$ esa $\phi \times \varphi$ ni ifodalaydi. Demak $\varphi + \phi$ va $\phi \times \varphi$ -lar V da polinominal funksiyalarlar bo'ladi.

Teorema. $\boldsymbol{\phi : V \to W}$ **va** $\boldsymbol{\varphi : W \to Z}$ **shunday ratsionallarfunksiyalarki** $\boldsymbol{\varphi \times \phi}$ **kompazitsiya aniqlangan, u holda shunday** $\mathbf{V' \subset V}$ **xos qism ko'pxillik mavjudki**

(i) $\boldsymbol{\phi}$ $\boldsymbol{V - V'}$ **dan aniqlangan va** $\boldsymbol{\phi}$ **esa** $\boldsymbol{\phi(V - V')}$ **da aniqlangan,**

(ii) $\boldsymbol{\varphi \times \phi : V \to Z}$ $\boldsymbol{V - V'}$ **da aniqlangan ratsionaldir.**

Ishning tuzilishi. I bob Algebra kursining asosiy va muxum tushunchalaridan bo'lgan gruppa, faktorgruppa, xalqa va maydon xaqida to'liq ma'lumotlar berilib, undagi uchta paragrafda: Gruppalar, Qismgruppalar, Izomorfizm, Faktor-gruppa, Gruppalar gomomorfizmi, Xalqa va maydon haqida ma'lumotlar va misollar keltirilgan.

II bob ko'pxilliklardagi rastional funksiyalar ta'riflari va ularni akslantirishlarga doir asosiy teoremalar keltirilgan bo'lib uch paragrifdan iborat. Har bir paragriflar misollar bilan ko'pxilliklarda ratsional funksiyalar va akslantirishlarga doir masalalar bilan to'ldirilgan.

I BOB. Gruppalar.

§1.1. Gruppalar. Qismgruppalar. Izomorfizm.

Gruppa tushunchasining alohida ahamiyatga egaligini hisobga olib uning «gruppoid», «polugruppa» va «monoid» iboralaridan foydalanilmay beriladigan ta'rifini keltiramiz.

Bo'sh bo'lmagan G to'plamda * binar algebraik amal aniqlangan bo'lib,

1) har qanday $g_1, g_2 \in G$ elementlar uchun $g_1 * g_2 \in G$ element bir qiymatli aniqlangan;
2) $*$ amal assosiativ;
3) G da neytral element mavjud;
4) G ning barcha elementlari teskarilanuvchi,

shartlar bajarilsa, $(G,*)$ sistema *gruppa* deyiladi. Bu holatda G to'plam * amalga nisbatan gruppa tashkil etadi deb ham aytadilar.

Har qanday $(A,*)$ gruppoidning ixtiyoriy $a,b \in A$ elementlari uchun $a * b = b * a$ bo'lsa, * amal *kommutativ amal*, gruppoidning o'zi esa *kommutativ gruppoid* deyiladi.

Kommutativ gruppa *abel gruppa* ham deyiladi.

Ko'pgina hollarda algebraik amalni ko'paytirish yoki qo'shish deb atash qulaylik qiladi. Agar amalni ko'paytirish deb atasak, g_1 va g_2 elementlarning *kompozitsiya ko'paytma* deb ataladi va $g_1 g_2$ ko'rinishda yoziladi. Bu holda neytral element *birlik element* deb ataladi va 1 yoki e bilan, g teskari element esa g^{-1} bilan belgilanadi.

Agar amal ***qo'shish*** deb atalsa g_1 va g_2 elementlar kompozitsiyasi *yig'indi* deb ataladi va $g_1 + g_2$ bilan; neytral element *nol* deb ataladi va 0 simvol bilan; g ga teskari element esa *qarama-qarshi* ***element*** deyiladi va $(-a)$ bilan belgilanadi.

Gruppadagi amal *ko'paytirish* deb atalganda, gruppaning o'zi *multiplikativ gruppa, qo'shish* deb atalganda esa *additiv gruppa* deyiladi.

Agar gruppa elementlari soni chekli bo'lsa, *chekli gruppa*, aks holda *cheksiz gruppa* deyiladi. Chekli gruppa elementlari soni uning *tartibi* deyiladi.

1.1.1-m i s o l. $(G,*)$ gruppada ixtiyoriy $g_1, g_2 \in G$ elementlar uchun $g_1 * x = g_2$, $y * g_1 = g_2$ tenglamalarning har biri bir qiymatli yechiladi.

Yechish. Avval birinchi tenglamani qanoatlantiradigan $x \in G$ element mavjud deb faraz qilamiz va uning qanday element ekanligini aniqlaymiz (ya'ni yagonaligini isbot qilamiz), keyin topilgan element haqiqatan berilgan tenglamani qanoatlantirishini tekshiramiz (ya'ni mavjudligini isbot qilamiz).

$x-$ element $g_1 * x = g_2$ bo'ladigan konkret element bo'lsin. U holda $g_1^{-1} * (g_1 * x) = g_1^{-1} * g_2$, bundan

$$(g_1^{-1} * g_2) * x = g_1^{-1} * g_2, \quad e * x = g_1^{-1} * g_2, \quad x = g_1^{-1} * g_2.$$

Demak, izlanayotgan element faqat $x = g_1^{-1} * g_2$ ko'rinishda bo'lishi mumkin. Shu element berilgan tenglamani qanoatlantirishini tekshiramiz: $g_1 * (g_1^{-1} * g_2) = (g_1 * g_1^{-1}) * g_2 = e * g_2 = g_2$ Ikkinchi tenglama uchun ham xuddi shunday muhokama yuritiladi.

Agar G gruppada biror g element olinsa, u holda $\{g^k \mid k \in \boldsymbol{Z}\}$ to'plam G ning qismgruppasi bo'ladi (tekshirib ko'ring!). Bu qism gruppa *siklik* qism gruppa, g element esa uning *yasovchisi* (yoki yaratuvchisi) deyiladi. Yasovchisi g bo'lgan siklik qismgruppani $< g >$ bilan belgilaymiz.

O'zining biror $< g >$ siklik qismgruppasi bilan mos tushadigan G gruppa *siklik gruppa* deyiladi. Bu holda g element uning yasovchi (yoki yaratuvchi)si deyiladi. Agar G gruppaning g elementining hamma har xil bo'lgan butun darajalari har xil, ya'ni $k \neq l \Rightarrow g^k \neq g^l$, $k,l \in \mathbf{Z}$ bo'lsa g element *cheksiz tartibga ega* deyiladi. Aks holda, ya'ni elementning butun darajalari orasida tenglari mavjud, $g^n = 1$ bo'lib, $0 < m < n$ uchun $g^m \neq 1$ bo'lsa, n natural son g *elementning tartibi* deyiladi.

Agar G gruppaning g elementi cheksiz tartibga ega bo'lsa $< g >$ siklik gruppa cheksiz bo'ladi. Agar g elementning tartibi n bo'lsa, $< g >$ qism ham n-tartibga ega bo'ladi, shu bilan birga $< g >= \{g^0 = 1, \quad g^1, \ldots, g^{n-1}\}$.

Cheksiz siklik gruppa $< g >$ da g^{-1} ham yasovchi bo'ladi, g va g^{-1} dan boshqa yasovchilar mavjud emas. Agar $< g >$ – siklik gruppaning tartibi n bo'lsa, u holda g^k element faqat va faqat k va n sonlar o'zaro tub bo'lgandagina yasovchi bo'ladi.

G_1 va G_2 – lar mos ravishda $*$ va $\circ$ amallarga nisbatan gruppalar bo'lsin. Agar ixtiyoriy $g_1, g_2 \in G_1$ lar uchun $f(g_1 * g_2) = f(g_1) * f(g_2)$ bo'lsa biyektiv $f : G_1 \to G_2$ akslantirish G_1 gruppaning G_2 gruppaga *izomorfizmi* deyiladi. Bu holda G_1 gruppa G_2 gruppaga *izomorf* ham deyiladi va $G_1 \cong G_2$ shaklda yoziladi. Gruppaning o'ziga izomorfligi uning *avtomorfizmi* deyiladi.

§1.2. Faktor-gruppa. Gruppalar gomomorfizmi.

Multiplikativ $G-$ gruppa, $H-$ uning qismgruppasi va $g \in G$ bo'lsin. $gH = \{gh \mid h \in H\}$ to'plam G gruppaning H qismgruppa bo'yicha chap qo'shni sinfi, $Hg = \{hg \mid h \in H\}$ to'plam G gruppaning H qismgruppa bo'yicha *o'ng qo'shni* sinfi deyilladi.

1.2.1-m i s o l. Simmetrik S_3 gruppada $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ va $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ elementlardan iborat A qismgruppani olib qaraymiz va $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ elementni olamiz. U holda gA chap qo'shni sinf $ge = g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ va $ga = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ elementlardan, $Ag-$ o'ng qo'shni sinf esa $eg = g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ va $ag = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ elementlardan iborat bo'ladi.

Chap qo'shni sinflarning quyidagi xossalarini ko'rsatib o'tamiz:

1) $b \in aH \Leftrightarrow bH = aH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$;

2) $aH = bH$ yoki $aH \bigcap bH = \varnothing$; 3) $a \in aH$.

Xuddi shunday xossalar o'ng qo'shni sinflar uchun ham o'rinli.

Berilgan G gruppaning H qismgruppa bo'yicha hamma har xil chap qo'shni sinflari soni uning shu podgruppa bo'yicha hamma har xil o'ng qo'shni sinflari soni bilan bir xil bo'ladi. (Gruppa cheksiz bo'lganda buning ma'nosi shuki, G gruppaning H qismgruppa bo'yicha hamma chap qo'shni sinflari to'plamining quvvati, o'ng qo'shni sinflar to'plamining quvati bilan bir xil bo'ladi). Bu son (cheksiz to'plam uchun -- quvvat) H qismgruppaning G dagi *indeksi* deyiladi.

Agar G gruppa chekli bo'lsa, u holda uning tartibi uning ixtiyoriy H qismgruppasi tartibi bilan shu qismgruppaning G dagi indeksi ko'paytmasiga teng bo'ladi (*Lagranj teoremasi*). Bundan chekli gruppaning ixtiyoriy qismgruppasining tartibi shu gruppa tartibining bo'luvchisi bo'lishi kelib chiqadi. Shuningdek, ixtiyoriy chekli gruppa ixtiyoriy elementning tartibi ham shu gruppa tartibining bo'luvchisi bo'ladi. Aksincha, agar chekli G tartibi *r* tub songa bo'linsa, G gruppa *r* tartibli elementlarga ega bo'ladi (*Koshi teoremasi*).

G gruppa elementlarini H qismgruppa bo'yicha bitta chap qo'shni sinfga tegishlilarini bir to'plamga birlashtirib o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajratish G gruppaning H qismgruppa bo'yicha *chap tomonli yoyilmasi* deyiladi. Agar chap qo'shni sinflar o'rniga qismgruppa bo'yicha o'ng qo'shni sinflar olinsa, G gruppaning H qismgruppa bo'yicha o'ng tomonli yoyilmasi hosil qilinadi.

Agar G gruppaning H qismgruppa bo'yicha o'ng tomonli va chap tomonli yoyilmalari sinflari bir xil bo'lsa, H qismgruppa G gruppaning *normal bo'luvchisi* (*normal qismgruppasi, invariant qismgruppasi*) deyiladi.

1.2.2-m i s o l. Agar H qismgruppaning G gruppadagi indeksi 2 ga teng bo'lsa, N – qismgruppa G ning normal bo'luvchisi bo'lishini isbot qiling.

Yechish. G gruppaning H qism bo'yicha o'ng tomonli va chap tomonli sinflar yoyilmalarida qo'shni sinflardan biri H ning o'zi bo'ladi, ikkinchi qo'shni sinf esa G gruppaning H da mavjud bo'lmagan hamma elementlardan iborat bo'ladi. $G / H \cong \boldsymbol{R}^{>0}$.

