O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA TA’LIM VAZIRLIGI
ALISHER NAVOIY NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI
MEXANIKA-MATEMATIKA

5A130103- “Matematik fizika” mutaxassisligi

MAVZU: “IXTIYORIY POTENSIALLI IKKI ZARRACHALI DISKRET SHREDINGER OPERATORI XOS QIYMATLARI ”

MAGISTRLIK DISSERTATSIYASI

Ilmiy rahbar: prof.S.N.Laqaev

Bajaruvchi: I.U.Alladustova

M U N D A R I J A

Kirish

Dissertatsiya mavzusining asoslanishi va dolzarbligi.

Dissertatsiya ishi bir o'lchamli panjaradagi ikki zarrachali bir diskret Shredinger operatorining spektral xossalari va xos qiymatlarining mavjudlik masalasini o'rganish, bu operatorning xos qiymatlari sonini topish va xos qiymatlarning muhim spektrdan tashqaridagi joylashuv o'rnini aniqlashga bag'ishlangan.

Kvant mexanikasining asosiy masalalari, qattiq jismlar fizikasi masalalari, matematik fizikaning bir qator masalalari ikki zarrachali diskret Shredinger operatorining spektrini tadqiq qilish masalasiga keltiriladi.

Tadqiqot ob'yekti va predmeti. Tadqiqot ob'yekti Hilbert fazosida aniqlangan o'z-o'ziga qo'shma operatorlar, tadqiqot predmeti berilgan Hilbert fazosida aniqlangan ikki zarrachali bir diskret Shredinger operatoridir.

Tadqiqot maqsadi va vazifalari.

Ushbu magistrlik dissertatsiyasida μ va λ haqiqiy parametrlarga bog'liq bo'lgan bir diskret Shredinger operatori $H_{\mu\lambda}$ ning xos qiymatlari mavjudligini isbotlash, berilgan parametrlarga bog'liq ravishda bu xos qiymatlarning muhim spektrdan tashqaridagi soni va joylashuv o'rnini aniqlash asosiy maqsad qilib olingan. Dissertatsiyada $H_{\mu\lambda}$ operatorning muhim spektrdan chapda va o'ngda xos qiymatga ega emasligi, faqat bitta yoki ikkita xos qiymatga egaligi operator parametrlariga bog'liq ravishda ko'rsatilgan. Bundan tashqari berilgan operator muhim spektrdan chapda va o'ngda faqat bittadan xos qiymatga ega bo'ladigan parametrlar sohasi ham aniqlangan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi. Ushbu magistrlik dissertatsiyasida olingan natijalar yangi, ilmiy xarakterga ega va bu natijalar Shredinger operatorlarining spektral nazariyasi faniga qo'shilgan hissa bo'ladi.

Tadqiqotning asosiy masalalari va farazlari. Ushbu magistrlik dissertatsiyasida bir o'lchamli panjaradagi ikki zarrachali fermionlar sistemasiga mos bir diskret Shredinger operatori $H_{\mu\lambda}$ qaralgan. Ishda bu operatorning spektral xossalari o'rganilgan, unga mos Fredgolm determinanti qurilgan va uning muhim spektr chekkalaridagi asimptotik yoyilmalari olingan. Asosiy natijalarni

olish jarayonida ishlatiladigan lemmalar keltirilgan, qaralayotgan ikki zarrachali bir diskret Shredinger operatorining muhim spektrdan chap va o'ngda xos qiymatlarining mavjudlik masalasi o'rganilgan. Bu operator muhim spektrdan tashqaridagi xos qiymatlari soni va joylashuv o'rni operator parametrlari barcha qiymatlarida tahlil qilingan.

Tadqiqot mavzusi bo'yicha adabiyotlar sharhi. Tashqi maydon ta'siridagi bir kvant zarracha harakatini tavsiflovchi bir zarrachali gamiltonianlar hamda qisqa masofada ta'sirlashuvchi ikkita bir xil va har xil zarrachalar sistemasi gamiltonianlariga mos ikki zarrachali diskret Shredinger operatorlarining spektral xossalari [9],[10] va [14] kabi ishlarda o'rganilgan.

Ikki zarrachali diskret Shredinger operatorlarining juda keng sinfi uchun [9] ishda quyidagicha ajoyib natija olingan: agar $\nu-$ o'lchamli ($\nu \geq 3$) diskret Shredinger operatori $h(0)$ muhim spektr tubida virtual sath yoki xos qiymatga ega bo'lsa, u holda kvaziimpul's $k \in \mathbb{T}^{\nu}$ ning barcha nolmas qiymatlarida $h(k)$ operator xos qiymatga ega.

[13] ishda ixtiyoriy o'lchamli panjarada qo'shni tugunlarda ta'sirlashuvchi ikkita fermionli sistema gamiltonianiga mos $h_{\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^{\nu}$ ikki zarrachali diskret Shredinger operatori qaralgan. Panjara o'lchami ν, zarrachalar tortishuvchi ta'sir energiyasi $\mu > 0$ va kvaziimpul's $k \in \mathbb{T}^{\nu}$ ning o'zgarishiga bog'liq ravishda $h_{\mu}(k)$ operatorning xos qiymatlari soni va joylashuv o'rni topilgan.

[7,8] ishlarda $h(\lambda) = -\Delta + \lambda V$ Shredinger operatori yetarlicha kichik $\lambda > 0$ larda $V(x)$ potensialga qo'yilgan ba'zi shartlarda bog'langan holat (xos qiymat)ga ega ekanligi isbotlangan. Ushbu xos qiymatlarning $\lambda \to 0$ dagi asimptotikalari topilgan.

μ va λ haqiqiy parametrlarga bog'liq bo'lgan ikki zarrachali diskret Shredinger operatori xos qiymatlari sonini aniqlash va bu xos qiymatlarning muhim spektrdan tashqaridagi joylashuv o'rnini aniqlash masalalari [11], [12] kabi ishlarda o'rganilgan.

[11] ishda ikki zarrachali diskret $h_{\mu\lambda}(k), k \in \mathbb{T}$ Shredinger operatorlari oilasi qaralgan. μ va λ parametrlarning musbat qiymatlarida quyidagi natijalar olin-

gan:

-bu operator xos qiymatlari soni uchun kvaziimpulsning barcha butun qiymatlarida yuqori va quyi baholar olingan;

- $h_{\mu\lambda}(k), k \in \mathbb{T}$ operator muhim spektridan o'ngda joylashgan xos qiymatlarining joylashuv o'rni aniqlangan;

-eng katta xos qiymati uchun $\mu, \lambda \to +\infty$ da asimptotika olingan.

[12] ishda diskret Shredinger operatori $H = \hat{H_{\mu\lambda}} := \hat{H}_0 + \hat{V_{\mu\lambda}}$ ning ixtiyoriy $\mu \neq 0$ va $\lambda \neq 0$ parametrlarda xos qiymatlar soni va ularning joylashuv o'rni o'rganilgan. Bunda berilgan operator $\mathbb{L}^{2,e}(\mathbb{T}, \nu) \subset \mathbb{L}^2(\mathbb{T}, \nu)$ fazoda qaralgan va zarrachalar sifatida bozonlar olingan. Ishda H operatorning muhim spektrdan tashqarida bitta yoki ikkita xos qiymati mavjudligi isbotlangan va ularning joylashuv o'rni aniqlangan.

Tadqiqotda qo'llanilgan metodikaning tavsifi. Magistrlik dissertatsiyasining natijalarini olishda funksional analiz, matematik analiz, kompleks o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi, chiziqli operatorlar spektral nazariyasi fanlari metodlaridan foydalanilgan.

Tadqiqot natijalarining nazariy va amaliy ahamiyati. Magistrlik dissertatsiya ishida to'plangan materiallardan foydalangan holda fizik sistemalarda kechayotgan jarayonlar to'g'risida ma'lumotlar olish mumkin. Olingan natijalardan talabalar, magistrantlar va ilmiy xodimlar kvant mexanikasi va qattiq jismlar fizikasidagi ba'zi masalalarni yechishda foydalanishlari mumkin.

Ish tuzilmasining tavsifi.

Magistrlik dissertatsiyasi kirish qismi, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Dissertatsiya 56 matnli sahifadan tashkil topgan. Har bir bob paragraflarga ajratilgan bo'lib, u o'zining nomerlanishi va belgilanishiga ega. Misol uchun, teorema 2.7 yozuv teoremaning 2-bobda 7-nomer bilan belgilanishini bildiradi.

Kirish qismida masalaning tarixi, qo'yilgan masalaning dolzarbligi, tadqiqotning maqsadi va vazifalari, tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati va dissertatsiyaning tuzilishi keltirilgan.

Birinchi bobda Hilbert fazolari, Hilbert fazosida aniqlangan o'z-o'ziga qo'shma operatorlar spektral nazariyasi elementlari bayon qilingan. Asosiy mavzuni berishda ishlatiladigan atamalar, asosiy tushunchalar, ta'riflar va teoremalar keltirilgan.

Ikkinchi bobda magistrlik dissertatsiyasi predmeti bo'lgan ikki zarrachali bir diskret Shredinger operatori $H_{\mu\lambda}$ ning spektral xossalari o'rganilgan. Bu operatorga mos Fredgolm determinanti qurilgan va uning muhim spektr chekkalaridagi asimptotik yoyilmalari olingan.

Uchinchi bobda asosiy natijalarni olish jarayonida ishlatiladigan lemmalar keltirilgan. Qaralayotgan ikki zarrachali bir diskret Shredinger operatorining muhim spektrdan chap va o'ngda xos qiymatlarining mavjudlik masalasi o'rganilgan. Bu operator muhim spektrdan tashqaridagi xos qiymatlari soni va joylashuv o'rni operator parametrlarining barcha qiymatlarida tahlil qilingan. Qaralayotgan $H_{\mu\lambda}$ operator xos qiymatlariga oid dissertatsiyaning asosiy natijalari bayon qilingan va isbotlangan.

Xulosa qismida dissertatsiya natijalari, uning ilmiy va amaliy ahamiyati haqida fikrlar bildirilgan.

Foydalanilgan adabiyotlar qismi masalaning qo'yilishi, tadqiqot usullarini tanlash va olingan natijalarni taqqoslash davomida foydalanilgan ilmiy maqolalar, ilmiy risola, o'quv-uslubiy qo'llanmalarning ro'yxatini o'z ichiga olgan.

Bob 1

Tayanch ma'lumotlar

Bu bobda ichki ko'paytmali vektor fazolar, to'la normalangan fazolar, Hilbert fazosi, Hilbert fazosida aniqlangan chiziqli chegaralangan operatorlar ta'rifi va xossalari, Hilbert fazosida o'z-o'ziga qo'shma va teskari operator tushunchasi, o'z-o'ziga qo'shma operatorlarning xossalari, kompakt operator ta'rifi va xossalari, Hilbert fazosida aniqlangan operatorlarning spektri o'rganilgan va ularga misollar qurilgan [1-6].

1.1 Ichki ko'paytmali vektor fazolar

Faraz qilamiz, V to'plamda elementlarni qo'shish va kompleks (haqiqiy) songa ko'paytirish amallari kiritilgan bo'lsin.

Agar V to'plamda kiritilgan qo'shish amali uchun ushbu

1. Yopiqlik: $\forall x, y \in V$ uchun $x + y \in V$,
2. Kommutativlik: $\forall x, y \in V$ uchun $x + y = y + x$,
3. Assotsiativlik: $\forall x, y, z \in V$ uchun $(x + y) + z = x + (y + z)$,
4. Neytral yoki nol element mavjudligi: $\exists \Theta \in V : \forall x \in V,\ x+\Theta = \Theta+x = x$,
5. Qarama-qarshi element mavjudligi: $\forall x \in V$ uchun $\exists -x \in V :\ x+(-x) = (-x) + x = \Theta$,

va ko'paytirish amali uchun ushbu

1. Yopiqlik: $\forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ va $\forall x \in V$ uchun $\alpha x \in V$,

2. Assotsiativlik: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ va $\forall x \in V$ uchun $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,

3. $1 \cdot x = x \;\; \forall x \in V$,

4. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \;\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ va $\forall x \in V$,

5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \;\; \forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ va $\forall x, y \in V$

munosabatlar bajarilsa, V to'plam ***vektor fazo*** yoki ***chiziqli fazo*** deb ataladi. Sonlar maydonining kompleks ($\mathbb{C}$) yoki haqiqiy ($\mathbb{R}$) bo'lishiga qarab, vektor fazolar mos ravishda ***kompleks*** yoki ***haqiqiy vektor fazolar*** deb yuritiladi.

Misol 1.1. *$[a, b]$ da aniqlangan uzluksiz funksiyalar fazosi $C[a, b]$ da qo'shish va songa ko'paytirish amallarini quyidagicha kiritamiz:*

1. $\forall f, g \in \mathbb{C}[a, b]$ uchun

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x);$$

2. $\forall \lambda \in C$ va $f \in \mathbb{C}[a, b]$ uchun

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Nol element sifatida $\Theta(x) \equiv 0$ funksiyani, $f(\cdot)$ elementga qarama-qarshi element sifatida $-f(\cdot)$ funksiyani aniqlasak, $C[a, b]$ ham chiziqli fazoga aylanadi. ▲

Misol 1.2. *$\mathbb{Z}^1$ - butun sonlar to'plami yordamida*

*$\mathbb{Z}^d = \underbrace{\mathbb{Z}^1 \times \mathbb{Z}^1 \times \cdot \times \mathbb{Z}^1}_{d \text{ marta}}$, ya'ni uning d marta o'z-o'ziga Dekart ko'paytmasini aniqlaymiz. Bu to'plam d o'lchamli **butun qiymatli panjara** deyiladi. Demak,*

$$\mathbb{Z}^d = \left\{ s = (s_1, s_2, \ldots, s_d) : s_k \in \mathbb{Z}^1, k = 1 \ldots d \right\}.$$

$\mathbb{Z}^d$ *panjaradada* s *elementning moduli deb* $|s| = \sum\limits_{k=1}^{d} |s_k|$ *songa aytiladi. Quyidagi shartni qanoatlantiruvchi barcha* $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ *funksiyalar fazosini qaraymiz:*

$$\sum_{s \in \mathbb{Z}^d} |f(s)|^p < \infty,$$

bunda p *– biror tayinlangan musbat son. Ushbu fazoda qo'shish va songa ko'paytirish amallarini quyidagicha kiritamiz:*

1. $\forall f, g$ *uchun*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x);$$

2. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ *va* f *uchun*

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Nol element $\Theta(x) \equiv 0$, $f(\cdot)$ *ga qarama-qarshi element* $-f(\cdot)$ *kabi aniqlanadi. Hosil bo'lgan fazo* $\ell_p(\mathbb{Z}^d)$ *kabi belgilanadi va chiziqli fazo bo'ladi.*

Darhaqiqat, agar $f \in \ell_p(\mathbb{Z}^d)$ *bo'lsa, yaqinlashuvchi qatorning xossalariga binoan ixtiyoriy* $\lambda \in \mathbb{C}$ *uchun* $\lambda f \in \ell_p(\mathbb{Z}^d)$ *bo'ladi.* $\forall f, g \in \ell_p(\mathbb{Z}^d)$ *uchun* $f + g \in \ell_p(\mathbb{Z}^d)$ *ekanligi Minkovskiy tengsizligiga asoslanadi. Demak* $\ell_p(\mathbb{Z}^d)$ *fazo qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan yopiq.* ▲

Misol 1.3. *Faraz qilamiz,* $T^1 = (-\pi, \pi]$ *bo'lsin.* T^1 *da qo'shish va songa ko'paytirish amallarini haqiqiy sonlarni* 2π *modul bo'yicha qo'shish va songa ko'paytirish sifatida kiritamiz, masalan*

$$\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} (mod\ 2\pi),$$

$$6 \cdot \frac{\pi}{5} = 2\pi - \frac{4\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5} (mod\ 2\pi).$$

Ushbu to'plam ***bir o'lchamli tor*** *deb ataladi.* T^d *bilan* d *o'lchamli tor, ya'ni*

$$\mathbb{T}^d = \underbrace{T^1 \times \mathbb{T}^1 \times \cdots \times T^1}_{d\ marta}$$

ni belgilaymiz.

d o'lchamli tor $\mathbb{T}^d$ da aniqlangan, Haar ma'nosida o'lchovga ega va

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(q)|^p dq < \infty$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{C}$ funksiyalarning chiziqli fazosini qaraymiz, bunda integralda o'lchov Haar ma'nosida olinadi va p – tayinlangan musbat son. Elementlarni qo'shish va songa ko'paytirish odatdagi funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish kabi, ya'ni $C[a,b]$ misoldagidek kiritiladi. Hosil bo'lgan fazo $L_p(\mathbb{T}^d)$ kabi belgilanadi. Demak, bu fazoning elementlari $\mathbb{R}^d$ da aniqlangan va har bir o'zgaruvchisi bo'yicha 2π davrga ega bo'lgan funksiyalardir.