G_1, G_2 – lar mos ravishda $*$ va $\circ$ binar algebraik amallarga nisbatan gruppalar bo'lsin. Agar $f(a * b) = f(a) \circ f(b) \quad \forall a, b \in G_1$ bo'lsa, $f : G_1 \to G_2$ akslantirish G_1 gruppaning G_2 ga *gomomorfizmi* deyiladi.

$\{a \in G_1 \mid f(a) = e_{G_2}\}$ to'plam, bu yerda e_{G_2} - element G_2 ning neytral elementi, f gomomorfizmning yadrosi bo'ladi va aksincha, G gruppaning har qanday gomomorfizmining yadrosi G ning normal bo'luvchisi bo'ladi.

Agar har bir $g \in G$ elementga G gruppaning biror N normal bo'luvchisi bo'yicha gH qo'shni sinf mos qilib qo'yilsa, G gruppaning G/H faktor-gruppaga gomomorf akslantirish hosil bo'ladi. Bu G ning G/H ga tabiiy gomomorfizmi deyiladi. uning yadrosi N normal bo'luvchining o'zi bo'ladi. Tabiiy gomomorfizmda G gruppaning G/H gruppaning bitta belgilangan elementiga o'tadigan barcha elementlari to'plami G gruppaning N normal bo'luvchi bo'yicha qo'shni sinfi bo'ladi.

Agar $f: G_1 \to G_2$ - gruppa gomomorfizmi bo'lsa, u holda $f(G_1) \cong G_1 / Ker\ f$ (*gruppalar gomomorfizmi teoremasi*).

§1.3. Xalqa va maydon.

Bo'sh bo'lmagan $K \neq \varnothing$ to'plamda ikkita binar algebraik amal aniqlangan bo'lsin. Ulardan birini *qo'shuv* deb ataymiz va additiv tarzda belgilaymiz, ikkinchisini esa *ko'paytiruv* deb atab multiplikativ tarzda belgilaymiz. Bu amallar aslida qo'shish va ko'paytirish deb ataladigan oddiy arifmetik amallar bilan bir mazmunli bo'lishi shart emas. Agar:

$a)$ $(K,+)-$ abel gruppa; $b)$ $(K,\cdot)-$ gruppoid;

$s)$ qo'shish va ko'paytirish ikkita:

$\forall x,y,z \in K: \begin{cases} x(y+z)=xy+xz, \\ (y+z)x=yx+zx. \end{cases}$ distributivlik qonunlari bilan bog'langan shartlar qanoatlantirilsa, $(K,+,\cdot)$ algebraik sistema *xalqa* deyiladi.

Agar ko'paytirish amali assosiativ, ya'ni $(K,\cdot)-$ polugruppa bo'lsa, $(K,+,\cdot)$ *assosiativ* xalqa deyiladi.

Ko'paytirish amali kommutativ bo'lganda esa $(K,+,\cdot)$ xalqa *kommutativ* xalqa deyiladi. Bu holda ikki distributivlik qonunlaridan bittasini tekshirish yetarli, chunki boshqasi undan kelib chiqadi.

Ko'paytirishga nisbatan neytral 1 element mavjud bo'lganda $(K,+,\cdot)$ xalqa *birlik elementli xalqa* deyiladi.

1.3.1-m i s o l. Ushbu $(\boldsymbol{N},+,\cdot)-$ algebraik sistema (bu yerda + va $\circ$ oddiy ma'nodagi arifmetik amallar) uchun $a)$ va $s)$ shartlar bajariladi. Hatto ko'paytirish kommutativ va assosiativ birlik element ham mavjud. Shunga qaramay $(\boldsymbol{N},+,\cdot)-$ xalqa emas, chunki $(\boldsymbol{N},+)$ - gruppa emas.

Uch o'lchovli Yevklid fazosining hamma geometrik vektorlari to'plamini $\vec{M}$ bilan, vektorlarni qo'shishni +, vektorlarni vektorli ko'paytirishni $\times$ bilan belgilasak, $(\vec{M},+,\times)$ sistema xalqa bo'ladi. Ammo vektorlar algebrasining asosiy qonunlaridan ko'ramizki, bu xalqa assosiativ ham emas, kommutativ ham emas, shuningdek birlik elementga ham ega emas. Unda kommutativlik qonuni o'rniga $\vec{x}\times\vec{y}=-(\vec{y}\times\vec{x})$ -- anti kommutativlik qonuni bajariladi. Shu qonun tufayli bu yerda distributivlik qonunlarining ikkalasi ham bir-biridan kelib chiqadi. Noassosiativ xalqalarda assosiativlikning o'rnini to'ldiradigan qandaydir boshqa qonunlar mavjud bo'lmasa ularda algebraik ifodalarning birini boshqalariga shakl almashtirishlar ma'nosida «deyarli hyech narsa qilib bo'lmaydi». Geometrik vektorlarga oid yuqoridagi misolda bunday «to'ldiruvchi» sifatida:

$(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z}+(\vec{y}\times\vec{z})\times\vec{z}+(\vec{z}\times\vec{x})\times\vec{y}=\vec{0}$ munosabat xizmat qiladi.

Agar $\forall x,y,z\in K$ $x\cdot x=0$ va $(xy)z+(yz)x+(zx)y=0$ bo'lsa $(K,+,\cdot)$ xalqa ***liyaviy xalqa*** (*Li* xalqasi) deyiladi.

$x\cdot x=0$ munosibatdan antikommutativlikning kelib chiqishini tekshirib ko'rish qiyin emas.

F **-** to'plam haqiqiy sonlar o'qida aniqlangan va haqiqiy qiymatlar qabul qiladigan $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ funksiyalar to'plami bo'lib shu bilan birga ixtiyoriy $f_1,f_2\in F$ funksiyalar uchun f_1+f_2 funksiya har bir $x\in\boldsymbol{R}$ ga $f_1(x)+f_2(x)$ qiymatni f_1f_2 – funksiya esa $f_1(x)f_2(x)$ qiymatni mos qilib qo'ysin. U holda $(F,+,\cdot)$ birli assosiativ-kommutativ xalqa bo'ladi. Bu yerda bir rolini hamma $x\in\boldsymbol{R}$ lar uchun faqat 1 qiymat qabul qiladigan $f(x)=1$ nol rolini esa $f(x)=0$ funksiya bajaradi. Bu yerda funksiyalarni qo'shish va ko'paytirish uchun kommutativlik, assosiativlik va distributivlik qonunlari haqiqiy sonlar uchun bajariladigan shunday qonunlardan bevosita kelib chiqadi.

$x\neq 0, y\neq 0$, ammo $xy=0$ bo'lsa $(K,+,\cdot)$ xalqaning x va u elementlari nolning *bo'luvchilari* deyiladi. Bu holda x – nolning *chap*, u – esa ***o'ng*** bo'luvchisi (kommutativ xalqalarda bunday farqlash o'rinli emas) deyiladi.

$(\boldsymbol{Q},+,\cdot),(\boldsymbol{R},+,\cdot),(\boldsymbol{C},+,\cdot)-$ nolning bo'luvchilarisiz xalqalar, $(\vec{M},+,\times)$ va $(F,+,\cdot)$ lar esa nolning bo'luvchilarili xalqalardir.

Xalqaning ta'rifiga ko'ra uning hamma elementlari to'plami qo'shishga nisbatan gruppa tashkil etadi. Bu gruppa xalqaning *additiv gruppasi* deyiladi. Birli xalqaning *a* elementi uchun $a^{-1}\in K$ ham bo'lsa *a* element *K* ning teskarilanuvchi elementi deyiladi. Assosiativ birli K^{*} to'plami ko'paytirishga nisbatan gruppadir. Bu gruppa xalqaning *multiplikativ gruppasi* deyiladi.

Birli xalqada teskarilanuvchi element *birning bo'luvchisi* ham deyiladi.

Yagona elementdan iborat xalqa (bu yagona element xalqaning ham biri ham noli bo'lib xizmat qiladi) *trivial* xalqa deyiladi. Agar $(K,+,\ \cdot)$ xalqada $1=0$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bu xalqa trivial xalqa bo'ladi; haqiqatan u holda ixtiyoriy $x\in K$ uchun $x=x\cdot 1=x\cdot=0=0$ bo'ladi. Nolning bo'luvchilariga ega bo'lmagan birli $(1\neq 0)$ notrivial assosiativ-kommutativ xalqa *butunlik sohasi* (yoki *butunlik* xalqasi) deyiladi. Masalan, $(\boldsymbol{Z},+,\cdot)$ shunday xalqadir.

Har bir noldan farqli elementi teskarilanadigan birli assosiativ xalqa *jism* deyiladi. Agar shu bilan birga ko'paytirish amali kommutativ ham bo'lsa, *maydon* deyiladi. Maydon tushunchasining juda muhim ekanligini nazarda tutib uning xalqa tushunchasiga asoslanmaydigan ta'rifini keltiramiz.

Agar:

a) $(K,+)-$ abel xalqa; *b*) $(K,\cdot)-$ gruppoid, $(K\setminus\{0\},\cdot)-$ abel gruppa;

s) qo'shish bilan ko'paytirish amallari distributivlik qonuni bilan bog'langan (uni ikki formasining ixtiyoriy bittasi bilan ifodalash mumkin), bo'lsa $(K,+,\ \cdot)$ algebraik sistema *maydon* deyiladi.

Agar $(P,+,\cdot)$ maydon biri (birlik elementi) ning hamma butun karralilari *P* ning elementlaridan iborat bo'lsa, ya'ni $k=\ell$ uchun $k\cdot 1\neq l\cdot 1$ bo'lsa *R* maydon nol xarakteristikaga ega deyiladi va $charP = 0$ shaklda yoziladi. Aks holda $1 < m < p$ uchun $p \cdot 1 = 0$, ammo $m \cdot 1 \neq 0$ bo'lsa, r natural son R maydonning xarakteristikasi deyiladi va $charP = p$ qilib yoziladi. Boshqacha qilib aytganda, maydonning biri uning additiv gruppasida cheksiz tartibli element bo'lsa, maydonning xarakteristikasi nolga teng deyiladi, aks holda maydonning xarakteristikasi deb maydon birining uning additiv gruppasidagi tartibiga aytiladi.

Agar $(K,+,\cdot)$ xalqa elementlarining K' bo'sh bo'lmagan qismto'plami xalqada aniqlangan amallarga nisbatan xalqa bo'lsa $(K',+,\cdot)$ xalqa $(K,+,\cdot)$ning qismxalqasi deyiladi. Bunda hamma joyda «xalqa» so'zini «maydon» so'zi bilan almashtirilsa qismmmaydon tushunchasi hosil bo'ladi.

Agar $K'-$ to'plam $(K,+,\cdot)$ xalqa elementlaridan iborat bo'sh bo'lmagan qismto'plam bo'lsa, $(K',+,\cdot)$ ning qismxalqa bo'lishi uchun quyidagilarni ko'rsatish yetarli:

a) $(K',+)$ va $(K',\cdot)$ - gruppoidlar, ya'ni hamma vaqt $x, y \in K'$ dan $x + y \in K'$ va $xy \in K'$ kelib chiqadi;

b) agar $x \in K'$ bo'lsa, $-x \in K'$ bo'ladi.

$(K,+,\cdot)-$ maydon bo'lgani holda $(K',+,\cdot)$ ning qismmaydon ekanligini tekshirish uchun *a*) va *b*) shartlardan tashqari yana

c) agar $x \in K' \backslash \{0\}$ bo'lsa, $x^{-1} \in K' \backslash \{0\}$ bo'lishini ko'rsatish yetarli.