Bu yerda ham ushbu fazo qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan yopiq: agar $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ bo'lsa, integralning xossalariga ko'ra ixtiyoriy $\lambda \in \mathbb{C}$ uchun $\lambda f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ bo'ladi. $\forall f, g \in L_p(\mathbb{T}^d)$ uchun $f + g \in L_p(\mathbb{T}^d)$ ekanligi esa Minkovskiyning integral tengsizligidan kelib chiqadi. Nol element $\Theta(x) \equiv 0$ kabi, $f(\cdot)$ ga qarama-qarshi element $-f(\cdot)$ kabi aniqlanadi. Demak, $L_p(\mathbb{T}^d)$ ham chiziqli fazo bo'ladi. ▲

V chiziqli fazo bo'lsin. Agar $p : V \to \mathbb{R}$ akslantirish

1. $p(x) \geq 0, \ \forall x \in V$ va $p(x) = 0 \longleftrightarrow x = 0,$
2. $p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \ \forall x \in V$ va $\forall \alpha \in \mathbb{C},$
3. $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \ \forall x, y \in V$

munosabatlarni qanoatlantirsa, unga V fazoda aniqlangan ***norma*** deyiladi. Norma aniqlangan fazolar ***normalangan fazolar*** deyiladi. Bitta chiziqli fazo normaning aniqlanishiga ko'ra bir necha xil normalangan fazolarga aylantirilishi mumkin. Odatda norma $\|\cdot\|$ kabi belgilanadi.

Misol 1.4. *$\ell_\infty^\infty(\mathbb{Z}^d)$, $\ell_0(\mathbb{Z}^d)$ va $\ell_p(\mathbb{Z}^d)$, $p > 0$ fazolarda normani*

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{Z}^d} |f(x)|$$

funksional yordamida kiritish mumkin. ▲

Misol 1.5. *$\ell_p(\mathbb{Z}^d)$ fazoda norma*

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} |f(x)|^p}$$

kabi kiritiladi. ▲

Misol 1.6. *$L_p(\mathbb{T}^d)$, $p > 0$ fazoda normani quyidagicha kiritish mumkin:*

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(q)|^p \, dq}.\blacktriangle$$

V chiziqli fazo bo'lsin.

Ta'rif 1.1. *Agar $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ funksional $\forall x, y, z \in V$ va $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ uchun ushbu munosabatlarni qanoatlantirsa:*

1. $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;
4. $(x, y) = \overline{(y, x)}$,

u holda V vektor fazo ***ichki (skalyar) ko'paytmali fazo*** *deyiladi. $(\cdot,\cdot)$ funksional esa* ***ichki ko'paytma*** *yoki* ***skalyar ko'paytma*** *deyiladi.*

Misol 1.7. *$\mathbb{R}^n$ da*

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

funksional ichki ko'paytmani aniqlaydi. ▲

Misol 1.8. *$\mathbb{C}^n$ da*

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$$

funksional ichki ko'paytma bo'ladi. ▲

Misol 1.9. *$C_2[a,b]$ da ichki ko'paytmani quyidagicha kiritish mumkin:*

$$(f,g)=\int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.\blacktriangle$$

Misol 1.10. *$\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ da ichki ko'paytma quyidagicha kiritiladi:*

$$(f,g)=\sum_{s\in\mathbb{Z}^d} f(s)\overline{g(s)}.\blacktriangle$$

Misol 1.11. *$L_2(\mathbb{T}^d)$ fazoda ichki ko'paytmani quyidagicha aniqlaymiz:*

$$(f,g)=\int\limits_{\mathbb{T}^d} f(p)\overline{g(p)}dp.\blacktriangle$$

Izoh 1.1. *Agar $\mathbb{T}^d$ da Haar o'lchovidan boshqa biror sanoqli-additiv μ o'lchov kiritilgan bo'lsa, hosil bo'lgan fazo $L_2(\mathbb{T}^d,d\mu)$ kabi belgilanadi.*

Misol 1.12. *Umumiy holda bitta fazoda bir necha ichki ko'paytmani kiritish mumkin. Misol uchun $\mathbb{C}^n$ da odatdagi ichki ko'paytmadan farqli quyidagi*

$$(x,y)=\sum_{j=1}^n 2^{-j}x_j\overline{y_j}$$

funksional ham ichki ko'paytma bo'ladi. $\blacktriangle$

Ichki ko'paytma kiritilgan fazolarda x va y elementlar uchun $(x,y)=0$ tenglik bajarilsa, ular ***ortogonal elementlar*** deyiladi. Agar V ichki ko'paytmali fazoda $\{x_\alpha\}\subset V$ vektorlar sistemasi $(x_\alpha,x_\alpha)=1$ va $(x_\alpha,x_\beta)=0$, $\alpha\neq\beta$ munosabatlarni qanoatlantirsa, u holda bu sistema ***ortogonal normalangan sistema*** (qisqacha ONS) deyiladi.

Ushbu belgilashni kiritamiz: $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$.

Teorema 1.1 (*Pythagoras teoremasi*). *Faraz qilamiz, $\{x_n\}_{n=1}^N\subset V$ ichki ko'paytmali V fazodagi ONS bo'lsin. U holda istalgan x uchun*

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^N|(x,x_n)|^2+\|x-\sum_{n=1}^N(x,x_n)x_n\|^2$$

tenglik o'rinli.

Teorema 1.2. *Istalgan ichki ko'paytmali V fazo $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ norma yordamida* ***normalangan fazo*** *bo'ladi.*

Ushbu teoremadan ichki ko'paytmali fazoda kiritilgan ichki ko'paytmadan foydalanib, normani aniqlash mumkin ekanligi kelib chiqadi. Normalangan fazolarda esa kiritilgan normadan foydalanib, ichki ko'paytmani hosil qilish masalasi quyidagi ayniyatga asoslanadi:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 =&(x+y,x+y)+(x-y,x-y) = \\ =&2(x,x)+2(y,y) = 2\|x\|^2+2\|y\|^2.\end{aligned} \tag{1.1}$$

Bu tenglik ***parallelogramm ayniyati*** deyiladi.

Teorema 1.3. *Normalangan fazoda ichki ko'paytmani berilgan norma orqali kiritish uchun parallelogram ayniyatining bajarilishi zarur va yetarli; bu holda ichki ko'paytma norma orqali quyidagicha ifodalanadi:*

- *kompleks normalangan fazolar uchun*

$$(x,y) = \frac{1}{4}\{(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) - i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)\}$$

- *haqiqiy normalangan fazolar uchun*

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

1.2 Hilbert fazolari

Ta'rif 1.2. *Ichki ko'paytma kiritilgan va uning yordamida aniqlangan normaga nisbatan to'la chiziqli normalangan fazo* ***Hilbert fazosi*** *deyiladi.*

Yuqorida aniqlangan $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$, $L_2(\mathbb{T}^d)$ fazolar Hilbert fazolaridir.

Faraz qilamiz, H – Hilbert fazosi bo'lsin. Ushbu

$$B(x_0,r) = \{x \in H : \ \|x-x_0\| < r\}$$

to'plam H dagi markazi x_0 nuqtada va radiusi r ga teng bo'lgan ***ochiq shar*** deyiladi. Xuddi shunday

$$B[x_0, r] = \{x \in H : \ \|x - x_0\| \leq r\}$$

to'plam H dagi markazi x_0 nuqtada va radiusi r ga teng bo'lgan ***yopiq shar*** deyiladi. $x_0 \in H$ ***nuqtaning atrofi*** deganda markazi shu nuqtada bo'lgan ixtiyoriy ochiq sharni tushunamiz. $x_0 \in H$ ***nuqtaning*** ε ***atrofi*** deganda esa $B(x_0, \varepsilon)$ sharni tushunamiz.

Ta'rif 1.3. *Agar $M \subset H$ to'plam biror $B(x_0, r)$ sharda saqlansa, u* ***chegaralangan to'plam*** *deyiladi.*

Ta'rif 1.4. *M to'plam H ning biror qism to'plami bo'lsin. Agar har bir $x \in M$ nuqta biror atrofi bilan M ga tegishli bo'lsa, bu to'plam H fazoda* ***ochiq to'plam*** *deyiladi.*

Agar $x_0 \in H$ nuqtaning istalgan atrofida M ning biror elementi mavjud bo'lsa, u holda bu nuqta M ning ***urinish nuqtasi*** deyiladi. M to'plamning barcha urinish nuqtalari to'plami uning ***yopig'i*** deb ataladi va $[M]$ kabi belgilanadi. Tushunarliki, $M \subset [M]$.

Ta'rif 1.5. *Agar $M = [M]$ bo'lsa, M* ***yopiq to'plam*** *deyiladi.*

Faraz qilamiz, H – Hilbert fazosi, M va N uning qism to'plamlari bo'lsin. Agar $M \subset [N]$ munosabat bajarilsa, N ***to'plam*** M ***da zich*** deyiladi. Misol uchun irratsional sonlar to'plami ratsional sonlar to'plamida zich. Xususan, agar $[M] = H$ bo'lsa, M to'plam H da zich deyiladi. Agar M to'plam H dagi birorta ham sharda zich bo'lmasa bu to'plam H ning ***hech qayerida zich emas*** deyiladi. Misol uchun butun sonlar to'plami $\mathbb{Z}^1$ haqiqiy sonlar fazosi $\mathbb{R}^1$ ning hech qayerida zich emas.

Ta'rif 1.6. *Agar Hilbert fazosida hamma yerda zich sanoqli to'plam mavjud bo'lsa, u* ***separabel Hilbert fazosi*** *deyiladi.*

Misol 1.13. *Mavhum qismi va haqiqiy qismi ratsional bo'lgan kompleks sonlarning to'plamini* $\mathbb{C}_{\mathbb{Q}}$ *deb belgilaymiz. Biz* $\mathbb{C}_{\mathbb{Q}}$ *ning* $\mathbb{C}$ *da zich ekanini ko'rsatamiz. Buning uchun ixtiyoriy* $z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$ *kompleks songa*

$$z_n = \frac{[na]}{n} + i\frac{[nb]}{n}$$

kompleks sonlar ketma-ketligi yaqinlashishini ko'rsatish yetarli. (**??**) *tengsizlikka ko'ra*

$$|z_n - z|^2 = \left(\frac{[na]}{n} - a\right)^2 + \left(\frac{[nb]}{n} - b\right)^2 < \frac{2}{n^2}$$

tengsizlik o'rinli va bu yerdan $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

Demak, kompleks sonlar fazosi ham separabel Hilbert fazosi. Shuni aytib o'tish joizki, $\mathbb{C}$ *ni* $\mathbb{C} = \mathbb{R}^1 + i\mathbb{R}^1$ *deb ham qarash mumkin.* ▲

1.3 Hilbert fazosida chiziqli operatorlar

Agar H_1 fazoning har bir elementiga H_2 fazoning yagona elementi mos qo'yilgan bo'lsa, bu moslik **operator** deyiladi va $A : H_1 \to H_2$ yoki $y = Ax$ kabi belgilanadi. Agar H_1 va H_2 lar chiziqli fazolar bo'lib, istalgan $x \in H_1$ va $\lambda \in \mathbb{C}$ uchun $A(\lambda x) = \lambda Ax$ munosabat bajarilsa, A operator **bir jinsli** deyiladi. Agar istalgan $x, y \in H_1$ uchun $A(x + y) = Ax + Ay$ munosabat bajarilsa, u holda A operator **additiv** deyiladi.

Ta'rif 1.7. *Bir jinsli additiv operator chiziqli operator deyiladi.*

Demak biror A operatorni chiziqlilikka tekshirish uchun uni additivlik va bir jinslilikka tekshirish lozim. Chiziqli operatorning ta'rifiga ekvivalent quyidagi ta'rifni ham keltirib o'tish foydadan xoli bo'lmaydi:

Ta'rif 1.8. *Agar ixtiyoriy* $x, y \in H_1$ *va* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *lar uchun*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

tenglik bajarilsa, u holda A *operator chiziqli deyiladi.*

Chiziqli operator butun fazoda aniqlangan yoki uning aniqlanish sohasi butun fazoning biror qismi bo'lishi mumkin. Misol uchun

$$A : \ell_2 \to \ell_2, \quad Ax = (x_1, 2x_2, \ldots, nx_n, \ldots)$$

operatorning aniqlanish sohasi butun fazoga teng emas. Chunki bu operator

$$x_0 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots) \in \ell_2$$

vektorni

$$Ax_0 = (1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots)$$

vektorga o'tkazadi va bu vektor ℓ_2 fazoning elementi bo'lmaydi, ya'ni x_0 bu operatorning aniqlanish sohasiga tegishli emas.

Lekin chiziqli operatorning aniqlanish sohasi chiziqli ko'pxillik bo'lishi talab etiladi. Operatorning aniqlanish sohasi $D(A)$ deb belgilanadi. $R(A)$ deb esa A operatorning qiymatlar to'plamini belgilaymiz:

$$R(A) = \{y \in H_2 : \exists x \in D(A), \quad Ax = y\}.$$

Osongina ko'rsatish mumkinki, chiziqli operatorning qiymatlar sohasi ham chiziqli ko'pxillikdir.

$A : H_1 \to H_2$ chiziqli operatorning asosiy xossalaridan biri H_1 fazodagi nol elementni H_2 fazodagi nol elementga o'tkazishidir. Haqiqatan additivlik xossasidan $A(0) = A(0+0) = A(0) + A(0) = 2A(0)$ ekani kelib chiqadi. Bundan $A(0) = 0$.

Misol 1.14. *Istalgan H Hilbert fazosida $\Theta : H \to H$, $\Theta x = 0$ nol operator chiziqlidir. Bu operator butun fazoda aniqlangan va kiritilishiga ko'ra barcha $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ va $x, y \in H$ lar uchun*

$$\Theta(\alpha x + \beta y) = 0 = \alpha\Theta x + \beta\Theta y. \quad \blacktriangle$$

Misol 1.15. *Istalgan H Hilbert fazosida $I : H \to H$, $Ix = x$ ayniy (birlik) operator chiziqlidir. Darhaqiqat, operator butun fazoda aniqlangan, aniqlanishiga ko'ra barcha $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ va $x, y \in H$ lar uchun*

$$I(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y = \alpha Ix + \beta Iy. \quad \blacktriangle$$

Misol 1.16. *Faraz qilamiz,* $A : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ *operator chiziqli bo'lsin. Demak istalgan* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *va* $x, y \in \mathbb{R}^1$ *uchun*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

munosabat o'rinli. Xususan, $A(\alpha \cdot 1) = \alpha A(1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *Endi, agar* $A(1) = k$ *deb belgilasak, barcha* $x \in \mathbb{R}^1$ *larda* $Ax = kx$ *ekanligi kelib chiqadi. Demak,* $\mathbb{R}^1$ *dagi istalgan chiziqli operator koordinata boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziq bo'ladi.* ▲

Misol 1.17. $A : L_2(\mathbb{T}^d) \to L_2(\mathbb{T}^d)$, $(Af)(p) = \int\limits_{\mathbb{T}^d} v(p-q)f(q)dq$ *integral operatorni qaraymiz, bu yerda* $v(\cdot)$ *biror uzluksiz funksiya. Bu operatorning aniqlanish sohasi* $D(A) = L_2(\mathbb{T}^d)$ *ekanligi keyinroq isbot qilinadi. Chiziqli ekanligi esa integralning chiziqli ekanligidan kelib chiqadi.* ▲

1.4 Teskari operatorlar

H_1 va H_2 Hilbert fazolari bo'lsin. A operator H_1 fazoda aniqlanib, H_2 fazoda qiymatlar qabul qilsin, ya'ni $A : H_1 \to H_2$.

Ta'rif 1.9. *Agar istalgan* $y \in R(A)$ *uchun* $Ax = y$ *tenglama yagona yechimga ega bo'lsa,* A *operator* ***teskarilanuvchan*** *deyiladi. Agar* A *teskarilanuvchan bo'lsa, har bir* $y \in R(A)$ *ga* $Ax = y$ *tenglamaning yagona yechimi* $x \in D(A)$ *ni mos qo'yuvchi akslantirish* A *operatorning* ***teskarisi*** *deyiladi va* A^{-1} *kabi belgilanadi.*

Teorema 1.4. *Agar chiziqli operator teskarilanuvchan bo'lsa, unga teskari operator ham chiziqlidir.*

Teorema 1.5. $A : H_1 \to H_2$ *chiziqli operator teskarilanuvchan bo'lishi uchun* $Ax = 0$ *tenglama yagona* $x = 0$ *yechimga ega bo'lishi zarur va yetarli.*

Teorema 1.6 (*Teskari operatorlar haqida Banach teoremasi*). *Faraz qilamiz,* A – H_1 *Hilbert fazosini* H_2 *Hilbert fazosiga o'zaro bir qiymatli akslantiruvchi chiziqli chegaralangan operator bo'lsin. U holda u teskarilanuvchan va teskari operator* A^{-1} *ham chegaralangan.*

Ta'rif 1.10. *Agar $A : X \to Y$ teskarilanuvchan operator, $R(A) = Y$ va teskari operator A^{-1} chegaralangan bo'lsa, u holda A* ***uzluksiz teskarilanuvchan*** *deb ataladi. Bundan keyin biz teskarilanuvchanlik va uzluksiz teskarilanuvchanlik tushunchalari bir xil deb hisoblaymiz.*

Teorema 1.7. *$A : H_1 \to H_2$ chiziqli operator bo'lsin. U holda A teskarilanuvchan bo'lishi uchun $R(A) = H_2$ va shunday $m > 0$ soni topilib, ixtiyoriy $x \in H_1$ uchun $\|Ax\|_{H_2} \geq m\|x\|_{H_1}$ munosabatlarning bajarilishi yetarli va zarur.*

Lemma 1.1. *Agar $A, B \in L(H)$ operatorlar teskarilanuvchan bo'lsa, u holda AB ham teskarilanuvchan bo'ladi va $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ tenglik o'rinli bo'ladi.*

Teorema 1.8. *$A, B \in L(H)$ va A – teskarilanuvchan operator bo'lsin. Agar*

$$\|(B - A)A^{-1}\| < 1$$

bo'lsa, u holda B operator ham teskarilanuvchan bo'ladi va quyidagi baholar o'rinli:

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|(B - A)A^{-1}\|},$$

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\| \, \|(B - A)A^{-1}\|}{1 - \|(B - A)A^{-1}\|}.$$

Teorema 1.9. *H – Hilbert fazosi, $A, B \in L(H)$ va $I - AB$ teskarilanuvchan operator bo'lsin. U holda $I - BA$ operator ham teskarilanuvchandir.*

1.5 Qo'shma operatorlar

Ta'rif 1.11. *H Hilbert fazosida aniqlangan chegaralangan T operator va $\forall x, y \in H$ uchun*

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \tag{1.2}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi T^* operator T operatorning ***Hilbert qo'shmasi*** *deyiladi. Bundan buyon operatorning qo'shmasi deganda uning Hilbert qo'shmasini tushunamiz.*

Qo'shma operatorlar haqidagi teoremalar va tasdiqlarni keltirishdan oldin ushbu Lemmani isbotlaymiz.

Lemma 1.2. *$A : H \to H$, $B : H \to H$ operatorlar berilgan bo'lsin. Agar barcha $x, y \in H$ lar uchun $(Ax, y) = (Bx, y)$ tenglik bajarilsa, u holda $A = B$ bo'ladi.*

Misol 1.18. *$A : L_2(\mathbb{T}^d) \to L_2(\mathbb{T}^d)$, $(Af)(x) = \varepsilon(x)f(x)$, $f \in L_2(\mathbb{T}^d)$ operatorni qaraymiz, bunda $\varepsilon(x) \in L_2(\mathbb{T}^d)$ chegaralangan funksiya. Bu operatorning qo'shmasi $(A^*f)(x) = \overline{\varepsilon(x)}f(x)$.* ▲

Misol 1.19. *$A : L_2(\mathbb{T}^d) \to L_2(\mathbb{T}^d)$, $(Af)(x) = \int\limits_{\mathbb{T}^d} K(x, y)f(y)$, $f \in L_2(\mathbb{T}^d)$ integral operatorning qo'shmasi ham integral operator bo'ladi:*

$$(Af)(x) = \int\limits_{\mathbb{T}^d} \overline{K(y, x)}f(y),$$

bu yerda $K(x, y)$ funksiya $(\mathbb{T}^d)^2$ da aniqlangan biror chegaralangan uzluksiz funksiya. ▲

Ta'rif 1.12. *Agar $A \in L(H)$ operator barcha $x, y \in H$ lar uchun*

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

munosabatni qanoatlantirsa, u ***o'z-o'ziga qo'shma operator*** *deyiladi.*

Misol 1.20. *$A : \ell_2(\mathbb{Z}^d) \to \ell_2(\mathbb{Z}^d)$, $(A\hat{f})(n) = \hat{v}(n)\hat{f}(n)$, operator qanday $\hat{v}$ funksiyalar uchun o'z-o'ziga qo'shma bo'lisini topamiz, bunda $\hat{v}$ chegaralangan.* **??** *misolga ko'ra $(A^*\hat{f})(n) = \overline{\hat{v}(n)}\hat{f}(n)$. Endi $A = A^*$ ekanidan $\hat{v}(n) = \overline{\hat{v}(n)}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^d$ kelib chiqadi. Demak A o'z-o'ziga qo'shma bo'lishi uchun $\hat{v}$ chegaralangan funksiya haqiqiy qiymatli funksiya bo'lishi yetarli va zarur.* ▲

Misol 1.21. *Xuddi shunday $A : L_2(\mathbb{T}^d) \to L_2(\mathbb{T}^d)$, $(Af)(x) = \varepsilon(x)f(x)$, $f \in L_2(\mathbb{T}^d)$, operator o'z-o'ziga qo'shma bo'lishi uchun $\varepsilon(x)$ funksiyaning haqiqiy qiymatli funksiya bo'lishi yetarli va zarur, bunda $\varepsilon(x) \in L_2(\mathbb{T}^d)$ chegaralangan funksiya.* ▲

Misol 1.22. *Chegaralangan* $K(x,y)$ *yadroli integral operator o'z-o'ziga qo'shma bo'lishi uchun* $K(x,y)=\overline{K(y,x)}$ *bo'lishi yetarli va zarur.* ▲

Ba'zan $L(H_1,H_2)$ fazoning elementlari bo'lgan operatorlar bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi.

Ta'rif 1.13 (*Umumlashgan qo'shma operatorlar*). $A:H_1\to H_2$ *chiziqli chegaralangan operator bo'lsin. Agar* $A^*:H_2\to H_1$ *operator ixtiyoriy* $x\in H_1$ *va* $y\in H_2$ *uchun*

$$(Ax,y)_{H_2}=(x,A^*y)_{H_1}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A^* *operator* A *operatorning* ***umumlashgan qo'shmasi*** *deyiladi.*

Shuni ta'kidlab o'tamizki, yuqorida zikr etilgan qo'shma operatorning mavjudligi haqidagi **??** teorema bu holda ham o'rinli bo'ladi.

Misol 1.23. $\phi\in L_2(\mathbb{T}^d)$ *bo'lsin. Quyidagi operatorni aniqlaymiz:*

$$A:L_2(\mathbb{T}^d)\to\mathbb{C},\quad Af=\int\limits_{\mathbb{T}^d}f(t)\overline{\phi(t)}dt.$$

Bu operatorning qo'shmasini topamiz. $z\in\mathbb{C}$ *bo'lsin. U holda*

$$(Af,z)_{\mathbb{C}}=\overline{z}\int\limits_{\mathbb{T}^d}f(t)\overline{\phi(t)}dt=\int\limits_{\mathbb{T}^d}f(t)\overline{z\phi(t)}dt=(f,A^*z)_{L_2(\mathbb{T}^d)}.$$

Bu yerdan qo'shma operatorning mavjudligi haqidagi teoremaga asosan

$$A^*:\mathbb{C}\to L_2(\mathbb{T}^d),\quad (A^*z)(t)=z\phi(t).$$

1.6 O'z-o'ziga qo'shma operatorlarning xossalari

H – Hilbert fazosi bo'lsin.

Teorema 1.10. $A,\ B\in L(H)$ *– o'z-o'ziga qo'shma operatorlar,* $\alpha,\ \beta$ *– haqiqiy sonlar bo'lsin. U holda* $\alpha A+\beta B$ *ham* H *dagi o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi.*

Teorema 1.11. *Agar* $A = A^*$ *bo'lsa, ixtiyoriy* $x \in H$ *uchun* (Ax, x) *haqiqiy son bo'ladi.*

Teorema 1.12. *Agar* A *operator o'z-o'ziga qo'shma bo'lsa, u holda*

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Ax, x)|.$$

Teorema 1.13. H *– kompleks Hilbert fazosi bo'lsin. Agar ixtiyoriy* $x \in H$ *da* (Ax, x) *haqiqiy qiymatli bo'lsa, u holda* A *– o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi.*

Shuni aytib o'tamizki, A operator haqiqiy Hilbert fazolarida aniqlangan bo'lsa, umumiy holda, $(Ax, x) = 0$ ekanligidan A ning o'z-o'ziga qo'shmaligi va $A = 0$ ekanligi kelib chiqmaydi.

1.7 Kompakt operatorlar

Faraz qilamiz, H_1, H_2 - Hilbert fazolari, $A : H_1 \to H_2$ chiziqli chegaralangan operator bo'lsin.

Ta'rif 1.14. *Agar* A *operator* H_1 *fazodagi ixtiyoriy chegaralangan to'plamni* H_2 *fazodagi nisbiy kompakt to'plamga o'tkazsa, u* ***kompakt operator*** *deyiladi.*

Boshqacha aytganda, H_1 fazodagi ixtiyoriy chegaralangan to'plamning operator ta'siridagi aksi nisbiy kompakt bo'lsa, bu operator ***kompakt*** deyiladi.

Misol 1.24. *Chekli o'lchamli fazolarda har qanday operator chiziqli chegaralangan va har qanday chegaralangan to'plam nisbiy kompakt bo'lgani uchun quyidagi teorema o'rinli:*

Teorema 1.14. *Agar* H_1 *yoki* H_2 *chekli o'lchamli Hilbert fazosi bo'lsa, u holda ixtiyoriy* $A \in L(H_1, H_2)$ *operator kompaktdir.*

Misol 1.25. H_1, H_2 *Hilbert fazolari bo'lsin. Yuqorida ko'rdikki,* $A : H_1 \to H_2$ *chiziqli operatorning qiymatlar sohasi* $R(A)$ *chiziqli ko'pxillik bo'ladi. Agar* $\overline{R(A)}$ *fazo chekli o'lchamli bo'lsa, u holda* A *operator chekli o'lchamli operator deyiladi. Chekli o'lchamli fazolarda har qanday chegaralangan to'plam nisbiy kompakt ekanidan ixtiyoriy chekli o'lchamli operator kompakt.* ▲

Misol 1.26. *$A : \ell_2(\mathbb{Z}^d) \to \ell_2(\mathbb{Z}^d), \quad (Af)(n) = v(n)f(n), \quad f \in \ell_2(\mathbb{Z}^d)$ operatorni qaraymiz, bunda $\sup|v| < \infty$. v funksiya qanday shartlarni qanoatlantirsa, A operator kompakt bo'lishini o'rganamiz.*

Teorema 1.15. *A operator kompakt bo'lishi uchun*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in\mathbb{Z}^d,\ |s|>n} |v(s)| = 0$$

bo'lishi yetarli va zarur.

Teorema 1.16. *A operator hech qanday $\varepsilon(x) \in L_2(\mathbb{T}^d)\backslash\{0\}$ uchun kompakt bo'la olmaydi.*

Misol 1.27. *$A : L_2(\mathbb{T}^d) \to L_2(\mathbb{T}^d), \quad (Af)(x) = \varepsilon(x)f(x), \quad f \in L_2(\mathbb{T}^d)$ operatorni qaraymiz, bunda $\varepsilon(x) \in L_2(\mathbb{T}^d)$. Bu operator qanday ε larda kompakt bo'lishini tekshiramiz.*

Teorema 1.17. *A operator hech qanday $\varepsilon(x) \in L_2(\mathbb{T}^d)\backslash\{0\}$ uchun kompakt bo'la olmaydi.*

Isbot. *Faraz qilamiz, biror $\varepsilon(x) \in L_2(\mathbb{T}^d)$ uchun A kompakt operator bo'lsin. $\varepsilon \neq 0$ ekanidan shunday $M \subset \mathbb{T}^d$ mavjudki, $|\varepsilon(x)| > m_0 > 0$ va $0 < \mu(M) < 1/2$. $L_2(\mathbb{T}^d)$ fazodagi ONS ni qaraymiz: $\phi_n(s) = \dfrac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{i(n,s)}, \quad s \in \mathbb{T}^d, \quad n \in \mathbb{Z}^d$. U holda M ning aniqlanishiga binoan*

$$\|A\phi_n - A\phi_k\|^2 = \int\limits_{\mathbb{T}^d} |(A\phi_n)(x) - A\phi_k(x)|^2 d\mu \geq$$

$$\geq \int\limits_{M} |(A\phi_n)(x) - A\phi_k(x)|^2 d\mu =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{M} |\varepsilon(x)|^2 |e^{i(n,x)} - e^{i(k,x)}|^2 d\mu \geq$$

$$\geq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} m_0 (2 - 2\int\limits_{M} cos(k-n,x) d\mu) \geq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} m_0 > 0.$$

Demak, $\{\phi_n\} \subset H$ sistema chegaralangan bo'lsa ham, $\{A\phi_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratib bo'lmaydi. Demak, A kompakt emas.