Agar ixtiyoriy $x, y \in K$ lar uchun:

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$
$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

bo'ladigan $f : K \to \widetilde{K}$ biyeksiya mavjud bo'lsa, $(K,+,\cdot)$ va $(\widetilde{K},+,\cdot)$ xalqalar izomorf deyiladi.

Shuni ham ta'kidlaymizki, hatto $\widetilde{K}=K$ bo'lganda ham ikkala xalqadagi + va $\times$ amallari bir xilda belgilansa hamki, albatta bir xil bo'lishi shart emas. $K\bigcap\widetilde{K}=\varnothing$ bo'lganda esa «bir xil amallar» deyishning o'zi ma'noga ega bo'lmay qoladi.

Agar f – akslantirish K xalqaning $\widetilde{K}$ xalqaga izomorfizmi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $a\in K$ uchun $f(0)=0,\quad f(-a)=-f(a)$. Shuningdek, agar $1\in K$ bo'lsa, $f(1)=1$ va ixtiyoriy $a\in K^{*}=K\setminus\{0\}$ uchun $f(a^{-1})=(f(a))^{-1}$. Xalqaning o'ziga izomorfizmi shu xalqaning avtomorfizmi deyiladi.

Agar K xalqa butunlik sohasi yoki maydon bo'lsa uning izomorf obrazi ham butunlik sohasi yoki maydon bo'lishi shubhasiz.

Agar K xalqaning L xalqaning biror qismxalqasiga izomorf akslanishi mavjud bo'lsa, K xalqa L xalqaga joylashadi deymiz.

II. BOB. KO'PXILLIKLARDAGI RATSIONAL FUNKSIYALARGA DOIR MASALALAR

Zamonaviy matematikadan o'tuvchi g'oyalardan biri bo'lib quyidagilar hisoblanadi.Qandaydir matematik obyektlar sinfini tushunish uchun yana ushbu obyektlar orasida akslantirishlarni va asosan ayrim o'rganilayotgan obyektlarning xususiyatlarini o'rganish ham zarur. Masalan chiziqli algebra vektorli fazoni o'rganadi hamda chiziqli akslantirish xossalarini ya'ni shunday akslantirishlarki ularda vektorlarni qo'shish va skalyar ko'paytirish amallari saqlansin.

Biz ko'pxilliklarda akslantirishni qaraymiz, natijada algebra va geometriya bo'limning yangi "lug'atini" olamiz. Polinomial (ko'phadli) va ratsional funksiyalarning algebraik xususiyatlari bo'lib ko'pxilliklarda uning o'zini geometrik xususiyatlari hisoblanadi. Bular faktor xalqa nazariyasiga kirish bo'lib hisoblanadi.

§ 2. 1. Polinomial (ko'phadli) akslantirishlar.

Ko'pxilliklarda akslantirishlarni o'rganishda quyidagi misolni qarashdan boshlaymiz. R^3 da kubni aylanishidan xosil bo'lgan sirtga urinma quyidagi parametrik ko'rinishda beriladi:

$$x = t + u,$$

$$y = t^2 + 2tu, \qquad (2.1)$$

$$z = t^3 + 3t^2u,$$

funksiyalarni parametrlash sinifida (2.1) quyidagi akslantirish

$$\phi: R^2 \longrightarrow R^3$$

formula bilan beriladi

$$\phi(t,u) = (t + u, t^2 + 2tu, t^3 + 3t^2u). \qquad (2.1.2)$$

Bu akslantirishning aniqlanish sohasi $V = R^2$ affin ko'pxillikdir, uning obrazi esa *S*-sirtga urinmadir.

S –sirt xam affin ko'pxillik bo'lib,

$W = V(x^3z - \frac{3}{4}x^2y^2 - \frac{3}{2}xyz + y^3 + \frac{1}{4}z^2)$ kabi bo'ladi. Shunday qilib parametrlashlarimiz V ni W ga akslantirishni polinomial deymiz. Polinomial so'zi bu yerda ϕ akslantirishning t va *u* komponentlari ko'phadlardir.

Endi ushbu akslantirish

$$\pi_l: C^n \longrightarrow C^{n-1},$$

formula bilan ifodalansin

$$\pi_l(a_1, . . . , a_n) = (a_{l+1}, . . . , a_n).$$

Agar biz V=$V(I)$⊂ C^ndagi ko'pxillik bo'sin, unda π_l ni V da chegaralaymiz. Bundan $\pi_l(V)$ $W = V(I_l)$ affin ko'pxillikga tegishlili bo'lib, bu yerda $I_l = I \cap C[x_{l+1}, . . . , x_n]$. Shunday qilib biz π_l −ni polinomial akslantirish deb qarashimiz mumkin. Bu holda π_l - akslantirishda uning komponentlarini ko'phadlardir iborat deb qaraymiz.

2.***1.1-Ta'rif*. *Agar V*⊂ k^m *va* $W \subset k^n$*-ko'pxillik bo'lsin.*** $\boldsymbol{\phi}: \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$

funksiyaya polinomial yoki regulyar akslantirishlar deb ataladi, agar $\boldsymbol{f_1, . . . , f_n \in k[x_1, . . . , x_n]}$ ***da ko'phad mavjud bo'lib, unda*** $\boldsymbol{\phi(a_1, . . . , a_m) = (f_1(a_1, . . . , a_m), \dots, f_n(a_1, . . . , a_m))}$ ***bo'ladi,***

bo'nda ($\boldsymbol{a_1, . . . , a_m}$***)***$\boldsymbol{\in V}$ ***. n – ta ko'phad***

($\boldsymbol{f_1, . . . , f_n) \in (k[x_1, . . . , x_n])^n}$ $\boldsymbol{\phi -}$ **ni ifodalaydi**.

ϕ – akslantirish $V \in k^n$ ko'pxillikni $W \in k^n$ Ko'pxillikga akslantirish $(\mathrm{f}_1, . . . , \mathrm{f}_\mathrm{n})$ bilan ifodalanadi, bu esa ko'phadlar bilan W ni ifodalashda $\mathrm{f}_1(\mathrm{a}_1, . . . , \mathrm{a}_\mathrm{m}), . . ., \mathrm{f}_\mathrm{n}(\mathrm{a}_1, . . . , \mathrm{a}_\mathrm{m})$ barcha $(\mathrm{a}_1, . . . , \mathrm{a}_\mathrm{m}) \in \mathrm{V}$

nuqtalarda nolga teng bo'ladi.

Masalan, V=$\boldsymbol{V}$(y$-x^2, z - z^3) \subset k^3)$ va W=$\boldsymbol{V}(y^3 - z^3) \subset k^2$ ko'pxillikni qaraymiz (kubni aylanmasi). $\pi_1: k^3 \to k^2$, $\pi_1(x, y, z) = (y, z)$ ga akslantirish $\pi_1: V \to W$ ko'phadli akslantirish bilan beriladi. Haqiqatdan ham $\pi_1(V) = \{(x^2, x^3): x \in k\}$ning har bir nuqtasi W-ni ifadalovchi tenglamani qanoatlantiradi.

W=k bo'lgan xolni qaraymiz. Bunda ϕ skalyar ko'phadli funksiyasi V ko'pxillikda berilgan. Ko'phadli funksiya V da umimiy ko'phadli ϕ:V→ k^n akslantirish k-ta ko'phadli funksiydan qurigan π_i:V→k esa ϕ ni kompanentlaridir. Boshqacha aytganda biz $\phi: V \to k$ ni o'rganib, keyin esa ϕ :V → k^n qanday qurishni tushunamiz. Polinomial funksiyalarni qarashda biz ushbu eslatmalardan boshlaymiz: Agar V ⊂ k^m, boʹlsa $\phi: V \to k$ akslantirish tarifdan polinomial funksiya bo'ladi, qachonki ϕ- ifodalovchi f$\in k[x_1, . . . , x_n]$ ko'phad mavjud bo'lsa.

Masalan *V*=(y-x^2) $\subset R^2$ ko'pxillik. *f*=$x^3 + y^3$ ko'phad esa *V* da polinomial funksiyani ifodalaydi. Lekin g= $x^3 + y^3 + (y - x^2)$, h $= x^3 + y^3 + (x^4y - x^6$) va $F = x^3 + y^3 + A(x, y)(y - x^2)$ lar har qanday A(x,y) uchun V da o'sha polinomial funksiyani aniqlaydi. Haqiqatdan ham, agar biz *f* ga *I(V)* dagi ixtiyoriy ko'phadni qo'shsak, funksiyani *V*-ning nuqtalarida qiymatlarini o'zgartirmaydi.

2.1.2-teorema. Agar V $\subset \boldsymbol{k^m}$ ***−affin ko'pxillik bo'lsin. U holda***

(i) f va g$\in \boldsymbol{k[x_1, . . . , x_n]}$ ***V-da bir xil polinominal funksiyani ifodalaydi, agar f-g∈I(V) bo'lsa.***

(ii) $\boldsymbol{(f_1, . . . , f_n)}$ ***va*** $\boldsymbol{(g_1, . . . , g_n)}$ ***bitta polimnominal akslantirishni ifodalaydi V dan*** $\boldsymbol{k^n ga}$ ***qachonki-qachon*** $\boldsymbol{f_i - g_i \in I(V)}$***bo'lsa, barcha 1***$\boldsymbol{\leq i \leq n}$ ***da.***

Isbot. (i) Agar *f-g=h*$\in I(V)$bo'lsa, u holda *f(p)-g(p)=h(p)=0* tenglik har qanday *p=(*$a_1, . . . , a_m$*)*$\in V$ nuqta uchun o'rinli bo'ladi. Bundan *f* va *g V* da bitta funksiyani ifodalaydi.Agar teskarisidan faraz qilsak, yani *f* va *g V* da bitta funksiyani ifoda qilsa, u holda har qanday $p\in V$ nuqtada *f(p)-g(p)=0* tenglik o'rinli bo'ladi. Shunday qilib *f-g*$\in I(I)$bo'ladi. (ii)-band esa (i) dan to'g'ridan-to'g'ri kelib chiqadi.

Boshqacha aytganda $k[x_1, . . . , x_m]$ dagi ko'phadlar polinominal funksiyalar bilan faqat *I(V)=*$\{0\}$ bo'lsa, bir qiymatli bo'ladi. Agar *k*-cheksiz bo'lsa, unda *V=*k^m bo'lganda *I(V)=*$\{0\}$ bo'ladi.

Ko'pxilliklarda polinomial funksiyalarni ifodalashini har xilligini quyidagi ikkita usul mavjud:

* Biz barcha f $\in k[x_1, . . . , x_m]$ dagi ko'phadlarni V dagi funksiyani ifodalaydiganini olib va uni "yangi funksiya" deb ataymiz. Bunday ko'phadlar to'lamini V da ifodalangan funksiya kabi qarashimiz mumkin.

* Boshqacha tomondan, V dagi funksiyani ifodalovchi ko'phadlardan eng soddalarini olib, uni "standart vakill"ari ishlaymiz.

2.1.3.-Tarif: $k[V]$-orqali biz $\phi: V \to k$ dagi polinominal funksiyalarning to'plamini belgilaymiz.

k- maydonda kabi har qanday $\phi, \varphi \in k[V]$ funksiyalarning yig'indisi va ko'paytmalarini aniqlash mumkin. Har qanday $p \in V$ uchun

$$(\phi + \varphi)(p) = \phi(p) + \varphi(p)$$

$$(\phi \times \varphi)(\mathrm{p}) = \phi(p) \times \varphi(p)$$

bo'ladi. $f,g \in k[x_1, . . . , x_n]$ larni ϕ, φ -lar uchun mos holda tanlab olsak, unda $f+g$ yig'ndi $\phi + \varphi$ ni ifodalaydi va $f \times g$ esa $\phi \times \varphi$ ni ifodalaydi. Demak $\varphi + \phi$va$\phi \times \varphi$ -lar V da polinominal funksiyalarlar bo'ladi.