▲

Misol 1.28. *Yuqorida ko'rdikki, cheksiz o'lchamli Hilbert fazolarida birlik shar nisbiy kompakt emas. Bu esa birlik operator I ning kompakt emasligini ko'rsatadi.*

▲

Teorema 1.18. *H Hilbert fazosi bo'lsin. Agar A kompakt, B chegaralangan operator bo'lsa, u holda AB va BA operatorlar kompakt bo'ladi.*

Misol 1.29. *H - ixtiyoriy cheksiz o'lchamli separabel Hilbert fazosi, $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ bu fazoda ONB bo'lsin. A operatorni quyidagicha aniqlaymiz:*

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n (f, \psi_n).$$

Bu yerda $\{c_1, c_2, \ldots\}$ - biror chegaralangan ketma-ketlik. A operatorning chiziqliligi skalyar ko'paytmaning chiziqliligidan kelib chiqadi. $\{\psi_n\}$ ning ortonormal sistema ekanligidan

$$(Af, Af) = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 |(f, \psi_n)|^2 \leq \sup_n |c_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \psi_n)|^2 = \sup_n |c_n|^2 \ \|f\|^2$$

tengsizlik o'rinli va bu yerdan A operatorning chegaralangan ekanini hosil qilamiz.

Ko'rinib turibdiki, A chiziqli, chegaralangan operator. Quyidagi operatorni aniqlaymiz:

$$F : H \to \ell_2, \quad (Ff)_n = (f, \psi_n), \quad f \in H.$$

Boshqacha aytganda, har bir $f \in H$ ga uning Fourier koeffitsiyentlarini mos qo'yuvchi operatorni qaraymiz. Riesz Lemmasiga binoan bu operator biyeksiya, $D(F) = H$, $R(F) = \ell_2$ va $\|F\| = 1$. Bu orepatorning teskarisi

$$F : \ell_2 \to H, \quad F^{-1}x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \psi_n, \quad x \in \ell_2.$$

Tushunarli, $\|F^{-1}\| = 1$. *Demak yuqoridagi natijaga asosan* F *kompakt operator emas.*

$$B : \ell_2 \to \ell_2, \quad B = FAF^{-1}$$

operatorni aniqlaymiz. Ko'rininb turibdiki, $(Bx)_n = c_n x_n$. *Yuqorida ko'rdikki,* B *operator kompakt bo'lishi uchun* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ *bo'lishi yetarli va zarur.* $A = F^{-1}BF$ *ekanidan hamda* F *va* F^{-1} *larning chegaralanganligidan yuqoridagi teoremaga asosan* B *kompakt bo'lsa,* A *ham kompakt bo'lishini topamiz. Agar* B *kompakt bo'lmasa, u holda* ℓ_2 *fazodagi* E_2 *birlik sharning* B *operator ta'siri natijasidagi aksi kompakt bo'lmaydi.* F *bir qiymatli ekanidan,* H *dagi* E_1 *birlik sharni* E_2 *ga o'tkazadi.* F^{-1} *ham bir qiymatli operator ekanidan* E_1 *ning* $A = F^{-1}BF$ *operator ta'siridagi obrazi nisbiy kompakt emas. Demak* B *kompakt bo'lmasa,* A *ham kompakt bo'la olmaydi. Shunday qilib, quyidagi tasdiqni isbotladik:*

Tasdiq 1.1. A *operator kompakt bo'lishi uchun* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ *tenglikning bajarilishi yetarli va zarur.* ▲

Teorema 1.19. A *chegaralangan chiziqli operator kompakt bo'lishi uchun* A^*A *operatorning kompakt bo'lishi yetarli va zarur.*

Teorema 1.20. A *chiziqli chegaralangan operator bo'lsin.* A *operator kompakt bo'lishi uchun* A^* *operatorning kompakt bo'lishi yetarli va zarur.*

1.8 Hilbert fazosida aniqlangan operatorlarning spektri

Ta'rif 1.15. *Agar biror* $z \in \mathbb{C}$ *uchun* $A - zI$ *operator teskarilanuvchan bo'lsa, u holda* z *soni* A *operatorning* ***regulyar nuqtasi****,* $R_z(A) = (A - zI)^{-1}$ *operator esa uning* ***rezolventasi*** *deyiladi.*

A operatorning barcha regulyar nuqtalari to'plami $\rho(A)$ deb belgilanadi. $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$ to'plam A operatorning **spektri** deb ataladi. Demak spektr nuqtalari quyidagilardan iborat bo'lishi mumkin:

1. $A - zI$ operator umuman teskarilanuvchan emas. Demak $(A - zI)x = 0$ tenglama nolmas yechimga ega. Bu holda z soni A operatorning **xos qiymati**, nolmas x esa **xos vektori** deyiladi.

2. $A - zI$ operatorning teskarisi mavjud, lekin chegaralanmagan. Bu holda z soni A operatorning **uzluksiz spektriga tegishli** deyiladi.

3. $A - zI$ operatorning teskarisi mavjud, chegaralangan, lekin $A - zI$ ning qiymatlar sohasi butun fazoga teng emas. Bu holda z soni **qoldiq spektrga tegishli** deyiladi.

A operatorning z xos qiymatiga mos keluvchi xos vektorlaridan hosil qilingan fazoning o'lchami z xos qiymatning **karraliligi** deyiladi. Agar z ning karraliligi 1 ga teng bo'lsa, u **oddiy xos qiymat**, aks holda **karrali xos qiymat** deb ataladi. A operatorning chekli karrali xos qiymatlari to'plamini **diskret spektr** deb ataymiz va $\sigma_{disc}(A)$ deb belgilaymiz. A operatorning uzluksiz spektrini $\sigma_{cont}(A)$ deb, qoldiq spektrini esa $\sigma_{res}(A)$ deb belgilaymiz. Odatda operatorning uzluksiz spektri va cheksiz karrali xos qiymatlari to'plami **muhim spektr** deb ataladi va $\sigma_{ess}(A)$ kabi belgilanadi.

Teorema 1.21. *Ixtiyoriy chegaralangan A operatorning spektri yopiq to'plam.*

Misol 1.30. *Chekli o'lchamli fazolarda ixtiyoriy operator faqat diskret spektrga ega bo'ladi, ya'ni faqatgina xos qiymatlargagina ega.* ▲

Misol 1.31. $A : \ell_2(\mathbb{Z}^d) \to \ell_2(\mathbb{Z}^d), \quad (Af)(x) = v(x)f(x), f \in \ell_2(\mathbb{Z}^d)$ *operatorni qaraymiz, bunda v aynan nol bo'lmagan biror chegaralangan funksiya. M deb v ning qiymatlari to'plamini belgilaymiz va $\sigma(A) = \overline{M}$ bo'lishini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $z \in \mathbb{C}\backslash\overline{M}$ ni qaraymiz. Bu to'plam ochiq va $q = \operatorname{dist}(z, \overline{M}) > 0$ bo'ladi. Bu holda $\forall f \in \ell_2(\mathbb{Z}^d)$ uchun*

$$\|(A - zI)f\|^2 = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} |v(x) - z|^2 |f(x)| \geq q^2 \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} |f(x)|^2 = q^2\|f\|^2$$

bo'lib, 1.7 teoremaga asosan $A - zI$ *teskarilanuvchan bo'ladi. Demak,* $\sigma(A) \subset \overline{M}$. *Endi* $z \in \overline{M}$ *bo'lsin.* $Af = zf$ *tenglamani qaraymiz. Agar* $z \in M$ *bo'lsa, u holda bu tenglama nolmas yechimga ega bo'ladi. Misol uchun, biror* $x_0 \in \mathbb{Z}^d$ *uchun* $z = v(x_0)$ *ni qarasak, u holda*

$$f_{x_0}(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x = x_0 \\ 0, & \text{aks holda} \end{cases}$$

funksiya bu tenglamaning yechimi bo'ladi. Bu yerdan z *ning xos qiymatligi va* f_{x_0} *ning xos vektorligini topamiz. Demak* $z \in \sigma(A)$. *Endi* $z \in \overline{M} \backslash M$ *bo'lsin. U holda* $A - zI$ *operator teskarilanuvchan, ya'ni* $Af = zf$ *tenglama yagona* 0 *yechimga ega va rezolventa*

$$(R_z(A)f)(x) = \frac{f(x)}{v(x) - z}$$

kabi aniqlanadi. $z \in \overline{M} \backslash M$ *ekanidan har bir* $n \in \mathbb{N}$ *uchun shunday* $x_n \in \mathbb{Z}^d$ *topiladiki,* $|v(x_n) - z| < \dfrac{1}{n}$ *bo'ladi. Quyidagi funksiyalar ketma-ketligini aniqlaymiz:*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x = x_n \\ 0, & \text{aks holda} \end{cases}$$

U holda

$$\|R_z(A)f_n\|^2 = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \frac{|f_n(x)|^2}{|v(x) - z|^2} = \frac{|f_n(x_n)|^2}{|v(x_n) - z|^2} > n^2.$$

Demak $R_z(A)$ *chegaralanmagan operator. Ta'rifga binoan* $z \in \sigma_{ess}(A)$. *Demak* $\overline{M} \subset \sigma(A)$. *Bu yerdan* $\sigma(A) = \overline{M}$ *ekani kelib chiqadi.* ▲

Misol 1.32. $A : L_2(\mathbb{T}^d) \to L_2(\mathbb{T}^d), \quad (Af)(x) = \varepsilon(x)f(x), f \in L_2(\mathbb{T}^d),$ *operatorning spektri faqat uzluksiz spektrdan iborat, bunda* ε *aynan nol bo'lmagan biror uzluksiz funksiya. Bu holda agar* $\varepsilon(x)$ *funksiyaning qiymatlar sohasini* M *deb belgilasak,* $\sigma(A) = \overline{M}$ *ga teng bo'ladi. Haqiqatdan ham,* $\forall z \in \mathbb{C} \backslash \overline{M}$ *uchun* $q = \operatorname{dist}(z, \overline{M}) > 0$ *bo'ladi. Bu holda* $\forall f \in L_2(\mathbb{T}^d)$ *uchun*

$$\|(A - zI)f\|^2 = \int\limits_{\mathbb{T}^d} |\varepsilon(x) - z|^2 |f(x)|^2 dx \geq q^2 \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^2 dx = q^2 \|f\|^2$$

bo'lib, 1.7 teoremaga asosan $A - zI$ *teskarilanuvchan bo'ladi. Demak,* $\sigma(A) \subset \overline{M}$. *Endi* $z \in \overline{M}$ *bo'lsin.* $\varepsilon(x)$ *aynan nol bo'lmagani uchun* $Af = zf$ *tenglama yagona nol yechimga ega. Demak* z *xos qiymat bo'la olmaydi va* $(A - zI)^{-1}$ *mavjud:*

$$(R_z(A)f)(x) = ((A - zI)^{-1}f)(x) = \frac{f(x)}{\varepsilon(x) - z}.$$

$z \in \overline{M}$ *ekanidan har bir* $n \in \mathbb{N}$ *uchun shunday* $x_n \in \mathbb{T}^d$ *topiladiki,*

$$|\varepsilon(x_n) - z| < \frac{1}{n}.$$

$\varepsilon(x)$ *ning uzluksiz ekanidan shunday* $\delta_n > 0$ *mavjudki,* $\forall x \in U_{\delta_n}(x_n)$ *uchun* $|\varepsilon(x) - z| < \frac{1}{n}$ *munosabat bajariladi. Bunda* $U_{\delta_n}(x_n)$ *to'plamning Lebeg o'lchovi* $\mu(U_{\delta_n}(x_n)) = e_n > 0$. *Quyidagi funksiyalar ketma-ketligini aniqlaymiz:*

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e_n}, & \text{agar } x \in U_{\delta_n}(x_n) \\ 0, & \text{aks holda} \end{cases}$$

U holda barcha $n \in \mathbb{N}$ *uchun* $\|f_n\| = 1$ *va*

$$\|R_z(A)f_n\|^2 = \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{|f_n(x)|^2 dx}{|\varepsilon(x) - z|^2} = \int\limits_{U_{\delta_n}(x_n)} \frac{|f_n(x)|^2 dx}{|\varepsilon(x) - z|^2} > n^2.$$

Ya'ni $R_z(A)$ *chegaralanmagan va ta'rifga binoan* z *muhim spektrga tegishli. Demak* $\overline{M} \subset \sigma(A)$. *Bu yerdan* $\sigma(A) = \overline{M}$ *ekani kelib chiqadi.* ▲

Umumiy holda operatorlarning muhim spektri haqida Weylning quyidagi teoremasi o'rinli.

Teorema 1.22. $z \in \mathbb{C}$ *soni o'z-o'ziga qo'shma operator* A *ning muhim spektriga tegishli bo'lishi uchun* H *da shunday* $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ONS topilib,*

$$\lim_{n\to\infty} (A - zI)\phi_n = 0$$

bo'lishi yetarli va zarur.

H Hilbert fazosi, $A \in L(H)$ o'z-o'ziga qo'shma operator bo'lsin. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x), \quad m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x).$$

M va m sonlari mos ravishda A operatorning yuqori va quyi chegarasi deyiladi.

Teorema 1.23. $\|A\| = \max\{|m|, |M|\}$.

Bu teoremaning isboti yuqorida keltirib o'tilgani uchun ham uni isbotlab o'tirmaymiz. Ma'lumki, $\sigma(A)$ $\|A\|$ radiusli doira ichida saqlanar edi. O'z-o'ziga qo'shma operatorlar uchun esa bu baholash yanada aniqroq.

Teorema 1.24. $\sigma(A) \subset [m, M]$. *Shuningdek,* $m, M \in \sigma(A)$.

Teorema 1.25. *O'z-o'ziga qo'shma operatorning har xil xos qiymatlariga mos keluvchi xos vektorlari ortogonal.*

Teorema 1.26. A *– o'z-o'ziga qo'shma operator bo'lsin.* z *soni* A *operator uchun xos qiymat bo'lishi uchun* $\overline{R(A - zI)} \neq H$ *bo'lishi yetarli va zarur.*

O'z-o'ziga qo'shma operatorning spektrini quyidagicha tavsiflash ham mumkin: agar $R(A - zI) \neq \overline{R(A - zI)}$ bo'lsa, z soni A operatornng uzluksiz spektriga tegishli bo'ladi. Va agar $\overline{R(A - zI)} \neq H$ bo'lsa, z soni A operatorning nuqtali spektriga tegishlidir.

Teorema 1.27. *Faraz qilamiz,* $A \in L(H)$ *– o'z-o'ziga qo'shma operator,* M *–* H *ning biror qism fazosi. Agar* $A(M) \subset M$ *bo'lsa, u holda*

$$\sigma_H(A) = \sigma_M(A) \cup \sigma_{M^\perp}(A).$$

Bu yerda $\sigma_X(A)$ *–* $A : X \to X$ *operatorning spektri.*

Teorema 1.28. *Faraz qilamiz,* A *–* H *Hilbert fazosidagi o'z-o'ziga qo'shma operator bo'lsin. U holda* A *qoldiq spektrga ega emas.*

H Hilbert fazosi, $A \in L(H)$ o'z-o'ziga qo'shma operator bo'lsin.

Teorema 1.29. *Kompakt operatorning nolmas* z *xos qiymatiga mos keluvchi* X_z *xos fazosi chekli o'lchamli.*

Teorema 1.30. *Istalgan* $\delta > 0$ *son uchun kompakt operator xos qiymatlarining moduli* δ *dan katta bo'lganlari soni chekli.*

Bu teoremadan shuni xulosa qilamizki, kompakt operatorning xos qiymatlarini moduli bo'yicha kamayish tartibida joylashtirish mumkin.

Teorema 1.31 (*Phillips*). *Agar* $z \in \mathbb{C}$ *soni* A *kompakt operatorning xos qiymati bo'lsa,* $\overline{z} \in \mathbb{C}$ *soni* A^* *ning xos qiymati bo'ladi.*

Teorema 1.32. A *va* A^* *kompakt operatorlarning* z *va* $\overline{z}$ *xos qiymatlariga mos keluvchi xos qism fazolarining o'lchamlari teng.*

Teorema 1.33. $A \in L(H)$ *kompakt operator bo'lsin. U holda*

1. A *operatorning spektridagi noldan farqli ixtiyoriy nuqta xos qiymatdir;*

2. *Agar* H *– cheksiz o'lchamli bo'lsa,* 0 *soni operatorning spektriga tegishli.*

Teorema 1.34. *Agar* $A \neq 0$ *o'z -o'ziga qo'shma va kompakt bo'lsa, uning hech bo'lmaganda bitta nolmas xos qiymati bor.*

Teorema 1.35 (*Hilbert-Schmidt*). H *Hilbert fazosidagi har qanday o'z-o'ziga qo'shma kompakt* A *operator uchun uning holmas* $\{z_n\}$ *xos qiymatlariga mos keluvchi* $\{\psi_n\}$ *xos vektorlaridan tuzilgan shunday ONS mavjudki, ixtiyoriy* $x \in H$ *ni yagona ravishda*

$$x = \sum_k c_k \psi_k + x'$$

kabi ifodalash mumkin, bunda $x' \in \operatorname{Ker} A$, *ya'ni* $Ax' = 0$. *Bu holda*

$$Ax = \sum_k c_k z_k \psi_k.$$

Agar $\{\psi_n\}$ *sistema cheksiz bo'lsa,* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

1-bob bo'yicha xulosa. Mazkur bobda ikki zarrachali diskret Shredinger operatorini aniqlashda va asosiy xossalarini kiritishda kerak bo'ladigan tushunchalar, ya'ni ta'riflar, lemmalar, teorema va ulardan kelib chiqadigan natijalar keltirilgan. Jumladan chiziqli fazolar, to'la normalangan fazolar, Hilbert fazosi, Hilbert fazosida aniqlangan operatorlar va ularning xossalari keltirilgan.

Shu bilan birgalikda Hilbert fazosida aniqlangan chiziqli chegaralangan operatorlar ta'rifi va xossalari kiritilgan. Hilbert fazosida o'z-o'ziga qo'shma va teskari operator tushunchasi berilgan. So'ngra, Hilbert fazosida o'z-o'ziga qo'shma operatorlar spektral nazariyasi elementlari berilgan va ularga misollar qurilgan.

Bob 2

Ikki zarrachali bir diskret Shredinger operatori

Bu bob uchta paragrafdan iborat bo'lib, unda ilmiy tadqiqot predmeti bo'lgan ikki zarrachali bir diskret Shredinger operatorining ko'rinishi keltirilgan. Bu operator xossalari tadqiq qilingan, ikki fermionli sistemaga mos bir diskret Shredinger operatoriga mos Fredgolm determinanti qurilgan va uning muhim spektr chekkalridagi asimptotik yoyilmalari olingan.

2.1 Ikki fermionli sistemaga mos bir diskret Shredinger operatori ko'rinishi

$\mathbb{T} = (-\pi; \pi]-$ bir o'lchamli tor bo'lsin. Unda qo'shish va songa ko'paytirish amallarini haqiqiy sonlarni 2π modul bo'yicha qo'shish va songa ko'paytirish sifatida kiritamiz.

Bir o'lchamli tor $\mathbb{T}$ da aniqlangan, Haar ma'nosida o'lchovga ega va

$$\int\limits_{\mathbb{T}} |f(q)|^2 dq < \infty$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ funksiyalarning chiziqli fazosi $L_2(\mathbb{T})$ ni qaraymiz, bunda integralda o'lchov Haar ma'nosida olinadi. Bu fazoning elementlari $\mathbb{T}$ da aniqlangan va 2π davrga ega bo'lgan funksiyalardir.

$L_2(\mathbb{T})$ fazoda quyidagi operatorni aniqlaymiz:

$$H_{\mu\lambda} = H_0 + \mu V_1 + \lambda V_2. \tag{2.1}$$

Bunda $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$, H_0- $L_2(\mathbb{T})$ fazoda $\varepsilon(\cdot)$ funksiyaga ko'paytirish operatori, V_1 va V_2 lar esa $L_2(\mathbb{T})$ fazoda integral operatorlar, ya'ni

$$\begin{gathered}(H_0 f)(p) = \varepsilon(p) f(p), \quad \varepsilon(p) = 1 - \cos p, \quad p \in \mathbb{T}, \\ (V_1 f)(p) = \sin p \int\limits_{\mathbb{T}} \sin s f(s) ds, \\ (V_2 f)(p) = \sin 2p \int\limits_{\mathbb{T}} \sin 2s f(s) ds.\end{gathered} \tag{2.2}$$

V_1 va V_2 operatorlar rangi birga teng integral operatorlar bo'lganligidan ularning kompakt operatorlar ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun muhim spektr turg'unligi haqidagi Veyl teoremasiga ko'ra $H_{\mu\lambda}$ operatorning muhim spektri $\sigma_{ess}(H_{\mu\lambda})$ μ va λ parametrlarga bog'liq emas va H_0 operatorning muhim spektri bilan ustma-ust tushadi, ya'ni

$$\sigma_{ess}(H_{\mu\lambda}) = \sigma_{ess}(H_0).$$

Ikkinchi tomondan H_0 operator uzluksiz $\varepsilon(\cdot)$ funksiyaga ko'paytirish operatori bo'lganligi uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

$$\sigma(H_0) = \operatorname{Im} \varepsilon(\cdot) = [0; 2].$$

Demak, $\sigma_{ess}(H_{\mu\lambda}) = [0; 2]$.

2.2 Ikki fermionli sistemaga mos bir diskret Shredinger operatorining xossalari

Lemma 2.1. *(2.1) formula bilan berilgan $H_{\mu\lambda}$ operator $L_2(\mathbb{T})$ fazoda aniqlangan chiziqli chegaralangan, o'z-o'ziga qo'shma operatorlar sinfiga qarashli bo'ladi.*

Isbot. Dastlab (2.1) formula bilan berilgan operatorning chiziqli operator bo'lishini isbotlaymiz. Buning uchun ta'rifga ko'ra ixtiyoriy $f, g \in L_2(\mathbb{T})$ elementlar va ixtiyoriy $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sonlar uchun

$$(H_{\mu\lambda}(\alpha f + \beta g))(p) = \alpha (H_{\mu\lambda} f)(p) + \beta (H_{\mu\lambda} g)(p) \tag{2.3}$$

tenglik o'rinli ekanligini ko'rsatish kerak. Haqiqatan ham,

$$(H_{\mu\lambda}(\alpha f+\beta g))(p) = (H_0(\alpha f+\beta g))(p)+\mu(V_1(\alpha f+\beta g))(p)+\alpha(V_2(\alpha f+\beta g))(p).$$

Bunda $H_0,\ V_1,\ V_2$ operatorlarning (2.2) formuladagi ko'rinishlarini e'tiborga olsak, quyidagi tenglikka kelamiz:

$$(H_{\mu\lambda}(\alpha f+\beta g))(p) = \varepsilon(p)(\alpha f+\beta g)(p) + \mu\sin p\int\limits_{\mathbb{T}}\sin s(\alpha f+\beta g)(s)ds+$$

$$+\lambda\sin 2p\int\limits_{\mathbb{T}}\sin 2s(\alpha f+\beta g)(s)ds.$$

Bu tenglikning o'ng qismida funksiyalarning yig'indisi va songa ko'paytmasi ta'rifidan foydalansak, quyidagi tenglikni olamiz:

$$(H_{\mu\lambda}(\alpha f+\beta g))(p) = \varepsilon(p)(\alpha f(p)+\beta g(p)) + \mu\sin p\int\limits_{\mathbb{T}}\sin s(\alpha f(s)+\beta g(s))ds+$$

$$+\lambda\sin 2p\int\limits_{\mathbb{T}}\sin 2s(\alpha f(s)+\beta g(s))ds$$

yoki

$$(H_{\mu\lambda}(\alpha f+\beta g))(p) = \alpha\varepsilon(p)f(p)+\beta\varepsilon(p)g(p) + \mu\sin p\int\limits_{\mathbb{T}}(\alpha\sin sf(s)+$$

$$+\beta\sin sg(s))ds + \lambda\sin 2p\int\limits_{\mathbb{T}}((\alpha\sin 2sf(s)+\beta\sin 2sg(s))ds. \quad (2.4)$$

Agar bunda integrallanuvchi funksiyalar yig'indisining integrali integrallar yig'indisiga teng ekanligini hisobga olsak va hosil bo'lgan ifodaga guruhlashni tadbiq qilsak,

$$(H_{\mu\lambda}(\alpha f+\beta g))(p) = \alpha\varepsilon(p)f(p)+\beta\varepsilon(p)g(p) + \alpha\mu\sin p\int\limits_{\mathbb{T}}\sin sf(s)ds+$$

$$+\beta\mu\sin p\int\limits_{\mathbb{T}}\sin sg(s)ds + \alpha\lambda\sin 2p\int\limits_{\mathbb{T}}\sin 2sf(s)ds + \beta\lambda\sin 2p\int\limits_{\mathbb{T}}\sin 2sg(s)ds =$$

$$= \alpha(\varepsilon(p)f(p) + \mu\sin p\int\limits_{\mathbb{T}}\sin sf(s)ds + \lambda\sin 2p\int\limits_{\mathbb{T}}\sin 2sf(s)ds)+$$

$$+\beta(\varepsilon(p)g(p)+\mu\sin p\int\limits_{\mathbb{T}}\sin sg(s)ds+\lambda\sin 2p\int\limits_{\mathbb{T}}\sin 2sg(s)ds)$$

tenglikka kelamiz.

Oxirgi tenglikdan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$(H_{\mu\lambda}(\alpha f+\beta g))(p)=\alpha(H_{\mu\lambda}f)(p)+\beta(H_{\mu\lambda}g)(p).$$

Bu esa $H_{\mu\lambda}$ operatorning $L_2(\mathbb{T})$ fazoda aniqlangan chiziqli operator ekanligini anglatadi.

Endi $H_{\mu\lambda}$ operatorning chegaralangan operatorlar sinfiga qarashli ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun ixtiyoriy $f\in L_2(\mathbb{T})$ element uchun

$$\|H_{\mu\lambda}f\|\leqslant C\|f\|$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi chekli musbat $C>0$ haqiqiy sonning mavjudligini ko'rsatish lozim. $H_{\mu\lambda}$ operatorning aniqlanishi va normaning xossasidan quyidagi tengsizlikning o'rinli ekanligi kelib chiqadi:

$$\|H_{\mu\lambda}f\|=\|H_0f+\mu V_1f+\lambda V_2f\|\leqslant\|H_0f\|+\mu\|V_1f\|+\lambda\|V_2f\|.$$

Demak, $H_{\mu\lambda}$ operatorning chegaralanganligini ko'rsatish uchun H_0,V_1,V_2 operatorlarning chegaralangan ekanligini ko'rsatish yetarli.

$L_2(\mathbb{T})$ fazoda normaning aniqlanishidan

$$\|H_0f\|^2=\int\limits_{\mathbb{T}}|(H_0f)(p)|^2dp,\quad\forall f\in L_2(\mathbb{T})$$

va H_0 operatorning aniqlanishini e'tiborga olsak, quyidagi tenglikka kelamiz:

$$\|H_0f\|^2=\int\limits_{\mathbb{T}}|1-\cos p|^2|f(p)|^2dp.$$

Bu normani yuqoridan baholaymiz:

$$\|H_0f\|^2\leqslant 4\int\limits_{\mathbb{T}}|f(p)|^2dp=4\|f\|^2.$$

Bundan H_0 operator normasi uchun quyidagi tengsizlikka kelamiz:

$$\|H_0f\|\leqslant 2\|f\|,\quad\forall f\in L_2(\mathbb{T}).$$

Demak, H_0 chegaralangan operator ekan.

Endi V_1 operatorni chegaralanganlikka tekshiramiz. $L_2(\mathbb{T})$ fazoda normaning aniqlanishidan $\forall f \in L_2(\mathbb{T})$ uchun quyidagi tenglikka egamiz:

$$\|V_1 f\|^2 = \int\limits_{\mathbb{T}} |(V_1 f)(p)|^2 dp.$$

Bunda V_1 operator ta'sir ifodasi uchun berilgan formulani e'tiborga olsak, yuqoridagi ifoda quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\|V_1 f\|^2 = \int\limits_{\mathbb{T}} \sin^2 p \Big(\int\limits_{\mathbb{T}} \sin^2 s |f(s)|^2 ds \Big) dp.$$

O'ng tomondagi ichki integralga Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini qo'llaymiz:

$$\|V_1 f\|^2 \leqslant \int\limits_{\mathbb{T}} \sin^2 p \Big(\int\limits_{\mathbb{T}} \sin^2 s ds \int\limits_{\mathbb{T}} |f(s)|^2 ds \Big) dp.$$

Natijada quyidagi tengsizlikka kelamiz:

$$\|V_1 f\|^2 \leqslant \Big(\int\limits_{\mathbb{T}} \sin^2 p dp \Big)^2 \int\limits_{\mathbb{T}} |f(s)|^2 ds = \pi^2 \|f\|^2.$$

Shunday qilib, biz V_1 operator normasi uchun

$$\|V_1 f\| \leqslant \pi \|f\|, \quad \forall f \in L_2(\mathbb{T})$$

bahoning o'rinli ekanligini oldik. Bu esa V_1 chegaralangan operator ekanligini bildiradi.

V_2 operatorning chegaralanganligini ham shu usulda ko'rsatamiz.

Natijada $H_{\mu\lambda}$ operator normasi uchun

$$\|H_{\mu\lambda} f\| \leqslant (2 + 2\pi) \|f\|, \quad \forall f \in L_2(\mathbb{T})$$

tengsizlik bajariladi. Bu ta'rifga asosan $H_{\mu\lambda}$ ning $L_2(\mathbb{T})$ fazoda chegaralangan operatorlar oilasiga qarashli ekanligini bildiradi.

Endi $H_{\mu\lambda}$ operatorning o'z-o'ziga qo'shma operator ekanligini isbotlaymiz. Ta'rifga asosan ixtiyoriy $f, g \in L_2(\mathbb{T})$ elementlar uchun

$$(H_{\mu\lambda} f, g) = (f, H_{\mu\lambda} g)$$

tenglikning bajarilishini ko'rsatamiz.