Shunday qilib $k[V]$da qo'shish va ko'paytish amallarini aniqlash mumkin. Barcha oddiy xususiyatlar k$[V]$da ushbu amallarga ega b'ladi. Bundan k$[V]$ esa kommutativ xalqa bo'ladi.

V $\subset k^m$ ko'pxillik "keltirilgan" deb aytilganda, u ikkita bo'shmas ko'pxilliklarning birlashmasi kabi bo'lsa: $V = V_1 \cup V_2$ bu yerda $V_1 \neq V, V_2 \neq V$. Masalan:

V=V$(x^3 + xy^2 - xz, \;\; yx^2 + y^3 - yz) \subset k^3$ ko'pxillik "keltirilgan", chinki uni aniqlovchi tenglamasini ko'paytuvchilarga yoyamiz va biz

$$V = V(x^2 + y^2 - z) \cup V(x,y)$$

ni olamiz.

Agar, masalan

$$f = x^2 + y^2 - z, \qquad g = 2x^3 - 3y^4 z \in k[x, y, z], \qquad (2.1.3)$$

va ϕ, φ- $k[V]$ -ning elementlari. V da ϕ va φ ga ham aniq nolga teng bo'lmaydi:

$$\text{V}: (0,0,5) \in V \quad \text{va} \quad \phi(0,05) = f(0,05) = -5 \neq 0.$$

Shuningdek $(1,1,2) \in V$, va $\varphi(1,1,2) = g(1,1,2) - 4 \neq 0$

bo'ladi. Lekin $\phi \times \varphi$ ko'paymasi V-ning har bir nuqtalarda nolga teng. Sababi quyidagicha:

$$f \times g = (x^2 + y^2 - z)(2x^2 - 3y^4) = 2x(x^3 + xy^2 - xz) -$$

$$-3y^3 z(x^3 + xy^2 - z)) \in (x^3 + xy^2 - xz, x^3 + xy^2 - yz)$$

Bundan esa $f \times g \in I(\text{V})$ bo'ladi, shuning uchun $\phi \times \varphi$ polynomial funksiyalar V da nolga teng.

Maydonning ikkita nolga teng bo'lmagan elementlarining ko'paytmasi yoki $k[x_1, . . . , x_n]$ nolmas ko'phadi nolga teng bo'ishi mumkin emas. Umumiy holda R –kommutativ xalqa aniqlanish sohasi deyiladi, agar $R -$ da $a \times b = 0$ bo'lsa, bundan *a=0* yoki *b=0* bo'ladi. Umuman olganda $\phi \neq 0$ va $\varphi \neq 0$ funksiyalarning $\text{k}[V]$ da mavjudligidan $\phi \times \varphi = 0$ bo'lishiligi esa V-dan to'g'ridan-to'g'ri kelib chiqadi: (2.1.3)-ko'phad nolga teng $V_1 = V(x^2 + y^2 - z)$ va $V_2 = V(x, y)$ nolga teng emas. Xuddi shuningdek g ko'phad V_2 da nolga teng va V_1da esa nolga teng emas. Shuning uchun $V = V_1 \cup V_2$-ning har bir nuqtasida $f \times g = 0$ bo'ladi. V-ko'pxillikning geometrik xususiyatlari va $k[V]$ -xalqaning algebraik xususiyatlari orasida aloqani ko'rsatdik.

Yana bitta misolni qaraymiz, polinomial akslantirishni o'rganayotganda ko'pxillikni aniqlash mumkin. Agar $V \subset C^3$ ko'pxillilik uchta kvadratning kesishmasi bo'lsin:

$$x^2 + 2xz + 2y^2 + 3y = 0$$

$$xy + 2x + z = 0 \qquad (2.1.4)$$

$$xz + y^2 + 2y = 0$$

V- ko'pxillikni o'rganish uchun, (2.1.4) ko'phadlar bilan berilgan Gryobner ideal basini topamiz, bunda $y > z > x$ bo'ladi.

Bu bazis ikkita ko'phaddan ibrat bo'ladi:

$$g_1 = y - x^2$$

$$g_2 = z + x^3 + 2x \qquad (2.1.5)$$

Bu geometrik ma'noda, *V* ko'pxillikning *x* o'qga proyeksiyasi akslantirishni bildiradi, (2.1.5)-ko'phadlar esa eng katta o'zgarmas kayfisentga egadir. Bulardan tashqari, har bir $x \in C$ qiymatida bitta *y*-topiladi va bitta *z*-topiladiki unda *(x,y,z)*∈*V* bo'ladi.

Bushqacha aytganda:

$$\pi: V \to C\,, \qquad (x, y, z) \to x,$$

$$\phi: C \to V, \qquad x \to (x, x^2, -x^3 - 2x)$$

akslantirish mavjud.

(2.1.5)-ko'phadlardan ϕ -akslantirish *V* tegishli bo'lib π, ϕ polinomial akslantirishlardir. Agar π va ϕ o'zaro teskari ekanligini ko'rsatamiz. Dastlab $\phi \times \pi = id_C$-isbotlaymiz. Bu esa

$$(\pi \times \phi)(x) = \pi(x, x^2, -x^3 - 2x) = x.$$

Boshqa tamondan, agar *(x,y,z)*$\in V$ bo'lsa unda

$$(\pi \times \phi)(x,y,z)=(x,x^2,-x^3-2x) \text{ bo'ladi.}$$

(2.1.5) ga asosan $y-x^2, z+x^3+2x \in I(V)$. Bu esa $\phi \times \pi$ esa o'sha V dagi akslanishni ifodalaydi, yani $id_V(x,y,z)=(x,y,z)$ dir.

Bulardan $V \subset C^3$ va C izamorf ko'pxillik bo'ladi, yani C da V-ko'pxillikning polinomial biyeksiyasi bo'lib, teskari akslantirish ham polinomialdir. Lekin bu ikkita ko'pxilliliklar har xil tenglamalar bilan ifdalanadi, har xil fazolarda qandaydir manoda ular bir xildir. Bulardan tashqari (2.1.5) Gryobnera bazisini hisoblashda $C[V]=C[x]$ tenglik har qanday $\varphi \in C[V]$ da (2.1.5) dan y va z larga bir hil almashtirish mumkin. Agar x xuddi $W=C$ ning koordinatasi kabi bo'lsa, yana $C[W]=C[x]$ bo'ladi. Bundan polinomial funksiyalar izomorf ko'pxilliliklarda ustma-ustdir to'shadi. Xullas biz affin ko'pxilliliklarida polinomial funksiyalar to'plamini o'rganishdan "keltirishlik" va "keltirilmaslik"lar kelib chiqadi. Bundan tashqari $k[V]$-xalqada ko'pxilliliklarni klassifikatsiyalalarga ajratish mumkinligini bildiradi.

§ 2.2. Polinomial xalqalar faktor xalqasi.

Xalqa *k[V]* faktor xalqa deb ataluvchi $k[x_1, . . . , x_n]$ xalqada I ideal bo'icha hususiy holi bo'ladi,. Faktor xalqaga o'tish- bu ko'phadlarni bitta elementga yig'ishdir, unga $\phi \in$ k[V] elementni ifodalaydi. Faktor to'plamga o'tish- bu kommutativ algebra va algebraik geometriyaning asosiy konstruksiyasidan hisoblanadi. Dastlab zauriy tariflarni beramiz.

2.2.1-Ta'rif. ***$I \subset k[x_1, . . . , x_n]$- qandaydir ideal f , $g \in k[x_1, . . . , x_n]$ dagi ko'phadlar I modul bo'yicha taqqoslanuvchi deyiladi va $f \equiv g$ mod I $agar$ $f - g \in I$ bo'lsa.***

Masalan $I = (x^2 - y^2, x + y^3 + 1) \subset k[x, y]$ .bundan $f = x^4 - y^4 + x$ va $g = x + x^5 + x^4y^3 + x^4$ ko'phadlar I modul bo'yicha taqqoslanuvchi bo'ladi, chunki $f - g = x^4 - y^4 - x^5 - x^4y^3 - x^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) - x^4(x + y^3 + 1) \in I$. Taqqoslash munosabatining eng asosiy xossasi bo'lib quyidagi tasdiq hisoblandi.

2.2.***2-Teorema. Agar $I \subset k[x_1, . . . , x_n]$ − idealda I modul bo'yicha taqqoslashlar esa $k[x_1, . . . , x_n]$ to'plamda ekvivalentlik munosabatlari bo'lib hisoblanadi.***

Isbot. I modulda taqqoslanish refleksivdir, chunki $f - f = 0 \in I$ barcha $f \in k[x_1, . . . , x_n]$ da. Simmetriyallikni isbotlaymiz. Agar $f \equiv gmodI$ bo'lsa, unda $f - g \in I$ demak $g - f = (-1)(f - g) \in I$ yani $g \equiv fmodI$. Endi tranzitivlikni isbotlaymiz. Agar $f \equiv gmodI$ va $g \equiv hmodI$ bundan $f - g \in I, g - h \in I$ bo'ladi, lekin I qo'shishga nisbatan yopiq $f - g + g - h = f - h \in I$, bundan $f \equiv hmodI$.

S-to'plamdagi ekvivalentlik munosabatlari bu to'plamni kesishmaydigan qism to'plamlarga bo'ladi, ular esa ekvivalentlik sinflari deb ataladi. Har qarday $f \in k[x_1, . . . , x_n]$ uchun ekvivalent sinfi bu to'plamdir

$$[f] = \{g \in k[x_1, . . . , x_n]: g \equiv fmodI\}.$$

I modul bo`yicha taqqoslash har qanday $I \subset k[x_1, . . . , x_n]$ ideal uchun o'rinlidir. Agar $I = I(V)$ bo'lsa, $f \equiv g mod I(V)$ esa *f* va *g* lar bitta funksiyani *V* da ifodalaydi. Boshqacha aytganda ko'phadlar yig'indisi bitta funksiya ifodalashda *V* da, ekvivalent sinflarga *I(V)* modul bo'yicha o'tishni anglatadi.

2.2.***4-Ta'rif.*** $\boldsymbol{k[x_1, . . . , x_n]}$***/ I faktor xalqa*** $\boldsymbol{k[x_1, . . . , x_n]}$***da I ideal, I modul bo'yicha taqqoslama ekvivalentliklar sinfi to'plami deyiladi:***

$$\frac{\boldsymbol{k[x_1, . . . , x_n]}}{\boldsymbol{I}} = \{[\boldsymbol{f}] : \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{k[x_1, \quad . . . \quad , x_n]}\}.$$

Agar masalan *k*=*R*, $I = (x^2 - 2)$ bo'lsa unda *I* modul bo'yicha ekvivalent sinfini ifodalash mumkin bo'lsin. Bo'lish algaritmidan foydalanib $f \in R[x]$ dagi har qanday ko'phadni quyidagicha ifodalash mumkin $f = q(\mathrm{x}^2 - 2) + r, r = ax + b;\ a, b \in R. f \equiv r mod I$ dan chunki $f - r = q(x^2 - 2) \in I$ bo'ladi. Shunday qilib $R[x]$ dagi har qanday ko'phad $[ax + b]$ ko'rinishdagi ekvivalentlik sinfiga tegishli va $R\frac{[x]}{I} = \{[ax + b] : a, b \in R\}$. Biz buni $k[x_1, . . . , x_n]/I$ni har qanday *I* uchun qo'llaymiz.