Agar (2.1) formulani hisobga olib, bu tenglikning chap qismini quyidagicha yozish mumkin:

$$(H_{\mu\lambda}f, g) = (H_0 f, g) + \mu(V_1 f, g) + \lambda(V_2 f, g).$$

Bundan ko'rinadiki, $H_{\mu\lambda}$ operatorning o'z-o'ziga qo'shma operator ekanligini ko'rsatish uchun H_0, V_1 va V_2 operatorlarning o'z-o'ziga qo'shma operatorlar ekanligini ko'rsatish yetarli.

$L_2(\mathbb{T})$ fazoda skalyar ko'paytmaning aniqlanishidan ixtiyoriy $f, g \in L_2(\mathbb{T})$ elementlar uchun

$$(H_0 f, g) = \int\limits_{\mathbb{T}} (H_0 f)(p)\overline{g(p)}dp$$

tenglikka egamiz.

H_0 operatorning aniqlanishini hisobga olib, bu tenglikni quyidagicha yozamiz:

$$(H_0 f, g) = \int\limits_{\mathbb{T}} (1 - \cos p) f(p)\overline{g(p)}dp$$

yoki

$$(H_0 f, g) = \int\limits_{\mathbb{T}} f(p)\overline{\overline{(1 - \cos p)}g(p)}dp.$$

$\varepsilon(p) = 1 - \cos p$ funksiya $\mathbb{T}$ da aniqlangan haqiqiy qiymatli funksiya bo'lganligi uchun quyidagi tenglikni yoza olamiz:

$$(H_0 f, g) = \int\limits_{\mathbb{T}} f(p)\overline{(1 - \cos p)g(p)}dp = (f, H_0 g).$$

Demak, H_0 o'z-o'ziga qo'shma operator ekan.

Endi V_1 operatorning o'z-o'ziga qo'shma operator ekanligini isbotlaymiz. $L_2(\mathbb{T})$ fazoda skalyar ko'paytmaning aniqlanishidan ixtiyoriy $f, g \in L_2(\mathbb{T})$ elementlar uchun

$$(V_1 f, g) = \int\limits_{\mathbb{T}} (V_1 f)(p)\overline{g(p)}dp$$

tenglikka egamiz.

V_1 operatorning aniqlanishini hisobga olib, bu tenglikni quyidagicha yozamiz:

$$(V_1 f, g) = \int\limits_{\mathbb{T}} \big(\sin p \int\limits_{\mathbb{T}} \sin s f(s) ds\big) \overline{g(p)} dp.$$

Bundan sinusning analitik funksiya ekanligini e'tiborga olib, $p := s$, $s := p$ almashtirsak,

$$(V_1 f, g) = \int\limits_{\mathbb{T}} f(s) \overline{\big(\sin s \int\limits_{\mathbb{T}} \sin p g(p) dp\big)} ds$$

tenglikka kelamiz. Demak,

$$(V_1 f, g) = (f, V_1 g)$$

kelib chiqdi. Bu esa V_1 operatorning o'z-o'ziga qo'shma operator ekanligini bildiradi.

Xuddi shu kabi V_2 operatorning o'z-o'ziga qo'shmaligini ko'rsatamiz. Natijada

$$(H_{\mu\lambda} f, g) = (H_0 f, g) + \mu(V_1 f, g) + \lambda(V_2 f, g) =$$
$$= (f, H_0 g) + \mu(f, V_1 g) + \lambda(f, V_2 g) = (f, H_{\mu\lambda} g)$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak, $H_{\mu\lambda}$ operator $L_2(\mathbb{T})$ fazoda aniqlangan o'z-o'ziga qo'shma operatorlar oilasiga qarashli ekan.

Lemma isbotlandi. □

Lemma 2.2. *(2.2) formula bilan aniqlangan V_1 va V_2 operatorlar $L_2(\mathbb{T})$ fazoda aniqlangan nomanfiy operatorlar bo'ladi.*

Isbot. Nomanfiy operator ta'rifiga binoan ixtiyoriy $f \in L_2(\mathbb{T})$ uchun $(V_1 f, f) \geqslant 0$ va $(V_2 f, f) \geqslant 0$ ekanligini ko'rsatishimiz lozim.

Haqiqatan ham,

$$(V_1 f, f) = \int\limits_{\mathbb{T}} (V_1 f)(p) \overline{f(p)} dp$$

va bundan (2.2) formulaga asosan

$$(V_1 f, f) = \int\limits_{\mathbb{T}} \big(\sin p \int\limits_{\mathbb{T}} \sin s f(s) ds\big) \overline{f(p)} dp$$

tenglikka egamiz.

Bundan quyidagi tenglikka kelamiz:

$$(V_1 f, f) = \Big(\int\limits_{\mathbb{T}} \sin s f(s) ds\Big)\Big(\int\limits_{\mathbb{T}} \sin p \overline{f(p)} dp\Big).$$

Sinus haqiqiy qiymatli analitik funksiya bo'lganligi uchun so'nggi ifoda

$$(V_1 f, f) = \Big(\int\limits_{\mathbb{T}} \sin s f(s) ds\Big)\overline{\Big(\int\limits_{\mathbb{T}} \sin p f(p) dp\Big)}$$

ko'rinishni oladi. Bundan quyidagi tengsizlikka kelamiz:

$$(V_1 f, f) = \Big|\int\limits_{\mathbb{T}} \sin s f(s) ds\Big|^2 \geq 0, \quad \forall f \in L_2(\mathbb{T}).$$

Demak, V_1 nomanfiy operatorlar sinfiga qarashli. V_2 operatorning nomanfiyligi xuddi shu tarzda isbotlanadi.

Lemma isbotlandi. □

2.3 Ikki fermionli sistemaga mos bir diskret Shredinger operatori Fredgolm determinanti va uning asimptotik yoyilmalari

Endi $H_{\mu\lambda}$ operator Fredgolm determinanti ko'rinishini topamiz. Buning uchun quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$(H_{\mu\lambda} f)(p) = z f(p)$$

(2.1) formulani e'tiborga olsak,

$$\varepsilon(p) f(p) + \mu \sin p \int\limits_{\mathbb{T}} \sin s f(s) ds + \lambda \sin 2p \int\limits_{\mathbb{T}} \sin 2s f(s) ds = z f(p)$$

Chap tomondagi integrallarni

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \sin s f(s) ds = C_1,$$

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \sin 2s f(s) ds = C_2$$

kabi belgilasak, yuqoridagi tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\varepsilon(p) f(p) + \mu \sin p \cdot C_1 + \lambda \sin 2p \cdot C_2 = z f(p)$$

yoki

$$(\varepsilon(p) - z) f(p) = -\mu \sin p \cdot C_1 - \lambda \sin 2p \cdot C_2$$

Bu yerdan $f(p)$ funksiyani topamiz:

$$f(p) = -\frac{C_1 \mu \sin p}{\varepsilon(p) - z} - \frac{C_2 \lambda \sin 2p}{\varepsilon(p) - z}$$

$f(p)$ ning qiymatini C_1 va C_2 integrallarga qo'ysak,

$$C_1 = \int\limits_{\mathbb{T}} \sin s \left(-\frac{C_1 \mu \sin s}{\varepsilon(s) - z} - \frac{C_2 \lambda \sin 2s}{\varepsilon(s) - z} \right) ds$$

$$C_2 = \int\limits_{\mathbb{T}} \sin 2s \left(-\frac{C_1 \mu \sin s}{\varepsilon(s) - z} - \frac{C_2 \lambda \sin 2s}{\varepsilon(s) - z} \right) ds$$

tengliklar hosil bo'ladi. Bu tengliklardan C_1 va C_2 o'zgaruvchili bir jinsli

$$\begin{cases} C_1 \left(1 + \mu \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 s}{\varepsilon(s) - z} ds \right) + C_2 \lambda \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin s \sin 2s}{\varepsilon(s) - z} ds = 0 \\ C_1 \mu \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin s \sin 2s}{\varepsilon(s) - z} ds + C_2 \left(1 + \lambda \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 2s}{\varepsilon(s) - z} ds \right) = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

tenglamalar sistemasiga kelamiz. Bizga ma'lumki, bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi nolmas yechimga ega bo'lishi uchun $\Delta(\mu, \lambda; z)$ asosiy determinant $z \in \mathbb{C} \setminus [0, 2]$ nolga ega bo'lishi zarur va yetarli.

Bu sistema asosiy determinanti

$$a(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 s}{1 - \cos s - z} ds$$

$$b(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 2s}{1 - \cos s - z} ds$$

$$c(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin s \sin 2s}{1 - \cos s - z} ds$$

belgilashlar orqali quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\Delta(\mu, \lambda; z) = \begin{vmatrix} 1 + \mu a(z) & \lambda c(z) \\ \mu c(z) & 1 + \lambda b(z) \end{vmatrix}$$

yoki

$$\Delta(\mu, \lambda; z) = (1 + \mu a(z))(1 + \lambda b(z)) - \mu\lambda (c(z))^2. \tag{2.6}$$

$a(z), b(z)$ va $c(z)$ funksiyalarning qiymatlarini qo'yamiz:

$$\Delta(\mu, \lambda; z) = \left(1 + \mu \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 s}{\varepsilon(s) - z} ds\right) \left(1 + \lambda \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 2s}{\varepsilon(s) - z} ds\right) -$$

$$-\mu\lambda \left(\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin s \sin 2s}{\varepsilon(s) - z} ds\right)^2$$

Bu determinantga $H_{\mu\lambda}$ operatorning Fredgolm determinanti deyiladi.

$\varepsilon(p) = 1 - \cos p$ ekanligini e'tiborga olsak, quyidagi tenglikka kelamiz:

$$\Delta(\mu, \lambda; z) = \left(1 + \mu \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 s}{1 - \cos s - z} ds\right) \left(1 + \lambda \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 2s}{1 - \cos s - z} ds\right) -$$

$$-\mu\lambda \left(\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin s \sin 2s}{1 - \cos s - z} ds\right)^2 \tag{2.7}$$

Endi quyidagi belgilashlar yordamida (2.7) formula ko'rinishini ixchamlashtiramiz:

$$\Delta_1(\mu; z) = 1 + \mu \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 s}{1 - \cos s - z} ds;$$

$$\Delta_2(\lambda; z) = 1 + \lambda \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 2s}{1 - \cos s - z} ds;$$

$$\Delta_3(z) = \left(\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin s \sin 2s}{1 - \cos s - z} ds\right)^2.$$

U holda

$$\Delta(\mu,\lambda;z)=\Delta_1(\mu;z)\cdot\Delta_2(\lambda;z)-\mu\lambda\Delta_3(z)$$

O'z-o'ziga qo'shma $H_{\mu\lambda}$ operatorning xos qiymatlari va $\Delta(\mu,\lambda;z)$ funksiyaning nollari orasidagi bog'liqlikni quyidagi lemma o'rnatadi.

Lemma 2.3. *$z\in\mathbb{C}\setminus[0;2]$ soni $H_{\mu\lambda}$ operatorning xos qiymati bo'lishi uchun $\Delta(\mu,\lambda;z)=0$ bo'lishi zarur va yetarli.*

Lemma 2.4. *Quyidagi asimptotik yoyilmalar o'rinli:*

$$a(z)=1+\sqrt{2}(-z)^{\frac{1}{2}}+(-z)+O(-z)^{\frac{3}{2}},\quad z\to 0-$$

$$b(z)=2+4\sqrt{2}(-z)^{\frac{1}{2}}+6(-z)+O(-z)^{\frac{3}{2}},\quad z\to 0-$$

$$c(z)=1+2\sqrt{2}(-z)^{\frac{1}{2}}+4(-z)+O(-z)^{\frac{3}{2}},\quad z\to 0-$$

$$a(z)=-1+\sqrt{2}(z-2)^{\frac{1}{2}}-(z-2)+O(z-2)^{\frac{3}{2}},\quad z\to 2+$$

$$b(z)=-2+4\sqrt{2}(z-2)^{\frac{1}{2}}+6(z-2)+O(z-2)^{\frac{3}{2}},\quad z\to 2+$$

$$c(z)=1-2\sqrt{2}(z-2)^{\frac{1}{2}}+4(z-2)+O(z-2)^{\frac{3}{2}},\quad z\to 2+$$

Isbot. Avval quyidagi $d(z)$ funksiyaning $z\to 0-$ dagi asimptotik yoyilmasini topamiz:

$$d(z)=\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{1}{1-\cos s-z}ds,\quad z<0$$

Bu integralda

$$\cos s=\frac{e^{is}+e^{-is}}{2}$$

tenglikdan foydalanamiz va o'zgaruvchini $t=e^{is}$ kabi almashtiramiz. Natijada ushbu $dt=2\pi ie^{is}ds,\ ds=-\frac{i}{2\pi t}dt,\ |t|=1$ va

$$d(z)=\int\limits_{|t|=1}\frac{-\frac{i}{2\pi t}dt}{1-\frac{t+\frac{1}{t}}{2}-z}=-\frac{i}{\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{1}{2t-t^2-1-2zt}dt=$$

$$=\frac{i}{\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{1}{t^2+2(z-1)t+1}dt$$

ifodalarga ega bo'lamiz. Endi integral belgisi ostidagi kasr maxrajini ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$d(z) = \frac{i}{\pi} \int\limits_{|t|=1} \frac{1}{(t-t_1)(t-t_2)} dt.$$

Bunda

$$t_{1/2} = -(z-1) \pm \sqrt{(z-1)^2 - 1},$$

ya'ni

$$t_1 = -(z-1) + \sqrt{(z-1)^2 - 1} > 1$$

$$0 < t_2 = -(z-1) - \sqrt{(z-1)^2 - 1} < 1.$$

Ravshanki, $t = t_2$ nuqta $|t| < 1$ sohada yotadi va integral belgisi ostidagi funksiya uchun birinchi tartibli qutb maxsus nuqta bo'ladi. Shuning uchun Koshi tipidagi integralni qoldiqlar nazariyasi bo'yicha hisoblash formulasiga asosan, quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$d(z) = \frac{i}{\pi} \cdot 2\pi i \cdot res|_{t=t_2} \frac{1}{(t-t_1)(t-t_2)} = -\frac{2}{t_2 - t_1} = \frac{2}{t_1 - t_2}$$

t_1, t_2 larning qiymatlarini o'rniga qo'yib, ushbu

$$d(z) = \frac{1}{\sqrt{(z-1)^2 - 1}},$$

yoki bundan

$$d(z) = \frac{1}{\sqrt{-z}\sqrt{-z+2}} = \frac{1}{\sqrt{-z}} f(z) \tag{2.8}$$

tenglikni hosil qilamiz, bu yerda $f(z) = \frac{1}{\sqrt{-z+2}}$.

$f(z)$ funksiyani $z = 0$ nuqtaning biror atrofida Teylor qatoriga yoyamiz:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}(-z) + \frac{3}{32\sqrt{2}}(-z)^2 + ...$$

$f(z)$ uchun olingan bu yoyilmani (2.8) ifodaga qo'ysak, natijada $d(z)$ funksiya uchun quyidagi asimptotik yoyilmaga ega bo'lamiz:

$$d(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1}{1 - \cos s - z} ds = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{-z}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{-z} +$$

$$+\frac{3}{32\sqrt{2}}\sqrt{-z}^3+O(\sqrt{-z}^4), \quad z\to 0-$$

Endi $a(z)$ funksiyani qaraymiz. Bunda

$$\sin^2 s = 1-\cos^2 s = (1-\cos s)(1+\cos s)$$

formuladan foydalansak,

$$a(z)=\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 s}{1-\cos s - z}ds = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{(1-\cos s)(1+\cos s)}{1-\cos s - z}ds$$

tenglikka kelamiz.