$k[x_1, . . . , x_n]$ - xalqa, bunda $[f], [g] \in k[x_1, . . . , x_n]/I$ da qo'shish va ko'paytirish amallarini aniqlash mumkin, boshqacha aytganda sinflardagi amallar quyidagicha:

$$[f] + [g] = [f + g];\ (k[x_1, \quad . . . \quad , x_n]/I)$$

$$[f] \cdot [g] = [f \cdot g]\ ; (k[x_1, . . . , x_n]/I) \tag{2.2.1}$$

Biz bu formulalarni korrektligini tekshirishimiz kerak, yani biz bu sinfdan boshqa ko'phadlarni olsak $f' \in [f], g' \in [g]$ bo'lsa unda $[f' + g']$sinfi $[f + g]$ sinfi bilan mos tushishi kerak. Xuddi shunday $[f' \cdot g'] = [f \cdot g$ ni ham isbotlashdir.

2.2.***5-teorema. Qo'shish va ko'paytirish amallari (1)-bilan korrekt aniqlangan yani*** $[\boldsymbol{f}' + \boldsymbol{g}']$ ***va*** $[\boldsymbol{f}' \cdot \boldsymbol{g}']$ ***sinflari*** $\boldsymbol{f}' \in [\boldsymbol{f}]$ ***va*** $\boldsymbol{g}' \in [\boldsymbol{g}]$ ***tanlanishiga bog'liq emas.***

Isbot. Agar $f' \in [f]$ va $g' \in [g]$ bo'lsa, bundan $f' = f + a$ va $g' = g + b$ deb $a, b \in I$ bo'lsa quyidagicha:

$$f' + g' = (f + a) + (g + a) = (f + g) + (a + b) .$$

$a + b \in I$ bunda $f' + g' \equiv f + gmodI$; demak $f' \cdot g' = (f + a) \cdot (g + b) = fg + ag + fb + ab$ chunki $ag + fb + ab \in I, f' \cdot g' = f \cdot gmodI.$ demak $[f' \cdot g'] = [f \cdot g]$ bo'ladi.

Misol sifatida $R[x]/(x^2 - 2)$ faktor xalqada qo'shish va ko'paytirish amallarini qaraymiz. Biz bilamizki $[ax + b]$ sinf $a, b \in R$ da $R[x]/(x^2 - 2)$ dagi to'liq elementlari to'plamini ifodalaydi. Sinflar yig'indisini $[ax + b] + [cx + d] = [(a + c)x + (b + d)]$ formulani ifodalaydi. Oddiy vektorli yig'indi esa tartibli haqiqiy sonlardan iborat. Sinflarning ko'paytmasini ifodalash murakkab emas:

$$[ax + b] + [cx + d] = [acx^2 + (ad + bc)x + bd] = [(ad + c)x + (bd + 2ac)].$$

Bunig uchun ikkinchi tartibli ko'phadni $x^2 - 2$ ga bo'lib qoldiqni topish kerak. Chunki korrekt aniqlangan, bunda kommutativ xalqaning aksiomasi o'rinlidir. $(k[x_1, . . . , x_n]/I)$ da shuning uchun sinflarda aniqlangan $k[x_1, . . . , x_n]$ xalqada. Masalan $(k[x_1, . . . , x_n]/I)$ da qo'shishni assosiativlagini isbotlash uchun quyidagilardan foydalanamiz:

$([f] + [g]) + [h] = [f + g] + [h] = [(f + g) + h] = [f + (g + h)] = [f] + [g + h] = [f] + ([g] + [h]).$

Xuddi shunday qo'shish va ko'paytirishning kommutativligi ham isbotlandi, hamda assosiativlik ko'paytirishda va distrubitivlik qonunlarida ham $(k[x_1,$ . . . *,xn/I)* da bizlarning aditivlagi [0] bo'ladi va multiplikativligi ham bajariladi. Shunday qilib biz quyidagi teoremaga kelamiz.

2.2.6.-teorema. Agar I-ideal $\boldsymbol{k[x_1,...,x_n]}$ da bo'lsin. Bunda $(\boldsymbol{k[x_1,...,x_n]/I})$ faktor xalqa kommutativ xalqa bo'lib hisoblanadi, bundagi amallar (1) bilan beriladi.

Agar V-ko'pxillik berilgan bo'lsin, bunda faktorxalqa $(k[x_1,...,x_n]/I)$ va xalqa $k[V]$lar uchun polinomial funksiyalar deyish mumkin V da.

2.2.7.-teorema. $\boldsymbol{k[V]}$ xalqa bilan $\boldsymbol{k[x_1,...,x_n]/I(V)}$ xalqaning elementlari orasida o'zaro bir xilliklar mavjud va yig'indi va ko'paytmalar esa saqlanadi.

Isbot. $\Phi: k[x_1,...,x_n]/I(V) \to k[V]$ ga quyidagicha ifodalaymiz $\Phi([f]) = \phi$, bu yerda ϕ yarimnominal funksiya f ko'phad bilan ifodalangan. Chunki $k[V]$ dagi har bir element ko'phad bilan ifodalanadi, bunda Φ-esa o'ziga akslantirish. Uning inyektivligini isbotlaymiz. Agar $\Phi([f]) = \Phi([g])$ bo'lsa, $f \equiv mod\, I(V)$ bo'ladi. Shundan $[f] = [g]$ da$[x_1,...,x_n]/I(V)$ bo'ladi.

Endi yig'indi va ko'paytmani qaraymiz. Agar $[f],[g] \in k[x_1,...,x_n]/I(V)$ bo'lsa unda $\Phi([f]+[g]) = \Phi([f+g])$ faktor xalqada yig'indi ta'rifidan olinadi. Agar f polinomial funksiya ϕ ni ifodalasa, g esa φ ni unda $f+g$ esa $\phi+\varphi$ ni ifodalaydi. Bundan esa $\Phi([f]+[g]) = \phi+\varphi = \Phi([f]) + \Phi([g])$ olinadi. Shunday qilib Φ -yig'indini saqlaydi, xuddi shunday $\Phi([f]\cdot[g]) = \Phi([f\cdot g]) = \phi\cdot\varphi = \Phi([f])\cdot\Phi([g\,])$ ham bo'ladi, yani Φ -ko'paytmani ham saqlaydi. Shunga o'xshash tushunchalarda, aksincha φ ham yig'indi va ko'paytmani mos holda ifodalaydi, teorema isbotlandi.

2.2.8-ta'rif: Agar R, S- kommutativ xalqalar bo'lsin.

(i) $\boldsymbol{\phi: R \to S}$ ga akslanishi xalqali izomorfizm deyiladi agar

(a) $\boldsymbol{\phi}$ yig'indini saqlasa yani $\boldsymbol{\phi(r+r') = \phi(r) + \phi(r')}$ barcha $\boldsymbol{r, r' \in R}$ da;

(b) ***$\boldsymbol{\phi}$ ko'paytmani saqlaydi, yani $\boldsymbol{\phi(r\cdot r')=\phi(r)\cdot\phi(r')}$ barcha $\boldsymbol{r'\in R}$ da;***

(c) ***$\boldsymbol{\phi}$ o'ziga nisbatan inyektiv akslantirishdir.***

(ii) ***R,S- xalqalar izomorf deyiladi,agar $\boldsymbol{\phi\colon R\to S}$ izomorfizm mavjud bo'lsa. Agar R-izomorfizmi S bo'lsa biz uni $\boldsymbol{R\cong S}$ deb yozamiz.***

(iii) ***$\boldsymbol{\phi\colon R\to S}$ akslantirish xalqali gomomorfizm deyiladi, agar $\boldsymbol{\phi}$ esa (a) va (b) shartlarni (i) da bajarsa lekin (c) shart majburiy emas,bundan tashqari multiplikativ birni $\boldsymbol{1\in R}$, multiplikativ birga $\boldsymbol{1\in S}$ ga o'tkaziladi.***

Umuman olganda “gomomorfizm”-bu akslantirish bo'lib, algebraik strukturalarni saqlaydi. Xalqali gomomorfizm $\phi\colon R\to S$ esa qo'shish va ko'paytirish amallarini R-xalqada saqlaydi. Shunday qilib 7-teorema xalqali izomorfizmni aniqlaydi $k[V]\cong k[x_1,\ldots,x_n]/I(V)$ da. Agar $I(V)$ ni aniqlovchi ideal bilan almashtiramiz boshqa ideal bilan V-da ifodalangan. Barcha faktor xalqalar $k[x_1,\ldots,x_n]/I(V)$ da izomorflik $k[V]$ da o'rinli b'lishini keyingi misolda ko'ramiz. Agar $V=\{(0,0)\}$ bo'lsa, $(V)=I(\{(0,0)\})=(x,y)$ .2.2.7-teoremadan esa $k[x,y]/I(V)\cong k[V]$ olinadi.

Dastlab biz $k[x,y]/I(V)\cong k$ ni qaraymiz,shuning uchun polinomial funksiya to'plamda $\{(0,0)\}$ nuqtalardan iborat o'zgarmas bo'lib ifodalanadi. Chunki uning to'plami bitta sondan iborat. Biz yana tasdiqni algebraikligini isbotlashimiz mumkin, ushbu akslantirishni qurib

$$\Phi\colon k[x,y]/I(V)\longrightarrow k,$$

bu yerda $\Phi([f])=f(0,0)$ ko'phadning o'zgarmas hadlaridir. Agar $I=(x^3+y^2,3y^4)\subset k[x,y]$ bo'lsa $V(I)=\{(0,0)\}=V$ bo'lishini tekshirish oson $k[x,y]/I(V)\cong k$ o'rinlimi? O'rinli emasligini ko'rish uchun $[y]\in k[x,y]/I$ ni qaraymiz.Lekin $y\notin I$ ni Gryobner I ideal bazisini qurib tekshirish mumkin.

Demak $[y] \neq [0], k[x,y]/I$ xalqada.Lekin $[y]^4 = [y^4] = [0]$, chunki $y^4 \in I$ dan. Shunday qilib $k[x,y]/I$ da nolli element mavjud, uning 4-darajasi esa nolga teng. Lekin maydonda bunday element mavjud emas. Bundan $k[x,y]/I$ maydon bo'lmaydi. Demak $k[x,y]/I(V)$ va $k[x,y]/I$ izamorf emas, shuning uchun bittasi maydon ikkinchisi maydon emas. R kommutativ xalqada a-element nilpanentli deyiladi, agar $a^n = 0$ bo'lsa qandaydir ≥ 1 . Hozirgi misoldan shuni ko'rsatish yetarliki, qachonki $k[x_1, . . . , x_n]/I(V)$ va $k[x_1, . . . , x_n]/I$ faktor xalqalarni biz tasdiqlaymiz, bu yerda *I*- qandaydir ideal, bunda $V(I) = V$ bo'ladi. Agar *I*-radikal bo'lmasa, unda $f \in \sqrt{I}$ ko'phad mavjud, qachonki $f \notin I$ da. Bunda $f \neq 0$ bo'ladi $k[x_1, . . . , x_n]/I$ da lekin $[f]^n \neq [0]$ bo'ladi, chunki $f^n \in I$ bo'ladi $n > 1$ da. $k[x_1, . . . , x_n]/I$ faktor xalqa nolmas nilpanent elementir. Shu bilan birga $k[x_1, . . . , x_n]/I(V)$faktorxalqaga ega emas, xalqaga ega emas, $I(V)$ radikal idial bo'ladi va shuning uchun $[f]^n = [0]$ qachonki-qachon $[f] = 0$ bo'lganda.

Xullas faktorxalqa $k[x_1, . . . , x_n]/I$-ni o'zi ham kommutativ xalqa bo'ladi, yana uning boshqa qirralarini ham o'rganamiz, xususan $k[x_1, . . . , x_n]/I$ idealni o'rganishda kommutativ xalqadagi ideal ham xuddi ko'phadlari xalqasi kabi aniqlanadi.