Integralosti funksiya suratiga z ni qo'shib-ayirish natijasida $a(z)$ quyidagi

$$a(z)=\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{(1-\cos s - z)(1+\cos s)}{1-\cos s - z}ds + z\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1+\cos s}{1-\cos s - z}ds = \int\limits_{\mathbb{T}}(1+\cos s)ds-$$

$$-z\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1-\cos s - z + z - 2}{1-\cos s - z}ds = 1-z-z(z-2)\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1}{1-\cos s - z}ds.$$

ko'rinishni oladi.

Oxirgi tenglikka $d(z)$ funksiya uchun olingan yuqoridagi asimptotik yoyilmani qo'ysak va mos hadlarni ixchamlashtirsak, $a(z)$ funksiya quyidagi asimptotik qatorga ega bo'ladi:

$$a(z)=1+\sqrt{2}(-z)^{\frac{1}{2}}+(-z)+O(-z)^{\frac{3}{2}}, \quad z\to 0-$$

$b(z)$ funksiyani

$$b(z)=b(0)+b(z)-b(0)$$

ko'rinishda qaraymiz.

Bunda avval $b(0)$ ni hisoblaymiz. Ikkilangan burchak sinusini topish formulasidan foydalanamiz:

$$b(0)=\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 2s}{1-\cos s}ds = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{4\sin^2 s\cos^2 s}{1-\cos s}ds =$$

$$=4\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{(1-\cos s)(1+\cos s)\cos^2 s}{1-\cos s}ds = 4\int\limits_{\mathbb{T}}(1+\cos s)\cos^2 s ds$$

Oxirgi integralni integrallar yig'indisi sifatida qarab, darajani pasaytirish formulalaridan foydalansak, $b(0) = 2$ ekanligiga kelamiz.

$b(z) - b(0)$ ni hisoblaymiz:

$$b(z) - b(0) = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 2s}{1 - \cos s - z} ds - \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 2s}{1 - \cos s} ds =$$

$$= z \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 2s}{(1 - \cos s)(1 - \cos s - z)} ds.$$

Soddalashtirishlardan so'ng quyidagi tenglikka kelamiz:

$$b(z) - b(0) = -2z + 4z(z-2) - 4z^2(z-2) - 4z(z-2) \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1}{1 - \cos s - z} ds -$$

$$-4z^2(z-2)^2 \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1}{1 - \cos s - z} ds.$$

$d(z)$ funksiya asimptotik yoyilmasini e'tiborga olsak,

$$b(z) - b(0) = 4\sqrt{2}\sqrt{-z} - 10(\sqrt{-z})^2 + ...$$

va bundan $b(z)$ funksiya uchun

$$b(z) = 2 + 4\sqrt{2}(-z)^{\frac{1}{2}} + 10(-z) + O(-z)^{\frac{3}{2}}, \quad z \to 0-$$

asimptotik yoyilmaga ega bo'lamiz.

Yuqoridagi kabi hisoblashlar natijasida $c(z)$ funksiya

$$c(z) = 1 + 2z(z-2) + 2z(z-2)(z-1) \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1}{1 - \cos s - z} ds$$

ko'rinishga keladi.

Bunda $d(z)$ funksiya uchun olingan yuqoridagi asimptotik yoyilmani e'tiborga olib, mos hadlarni ixchamlashtirsak, $c(z)$ funksiya quyidagi asimptotik yoyilmaga ega bo'ladi:

$$c(z) = 1 + 2\sqrt{2}(-z)^{\frac{1}{2}} - 4(-z) + O(-z)^{\frac{3}{2}}, \quad z \to 0-$$

Xuddi shu kabi $a(z), b(z), c(z)$ funksiyalarning $z \to 2+$ dagi asimptotik yoyilmalarini topamiz.

Lemma isbotlandi. $\square$

$a(z), b(z)$ va $c(z)$ funksiyalar yoyilmalarini (2.6) ga qo'ysak, $H_{\mu\lambda}$ operator Fredgolm determinanti uchun muhim spektrdan tashqarida quyidagi asimptotik yoyilmalarga ega bo'lamiz:

$$\Delta(\mu, \lambda; z) = 1 + \mu + 2\lambda + \mu\lambda + \sqrt{2}(\mu + 4\lambda + 2\mu\lambda)(-z)^{\frac{1}{2}} + O(-z), \quad z \to 0-;$$

$$\Delta(\mu, \lambda; z) = 1 - \mu - 2\lambda + \mu\lambda + \sqrt{2}(\mu + 4\lambda - 2\mu\lambda)(z-2)^{\frac{1}{2}} + O(z-2), \ z \to 2+$$

2-bob bo'yicha xulosa. Ushbu bob uchta paragrafdan iborat bo'lib, birinchi paragrafda ikki zarrachali bir diskret Shredinger operatori $H_{\mu\lambda} = H_0 + \mu V_1 + \lambda V_2$ kiritilgan. Bunda H_0 - $\varepsilon(p)$ funksiyaga ko'paytirish operatori, V_1 va V_2 lar esa $L_2(\mathbb{T})$ fazoda integral operatorlardir. Ikkinchi paragrafda esa $H_{\mu\lambda}$ operatorning xossalari o'rganilgan. Bu operatorning chiziqli chegaralangan, o'z-o'ziga qo'shma operator ekanligi, V_1 va V_2 operatorlarning nomanfiy operatorlar ekanligi isbotlangan. Uchinchi paragrafda $H_{\mu\lambda}$ operatorga mos Fredgolm determinantining ko'rinishi topilgan va uning muhim spektr chekkalaridagi asimptotik yoyilmalari olingan.

Bob 3

Ikki zarrachali bir diskret Shredinger operatori xos qiymatlari

Bu bob ikkita paragrafdan iborat bo'lib, birinchi paragrafda ikki zarrachali bir diskret Shredinger operatori xos qiymatlarini o'rganish davomida keltirib chiqarilgan lemmalar va ularning isbotlari keltirilgan. Ikkinchi paragrafda berilgan operator xos qiymatlarining muhim spektrdan tashqaridagi soni va joylashuv o'rni bilan bog'liq asosiy natijalarning bayoni va isboti keltirilgan.

3.1 Yordamchi lemmalarning bayoni va isboti

Lemma 3.1. *$\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ bo'lsin. U holda quyidagi tengliklar o'rinli:*

$$\lim_{z\to\pm\infty} \Delta_1(\mu; z) = 1,$$

$$\lim_{z\to\pm\infty} \Delta_2(\lambda; z) = 1,$$

$$\lim_{z\to\pm\infty} \Delta(\mu, \lambda; z) = 1.$$

Isbot. Yuqorida kiritilgan belgilashlarga asosan $\Delta_1(\mu, z)$ va $\Delta_2(\lambda; z)$ funksiyalar quyidagi ko'rinishda edi:

$$\Delta_1(\mu, z) = 1 + \mu \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 s}{1 - \cos s - z} ds,$$

$$\Delta_2(\lambda; z) = 1 + \lambda \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 2s}{1 - \cos s - z} ds.$$

Bunda

$$\lim_{z\to\pm\infty}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\sin^2 s}{1-\cos s-z}ds=0$$

va

$$\lim_{z\to\pm\infty}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\sin^2 2s}{1-\cos s-z}ds=0$$

ekanligidan $\lim\limits_{z\to\pm\infty}\Delta_1(\mu,z)=1$, $\lim\limits_{z\to\pm\infty}\Delta_2(\lambda;z)=1$ larni olamiz.

(2.1) formuladagi integrallarning $z\to\pm\infty$ dagi limitlari nolga tengligidan $\lim\limits_{z\to\pm\infty}\Delta(\mu,\lambda;z)=1$ kelib chiqadi.

Lemma isbotlandi. □

Lemma 3.2. *Quyidagi asimptotik yoyilmalar o'rinli:*

$$\Delta_1(\mu;z)=1+\mu+\sqrt{2}\mu(-z)^{\frac{1}{2}}+O(-z),\quad z\to 0-$$

$$\Delta_2(\lambda;z)=1+2\lambda+4\sqrt{2}\lambda(-z)^{\frac{1}{2}}+O(-z),\quad z\to 0-$$

$$\Delta_1(\mu;z)=1-\mu+\sqrt{2}\mu(z-2)^{\frac{1}{2}}+O(z-2),\quad z\to 2+$$

$$\Delta_2(\lambda;z)=1-2\lambda+4\sqrt{2}\lambda(z-2)^{\frac{1}{2}}+O(z-2),\quad z\to 2+$$

Isbot. (2.6) formulaga asosan quyidagilarga egamiz:

$$\Delta_1(\mu;z)=1+\mu a(z),$$

$$\Delta_2(\lambda;z)=1+\lambda b(z).$$

Bunda $a(z)$ va $b(z)$ funksiyalar o'rniga Lemma 2.4 da berilgan asimptotik yoyilmalarni qo'ysak, $\Delta_1(\mu;z)$ va $\Delta_2(\lambda;z)$ funksiyalar uchun yuqoridagi yoyilmalarni olamiz.

Lemma isbotlandi. □

Lemma 3.3. *Quyidagi asimptotikalar o'rinli:*

(i) Agar $\mu<-1,\quad \lambda<-\frac{1}{2}$ *bo'lsa, u holda*

$$\lim_{z\to 0-}\Delta_1(\mu;z)=c_1<0,$$

$$\lim_{z\to 0-}\Delta_2(\lambda;z)=c_2<0;$$

(ii) Agar $\mu > -1, \quad \lambda > -\frac{1}{2}$ *bo'lsa, u holda*

$$\lim_{z\to 0-} \Delta_1(\mu; z) = c_1' > 0,$$

$$\lim_{z\to 0-} \Delta_2(\lambda; z) = c_2' > 0;$$

(iii) Agar $\mu > 1, \quad \lambda > \frac{1}{2}$ *bo'lsa, u holda*

$$\lim_{z\to 2+} \Delta_1(\mu; z) = c_3 < 0,$$

$$\lim_{z\to 2+} \Delta_2(\lambda; z) = c_4 < 0;$$

(iv) Agar $\mu < 1, \quad \lambda < \frac{1}{2}$ *bo'lsa, u holda*

$$\lim_{z\to 2+} \Delta_1(\mu; z) = c_3' > 0,$$

$$\lim_{z\to 2+} \Delta_2(\lambda; z) = c_4' > 0.$$

Bu lemmaning isboti lemma 3.2 da keltirilgan $\Delta_1(\mu; z)$ va $\Delta_2(\lambda; z)$ funksiyalar asimptotik yoyilmalaridan bevosita kelib chiqadi.

Lemma 3.4. $\Delta(\mu, \lambda; z)$ *funksiya uchun quyidagi tasdiqlar o'rinli:*

(i) $1 + \mu + 2\lambda + \mu\lambda < 0$ *bo'lsin. U holda* $\lim\limits_{z\to 0-} \Delta(\mu, \lambda; z) < 0$

(ii) $1 + \mu + 2\lambda + \mu\lambda > 0$ *bo'lsin. U holda* $\lim\limits_{z\to 0-} \Delta(\mu, \lambda; z) > 0;$

(iii) $1 - \mu - 2\lambda + \mu\lambda < 0$ *bo'lsin. U holda* $\lim\limits_{z\to 2+} \Delta(\mu, \lambda; z) < 0$

(ii) $1 - \mu - 2\lambda + \mu\lambda > 0$ *bo'lsin. U holda* $\lim\limits_{z\to 2+} \Delta(\mu, \lambda; z) > 0.$

Bu lemmaning isboti $\Delta(\mu, \lambda; z)$ funksiya asimptotik yoyilmasidan osongina kelib chiqadi.

3.2 Asosiy natijalarning bayoni va isboti

Teorema 3.1. *Agar $G \subset \mathbb{R}^2$ sohaning biror (μ, λ) nuqtasida $\Delta(\mu, \lambda; z)$ funksiyaning $k(k = 0, 1, 2)$ ta noli bo'lsa, u holda $\Delta(\mu, \lambda; z)$ funksiya butun G sohada $k(k = 0, 1, 2)$ ta nolga ega.*

Isbot. Faraz qilaylik, $\Delta(\mu, \lambda; \cdot)$ uzluksiz funksiya $(\mu_0, \lambda_0) \in \mathbb{G}$ nuqtada $k(k = 0, 1, 2)$ ta nolga ega bo'lsin. $(\mu, \lambda) \in G$ - ixtiyoriy nuqta, $\Gamma[(\mu_0, \lambda_0); (\mu, \lambda)]$ - (μ_0, λ_0) va (μ, λ) nuqtalarni tutashtiruvchi chiziq bo'lsin. $\mathbb{R}^2$ dagi kompaktlik kriteriyasiga asosan $\Gamma[(\mu_0, \lambda_0); (\mu, \lambda)]$ kompakt to'plam bo'ladi. $\Delta(\mu, \lambda; \cdot)$ uzluksiz funksiya bo'lganligi uchun (μ_0, λ_0) nuqtaning kichik atrofida uning nollari soni saqlanib qoladi. $\Gamma[(\mu_0, \lambda_0); (\mu, \lambda)]$ to'plam har bir nuqtasining atrofchalarini qaraymiz. Kompakt to'plam ta'rifiga asosan $\Gamma[(\mu_0, \lambda_0); (\mu, \lambda)]$ to'plamni cheklita ana shunday atrofchalar bilan qoplab olish mumkin. Bundan (μ, λ) nuqtada ham $\Delta(\mu, \lambda; z)$ funksiyaning $k(k = 0, 1, 2)$ ta noli mavjudligi kelib chiqadi. $(\mu, \lambda) \in \mathbb{G}$ nuqtaning ixtiyoriyligidan butun G sohada $\Delta(\mu, \lambda; z)$ funksiyaning $k(k = 0, 1, 2)$ ta noli mavjudligiga kelamiz.

Teorema isbotlandi. □

Quyidagi sohalarni kiritamiz:

$$G_{2-} = \{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : 1 + \mu + 2\lambda + \mu\lambda > 0, \mu < -2,\ \lambda < -1\};$$
$$G_{1-} = \{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : 1 + \mu + 2\lambda + \mu\lambda < 0\};$$
$$G_{0-} = \{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : 1 + \mu + 2\lambda + \mu\lambda > 0, \mu > -2, \lambda > -1;\}$$
$$G_{2+} = \{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : 1 - \mu - 2\lambda + \mu\lambda > 0, \mu > 2, \lambda > 1\};$$
$$G_{1+} = \{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : 1 - \mu - 2\lambda + \mu\lambda < 0\};$$
$$G_{0+} = \{(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : 1 - \mu - 2\lambda + \mu\lambda > 0,\ \mu < 2, \lambda < 1\};$$

Quyidagi chizma orqali yuqorida keltirilgan sohalarni aniqroq tasavvur etish mumkin.

Teorema 3.2. *Quyidagi tasdiqlar o'rinli:*

(i) $(\mu, \lambda) \in G_{2-} \bigcap G_{0+}$ *bo'lsin. U holda* $H_{\mu\lambda}$ *operator muhim spektrdan chapda yotuvchi ikkita xos qiymatga ega;*

(ii) $(\mu, \lambda) \in G_{1-} \bigcap G_{0+}$ *bo'lsin. U holda* $H_{\mu\lambda}$ *operator muhim spektrdan chapda yotuvchi bitta xos qiymatga ega;*

(iii) $(\mu, \lambda) \in G_{1-} \bigcap G_{1+}$ *bo'lsin. U holda* $H_{\mu\lambda}$ *operator muhim spektrdan tashqarida ikkita xos qiymatga ega. Bunda ulardan biri muhim spektrning chap tomonida, ikkinchisi esa o'ng tomonida yotadi ;*

(iv) $(\mu, \lambda) \in G_{0-} \bigcap G_{0+}$ *bo'lsin. U holda* $H_{\mu\lambda}$ *operator muhim spektrdan tashqarida xos qiymatga ega emas;*

(v) $(\mu, \lambda) \in G_{0-} \bigcap G_{1+}$ *bo'lsin. U holda* $H_{\mu\lambda}$ *operator muhim spektrdan o'ngda yotuvchi bitta xos qiymatga ega;*

(vi) $(\mu, \lambda) \in G_{0-} \bigcap G_{2+}$ *bo'lsin. U holda* $H_{\mu\lambda}$ *operator muhim spektrdan o'ngda yotuvchi ikkita xos qiymatga ega.*

Isbot. Avval yuqorida kiritilgan sohalarda $H_{\mu\lambda}$ operatorning xos qiymatlarini qaraymiz.

(1) $(\mu,\lambda)\in G_{2-}=\{(\mu,\lambda)\in\mathbb{R}^2: 1+\mu+2\lambda+\mu\lambda>0, \mu<-2,\ \lambda<-1\}$ bo'lsin.

U holda $\Delta_1(\mu;\cdot)$ va $\Delta_2(\lambda;\cdot)$ funksiyalar $(-\infty;0)$ intervalda monoton kamayuvchi, bundan tashqari Lemma 3.1 va Lemma 3.3 larga asosan quyidagi tengliklarga egamiz:

$$\lim_{z\to-\infty}\Delta_1(\mu;z)=1,\qquad \lim_{z\to-\infty}\Delta_2(\lambda;z)=1,$$

$$\lim_{z\to0-}\Delta_1(\mu;z)=c_1<0,\qquad \lim_{z\to0-}\Delta_2(\lambda;z)=c_2<0.$$

Bundan $\Delta_1(\mu;z)$ va $\Delta_2(\lambda;z)$ funksiyalarning mos ravishda $\zeta_1(\mu)$ va $\zeta_2(\lambda)$ nollari mavjudligi kelib chiqadi.

$\Delta(\mu,\lambda;z)$ funksiyaga $\zeta_1(\mu)$ va $\zeta_2(\lambda)$ nuqtalarni qo'ysak,

$$\Delta(\mu,\lambda;\zeta_1(\mu))=-\mu\lambda(c(\zeta_1(\mu)))^2,$$

$$\Delta(\mu,\lambda;\zeta_2(\lambda))=-\mu\lambda(c(\zeta_2(\lambda)))^2$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

Bu yerdan $\mu<-2,\quad \lambda<-1$ bo'lganda $-\mu\lambda(c(\zeta_1(\mu)))^2<0$ va $-\mu\lambda(c(\zeta_2(\lambda)))^2<0$ ekanligini olamiz.

Demak, $\Delta(\mu,\lambda;z)$ funksiya $(-\infty;0)$ intervalda manfiy qiymatlarni ham qabul qiladi.

Lemma 3.1 va Lemma 3.4 ga asosan $\mu<-2,\quad \lambda<-1$ va $1+\mu+2\lambda+\mu\lambda>0$ shartlar bajarilganda

$$\lim_{z\to-\infty}\Delta(\mu,\lambda;z)=1,$$

$$\lim_{z\to0-}\Delta(\mu,\lambda;z)>0,$$

limitlarga egamiz.

Bulardan $\Delta(\mu,\lambda;z)$ funksiyaning yuqorida berilgan shartlarda ikkita $z_1(\mu,\lambda)$ va $z_2(\mu,\lambda)$ nollari mavjudligi kelib chiqadi.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\zeta_{\min}(\mu,\lambda)=\min\{\zeta_1(\mu),\zeta_2(\lambda)\},$$

$$\zeta_{\max}(\mu,\lambda)=\max\{\zeta_1(\mu),\zeta_2(\lambda)\}.$$

U holda

$$z_1(\mu,\lambda) < \zeta_{\min}(\mu,\lambda) < \zeta_{\max}(\mu,\lambda) < z_2(\mu,\lambda)$$

ga ega bo'lamiz.

Demak, Lemma 2.3 ga ko'ra $(\mu,\lambda) \in G_{2-}$ bo'lganda, $H_{\mu\lambda}$ operatorning muhim spektrdan chapda ikkita xos qiymati mavjud.

(2) $(\mu,\lambda) \in G_{1-} = \{(\mu,\lambda) \in \mathbb{R}^2 : 1+\mu+2\lambda+\mu\lambda < 0\}$ bo'lsin. $(-2,0) \in G_{1-}$ nuqtani olamiz. Bu nuqtani $\Delta(\mu,\lambda;z)$ funksiyaga qo'ysak,

$$\Delta(-2,0;z) = 1 - 2\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 s}{1-\cos s - z} ds$$

ga ega bo'lamiz.

$\Delta(-2,0;z)$ funksiyaning $z \to 0-$ dagi asimptotik yoyilmasini qaraymiz:

$$\Delta(-2,0;z) = -1 - 2\sqrt{2}\sqrt{-z} + O(-z)$$

Yuqoridagilardan

$$\lim_{z\to-\infty} \Delta(-2,0;z) = 1$$

$$\lim_{z\to 0-} \Delta(-2,0;z) = -1 < 0$$

limitlarga egamiz. $\Delta(-2,0;z)$ funksiya $(-\infty,0)$ intervalda monoton kamayuvchi ekanligi va yuqoridagi limitlardan $\Delta(\mu,\lambda;z)$ funksiyaning $(-2,0) \in G_{1-}$ nuqtada bitta noli mavjudligi kelib chiqadi. 3.1-teoremaga ko'ra $\Delta(\mu,\lambda;z)$ ning butun G_{1-} sohada bitta noli mavjud. Demak, $(\mu,\lambda) \in G_{1-}$ bo'lganda, $H_{\mu\lambda}$ operatorning muhim spektrdan chapda bitta xos qiymati mavjud.

(3) $(\mu,\lambda) \in G_{0-}$ bo'lsin. $(0,0) \in G_{0-}$ nuqtani olamiz:

$$\Delta(0,0;z) = 1$$

$\Delta(\mu,\lambda;z)$ funksiya $(0,0) \in G_{0-}$ nuqtada nolga ega emas. 3.1-teoremaga asosan $\Delta(\mu,\lambda;z)$ funksiyaning G_{0-} sohada noli mavjud emas, ya'ni $(\mu,\lambda) \in G_{0-}$ bo'lganda, $H_{\mu\lambda}$ operator muhim spektrdan chapda xos qiymatga ega emas.

(4) $(\mu,\lambda)\in G_{2+}=\{(\mu,\lambda)\in\mathbb{R}^2: 1-\mu-2\lambda+\mu\lambda>0, \mu>2, \lambda>1\}$ bo'lsin.

U holda $\Delta_1(\mu;\cdot)$ va $\Delta_2(\lambda;\cdot)$ funksiyalar $(2;+\infty)$ intervalda monoton o'suvchi, bundan tashqari Lemma 3.1 va Lemma 3.3 larga asosan quyidagi tengliklarga egamiz:

$$\lim_{z\to+\infty}\Delta_1(\mu;z)=1, \quad \lim_{z\to+\infty}\Delta_2(\lambda;z)=1,$$

$$\lim_{z\to2+}\Delta_1(\mu;z)=c_3<0, \quad \lim_{z\to2+}\Delta_2(\lambda;z)=c_4<0.$$

Bundan $\Delta_1(\mu;z)$ va $\Delta_2(\lambda;z)$ funksiyalarning mos ravishda $\zeta_1'(\mu)$ va $\zeta_2'(\lambda)$ nollari mavjudligi kelib chiqadi.

$\Delta(\mu,\lambda;z)$ funksiyaga $\zeta_1'(\mu)$ va $\zeta_2'(\lambda)$ nuqtalarni qo'ysak,

$$\Delta(\mu,\lambda;\zeta_1'(\mu))=-\mu\lambda(c(\zeta_1'(\mu)))^2,$$

$$\Delta(\mu,\lambda;\zeta_2'(\lambda))=-\mu\lambda(c(\zeta_2'(\lambda)))^2$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

Bu yerdan $\mu>2, \quad \lambda>1$ bo'lganda $-\mu\lambda(c(\zeta_1'(\mu)))^2<0$ va $-\mu\lambda(c(\zeta_2'(\lambda)))^2<0$ ekanligini olamiz.

Demak, $\Delta(\mu,\lambda;z)$ funksiya $(2;+\infty)$ intervalda manfiy qiymatlarni ham qabul qiladi.

Lemma 3.1 va Lemma 3.4 ga asosan $\mu>2, \quad \lambda>1$ va $1-\mu-2\lambda+\mu\lambda>0$ shartlar bajarilganda

$$\lim_{z\to+\infty}\Delta(\mu,\lambda;z)=1,$$

$$\lim_{z\to2+}\Delta(\mu,\lambda;z)>0,$$

limitlarga egamiz.

Bulardan $\Delta(\mu,\lambda;z)$ funksiyaning yuqorida berilgan shartlarda ikkita $z_1'(\mu,\lambda)$ va $z_2'(\mu,\lambda)$ nollari mavjudligi kelib chiqadi.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\zeta_{\min}'(\mu,\lambda)=\min\{\zeta_1'(\mu),\zeta_2'(\lambda)\},$$

$$\zeta_{\max}'(\mu,\lambda)=\max\{\zeta_1'(\mu),\zeta_2'(\lambda)\}.$$

U holda

$$z_1'(\mu,\lambda) < \zeta_{\min}'(\mu,\lambda) < \zeta_{\max}'(\mu,\lambda) < z_2'(\mu,\lambda)$$

ga ega bo'lamiz.

Demak, Lemma 2.3 ga ko'ra $(\mu,\lambda) \in G_{2+}$ bo'lganda, $H_{\mu\lambda}$ operatorning muhim spektrdan o'ngda ikkita xos qiymati mavjud.

(5) $(\mu,\lambda) \in G_{1+} = \{(\mu,\lambda) \in \mathbb{R}^2 : 1-\mu-2\lambda+\mu\lambda < 0\}$ bo'lsin. $(2,0) \in G_{1+}$ nuqtani olamiz. Bu nuqtani $\Delta(\mu,\lambda;z)$ funksiyaga qo'ysak,

$$\Delta(2,0;z) = 1 + 2\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 s}{1-\cos s - z} ds$$

ga ega bo'lamiz.

$\Delta(2,0;z)$ funksiyaning $z \to 2+$ dagi asimptotik yoyilmasini qaraymiz:

$$\Delta(2,0;z) = -1 + 2\sqrt{2}\sqrt{z-2} + O(z-2)$$

Yuqoridagilardan

$$\lim_{z\to+\infty} \Delta(2,0;z) = 1$$

$$\lim_{z\to 2+} \Delta(2,0;z) = -1 < 0$$

limitlarga egamiz. $\Delta(2,0;z)$ funksiya $(2,+\infty)$ intervalda monoton o'suvchi ekanligi va yuqoridagi limitlardan $\Delta(\mu,\lambda;z)$ funksiyaning $(2,0) \in G_{1+}$ nuqtada bitta noli mavjudligi kelib chiqadi. 3.1-teoremaga ko'ra $\Delta(\mu,\lambda;z)$ ning butun G_{1+} sohada bitta noli mavjud. Demak, $(\mu,\lambda) \in G_{1+}$ bo'lganda, $H_{\mu\lambda}$ operator muhim spektrdan o'ngda bitta xos qiymatga ega.

(6) $(\mu,\lambda) \in G_{0+}$ bo'lsin. $(0,0) \in G_{0+}$ nuqtani olamiz:

$$\Delta(0,0;z) = 1$$

$\Delta(\mu,\lambda;z)$ funksiya $(0,0) \in G_{0+}$ nuqtada nolga ega emas. 3.1-teoremaga asosan $\Delta(\mu,\lambda;z)$ funksiyaning G_{0+} sohada noli mavjud emas, ya'ni $(\mu,\lambda) \in G_{0+}$ bo'lganda, $H_{\mu\lambda}$ operator muhim spektrdan o'ngda xos qiymatga ega emas.

Bu olingan natijalarga asosan teorema bandlaridagi tasdiqlarning o'rinli ekanligini ko'rsatamiz.

(i) $(\mu, \lambda) \in G_{2-} \bigcap G_{0+}$ bo'lsin. U holda $H_{\mu\lambda}$ operatorning $(\mu, \lambda) \in G_{2-}$ bo'lganda muhim spektrdan chapda ikkita xos qiymatga egaligi va $(\mu, \lambda) \in G_{0+}$ bo'lganda muhim spektrdan o'ngda xos qiymatga ega emasligidan bu sohalar kesishmasida $H_{\mu\lambda}$ operatorning muhim spektrdan chapda yotuvchi faqat ikkita xos qiymatga ega ekanligiga kelamiz.

Teoremaning boshqa bandlaridagi tasdiqlar ham shu kabi ko'rsatiladi. $\square$

3-bob bo'yicha xulosa. Bu bob ikkita paragrafni o'z ichiga oladi. Birinchi paragrafda asosiy natijalarni olish jarayonida ishlatiladigan lemmalar va ularning isbotlari keltirilgan. Ikkinchi paragrafda qaralayotgan ikki zarrachali diskret Shredinger operatorining muhim spektrdan chap va o'ngda xos qiymatlarining mavjudlik masalasi o'rganilgan. Bu operatorning muhim spektrdan tashqaridagi xos qiymatlari soni va joylashuv o'rni operator parametrlarining barcha qiymatlarida tahlil qilingan. $H_{\mu\lambda}$ operator xos qiymatlariga oid dissertatsiyaning asosiy natijalari bayon qilingan va isbotlangan.

XULOSA

Ushbu magistrlik dissertatsiyasida μ va λ haqiqiy parametrlarga bog'liq bo'lgan bir diskret Shredinger operatori $H_{\mu\lambda} = H_0 + \mu V_1 + \lambda V_2$ qaralgan. Ishda bu operatorning xossalari, xos qiymatlarining mavjudlik, xos qiymatlari sonini topish va ularning muhim spektrdan tashqaridagi joylashuv o'rnini aniqlash masalalari o'rganilgan. Dissertatsiyada $H_{\mu\lambda}$ operatorning muhim spektrdan chapda va o'ngda xos qiymatga ega emasligi, faqat bitta yoki ikkita xos qiymatga egaligi operator parametrlariga bog'liq ravishda ko'rsatilgan. Bundan tashqari berilgan operator muhim spektrdan chapda va o'ngda faqat bittadan xos qiymatga ega bo'ladigan parametrlar sohasi ham aniqlangan.

Magistrlik dissertatsiyasining natijalarini olishda funksional analiz, matematik analiz, kompleks o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi, chiziqli operatorlar spektral nazariyasi fanlari metodlaridan foydalanilgan.

Ushbu magistrlik dissertatsiyasida olingan natijalar ilmiy xarakterga ega va bu natijalar Shredinger operatorlarining spektral nazariyasi faniga qo'shilgan hissa bo'ladi.

Magistrlik dissertatsiyasida olingan natijalardan talabalar, magistrantlar va ilmiy xodimlar kvant mexanikasi va qattiq jismlar fizikasidagi ba'zi masalalarni yechishda foydalanishlari mumkin.