2.2.9-ta'rif: ***Qism to'plami I kommutativ xalqa R da ideal deyiladi:agar***

(i) $\mathbf{0} \in \boldsymbol{I}$ ***bu yerda o-element R xalqada;***

(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{I}$ ***bo'lsa, unda*** $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{I}$;

(iii) $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{I}, \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}$ ***bo'lsa*** $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{I}$.

$k[x_1, . . . , x_n]/I$faktorxalqa va $k[x_1, . . . , x_n]$ dagi idealda chambarchas bog'liq bo'ladi.

2.2.10.-teorema. I ideal bo'lsin $\boldsymbol{k[x_1, . . . , x_n]}$ ***da. U xolda*** $\boldsymbol{k[x_1, . . . , x_n]/I}$ ***faktorxalqa*** $\boldsymbol{k[x_1, . . . , x_n]}$ ***ideal bilan o'zaro bir qiymatli bo'ladi, ideal bilan I da (yani J-idialda*** $\boldsymbol{I \subset J \subset k[x_1, . . . , x_n]}$***).***

Isbot. Dastlab $k[x_1, . . . , x_n]/I$ idealni qurishni qarayiz, J-idealga mos holda $I \subset J \subset k[x_1, . . . , x_n]$ bo'ladi. Agar I-ideal J ni o'zida saqlasa unda J/I orqali $\{[j] \in k[x_1, . . . , x_n]/I : \text{j} \in \text{J}\}$ deb belgilaymiz. Biz J/I ideal deb tastiqlaymiz $k[x_1, . . . , x_n]/I$ da. Buni isbotlaymiz. Dastlab $[0] \in J/I$ bo'ladi, chunki $0 \in J$. Keyinchalik $[j], [h] \in J/I$ dan $[j] + [h] = [j + h]$ faktorxalqa tarifidan kelib chiqadi. Chunki $j + h \in J$ da $[j] + [h] \in J/I$ bo'ladi. Agar $[j] \in J/I$ va $[r] \in k[x_1, . . . , x_n]/I$ bunda $[r] \cdot [j] = [r \cdot j]$ ham faktorxalqa ta'rifidan kelib chiqadi. Chunki $r \cdot j \in J$ dan J-ideallardir $[r] \cdot [j] \in J/I$ bo'ladi. Shunday qilib J/I-ideal bo'ladi $k[x_1, . . . , x_n]/I$ da.

Agar $\tilde{J} \subset k[x_1, . . . , x_n]/I$ –qandaydir ideal bo'lsin. Biz endi $\tilde{J}$va$J$ idealni qanday qurishni $k[x_1, . . . , x_n]$ da ko'rsatamiz, I ga tegishli holda. $J = \{j \in k[x_1, . . . , x_n] : j \in \tilde{J}\}$bo'ladi. $I \subset J$dan$[i] \approx [0] \in \tilde{J}$ har qanday $i \in I$ uchun olamiz. Endi J-ideal ekanligini ko'rsatamiz. Birinchidan $I \subset J$. Bundan esa $j, h \in J$ da $[j], [h] \in J$ ekanligi olinadi. Bundan$[j] + [h] = [j + h] \in \tilde{J}$ bo'ladi. Keyin esa $j + h \in J$. Xullas $j \in J$va$r \in k[x_1, . . . , x_n]$ bo'ladi. Yana $[j] \in \tilde{J}$ bo'lsa $[r][j] = [r \cdot j] \in \tilde{J}$. Bulardan $r \cdot j \in J$ ya'ni J-idial $k[x_1, . . . , x_n]$da.

Biz shunay qilib, ikkita to'plamlar orasida o'zaro bir xil moslikni ko'rsatdik:

$$\{J : I \subset J k[x_1, \quad . . . \quad , x_n]\}\{\tilde{J} \subset k[x_1, \quad . . . \quad , x_n]\}$$

$$J \to \frac{J}{I} = \{[j] : j \in J\} \qquad (2.2.2)$$

$$J = \{j : [j] \in \tilde{J}\} \leftarrow \tilde{J}.$$

Bu esa o'zaro bir xillikni ifodalaydi.

Masalan $I = (x^2 - 4x + 3) \subset R = R[x]$ idealni qaraymiz. Biz bilamizki R-bosh idealning sohasidir, yani har bir R dagi ideallar ko'phadlar bilan ifodalanadi. I-ideallarni o'zida saqlovchi ideallar esa, shunday ideallarki, ifodalovchilari $x^2 - 4x + 3$ bo'ladi. Bundan esa R/I faktorxalqa to'rta idealni o'zida ifodalaydi:

R/I −ideallari	I ni o'zida saqlovchi R −ideallar
$\{[0]\}$	$(x-1)$
$([x-1])$	$(x-3)$
R/I	$R.$

Oldin qaralgan misoldan biz R/I-amalini ifodalaymiz, x^2-4x+3 ga bo'lishdagi qoldiqda.

§2.3. Ko'pxillikdagi ratsional funksiyalar.

Ko'pxillikda maydonlar butun sonlar xalqasini o'z ichiga oladi. Bunday maydonlardan eng kichigiga $\mathbb{Q}$ ratsional sonlar maydoni hisoblanadi. $\mathbb{Q}$; $\frac{m}{n}$, $n, m \in Z$ kasrlardan tuziladi. $\mathbb{Q}$ ni qurish uchun faqat butun sonlardan foydalaniladi. Shunga o'xshash $k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ polinamial xalqa.

$$k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left\{\frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{g(x_1, x_2, \dots, x_n)}; f, g \epsilon\, k(x_1, x_2, \dots, x_n),\ \ g \neq o\right\}$$

ratsional funksiyalar maydonining qism xalqasi hisoblanadi.

$\mathcal{R}$ butunlikning birorta soxasi bo'lsin. U holda biz uning bo'linmalar maydonini ko'rishimiz mumkin va uni $\mathbb{Q}$ □ $(\mathcal{R})$ deb olamiz. Uning elementlari $\frac{r}{s}$ kasrlardan iborat bo'lib, bu yerda $r, s \epsilon \mathcal{R}\ va\ s \neq 0.$ $\mathbb{Q}$ □ $(\mathcal{R})$ dagi elemantlarini soni kasrlardagi ratsional funksiyalar kabi qo'shamiz va ko'paytiramiz:

$$\frac{r}{s} + \frac{t}{u} = \frac{ru + ts}{su} \quad va \quad \frac{r}{s} \cdot \frac{t}{u} = \frac{rt}{su}$$

$\mathcal{R} -$ butunlik sohasi bo'lgani uchun yig'indidagi va ko'paytmadagi maxraj nolga teng emas. $\frac{r}{s}$ va $\frac{r'}{s'}$ kasrlar $\mathbb{Q}$ □ $(\mathcal{R})$ ga teng agar $rs' = r's$ bo'lsa maydonning barcha aniqlanadigan $\mathbb{Q}$ □ $(\mathcal{R})$ da bajariladi. Bundan tashqari $\mathbb{Q}$ □ $(\mathcal{R})$ $\left\{\frac{r}{1}:\ r\epsilon\mathcal{R}\right\}$ qism to'plamini o'z ichiga oladi va u $\mathcal{R}$ ga izomorf qism xalqa bo'ladi.

$V \subset k^n$ – keltirilmaydigan ko'pxillik bo'lsin. U holda $k[V]$ koordinatalar xalqasi butunlik sohasi bo'ladi. $\mathbb{Q}$ □ $(k[V])$ maydon maxsus nomga ega.

2.3.1-tarif. ***$V - k^n$ da keltirilmaydigan affin ko'pxillik bo'lsin. U xolda*** $\mathbb{Q}$ F $(\boldsymbol{k}[\boldsymbol{V}])$ $\boldsymbol{ga}$ ***V da funksiyalar maydoni yoki ratsional funksiyalar maydoni deb ataladi va $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{V})$ deb belgilanadi.***

Endi $k[x_1, x_2, \dots\ , x_n]$ – ko'phadlar xalqasini va $\mathrm{k}[V]$ – esa V ko'pxillikning koordinatalar xalqasi deb qaraymiz, shunga o'xshash $k(x_1, x_2, \dots\ , x_n)$ – ratsional funksialar maydoni, hamda $k(V)$ – V dagi funksiyalar maydoni.

$k(V),\ V \subset k^n$ funksiyalarda maydonini oshkora quydagicha berish mumkin.

$$k(V) = \left\{\frac{\phi}{\psi}; \phi, \psi \epsilon k[V], \psi \neq 0\right\} = \left\{\frac{[f]}{[g]}; f, g \in k[x_1, x_2, \dots\ , x_n], g \notin I(V)\right\}$$

Ratsional funksiyalar bilan ishlaganda maxrajining nolga aylanmasligiga e'tibor qilamiz, shunday qilib $\frac{\phi}{\psi} \epsilon\, k(V)$ elemant faqat $k\ V_V(\psi)$ to'ldirilganda aniqlanadi. $V = k^n$ ko'pxillikdagi funksiyalardagi maydonining asosiy misolini beradi. Bu yerda $k[V] = k[x_1, x_2, \dots\ , x_n]$ va demak

$$k(V) = k(x_1, x_2, \dots\ , x_n)$$

2.3.1-misol. $V = V(y^5 - x^2) \subset \mathbb{R}^2$ egri chiziq $\mathbb{R}$ ga izamorf emas.

Dastlab $\mathcal{R}(V)$ dagi ekemantlarni $G = \{y^5 - x^2\}$ ($G - I(V)$ idealning $x > y$ li polinamiallar tartiblanganiga nisbatdan $R[x, y]$) da Gryobner bazasi hisoblanadi, modul bo'yicha qoldiqlar bilan ifodalash mumkin.

$R[V] = \{a(y) + b(y)\ \ x: a, b \in R[y]\ \}$ R dagi vektor fazo sifatida ko'paytirish quydagi formula bilan ifodalanadi.

$$(a + bx) \cdot (c + dx) = (ac + y^2 \cdot bd) + x(ad + bc)$$

2.3.2-Misol. V ko'pxillikning keltirilgan bo'yicha isbotlanadi. Demak $R[V]$ butunlik sohasi bo'lsin.

Endi $R[V]$ ning tavsifidan foydalanamiz $R(V)$ funkiyalar maydonini tavsiflashimiz mumkin. Agar $c + dx \neq 0$ bo'lsa u holda $R(V)$ dagi element

$$\frac{a+bx}{c+dx} = \frac{a+bx}{c+dx} \cdot \frac{c-dx}{c-dx} = \frac{(ac+y^2bd)+x(bc-ad)}{c^2-y^5d^2}$$

$$= \frac{ac+y^2bd}{c^2-y^5d^2} + x\frac{bc-ad}{c^2-y^5d^2}$$

$R(y)+xR(y)$ ga teng bo'ladi.

Aksincha $R(y)+xR(y)$ dagi har bir element $R(V)$ dagi elementni aniqlaydi. Shunday qilib $R(V)$ maydonini $R(y)+xR(y)$ funksiyalar to'plami bilan aniqlash tuzilishi mumkin. Bu yerda qo'shish va ko'paytirish $R[V]$ dagi kabi aniqlangan faqat polinaminallar o'rnida u ga bog'liq ratsianal funksiyalardan foydalaniladi.

$$\alpha: V \to R, \qquad (x, y \to x/y^2)$$

$$\beta: R \to V \qquad u \to (u^5, u^2).$$

Akslantirishlarni qaraymiz, etibor berish kerakki $\alpha - V$ da (0,0) nuqtadan boshqa hamma joyda aniqlangan β esa o'z navbatida $\beta - V$ ko'pxillikning tomonlar parametrlanishi hisoblanadi. α va β bo'yicha polinamiallar qaraladigan yo'nalishda amal qiluvchi funksiyalar akslantirishlarini aniqlaymiz. Lekin α ratsional funksiyalar sifatida aniqlangani uchun uning $K[u]$ dagi funksiyalar bilan kompazitsiyasi $R[V]$ dagi element bo'la olmaydi.

$$\alpha^*: R(u) \to R(V), \quad f(u) \to f(x/y^2)$$

$$\beta^*: R(V) \to R(u), \quad a(y) + xh(y) \to a(u^2) + u^5b(u^2).$$

Akslantirishlarni qaraymiz $\alpha^*\ va\ \beta^*$ o'zaro teskari xalqada izomorf tuzilgan ekanligini tasdiqlaymiz $\alpha^*\ va\ \beta^*$ yig'indi va ko'paytmalarni saqlashi 4-mavzudagi tasdiqqa ko'ra isbotlanadi. $\alpha^*\ va\ \beta^*$ o'zaro teskari ekanligini aniqlaymiz.

Agar $f(u) \in R(u)$, u holda $\alpha^*(f) = f\left(\frac{x}{y^2}\right)$. Demak $\beta^*\left(\frac{\alpha^*}{f}\right) = f\left(\frac{u^5}{(u^2)^2}\right) = f(u)$. Shuning uchun $\alpha^* \cdot \beta^*$ $R(u)$ da aynan akslantiramiz. Endi $\alpha(y) + xb(y) \in R(V)$ bo'lsa. U holda $\beta^*(a + xb) = a(u^2) + u^5 b(u^2)$ shuning uchun $\alpha^*\left(\beta^*(a + xb)\right) = a\left((\frac{x}{y^2})^2\right) + (\frac{x}{y^2})^5 b\left((\frac{x}{y^2})^2\right) = a\left(\frac{x^2}{y^4}\right) + (\frac{x^5}{y^{10}}) b(\frac{x^2}{y^4})$.

Lekin $x^2 = y^5$ $R(V)$ shuning uchun $\frac{x^2}{y^4} = y$ va $\frac{x^2}{y^4} = x$ $\frac{y^{10}}{y^{10}} = x$ shunday qilib $\alpha^* \cdot \beta^*$ akslantirishda $R(V)$ da ayniy akslantirish.

Shuning uchun $\alpha^*, \beta^* - R(V)$ va $R(V)$ funksiyalar maydonlarining xalqa izomorfizimlari hisoblanadi.

Ko'pxilliklar izomorf funksiyalar maydonlariga ega bo'lishi mumkin.

2.3.3-Misol. X^3 da $Q = V(x^2 + y^2 - z^2 - 1)$ bir pallali giperboloidni qaraymiz va $W = V(x + 1)$ $x = -1$

tekislik bo'lsin. $p = (1,0,0) \in Q$ nuqtalarni qaraymiz, $q \in Q - \{p\}$ nuqta uchun p va q ni tutashtiruvchi L_q to'g'ri chiziqlarni yasaymiz va Q ni W ga ϕ akslantirishning

$$\phi(q) = L_q \cap W$$

Kabi aniqlaymiz agar $L_q \cap W$ ni kesib o'tsa (Agar to'g'ri chiziq W ni kesib o'tmasa, u holda $\phi(q)$ aniqlanmagan). $\phi(q)$ uchun algebraik holida topamiz. Agar q=$(x_0, y_0, z_0) \in Q$ bo'lsa u holda

L_q da

$$x=1+t(x_0 - 1)$$

$$y=ty_0$$

$$z=tz_0$$

Tenglamalar bilan parametrlarni $\phi(q) = L_q \cap W$ nuqtada 1+t$(x_0 - 1)$=-1 ga ega bo'lamiz. U holda yuqoridagi parametrlarni $\phi(q)$ =(-1,$\frac{-2y_0}{x_0-1}$,$\frac{-2z_0}{x_0-1}$)

kelib chiqadi,u holda $\phi(q)$ Q da

Q $\cap V(x-1) = \{(1,t,t): t \in R\} \cup \{(1,t,-t): t \in R\}$

to'g'ri chiziqlardagi nuqtalardan tashqari birga paydo aniqlanganini bildiradi.

$$\phi(q): Q - V_0(x-1) \to W$$

ni ratsional akslantirish deb ataymiz. Shuki uning kompanentlari ratsional funksiyalar hisoblanadi. Biz ularni ham *R(Q)* ning elementlari deb hisoblaymiz, ikkinchi tamondan agar

(-1,a,b)∈W bo'lsa u holda P(1,0,0) va (-1,a,b) ular orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq

x=1-2t

y=ta

z=tb

Tenglamalar bilan parametrlaranadi, u holda *L* to'g'ri chiziqning *Q* bilan kesishmasi ikkita

$$L\cap Q=\{(1,0,0),(\frac{a^2-b^2-4}{a^2-b^2+4},\frac{4a}{a^2-b^2+4},\frac{4b}{a^2-b^2+4})\}$$

nuqtadan iborat. Agar biz *H* orqali $V_w a^2 - b^2 + 4$ geperbolani belgilasak u holda boshqa

$$\varphi: w - H \to Q$$

ratsional akslantirishni

$$\varphi(-1,a,b)=(\frac{a^2-b^2-4}{a^2-b^2+4},\frac{4a}{a^2-b^2+4},\frac{4b}{a^2-b^2+4})$$

formula bo’yicha aniqlash mumkin. ϕ va φ akslantirishlarni tavsifidan $\phi\ \times\varphi$- W-H to’plamni o’z-o’ziga aynan akslantirish ekanligi kelib chiqadi. Shunga o’xshash

$\phi\times\varphi-Q-V_0(x-1)$ ni o’z-o’ziga aynan akslantirish bo'ladi. $\phi^*\times\varphi^*\ va$

$\varphi^*\times\phi^*$ lardan funksiyalar moydonlarining aynan akslantirishlari ekanligi ko’rsatish mumkin.

2.3.4-tarif. ***$V\subset k^m$ va $W\subset k^n$ $-$keltirilmaydigan affin ko’pxilliklar bilan bo’lgan V ko’pxilliklarning W ga ratsional akslantirish deb***

$$\boldsymbol{\phi(x_{1},...,x_m)=(\frac{f_1(x_1,...,x_m)}{g_1(x_1,...,x_m)},...,\frac{f_n(x_1,...,x_m)}{g_n(x_1,...,x_m)})} \qquad (2.3.1)$$

Ifoda bilan berilgan, bu nuqtada $\frac{f_i}{g_i}\in k(x_1,...,x_m)$ va (i) ϕ V dagi hech bo'lmasada bitta nuqtada aniqlangan (ii) ixtiyoriy ($a\_(1,)$ ...,$a\_m)\in$ V nuqta uchun $\phi(a_1,...,a_m)\in$ W shartlarni f qanoatlantiruvchi ϕ funksiyaga $\phi: V\to W$ ratsional akslantirsh V dan W ga akslantiruvchi odatdagi manodagi funksiya bo’lmasligi mumkin.

Chunki yuqoridagi misollardan ko'rinadiki u V da hamma joyida aniqlangan bo'lishi shart emas shu sababli ratsional akslantirish uchun maxsus belgilashdan foydalananiladi.

$$\phi\text{:V}\to\text{W},$$

shartga ko’ra (2.3.1) formula bilan berilgan ϕ ratsional akslantirish aniqlanmagan nuqtalar to’plami $V_1(g_1,...,g_n)$ funksiya V ko’pxillikning xos qism ko’pxilligi xisoblanadi.

2.3. 5-tarif: $\boldsymbol{\phi,\varphi}$ ***:V→W,*** $\boldsymbol{\phi=(\frac{f_1}{g_1},...,\frac{f_n}{g_n})\ va\ ,\varphi=(\frac{h_1}{l_1},,...,\frac{h_n}{l_n})}$.

Formulalar bilan berilgan ratsional akslantirishlar bo'lsa u xolda ϕ va φ lar teng deb ataladi.

Agar ixtiyoriy i, $1 \leq i \leq n$ lar uchun $f_i l_i$-$h_i g_i \in I(V)$ munosabat o'rinli bo'lsa ratsionallar teng deb qaraymiz.

2.3.6-teorema.** **2 ta ratsionallar ϕ, φ: $\to W$, faqat va faqat, $V \subset V'$ xos qism ko'pxillikning mavjud bo'lgandagina teng bo'ladi. ϕ va φ ular V- V' da aniqlangan va $P \in V - V'$ nuqtalar uchun $\phi(P)= \varphi(P)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. $V_1 = V_V(g_1, \dots, g_n)$ *va* $V_2 = V_V(l_1, \dots, l_n)$ bo'lsin shartga ko'ra V_1 va V_2 **-V** ko'pxilliklarning xos qism ko'pxilliklari V keltirmaydigan ko'pxillik bo'ladi uchun u holda

$\mathrm{V}' = \mathrm{V}_1 \cup \mathrm{V}_2$ ham V da xos qism ko'pxillik bo'ladi, u holda ϕ va φ

V-V$'$ da aniqlangan

$f_i l_i$-$h_i g_i \in I(V)$ bo'lgani uchun $\frac{f_i}{g_i}$ va $\frac{h_i}{l_i}$ lar *V-V$'$* da bitta funksiyani isbotlaydi. Demak o'shalarga ϕ va φ lar uchun o'rinli 2-tamondan ϕ va φ lar $\mathrm{V} - \mathrm{V}'$ aniqlansa va teng funksiyalar bo'lsin.

Bu har biri uchun V-V$'$ da $\frac{f_i}{g_i} = \frac{h_i}{l_i}$ ekanligini bildiradi. Lekin u holda V-V$'$ da $f_i l_i$-$h_i g_i$ larga teng emas. Demak V= $V_V(f_i l_i$-$h_i g_i)$ shunday qilib $f_i l_i$-$h_i g_i \in I(V)$

2.3.3-misolda ϕ : Q $\to$ W va φ : W $\to$ Q ratsionallarni aniqladikki $\varphi \times \phi$ *W-H* $\subset$ *W* da aynan teng bo'ladi.

2.3.6-teoremaga ko'ra biz $\varphi \times \phi$ ning *W* ga 2.3.5-ta'rif manosida tengligini bildiradi.

2.3.7-ta'rif. $\boldsymbol{\phi}$ ***:V→W va*** $\boldsymbol{\varphi}$ ***: W → Z akslantirishlar berilgan bo'lsa*** $\boldsymbol{\varphi \times \phi}$ ***kompazitsiya aniqlangan deymiz.***

Agar shunday $P \in W$ nuqta mavjud bo'lsa ϕ va P da aniqlansa va $\varphi\ \phi\ (P)$ nuqtada aniqlangan bo'lsa, agar $\varphi \times \phi$ kompazitsiya aniqlangan bo'lsa ratsional bo'ladi.

2.3.8-teorema. $\boldsymbol{\phi}$ ***:V→W va*** $\boldsymbol{\varphi}$ ***: W → Z shunday ratsionallarki*** $\boldsymbol{\varphi \times \phi}$ ***kompazitsiya aniqlangan, u holda shunday*** $\boldsymbol{V' \subset V}$ ***xos qism ko'pxillik mavjudki (i)*** $\boldsymbol{\phi}$ ***V-*** $\boldsymbol{V'}$ ***dan aniqlangan va*** $\boldsymbol{\phi}$ ***esa*** $\boldsymbol{\phi(V - V')}$ ***da aniqlangan (ii)*** $\boldsymbol{\varphi \times \phi}$ ***:V→ Z V-*** $\boldsymbol{V'}$ ***da aniqlangan ratsionaldir.***

Isbot. φ va ϕ quyidagi ifodaga ega bo'lamiz

$$\phi(x_{1,}\,.\,.\,.\,, x_m)=(\frac{f_1(x_{1,}\,.\,.\,.\,,x_m)}{g_1(x_{1,}\,.\,.\,.\,,x_m)},\,.\,.\,.\,,\frac{f_n(x_{1,}\,.\,.\,.\,,x_m)}{g_n(x_{1,}\,.\,.\,.\,,x_m)})$$

$$\phi(y_{1,}\,.\,.\,.\,, y_n)=(\frac{f_1(x_{1,}\,.\,.\,.\,,x_n)}{l_1(x_{1,}\,.\,.\,.\,,x_n)},\,.\,.\,.\,,\frac{h_s(y_{1,}\,.\,.\,.\,,y_n)}{l_s(y_{1,}\,.\,.\,.\,,y_n)})$$

U holda akslantirishni *j* koordinatasi

$$\frac{h_j(\frac{f_1}{g_1},\dots,\frac{f_n}{g_n})}{l_j(\frac{f_1}{g_1},\dots,\frac{f_n}{g_n})} \quad \text{ga teng.}$$

Ravshanki $(x_{1,}\,.\,.\,.\,,x_m)$ larning ratsional funksiyasi bo'ladi. Uni tamonlar bo'linmasi ko'rinishida tasvirlash uchun uni

$$\frac{P_j}{Q_j} = \frac{(g_{1,}\,.\,.\,.\,,g_m)^M h_j(\frac{f_1}{g_1},\dots,\frac{f_n}{g_n})}{(g_{1,}\,.\,.\,.\,,g_m)^M l_j\left(\frac{f_1}{g_1},\dots,\frac{f_n}{g_n}\right)}$$

Ko'rinishda yozib olamiz. Bu yerda *M* yetarlicha katta

$V'=V_V([Q],\dots,[Q]\,,[g_{1,}\,.\,.\,.\,,g_n]) \subset \mathbf{V}$ deb olamiz.

Ravshanki ϕ $V - V'$ da aniqlangan $\varphi\phi(V - V')$da aniqlangan $V \neq V'$ **e**kanligini isbotlash qoladi. Shartga ko'ra shunday $P \in V$ nuqta mavjudki ϕ va P nuqtada φ esa $\phi(P)$ nuqtada aniqlangan.

Bu $g_i(p) \neq 0$ ekanligini bildiradi va barcha $1 \leq i \leq n$ lar uchun

$$l_j\left(\frac{f_1(p)}{g_1(p)}, \ldots, \frac{f_n(p)}{g_n(p)}\right) \neq 0$$

Lekin u holda $Q_i(p) \neq 0$ va demak $p \in V- V'$ bo'ladi.

2.3.9-tarif: (i) 2 ta $V \subset k^m$ va $W \subset k^m$ keltirilmaydigan ko'pxillik biror ratsional ekvivalent funksiya deyiladi. Agar shunday ϕ:V→W va φ : W → V ratsionallar mavjud bo'lsa $\varphi \times \phi$ va $\phi \times \varphi$.

Kompazitsiyalar aniqlangan va mos ravishda id_V va id_W aynan moslashtirishlarga teng bo'lsa (i) ko'pxillik ratsional ko'pxillik deyiladi. Agar biror *n* uchun k^n fazoda biror ratsional ekvivalent bo'ladi.

2.3.10-teorema: Ikkita V va W keltiriladigan ko'pxilliklar faqat va faqat shundagina biror biratsional ekvivalent bo'ladi. Agar ularning funksiyalar maydonlarining konstantalariga aynan teng bo'lgan k(V)≅k(W) da izomorfizmi mavjud bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik *V* va *W* biror ratsional ekvivalent va ϕ*:V*→***W*** va

$$\varphi : W \to V$$

$$\phi^* : k(W) \to k(V)\ ; \qquad \phi^*(f) = f \times \phi$$

formula bilan aniqlaymiz va izomorfizm ekanligini poliniminal holda formula bu yerda barcha $f \in k(W)$ –lar uchun $\phi^*(f)=f \times \phi$ ekanligi ravshan emas dabiz $f \times \phi$ funksiya *V* ko'pxillikning biror nuqtasida aniqlanmaganligini isbotlashimiz zarur.

Dastlab biz $\phi \times \varphi$=idW sidagi shunday $W' \subset W$ ga xos qism ko'pxillikning mavjudligini chiqishini ko'rsatish kerak.

φ da aniqlangan W - W' akslantirish

ϕ da aniqlangan φ ($W' \subset W$) analiz (2.3.2)

$\phi \times \varphi$ da W - W' aylanish

Buning uchun $W_1 \subset W$ xos qism ko'pxillik topamiz φ da W - W_1 aniqlash ϕ da φ (W-W_1) aniqlangan.

2.3.6-teoremaga ko'ra shunday $W_2 \subset W$ ga xos qism ko'pxillik mavjudki $\phi \times \varphi$ da f ni W - W_2 da aynan W ga keltirilmasligi bo'lgani uchun $W' = W_1 \cup W_2$ - xos qism ko'pxillik va u 2.3.2-shartlarni qanoatlantiradi, $f \in k(W)$ bo'lsin. Endi biz $\phi \times \varphi$ kompazitsiya aniqlanmaganligi isbotlashimiz mumkin . Agar f W- $W'' \subset W$ da aniqlangan bo'lsa u holda $W' \cup W'' \neq W$ chunki W- keltrilmaydigan $q \in$ W-($W' \cup W''$) bo'lsin u holda (2.3.3) ga ko'ra ϕ akslantrish p = φ (q) $\in$ V da aniqlangan ϕ (p) = q$\in W''$ bo'lgani uchun f $\phi(p)$ da aniqlangan.

Demak 2.3.5-tarifga ko'ra $\phi^*(f) = \phi \times \varphi$ funksiya k (V) elementi sifatida mavjud. Bu mulohaza ϕ^* : k (W) $\rightarrow$ k (V) akslantirish mavjudligi isbotlaydi. Bundan tashqari ϕ^* xalqa gomomorfizm ekanligi kelib chiqadi, shunga o'shash φ^* : k (V) $\rightarrow$k (W) xalqaviy gomomorfizmni ko'rish mumkin, bu akslantirishlar o'zaro tasiri ekanligini ko'rsatamiz.

$$(\varphi^* \times \phi^*)(f) = f \times \phi \times \varphi$$

Bu yerda $f \in$ k(W) funksiyani qaraymiz. Bizning belgilashlarda $f \times \phi \times \varphi$ funksiya f ga funksiya sifatida W-($W' \cup W''$) to'plandi. Shuning uchun 2.3.6-teoremaga ko'ra k(W) da $\phi^* \times \varphi^* = id_k$ (W). Biz $\phi^* \times \varphi^* = id_k$ ekanligi bildiramiz. Shunday qilib ϕ^* : k(W) $\rightarrow$ k(V) maydonlar izomorfizm bo'ladi. Ikkita keltirilgan maydon ko'pxillik biratsional ekvivalent bo'ladi. Agar ular orasida ratsionallar yordamida o'zaro bir qiymatlik, o'rnatish mumkin bo'lgan katta qism to'plamlar xos qism ko'pxilliklarga to'ldiruvchilar mavjud bo'lsa.

Keltirilmaydigan ko’pxillikni ratsional ekvivalentligi izomorfizmga qaraganda kuchsizroq ekvivalentlik munosabatdir. Buning manosi shuki biratsional ekvivalent ko’pxilliklar singari ko’plab izamofizim ko’pxilliklarni o’z ichiga olishi mumkin. Ko’pxilliklarni ratsional ekvivalentlikka aniqlaymiz sinflash mumkindir. Ekvivalent ko’pxilliklarda polinimial funksiyalarga qaraganda ratsional funksiyalar qurish osonroq.

Xulosa

Bitiruv malakaviy ishida quyidagi asosiy ishlar amalga oshirilgan.

Ko'pxilliklarda ratsional funksiyalarni va ularga oid akslantirishlarni qaralib, natijada algebra va geometriya bo'limning polinomial va ratsional funksiyalarning algebraik xususiyatlari va ko'pxilliklar va ularning o'zini geometrik xususiyatlari o'rganilgan.

Birinchi bobda matematika yo'nalishida asosiy tushunchalardan iborat bo'lgan ma'lumotlar, gruppalar, qismgruppalar va izomorfizm faktor-gruppa va gruppalar gomomorfizmi, xalqa va maydonlar haqida ma'lumotlar misollar bilan boyitgan**.**

Ikkinchi bobda ko'pxilliklardagi ratsional funksiyalarga doir masalalar qaralib, polinomial funksiyalarning to'plamini har qanday $\phi, \varphi \in k[V]$ funksiyalarning yig'indisi va ko'paytmalarini aniqlash va polynomial akslantirishlari o'ganilga va polynomial xalqalar faktor xalqasi va ularning ta'rif va tushunchalari xaqida ma'lumotlar berilgan. Ko'pxilliklarda ratsionallar funksiyalar va aksantirishlar va ularga doir ba'zi misollar qaralgan.

Qilingan ishlar talabaning mazkur mavzuni mutaxasizligi nuqtai nazardan keng qamrovli o`rganib chiqilganidan dalolat beradi.

Adabiyotlar

1. Кокс Д., Литтл Дж., ОШи Д. К 55 Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры: Пер.-М: Мир, 2000.-687 с., ил. ISBN 5-03-003320-3
2. Adams W., Loustaunau P. (1994), An Intoduction to Grobner Bases, Graduate Studias in Mathematics, 3 Amer. Math .Soc., Providence.
3. Anderson D., Goldman R., Sederberg T.(1948b), Vector elimination: a technique for the implicitization, inversion and intersection of planar parametric rational polynomial curves, Comput. Aided Geom. Design,1, 327-356.
4. Ball A.A.(1987),The parametric representation of curves and surfaces using rational polynomial functions, in:TheMathematiics of Surfaces, II, ed by Martin R. R., Clarendon Press, Oxford, 39-61.
5. Atiyah M.F., MacDonald I. G. (1969), Introduction to Commutative Algebra, Addision-Welsey, Reading, Mass. [Имеется перевод: Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. - М.: 1972.]
6. Bayer D. (1982), The division algorithm and the Hilbert scheme, Ph .D. thesis, Harvard University.
7. Hodge W.V.D., Pedoe D.(1968), methods of Algebraic Geometry Volumes I and II,Cambridge Unversity Press, Cambridge. Имеется перевод I изд. : Ходж В., Пидо Д. Методы алгебраической геометрии. Тт. I-III-M. : ИЛ, 1954, 1955.]
8. Benson C. T., Grove L.C. (1985), Finite Refleksion Groups, end ed., Springer-Verlang, New York-Berlin-Heidalbarg.
9. Benson D. (1993), PolymomialInvarians of Finite Groups, Cambridge University Press, Cambridge.
10. Brieskorn E., Knorrer H. (1986), Plane Algebraic Curves, Birkhauser, Basel-Boston-Stuttgrat.
11. Canny J., Manocha D. (1992), Algarithm for implicitizing rational parametric surfaces, Comput. Aided Geom. Design, 9, 25-50.
12. Canny J., Manocha D. (1993), Multipolynomial resultant algarithms, J.SymbolicComput., 15, 99-122.
13. Chou S.C. (1988), Mechacel Geometry Theorem Proving, D. ReidelPublushingCompaniy, Dordrecht.
14. Cox D., Little J., O'Shea D. (1998), Using Algebraic Geometry, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg.

15. Dube T.W. (1990), The structure of polynomial ideals and Grobner bases, SIAM J. Comput., 19, 750-775.
16. Lang S. (1965), Algebra, Addison-Wesley, Reading, Mass. [Имеется перевод: Ленг С. Алгебраю – М. : Мир, 1968.]
17. Baillieul J. et al. (1990), Robotics, Proceedinngs of Symposia in Applied Mathematics, 41, Amer . Math. Soc., Providence, R.I.
18. Hermann G (1926), Der Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomideale, Math. Ann., 95, 736-788.
19. www. ziyonet.uz.
20. www.mexmat.ru.
21. www.newlibrary.ru.